
Clasificación de configuraciones convexas de puntos en el plano y polilogaritmos

Estuardo Alejandro Díaz Hernández



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Clasificación de configuraciones convexas de puntos en el plano y polilogaritmos

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Estuardo Alejandro Díaz Hernández
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala
2021

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

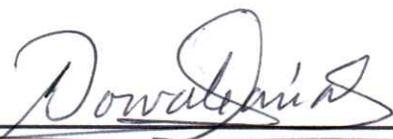


Clasificación de configuraciones convexas de puntos en el plano y polilogaritmos

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Estuardo Alejandro Díaz Hernández
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

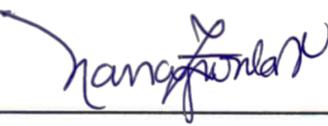
Guatemala
2021

Vo.Bo.:

(f) 
MSc. Dorval José Manuel Carías Samayoa

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Dorval José Manuel Carías Samayoa

(f) 
MSc. Nancy Anely Zurita Villagran

(f) 
MSc. Alan Gerardo Reyes Figueroa

Fecha de aprobación: Guatemala, 15 de octubre de 2021.

La conjetura de Erdős-Szekeres: Supongamos que tenemos n puntos en el plano en posición general. ¿Existe algún subconjunto de estos puntos que formen los vértices de un polígono convexo de k lados? Más aún, ¿Cuántos puntos n nos aseguran la existencia de tal polígono convexo de k lados, sin importar la configuración de los puntos? Esto es lo que se preguntaron Erdős y Szekeres, y lograron demostrar que siempre existe un n finito que asegura el resultado deseado. Además, demostraron que el número de puntos necesarios debe de ser mayor o igual a $2^{k-2} + 1$ y de hecho conjeturaron que n debe de ser exactamente $2^{k-2} + 1$ para asegurar la existencia de tal polígono convexo.

La conjetura de Erdős-Szekeres ha sido verificada para los casos con $k \leq 6$ [9]. Además, se han encontrado cotas superiores para el número de puntos necesarios para afirmar la conjetura, la cota más cercana (por el momento) es $2^{k+O(k)}$ [8]. A pesar de que la conjetura de Erdős-Szekeres parece bastante elemental por tratarse únicamente de puntos en el plano, este problema sigue estando abierto. Una de las mayores dificultades para atacar el problema parece ser la falta de una representación de las posibles configuraciones de puntos en el plano. Es por esto que buscamos dar dicha representación, para tener más herramientas para abordar el problema.

Agradecimientos: A mis papás y mi hermana, por el apoyo incondicional a lo largo de toda la carrera y por haberme escuchado hablar incansablemente sobre lo que presento a continuación.

A Dorval por haberme explicado qué era el producto topológico aún cuando ni siquiera había empezado la carrera y no sabía nada de teoría de conjuntos, pero aún así tuvo la paciencia de explicarme y recomendarme un buen libro para aprender (Topology, de James Munkres). A Nancy por convenirme de cambiarme de carrera y pasarme a matemática, la cual fue una de las mejores decisiones que he tomado. A ellos dos, junto con Ricardo Barrientos, Alan Reyes, María Eugenia Contreras y otros por haber sido tan buenos catedráticos y haber inspirado mi pasión por la matemática pura.

Prefacio	III
Lista de figuras	VI
Resumen	VII
1. Introducción	1
2. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos específicos	2
3. Justificación	3
4. Configuraciones convexas	4
4.1. Configuraciones de puntos en el plano	4
4.2. Convexidad	5
4.3. La frontera de una configuración	6
4.4. Relación de homotopía	7
5. Representación de configuraciones	8
5.1. Representación por líneas	8
5.2. Movimientos	9
5.3. Grafo de configuraciones	11
5.4. Configuración convexa	13
5.5. Equivalencia entre representación por líneas y convexidad	14
6. El número de vueltas	17
6.1. Definición	17
6.2. Propiedades	20
6.3. Relación con teoría de grupos	21
7. Etiquetas	23
7.1. Números Eulerianos y polilogaritmos	23
7.2. Etiqueta de una configuración	24
7.3. Resultados	25
7.4. Relación con polilogaritmos	25
7.5. Conjetura de Erdős-Szekeres	26

8. Conclusiones	27
9. Recomendaciones	28
10. Bibliografía	29
11. Anexos	30

4.1. Ejemplo de una configuración de puntos en el plano	4
4.2. Relación de equivalencia por convexidad	5
4.3. La frontera de una configuración	6
4.4. Homotopía sobre configuraciones de puntos	7
5.1. Construcción de $\mathcal{L}(X)$	8
5.2. Ejemplo de $\mathcal{L}(X)$	9
5.3. Líneas paralelas	10
5.4. Movimiento	10
5.5. Configuraciones de G_{\sim}^3	11
5.6. Diferentes vistas de G_{\sim}^4	12
5.7. Representación de $G_{\sim R}^4$	13
5.8. Representación de $G_{\sim L}^4 = G_{\sim C}^4$	13
5.9. Construcción de configuración convexa	14
5.10. Esbozo de demostración	15
6.1. Cálculo de φ para el ciclo $ABCD$	18
6.2. Cálculo de φ para el ciclo $ABCD$ y el ciclo opuesto $ADCB$	18
6.3. Cálculo de φ para una configuración no convexa.	19
6.4. Cálculo de φ para una configuración convexa.	19
7.1. Cálculo de Γ_4 para las configuraciones de Ω_4	24
7.2. Cálculo de Γ para las configuraciones de Ω_5	24

En este trabajo, damos una definición formal de lo que son las posibles configuraciones que queremos clasificar. Además, damos una representación de dichas configuraciones que puede verse equivalente a la dada en [1]. Sin embargo, definimos una relación de equivalencia con la cual ya no se tienen representaciones repetidas para las configuraciones convexas.

Luego, con el afán de identificar la convexidad de subconjuntos de puntos utilizando las representaciones, definimos una función φ que induce una invariante sobre el conjunto de todas las configuraciones de n puntos en el plano. Por último, utilizando esta misma función φ podemos calcular unas tuplas de números que llamamos *etiquetas*, que nos permiten diferenciar las representaciones. Resulta que al calcular dichas etiquetas para las primeras configuraciones convexas, obtenemos los números Eulerianos, que a su vez pueden expresarse en términos de polilogaritmos.

CAPÍTULO 1

Introducción

Con el afán de poder investigar la conjetura de Erdős-Szekeres, buscamos primero tener una representación de todas las posibles configuraciones de puntos en el plano con la que podamos trabajar. Por ello, investigamos cómo se comportan dichas configuraciones respecto a la convexidad de sus subconjuntos. Vamos a notar que podemos definir una noción de homotopía, lo cuál nos permite también definir una relación de equivalencia para simplificar el problema. Luego, notaremos que las rectas inducidas por los puntos juegan un papel importante en la clasificación de las configuraciones de puntos en el plano, por lo que utilizaremos estas líneas para dar una representación de dichas configuraciones. Estudiaremos propiedades de dicha representación y obtendremos una forma de generar todas las posibles configuraciones de la representación. Vamos a ver que en efecto, la representación propuesta logra identificar los subconjuntos convexos que estamos buscando.

Más adelante, con el fin de medir la convexidad de los subconjuntos de alguna forma, vamos a definir una función sobre la representación de líneas. También estudiamos varias propiedades de dicha función y demostramos que esta función induce una invariante sobre todo el conjunto de representaciones para n puntos en el plano. Más aún, esta función se puede extender a un homomorfismo entre dos grupos adecuados.

Por último, utilizaremos esta misma función para definir nuevamente otra representación. Esto nos dará una conexión inesperada con los números Eulerianos y con los polilogaritmos. Con todo esto, buscamos dar un primer paso en el camino de demostrar la conjetura de Erdős-Szekeres.

2.1. Objetivo general

Estudiar las configuraciones convexas de puntos en el plano con el fin de tener una herramienta para poder intentar atacar la conjetura de Erdős-Sekerez.

2.2. Objetivos específicos

- Proponer una representación de las posibles configuraciones convexas de puntos en el plano.
- Estudiar cómo se relacionan entre sí dichas configuraciones, en particular, mostrar una invariante.
- Mostrar la relación entre dicha representación y los polilogaritmos.

Con respecto a la clasificación de configuraciones convexas en el plano, buscamos poder representar a cada posible configuración por algún otro conjunto que conozcamos mejor, de tal forma que exista una biyección entre el conjunto de posibles configuraciones y la representación. En 1980 se publicó una clasificación que pretende justamente esto [1]. Sin embargo, la representación obtenida tiene dos problemas: existen representaciones que no se pueden realizar geoméricamente, y existen representaciones repetidas para las mismas configuraciones, especialmente para las configuraciones convexas.

Por lo tanto, es deseable una mejor representación de las posibles configuraciones de puntos en el plano. Más aún, buscamos encontrar propiedades de dichas representaciones y conexiones con otras áreas de la matemática para poder tener más herramientas para abordar el problema.

4.1. Configuraciones de puntos en el plano

Queremos estudiar las posibles configuraciones de un número finito de puntos en el plano en posición general. Por posición general nos referimos a que ningún subconjunto de 3 de estos puntos está sobre la misma recta [6]. A este conjunto de posibles configuraciones lo denotaremos como $P(n)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Denotemos $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$P(n) := \{f : [n] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \text{la imagen de } f \text{ está en posición general}\}$$

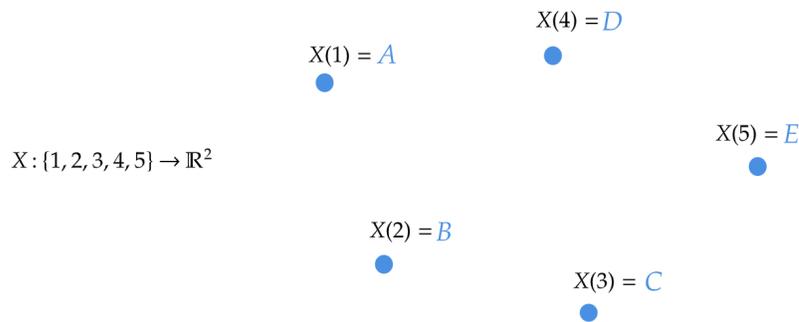


Figura 4.1: Ejemplo de una configuración de puntos en el plano

A los elementos de $P(n)$ los denotaremos como X, Y , etc. y a las imágenes de cada punto usualmente las denotaremos como A, B, \dots, C, D, E en lugar de $X(1), X(2), \dots, X(n)$, Figura 4.1. Dado $X \in P(n)$, por conveniencia nos referiremos a X tanto a la imagen de la función como a la función misma, dependiendo del contexto. Es decir, que $X \setminus A$ representa el conjunto de imágenes menos $A = X(1)$, y $X(S)$ es la imagen de $S \subseteq [n]$.

4.2. Convexidad

Dado un conjunto finito X de puntos en el plano, denotamos como \hat{X} a la envolvente convexa de X . Como X es un conjunto finito de puntos, \hat{X} es un polígono convexo y denotamos como $|\hat{X}|$ al número de lados de \hat{X} .

Estamos interesados en estudiar la convexidad de los subconjuntos de puntos de cualquier configuración. Sin embargo, no nos interesa la posición exacta de cada punto en el plano, sino que solo el número de lados de la envolvente convexa de cada subconjunto. Además, notemos que en nuestra definición de $P(n)$ estamos nombrando cada punto de la imagen, pero el orden en que nombramos los puntos no afecta la convexidad, Figura 4.2. Por lo tanto, definimos la siguiente relación de equivalencia:

Definición 1. Sean $X, Y \in P(n)$, decimos que X es convexamente-equivalente a Y , denotado por $X \simeq_C Y$, si $\exists \sigma \in \mathbb{S}_n \ni$

$$\forall S \subseteq [n], |\hat{X}(S)| = |\hat{Y}(\sigma(S))|$$

Donde \mathbb{S}_n es el conjunto de permutaciones de n elementos. Podemos pensar en σ también como una función de la imagen de X a la imagen de Y .

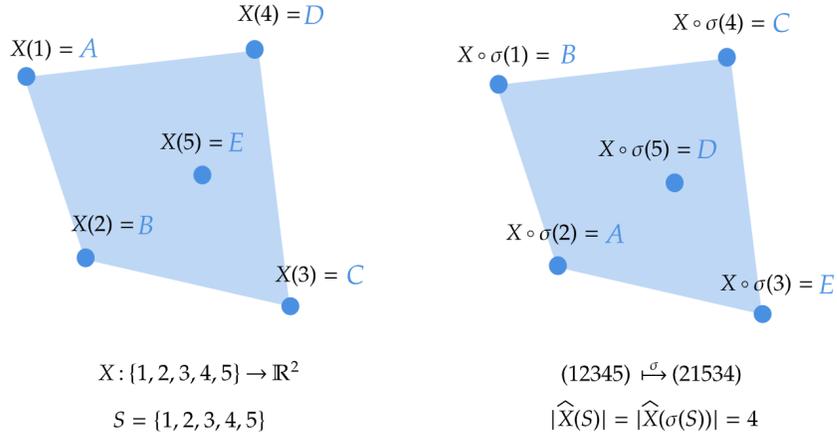


Figura 4.2: Relación de equivalencia por convexidad

Claramente \simeq_C es una relación de equivalencia sobre $P(n)$. El espacio que queremos clasificar es precisamente el espacio de configuraciones $\Omega_n := P(n) / \simeq_C$.

