
Análisis de predictibilidad en el sistema dinámico caótico del péndulo magnético mediante la aplicación de modelos de aprendizaje automático

Pablo Fernando Marroquín Alegre



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Análisis de predictibilidad en el sistema dinámico
caótico del péndulo magnético mediante la
aplicación de modelos de aprendizaje automático**

Trabajo de graduación presentado por
Pablo Fernando Marroquín Alegre
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,

2023

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



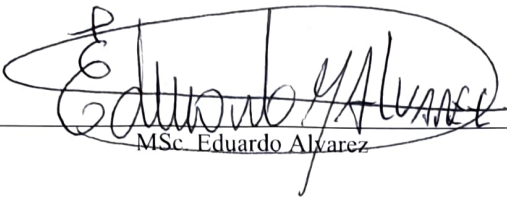
**Análisis de predictibilidad en el sistema dinámico
caótico del péndulo magnético mediante la
aplicación de modelos de aprendizaje automático**

Trabajo de graduación presentado por
Pablo Fernando Marroquín Alegre
para optar al grado académico de Licenciado en Física

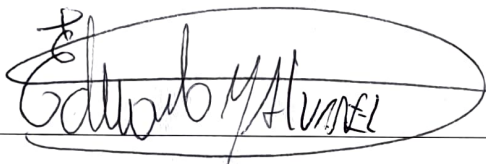
Guatemala,

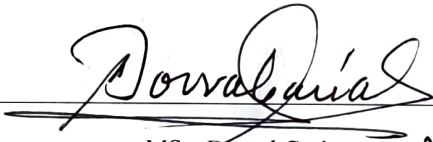
2023

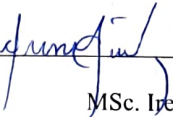
Vo. Bo. :

(f) 
MSc. Eduardo Alvarez

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Eduardo Alvarez

(f) 
MSc. Dorval Carías

(f) 
MSc. Irene Aguilar

Fecha de aprobación: Guatemala, 14 de marzo de 2023.

El presente trabajo de investigación surgió a partir de la experiencia laboral del autor en el área de predicción climatológica, mediante el uso de modelos de aprendizaje automático. El modelaje de fenómenos naturales mediante modelos que no describen de forma directa los fenómenos físicos de los sistemas, motivó a la aplicación de tales métodos y herramientas para el análisis de sistemas físicos de menor escala tales como el péndulo magnético, que comúnmente es objeto de estudio en el área de sistemas caóticos a nivel de licenciatura en Física. De manera que el estudio realizado necesariamente implicó la combinación de conocimientos y técnicas afines tanto a las áreas de ciencia de datos como ciencias físicas, con el fin de evaluar su efectividad en la capacidad de modelaje y predictibilidad de evolución en sistemas caóticos.

Tras la completa realización del presente trabajo de investigación se agradece a:

- MSc. Eduardo Álvarez, por su colaboración como el asesor principal del proyecto y su ayuda en la delimitación del mismo.
- MSc. Irene Aguilar, por su motivación para el estudio de sistemas caóticos y dinámica no lineal a lo largo de los estudios de licenciatura.
- Los padres del autor: MSc. Luis Marroquín y Msc. Lorena de Marroquín, por su incondicional apoyo moral y motivacional para la realización del proyecto.
- Ing. Karen Barahona, por su colaboración como revisora de redacción y presentación general del presente documento.

Prefacio	III
Lista de figuras	VI
Lista de cuadros	VII
Resumen	VIII
1. Introducción	1
2. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos específicos	2
3. Justificación	3
4. Marco teórico	4
4.1. Descripción general de sistemas dinámicos	4
4.2. Descripción general de sistemas caóticos	5
4.3. Sistema de péndulo magnético	6
4.3.1. Ecuaciones de movimiento	7
4.3.2. Comportamiento caótico y puntos de equilibrio	8
4.4. Modelos de aprendizaje automático	9
4.4.1. Modelo <i>Random Forest</i>	10
4.4.2. Modelo <i>K Nearest Neighbors</i>	10
4.4.3. Modelo <i>XG Boost</i>	11
4.4.4. Modelo de <i>Linear Bayesian Regression</i>	12
4.4.5. Métricas de evaluación de modelos	12
4.4.6. Comparación entre modelos	13
5. Antecedentes	15
6. Metodología	17
6.1. Diseño experimental	17
6.1.1. Material y equipo	17
6.1.2. Segmentación y delimitación de experimentos	19
6.2. Procedimiento experimental	20

7. Resultados	23
7.1. Experimentación física con péndulo	23
7.2. Predicciones con modelos de aprendizaje automático	24
8. Discusión y análisis de resultados	28
8.1. Experimentación física con péndulo	28
8.1.1. Implicaciones de condiciones iniciales	28
8.2. Datos experimentales para entrenamiento	29
8.2.1. Implicaciones del instante de medición	29
8.2.2. Implicaciones de herramienta de extracción de datos	29
8.3. Predicciones realizadas por modelos	30
8.3.1. Distribución de los errores	30
8.3.2. Impacto de variable de intervalos	30
8.3.3. Impacto de variable de imanes	31
8.3.4. Impacto de variable de modelos	32
9. Conclusiones	33
10.Recomendaciones	34
11.Bibliografía	35
11.1. Referencias bibliográficas	35
11.2. Referencias de internet	36
12.Anexo A	37
12.1. Archivos de extracción y modelado	37
13.Anexo B	38
13.1. Fotografías de sistema experimental	38

Lista de figuras

Figura	Página
1. Ilustración de configuración de péndulo magnético	7
2. Diseño y medidas de péndulo magnético construido	18
3. Imagen impresa de plano polar con R_0 , R_1 y R_2	18
4. Diagrama de flujo del proceso	21
5. Componente x de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados	23
6. Componente y de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados	24
7. Componente z de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados	24
8. Gráfico de barras de MAPE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo	26
9. Gráfico de barras de MdAPE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo	27
10. Gráfico de barras de MAE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo	27
11. Gráfico de barras de MdAE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo	27
12. Foto de sistema experimental utilizado para experimentos y filmación	38
13. Foto de sistema experimental utilizado para experimentos y filmación	39
14. Vista de cámara A en configuración de 2 imanes	39
15. Vista de cámara B en configuración de 2 imanes	39

Lista de cuadros

Cuadro	Página
1. Cuadro comparativo entre modelos de aprendizaje automático	14
2. Experimentos según cantidad de imanes y posiciones de ángulo azimutal inicial	19
3. MAPE según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir . .	25
4. MdAPE según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir .	25
5. MAE según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir . .	26
6. MdAE según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir . .	26

El estudio se centra en el análisis de predictibilidad de evolución de trayectorias en un péndulo magnético a partir de sus condiciones iniciales empleando modelos de aprendizaje automático. Todos los datos utilizados para las fases de entrenamiento y evaluación del problema fueron obtenidos mediante experimentación física con un péndulo magnético. Tras la realización de todo el proceso de experimentación, entrenamiento y ejecución de predicciones, los resultados de evaluación estadística denotan que no fue posible modelar computacionalmente la evolución del péndulo magnético a partir de las mediciones experimentales realizadas. Teniendo mayoritariamente errores superiores al 5% de error colectivo en medidas de MAPE y MdAPE al incrementar el lapso de tiempo de predicción. Los resultados con mayor grado de exactitud y precisión fueron para aquellos experimentos cuya configuración física consistió de 2 imanes, 1 intervalo de 1/30 s y el modelo *Random Forest* teniendo 1.53% de MdAPE y 6.63% de MAPE según la evaluación estadística de los resultados finales. El estudio tuvo el potencial de mejora aumentando la cantidad de datos experimentales y la realización de una separación no aleatoria de los conjuntos de datos para entrenamiento y evaluación para de evaluar la predictibilidad de trayectorias completas.

CAPÍTULO 1

Introducción

El presente trabajo de investigación tuvo como finalidad establecer las bases para el estudio de sistemas físicos caóticos mediante la aplicación de algoritmos de aprendizaje automático. Con ello analizar la predictibilidad de evolución de trayectorias en un péndulo magnético a partir de sus condiciones iniciales, empleando modelos que no describen de forma directa los fenómenos físicos del sistema. La fuente de datos para el estudio fue una serie de 144 experimentos realizados en un péndulo magnético diseñado y construido para la presente investigación. Los experimentos realizados fueron bajo diversas configuraciones de imanes y condiciones iniciales. Todos los experimentos fueron filmados y pasaron por un proceso de extracción de datos de sus componentes de posición, velocidad y aceleración a formato numérico. Posteriormente se utilizó tales datos para entrenar cuatro modelos de aprendizaje automático, implementados utilizando *Python*, para evaluar el grado de exactitud y precisión correspondientes predicciones del movimiento.

Tras la revisión de todo el trabajo realizado durante las fases de diseño y construcción del sistema experimental, ejecución y filmación de experimentos, extracción y transformación de datos, entrenamiento y generación de predicciones con de modelos de aprendizaje automático y evaluación estadística de todos los resultados; se concluyó que, a partir de condiciones iniciales, los modelos de aprendizaje automático no fueron capaces de predecir de la evolución de trayectorias en un péndulo magnético. El grado de exactitud y precisión de las predicciones fueron dependientes de todas las variables presentes en cada escenario: configuración de imanes, cantidad de intervalos y modelo de aprendizaje automático. No fue posible modelar computacionalmente la evolución de un sistema dinámico a partir de mediciones experimentales. Sin embargo, fue posible realizar un análisis estadístico profundo respecto de la predictibilidad de evolución de trayectorias en un péndulo magnético con modelos que no describen de forma directa los fenómenos físicos del sistema.

2.1. Objetivo general

Establecer las bases para el estudio de sistemas físicos caóticos mediante la aplicación de algoritmos de aprendizaje automático.

2.2. Objetivos específicos

- Modelar computacionalmente la evolución de un sistema dinámico a partir de mediciones experimentales.
- Evaluar el grado de exactitud y precisión correspondientes a predicciones del movimiento de un péndulo magnético para un conjunto de modelos de aprendizaje automático.
- Analizar la predictibilidad de evolución de trayectorias en un péndulo magnético a partir de sus condiciones iniciales, empleando modelos que no describen de forma directa los fenómenos físicos del sistema.

Todo fenómeno natural es descrito científicamente mediante la aplicación de modelos matemáticos desarrollados a partir de investigación teórica o experimental de un sistema dado. En ciencias físicas, el grado de complejidad matemática de dichos modelos es ampliamente variable acorde a las leyes y principios correspondientes a la rama bajo la cual se esté realizando el análisis respectivo. El presente trabajo de investigación se centrará en un sistema tanto física y matemáticamente complejo mediante análisis no determinístico. La complejidad física de éste radica en que el sistema combina de forma directa principios de mecánica y electromagnetismo clásicos. La complejidad de descripción matemática radica en que su evolución es altamente variable y sensible a condiciones iniciales, categorizándolo como un sistema caótico. Dicho sistema corresponde al péndulo magnético.

Por otra parte, el estudio de sistemas dinámicos y caóticos requiere necesariamente de la implementación de herramientas computacionales que permitan registrar y analizar los resultados de evolución de los sistemas. Sin embargo, la complejidad de análisis en sistemas caóticos es generalmente mucho mayor que el estudio de sistemas determinísticos dado que no evolucionan acorde a tendencias o patrones identificables. Razón por la cual, requiere de la implementación de algoritmos especializados que sean capaces de identificar, replicar e inclusive predecir dichos comportamientos. Un conjunto de dichos algoritmos corresponde a aquellos implementan formas de inteligencia artificial, denominados modelos de aprendizaje automático.

Por consiguiente, el presente trabajo de investigación se enfocará en analizar la predictibilidad del sistema dinámico caótico del péndulo magnético mediante la aplicación de modelos de aprendizaje automático. Esto con el objetivo de presentar una alternativa en el estudio de predictibilidad de otros sistemas caóticos asociados a la cotidianidad tales como fenómenos climatológicos, interacción en entornos biológicos, entre otros.

4.1. Descripción general de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es cualquier tipo de sistema físico, biológico, económico, entre otros, donde la evolución en el tiempo está descrito a través de ecuaciones u operadores de evolución. Estos constituyen un conjunto de reglas deterministas que indican de qué manera el estado actual del sistema está determinado por su estado inmediatamente anterior. El estado de un sistema se describe mediante un conjunto de variables llamadas coordenadas o variables de estado [2]. Debido a la naturaleza determinista de la ley, regla u operador de evolución, se debe enfatizar que el sistema dinámico propuesto se describe mediante una ecuación matemática definida.

Un ejemplo simple corresponde a un modelo poblacional. Considere $P(t)$ la población personas en una región determinada. El número de personas en dicha población a medida que transcurre el tiempo viene dado por la ecuación de evolución:

$$P(t) = P_0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (4.1)$$

donde λ corresponde a un factor de aumento por unidad de tiempo y P_0 a la población en el instante inicial t_0 [12]. De manera que la cantidad total de personas para un instante arbitrario t se ve directamente afectada por su estado inicial en el instante t_0 .

