

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NUMEROV
PARA LA BÚSQUEDA DE PARES SUPERSIMÉTRICOS
EN POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES**

Trabajo de graduación presentado por
Alvaro Rolando Torres Caballeros
para optar al grado académico de
Licenciado en Matemática

Guatemala
2018

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NUMEROV
PARA LA BÚSQUEDA DE PARES SUPERSIMÉTRICOS
EN POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES**

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NUMEROV
PARA LA BÚSQUEDA DE PARES SUPERSIMÉTRICOS
EN POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES**

Trabajo de graduación presentado por
Alvaro Rolando Torres Caballeros
para optar al grado académico de
Licenciado en Matemática

Guatemala
2018

Vo.Bo.:

A handwritten signature in blue ink, reading "Dorval José Manuel Carías Samayoa", written over a horizontal line.

Lic. Dorval José Manuel Carías Samayoa

Tribunal Examinador:

A handwritten signature in blue ink, reading "Nancy Anely Zurita Villagrán", written over a horizontal line.

MA. Nancy Anely Zurita Villagrán

A handwritten signature in blue ink, reading "Dorval José Manuel Carías Samayoa", written over a horizontal line.

Lic. Dorval José Manuel Carías Samayoa

A handwritten signature in blue ink, reading "Cristian Eduardo Valdez Santos", written over a horizontal line.

Lic. Cristian Eduardo Valdez Santos

Fecha de aprobación:

Guatemala, 3 de diciembre de 2018

*A mi abuela Yolanda,
por volver las matemáticas un juego.*

PREFACIO

Más que contar mi experiencia en este trabajo, quiero agradecerle primero a Dios y segundo a mis padres por darme la oportunidad de estudiar la Licenciatura en Matemática. Por otro lado, quiero darle un especial agradecimiento a mi asesor, el licenciado Dorval Carías, por las correcciones sugeridas a este trabajo de graduación, por la calidad de las cátedras que impartió a lo largo de mi carrera de estudiante y por el apoyo que me ha brindado en actividades extracurriculares. A mi co-asesor, el doctor Ranferí Gutierrez por su paciencia y su ayuda en mis prácticas profesionales. Quiero agradecerle a la directora del departamento de Matemática, la licenciada Nancy Zurita, ya que me orientó en cuanto a las clases y a la papelería respectiva para esta segunda licenciatura. También al licenciado Alan Reyes, por la calidad de sus cátedras y por haberme exhortado en terminar la Licenciatura en Matemática. Al licenciado Oseas Paredes por las interesantes discusiones y por exhortarme también a finalizar la carrera de Matemática. A mi promoción, Luis Emilio Méndez, Sergio Zapeta, Sofía Dominguez y Gaspar Yataz, por propiciar un ambiente ameno de trabajo y estudio, por considerarme también estudiante de matemática (a pesar que en ese entonces estaba inscrito como estudiante de física) y por el apoyo que en más de una ocasión recibí. También deseo darle un agradecimiento especial a mi amigo Rodrigo Leonardo (Urru) por demostrarme que grandes aspiraciones pueden ser alcanzadas, además de haber sido clave para la realización del congreso CALCx realizado en septiembre 2018. A mi amiga Teresa Corzo por apoyarme con ciertas dudas de este trabajo (aunque no supiera lo que estuviera pasando) y a Javier Cárdenas, Carlos Caceros, Diego Contreras, Diego Félix, Ricardo Miranda e Inés Cerdón ya que sin ustedes la universidad no hubiera sido igual.

Por último, deseo finalizar esta sección mencionando el lema de una institución con mucho prestigio en la ciencia, el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (IAS). Su lema "Truth and Beauty" pienso que resume lo que un estudiante de ciencias exactas aprende a lo largo de su formación. No solo aprende a ver su realidad desde un punto de vista distinto y a conocer el porqué de algunas cosas, sino que también aprende a apreciar un nuevo tipo de belleza, la cual la puede encontrar entre la abstracción y la elegancia de la ciencia.

ÍNDICE

PREFACIO	I
LISTA DE FIGURAS	V
RESUMEN	VII
I. INTRODUCCIÓN	1
II. TEMAS MISCELÁNEOS PREVIOS EN MATEMÁTICA	3
A. Introducción a operadores lineales	3
B. Espacios de Hilbert	3
C. Problemas de Sturm-Liouville	4
III. MÉTODO MATRICIAL DE NUMEROV	9
IV. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER	13
V. POTENCIALES SUPERSIMÉTRICOS	15
A. Valores de energía de pares supersimétricos	18
B. Par supersimétrico del potencial de la partícula en una caja	21
VI. POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES	27
A. Método algebraico	28