Sean $X, Y \in P(n)$ tales que $X \simeq_C Y$. Denotemos por $C(X, Y)$ al conjunto de todos los mapeos entre X y Y que preservan convexidad, i.e. $C(X, Y) := \{\sigma \in \mathbb{S}_n : \forall S \subseteq [n], |\hat{X}(S)| = |\hat{Y}(\sigma(S))|\}$. En particular, tenemos que $C(X) := C(X, X)$ es un subgrupo de \mathbb{S}_n . Además, si $C(X, Y) = \{\sigma_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, entonces $\{\sigma_j^{-1} \circ \sigma_i\}_{i, j \in \mathcal{I}} \subseteq C(X)$ similarmente $\{\sigma_i \circ \sigma_j^{-1}\}_{i, j \in \mathcal{I}} \subseteq C(Y)$.

Sea $X \in P(n)$ y sean $s, t \in X$ tal que $\exists \sigma \in C(X) \ni s \xrightarrow{\sigma} t$ entonces $\sigma^{-1} \in C(X)$ es tal que $t \xrightarrow{\sigma^{-1}} s$. Decimos que s y t son *intercambiables*, denotado por $s \sim_C t$. Nótese que ser intercambiables induce una relación de equivalencia. Formalmente, $s \sim_C t$ si y sólo si $\exists \sigma \in C(X) \ni s \xrightarrow{\sigma} t$. Entonces, podemos separar a X en componentes, dadas por X / \sim_C . Nótese que todo $\sigma \in C(X)$ deja invariante las componentes, i.e. se puede proyectar a una función $\hat{\sigma} : X / \sim_C \rightarrow X / \sim_C$ que es igual a la identidad en X / \sim_C . Además, todos los elementos de una componente se pueden intercambiar. Por lo tanto, sean K_1, K_2, \dots, K_r los componentes de X y $l_i := |K_i|, i = 1, \dots, r$, tenemos que $C(X) \simeq \mathbb{S}_{l_1} \times \mathbb{S}_{l_2} \times \dots \times \mathbb{S}_{l_r}$.

Ahora, queremos ver cómo se relacionan las componentes de dos configuraciones que son conexas equivalentes. Sean $X, Y \in P(n)$, $K \in X / \sim_C$ una componente de X y $\sigma \in C(X, Y)$. Entonces, la imagen de K bajo σ está contenida en una componente de Y / \sim_C . En efecto, supongamos que existe $s, t \in K$ tales que σ los mapea a diferentes componentes de Y / \sim_C , entonces, como $s, t \in K \implies \exists \gamma \in C(X) \ni \gamma(s) = t \implies \sigma\gamma\sigma^{-1} \in C(Y)$ es tal que intercambia las imágenes de s y t , por lo que deben de pertenecer a la misma componente. Lo mismo es cierto para $C(Y, X)$, por lo que toda función $\sigma \in C(X, Y)$ se puede proyectar a una función de $\tilde{\sigma} : X / \sim_C \rightarrow Y / \sim_C$. Esto quiere decir, que podemos simplificar el estudio de $C(X, Y)$ estudiando únicamente las funciones entre sus respectivas componentes.

4.3. La frontera de una configuración

Dados $X, Y \in P(n)$, $X \simeq_C Y$, queremos estudiar en qué casos podemos mapear la frontera de \hat{X} a la frontera de \hat{Y} . Por frontera de X , denotada $\partial\hat{X}$, nos referimos a el conjunto de puntos de X que forman los vértices del polígono \hat{X} . Resulta que el asegurar que podemos mapear $\partial\hat{X}$ a $\partial\hat{Y}$ es un paso importante en la clasificación de Ω_n que veremos más adelante. Dada $\sigma \in C(X, Y)$, viendo a σ como función sobre las imágenes de X, Y , decimos que σ mapea la frontera de X a la frontera de Y si $\sigma(\partial\hat{X}) = \partial\hat{Y}$, Figura 4.3.

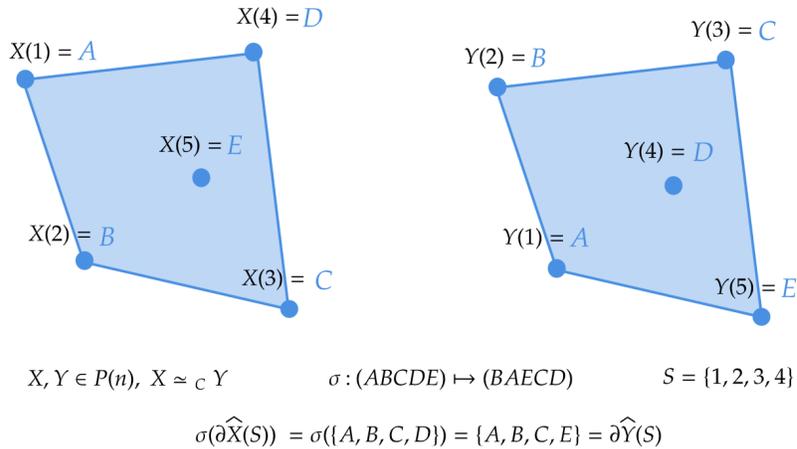


Figura 4.3: La frontera de una configuración
En este ejemplo, σ mapea la frontera de X a la frontera de Y

Planteamos la siguiente pregunta:

Si $X \simeq_C Y$, ¿existe $\sigma \in C(X, Y) \ni \sigma(\partial\hat{X}) = \partial\hat{Y}$?

Más aún, ¿existe $\sigma \in C(X, Y) \ni \forall S \subseteq [n], \sigma(\partial\hat{X}(S)) = \partial\hat{Y}(S)$?

Este es el paso faltante para asegurar que la representación de Ω_n presentada a continuación es completa y exacta, i.e. existe una biyección entre la representación y Ω_n .

4.4. Relación de homotopía

Sea $X \in P(n)$ y consideremos el conjunto de todas las líneas inducidas por los puntos de X en \mathbb{R}^2 , denotado por $\mathcal{L}(X)$. Estas líneas separan el plano en regiones $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}(X)$. Podemos obtener una nueva configuración $X^* \in P(n+1)$ a partir de X agregando un punto en una de las dichas regiones, pero observemos que una vez seleccionada la región, no importa la posición exacta del punto que estamos agregando, la configuración resultante es convexamente equivalente, Figura 4.4. Lo único que podría darnos una configuración distinta respecto a \simeq_C al agregar el nuevo punto es que escojamos otra región de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}(X)$, esto podemos visualizarlo como si dejamos fijos a todos los puntos de X y movemos de manera continua el punto que estamos agregando hasta atravesar alguna línea de $\mathcal{L}(X)$ para llegar a otra región, a esto le llamaremos el *movimiento* más adelante. Por otro lado, notemos que las isometrías dejan invariante la convexidad y recordemos que toda isometría de \mathbb{R}^2 se puede escribir en términos de una traslación, una rotación y una reflexión.

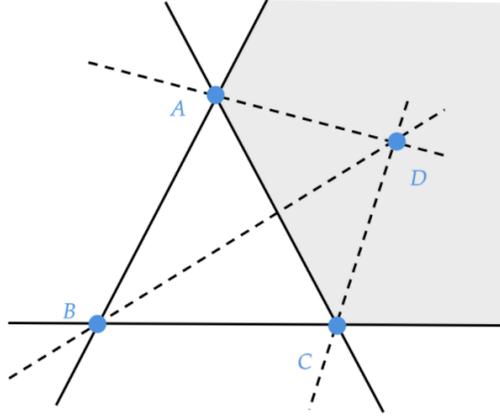


Figura 4.4: Homotopía sobre configuraciones de puntos

Podemos mover el punto dentro de la región sombreada sin afectar la convexidad de la configuración

Definamos el siguiente concepto de homotopía: Sean $X, Y \in P(n)$, decimos que X, Y son homotópicamente equivalentes, denotado por $X \simeq_h Y$ si podemos mover de manera continua los puntos (uno a uno) de X sin cruzar ninguna recta inducida por el resto de puntos hasta llegar a formar Y , salvo una posible reflexión. Formalmente, $X \simeq_h Y$ si y sólo si $\exists F : [0, 1] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F_t(s) = F(t, s)$ y $R \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, tal que F es continua, $F_0 = X$, $F_1 = RY$ y F se puede descomponer en partes de la siguiente forma: $\exists 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$ y $f^i : [t_i, t_{i+1}] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $f_t^i(s) = f^i(t, s)$ continuas tales que cada f^i deja fijos a todos los puntos de $X_i = f_{t_i}^i$ excepto posiblemente a un $x_i = X_i(s_i)$, para algún $s_i \in [n]$, donde $f_t^i(s_i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}(X_i \setminus x_i)$, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ y $F|_{[t_i, t_{i+1}]} = f^i, \forall i = 1, \dots, k$.

Nótese que las transformaciones de rotación, traslación y escalamiento para un número finito de puntos se pueden alcanzar bajo esta noción de homotopía. Además, podemos observar que $X \simeq_h Y \implies X \simeq_C Y$, dado que la convexidad de ningún subconjunto cambia a menos que cruzemos una de las rectas inducidas por los puntos. Esta relación de equivalencia junto con el movimiento previamente descrito nos servirán para construir una representación de Ω_n .

5.1. Representación por líneas

Sea $X \in P(n)$ una configuración con imagen $\{A, B, C, \dots, D, E\}$ no degenerativa, es decir, que $\mathcal{L}(X)$ no contiene líneas paralelas. Entonces, cada línea de $\mathcal{L}(X)$ se puede representar por un punto único en \mathbb{RP}^1 , espacio que es homeomorfo a el círculo S^1 . Como $\mathcal{L}(X)$ es finito, existen abiertos de $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$ homeomorfos a un intervalo de \mathbb{R} que cubren a la imagen de $\mathcal{L}(X)$, por lo que podemos inducir un orden en $\mathcal{L}(X)$. Este orden es único una vez escogamos la orientación del homeomorfismo con el intervalo de \mathbb{R} y el punto inicial del orden, por convención empezaremos siempre con AB y fijemos una orientación de \mathbb{RP}^1 . Además, podemos pensar en este orden como cíclico, ya que si seguimos recorriendo \mathbb{RP}^1 con la misma orientación volvemos a encontrarnos con las representaciones de las líneas de $\mathcal{L}(X)$ en el mismo orden, Figura 5.1.

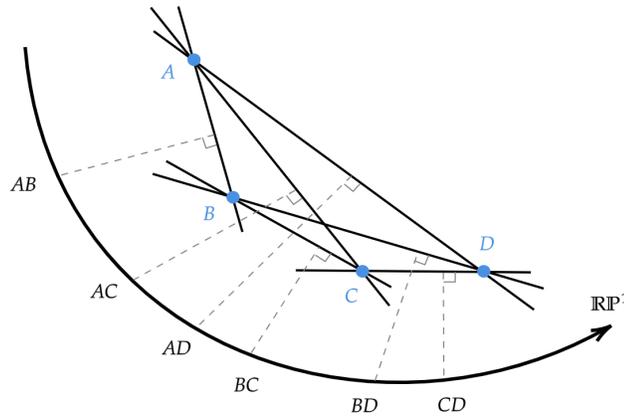


Figura 5.1: Construcción de $\mathcal{L}(X)$

En este ejemplo, $\mathcal{L}(X) = AB|AC|AD|BC|BD|CD$ para una configuración de Ω_4

A este orden de las líneas es lo que llamaremos la **representación por líneas**, denotado por $\mathcal{L}(X)$. Notemos que la relación de homotopía no afecta el orden de las líneas, salvo un posible cambio de orientación en el orden por la reflexión, por lo que dos configuraciones homotópicas tienen la misma representación. Además, como el número de permutaciones de $\binom{n}{2}$ elementos es finito y $\simeq_h \implies \simeq_C$, entonces $|\Omega_n|$ es finito.