Para cada sistema dinámico, la evolución de un estado a otro se da acorde a la forma como el operador evalúe los intervalos de tiempo, ya sea de forma discreta o continua. Para un sistema dinámico sujeto a intervalos discretos de tiempo, se toma el estado actual como parámetro de entrada del operador de evolución. A partir de ello se produce el valor o estado de salida, el cual consecuentemente se convierte en la entrada para obtener el siguiente de manera secuencial. El modelo poblacional expuesto previamente ejemplifica un operador de evolución que puede ser utilizando en intervalos discretos tales que $t_n = t_0 + n\Delta t$ para una cantidad discreta n de evoluciones intermedias. De manera que en el instante inicial $P(t_0)$ se tiene una cantidad inicial de personas P_0 , aplicando (4.1) se tiene que

$$P_1 = P(t_1) = P_0 e^{\lambda(t_1-t_0)}$$

tal que el valor resultante P_1 actúa como valor de entrada nuevamente para el modelo tal que

$$P(t_2) = P_1 e^{\lambda(t_2 - t_1)}$$

de manera que el modelo en (4.1) puede ser aplicado de forma discreta tal que

$$P(t_n) = P_i e^{\lambda(t_n - t_i)} \quad \forall n, i \in \mathbb{N} \quad |i < n \quad (4.2)$$

Por otra parte en sistemas dinámicos con intervalos continuos de tiempo, los operadores de evolución comúnmente están dados por ecuaciones diferenciales, las cuales modelan de manera adecuada el cambio instantáneo de una o varias variables respecto del tiempo según sea el caso [3].

Por ejemplo, suponga que se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial y_0 . ¿Cuál es la posición $y(t)$ del objeto respecto del suelo al en el instante t ? La velocidad (v) y aceleración (a) del objeto son la primera y segunda derivada de la posición respectivamente. Suponiendo la dirección hacia arriba como positiva y que las únicas dos fuerzas aplicadas sobre el objeto son la fuerza gravitatoria ($F_g = mg$) y la fuerza resistiva del viento $F_v = -kv$ (con coeficiente de amortiguamiento viscoso k) [12]. Entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que

$$ma = mg - kv \quad \text{o} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt} \quad (4.3)$$

El modelo (4.3) puede ser evaluado para una cantidad infinita de diferenciales de tiempo dt hasta alcanzar el instante de interés t . Nótese que en dicho modelo, la evolución de la variable posición depende directamente de la evolución de las variables velocidad y aceleración. Dado que físicamente las variaciones dadas ocurren de forma instantánea, el modelo se aplica de manera continua.

De la aplicabilidad de los modelos, cabe destacar que en el modelo (4.2) la evolución del sistema corresponde a una cantidad escalar. No obstante, los sistemas dinámicos pueden ser igualmente aplicados cantidades vectoriales tales como la posición y velocidad de un cuerpo, cuyas componentes evolucionan en el tiempo, tal como se muestra en el modelo (4.3).

4.2. Descripción general de sistemas caóticos

El término *caos* aplicado a ciencias físicas y matemáticas refiere al comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con alta sensibilidad a las condiciones iniciales. La característica más relevante de la dinámica caótica es su extrema sensibilidad a minúsculas variaciones en las configuraciones iniciales [10]. De manera que dos sistemas con condiciones muy similares pero distintas por al menos una mínima diferencia, resultan en funciones tales que su evolución diverge de manera radical una respecto de la otra. Por ejemplo, dos trayectorias de partículas que inician a partir de coordenadas cercanas pero se separan progresivamente con una distancia que crece exponencialmente en el tiempo [8].

Es relevante destacar que, a pesar de su aparente impredecibilidad, el caos es un fenómeno determinista, en el que la evolución del sistema viene dada en todo momento por un sistema de ecuaciones u operadores definidos matemáticamente de forma determinística. Considere el caso de un mapeo discreto de estados s_n que evolucionan secuencialmente aplicando la función f tal que

$$s_{n+1} = f(s_n) \quad (4.4)$$

Los estados s_n pueden representar cualquier variable física de un sistema. Por ejemplo, sea s_0 la posición inicial de un objeto en un sistema dinámico. De manera que la progresión de estados

está dada por $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$. De forma similar, sea $\tilde{s}_0 = s_0 + \delta s_0$ el estado inicial del mismo objeto pero con una minúscula variación δs_0 en las condiciones iniciales respecto de s_0 . Por lo que la progresión de estados para dicho caso está dado por $\{\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n\}$. A partir de la relación

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n &= s_n + \delta s_n = f(s_{n-1} + \delta s_{n-1}) \\ &= f(s_{n-1}) + f'(s_{n-1}) \delta s_{n-1} + \dots\end{aligned}$$

por consiguiente, una aproximación lineal de la desviación para el n -ésimo estado corresponde a

$$\delta s_n = f'(s_{n-1}) \delta s_{n-1}$$

empleando la relación anterior de forma recursiva n veces resulta

$$\delta s_n = f'(s_{n-1}) f'(s_{n-2}) \cdots f'(s_0) \delta s_0 = \prod_{k=0}^{n-1} f'(s_k) \delta s_0. \quad (4.5)$$

Los valores $f'(s_k)$ representan una medida de variación entre s_n y \tilde{s}_n en el n -ésimo estado. En el caso particular de un movimiento periódico, la secuencia de estados s_k es constante y por consiguiente

$$f'(s_{n-1}) = f'(s_{n-2}) = \cdots = f'(s_0)$$

resultando entonces

$$|\delta s_n| = |f'(s_0)|^n |\delta s_0| = e^{n\sigma} |\delta s_0| \quad (4.6)$$

donde

$$\sigma = \ln |f'(s_0)|.$$

El exponente característico σ refleja la *tasa de crecimiento* de una perturbación. Nótese que inclusive en el caso de una órbita no periódica, el exponente σ se puede utilizarse para dar una medida de un valor medio. La medida σ se denomina exponente de Lyapunov de una secuencia de puntos s_n es

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta s_n}{\delta s_0} \right| \quad (4.7)$$

reemplazando con la definición en (4.5) y aplicando la regla de la multiplicación para el logaritmo se reescribe

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ln |f'(s_l)| \quad (4.8)$$

Un sistema dinámico con un exponente de Lyapunov positivo ($\sigma > 0$) se denomina caótico. Como se mencionó previamente, la evolución en tales sistemas son extremadamente sensibles a minúsculas variaciones en sus condiciones iniciales [2]. Entre los ejemplos más comunes de dichos sistemas corresponden al péndulo doble, el péndulo magnético, entre otros.

4.3. Sistema de péndulo magnético

Como se mencionó en el apartado anterior, el péndulo magnético corresponde a un sistema dinámico caótico. El sistema consiste en una varilla rígida ligera con su extremo superior en un eje de rotación fijo que le permite rotar libremente en ángulos polar $[0^\circ, 360^\circ)$ y azimutal $[0^\circ, -180^\circ)$. En el extremo inferior de la varilla se encuentra un imán permanente colgando sobre una superficie lisa.

En dicha superficie se ubican otros imanes permanentes en una configuración arbitraria. Por acción de la fuerza magnética, los imanes en la superficie repelen o atraen al imán colgante. De acuerdo con la orientación de los polos se dará la dirección de la fuerza magnética dada por estos, resultando en un efecto de repulsión si el imán colgante está alineado con su polo norte en la parte inferior y los imanes en la placa con sus polos norte en la parte superior. El mismo efecto de repulsión ocurre si todos los imanes están orientados únicamente en su polo sur. De forma contraria, al invertir la orientación únicamente de los imanes en la superficie o únicamente el colgante, tal que los imanes tengan polos opuestos, habrá una fuerza magnética de atracción [22].

Por consiguiente, el péndulo magnético es descrito por principios de electromagnetismo clásico, específicamente la fuerza magnética de imanes permanentes. Por acción de dicha fuerza se produce el movimiento de un cuerpo acorde a principios de mecánica clásica, específicamente la descripción de trayectorias y evolución dinámica del sistema. Con base en lo anterior, se evidencia que el péndulo magnético puede ser descrito de forma determinística a partir del planteamiento físico de las ecuaciones de movimiento del cuerpo.

4.3.1. Ecuaciones de movimiento

La trayectoria del imán I en la parte inferior de la varilla se da en el espacio tridimensional (x, y, z) y se proyecta hacia abajo sobre el plano horizontal P . El eje de rotación de la varilla se fija a una altura H sobre el centro de P , tal que en el equilibrio $H = L + h$, donde L es el largo de la varilla y h la diferencia de altura entre I y P . A continuación, se examinará un ejemplo puntual de configuración de los imanes en P para la obtención de sus ecuaciones de movimiento.

Considere una configuración de tres imanes que forman un triángulo equilátero tal que sus vértices A_1, A_2, A_3 se encuentran en una circunferencia de radio unitario en P . Se toma P como el nivel de referencia con $y = 0$. Sea $\vec{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ el vector posición de I . Suponiendo que se busca analizar para el caso en que $L \gg h$, implica que puede existir movimiento en las direcciones x y y con una variación vertical $\Delta z \approx 0$. De manera que $z \approx h$ en todo momento tal que $\vec{s}(t) = (x(t), y(t), h)$.

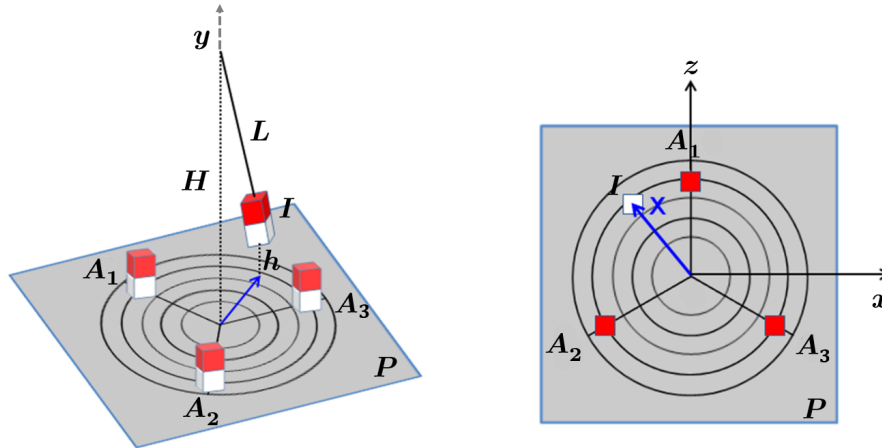


Figura 1. Ilustración de configuración de péndulo magnético. Referencia en [22].

Existen tres factores que tienen efecto sobre el movimiento del péndulo, de manera debe considerarse el efecto de las siguientes tres fuerzas:

1. Fuerza gravitatoria: mediante una aproximación lineal, puede representarse como una fuerza

restauradora $F_g \propto -\vec{s}$ tal que atrae el péndulo hacia la posición de equilibrio en $\vec{s} = (0, 0, 0)$.

2. Fuerza disipativa del aire: de forma similar a lo anterior, mediante una aproximación lineal puede representarse como una fuerza no conservativa $F_a \propto -d\vec{s}/dt$
3. Fuerza magnética: según investigaciones previas [5] la mejor aproximación para la fuerza magnética en imanes permanentes $F_m \propto 1/D^4$, donde D es la distancia entre el imán del péndulo con cada imán en P .

Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta que actúa sobre I corresponde a

$$\begin{aligned}\sum F &= F_g + F_a + F_m \\ m \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} &= F_g + F_a + F_m \\ m \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} &= k_g\vec{s} + k_a \frac{d\vec{s}}{dt} + \sum_{n=1}^3 \frac{k_m}{(\vec{A}_n - \vec{s})^4}\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde k_g, k_a, k_m representan las constantes de proporcionalidad de la fuerza gravitatoria, la fuerza resistiva del aire y la fuerza magnética respectivamente. Nótese que el denominador asociado al término de la fuerza magnética es distinto de cero en todo momento dado que siempre existe una diferencia de alturas entre \vec{A}_n y \vec{s} [22].

4.3.2. Comportamiento caótico y puntos de equilibrio

Según se ha demostrado experimentalmente en investigaciones previas [5] los exponentes de Lyapunov satisfacen las condiciones de un sistema caótico. Dada la extensión de sus investigaciones únicamente se hará énfasis en que los resultados que se demostraron experimentalmente que el péndulo magnético exhibe exponentes de Lyapunov de tiempo finito positivos ($\sigma > 0$) y de tipo fractal.

Nótese que la ecuación (4.9) de evolución del sistema está matemáticamente definida de forma analítica, implicando una evolución determinística del sistema dinámico. Sin embargo, como se mencionó en la sección 4.2, el comportamiento caótico implica que la trayectoria de I es extremadamente sensible a las condiciones iniciales de posición, velocidad y aceleración

$$\begin{aligned}\vec{s}(0) &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}(0) &= \frac{d\vec{s}}{dt}(0) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) \\ \vec{a}(0) &= \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}(0) = (a_{x_0}, a_{y_0}, a_{z_0})\end{aligned}$$

tales que una mínima variación en cualquiera de dichos parámetros iniciales produce una diferencia radical en la evolución del sistema, resultando en una trayectoria completamente distinta. No obstante, la evolución del sistema inevitablemente tiende a converger hacia alguno de los *puntos de equilibrio* del sistema cuando $t \rightarrow \infty$ [3].

Los puntos de equilibrio, también conocidos como atractores de punto fijo, se definen como aquellos puntos tales que $\vec{s} = \vec{s}_{eq}$ que no cambian en el tiempo, dado que la velocidad y la aceleración

de I son cero en dichos puntos. De manera que $\frac{d}{dt}\vec{s}_{\text{eq}} = (0, 0, 0)$ y $\frac{d^2}{dt^2}\vec{s}_{\text{eq}} = (0, 0, 0)$. Por lo tanto, para el ejemplo en cuestión, se tienen cuatro puntos de equilibrio. Tres de ellos en las coordenadas (x, y) sobre cada uno de los imanes (a una altura h según la longitud de la varilla y separación de la base) y el cuarto punto justo en el centro del plano cuando la varilla está en reposo.

$$\begin{aligned}
 \vec{s}_{\text{eq}1} &= (A_{1x}, A_{1y}, h) \\
 \vec{s}_{\text{eq}2} &= (A_{2x}, A_{2y}, h) \\
 \vec{s}_{\text{eq}3} &= (A_{3x}, A_{3y}, h) \\
 \vec{s}_{\text{eq}4} &= (0, 0, h_0)
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

4.4. Modelos de aprendizaje automático

El aprendizaje automático, comúnmente conocido como *machine learning*, se define como una rama de la inteligencia artificial que brinda a las computadoras la capacidad de aprender automáticamente a partir de un conjunto de datos y experiencias pasadas para identificar patrones y hacer predicciones con una intervención humana mínima [1]. Los métodos de aprendizaje automático permiten que las computadoras funcionen de forma autónoma sin programación explícita. Estas aplicaciones se alimentan con grandes volúmenes de datos y pueden aprender, crecer, desarrollarse y adaptarse de forma independiente. El aprendizaje automático obtiene información detallada de grandes volúmenes de datos al aprovechar los algoritmos para identificar patrones y aprender en un proceso iterativo. Los algoritmos de aprendizaje automático utilizan métodos de cálculo para aprender directamente de los datos y actuar como una función generalizada que pueda servir como modelo en lugar de depender de una ecuación predeterminada [11].