B. El método de la ecuación confluyente de Heun	29
VII.APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NUMEROV PARA LA BÚSQUEDA DE PARES SU- PERSIMÉTRICOS EN POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES	33
VIII.CONCLUSIONES	39
IX. BIBLIOGRAFÍA	41

LISTA DE FIGURAS

V.1. Par supersimétrico para el potencial de la partícula en una caja	23
V.2. Gráfica de las eigenfunciones $\Psi_0^{(1)}$ y $\Psi_0^{(2)}$ para el potencial de la partícula en una caja.	24
VII.1.Gráfica del par supersimétrico de potenciales, $V_1(x)$ y $V_2(x)$	35
VII.2.Gráfica de la eigenfunciones $\Psi_0^{(1)}$ respectiva a $V_1 = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1)$.	36
VII.3.Gráfica de la eigenfunciones $\Psi_0^{(2)}$ respectiva a $V_2 = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) + 3 \sinh^2(x) + 1)$.	36

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar la teoría respectiva para hallar los valores de energía del par supersimétrico del potencial cuasi-exactamente soluble $V(x) = \frac{1}{2}(\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1)$ propuesto por (Condori, 2017).

Para lograr tal objetivo, se realizó una pequeña introducción a mecánica cuántica y a la ecuación de Schrödinger, además de tratar la teoría matemática básica. Luego se probó dos lemas importantes en la teoría y finalmente el teorema principal del trabajo, el cual en resumen dice que los eigenvalores de los potenciales que son pares supersimétricos, son de hecho idénticos. Posterior a este desarrollo teórico, se realizó una pequeña introducción a dos diferentes métodos para determinar potenciales cuasi-exactamente solubles, con el fin que el lector tenga una pequeña noción acerca de cómo se encuentran dichos potenciales. Finalmente contando con el método de Numerov y el previo desarrollo, se tomó el potencial a estudiarse, se halló su par supersimétrico y se evidenció numéricamente, a través del método matricial de Numerov, que en efecto los eigenvalores de ambos potenciales coinciden. Cabe mencionar que este tema actualmente se sigue investigando alrededor del mundo debido a los aportes importantes que brinda acerca de la ecuación principal de la mecánica cuántica.

Tras el desarrollo de este tema, se determinó que dicho tema es adecuado para estudiar métodos numéricos de ecuaciones diferenciales, ya que dependiendo el potencial que se elija, la complejidad y demanda numérica crece. Además dado que ambos potenciales deben de dar como resultado los mismos autovalores, es posible calcular el error proporcionado por un método numérico dado.

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Schrödinger, es una de las ecuaciones con mayor importancia dentro de toda la física, pues es la ecuación central de la mecánica cuántica. Sin embargo, desde su descubrimiento únicamente se tenía conocimientos de una pequeña cantidad de potenciales con los cuales dicha ecuación fuese soluble analíticamente. A principios de 1980 se descubrió una nueva clase de potenciales, una nueva familia, la cual se le dio el nombre de *potenciales cuasi-exactamente solubles* debido a que eran funciones que al insertarlas en la ecuación de Schrödinger producían únicamente cierto número de soluciones analíticas, mientras que el resto de soluciones debía de encontrarse numéricamente. Desde ese entonces, físicos y matemáticos han estudiado dicho comportamiento y se ha creado una teoría para el estudio de estos potenciales. No obstante, debe decirse que no solamente el estudio y la resolución de dichos potenciales es laboriosa y complicada, sino que la determinación misma de quiénes son estos potenciales es ardua.

Cabe mencionar que para el estudio de dichos potenciales, los métodos numéricos para resolver la ecuación de Schrödinger se vuelven de gran importancia. No obstante, hay personas que utilizan otro enfoque a estos potenciales y prueban la eficiencia de cierto método numérico resolviendo la ecuación de Schrödinger con un potencial cuasi-exactamente soluble. Algunas razones por las cuales se toma potenciales cuasi-exactamente solubles es que debido al grado de dificultad que representa resolver un problema de este tipo, se evalúa la capacidad y la demanda que el método numérico de estudio exige. Luego, debido a que es posible conocer algunos valores de forma analítica, es posible comparar el resultado numérico con el resultado analítico y evaluar el error que el método posee.

Por otro lado, en el ámbito de la física-matemática, se ha estudiado en los últimos años ciertas propiedades de los potenciales en general y se ha determinado que para cualquier potencial, que cumpla ciertas condiciones, existe otro potencial diferente del primero que posee los mismos valores de energía. Este fenómeno se conoce como la paridad supersimétrica del potencial. Esto resulta muy provechoso para las personas que trabajan en esta rama debido a que poseen la libertad de escoger entre dos potenciales, el que más les convenga. Además, dada las condiciones que debe

de poseer el potencial, se ha desarrollado métodos numéricos eficientes con los cuales es posible conocer los valores de energía con una muy buena precisión.

