UNA MODIFICACIÓN AL MÉTODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Carlos A.M. Salvadó
MERTU/G* y Departamentos de Física y Matemática

En la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, el método de reducción de orden es uno de gran importancia (Hildebrand, 1976; Zill,1997). En ese método, para ecuaciones de segundo orden, se requiere el conocimiento de una solución al problema homogéneo para encontrar la segunda solución. La aplicación tradicional del método consiste en que, una vez encontrada la solución, es necesario probar que las dos soluciones son linealmente independientes. En el proceso que presento a continuación, utilizando el lema de Abel (Apéndice A), garantizaré a priori que las soluciones dadas por este método son linealmente independientes y, por lo tanto, no es necesario demostrarlo.

Considero la ecuación diferencial (1)

(1) $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy(x)}{dx}+a_0(x)y(x)=0\,.$$

El método de reducción de orden (Hildebrand 1976; Zill,1997) requiere que tengamos conocimiento de una de las soluciones de (1). Llamaré a ésta $y_1(x)$. Una segunda solución, $y_2(x)$, se asume que es de la forma

(2) $$y_2(x)=v(x)\;y_1(x).$$

Substituyendo (2) en (1) y dividiendo por y_1 da

(3) $$\frac{v}{y_1}\left(y_1''+a_1y_1'+a_0y_1\right)+v''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+a_1\right)v'=0\,,$$

donde prima y doble prima denotan, respectivamente, derivadas con respecto a x de primer y segundo orden. Sin embargo, como y_1 es una solución de (1), queda solamente la ecuación diferencial

(4) $$v''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+a_1\right)v'=0\,.$$

Encontrando la solución de (4), y el uso de (2), se puede demostrar que y_2 está dada por Hildebrand (1976).

(5) $$y_2(x)=Ay_1(x)\int^{x}\frac{d\xi}{y_1^2(\xi)p(\xi)}+By_1(x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias, y

(6) $$p(\xi)=\exp\left[\int^{\xi}a_1(\eta)d\eta\right].$$

Sin embargo, hasta este punto, el método no garantiza que y_1 y y_2 sean linealmente independientes. Hay que demostrar independencia lineal. Utilizando la Wronskiana (A1):

(7) $$W(y_1,y_2)=\frac{A}{p(x)}\,,$$

como demanda la identidad de Abel (Apéndice A).

En vez del método presentado arriba, inicialmente demandaré que y_1 y y_2 sean linealmente independientes. Sustituyendo en la Wronskiana (A1) y_2 dado en (2), da como resultado

(8) $$v''y_1^2+2v'y_1y_2'=-a_1v'y_1^2\,.$$

Tomando la derivada de (8) con respecto a x, y sustituyendo para W' el resultado dado en (A4), da como resultado la expresión

(9) $$v''y_1^2+2v'y_1y_2'=-a_1v'y_1^2\,.$$

Finalmente, dividiendo (9) por y_1^2 da como resultado una ecuación diferencial idéntica a aquella dada en (4). Esto demuestra que si se asume una función de la

*Medical Entomology Research and Training Unit/Guatemala/ Centers for Disease Control and Prevention/ U.S. Departament of Health and Human Services.

forma dada en (2), resulta en una solución de (1) que es linealmente independiente de y_1, y no hay que demostrarlo.

Apéndice A-La identidad de Abel para ecuaciones de segundo orden

En este apéndice presentaré una derivación de la identidad de Abel, ya que no aparece en muchos textos de ecuaciones diferenciales. Considero la ecuación diferencial dada en (1) y sus dos soluciones que son linealmente independientes: $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Si y_1 y y_2; si son linealmente independientes, entonces deben satisfacer la condición que la Wronskiana debe ser tal que Apendice 1 (A1)

$$\text{(A1)} \quad W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0 \,.$$

Tomando la derivada de (A1) con respecto a x, llega a ser (A2)

$$\text{(A2)} \quad W'(y_1, y_2) = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \,.$$

Introduciendo dentro de (A2) la información de la ecuación diferencial que satisfacen y_1 y y_2 por medio de las relaciones (A3)

$$\text{(A3)} \quad y_i'' = -(a_1 y_i' + a_0 y_i) \quad i = 1{,}2 \,,$$

da como resultado la identidad (A4)

$$\text{(A4)} \quad W'(y_1, y_2) = -a_1 W(y_1, y_2)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden con solución (A5)

$$\text{(A5)} \quad W(y_1, y_2) = A \exp\left[-\int^x a_1(\xi)\, d\xi\right]$$

donde A es una constante arbitraria. La identidad dada en (A5) se conoce como la identidad de Abel, que es de mucha importancia teórica porque enseña que si W no es cero en un punto, no es cero en ningún punto, pero si es cero en un punto, es cero en todo punto. Así, creo haber logrado mi objetivo de presentar una modificación al método de reducción de orden para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.

Bibliografía

Hildebrand, F.B., 1976. **Advanced Calculus for applications**. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Zill, D.G., 1997. **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado**. Editores Internacional Tomos, México.

salvado bianchi@c.net.gt