Un modelo de aprendizaje automático es capaz de identificar patrones o tomar decisiones tras *entrenar* con un conjunto de datos desconocidos y realiza una predicción o estimación. Se denomina *entrenamiento*, al proceso en que el algoritmo se optimiza numéricamente para encontrar ciertos patrones o resultados del conjunto de datos. La forma de su entrenamiento depende de diversos factores, tales como el mecanismo de aprendizaje, la aleatorización de la optimización, los *hiperparámetros* de su configuración, entre otros. Los hiperparámetros refieren a las configuraciones básicas de cada modelo, por ejemplo: cantidad de iteraciones de entrenamiento, ramificaciones en árboles de decisiones, aleatoriedad de selección de muestras, entre otros. Los hiperparámetros modificables son propios del diseño de cada modelo. Posteriormente el modelo es *evaluado*, durante la evaluación al algoritmo se le introduce un conjunto de datos que son ajenos a aquellos de su entreno. De manera que pueda ser objetivamente verificado que éste es capaz de identificar los patrones o tendencias y no únicamente replicar información previa [6].

Una de las formas más comunes de estos algoritmos se encuentra dentro de un conjunto denominado aprendizaje supervisado. En el aprendizaje automático supervisado, el algoritmo recibe un conjunto de datos de entrada y se recompensa u optimiza para cumplir con un conjunto de resultados específicos. Por ejemplo, el aprendizaje automático supervisado se implementa ampliamente para predicciones climatológicas, tendencias en mercados, clasificación de escenarios de acuerdo con condiciones, etc. Algunos ejemplos comunes incluyen Random Forest, Bayesian Regression, XG Boost, entre otros [1].

4.4.1. Modelo *Random Forest*

Random Forest es uno de los algoritmos de aprendizaje automático más utilizado por profesionales en el campo de la ciencia de datos dado que permite resolver tanto problemas de regresión y clasificación. Se basa en el *aprendizaje conjunto*, que combina la salida de múltiples árboles de decisión para llegar a un único resultado. Este se predice tomando el promedio de las salidas. El *bosque* generado por el algoritmo se entrena mediante técnicas de optimización de las ramificaciones que lo convierten en una herramienta práctica y flexible para proporcionar soluciones a problemas complejos. Este algoritmo erradica las limitaciones de un algoritmo de árbol de decisión común, reduciendo el sobreajuste de los conjuntos de datos. Además, es capaz de generar predicciones con alto grado de precisión sin requerir de volúmenes extensivos de datos [14].

Como se mencionó anteriormente, el Random Forest está construido sobre el funcionamiento de múltiples árboles de decisiones. Estos funcionan a través de preguntas básicas de las cuales se pueden derivar una serie de otras preguntas para determinar una respuesta. Dichas preguntas forman los llamados *nodos de decisión* y su función es ser un medio para dividir los datos. Las respuestas o decisiones tomadas por las preguntas anteriores se llaman *nodos hoja* [11]. Entonces, al sumar múltiples árboles de decisiones en el algoritmo de Random Forest, se crea una predicción de resultados más precisa; en especial cuando los árboles individuales no están relacionados entre sí. Además de que proporciona una forma eficaz de manejar información faltante.

El modelo Random Forest puede utilizarse para la resolución de dos tipos de problemas, clasificación y regresión. Una regresión en Random Forest sigue el concepto de una regresión lineal simple. Se selecciona una variable dependiente (las características) y variables independientes según el modelo deseado. Esta regresión puede ser ejecutada mediante herramientas como *R* o *Python*. En una regresión de Random Forest, cada árbol de decisión produce una predicción específica. La predicción media de los árboles individuales es el resultado de la regresión. Aunque la regresión lineal y la regresión en Random Forest siguen el mismo concepto, difieren en cuanto a los términos de funciones. Si bien una regresión lineal usa el modelo de $y = ax + b$, la función de una regresión lineal en Random Forest es más parecida a una *caja negra* [17]. En la cual se analiza un sistema que se puede ver en términos de sus entradas y salidas, sin conocimiento alguno de su funcionamiento interno. Cabe mencionar que, este método suele no ser ideal para fines de una extrapolación puesto que no se usan los valores más allá del rango de observación en el período de entrenamiento.

4.4.2. Modelo *K Nearest Neighbors*

K Nearest Neighbors, comúnmente abreviado KNN, es un método *no generalizado* de aprendizaje automático que utiliza una medida N-dimensional de *distancia* para hacer clasificaciones o predicciones sobre la agrupación de un punto de datos individuales. Se llaman *no generalizado* debido a que *recuerda* (replica) todos sus datos de entrenamiento. Si bien se puede usar para problemas de regresión o clasificación, generalmente se usa como un algoritmo de clasificación, partiendo de la suposición de que se pueden encontrar puntos similares cerca uno del otro. Su principio de operación es encontrar un número predefinido de muestras de entrenamiento más cercanas en *distancia* al nuevo punto y predecir la clasificación a partir de ellas. El número de muestras k puede ser una constante o variar según la densidad de puntos [16]. La distancia puede ser, en general, cualquier medida métrica como, por ejemplo: la distancia de Manhattan, Minkowski, Euclidiana, entre otras. La mayor parte de implementaciones del algoritmo suelen emplear como métrica la distancia Euclidiana. No obstante, la elección de la métrica debe ser acorde a las dimensiones sobre las cuales se busquen las diferencias entre muestras del conjunto.

El modelo KNN puede utilizarse para la resolución de dos tipos de problemas: clasificación y regresión. En problemas de clasificación en función de un voto de la mayoría, es decir, se utiliza la clasificación que tenga mayor cantidad de *puntos cercanos* en un subconjunto de k puntos. La elección óptima del valor de k depende en gran medida de los datos. En general, una mayor k disminuye los efectos del ruido, pero hace que los límites de clasificación sean menos claros. Por otra parte, el algoritmo de regresión usa en casos en que los datos de los problemas contienen variables continuas en lugar de discretas. A diferencia de los problemas de clasificación, en los problemas de regresión se toma el promedio de los k para hacer una predicción sobre una clasificación. En este caso, cada punto vecino aporta de manera uniforme a la clasificación de un punto [18]. Es muy beneficioso cuando se tienen puntos muy lejanos que se necesita que aporten a la regresión.

La selección del valor k es crucial para la efectividad del modelo, puesto que se puede cometer el error de un ajuste excesivo (*overfitting*) o insuficiente (*underfitting*). Valores bajos de k pueden tener una varianza alto, pero un sesgo bajo. Mientras que valores grandes de k pueden generar un sesgo alto y una varianza más baja. IBM, en su artículo *What is the K-nearest neighbors algorithm?* detalla que la elección de k dependerá en gran medida de los datos de entrada, ya que los datos con más valores atípicos o ruido probablemente funcionarán mejor con valores más altos de k [16]. En general, recomiendan tener un número impar de k para evitar empates en la clasificación.

4.4.3. Modelo *XG Boost*

XG Boost refiere a *Extreme Gradient Boosting*, es un algoritmo de predicción escrito que resulta de optimizar el entrenamiento de *Gradient Boosting*. *Boosting* es una técnica de aprendizaje automático que busca reducir los errores en la predicción de datos a través de la construcción de un clasificador fuerte a partir de varios clasificadores débiles. En primer lugar, se construye un modelo a partir de los datos de entrenamiento. Un segundo modelo será construido para corregir los errores del primero, y así sucesivamente hasta que se logra un modelo que pronostica correctamente los datos de entrenamiento. Ahora, *Gradient Boosting*, es un algoritmo de impulso muy poderoso que trabaja de la misma manera que *Boosting*, con la capacidad de minimizar los errores agregando *weak learners* utilizando un algoritmo de optimización de descenso de gradiente. En el aumento de gradiente, cada predictor corrige el error de su predecesor [20]. Esto permitió que la técnica abarque no solo problemas de clasificación, sino también de regresión.

XG Boost es un algoritmo en el que los árboles de decisión se crean de forma secuencial utilizando el procedimiento de Gradient Boosting. Se le asigna un peso de importancia a cada una de las variables independientes que serán introducidas en el árbol de decisiones para predecir los resultados [19]. El algoritmo permite con esto evitar el sobreajuste y, el pronóstico adecuado de los datos faltantes. El algoritmo crea modelos más precisos de los datos de entrenamiento a medida que corrige los errores de los modelos anteriores. Para motivos de compresión del algoritmo, puede dividirse en 4 pasos fundamentales:

1. Se asigna un peso de importancia o ponderación a cada una de las muestras, para que luego sean ingresadas a un primer algoritmo; el cual se denomina “algoritmo base”. Este hará predicciones para cada una de las muestras.
2. El algoritmo de XG Boost evalúa las predicciones del modelo creado y asignará nuevas ponderaciones a las muestras con mayor error o según el rendimiento del modelo.
3. Con las nuevas ponderaciones, el algoritmo pasa los datos al siguiente árbol de decisión.
4. El algoritmo repetirá los pasos 2 y 3 hasta que se consiga un error por debajo de un límite asignado.

En problemas de predicción con datos no estructurados, este algoritmo tiende a superar a los demás algoritmos ya conocidos, pero cuando se introducen datos estructurados/tabulares XG Boost es de las primeras consideraciones con las que trabajan los científicos de datos dado que presenta una de las herramientas con la mejor combinación de rendimiento de predicción y tiempo de procesamiento en comparación con otros algoritmos [1].

4.4.4. Modelo de *Linear Bayesian Regression*

La regresión bayesiana es un modelo muy utilizado en aprendizaje automático para obtener predicciones de valores continuos (números reales). Su principio de estudio proviene de la ya conocida, regresión lineal simple, en el que se asume que una variable respuesta y es la combinación lineal de un conjunto de variables predictoras x [15]. La fórmula completa también incluye un término de error para representar el ruido de muestreo aleatorio de la forma

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \epsilon. \quad (4.11)$$

Desde el punto de vista de la regresión bayesiana, se usa una distribución previa de referencias sobre coeficientes, que proporcionará una conexión entre las soluciones frecuentistas (regresión lineal simple) y las respuestas basadas en el Teorema de Bayes (probabilidades). Es decir, se formula una regresión lineal utilizando distribuciones de probabilidad en lugar de estimaciones puntuales. La variable respuesta y , no se estima con un valor único, sino que se supone que se extrae de una distribución de probabilidad [13].

El objetivo de la regresión lineal bayesiana no es encontrar el mejor conjunto de parámetros del modelo, sino determinar la distribución probabilística que describe los parámetros del modelo. Ésta está dada por una probabilidad condicional de la forma

$$P_i(\beta_i | y, x) = \frac{P_i(y | \beta_i, x) * P(\beta_i | x)}{P_i(y | x)} \quad (4.12)$$

donde, $P(y | \beta, x)$ es la probabilidad de los datos y $P(\beta | x)$ la probabilidad previa de los parámetros. $P(y | x)$ es la constante de normalización [15]. Es importante resaltar que a medida que se aumente el número de datos, en proporción aumentará la probabilidad y esta será mayor que el valor anterior. Entonces, la regresión comienza con una estimación inicial y a medida que se recopila más evidencia, el modelo se vuelve menos erróneo. Sin embargo, para que este modelo funcione es necesaria una gran cantidad de datos de entrenamiento.

4.4.5. Métricas de evaluación de modelos

Existen diversas métricas empleadas para evaluar la exactitud y precisión de modelos de aprendizaje automático al momento de realizar predicciones de cualquier naturaleza. Específicamente para evaluar predicciones realizadas por modelos de regresión, comúnmente se utilizan métricas numéricas de error colectivo tales como el MAPE, MdAPE, MAE, MdAE, entre otras. Donde cada una de las anteriores corresponde a:

- MAPE: Media del error porcentual absoluto
- MdAPE: Mediana del error porcentual absoluto
- MAE: Media del error absoluto

-
- MdAE: Mediana del error absoluto

Tanto la media y la mediana de una distribución de números son medidas estadísticas de tendencia central. No obstante existe una diferencia conceptual entre ellas. La media es una medida de *magnitud* de la distribución mientras que la mediana es una medida de *posición* central dentro de la distribución [21]. De manera que, al calcular la media para distribuciones donde existen datos atípicos, estos conducen a una distorsión de aumento o disminución del valor numérico de la media dado el peso numérico de dichos puntos atípicos. Por el contrario, la mediana al ser una medida de posición no se ve afectada por la presencia de puntos atípicos.

Otra consideración relevante es el uso de mediciones del error absoluto ignorando la dirección del error, es decir, si una predicción fue errónea por subestimación o sobreestimación. Cuando en la métrica del error sí se considera la dirección, entonces en el cálculo de la media hay errores negativos y positivos (de subestimación o sobreestimación respectivamente) que se cancelan mutuamente. De forma similar, cuando se considera la dirección del error en el cálculo de la mediana, la distribución presenta errores positivos y negativos, de manera que la mediana se encuentra en el centro pero no agrega valor estadístico sobre la calidad de las predicciones. Por consiguiente, la medición del error absoluto permite que ambas mediciones (media y mediana) presenten adecuadamente la información sobre la distribución de los errores [21].