Este trabajo pretende mostrar una vía alterna de cómo poder determinar algunos potenciales casi-exactamente solubles, utilizando todo el formalismo desarrollado por la teoría de pariedad supersimétrica y usando como ejemplo el potencial propuesto por (Condori, 2017). Luego, se introducirá un método conocido como *Método Matricial de Numerov* con el fin de evidenciar numéricamente que la teoría de pariedad supersimétrica es correcta. Como se mencionó anteriormente, el tema a desarrollarse, pertenece al área de matemática aplicada (física-matemática) por las siguientes razones: primero, en física se busca la interpretación de los resultados, lo cual no se hizo en esta investigación. Cobra más importancia conocer, por ejemplo, el significado de por qué dos potenciales diferentes presentan eigenvalores de energía iguales, en lugar de determinar cuales son estos eigenvalores. Es decir, en esta investigación se estuvo mayormente interesado en demostrar la consistencia del método matemático que en el significado de sus resultados. Segundo, se presenta una alternativa de estudio a este tema que involucra álgebras de Lie, con el objetivo de motivar al lector interesado en dirigir sus estudios de matemática en esa dirección; y, por último, se describe la teoría del método numérico utilizado para la parte final, tema que pertenece a la rama de matemática aplicada.

II. TEMAS MISCELÁNEOS PREVIOS EN MATEMÁTICA

A. Introducción a operadores lineales

Para iniciar este trabajo es importante mencionar la definición de un operador lineal, ya que a lo largo del trabajo se trabajará frecuentemente con ellos. La definición es la siguiente. (Marrero, 2012)

Definición: Sea V y W , dos espacios vectoriales, entonces un operador lineal (transformación lineal) es una función $T : V \rightarrow W$ donde a cada elemento de V le corresponde un único elemento de W y además cumple con:

$$1) \forall x, y \in V \Rightarrow T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$2) \text{ Para } \alpha \in \mathbb{K}, x \in V \Rightarrow T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

B. Espacios de Hilbert

Como siguiente tema previo es prudente hablar un poco de los espacios de Hilbert, ya que la teoría de mecánica cuántica *vive* en uno de ellos. Este espacio se conoce como el espacio L^2 y lo conforman todas aquellas funciones $f(x)$ que cumplen que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty$. No obstante, para definir qué es un espacio de Hilbert, se debe iniciar con definir un espacio Pre-Hilbert. (Marrero, 2011)

Definición: Un espacio Pre-Hilbert es un espacio de funciones con producto interno, es decir un espacio vectorial X sobre un cuerpo \mathbb{K} en el que está definido una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$

la cual satisface:

- 1) $\langle x, x \rangle \geq 0, x \in X$
- 2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in X$
- 3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$
- 4) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, x, y \in X$

donde * se refiere al conjugado del producto. Las siguientes propiedades son inmediatas por lo cual no se efectuará la prueba, sin embargo se invita a que el lector las pruebe. (Marrero, 2011)

$$\begin{aligned}\langle 0, x \rangle &= \langle x, 0 \rangle = 0, x \in X \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda^* \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, x, y, z \in X\end{aligned}$$

Por otro lado, se escribirá un teorema muy importante para la teoría. Sin embargo, la demostración de dicho teorema no se efectuara en el presente trabajo ya que no es necesario ahondar en este tema.

Teorema (Von Neumann-Jordan): Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interior $\Leftrightarrow \|\cdot\|$ satisface la ley del paralelogramo, la cual es

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in X$$

Definición (Espacios de Hilbert): Un espacio con producto interno, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert si el espacio métrico (X, d) es completo, donde $d(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$ con $\|x\| \equiv \langle x, x \rangle^{1/2}$. (Marrero, 2011)

C. Problemas de Sturm-Liouville

Los problemas de Sturm-Liouville son frecuentes en física por lo que en esta sección se hablará un poco acerca de ellos. Un problema de Sturm-Liouville consiste en una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\phi}{dx} \right) + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0$$

la cual contiene condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\beta_1\phi(a) + \beta_2\frac{d\phi}{dx}(a) &= 0 \\ \beta_3\phi(b) + \beta_4\frac{d\phi}{dx}(b) &= 0\end{aligned}$$

donde $a < x < b$, con β_i dados y donde λ se denominan autovalores. (de Pablo & *et. al.*, sin año)

Un ejemplo sencillo es:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

con condiciones de frontera nulas. Resolviendo dicha ecuación, se obtiene que

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Nótese que los autovalores son reales, los cuales forman una sucesión la cual $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. A continuación demostraremos esta propiedad importante junto con otras, no obstante se hara un desarrollo previo que facilitará las pruebas. (de Pablo & *et. al.*, sin año)

Se define

$$\begin{aligned}L(u) &= \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu \\ L(v) &= \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + qv\end{aligned}$$

Luego,

$$uL(v) - vL(u) = u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]$$

el cual se conoce como diferencial de Lagrange. Integrando esta expresión se llega a lo que comúnmente se conoce como fórmula de Green. (de Pablo & *et. al.*, sin año)

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b$$

Sea $p = 1$ y $q = 1$, entonces se obtiene

$$\int \left(u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b$$

Propiedad 1.1: El operador diferencial lineal L en problemas de Sturm-Liouville es autoadjunto.