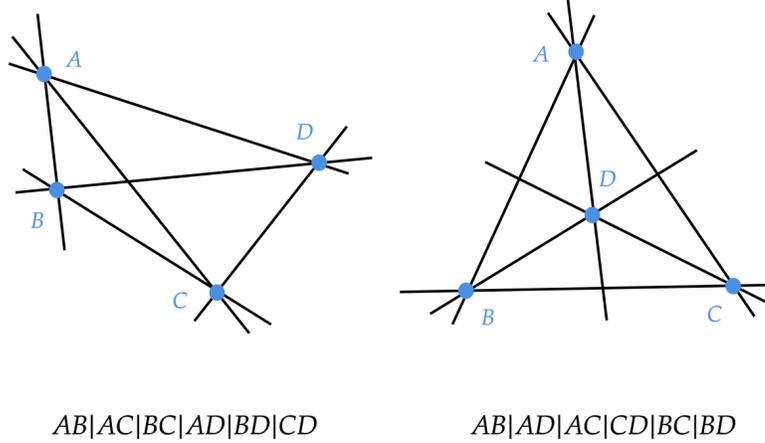


Figura 5.2: Ejemplo de $\mathcal{L}(X)$
Las únicas dos configuraciones de Ω_4

Decimos que dos líneas de $\mathcal{L}(X)$ son disjuntas si los puntos que las inducen son 4 puntos distintos. Sean $X, Y \in P(n)$ configuraciones no degenerativas, es decir que sus imágenes no inducen rectas paralelas, decimos que $X \sim Y$ si después de posiblemente intercambiar líneas adyacentes disjuntas un número finito de veces, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$, i.e. las dos representaciones por líneas coinciden. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 AB|AC|BC|AD|BD|CD &\sim AB|AC|AD|BC|BD|CD \quad (BC \leftrightarrow AD) \\
 AB|AC|BC|AD|BD|CD &\sim AB|CD|AC|BC|AD|BD \quad (AB \leftrightarrow CD)
 \end{aligned}$$

Bajo esta noción de igualdad \sim dada por las representaciones de líneas, podemos extender la definición de $\mathcal{L}(X)$ a toda $X \in P(n)$, quitando la restricción que X sea no degenerativa. En caso que existan rectas paralelas, escogemos arbitrariamente un orden entre ellas.

Decimos que $X \sim_R Y$ si $X \sim RY$, donde R es una reflexión o la identidad. Definimos la relación de equivalencia \simeq_L sobre $P(n)$ de la siguiente forma: Sean $X, Y \in P(n)$, $X \simeq_L Y$ sí y solo si $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \ni X \sim_R Y\sigma$, es decir $X \sim_R Y$ salvo un renombramiento de los puntos. El conjunto $P(n)/\simeq_L$ es nuestra representación de Ω_n . Más adelante mostraremos que $\simeq_L \implies \simeq_C$ y bajo la hipótesis mencionada en la sección de convexidad, $\simeq_C \implies \simeq_L$.

5.2. Movimientos

Como podemos ver en la Figura 5.3, el intercambiar rectas adyacentes disjuntas en nuestra representación por líneas, corresponde a mover los puntos de tal manera que dos rectas pasen siendo paralelas e intercambien su pendiente.

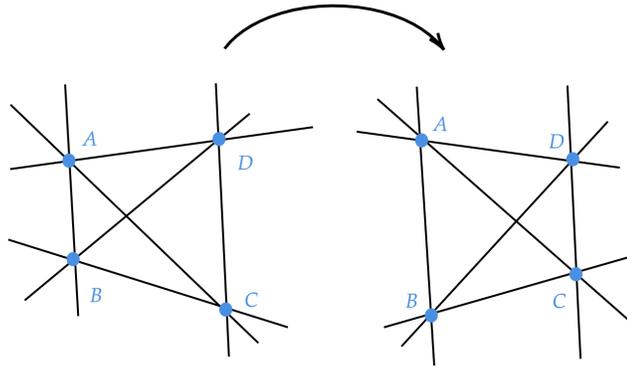


Figura 5.3: Líneas paralelas
 La convexidad sigue invariante después de intercambiar rectas disjuntas
 $BC \leftrightarrow AD$

Ahora estudiaremos formalmente el movimiento mencionado con anterioridad. Consideremos una configuración $X \in P(n)$ tal que el punto A está en una región tal que uno de los lados de su frontera esté conformado por un segmento de la recta BC , como se muestra en la Figura 5.4. Entonces el **movimiento** $M_{BAC}(X)$ consiste en mover el punto A a la región adyacente separada por el segmento de la recta BC .

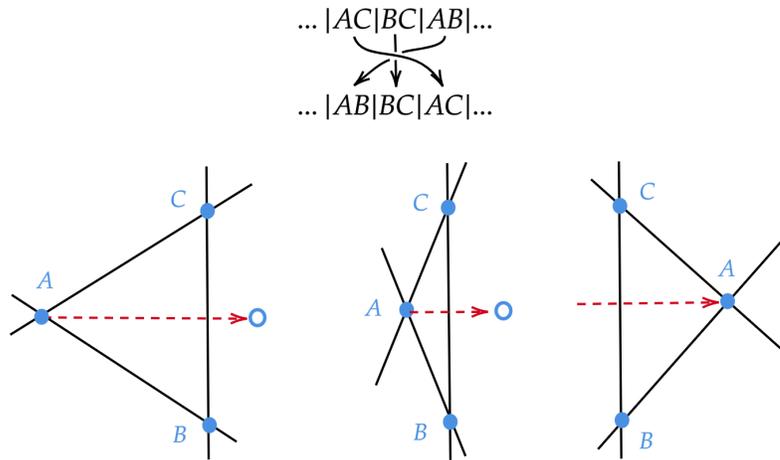


Figura 5.4: Movimiento
 El mover el punto A por la recta BC corresponde a intercambiar las rectas AC y AB

Usando la noción de homotopía previamente descrita, dado que el segmento de la recta BC forma parte de la frontera de la región donde se encuentra A , podemos mover el punto A arbitrariamente cerca a la recta BC de manera homotópica, por lo que no afectaríamos la representación de líneas de X . Sin embargo, mientras hacemos esto, las pendientes de las rectas AC , AB , BC (y su representación en \mathbb{RP}^1) se parecen cada vez más y cómo podemos acercarnos al punto A a la recta BC tanto como querramos, necesariamente las rectas tienen representaciones adyacentes en \mathbb{RP}^1 . Sabemos entonces que en la representación de líneas de X tiene que tener a las rectas AC , AB , BC adyacentes. Por

inspección en la Figura 5.4, podemos notar que la pendiente de BC permanece invariante bajo el movimiento $M_{BAC}(X)$, mientras que las pendientes de AB y AC se intercambian, por lo que sabemos entonces qué le pasa a nuestra representación de líneas de X . La representación de líneas de X originalmente tiene a las rectas AC, AB, BC adyacentes, con BC en medio de AB, AC , y el movimiento $M_{BAC}(X)$ nos devuelve otra configuración Y con otra representación de líneas, dónde la única diferencia es que intercambiamos las rectas AC y AB .

Por otro lado, si en la representación de líneas de X tenemos a las líneas $\cdots|AB|AC|BC|\cdots$, entonces intuitivamente el punto B se encuentra en una región cuya frontera está conformada en parte por un segmento de la recta AC y podemos acercar el punto B homotópicamente a AC tanto como querramos.

Formalmente, sea $[X] \in P(n)/\sim$, $B \in X$, $AC \in \mathcal{L}(X \setminus B)$ tal que AC forma parte de la frontera de la región de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}(X)$ donde se encuentra B , entonces el movimiento $M_{ABC}([X])$ nos devuelve otra clase $[Y] \in P(n)/\sim$, donde $X \setminus B = X \setminus Y$ y $B \in Y$ se encuentra en la región adyacente a la región donde se encontraba en X , separada por AC .

5.3. Grafo de configuraciones

Notemos que toda configuración X de $P(n)$ o $[X]$ de $P(n)/\sim$ puede ser alcanzada empezando con cualquier configuración fija X_0 por medio de una secuencia de homotopías y movimientos. Por lo tanto, podemos generar toda la lista de posibles configuraciones de Ω_n/\simeq_L a partir de una configuración conocida y aplicando el movimiento siempre que sea posible (y posiblemente intercambiando rectas disjuntas).

Podemos entonces estudiar las diferentes clases de equivalencia de $P(n)/\sim$ y cómo es que estas están conectadas unas con otras. Definimos entonces el siguientes grafo: G_{\sim}^n tiene como vértices las clases de equivalencia de $P(n)/\sim$ y dos vértices $[X], [Y]$ están conectados si existe un movimiento tal que $M_*([X]) = [Y]$. Por lo mencionado anteriormente, este grafo es conexo. Además, podemos definir los grafos $G_{\sim_R}^n, G_{\simeq_L}^n, G_{\simeq_C}^n$ de manera similar, donde los vértices son las clases de equivalencia de $\sim_R, \simeq_L, \simeq_C$ respectivamente, y dos vértices están conectados si existen representantes en dichas clases de equivalencia tales que podemos llegar de uno al otro por algún movimiento. Más adelante vamos a demostrar que $\simeq_L \implies \simeq_C$, por lo que existen las proyecciones naturales

$$G_{\sim}^n \rightarrow G_{\sim_R}^n \rightarrow G_{\simeq_L}^n \rightarrow G_{\simeq_C}^n$$

Por ejemplo, G_{\sim}^3 posee solo dos configuraciones o vértices conexos: un triángulo ABC y su reflejo ACB , Figura 5.5.

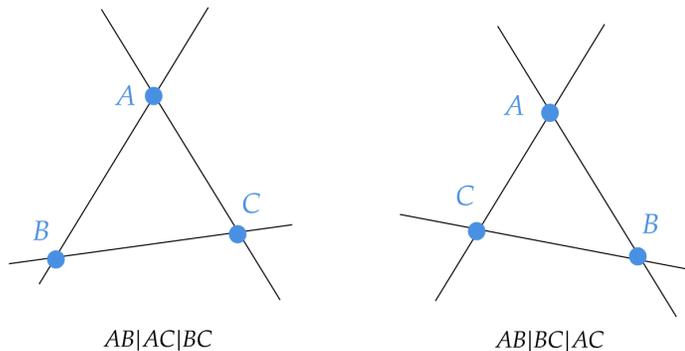


Figura 5.5: Configuraciones de G_{\sim}^3

Otro ejemplo es G_{\sim}^4 , que se muestra en la Figura 5.6. Cada vértice representa una posible configuración de $P(4)/\sim$. Los puntos de las configuraciones fueron etiquetados con las letras A, B, C, D .

Por simplicidad, los vértices etiquetados de la forma ABC , representan la configuración del triángulo ABC con el cuarto punto D en el interior de dicho triángulo. Por otro lado, los vértices etiquetados de la forma $ABCD$ representan la configuración dada por un cuadrado con vértices $ABCD$. Dos vértices están conectados sí y sólo si esas dos configuraciones son adyacentes, es decir, podemos pasar de la primera a la segunda configuración realizando un solo movimiento.

Podemos observar G_{\sim}^4 en la Figura 5.6 desde diferentes puntos de vista. Resulta que G_{\sim}^4 es un dodecahedro rómbico [[Abrir en Geogebra](#)].

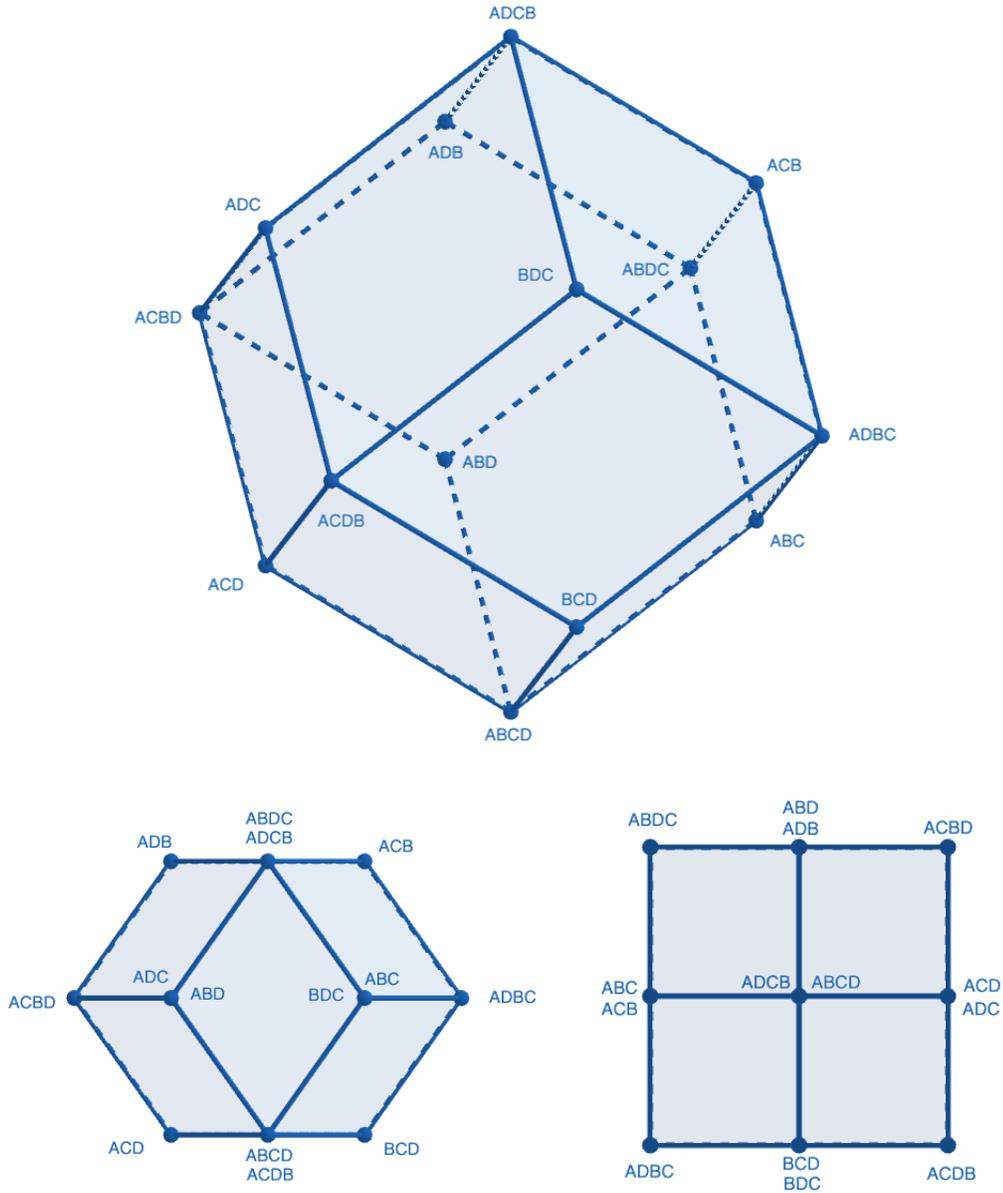


Figura 5.6: Diferentes vistas de G_{\sim}^4

A continuación se muestra $G_{\sim_R}^4$ en la Figura 5.7, que tiene la mitad de los vértices que G_{\sim}^4 . De hecho, es igual a G_{\sim}^4 con los vértices opuestos identificados.