Para ejemplificar lo anterior, se supone que un modelo de aprendizaje automático realiza tres predicciones para la posición de un cuerpo en metros. Y se supone que tras realizar tales predicciones se tiene un conjunto errores $\{0.11\text{m}, 0.13\text{m} -0.12\text{m}\}$ la media de estos será 0.04m lo cual modifica la magnitud de la media, distorsionando la información de dicha métrica. Mientras que la mediana sería 0.11m. Si se toman los valores absolutos de tal distribución $\{0.11\text{m}, 0.13\text{m} 0.12\text{m}\}$, entonces la media y mediana serían ambas 0.12m lo cual representa sin distorsión a la distribución de valores con ambas métricas.

4.4.6. Comparación entre modelos

Cada modelo de aprendizaje automático aborda las fases de entrenamiento y predicción de manera específica acorde a sus características de diseño y optimización. A continuación el Cuadro 1 presenta de forma comparativa las características entre los modelos desarrollados en las subsecciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

Modelo	Tipo	Ventajas	Desventajas
<i>Random Forest</i>	Aprendizaje por conjuntos	<ul style="list-style-type: none"> • Puede manejar tanto tareas de clasificación como de regresión. • Funciona bien con conjuntos de datos grandes. • Reduce el riesgo de sobreajuste al combinar múltiples árboles de decisión. 	<ul style="list-style-type: none"> • Puede ser lento en conjuntos de datos muy grandes. • Requiere más memoria que los árboles de decisión individuales. • Puede ser difícil interpretar los resultados.
<i>Bayesian Regression</i>	Regresión lineal probabilística	<ul style="list-style-type: none"> • Puede manejar datos ruidosos y valores faltantes. • Proporciona una interpretación probabilística del modelo. • Puede incorporar conocimientos previos en el modelo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Supone que los datos siguen una relación lineal. • Puede no funcionar bien cuando la relación entre las variables es no lineal.
<i>K Nearest Neighbors</i>	Aprendizaje basado en instancias	<ul style="list-style-type: none"> • Puede manejar tanto tareas de clasificación como de regresión. • Puede manejar datos ruidosos y valores faltantes. • Puede adaptarse fácilmente a nuevos datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Puede ser sensible a la elección de la métrica de distancia. • Puede ser lento en conjuntos de datos grandes. • Puede no funcionar bien cuando los datos tienen una alta dimensionalidad.
<i>XG Boost</i>	Impulso de gradiente	<ul style="list-style-type: none"> • Funciona bien con conjuntos de datos estructurados y no estructurados. • Puede manejar valores faltantes y valores atípicos. • Puede manejar conjuntos de datos desequilibrados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Puede sobreajustarse si los hiperparámetros no se ajustan correctamente. • Puede ser lento en conjuntos de datos grandes. • Requiere ajuste cuidadoso de los hiperparámetros.

Cuadro 1. Cuadro comparativo entre modelos de aprendizaje automático.

A partir de la década de 2010, ha crecido rápidamente el campo de investigación científica en estudios de la aplicación de modelos de aprendizaje automático para la modelación y predicción en sistemas caóticos. No obstante, ninguno de dichos estudios aborda de forma específica al péndulo magnético como se ha desarrollado en el presente trabajo de investigación. A continuación se presenta un conjunto de dichos estudios:

1. Científicos de la Universidad de Maryland, emplearon las primeras pruebas aplicando el algoritmo de aprendizaje automático “*reservoir computing*” para la predicción de un sistema caótico arquetípico llamado la Ecuación de Kuramoto – Sivashinsky que sirve como un banco de pruebas para estudiar turbulencia y el caos espacio-temporal. Este estudio logró que los datos de entrenamiento evolucionaran la predicción hasta ocho tiempos Lyapunov en el futuro. Esto era ocho veces más de lo que permitían los métodos de predicción anteriores. Referencia en [23].
2. Holger Kantz, un teórico del caos en el Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems en Dresden, Alemania; expresó que es impresionante el hecho del que el algoritmo no sabe nada sobre la ecuación de Kuramoto – Sivashinsky, solo ve datos registrados sobre la evolución de la solución a la ecuación. Esto hace que el enfoque de los modelos de Machine Learning sean poderosos, y en la mayoría de los casos, las ecuaciones que describen un sistema caótico no se conocen entre sí, lo que dificulta los esfuerzos de los especialistas en dinámica para modelarlos y predecirlos. Referencia en [9].
3. Por otro lado, un algoritmo llamado “*Delay based artificial neural network*”, cuyo propósito es clasificar patrones con variaciones proporcionales de sus variables dependientes e independientes y , modelar cada una de las etapas de la red de datos; ha sido utilizado para analizar señales de flujo turbulento obtenidas por un anemómetro de hilo caliente en un cilindro circular. Los valores del número de Reynolds (parámetro que indica si un flujo es laminar o turbulento) van desde 2000 hasta 8000, correspondiente a flujos de transición tardía o completamente turbulentos. El algoritmo basado en el retardo entrenable, es capaz de obtener de forma autónoma la dimensión de incrustación, así como el retraso de incrustación normalizado y permite realizar predicciones a corto y largo plazo. Referencia en [4].
4. En sistemas hidrológicos se ha utilizado con bastante precisión el modelo de RBFNN (*Radial Basics Function Neural Network*), en especial, para estimar la serie temporal hidrológica no lineal del río Meking en Tailandia y Laos, el río Chao Phraya en Tailandia y la superficie del

mar. Además, Sahoo, G. de la Universidad de California, se aplicó un modelo dinámico no lineal empírico, estadístico y caótico para pronosticar la temperatura de la corriente de agua a partir de la radiación solar disponible y la temperatura del aire en la cuenca del lago Tahoe, California, Nevada, Estados Unidos. Referencia en [7].

6.1. Diseño experimental

6.1.1. Material y equipo

Se utilizó una computadora laptop marca *hp* con las siguientes especificaciones

- Procesador Core i7
- 4 núcleos
- 16.0 Gb de memoria RAM
- Sistema operativo *Windows 10*
- Instalación de *Anaconda* con *Python 3.8*
- Instalación de *Tracker 6*

Para la construcción de un péndulo magnético (Figura 2) se utilizaron los siguientes materiales

- Base inferior de madera de 17 cm de largo y 15 cm de ancho.
- Brazo vertical de madera de 22 cm de altura.
- Brazo horizontal de madera de 7.5 cm de largo.
- 2 ganchos circulares de 1.0 cm de diámetro.
- 1 imán superior de neodimio de 0.8 cm de diámetro.
- 4 imanes inferiores de neodimio de 1.5 cm de diámetro.
- 1 varilla cilíndrica de madera de 18 cm de largo y 0.7 cm de diámetro.

- 2 planchas de poliestireno de 30 cm de largo y 15 cm de ancho.
- Papel de color rosado fluorescente.
- Impresión en papel de planos polares con líneas de referencia cada 15° (ángulo polar) y con círculos en radios
 - $R_0 = 1.5$ cm
 - $R_1 = 3.3$ cm
 - $R_2 = 4.9$ cm

Para la filmación de experimentos se utilizaron las cámaras de dos teléfonos celulares

- Samsung S20
- Samsung A20

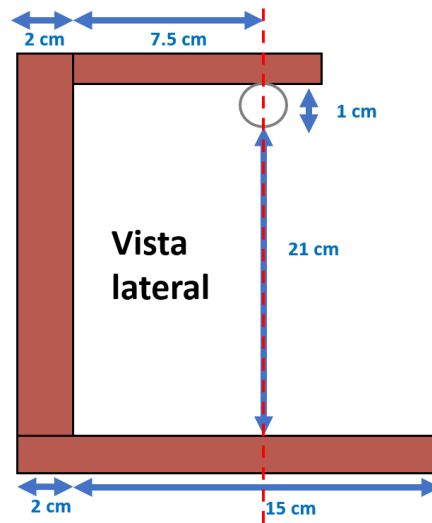


Figura 2. Diseño y medidas de péndulo magnético construido.

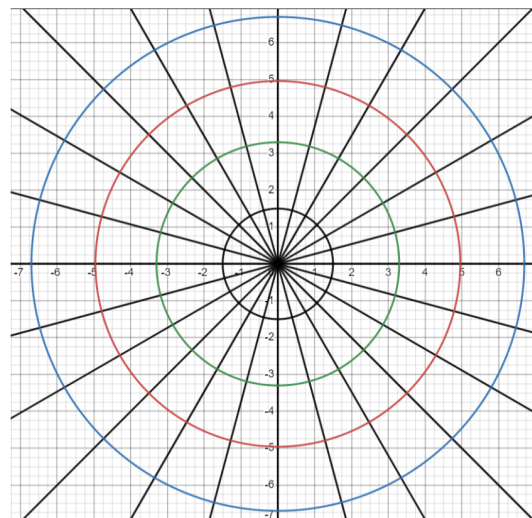


Figura 3. Imagen impresa de plano polar con R_0 (negro), R_1 (verde) y R_2 (rojo). Línea azul únicamente para referencia.

6.1.2. Segmentación y delimitación de experimentos

En el péndulo magnético existen un amplio conjunto de factores que pueden ser manipulables al realizar experimentos:

1. Cantidad de imanes inferiores
2. Orientación de polos de imanes (superior/inferiores)
3. Tamaño de imanes
4. Largo de la varilla
5. Configuración de imanes inferiores
6. Componentes de posición inicial
7. Componentes de velocidad inicial
8. Componentes de aceleración inicial

Cada uno de los factores puede ser modificado en una amplia variedad de opciones de manera que la cantidad total de experimentos si se utilizan todas las posibles configuraciones de factores es infinita (contable). Nótese el término *infinito* es debido a que cada uno los factores 4,5,6,7 y 8 (de la lista indicada) puede darse en una cantidad infinita de opciones. Por consiguiente, se optó por realizar conjuntos de experimentos tales que los factores 2,3,4,7 y 8 permaneciesen constantes, mientras que 1, 5 y 6 fuesen variables:

1. Cantidad de imanes inferiores: véase cuadro 2
2. Orientación de polos de imanes: opuestos
3. Tamaño de imanes: 1.5 cm
4. Largo de la varilla: 18 cm
5. Configuración de imanes inferiores: sobre circunferencia de radio R_0 .
6. Componentes de posición inicial: véase cuadro 2
7. Componentes de velocidad inicial: $(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, 0)$ m/s
8. Componentes de aceleración inicial: $(a_x, a_y, a_z) = (0, 0, 0)$ m²/s

No.	Cantidad de imanes inferiores	Ángulo azimutal inicial
1	2	10°
2	2	15°
3	3	10°
4	3	15°
5	4	10°
6	4	15°

Cuadro 2. Conjuntos de experimentos según cantidad de imanes y posiciones de ángulo azimutal inicial. Ángulos polares iniciales desde 0° hasta 360° en variaciones de 15°.

Se realizaron 6 conjuntos de 24 experimentos de la siguiente forma. Los ángulos azimutales descritos en el Cuadro 2 fueron medidos con respecto de la vertical formada por la varilla del péndulo en reposo y formando los radios R_1 y R_2 respecto del origen (ver Nota 1 en *notas*). Cada conjunto consistió de 24 experimentos en los cuales a partir de un ángulo polar inicial 0° se modificó iterativamente en 15° , de forma tal que se evaluaran escenarios con posiciones iniciales al rededor de los 360° del sistema. Por consiguiente, la cantidad total de experimentos es $6 \times 24 = 144$.

6.2. Procedimiento experimental

- 1) Construir del péndulo magnético acorde a las especificaciones en sección 6.1.1. Colocar una tira de papel rosado fluorescente (de 1 cm de ancho) en la punta de la varilla para posteriormente facilitar el uso de *auto-tracking* durante la fase de extracción. Véase *Anexo B* para observar el sistema experimental construido.
- 2) Realizar 144 experimentos acorde con las especificaciones en Cuadro 2
 - I) Armar la configuración de imanes inferiores. Las tres configuraciones sobre el la circunferencia de 1.5 cm fueron:
 - 2 imanes: en ángulos 0° y 180° .
 - 3 imanes: en ángulos 0° , 120° y 240° .
 - 4 imanes: en ángulos 0° , 90° , 180° y 270° .
 - II) Atar un hilo corto, delgado y ligero a la punta de la varilla. Esto para colocar manualmente el péndulo los ángulos polar y azimutal iniciales empleando la técnica descrita en el apartado anterior.
 - III) Soltar péndulo partiendo del reposo e iniciar filmación (a 30 fps) del péndulo en dos planos ortogonales (simultáneamente) durante un tiempo mínimo de 15 segundos o hasta que el sistema se encuentre en oscilaciones consistentes y de amplitud monótonamente decreciente sobre un punto crítico de la configuración. Véase *Anexo B* para observar el posicionamiento de las cámaras en la filmación.
- 3) Utilizar *Tracker*, para extraer datos numéricos a formato *csv* de las tres componentes de posición, velocidad y aceleración (en los 30 segundos) para los 144 videos. Para el *auto-tracking* se utiliza como imagen la tira de papel rosado. El ancho de tal papel también es utilizado como objeto de referencia para calibrar las medidas longitudinales de *Tracker* en cada video.
- 4) Utilizar Python 3.8, para elaborar un programa que realice las siguientes tareas:
 - I) Leer los datos en formato *csv* y convertir a *Pandas dataframe*.
 - II) Unificar los datos y dar formato en 10 columnas $[t|x|y|z|v_x|v_y|v_z|a_x|a_y|a_z]$
 - III) Crear 4 modelos: *Random Forest*, *Bayesian Regression*, *K-nearest neighbors*, *XG Boost*.
 - IV) Entrenar cada modelo con el 80% de datos seleccionados de manera aleatoria. Se entrena utilizando los modelos con sus hiperparámetros base.
 - V) Realizar predicción de las componentes de posición (x, y, z) para el 20% de los datos restantes.
 - VI) Almacenar las predicciones en archivos con formato *csv* para documentación y evaluación posterior. Los archivos se guardaron bajo la nomenclatura 'I2_R1_G0.csv' que significa: 2 imanes, radio 1 y posición inicial en 0 grados; y seguidamente el mismo patrón para cada una de las configuraciones de imanes, radios y ángulos iniciales.
 - VII) Evaluar estadísticamente las medidas: MAPE, MdAPE, MAE, MdAE.
 - VIII) Repetir los pasos del IV al VII modificando las configuraciones de imanes y la cantidad de intervalos (hasta $N \leq 3$) entre los registros predictores y el instante a predecir.