Prueba: Partiendo del diferencial de Lagrange se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b &= 0 \\ \Rightarrow \int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx &= 0 \\ \therefore \langle u, Lv \rangle &= \langle Lu, v \rangle \end{aligned}$$

□

Propiedad 1.2: Las funciones propias con diferente valor propio, son ortogonales entre sí.

Prueba: Traduciendo la ecuación diferencial en notación de operadores lineales:

$$L(\phi_n) + \lambda_n \sigma(x) \phi_n = 0$$

$$L(\phi_m) + \lambda_m \sigma(x) \phi_m = 0$$

con condiciones de frontera homogéneas. Luego, tomando $u = \phi_n$ y $v = \phi_m$, la fórmula de Green dice que

$$\begin{aligned} \int_a^b [\phi_m L(\phi_n) - \phi_n L(\phi_m)] dx &= p \left(\phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \Big|_a^b \\ \Rightarrow (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx &= p \left(\phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \Big|_a^b \end{aligned}$$

Por condiciones de frontera se obtiene que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0$$

Si $\lambda_m \neq \lambda_n$, se obtiene que

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0$$

□

Propiedad 1.3: Todos los autovalores resultantes de un problema de Sturm-Liouville son reales.

Prueba: Supóngase que λ es complejo y es eigenvalor de la eigenfunción $\phi(x)$. Entonces se tiene que

$$L(\phi) + \lambda\sigma\phi = 0$$

con lo que su conjugado complejo es

$$L(\phi^*) + \lambda^*\sigma\phi^* = 0$$

ya que está suponiendo que σ es real. Ahora bien, si λ es autovalor complejo de la función propia ϕ , entonces λ^* es autovalor de la función propia ϕ^* .

Si $\lambda \neq \lambda^* \Rightarrow \phi$ y ϕ^* son ortogonales, lo cual es una contradicción ya que

$$\phi\phi^* = |\phi|^2 > 0$$

$\therefore \lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda$ es real.

(de Pablo & *et. al.*, sin año)

□

III. MÉTODO MATRICIAL DE NUMEROV

El método matricial de Numerov es un método numérico no convencional para resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = f(x)y(x) \quad (\text{III.1})$$

Dicho método se basa en considerar expansiones de Taylor con un corrimiento k alrededor de x . Sin embargo, se debe de trabajar primero la ecuación de Schrödinger a una forma similar a la ecuación No. III.1 para poder trabajarla con este método.

La ecuación de Schrödinger se puede escribir entonces como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi + V(x)\Psi = E\Psi(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \Psi(x) = f(x)\Psi(x) \quad (\text{III.2})$$

donde $f(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]$. Mientras tanto, siguiendo con la expansión de Taylor se obtiene que

$$\begin{aligned} \Psi(x+k) &= \Psi(x) + k\Psi^{(1)}(x) + \frac{k^2}{2}\Psi^{(2)}(x) + \frac{k^3}{3!}\Psi^{(3)} + \dots \\ \Psi(x-k) &= \Psi(x) - k\Psi^{(1)}(x) + \frac{k^2}{2}\Psi^{(2)}(x) - \frac{k^3}{3!}\Psi^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi(x+k) + \Psi(x-k) &= 2\Psi(x) + k^2\Psi^{(2)}(x) + \frac{\hbar^4}{12}\Psi^{(4)}(x) + \mathcal{O}(k^6) \\ \Rightarrow k^2\Psi^{(2)} &= \Psi(x+k) + \Psi(x-k) - 2\Psi(x) - \frac{k^4}{12}\Psi^{(4)}(x) + \mathcal{O}(k^6) \\ \Rightarrow \Psi^{(2)} &= \frac{\Psi(x+k) + \Psi(x-k) - 2\Psi(x)}{k^2} - \frac{k^2}{12}\Psi^{(4)}(x) + \mathcal{O}(k^4) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

donde $\Psi^{(n)}$ denota la n -ésima derivada de Ψ . Ahora bien, necesitamos saber que forma tiene $\Psi^{(4)}(x)$. Para esto apliquemos el operador $\frac{d^2}{dx^2}$ de ambos lados de la ecuación No. III.4 (Dongjiao,

2014).