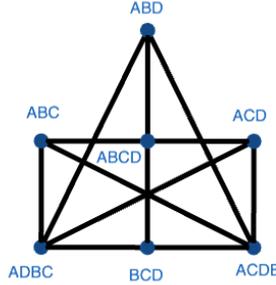


Figura 5.7: Representación de $G_{\sim_R}^4$

A continuación se muestra $G_{\sim_C}^4$ en la Figura 5.8. Notemos que solo tiene dos vértices, que corresponden a los dos tipos de vértices en G_{\sim}^4 : los que tienen 4 puntos adyacentes y los que tienen 3 puntos adyacentes, que corresponden a la configuración convexa y a la configuración no convexa, respectivamente.



Figura 5.8: Representación de $G_{\sim_L}^4 = G_{\sim_C}^4$

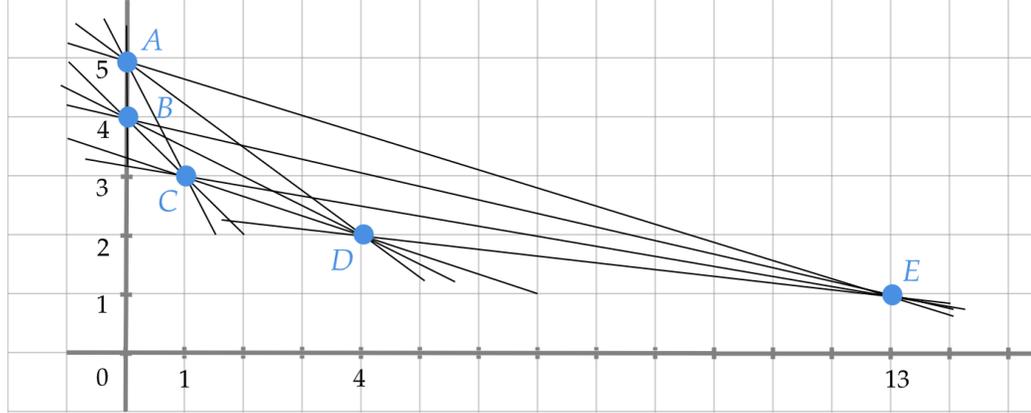
Podríamos intentar visualizar de la misma forma el grafo de configuraciones para 5 puntos, i.e. G_{\sim}^5 . Sin embargo, el número de posibles configuraciones crece demasiado rápido, de tal forma que se vuelve difícil de calcular y visualizar. Aún así, conocemos cierta estructura de G_{\sim}^5 : sabemos que una configuración de 5 puntos en el plano, tiene $\binom{5}{4} = 5$ configuraciones de 4 puntos como subconjuntos. Por lo que G_{\sim}^5 debe tener 5 copias de G_{\sim}^4 como grafos menores.

5.4. Configuración convexa

Ahora construimos un ejemplo importante para ilustrar la representación de líneas, Figura 5.9. Este ejemplo nos será útil más adelante. Vamos a construir una configuración convexa, denotada por $\Delta_n \in P(n)$, de tal modo que nos aseguramos que cada recta que agregamos tiene menor pendiente que todas las anteriores, por lo que vamos a conocer su representación de líneas. Procedemos de la siguiente forma:

Supongamos que tenemos n puntos $x_0, x_1 \dots x_{n-1}$ cuyas coordenadas vamos a definir a continuación. Coloquemos a x_0 en $(0, n)$ y a x_1 en $(0, n-1)$. Ahora, para el tercer punto x_2 , existe el menor entero $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que si colocamos x_2 en $(1, n-2)$ la pendiente de la recta x_0x_1 es mayor que la pendiente de la recta x_1x_2 . Podemos continuar con este proceso y colocar cada x_i en $(k_i, n-i)$, donde k_i es suficientemente grande para asegurar que las nuevas líneas inducidas tienen menor pendiente que todas las rectas previamente inducidas. Aquí se muestra una función recursiva para generar tales coordenadas $k_i := i(k_{i-1} - k_{i-2}) + 1$. Renombrando los puntos en la construcción previa, sea $\Delta_n \in P(n)$ dada por los puntos $A, B, C, D, E, F \dots$ en la configuración anterior, tenemos que

$$\mathcal{L}(\Delta_n) = AB|AC|BC|AD|BD|CD|AE|BE|CE|DE|AF|BF|CF|DF|EF| \dots$$



$$AB|AC|BC|AD|BD|CD|AE|BE|CE|DE$$

Figura 5.9: Construcción de configuración convexa

Como conocemos la representación de líneas de Δ_n y sabemos que todo movimiento en los puntos equivale a un movimiento en la representación de líneas, y además, toda configuración puede ser alcanzada por movimientos y homotopías, podemos generar la lista de todas las clases de equivalencia de $P(n)/\sim$ y por ende de $P(n)/\simeq_L$. En los anexos se muestra una tabla con representaciones de cada clase para $n = 4, 5, 6$.

5.5. Equivalencia entre representación por líneas y convexidad

Propiedad 1. Sean $X, Y \in P(n)$, entonces $X \simeq_h Y \implies X \simeq_L Y$, y $X \simeq_h Y \implies X \simeq_C Y$

Demostración. Nótese que en nuestra definición de homotopía, ningún punto atraviesa ninguna línea inducida por los demás puntos, por lo que en ningún momento se afecta la representación de líneas ni la convexidad. \square

Lema 1. Sea $X \in P(n)$, entonces

$$X \simeq_C \Delta_n \iff X \simeq_L \Delta_n$$

Demostración. (\implies) Notemos que cada configuración convexa X puede ser homotópicamente deformada en un polígono regular en el círculo unitario. Para ver esto, consideremos el disco más pequeño que contiene a todos los puntos de X , cuya frontera es un círculo que contiene por lo menos dos puntos de X , nombrémoslos A y B . Ahora, escojamos una orientación, e.g. en el sentido de las agujas del reloj, y procedemos a mover el punto adjacente a A en esa dirección. Podemos mover ese punto de manera homotópica al círculo y continuamos en el sentido de las agujas del reloj, moviendo los puntos uno por uno de manera homotópica al círculo. Una vez terminamos, podemos ajustar los puntos siempre de manera homotópica para formar un polígono regular. Por último, aplicamos la rotación, traslación y escalamiento necesarios para poner a los puntos en el círculo unitario, con un punto en $(0, 1)$. Como las homotopías también pueden aplicarse en la dirección contraria, en particular podemos componer la homotopía que lleva a X al polígono regular con la homotopía que lleva el polígono regular a Δ_n y obtenemos una homotopía entre X y Δ_n . Como la relación de homotopía preserva la equivalencia de \simeq_L , $X \simeq_L \Delta_n$.

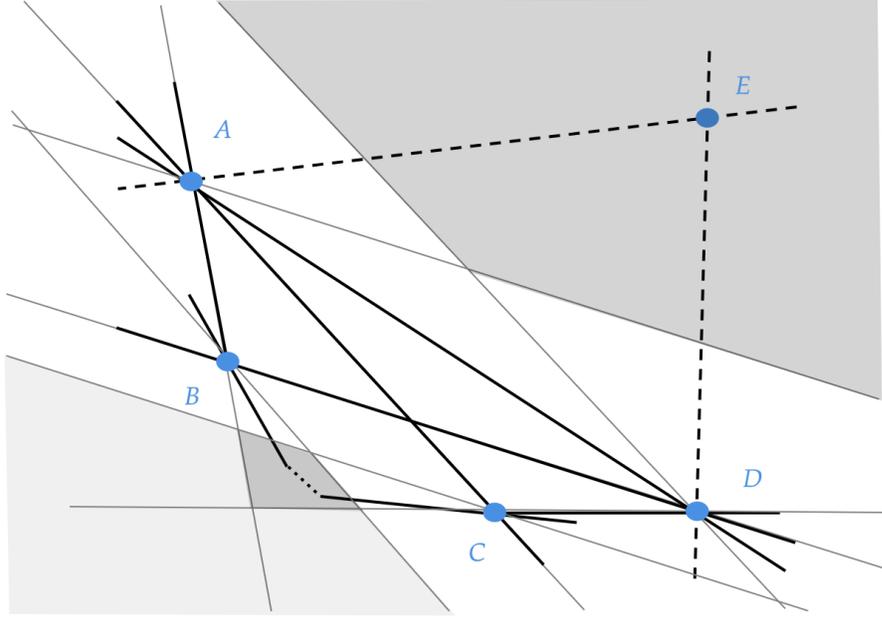


Figura 5.10: Esbozo de demostración

Las condiciones dadas por la representación de líneas nos aseguran que el punto E se encuentre en la región indicada. La primera condición nos da las regiones grises. La segunda condición nos restringe a las regiones gris oscuro.

(\Leftarrow) Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{Z}^+$. El caso del triángulo es trivial. Nuestro caso base, el cuadrado, podemos comprobar exhaustivamente. Asumamos entonces que $n \geq 4$, y que $X \simeq_L \Delta_n \implies X \simeq_C \Delta_n, \forall X \in P(n)$. Sea $X_{n+1} \in P(n+1)$ con puntos $\{A, B, \dots, C, D, E\}$ tal que $X_{n+1} \simeq_L \Delta_{n+1}$. Entonces, luego de un posible renombramiento de los puntos y una posible reflexión, la representación de líneas de X es

$$AB|\dots|AC|BC|\dots|AD|BD|\dots|CD|AE|BE|CE|DE|AF|BF|CF|DF|EF$$

salvo un posible intercambio de rectas disjuntas. Por hipótesis inductiva, $X_n := X_{n+1} \setminus E$ es tal que $X \simeq_L \Delta_n$ por lo que X es convexo. Usando la representación de líneas de X_{n+1} podemos asegurar que localmente, $BD < BE < CE < AC$. Esto nos induce 2 regiones en el plano donde podría estar E , pero la condición $AE < BE < \dots < CE < DE$ restringe a E a estar en una región que hace que X_{n+1} sea convexo, como se muestra en la Figura 5.10. \square

Lema 2. Sean $X, Y \in P(n)$, entonces

$$X \simeq_L Y \implies X \simeq_C Y$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{Z}^+$, con caso base el triángulo, el cual es trivial. Asumamos entonces que la propiedad se cumple para $n \geq 3$. Sean $X, Y \in P(n+1)$ tales que $X \simeq_L Y$. Salvo una posible reflexión y un renombramiento de los puntos (lo cual no afecta la convexidad), tenemos que $\mathcal{L}(X) \sim \mathcal{L}(Y)$. En particular, podemos eliminar un punto x de X y su correspondiente x' de Y para obtener que $\mathcal{L}(X \setminus x) \sim \mathcal{L}(Y \setminus x')$. Repitiendo este proceso cuanto sea necesario, tenemos que para cualquier subconjunto S de X y su respectivo subconjunto S' de Y , $S \simeq_L S'$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $|\hat{X}(S)| = |\hat{Y}(S')|$ para todo $S \subset [n+1]$.