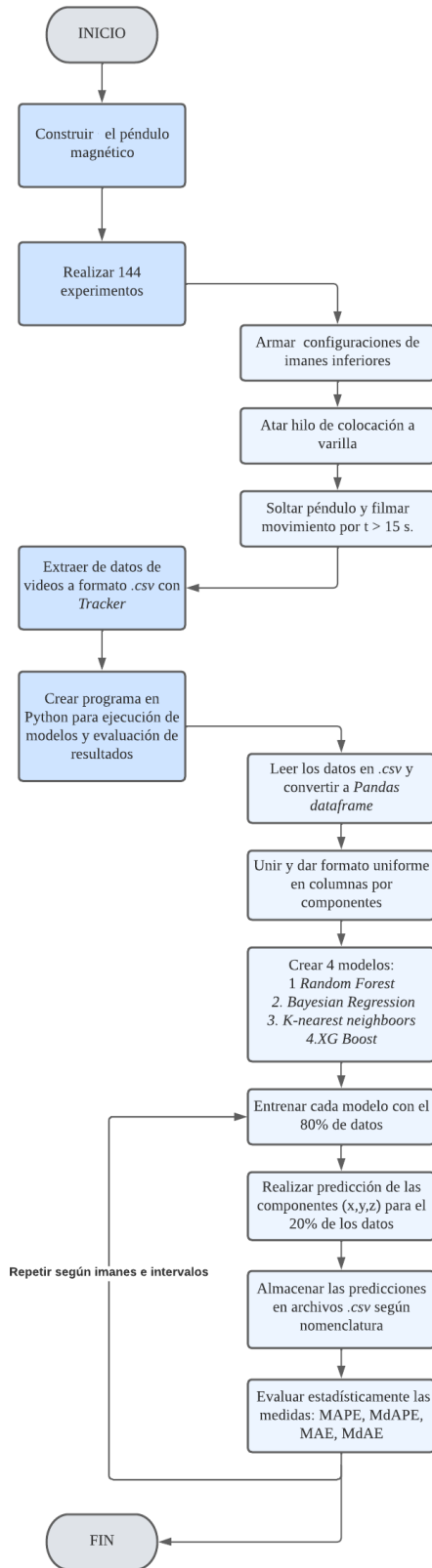


Figura 4. Diagrama de flujo del proceso.

Notas

Nota 1: En el punto 1, el largo L de la varilla se vuelve 19 cm al añadir un gancho circular con el que se sujeta al otro gancho circular en el brazo superior del péndulo.

Nota 2: En el punto 2.III, en cada experimento se soltó manualmente el péndulo a partir del reposo de forma las condiciones iniciales de velocidad y aceleración permaneciesen constantes. Para garantizar la exactitud de la posición inicial en la que se soltó el péndulo en cada experimento, se ató un hilo corto, delgado y ligero a la punta de la varilla. Se jaló dicho hilo hasta ubicar al imán del péndulo sobre el punto inicial correspondiente con vista aérea (vista perpendicular al plano de los imanes).

Nota 3: En el punto 3, como parte de las funcionalidades de *auto-tracking* de *Tracker*, el programa realiza interpolaciones lineales para aquellos *frames* donde sea incapaz de identificar el objeto de referencia

Nota 4: En el punto 4.VIII, N intervalos significa que dado el registro de un instante T , el modelo debe ser capaz de predecir lo que ocurre en el instante $T + N\Delta T$ segundos en el futuro sin acceso a los registros en dados entre $(T, T + N\Delta T)$ sino únicamente aquellos entre $[0, T]$.
Donde $\Delta T = 1/30$ s.

7.1. Experimentación física con péndulo

Todas las mediciones realizadas en *Tracker* de las componentes de posición, velocidad y aceleración de todos los experimentos se encuentran disponibles según se especifica la sección de *Anexos*.

A continuación se muestran un ejemplo de las componentes de posición para el experimento con configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados, donde R_1 y R_2 representan los radios de la posición inicial.

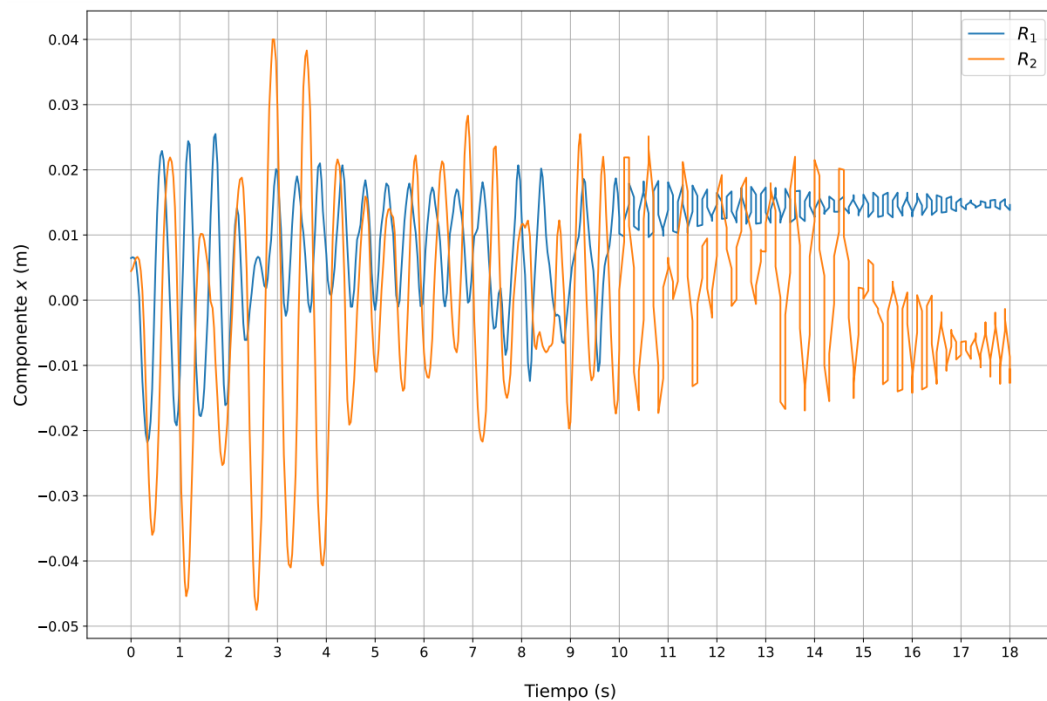


Figura 5. Componente x de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados.

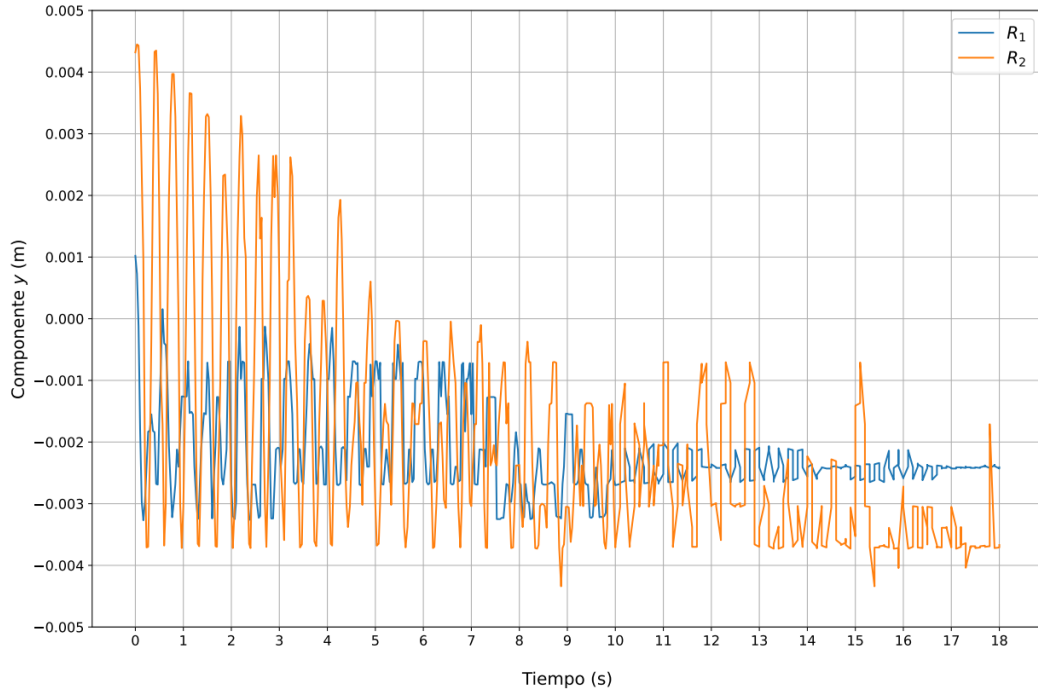


Figura 6. Componente y de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados.

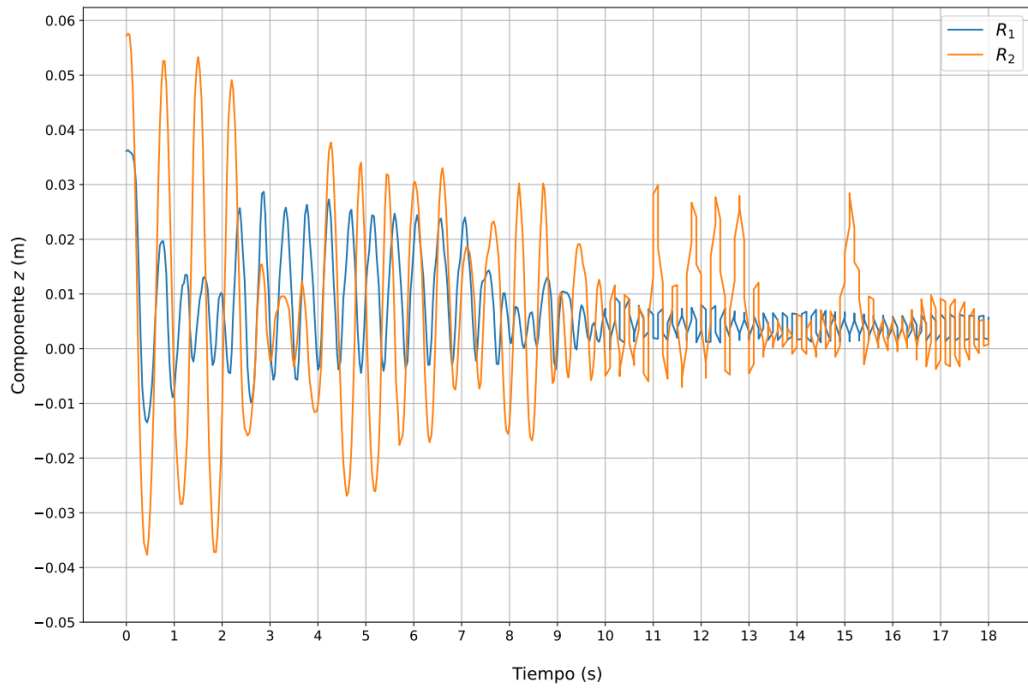


Figura 7. Componente z de posición en configuración de 3 imanes y ángulo inicial en 0 grados.

7.2. Predicciones con modelos de aprendizaje automático

Para los siguientes cuadros se consideran las variables:

- Imanes: cantidad de imanes en el plano situado debajo del péndulo, colocados según la sección *Procedimiento experimental*.
- Intervalos: brecha de períodos de 1/30 s en el futuro que se desea predecir a partir de un registro dado según se explica en sección *Procedimiento experimental*.
- Componente: componente del vector posición $\vec{s} = (x, y, z)$ que se está prediciendo. Tales componentes se consideraron acorde a Figura 1.
- RFO: abreviatura de modelo *Random Forest*.
- LBR: abreviatura de modelo *Linear Bayesian Regression*.
- KNN: abreviatura de modelo *K-nearest neighbors*.
- XGB: abreviatura de modelo *XG Boost*.

		MAPE (%)											
		Componente x				Componente y				Componente z			
Imanes	Intervalos	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN
2	1	33.97	31.60	33.14	323.66	21.71	29.14	29.02	169.08	6.63	6.45	7.27	120.06
2	2	38.84	122.72	43.54	219.91	32.60	40.11	36.42	201.84	110.68	40.55	51.63	691.36
2	3	70.35	447.31	78.46	201.45	163.36	153.10	133.28	581.86	56.31	148.69	47.49	940.61
3	1	13.69	11.81	14.85	266.15	43.66	51.42	48.50	191.59	46.32	111.65	53.64	505.61
3	2	33.66	43.93	30.54	216.53	83.29	100.31	94.68	229.19	60.14	345.86	66.53	443.24
3	3	61.30	150.27	66.00	352.09	84.48	77.02	77.61	212.51	112.98	896.60	126.10	443.88
4	1	14.55	16.43	27.34	259.46	19.69	26.49	24.78	84.18	25.71	21.00	34.34	368.56
4	2	41.84	60.43	44.74	283.40	28.58	41.48	28.69	102.63	112.04	197.28	109.27	510.86
4	3	88.32	177.35	80.53	288.85	46.49	58.57	46.14	122.42	72.81	146.14	80.40	225.53

Cuadro 3. Media del error porcentual absoluto según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir.