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\Psi^{(2)} &= \frac{d^2}{dx^2} \frac{\Psi(x+k) + \Psi(x-k) - \Psi(x)}{k^2} - \mathcal{O}(k^2) \\ \Psi^{(4)} &= \frac{\Psi^{(2)}(x+k) + \Psi^{(2)}(x-k) - 2\Psi^{(2)}}{k^2} - \mathcal{O}(k^2)\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

Pero por la ecuación No. III.2, podemos sustituir el valor de $\Psi^{(2)}$ con lo que tenemos que la aproximación de $\Psi^{(4)}$ es

$$\Psi^{(4)} = \frac{\Psi(x+k)f(x+k) + \Psi(x-k)f(x-k) - 2\Psi(x)f(x)}{k^2}\quad (\text{III.6})$$

Contando con las ecuaciones No. III.4 y III.6 podemos entonces reducir la ecuación No. III.2 a una ecuación de recurrencia (Dongjiao, 2014).

$$\begin{aligned}f(x)\Psi(x) &= \Psi^{(2)} \\ f(x)\Psi(x) &= \frac{\Psi(x+k) + \Psi(x-k) - 2\Psi(x)}{k^2} - \frac{k^2}{12}\Psi^{(4)}(x) \\ f(x)\Psi(x) &= \frac{\Psi(x+k) + \Psi(x-k) - 2\Psi(x)}{k^2} \\ &+ \left(\frac{-k^2}{12}\right) \frac{\Psi(x+k)f(x+k) + \Psi(x-k)f(x-k) - 2\Psi(x)f(x)}{k^2}\end{aligned}\quad (\text{III.7})$$

Tómese a $\Psi(x+k) \equiv \Psi_{i+1}$, $\Psi(x) \equiv \Psi_i$, $\Psi(x-k) \equiv \Psi_{i-1}$, $f(x+k) \equiv f_{i+1}$, $f(x) \equiv f_i$ y $f(x-k) \equiv f_{i-1}$. Con este cambio de notación se obtiene (Dongjiao, 2014),

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i}{k^2} &= \frac{1}{12} (\Psi_{i+1}f_{i+1} + \Psi_{i-1}f_{i-1} + 12\Psi_i f_i - 2\Psi_i f_i) \\ \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i}{k^2} &= \frac{1}{12} (\Psi_{i+1}f_{i+1} + \Psi_{i-1}f_{i-1} + 10\Psi_i f_i)\end{aligned}\quad (\text{III.8})$$

Luego, nótese que $f_{i-1} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{i-1})$, $f_i = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_i)$ y $f_{i+1} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{i+1})$,

con lo que (Dongjiao, 2014)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{k^2} \right) &= \left(\frac{\Psi_{i+1}V_{i+1}}{12} - \frac{\Psi_{i+1}E}{12} + \frac{\Psi_{i-1}V_{i-1}}{12} - \frac{\Psi_{i-1}E}{12} + 10\frac{\Psi_iV_i}{12} - 10\frac{\Psi_iE}{12} \right) \\
 -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{k^2} \right) + \frac{V_{i-1}\Psi_{i-1} + 10\Psi_iV_i + V_{i+1}\Psi_{i+1}}{12} &= E \left(\frac{\Psi_{i-1} + 10\Psi_i + \Psi_{i+1}}{12} \right)
 \end{aligned} \tag{III.9}$$

Por último, la ecuación No. III.9 se puede escribir como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{A}\Psi + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}\Psi = E\mathbf{B}\Psi \tag{III.10}$$

donde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{III.11}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{III.12}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{III.13}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{III.14}$$

Luego, numéricamente se busca \mathbf{B}^{-1} para obtener

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}\Psi + \mathbf{V}\Psi = E\Psi \tag{III.15}$$

Finalmente, debe mencionarse que si observamos la ecuación No. III.8, para utilizar este método es necesario contar inicialmente con dos valores de Ψ . Los valores a elegirse siguiendo con el análisis de (Pillai, et al, 2012) son $\Psi_1 = 0$ y $\Psi_N = 0$ debido a que estamos suponiendo que $\Psi(x)$ se desvanece cuando tiende a infinito, es decir $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) = 0$. Por otro lado, se hace la aclaración que los subíndices $i + 1$, i e $i - 1$ en ecuaciones como la ecuación No. III.9, no se refieren a niveles de excitación de la función de onda, sino que Ψ_0 se refiere al punto de partida y Ψ_i al i -ésimo punto de la misma función Ψ .