Ahora bien, notemos lo siguiente: Todo lado del polígono \hat{X} está determinado por dos puntos, digamos $A, B \in X$, tales que todos los triángulos que contienen esos dos puntos, i.e. ABC con

$C \in X \setminus \{A, B\}$, se encuentran en el mismo semiplano inducido por AB . Además, $\mathcal{L}(X)$ contiene siempre a las rectas AB, AC, BC y su orden nos determinan la orientación del triángulo, es decir, en qué semiplano inducido por AB cae el punto C . Por lo que los lados de \hat{X} están determinados por $\mathcal{L}(X)$, en particular $\mathcal{L}(X)$ determina $\partial\hat{X}$. Como $\mathcal{L}(X) \sim \mathcal{L}(Y)$ entonces $|\hat{X}| = |\partial\hat{X}| = |\partial\hat{Y}| = |\hat{Y}|$ y tenemos que $|\hat{X}(S)| = |\hat{Y}(S')|, \forall S \subseteq [n+1] \implies X \simeq_C Y$. \square

Propiedad 2. Sean $X, Y \in P(n), n \geq 4$ tales que $\mathcal{L}(X \setminus x) \sim_R \mathcal{L}(Y \setminus x')$, para todo $x \in X$ y x' su respectiva imagen en Y , entonces $\mathcal{L}(X) \sim_R \mathcal{L}(Y)$

Demostración. Lo que vamos a demostrar es que $\mathcal{L}(X)$ está determinado por el conjunto de todas las representaciones $\mathcal{L}(X \setminus x), x \in X$. Sea entonces $X = \{A, B, \dots, C, D\} \in P(n), n \geq 4$. Definamos $L_x = \mathcal{L}(X \setminus x)$, para todo $x \in X$. Notemos que L_C contiene a todas las rectas de X que no pasan por C , similarmente L_D contiene todas las rectas de X que no pasan por D . En particular $L_C \cup L_D$ contienen a todas las rectas excepto a CD . Ahora bien, podemos construir $L_{CD} = \mathcal{L}(X) \setminus CD$ de la siguiente manera: Empezamos con la recta AB , es decir $L_{CD}^0 := AB$ luego observamos qué rectas siguen en L_C y L_D , digamos s, t respectivamente. En el caso sean dos rectas disjuntas, no importa en qué orden las concatenamos a L_{CD}^i para obtener $L_{CD}^{i+1} := L_{CD}^i |s|t$. En el caso las rectas no son disjuntas, entonces las dos rectas s, t son inducidas por 3 puntos, y escogemos un cuarto punto x diferente a esos 3. Entonces L_x contiene a las rectas s, t y nos brinda el orden en el que aparecen, sin pérdida de generalidad supongamos que $s < t$. Entonces construimos $L_{CD}^{i+1} := L_{CD}^i |s|t$. Repitiendo este proceso r veces, eventualmente habremos incluido todas las rectas, a excepción de CD para obtener $\mathcal{L}(X) \setminus CD = L_{CD} = L_{CD}^r$. Finalmente, la recta CD tiene una posición determinada en $\mathcal{L}(X)$ dada por su posición en cada L_x , por lo que podemos construir $\mathcal{L}(X)$ a partir de todos los L_x . \square

Corolario 1. Sean $X, Y \in P(n)$ tales que $\mathcal{L}(ABC) \sim \mathcal{L}(A'B'C')$, para todo triángulo formado por $A, B, C \in X$ y sus respectivas imágenes $A', B', C' \in Y$, entonces

$$\mathcal{L}(X) \sim \mathcal{L}(Y)$$

Ahora bien quisieramos que nuestra representación $P(n)/\simeq_L$ de Ω_n fuese completa y exacta, es decir, exista una biyección entre $P(n)/\simeq_L$ y $\Omega_n = P(n)/\simeq_C$, lo cual lo podemos escribir de la siguiente manera:

Conjetura

Sean $X, Y \in P(n)$, entonces

$$X \simeq_C Y \iff X \simeq_L Y$$

Si bien todavía no podemos demostrar esto, podemos demostrar una versión más débil que depende de las propiedades de las funciones que preservan a la frontera.

Propiedad 3. Sean $X, Y \in P(n)$ tales que $X \simeq_C Y$ y supongamos que $\exists \sigma \in C(X, Y) \ni \forall S \subseteq [n]$ con $|S| = 4, \sigma(\partial\hat{X}(S)) = \partial\hat{Y}(S)$, entonces $X \simeq_L Y$

Demostración. El resultado se obtiene de la propiedad anterior y del hecho que tal $\sigma \in C(X, Y)$ que preserva la frontera para subconjuntos S de 4 puntos determina completamente a $\mathcal{L}(S)$ salvo \sim_R . En efecto, si $[S], [S'] \in \Omega_4$ entonces $S \simeq_C S' \simeq_C \Delta_4$ o S y S' son un triángulo con un punto adentro. En el caso de que $S \simeq_C \Delta_4$, por el Lema 1, $S \simeq_L \Delta_4$, lo mismo para S' y podemos comprobar que $S \sim_R S'$. En el caso que S sea un triángulo con un punto adentro, notemos que todo $\sigma \in C(S, S')$ que preserva la frontera lo único que hace es permutar los vértices de dicho triángulo y mapea el punto del interior de S al punto del interior de S' . Toda permutación de un triángulo se puede escribir en términos de rotaciones y reflexiones. Las rotaciones no afectan a $\mathcal{L}(S)$ y las reflexiones son invariantes bajo \sim_R por lo que $S \sim_R S'$. Finalmente, como $\mathcal{L}(S) \sim_R \mathcal{L}(S'), \forall S \subseteq [n], |S| = 4$, podemos usar la propiedad anterior repetidas veces para obtener el resultado $\mathcal{L}(X) \sim_R \mathcal{L}(Y) \implies X \simeq_L Y$. \square

Ahora definimos una función sobre las representaciones de líneas. Vamos a mostrar que esta función induce una invariante y además muestra una inseperada relación con los números Eulerianos y polilogaritmos.

6.1. Definición

Sea $X \in P(n)$. Consideremos un ciclo C de tamaño $3 \leq k \leq n$ de \mathbb{S}_n . Entonces, definimos el **número de vueltas** $\varphi_X(C)$, o simplemente $\varphi(C)$, como el número de veces que debemos leer $\mathcal{L}(X)$ (de izquierda a derecha) para obtener todas las rectas descritas en C . Uno puede pensar en C como un camino en $X \cup \mathcal{L}(X)$ y de alguna forma mide los cambios de pendiente de las respectivas líneas. En la Figura 6.1 se muestra un ejemplo detallado del cálculo de φ para un ciclo.

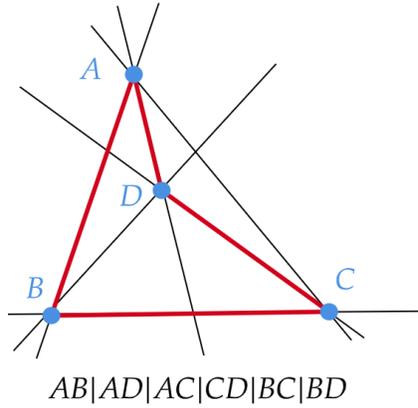
Una forma útil de interpretar la definición anterior es considerando el intervalo $[0, 1]$ identificando el 0 y el 1 (para formar un círculo). Ahora dividimos ese intervalo en $\binom{n}{2}$ subintervalos, uno por cada línea de $\mathcal{L}(X)$. Al inicio de cada uno de estos subintervalo colocamos cada línea, o el nombre de cada línea, según el orden de $\mathcal{L}(X)$. Luego, definimos $\rho(ABC)$ como la distancia entre la línea AB y la línea BC en nuestro intervalo, respetando el orden natural de $[0, 1]$. Es decir, $\rho(ABC)$ mide la distancia del intervalo $[AB, BC]$, donde posiblemente utilicemos la identificación de 0 y 1. Entonces

$$\varphi(x_0x_1 \cdots x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \rho(x_{i-1}x_i x_{i+1})$$

donde $x_i \in X$ y los índices están dados en módulo n .

Vamos a denotar como $\varphi[n, k]$ al conjunto de todos los ciclos de tamaño k con su respectivo φ -valor para una configuración $X \in P(n)$. Vamos a demostrar que la suma de $\varphi[n, k]$, denotada por $\sum \varphi[n, k]$, ¡es una invariante sobre todas las posibles configuraciones de n puntos!

Empezamos con AB seguido de BC .
 $ABCD = AB + BC + CD + DA$
 $AB|AD|AC|CD|BC|BD$



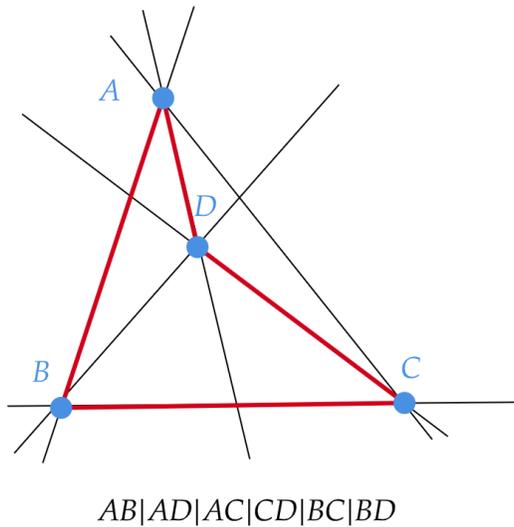
Como CD está antes de BC es necesario regresar al inicio, por lo que llevamos una vuelta.

$ABCD = AB + BC + CD + DA$
 $AB|AD|AC|CD|BC|BD$

Seguimos con este procedimiento hasta terminar de recorrer todas las líneas del ciclo y regresar a la primera línea.

$ABCD = AB + BC + CD + DA$
 $AB|AD|AC|CD|BC|BD$
 $\therefore \varphi(ABCD) = 3$

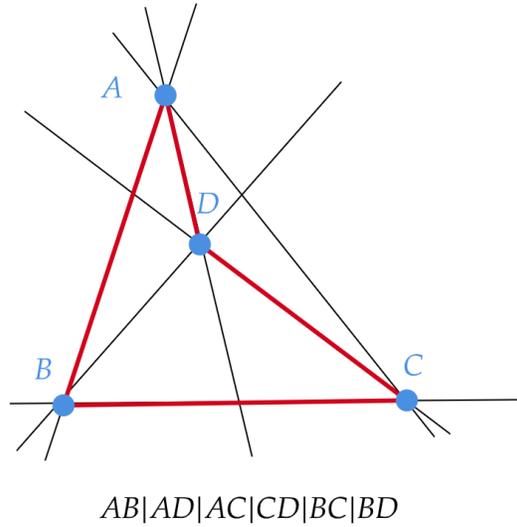
Figura 6.1: Cálculo de φ para el ciclo $ABCD$.



$ADCB = AD + DC + CB + BA$
 $AB|AD|AC|CD|BC|BD$
 $\therefore \varphi(ADCB) = 1$

$ABCD = AB + BC + CD + DA$
 $AB|AD|AC|CD|BC|BD$
 $\therefore \varphi(ABCD) = 3$

Figura 6.2: Cálculo de φ para el ciclo $ABCD$ y el ciclo opuesto $ADCB$.



$$\varphi(ADCB) = 1$$

$$\varphi(ACDB) = 1$$

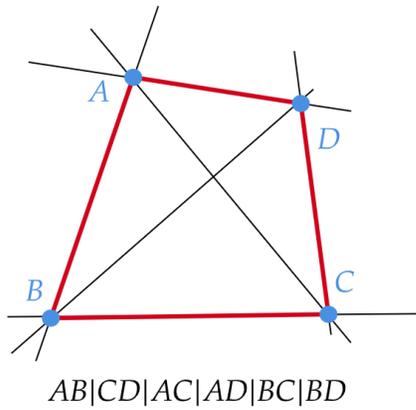
$$\varphi(ACBD) = 1$$

$$\varphi(ABCD) = 3$$

$$\varphi(ABDC) = 3$$

$$\varphi(ADBC) = 3$$

Figura 6.3: Cálculo de φ para una configuración no convexa.



$$\varphi(ADCB) = 2$$

$$\varphi(ACDB) = 2$$

$$\varphi(ACBD) = 2$$

$$\varphi(ABCD) = 2$$

$$\varphi(ABDC) = 2$$

$$\varphi(ADBC) = 2$$

Figura 6.4: Cálculo de φ para una configuración convexa.

6.2. Propiedades

Propiedad 4. El número de vueltas de un k -ciclo es a lo más $k - 1$, sin importar el número de puntos n , i.e. $\varphi(C) < |C|$

Propiedad 5. Sea $X \in P(n)$, entonces

$$\varphi(AB \dots CD) + \varphi(DC \dots BA) = n$$

Demostración. Empezemos calculando $\varphi(AB \dots CD)$ en la máxima recta $x_i x_{i+1}$. Nótese que $\varphi(AB \dots CD) = 1 + \# \{\text{descensos de las líneas } x_j x_{j+1} \text{ en } x_{i+1} \dots x_{i+n}\}$. Similarmente, para $\varphi(DC \dots BA)$ pero en este caso los descensos se convierten en ascensos y viceversa. Como el número total de ascensos es igual a $n - 2$, obtenemos el resultado. \square

Propiedad 6. Sea $X \in P(n)$. Entonces φ es invariante ante la acción de \mathbb{S}_n y reflexiones (también bajo el intercambio de rectas disjuntas). Por lo tanto, se puede extender a una función sobre $P(n)/\simeq_L$.