		MdAPE (%)											
		Componente x				Componente y				Componente z			
Imanes	Intervalos	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN
2	1	4.31	4.62	5.69	69.24	2.80	4.57	4.76	30.27	1.53	1.67	2.04	72.20
2	2	9.44	27.00	9.83	76.96	4.19	5.72	5.85	31.11	3.09	9.63	3.39	74.66
2	3	14.23	73.48	17.12	51.16	6.93	10.48	8.62	31.34	4.22	30.41	6.11	77.01
3	1	2.51	2.11	3.07	73.58	5.44	7.39	6.82	31.74	3.18	7.92	3.67	70.57
3	2	5.81	10.50	6.07	79.93	7.36	9.48	8.67	34.22	7.39	20.41	6.88	82.07
3	3	9.57	29.59	11.25	82.40	12.53	17.35	13.25	33.91	12.36	55.40	13.99	81.49
4	1	2.87	2.54	3.67	57.92	3.29	5.25	4.41	20.83	3.25	2.80	4.63	57.50
4	2	6.77	10.33	6.91	67.62	4.77	7.37	5.80	23.23	7.75	9.92	7.76	74.10
4	3	12.69	27.70	13.49	72.20	9.11	13.29	9.62	24.18	14.22	27.63	14.17	79.51

Cuadro 4. Mediana del error porcentual absoluto según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir.

		MAE (m)											
		Componente x				Componente y				Componente z			
Imanes	Intervalos	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN
2	1	0.0005	0.0003	0.0004	0.0042	0.0002	0.0003	0.0002	0.0014	0.0018	0.0007	0.0017	0.0207
2	2	0.0007	0.0016	0.0008	0.0049	0.0003	0.0004	0.0003	0.0014	0.0031	0.0033	0.0028	0.0220
2	3	0.0012	0.0043	0.0013	0.0045	0.0004	0.0007	0.0005	0.0014	0.0041	0.0095	0.0038	0.0223
3	1	0.0003	0.0003	0.0004	0.0067	0.0002	0.0002	0.0002	0.0008	0.0028	0.0022	0.0032	0.0329
3	2	0.0007	0.0012	0.0007	0.0076	0.0002	0.0003	0.0003	0.0009	0.0053	0.0062	0.0049	0.0362
3	3	0.0013	0.0032	0.0014	0.0080	0.0004	0.0005	0.0004	0.0009	0.0072	0.0166	0.0067	0.0370
4	1	0.0003	0.0003	0.0003	0.0047	0.0002	0.0002	0.0002	0.0008	0.0003	0.0003	0.0004	0.0047
4	2	0.0007	0.0009	0.0007	0.0058	0.0002	0.0003	0.0003	0.0009	0.0007	0.0009	0.0007	0.0059
4	3	0.0013	0.0024	0.0013	0.0063	0.0004	0.0005	0.0004	0.0009	0.0013	0.0023	0.0012	0.0065

Cuadro 5. Media del error absoluto según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir.

		MdAE (m)											
		Componente x				Componente y				Componente z			
Imanes	Intervalos	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN	RFO	LBR	XGB	KNN
2	1	0.0002	0.0002	0.0002	0.0026	0.0001	0.0001	0.0001	0.0009	0.0002	0.0002	0.0002	0.0081
2	2	0.0003	0.0011	0.0003	0.0027	0.0001	0.0001	0.0002	0.0009	0.0004	0.0012	0.0004	0.0086
2	3	0.0005	0.0030	0.0006	0.0014	0.0002	0.0003	0.0002	0.0009	0.0005	0.0035	0.0008	0.0091
3	1	0.0002	0.0002	0.0003	0.0057	0.0001	0.0002	0.0001	0.0007	0.0002	0.0007	0.0003	0.0055
3	2	0.0005	0.0009	0.0005	0.0065	0.0002	0.0002	0.0002	0.0008	0.0005	0.0018	0.0005	0.0064
3	3	0.0008	0.0027	0.0009	0.0069	0.0003	0.0004	0.0003	0.0008	0.0009	0.0047	0.0010	0.0068
4	1	0.0002	0.0002	0.0003	0.0039	0.0001	0.0001	0.0001	0.0006	0.0002	0.0002	0.0003	0.0038
4	2	0.0005	0.0007	0.0005	0.0048	0.0001	0.0002	0.0002	0.0007	0.0005	0.0007	0.0005	0.0047
4	3	0.0008	0.0020	0.0009	0.0051	0.0002	0.0004	0.0003	0.0007	0.0009	0.0019	0.0009	0.0050

Cuadro 6. Mediana del error absoluto según cantidad de imanes, intervalos, modelo y componente de posición a predecir.

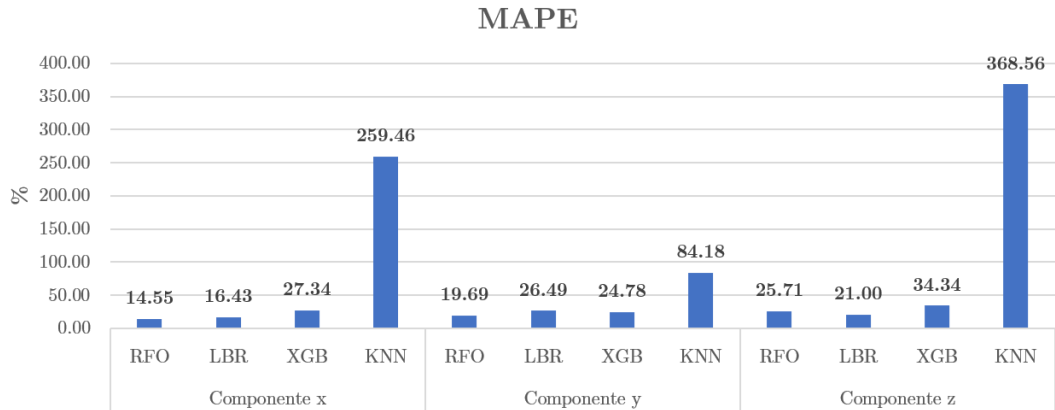


Figura 8. Gráfico de barras de MAPE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo.

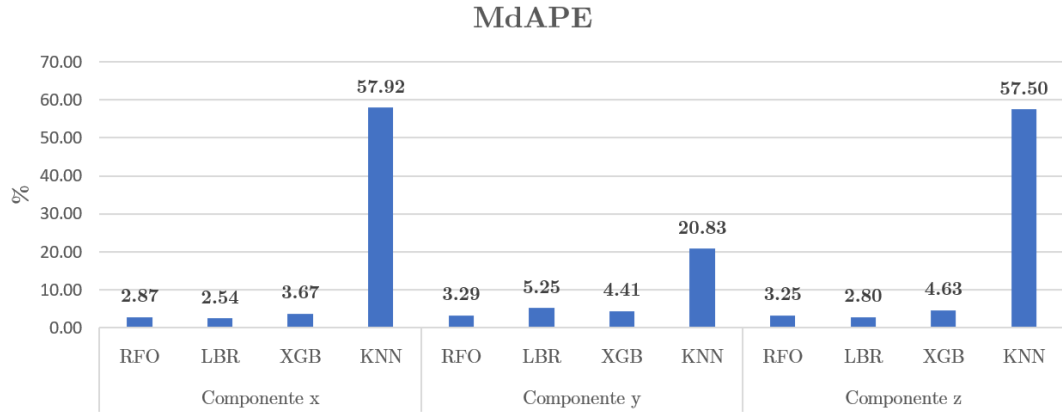


Figura 9. Gráfico de barras de MdAPE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo.

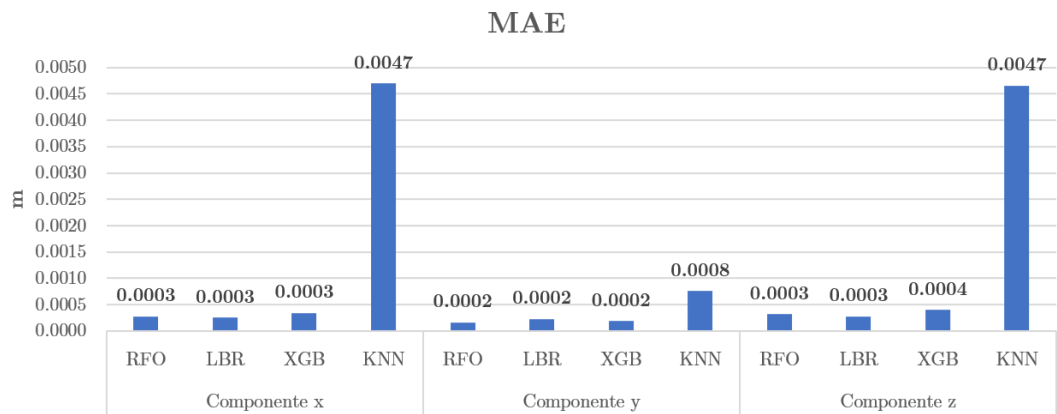


Figura 10. Gráfico de barras de MAE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo.

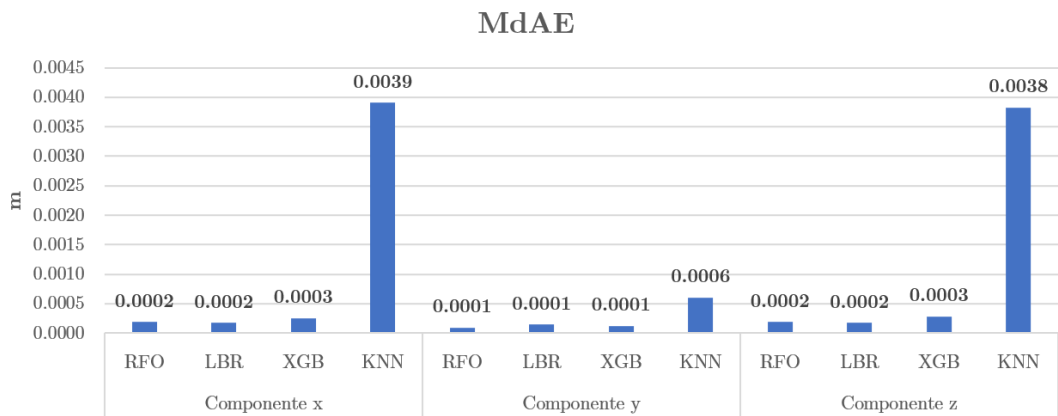


Figura 11. Gráfico de barras de MdAE para configuración de 4 imanes y 1 intervalo.

Todo el trabajo de experimentación, transformación, predicción y evaluación de los datos se vio directamente afectado por un extenso conjunto de factores. Cada uno de los cuales tuvo un efecto tanto en la calidad de los datos experimentales, así como también la precisión, exactitud y eficiencia de los modelos predictivos implementados y de sus resultados. A continuación, se explora cuál fue el impacto de dichos factores en cada etapa del estudio.

8.1. Experimentación física con péndulo

Dado que el sistema físico en estudio es un sistema caótico, experimentalmente se tuvo en consideración que una minúscula variación en las condiciones iniciales modificaría radicalmente la evolución del sistema. Razón por la cual la parte experimental del estudio requirió de extrema precisión por parte del experimentador para garantizar la calidad de los datos experimentales recolectados en esta etapa del estudio. Esto dado que dichos datos obtenidos posteriormente serían el elemento fundamental durante toda la fase de entrenamiento de los modelos de aprendizaje automático.

Sin embargo, es sumamente relevante destacar que el propósito principal de la recolección de datos del sistema físico, no fue estudiar a detalle la evolución del péndulo magnético ante distintas situaciones particulares; sino fue el exponer a los modelos de aprendizaje automático a la mayor cantidad posible de situaciones diversas hacia las cuales podría potencialmente evolucionar dicho sistema.

8.1.1. Implicaciones de condiciones iniciales

Todo experimento realizado independiente de sus condiciones iniciales (componentes de posición, velocidad y aceleración) fue de utilidad para la fase de entrenamiento dado que muestra a los modelos un escenario completamente distinto del comportamiento del sistema físico. Para analizar las condiciones iniciales y su efecto sobre la evolución de la trayectoria, se consideran las figuras 5, 6 y 7. Se evidencia cómo el cambio del radio de la posición inicial modifica completamente el comportamiento de cada una de las componentes de la trayectoria. En la componente z se observa cómo partiendo de radios distintos, cada trayectoria representa características propias en cuanto a la am-

plitud y la frecuencia de las oscilaciones (no periódicas) y sin embargo, ambos escenarios convergen en el mismo punto de equilibrio. Mientras que en la componente x aunque ambas trayectorias parten desde un punto muy cercano (en dicha componente), cada una evoluciona en el tiempo de forma diferente y convergen sobre valores distintos. En la componente y se dan observaciones similares, en cuanto a la forma en que cada escenario evoluciona de manera completamente diferente en el tiempo.

Todas estas observaciones evidenciaron experimentalmente de la propiedad de sensibilidad en condiciones iniciales del sistema caótico en estudio. Y como consecuencia de ello, cada uno de los experimentos realizados resultó en la evolución del sistema hacia un comportamiento distinto al registrado en cualquier experimento previo.