IV. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

A principios del siglo XX, hubo algunos experimentos que revolucionaron la física clásica. Físicos como Schrödinger y Dirac se dieron cuenta que había que hacer modificaciones teóricas a la física cuando se estaba estudiando objetos muy pequeños y basados en el experimento de Yang, se propuso que las partículas se movían como una onda (paquete de onda), donde la amplitud de la misma es más bien una amplitud de probabilidad en donde puede estar la partícula. (Griffiths, 1995)

Según este experimento, se modeló a la posición de la partícula como una función (de onda) y, generalmente, denotada por la letra griega Ψ . Ahora bien, toda las cantidades fundamentales como la *energía* o el *momentum* de la partícula debía de encontrarse de una forma diferente. Viéndolo desde el punto de vista matemático, clásicamente poseíamos un objeto con ciertas propiedades, constantes (elementos de los Números Reales). El movimiento de esta partícula, se modelaba como una función que dependía del tiempo $x(t)$. Estas funciones junto con las constantes se insertaban en otras funciones para conocer las cantidades fundamentales. Por ejemplo, la función de momentum (en una dimensión) dada por $p(x) = m \cdot \frac{dx}{dt}$. Dado los cambios realizados en la mecánica cuántica, se dijo que estas funciones que representaban cantidades fundamentales conocidas como *observables* eran más bien operadores y además que debido a que existe una incertidumbre de la posición de la partícula, esta se movía de acuerdo a una ecuación diferencial, llamada la *ecuación de Schrödinger*. Esta ecuación tiene la siguiente forma (Griffiths, 1995)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t) \quad (\text{IV.1})$$

donde \hat{H} es el operador hamiltoniano el cual representa la energía total que posee la partícula de estudio. Nótese que la ecuación No. IV.1 es una ecuación parcial diferencial, lineal, de segundo orden la cual puede modificarse si se utiliza el método de separación de variables. Aplicando este método y nombrando a la constante de proporcionalidad como E se obtiene que una de las ecuaciones tiene

la forma de

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (\text{IV.2})$$

de ahora en adelante, la notación para el operador hamiltoniano será únicamente H como se encuentra en la mayoría de referencias. La ecuación No. IV.2 se conoce como la *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*.

Debido a que el hamiltoniano es la energía del objeto de estudio este debe ser igual a la energía cinética de la partícula más alguna energía potencial que la partícula posea (podría ser energía potencial gravitacional, eléctrica, magnética o de algún otro tipo). Sin embargo, debido a que los observables ahora toman la forma de operadores, la energía cinética toma la forma de $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ con lo que la ecuación No. IV.2 se transforma en

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (\text{IV.3})$$

donde $V(x)$ denota el potencial bajo el cual está la partícula.

De la mecánica cuántica se sabe que si el potencial tiene ciertas características, la solución a la ecuación No. IV.3 es una familia de soluciones y la solución general es entonces la combinación lineal de todas esta familia. En la teoría, esto representa a todos los posibles valores (de energía en este caso) que la partícula podría tener y a las constantes que acompañan cada término de la combinación lineal se les llama amplitudes de probabilidad. Debido a esto, la ecuación No. IV.3 suele escribirse como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_n(x) + V(x)\Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x) \quad (\text{IV.4})$$

Para finalizar esta sección, se hace énfasis que debido a que se está trabajando con operadores lineales, la ecuación No. IV.2 no es más que una ecuación típica de eigenvalores y eigenvectores dada su forma, donde H es el operador, Ψ una eigenfunción y E el eigenvalor respectivo. (Griffiths, 1995)

V. POTENCIALES SUPERSIMÉTRICOS

Para el desarrollo de este capítulo debemos de recordar tres supuestos que son comunes en la teoría de potenciales supersimétricos. Estos son:

- Ψ_0 , el estado base, no tiene nodos entre el intervalo a estudiarse.
- La función de onda $\Psi_0(x)$ decrece a cero cuando x tiende a $\pm\infty$, fuera del intervalo de estudio.
- Podemos realizar una traslación del potencial $V(x)$ tal que para la función base $\Psi_0(x)$, la ecuación de Schrödinger tenga la forma de

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_0(x) + V_1(x) \Psi_0(x) = 0 \quad (\text{V.1})$$

donde $V_1(x) = V(x) - E_0$. Debe de notarse que este problema es básicamente un problema de Sturm-Liouville, con lo que se esperará que las propiedades probadas anteriormente se cumplan. Estas son operadores autoadjuntos, eigenfunciones con eigenvalores diferentes son eigenfunciones ortogonales y finalmente un conjunto de eigenvalores reales. (Culpitt & Ghosh, 2014)

Teniendo en cuenta estos supuestos, considerando operadores Q y Q^\dagger de la forma

$$Q = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (\text{V.2})$$

$$Q^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (\text{V.3})$$

donde $W(x)$ se denomina súper potencial. Ahora bien, podemos multiplicarlos de tal forma que podamos tener como resultado dos diferentes hamiltonianos, debido a que estos operadores son no conmutativos. (Culpitt & Ghosh, 2014)

$$H_1 = Q^\dagger Q \quad (\text{V.4})$$

$$H_2 = Q Q^\dagger \quad (\text{V.5})$$

La ecuación de Schrödinger para el primer hamiltoniano daría como resultado las siguientes ecuaciones.