Demostración. El resultado se obtiene inmediatamente porque

$$\varphi_{\mathcal{L}(X)}(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_{\mathcal{L}(\sigma(X))}(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)})$$

para algún $\sigma \in \mathbb{S}_n$. La invarianza respecto a las reflexiones nos la da la propiedad anterior. \square

Lema 3. Dado $[X] \in P(n)/\simeq_L$, el número de ciclos de tamaño k cuyo φ -valor cambia después de un movimiento es

$$M[n, k] = 6 \frac{(n-3)!}{(n-k)!}$$

Es más, la mitad de estos ciclos incrementan su φ -valor en 1, y la otra mitad (que son los mismos ciclos pero una parte reflejada) decrementan su φ -valor en 1. Por lo que $\sum \varphi[n, k]$ es invariante sobre todo $P(n)/\simeq_L$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideremos el movimiento M_{ABC} para algún $X \in P(n)$ y supongamos que $\mathcal{L}(X) = \dots |AB|AC|BC| \dots$. Notemos entonces que los únicos ciclos cuyo φ -valor se ve afectado son aquellos que tienen a las letras consecutivas A, B, C , por ejemplo, los ciclos de la forma $C = \dots ABC \dots$, o bien $C = \dots BAC \dots$. Podemos contar cuántos de estos ciclos de tamaño k existen. El número de k ciclos que contienen a alguna permutación de ABC de n letras es precisamente $6 \frac{(n-3)!}{(n-k)!}$. Por otro lado, sea $C = [P]ABC[Q]$ uno de estos k -ciclos afectados por M_{ABC} , donde $[P]$ y $[Q]$ son el resto de las letras del ciclo. Notemos que $\mathcal{L}(X)$ permanece igual después del movimiento, salvo el intercambiar a las rectas $AB \leftrightarrow BC$, por lo que el cálculo de $\varphi(C)$ permanece igual en todo $[P]$ y en todo $[Q]$. Sin embargo, después del movimiento, $\mathcal{L}(X') = \dots |BC|AC|AB| \dots$, donde $X' = M_{ABC}(X)$, por lo que $\varphi_{X'}(C) = \varphi_X(C) + 1$. Además, consideremos el ciclo $\bar{C} = [P]CBA[Q]$. Similarmente, el cálculo de $\varphi(\bar{C})$ permanece igual en $[P]$ y en $[Q]$, pero ahora tenemos que $\varphi_{X'}(\bar{C}) = \varphi_X(\bar{C}) - 1$. En general, para todo movimiento M_{ABC} , con $A, B, C \in X$, los ciclos afectados son de la forma $C = [P]RST[Q]$, donde RST es una permutación de A, B, C . Más aún para cada uno de estos C corresponde un $\bar{C} = [P]TSR[Q]$ por lo que forman parejas, donde uno de los dos incrementa su φ -valor en 1 y el otro lo decrementa en 1, por lo tanto, la suma sobre todos los ciclos se mantiene constante. \square

Teorema 1. Sea $[X] \in \Omega_n$. Para cualquier k , $3 \leq k \leq n$,

$$\sum \varphi[n, k] = \frac{n!}{2(n-k)!}$$

Demostración. Procedemos por inducción fuerte sobre $n \in \mathbb{Z}^+$. Para el caso base, $n = 3$, notemos que solamente hay una configuración en $\Omega_3 = P(3)/\simeq_L$, el triángulo, cuyos ciclos son ABC y ACB , los cuales tienen φ -valor de 1 y 2, por lo que la igualdad se cumple: $\sum \varphi[3, 3] = 3 = \frac{3!}{2}$. Ahora, asumamos que el resultado es válido para todos los valores hasta algún n . Consideremos el caso de $n+1$ puntos en una configuración convexa Δ_{n+1} y sea $k \leq n$. Entonces, cada subconjunto de tamaño k está también en configuración convexa y podemos calcular $\sum \varphi[n, k]$ usando nuestra hipótesis inductiva para calcular $\sum \varphi[k, k]$ para cada uno de los subconjuntos de tamaño k y sumarlos, i.e. $\sum \varphi[n, k] = \binom{n}{k} \sum \varphi[k, k] = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{2(k-k)!} = \frac{n!}{2(n-k)!}$. Esto también es válido para $\sum \varphi[n+1, n]$.

Ahora, para $\sum \varphi[n+1, n+1]$, notemos que estamos calculando $\varphi(C)$ para todos los $(n+1)$ -ciclos de X y luego los sumamos. Recordemos que podemos descomponer a $\varphi(x_1x_2 \cdots x_nx_{n+1})$ como $\sum_{i=1}^{n+1} \rho(x_{i-1}x_ix_{i+1})$. Sin pérdida de generalidad, podemos contar el número de veces que ABC aparece en nuestra lista de $(n+1)$ -ciclos: Si un ciclo contiene a ABC podemos reescribirlo para que empiece con ABC y luego obtenemos que el número de ciclos que contienen a ABC es $((n+1)-3)! = (n-2)!$.

Por otro lado, consideremos todos los subconjuntos de X de tamaño n , que sabemos que son $n+1$. Consideremos todos los n -ciclos de X y contemos nuevamente el número de veces que ABC aparece en nuestra lista: para cada punto x_i , diferente de A, B, C , podemos contar el número de veces que ABC aparece en su lista de n -ciclos, y hay $(n-3)!$ n -ciclos en $X \setminus x_i$ que contienen a ABC . En total tenemos que existen $((n+1)-3) \cdot (n-3)! = (n-2)!$ ocurrencias de ABC en la lista de todos los posibles n -ciclos. Pero como tenemos el mismo número de ocurrencias de ABC en ambos escenarios y $\sum \varphi$ se puede factorizar en términos de $\rho(ABC)$ para todas las tripletas ABC de puntos de X , tenemos que $\sum \varphi[n+1, n+1] = (n+1) \cdot \sum \varphi[n, n] = (n+1) \cdot \frac{n!}{2(n-n)!} = \frac{(n+1)!}{2(n+1-(n+1))!}$ \square

6.3. Relación con teoría de grupos

En esta sección, vamos a mostrar una pequeña relación que existe entre nuestra función φ y teoría de grupos. Para ello, primero vamos a definir los siguientes conjuntos:

Sea C_k el conjunto de todos los ciclos de tamaño k en k puntos. Por ejemplo, tenemos que $C_3 = \{ABC, ACB\}$ y $C_4 = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB\}$. Ahora, podemos definir un monoide sobre este conjunto. Recordemos que un monoide es un conjunto S junto con una operación binaria \cdot sobre S que es asociativa y tiene elemento neutro. En este caso, definiremos $Mon(C_k)$ como el monoide generado por $C_k \cup \{\emptyset\}$ y la operación concatenación. Por ejemplo, tenemos que $ABCD, ABDC \in Mon(C_4)$ y $ABCD \cdot ABDC = ABCDABDC \in Mon(C_4)$. Aquí el elemento neutro es la palabra vacía.

Ahora, notemos que cada ciclo c tiene un ciclo inverso, denotado por \bar{c} . Por ejemplo, el inverso de $ABCD \in Mon(C_4)$ es $\overline{ABCD} = DCBA = ADCB$. Entonces, podemos definir el grupo libre generado por C_k , denotado como $F(C_k)$, donde nuevamente nuestra operación es la concatenación. Este grupo está generado por todos los elementos de C_k con la condición que si tenemos un ciclo c seguido de su inverso \bar{c} , estos se cancelan. Por ejemplo, si $a, c \in F(C_k)$, $a\bar{c} = a \in F(C_k)$.

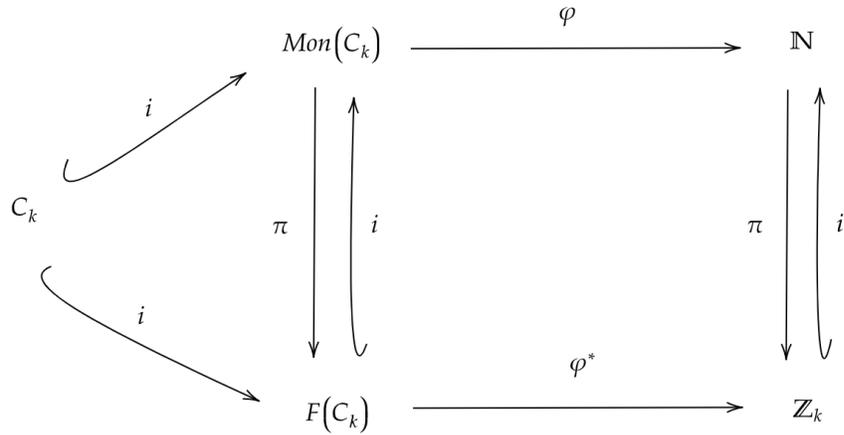
Notemos que $F(C_k) \subset Mon(C_k)$, por lo que tenemos una inclusión natural $i : F(C_k) \rightarrow Mon(C_k)$, donde $i(c) = c$. Así mismo, tenemos una proyección canónica $\pi : Mon(C_k) \rightarrow F(C_k)$, donde $\pi(c)$ lo obtenemos a partir de c , cancelando inversos. Por ejemplo, $\pi(a\bar{c}) = a$.

Por otro lado, de la misma definición de φ , podemos extender el dominio de φ a $Mon(C_k)$ en lugar de C_k . Es decir, tenemos que $\varphi(ABCD \cdot ADBC) = \varphi(ABCDADBC) = \varphi(ABCD) + \varphi(ADBC)$. Por lo que φ realmente es un homomorfismo entre monoides, formalmente $\varphi : Mon(C_k) \rightarrow \mathbb{N}$, donde $\varphi(\emptyset) := 0$.

Ahora bien, recordemos dos propiedades importantes de φ :

- $\varphi(c) + \varphi(\bar{c}) = k, \forall c \in C_k$
- $1 \leq \varphi(c) < k$

Notemos que por la primera propiedad, si identificamos k con 0, entonces tendríamos que $\varphi(\emptyset) = \varphi(c\bar{c}) = \varphi(c) + \varphi(\bar{c}) = k \equiv 0$. Esto es necesario para poder tener un homomorfismo entre grupos. Por lo tanto, podemos definir $\varphi^* : F(C_k) \rightarrow \mathbb{Z}_k$, donde $\varphi^*(c) := \varphi(c) \pmod{k}$. Notemos que en efecto φ^* es un homomorfismo entre grupos. De esto, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:



Una propiedad importante es que los generadores de $F(C_k)$ no pertenecen al kernel de φ^* . Como el diagrama conmuta, toda función φ que cumple con dichas propiedades induce una función φ^* , y toda función φ^* induce también una función φ . Por lo que podemos estudiar las posibles φ entendiendo los posibles homomorfismos entre $F(C_k)$ y \mathbb{Z}_k , donde $F(C_k)$ es el grupo libre generado por $\frac{(k-1)!}{2}$ generadores.

7.1. Números Eulerianos y polilogaritmos

En esta sección describimos brevemente a los números Eulerianos y a los polilogaritmos, pues nos serán útiles en la siguiente sección. Definimos a los polilogaritmos de la siguiente manera:

$$Li_s(z) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^s}$$

para $s, z \in \mathbb{C}$. Esta definición se puede interpretar como una generalización de la expansión en serie del logaritmo. [5]

Por otro lado, vamos a definir a los números Eulerianos. Para todo $w \in \mathbb{S}_n, w : [n] \rightarrow [n]$ definimos un *descenso* como la posición i para la cuál $w(i) > w(i+1)$, y denotamos como $Des(w)$ al conjunto de descensos de w ,

$$Des(w) := \{i : w(i) > w(i+1)\}$$

Sea $des(w)$ al número de descensos de w , i.e.

$$des(w) := |Des(w)| = |\{i : w(i) > w(i+1)\}|$$

Por ejemplo, si $w = 3125647$, entonces $des(w) = 2$ porque hay descensos en la posición 1 (porque $3 > 1$) y en la posición 5 (porque $6 > 4$).

Definimos los números Eulerianos, denotados por $\langle n \rangle_k$, como el número de permutaciones en \mathbb{S}_n con k descensos, i.e.

$$\langle n \rangle_k := |\{w \in \mathbb{S}_n : des(w) = k\}|$$

Además, existe una relación entre los polilogaritmos y los números Eulerianos, concretamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle n \rangle_i z^{n-i} = Li_{-n}(z)(1-z)^{n+1}$$

[7]

7.2. Etiqueta de una configuración

Dada una configuración $[X] \in P(n)/\simeq_L$, fijamos $k \in \mathbb{Z}^+$, con $3 \leq k \leq n$. Para $1 \leq i < n$, definimos a

$$a_i := \#\{k\text{-ciclos en } X \text{ con } \varphi\text{-valor igual a } i\}$$

Definimos la k -**etiqueta** de X , denotada por $\Gamma_k(X)$, como la tupla

$$\Gamma_k(X) := (a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$$

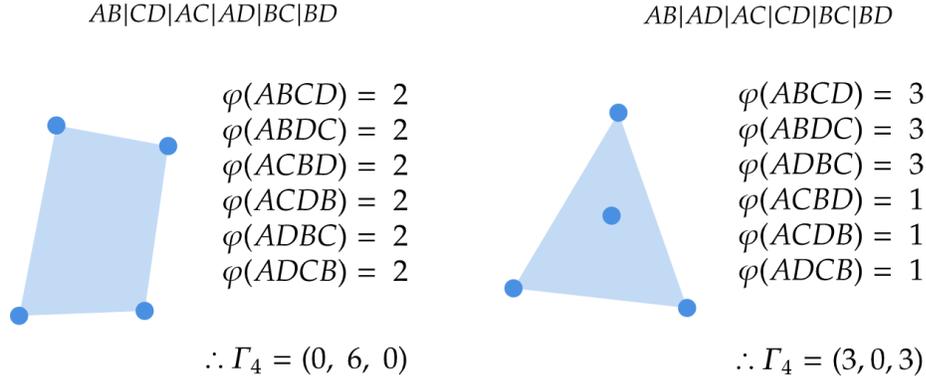


Figura 7.1: Cálculo de Γ_4 para las configuraciones de Ω_4

Definimos la **etiqueta** $\Gamma(X)$ como la colección de todas las k -etiquetas de X .