8.2. Datos experimentales para entrenamiento

8.2.1. Implicaciones del instante de medición

Por otra parte, es relevante analizar el período de tiempo en que se tomaron mediciones de los experimentos. Se evidencia cómo en las tres figuras 5, 6 y 7 se evidenció que a partir de un determinado instante, aproximadamente después de 15 segundos, cada componente comenzó a oscilar de forma repetitiva sobre un punto de equilibrio. De manera que dicho instante (el cual se denominará τ) en que tal comportamiento comienza a manifestarse, produce indirectamente dos conjuntos muy distintos de información a los cuales posteriormente serían expuestos los modelos de aprendizaje automático. Cabe mencionar que en ciertos casos, el llegar oscilar sobre el punto de equilibrio tardó más de 15 segundos, particularmente en aquellos que iniciaron desde el radio R_2 , sin embargo (como se especificó en *Procedimiento experimental*) la premisa fue dejar al sistema evolucionar hasta alcanzar convergencia oscilatoria sobre algún punto de equilibrio con el objetivo de obtener toda la información posible en cada experimento.

En cada experimento efectuado, todo registro dado para $t < \tau$ corresponde a información completamente nueva dadas las propiedades de los sistemas caóticos. Tal información presentó comportamientos distintos del sistema físico a los modelos de aprendizaje automático. Es relevante destacar que para los modelos *Random Forest* y *XG Boost* este tipo de información representó una enorme ventaja por encima de los otros modelos implementados dentro del estudio dado que, según su optimización, estos modelos pudieron crear nuevos árboles que consideraran estos nuevos comportamientos. Por otra parte, todo registro dado para $t \geq \tau$ tiene un comportamiento repetitivo. Ello fue de utilidad para todos los modelos implementados en el estudio dado que constantemente los retroalimentó mostrando un comportamiento similar. Según su respectiva forma de aprendizaje y optimización, este tipo de información permitió dar un mejor ajuste para predecir con mayor precisión.

8.2.2. Implicaciones de herramienta de extracción de datos

Es relevante considerar que dada la funcionalidad de *auto-tracking* de utilizada con *Tracker*, implicó que un subconjunto de los datos empleados para entrenamiento no surgieron de una medición exacta de posición, sino de una interpolación lineal entre dos instantes. Ello necesariamente introdujo una fuente de error. Dicha fuente de error, pudo ser aminorada realizando un *tracking* manual en vez de uno automático. Sin embargo, ello hubiese introducido dos nuevas fuentes de error adicionales: (1) la posibilidad del error humano por parte del experimentador y (2) una inversión mucho mayor de tiempo para la revisión y *tracking* de cada video individualmente. Donde el total de videos fue de 144 con un mínimo de 450 *frames* por video, hubiese implicado el *tracking* manual de al menos

64800 registros de forma individual.

No obstante, la mayor parte de las interpolaciones de *auto-tracking* fueron durante las primeras oscilaciones del sistema cuando algunos de los *frames* tenían apariencia borrosa por la rapidez del movimiento. Sin embargo, en las figuras 5, 6 y 7 aproximadamente durante los primeros 5 segundos, cuando las oscilaciones tienen amplitudes de movimiento largas, el segmento de trayectoria recorrido puede aproximarse a una recta. De manera que en tales casos las interpolaciones lineales no tuvieron un impacto representativo sobre la fase de entrenamiento.

8.3. Predicciones realizadas por modelos

8.3.1. Distribución de los errores

Al analizar los resultados de las predicciones de movimiento presentadas en los cuadros 3, 4, 5 y 6 se evidencia que cada una de las combinaciones de variables referentes a un determinado escenario de predicción (configuración de imanes, intervalos, componente de posición y modelo de aprendizaje automático) tuvieron un efecto muy distinto sobre la precisión y exactitud de los resultados. Por consiguiente, fue relevante analizar el impacto conjunto de todas las variables en cada caso según la métrica estadística de evaluación.

Considerando el cuadro 3, se evidencia que la mayoría de los porcentajes de error presentados son mucho mayores a un 10 % de exactitud, sugiriendo que la calidad de las predicciones fue deficiente. No obstante, como se describió previamente, ello alerta la presencia de puntos atípicos que están desviando la magnitud de la métrica. Por lo que a nivel general, resulta una alternativa de análisis más objetiva (por el sesgo de los puntos atípicos) el uso de la mediana como métrica de la distribución de los errores.

8.3.2. Impacto de variable de intervalos

Debe recordarse que entre los predictores dados a los modelos se encuentran las tres componentes de posición, velocidad y aceleración de N intervalos antes del instante a predecir. Físicamente, era posible calcular de forma directa la posición de un determinado instante dadas las componentes de posición y velocidad del instante inmediatamente anterior. Sin embargo, es sumamente relevante resaltar que los modelos de aprendizaje automático no poseen absolutamente ningún conocimiento de dicha relación entre variables, de manera que estos debían ser capaces de inferirla únicamente a partir de los predictores dados. Tal característica del estudio, fue la principal dificultad al momento tanto de entrenar y realizar predicciones con los modelos.

Físicamente, al aumentar la cantidad de intervalos para la predicción, la velocidad instantánea de los predictores tuvo una mayor brecha de tiempo respecto del instante que se deseaba predecir. Al aumentar la cantidad de intervalos, se pierde información respecto del último instante conocido y el instante a predecir. Durante ese lapso, el péndulo pudo haber sido afectado por cualquier combinación entre las fuerzas gravitatoria, magnética y de fricción con el viento, resultando en un cambio de su trayectoria. De manera que los predictores no tuvieron ninguna información sobre dichas posibles interacciones, resultando en predicciones sujetas a error. Considerando el cuadro 4, se evidencia cómo incrementa el error a medida que se incrementa la cantidad de intervalos. Se observa, por ejemplo, cómo el modelo *RFO* para la componente x en la configuración de 2 imanes pasa de 4.31 % a 9.44 % de error al considerar un intervalo adicional entre las predicciones. Dicho fenómeno se

replica de forma general para todas las configuraciones de imanes y todos los modelos implementados.

Estas observaciones muestran cómo inclusive con el uso de herramientas computacionales de aprendizaje automático, la capacidad de predicción decrece a medida que crece la brecha de tiempo, lo cual es consecuencia del comportamiento caótico del sistema. Tal aumento del error se observa de igual manera en la diferencia real de distancia que existe en las predicciones según los cuadros 5 y 6. Dicha cualidad no depende de la configuración de imanes, ni la componente de posición, ni el modelo de aprendizaje automático implementado.

Es sumamente relevante destacar que tales resultados y conclusiones no hubiesen sido posibles de conocer sin la realización completa (de inicio a fin) del presente estudio. Hasta la fecha de realización del proyecto, no se contaba con ningún antecedente que indicara específicamente cómo sería el error en la realización de predicciones sobre el el péndulo magnético utilizando herramientas de aprendizaje automático. Cada uno de los pasos realizados y desarrollados fueron necesarios para obtener los resultados experimentales que expusieran de forma numérica dicha información. Lo cual responde a los objetivos específicos de la investigación.

Por consiguiente tras la realización del trabajo experimental y estadístico pertinentes, se evidencia que al menos con las características del presente estudio, no sería posible predecir la trayectoria de un péndulo magnético para un lapso de tiempo prolongado si únicamente se cuenta con las condiciones iniciales del sistema (en este caso lo ocurrido N intervalos antes). Lo cual concuerda con el resultado anticipado según la teoría en [2].

Sin embargo, nuevamente observando los cuadros 3, 4, 5 y 6 se evidencia que sí para pocos intervalos de tiempo sí es posible hacer predicciones con alto grado de exactitud y precisión. Por lo que, por ejemplo, sí sería posible predecir la trayectoria del péndulo si iterativamente se predice únicamente para 1 intervalo en el futuro. Es decir, si en el instante $t = 0$ s se predice el valor de $t = 1/30$ s y luego (conociendo los valores del instante $t = 1/30$ s) se predice el instante $t = 2/30$ s, y se continúa el procedimiento hasta el instante deseado. En el presente estudio no pudo realizarse dicha prueba dado que la fase de entrenamiento se realizó con datos seleccionados aleatoriamente de todos los experimentos. La ejecución de este nuevo tipo de experimento requeriría de una separación distinta de los conjuntos de datos, por lo que modificaría radicalmente las condiciones bajo las cuales se realizó el presente estudio. Por consiguiente, lo anterior queda como una recomendación para la continuación posterior del presente trabajo de investigación.

8.3.3. Impacto de variable de imanes

Otra variable que tuvo un impacto directo sobre la exactitud de las predicciones realizadas fue la configuración de los imanes en el péndulo magnético. Esto dado que de las tres fuerzas que interactúan de manera directa sobre el sistema, la fuerza magnética es la que tiene mayor afectación en los cambios repentinos de dirección y rapidez del movimiento del péndulo según [22]. Se observa cómo el grado de exactitud de las predicciones fue distinto e independiente para cada configuración de imanes. Dicho resultado era esperable dado que todo el proceso de entrenamiento y optimización de los modelos se realizó de forma independiente con cada configuración de imanes.

Por consiguiente, dado que cada configuración de imanes corresponde a procedimientos de entreno y predicción diferentes, puede analizarse cada resultado de forma aislada. Se evidencia en el cuadro 4 cómo el porcentaje de error es similar entre configuraciones de imanes para ciertos modelos. Por ejemplo esto ocurrió con el modelo *RFO* para la componente z en todos los intervalos con 3 y 4

imanes donde los porcentajes de error variaron por un máximo de 2%. El mismo fenómeno ocurrió para *LBR* en la componente x .

Físicamente podría inferirse que para configuraciones con una menor cantidad de imanes las predicciones deberían tener una mayor exactitud dado que el péndulo tiene menos imanes ejerciendo fuerza sobre él. Lo cual en efecto ocurre para las componentes y y z para 1 intervalo. No obstante, algunos de los resultados experimentales fueron opuestos a dicha premisa. Se evidencia en el cuadro 4 cómo en la componente x para 1 intervalo los porcentajes de error para 2 imanes son casi el doble que para 3 y 4 imanes.

En el cuadro 5 se observa cómo los errores entre configuraciones de 3 y 4 imanes son similares. Se evidencia que en la componente y en cada configuración de imanes, el error es casi el mismo entre intervalos. Es decir, por ejemplo en los modelos *XGB* y *RFO* para 1 intervalo, el error es consistente en 0.0002 m. Tal cualidad se manifiesta de forma similar en el cuadro 6 por ejemplo en la componente z .

8.3.4. Impacto de variable de modelos

Dada la forma en la que está diseñado el algoritmo referente a cada uno de los modelos implementados (según [1]) su procedimiento de entrenamiento operó de manera distinta. Nuevamente se enfatiza que ninguno de tales modelos tiene conocimiento alguno referente a fenómenos físicos, por lo que debían ser capaces por sí mismos de hallar la relación entre las componentes de posición, velocidad y aceleración de N intervalos antes para predecir la posición del instante deseado. Por consiguiente, cada uno optimizó de manera diferente al presentarle escenarios con comportamientos radicalmente distintos (comúnmente para $t < \tau$) y comportamientos similares ($t \geq \tau$).

En general, al observar las figuras 8, 9, 10 y 11 se identifica que los errores de mayor magnitud, ocurrieron con el modelo *KNN*. Lo cual era esperable dado que para el tipo de datos utilizados, le fue muy difícil encontrar "vecinos cercanos" siempre que $t < \tau$. Únicamente en la componente y se observan magnitudes de error similares a los otros modelos, lo cual también era esperable dado que dicha componente varió muy poco en la comparación con las otras dadas las dimensiones del péndulo.

Por otra parte, los algoritmos de los modelos *RFO* y *XGB* operan ambos mediante la construcción de árboles. Por lo que teóricamente se esperaba un alto grado de similitud (menos de 2% a lo sumo) entre las salidas de ambos, lo cual se confirma en el cuadro 4. Sin embargo, un hallazgo no esperado fue la gran similitud observada entre los resultados de los modelos *RFO* y *LBR* dado que sus métodos de entrenamiento y relacionamiento de la información son muy diferentes. Por ejemplo en el cuadro 4 la mayor parte de las veces, los errores son iguales o muy cercanos, particularmente cuando solo se utilizó 1 intervalo.

A nivel general, los resultados con mayor grado de exactitud y precisión en las cuatro métricas utilizadas fue *RFO*. Para este, cada nuevo escenario pudo haber creado nuevos árboles o ramas para las cuales fuese capaz de relacionar una mayor variedad de comportamientos. De manera que tanto para datos $t < \tau$ y $t \geq \tau$, el algoritmo fue capaz de crear relaciones tales que los predictores asociaran fácilmente un árbol de características idéntica en cada instante a predecir y de esa forma aproximarse a todas las variaciones contempladas durante su fase de entrenamiento.

Tras la revisión de todo el trabajo realizado durante las fases de diseño y construcción del sistema experimental, ejecución y filmación de experimentos, extracción y transformación de datos, entrenamiento y generación de predicciones con de modelos de aprendizaje automático y evaluación estadística de todos los resultados se concluyó que:

1. De forma general, el estudio realizado sobre el péndulo magnético permitió efectivamente establecer las bases para el estudio de sistemas físicos dinámicos caóticos mediante la aplicación de algoritmos de aprendizaje automático.
2. Según la evaluación estadística de los resultados, el grado de exactitud y precisión de las predicciones fueron dependientes de todas las variables presentes en cada escenario: configuración de imanes, cantidad de intervalos y modelo de aprendizaje automático. Los resultados con mayor grado de exactitud y precisión fueron aquellos con 2 imanes, 1 intervalo y el modelo *Random Forest* teniendo 1.53% de MdAPE y 6.63% de MAPE.
3. Los resultados de las predicciones realizadas denotan que no fue posible modelar computacionalmente la evolución del péndulo magnético a partir de las mediciones experimentales realizadas teniendo mayoritariamente errores superiores al 5% de error colectivo en medidas de MAPE y MdAPE al incrementar el lapso de tiempo de predicción.
4. Con base en los resultados experimentales obtenidos, se concluyó que, a partir de condiciones iniciales, los modelos de aprendizaje automático no fueron capaces de predecir de la evolución de trayectorias en un péndulo magnético.