Se usará la notación $\Psi_n^{(1)}$ para denotar a las n funciones de onda que satisfacen la ecuación basada en el primer hamiltoniano. (Culpitt & Ghosh, 2014)

$$\begin{aligned}
H_1 \Psi_n^{(1)} &= Q^\dagger Q \Psi_n^{(1)} = \left[\left(\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \right] \Psi_n^{(1)} \\
&= \left(\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \Psi_n^{(1)} + W \Psi_n^{(1)} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_n^{(1)}}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi_n^{(1)} \frac{dW}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W \frac{d\Psi_n^{(1)}}{dx} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W \frac{d\Psi_n^{(1)}}{dx} + W^2 \Psi_n^{(1)} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_n^{(1)}}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi_n^{(1)} \frac{dW}{dx} + W^2 \Psi_n^{(1)} \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{2m} \frac{dW}{dx} + W^2 \right] \Psi_n^{(1)}
\end{aligned} \tag{V.6}$$

Sea $V_1 = W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx}$ entonces la ecuación No. V.6 puede reescribirse como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1 \right] \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} = 0 \tag{V.7}$$

donde la penúltima igualdad se cumple debido a que se trata de la ecuación de Schrödinger y la última igualdad se cumple solamente si $n = 0$ debido a los supuestos hechos al principio. (Culpitt & Ghosh, 2014)

Análogamente,

$$\begin{aligned}
H_2 \Psi_n^{(2)} &= Q Q^\dagger \Psi_n^{(2)} = \left[\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \left(\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \right] \Psi_n^{(2)} \\
&= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W \right) \left(\frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \Psi_n^{(2)} + W \Psi_n^{(2)} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_n^{(2)}}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi_n^{(2)} \frac{dW}{dx} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W \frac{d\Psi_n^{(2)}}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W \frac{d\Psi_n^{(2)}}{dx} + W^2 \Psi_n^{(2)} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_n^{(2)}}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi_n^{(2)} \frac{dW}{dx} + W^2 \Psi_n^{(2)} \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{2m} \frac{dW}{dx} + W^2 \right] \Psi_n^{(2)} \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2 \right] \Psi_n^{(2)} \\
&= E_n^{(2)} \Psi_n^{(2)}
\end{aligned} \tag{V.8}$$

donde

$$V_2(x) = W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx} \quad (\text{V.9})$$

Los potenciales V_1 y V_2 se llaman pares de potenciales supersimétricos. Hasta ahora hemos desarrollado una teoría que depende del superpotencial $W(x)$, ahora bien, nuestro objetivo es dado un potencial cualquiera, poder hallar su par supersimétrico. Para esto, considérese el siguiente lema.

Lema A: Dada la función $\Psi_0^{(1)}$ es posible escribir al superpotencial $W(x)$ como $-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\Psi_0^{(1)}(x)}{dx} \frac{1}{\Psi_0^{(1)}(x)}$. Además, la función $\Psi_0^{(1)}$ no necesariamente debe estar normalizada. (Culpitt & Ghosh, 2014)

Demostración: Nótese que la ecuación No. V.7 indica que $Q\Psi_0^{(1)}$ es también una solución, con lo que

$$\begin{aligned} Q\Psi_0^{(1)}(x) &= 0 \\ \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \Psi_0^{(1)}(x) &= 0 \\ W(x) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\Psi_0^{(1)}(x)}{dx} \frac{1}{\Psi_0^{(1)}(x)} \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

la segunda parte del lema se prueba notando que la constante de normalización, dígase c , sale de la operación $\frac{d}{dx} (c\Psi_0^{(1)})$ y se cancela con la constante $\frac{1}{c}$ que multiplica a $\frac{1}{\Psi_0^{(1)}}$. (Culpitt & Ghosh, 2014)

■

Con este último lema es posible entonces hallar el par supersimétrico a un potencial dado. Los pasos que se deberían seguir para esto son los siguientes. Primero escribir la ecuación de Schrödinger con el potencial dado. Luego, resolver esta ecuación y así obtener el estado base $\Psi_0^{(1)}(x)$. Posteriormente, utilizar la ecuación No. V.10 la cual permite hallar el potencial supersimétrico. Contando con este último potencial, es posible usar la ecuación No. V.9 para obtener el par supersimétrico deseado.

En muchas ocasiones, el objeto de interés en mecánica cuántica es la energía, más que la función de estado per se. Para esto, se desarrollará a continuación una cualidad útil que dichos pares supersimétricos poseen.