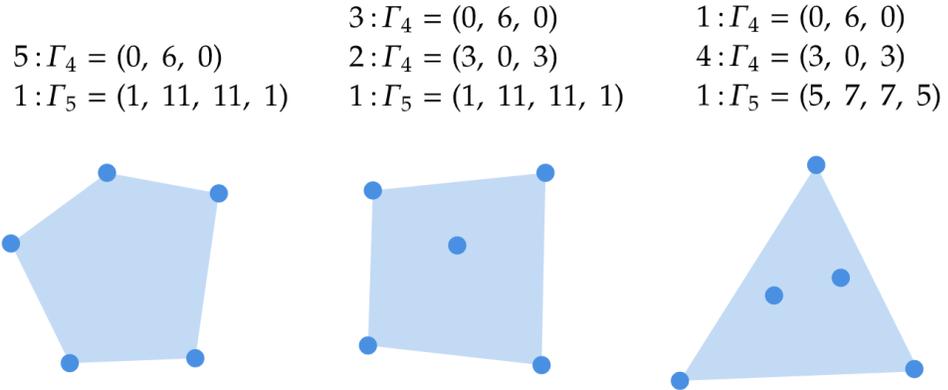


Figura 7.2: Cálculo de Γ para las configuraciones de Ω_5
 Nótese que calculamos Γ_4 para todos los subconjuntos de 4 puntos.

Observemos que Γ_k y Γ son funciones sobre $P(n)/\simeq_L$, dado que están dadas en términos de φ . Por lo ejemplos computados hasta el momento ($n \leq 6$), pareciera que Γ determina la configuración de $P(n)/\simeq_L = \Omega_n$, por lo que hacemos la siguiente conjetura:

Conjetura: Cada $[X] \in \Omega_n$ está determinado por $\Gamma(X)$

7.3. Resultados

Obtenemos la siguiente secuencia de etiquetas para las primeras configuraciones convexas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_3(\Delta_3) &: (1, 1) \\
\Gamma_4(\Delta_4) &: (0, 6, 0) \\
\Gamma_5(\Delta_5) &: (1, 11, 11, 1) \\
\Gamma_6(\Delta_6) &: (0, 30, 60, 30, 0) \\
\Gamma_7(\Delta_7) &: (1, 57, 302, 302, 57, 1) \\
\Gamma_8(\Delta_8) &: (0, 140, 1120, 2520, 1120, 140, 0) \\
\Gamma_9(\Delta_9) &: (1, 247, 4293, 15619, 15619, 4293, 247, 1) \\
\Gamma_{10}(\Delta_{10}) &: (0, 630, 13860, 90090, 153720, 90090, 13860, 630, 0) \\
\Gamma_{11}(\Delta_{11}) &: (1, 1013, 47840, 455192, 1310354, 1310354, 455192, 47840, 1013, 1) \\
\Gamma_{12}(\Delta_{12}) &: (0, 2772, 144144, 2239776, 9657648, 15828120, 9657648, 2239776, 144144, 2772, 0)
\end{aligned}$$

Nótese que para $n = k$ impar obtenemos (hasta el momento) exactamente los números Eulerianos $\langle k-1 \rangle_i$ [A008292] [2] los cuales se pueden expresar en términos de polilogaritmos.

Para $n = k$ par, nótese que todas las tuplas son divisibles para el primer término no nulo, que parece estar dado por [A002457][3], dada por la fórmula $a(m) = (2m + 1)!/m!^2$. Factorizando obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Gamma_4(\Delta_4)/6 &: (0, 1, 0) \\
\Gamma_6(\Delta_6)/30 &: (0, 1, 2, 1, 0) \\
\Gamma_8(\Delta_8)/140 &: (0, 1, 8, 18, 8, 1, 0) \\
\Gamma_{10}(\Delta_{10})/630 &: (0, 1, 22, 143, 244, 143, 22, 1, 0) \\
\Gamma_{12}(\Delta_{12})/2772 &: (0, 1, 52, 808, 3484, 5710, 3484, 808, 52, 1, 0)
\end{aligned}$$

Estos números parecen estar dados por [A165889] [4] los cuales, de nuevo, pueden ser expresados en términos de polilogaritmos. Los números obtenidos coinciden con los coeficientes del polinomio

$$p_m(x) = (1 - x)^{(2m+4)} Li_{-1-m}(x)^2/x^2$$

7.4. Relación con polilogaritmos

Recopilando los resultados anteriores, y ajustando los índices de las secuencias para n par, podemos escribir los coeficientes de las n -etiquetas de una configuración convexa en términos de polilogaritmos de la siguiente manera:

Conjetura: Los coeficientes de $\Gamma_n(\Delta_n)$ están dados por los coeficientes del polinomio

$$p_n(z) = \begin{cases} \frac{(1-z)^n}{z} Li_{-2k}(z) & n = 2k + 1 \\ k \binom{n-1}{k} \frac{(1-z)^n}{z} Li_{-k+1}^2(z) & n = 2k \end{cases}$$

Esto ha sido verificado para $n \leq 12$

Lo expresamos en términos de polilogaritmos en lugar de utilizar números Eulerianos porque para configuraciones no convexas, al menos para $n \leq 5$, los coeficientes también están dados en términos de polilogaritmos. Por ejemplo, la única configuración no convexa $X_4 \in \Omega_4$ de 4 puntos tiene $\Gamma_4(X_4) = (3, 0, 3)$ cuyos coeficientes están dados por

$$3 + 3z^2 = \frac{(1-z)^4}{z} \left(2Li_{-1}(z) + Li_{-3}(z) \right)$$

Además, existe una configuración no convexa $X_5 \in \Omega_5$ con $\Gamma_5(X_5) = (5, 7, 7, 5)$ cuyos coeficientes están dados por

$$5 + 7z + 7z^2 + 5z^3 = \frac{(1-z)^5}{z} \left(4Li_{-2}(z) + Li_{-4}(z) \right)$$

Por otro lado, existe una configuración no convexa $X_6 \in \Omega_6$ con $\Gamma_6(X_6) = (4, 30, 52, 30, 4)$ cuyos coeficientes están dados por

$$4 + 30z + 52z^2 + 30z^3 + 4z^4 = \frac{(1-z)^6}{z} \left(\frac{1}{3}Li_{-1}(z) + \frac{8}{3}Li_{-3}(z) + Li_{-5}(z) \right)$$

7.5. Conjetura de Erdős-Szekeres

A continuación describimos un posible esquema de trabajo para atacar la conjetura de Erdős-Szekeres:

Si logramos demostrar que en efecto $\Gamma(X)$ determina a cada configuración $[X] \in \Omega_n$, y además logramos demostrar las fórmulas para calcular $\Gamma(\Delta_n)$, entonces tendremos una buena representación de las posibles configuraciones de puntos en el plano. Además, sabiendo que $\sum \varphi[n, k]$ es constante y sabiendo que todas las posibles configuraciones pueden ser alcanzadas haciendo movimientos los cuales afectan únicamente a $M[n, k] = 6 \frac{(n-3)!}{(n-k)!}$ ciclos, podemos intentar encontrar cotas para el número de subconjuntos convexos que se preservan en X .

Por ejemplo, vamos a demostrar la conjetura de Erdős-Szekeres para $k = 4$: Queremos demostrar que siempre existe un subconjunto convexo de 4 puntos en toda configuración de $2^{4-2} + 1 = 5$ puntos. Primero, sabemos que $\Gamma_4(\Delta_4) = (0, 6, 0)$ y como $M[4, 4] = 6$, $\sum \varphi[4, 4] = 12$, las únicas dos posibles configuraciones de 4 puntos tienen $\Gamma_4(0, 6, 0)$ y $(3, 0, 3)$ respectivamente.

Consideremos a Δ_5 . Sabemos que existen $\binom{2^{4-2}+1}{4} = \binom{5}{4} = 5$ subconjuntos de 4 puntos, los cuales son equivalentes a Δ_4 . Además, $\Gamma_5(\Delta_5) = (1, 11, 11, 1)$ y $\Gamma_4(\Delta_4) = (0, 6, 0)$. Por lo tanto, $\Gamma(\Delta_5) = \{1 : (1, 11, 11, 1), 5 : (0, 6, 0)\}$. Luego, $M[5, 4] = 12$ por lo que para cada movimiento, siempre existen exactamente $M[5, 4]/M[4, 4] = 12/6 = 2$ subconjuntos de 4 puntos que se ven afectados. En particular, cambian su Γ_4 entre $(0, 6, 0)$ y $(3, 0, 3)$. Pero como inicialmente empezamos con 5 subconjuntos con $\Gamma_4 = (0, 6, 0)$ y 2 no divide a 5, siempre va a existir una configuración con $\Gamma_4 = (0, 6, 0)$, es decir, siempre existe un subconjunto de 4 puntos convexo.

Usando este esquema y conociendo mejor φ podríamos intentar demostrar la conjetura de Erdős-Szekeres para otros valores de k .

- Se logró dar una representación de las posibles configuraciones, y en particular, una caracterización de las configuraciones convexas.
- Se encontró una invariante sobre el conjunto de posibles configuraciones, lo cual sugiere cierta estructura u orden en el conjunto de posibles configuraciones.
- Se encontró una relación hasta el momento desconocida con los números Eulerianos y polilogaritmos.

Recomendaciones

- Demostrar las conjeturas aquí planteadas para tener una buena representación de las posibles configuraciones de puntos en el plano, así como una relación con teoría de grupos, los números Eulerianos y polilogaritmos.
- Investigar qué pasa en espacios Euclidianos de más dimensiones, \mathbb{R}^d . Siempre podemos definir el mismo concepto de homotopía y utilizar los hiperplanos de codimensión 1, inducidos por d puntos, para representar las posibles configuraciones. También podemos generalizar el movimiento a más dimensiones. Sin embargo, aunque podemos representar estos hiperplanos en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{d-1}$, necesitamos definir de alguna manera el *orden* de estos hiperplanos para poder calcular $\mathcal{L}(X)$ y generalizar φ .
- Investigar qué pasa en otras geometrías. Sugiero considerar variedades Riemannianas tales que para cualesquiera 2 puntos existe una única geodésica que los une. Esta condición nos permite generalizar el concepto de homotopía y el movimiento a estos espacios.

- [1] Goodman, J. y R. Pollack: *On the Combinatorial Classification of Nondegenerate Configurations in the Plane*. J. Comb. Theory, Ser. A, 29:220–235, 1980.
- [2] Inc., OEIS Foundation: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://oeis.org/A008292>.
- [3] Inc., OEIS Foundation: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://oeis.org/A002457>.
- [4] Inc., OEIS Foundation: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://oeis.org/A165889>.
- [5] Lee, M. Howard: *Polylogarithms and Riemann's Z function*. 1997. <http://abel.math.harvard.edu/~knill/kam/sources/polylogcomputation.pdf>.
- [6] Munkres, James R.: *Topology*. Pearson Modern Classic. Pearson Education, Inc., 2018, ISBN 978-0-13-468951-7.
- [7] Petersen, T. Kyle: *Eulerian Numbers*. Birkhäuser Advanced Texts Besler Lehrbücher. Springer, 2015, ISBN 978-1-4939-4794-2.
- [8] Suk, Andrew: *On the Erdős-Szekeres convex polygon problem*. J. Amer. Math. Soc., (30):1047–1053, 2017.
- [9] Szekeres, George y Lindsay Peters: *Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem*. The ANZIAM Journal, 48:151 – 164, Octubre 2006.