CAPÍTULO 10

Recomendaciones

Tras la realización de cada fase del presente estudio, se identificó un conjunto de recomendaciones para futuras investigaciones que continúen con la modelación de sistemas físicos caóticos mediante modelos de aprendizaje automático:

1. Para la fase experimental, se recomienda incrementar la cantidad de experimentos para la recolección de datos. Se sugiere utilizar de diferencias de ángulo polar de 10° y agregar un tercer radio de posición inicial.
2. Para la fase de extracción de datos, se recomienda utilizar librerías de *Computer Vision* para automatizar por completo dicha fase del estudio.
3. Para la fase de selección de modelos, se recomienda utilizar algoritmos de aprendizaje profundo (*Deep Learning*) como alternativa de implementación.
4. Para la fase de entrenamiento de modelos, se recomienda realizar una separación no aleatoria de los conjuntos de datos para entrenamiento y evaluación con el propósito de evaluar la predictibilidad de trayectorias completas.
5. Para la fase de evaluación de modelos, se recomienda realizar evaluaciones separadas para los conjuntos de datos $t < \tau$ y $t \geq \tau$ según lo descrito en *Discusión y análisis de resultados*.

11.1. Referencias bibliográficas

- [1] Bishop, C. M., Nasrabadi, N. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning* (Vol. 4, No. 4, p. 738). New York: Springer.
- [2] Greiner, W., Bromley, D. A. (2003). *Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics* (p. 52). New York: Springer.
- [3] Lynch, S. (2018). *Dynamical systems with applications using python*. Switzerland: Springer International Publishing.
- [4] Menezes, J. M. P., Barreto, G. A. (2008). *Long-term time series prediction with the NARX network: An empirical evaluation*. *Neurocomputing*, 71(16-18), 3335–3343. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2008.01.030>
- [5] Motter, A. E., Gruiz, M., Károlyi, G., Tél, T. (2013). *Doubly transient chaos: Generic form of chaos in autonomous dissipative systems*. *Physical review letters*, 111(19), 194101.
- [6] Müller, A. C., Guido, S. (2016). *Introduction to machine learning with Python: a guide for data scientists*. Reilly Media, Inc."
- [7] Ramadevi, B., Bingi, K. (2022). *Chaotic Time Series Forecasting Approaches Using Machine Learning Techniques: A Review*. *Symmetry*, 14(5), 955. <https://doi.org/10.3390/sym14050955>
- [8] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
- [9] *Uncertainty dynamics and predictability in chaotic systems - researchgate*. (n.d.). Recuperado en enero 22, 2023, de https://www.researchgate.net/publication/227622728_Uncertainty_dynamics_and_predictability_in_chaotic_systems
- [10] Vallejo, J. C., Sanjuan, M. A., Sanjuán, M. A. (2017). *Predictability of chaotic dynamics*. Springer International Publishing.
- [11] Wittek, P. (2014). *Quantum machine learning: what quantum computing means to data mining*. Academic Press.

[12] Zill, D. G. (2012). *A first course in differential equations with modeling applications*. Cengage Learning.

11.2. Referencias de internet

[13] Clyde, M., Çetinkaya-Rundel, M., Rundel, C., Banks, D., Chai, C., Huang, L. (n.d.). *Chapter 6 Introduction to Bayesian Regression | An Introduction to Bayesian Thinking*. In *statswithr.github.io*. <https://statswithr.github.io/book/introduction-to-bayesian-regression.html>

[14] *What is Random Forest?* (n.d.). Www.ibm.com. <https://www.ibm.com/cloud/learn/random-forest>: :text=Random%20forest%20is%20a%20commonly

[15] Koehrsen, W. (2018, April 20). *Introduction to Bayesian Linear Regression*. Medium. <https://towardsdatascience.com/introduction-to-bayesian-linear-regression-e66e60791ea7>

[16] IBM. (n.d.). *What is the k-nearest neighbors algorithm?* | IBM. Www.ibm.com. <https://www.ibm.com/topics/knn>: :text=The%20k%2Dnearest%20neighbors%20algorithm%2C%20also%20known%20as%20KNN%20or

[17] Mbaabu, O. (2020, December 11). *Introduction to Random Forest in Machine Learning*. Section. <https://www.section.io/engineering-education/introduction-to-random-forest-in-machine-learning/>

[18] 1.6. *Nearest Neighbors — scikit-learn 0.21.3 documentation*. (2019). Scikit-Learn.org. <https://scikit-learn.org/stable/modules/neighbors.html>

[19] *¿Qué es el boosting? Guía de boosting en machine learning* | AWS. (n.d.). Amazon Web Services, Inc. Recuperado en enero 22, 2023, from <https://aws.amazon.com/es/what-is/boosting/>

[20] Rao, S. (2022, December 13). *XGBoost Regression: Explain It To Me Like I'm 10*. Medium. <https://towardsdatascience.com/xgboost-regression-explain-it-to-me-like-im-10-2cf324b0bbdb>

[21] Vandepuit, N. (2021, July 30). *Forecast KPI: RMSE, MAE, MAPE Bias*. Medium. <https://towardsdatascience.com/forecast-kpi-rmse-mae-mape-bias-cdc5703d242d>: :text=The%20Mean%20Absolute%20Percentage%20Error

[22] Waters, R. (2020, April 14). *Chaos in the Magnetic Pendulum*. IMA. <https://chalkdustmagazine.com/features/the-magnetic-pendulum/>

[23] Wolchover, N., amp; *Quanta Magazine moderates comments tonbsp;facilitate an informed, substantive*. (2020, August 28). *Machine Learning's 'amazing' ability to predict chaos*. Quanta Magazine. Recuperado en enero 21, 2023, from <https://www.quantamagazine.org/machine-learning-ability-to-predict-chaos-20180418/>

12.1. Archivos de extracción y modelado

En el repositorio de *Github* en la dirección https://github.com/pablofermarroquin/magnetic_pendulum_machine_learning, el cual contiene:

1. En la pestaña *data* se encuentran las mediciones experimentales obtenidas con el programa *Tracker*. Cada conjunto de datos está segmentado según se especifica en la sección *Procedimiento experimental* paso 4.VI.
2. En la pestaña *Notebooks* se encuentra el archivo *data_processing_and_forecasting.ipynb* el cual está segmentado de la siguiente manera:
 - *Libraries*: Librerías de *Python* empleadas.
 - *Evaluation functions*: Funciones para evaluar las métricas de MAPE, MdAPE, MAE, MdAE.
 - *Data preparation*: Función que unifica los datos según configuraciones de imanes.
 - *Train models*: Función para entrenar cada uno de los modelos declarados con la segmentación aleatoria de datos.
 - *Working área*: Funciones para realizar predicciones según el número de intervalos y almacenarlas en archivos *.csv*.
 - *Run and Evaluation*: Ejecución de predicciones y evaluación.
 - *Graphs*: Funciones para graficar las mediciones de posición del péndulo en sus tres componentes.

13.1. Fotografías de sistema experimental

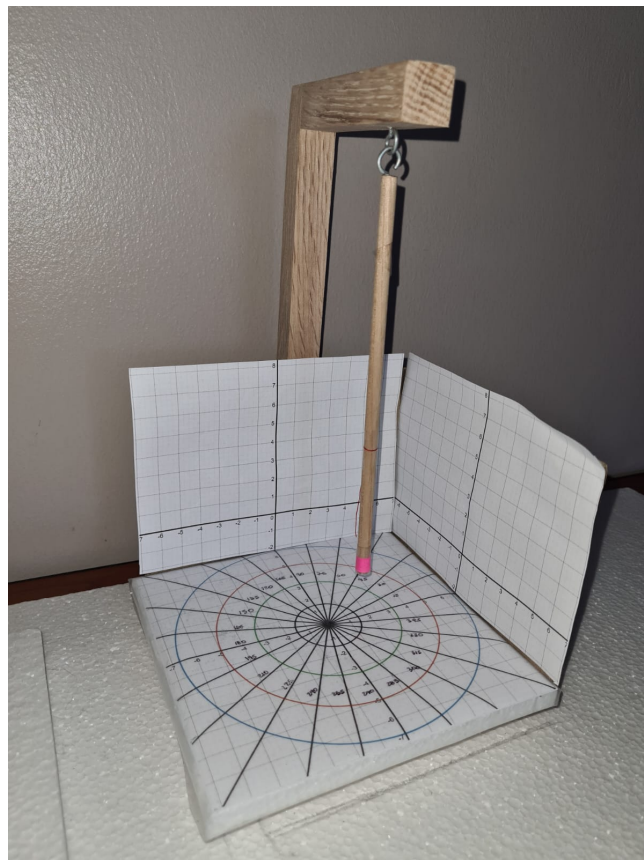


Figura 12. Fotografía de sistema experimental utilizado para experimentos y filmación.

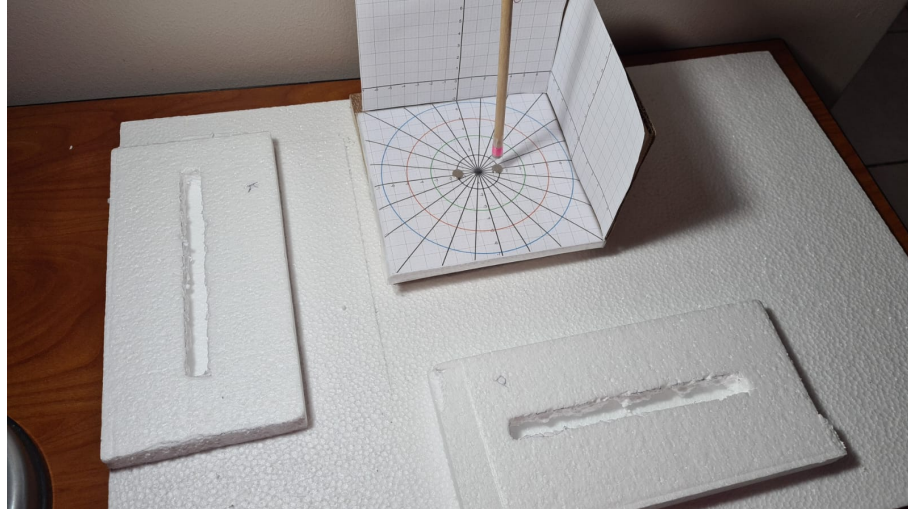


Figura 13. Fotografía de sistema experimental utilizado para experimentos y filmación. Configuración de 2 imanes.

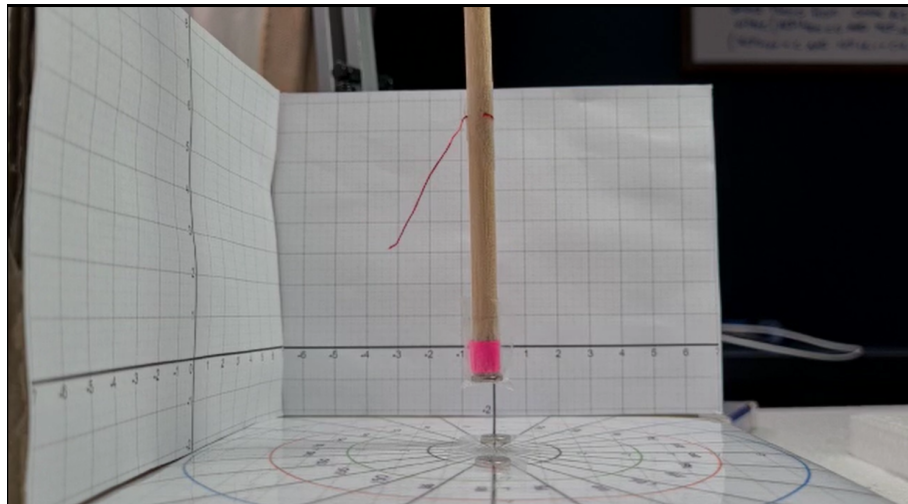


Figura 14. Vista de cámara A (Samsung S20) en configuración de 2 imanes.

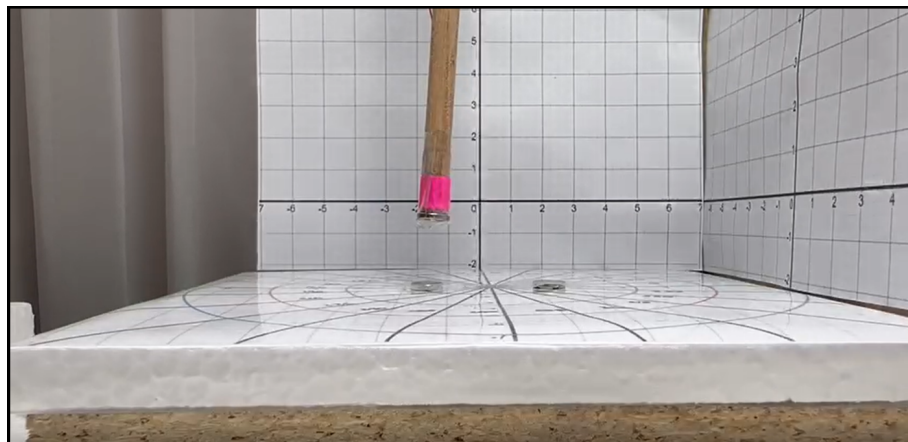


Figura 15. Vista de cámara B (Samsung A20) en configuración de 2 imanes.