Se muestran todas las configuraciones de 4 y 5 puntos. Se muestran algunas de las configuraciones de 6 puntos. **[Editor Online]**

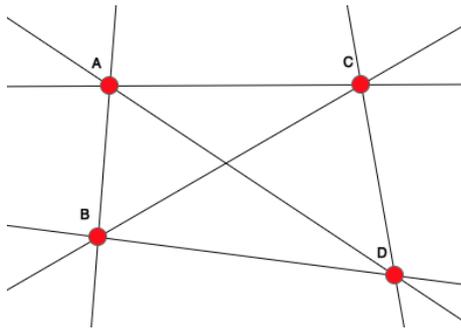


Figura 11.1: $\mathcal{L}(\Delta_4) = AB|CD|AD|BD|AC|BC$
 $1 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$

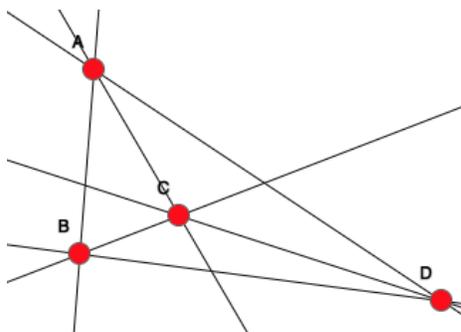


Figura 11.2: $\mathcal{L}(X) = AB|AC|AD|CD|BD|BC$
 $1 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$

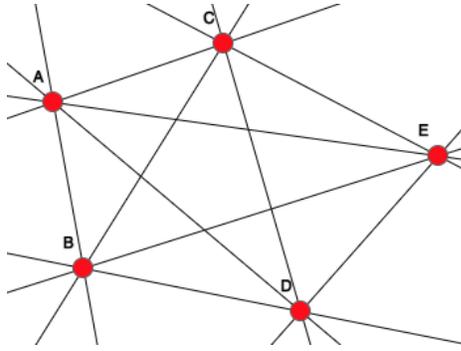


Figura 11.3: $\mathcal{L}(\Delta_5) = AB|CD|CE|AD|BD|AE|BE|AC|DE|BC$
 $5 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$
 $1 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$

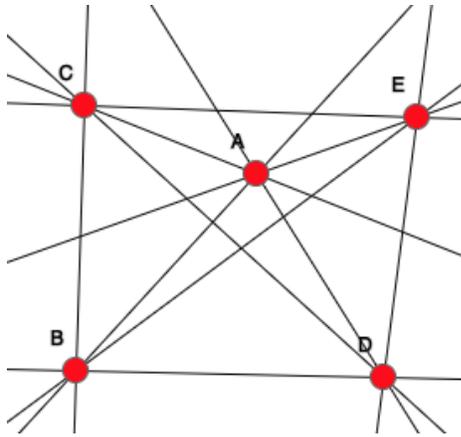


Figura 11.4: $\mathcal{L}(X) = AB|DE|BC|AD|CD|AC|CE|BD|AE|BE$
 $3 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 2 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$
 $1 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$

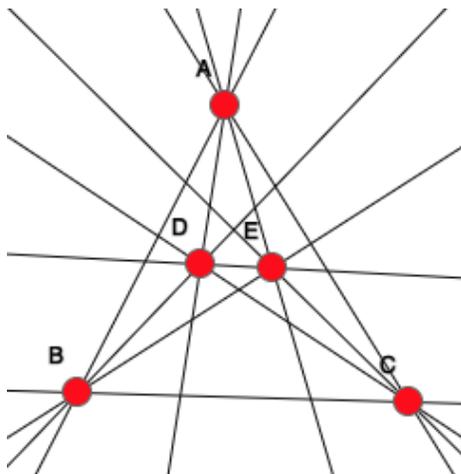


Figura 11.5: $\mathcal{L}(X) = AB|AD|AE|AC|CE|CD|DE|BC|BE|BD$
 $1 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 4 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$
 $1 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5]$

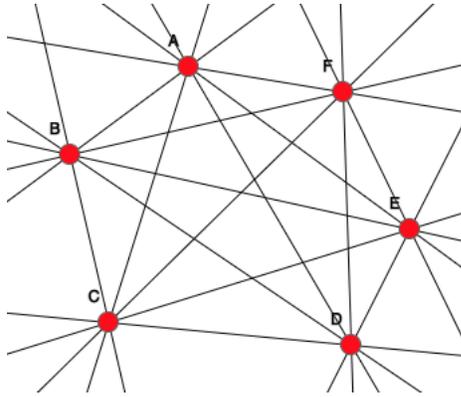


Figura 11.6: $\mathcal{L}(\Delta_6) = AB|CF|DE|AC|DF|BC|EF|AD|AE|BD|BE|AF|CD|BF|CE$
 $15 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$
 $6 : \Gamma_4 = [1, 11, 11, 1]$
 $1 : \Gamma_6 = [0, 30, 60, 30, 0]$

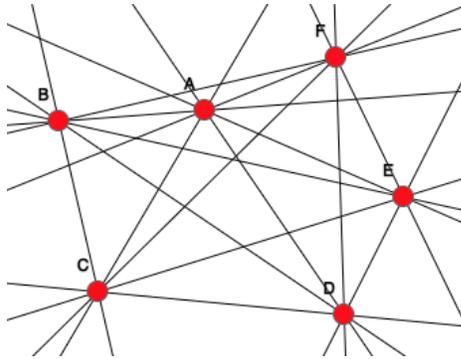


Figura 11.7: $\mathcal{L}(X) = AB|BF|CE|AF|CF|AC|DE|DF|BC|EF|AD|BD|AE|BE|CD$
 $3 : \Gamma_4 = [3, 0, 3], 12 : \Gamma_4 = [0, 6, 0],$
 $6 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1],$
 $1 : \Gamma_6 = [0, 30, 60, 30, 0],$

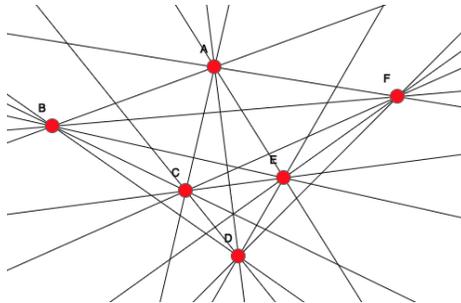


Figura 11.8: $\mathcal{L}(X) = AB|CF|EF|DF|DE|AC|AD|AE|CD|BD|BC|BE|AF|BF|CE$
 $9 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 6 : \Gamma_4 = [3, 0, 3],$
 $1 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5], 5 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1],$
 $1 : \Gamma_6 = [0, 38, 44, 38, 0],$

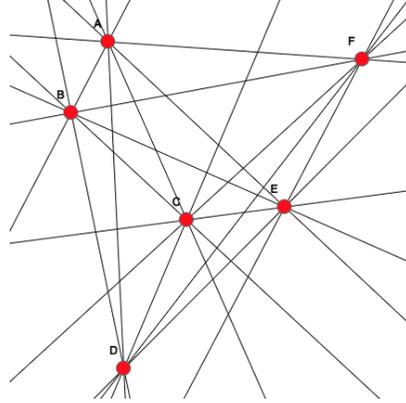


Figura 11.9: $\mathcal{L}(X) = AB|CD|AD|BD|AC|AE|BC|BE|AF|CE|BF|CF|DE|DF|EF$
 $11 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$, $4 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$,
 $6 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$,
 $1 : \Gamma_6 = [2, 22, 72, 22, 2]$,

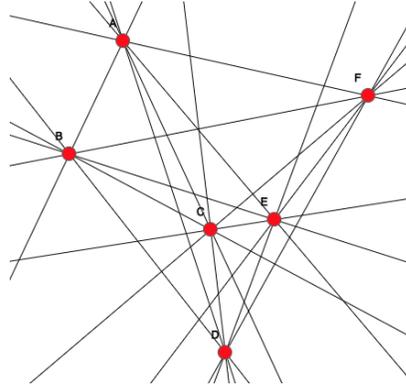


Figura 11.10: $\mathcal{L}(X) = AB|DE|CD|AD|AC|BD|AE|BC|BE|AF|CE|BF|CF|EF|DF$
 $8 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$, $7 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$,
 $2 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5]$, $4 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$,
 $1 : \Gamma_6 = [4, 30, 52, 30, 4]$,

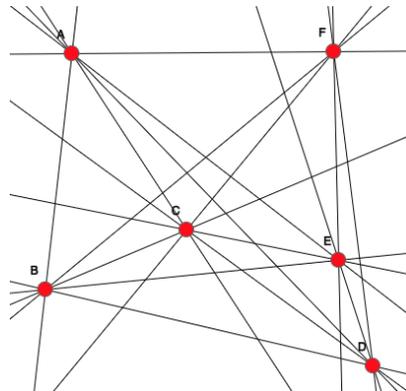


Figura 11.11: $\mathcal{L}(X) = AB|EF|DF|DE|AC|AD|AE|CD|BD|CE|AF|BE|BC|BF|CF$
 $8 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$, $7 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$,
 $1 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5]$, $5 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$,
 $1 : \Gamma_6 = [2, 30, 56, 30, 2]$,

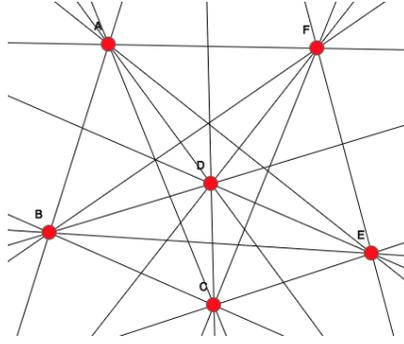


Figura 11.12: $\mathcal{L}(X) = AB|CD|EF|AC|AD|AE|BC|DE|BE|AF|BD|CE|BF|DF|CF$
 $10 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$, $5 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$,
 $6 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$,
 $1 : \Gamma_6 = [5, 10, 90, 10, 5]$,

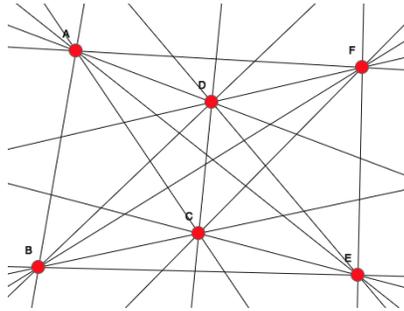


Figura 11.13: $\mathcal{L}(X) = AB|CD|EF|AC|DE|AE|AD|CE|AF|BE|BC|DF|BF|BD|CF$
 $6 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$, $9 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$,
 $6 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$,
 $1 : \Gamma_6 = [0, 30, 60, 30, 0]$,

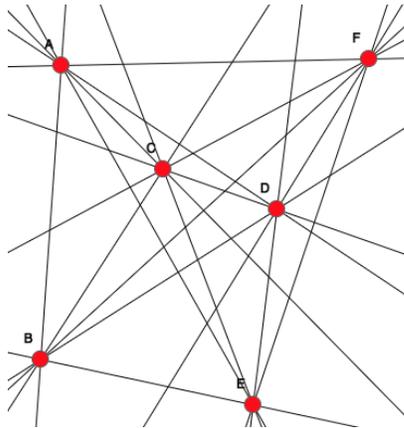


Figura 11.14: $\mathcal{L}(X) = AB|CE|AE|AC|AD|CD|BE|AF|CF|BD|BF|BC|DF|EF|DE$
 $8 : \Gamma_4 = [0, 6, 0]$, $7 : \Gamma_4 = [3, 0, 3]$,
 $5 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1]$, $1 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5]$,
 $1 : \Gamma_6 = [2, 30, 56, 30, 2]$,

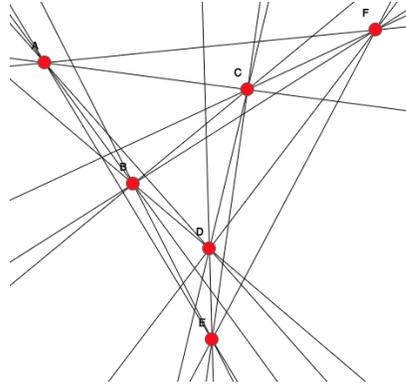


Figura 11.15: $\mathcal{L}(X) = AB|AD|BD|AC|AF|CF|BF|BC|DF|EF|CD|CE|DE|BE|AE$
 $5 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 10 : \Gamma_4 = [3, 0, 3],$
 $2 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1], 4 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5],$
 $1 : \Gamma_6 = [6, 38, 32, 38, 6],$

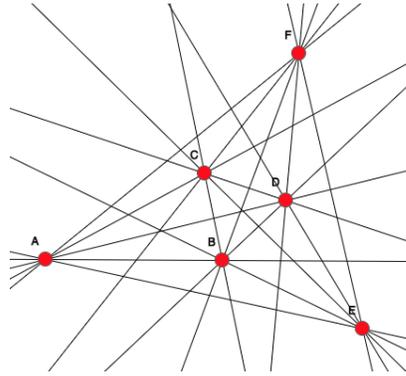


Figura 11.16: $\mathcal{L}(X) = AB|AD|AC|AF|BD|CF|BF|DF|BC|EF|DE|CE|BE|CD|AE$
 $6 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 9 : \Gamma_4 = [3, 0, 3],$
 $3 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1], 3 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5],$
 $1 : \Gamma_6 = [1, 50, 18, 50, 1],$

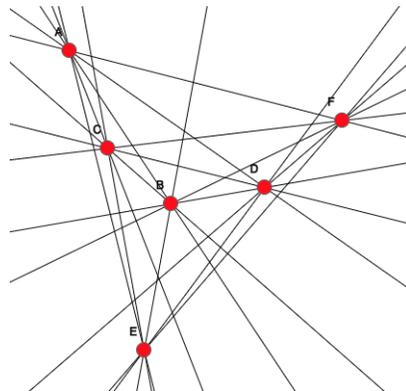


Figura 11.17: $\mathcal{L}(X) = AB|BC|AD|AF|CD|CF|BD|BF|DF|EF|DE|BE|CE|AE|AC$
 $5 : \Gamma_4 = [0, 6, 0], 10 : \Gamma_4 = [3, 0, 3],$
 $5 : \Gamma_5 = [5, 7, 7, 5], 1 : \Gamma_5 = [1, 11, 11, 1],$
 $1 : \Gamma_6 = [10, 30, 40, 30, 10],$