A. Valores de energía de pares supersimétricos

Lema B: $Q\Psi_n^{(1)}$ es eigenfunción de H_2 . Análogamente, $Q^\dagger\Psi_m^{(2)}$ es eigenfunción de H_1 . (Culpitt & Ghosh, 2014)

Demostración: Consideremos la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}
 H_2 \left(Q\Psi_n^{(1)} \right) &= QQ^\dagger \left(Q\Psi_n^{(1)} \right) \\
 &= Q \left(Q^\dagger Q \right) \Psi_n^{(1)} \\
 &= Q \left(H_1 \Psi_n^{(1)} \right) \\
 &= Q \left(E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} \right) \\
 &= E_n^{(1)} \left(Q\Psi_n^{(1)} \right)
 \end{aligned} \tag{V.11}$$

donde la segunda igualdad vale debido a que dichos operadores cumplen con la asociatividad, la cuarta igualdad, debido a que se trata de la ecuación de Schrödinger y la quinta debido a que $E_n^{(1)}$ es un autovalor elemento de los Números Reales.

La ecuación No. V.11 indica que $Q\Psi_n^{(1)}$ es una eigenfunción de H_2 con eigenvalor $E_n^{(1)}$. Por otro lado,

$$H_2\Psi_m^{(2)} = QQ^\dagger\Psi_m^{(2)} = E_m^{(2)}\Psi_m^{(2)} \tag{V.12}$$

Ahora bien, análogamente consideremos

$$\begin{aligned}
 H_1 \left(Q^\dagger\Psi_m^{(2)} \right) &= Q^\dagger Q \left(Q^\dagger\Psi_m^{(2)} \right) \\
 &= Q^\dagger \left(QQ^\dagger \right) \Psi_m^{(2)} \\
 &= Q^\dagger \left(H_2 \Psi_m^{(2)} \right) \\
 &= Q^\dagger \left(E_m^{(2)} \Psi_m^{(2)} \right) \\
 &= E_m^{(2)} \left(Q^\dagger\Psi_m^{(2)} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13}$$

con lo que observamos que $Q^\dagger\Psi_m^{(2)}$ es una eigenfunción de H_1 con eigenvalor $E_m^{(2)}$. (Culpitt & Ghosh, 2014) ■

En resumen, el Lema B dicta es que $\Psi_m^{(2)}$ son las eigenfunciones de H_2 y $Q\Psi_n^{(1)}$ son igualmente las eigenfunciones de H_2 , lo cual puede ser representado en el siguiente cuadro.

Hamiltoniano	Eigenfunción	Eigenvalor
H_1	$\Psi_n^{(1)}$	$E_n^{(1)}$
H_2	$\Psi_m^{(2)}$	$E_m^{(2)}$
H_2	$Q\Psi_n^{(1)}$	$E_n^{(1)}$
H_1	$Q^\dagger\Psi_m^{(2)}$	$E_m^{(2)}$

Cuadro V.1: Eigenfunciones y eigenvalores respectivo a cada operador.

Teorema: Los eigenvalores $E_m^{(2)}$ coinciden con los eigenvalores $E_{n+1}^{(1)}$.

Debido al Lema B, es posible concluir que

$$\Psi_m^{(2)} = c Q\Psi_n^{(1)} \quad (\text{V.14})$$

donde c es una constante de proporcionalidad. De igual forma, $\Psi_n^{(1)} = c' Q^\dagger\Psi_m^{(2)}$, pero enfocándonos en la ecuación V.14 podemos deducir lo siguiente. Suponiendo que $\Psi_n^{(1)}$ y $\Psi_m^{(2)}$ están normalizadas,

$$\begin{aligned}
1 &= \int \Psi_m^{*(2)}\Psi_m^{(2)} dx = \int \left(c^* \Psi_n^{*(1)} Q^\dagger \right) \left(c Q\Psi_n^{(1)} \right) dx \\
&= |c|^2 \int \Psi_n^{*(1)} Q^\dagger Q\Psi_n^{(1)} dx \\
&= |c|^2 \int \Psi_n^{*(1)} H_1 \Psi_n^{(1)} dx \\
&= |c|^2 E_n^{(1)} \int \Psi_n^{*(1)} \Psi_n^{(1)} dx \\
&= |c|^2 E_n^{(1)} \\
\Rightarrow c &= \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}}
\end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

en donde c^* y $\Psi_n^{*(1)}$ denotan el par complejo conjugado de c y de $\Psi_n^{(1)}$, respectivamente (Culpitt & Ghosh, 2014).

Con la ayuda de la ecuación No. V.15 podemos escribir a $\Psi_m^{(2)}$ como función de $\Psi_n^{(1)}$, esto es

$$\Psi_m^{(2)} = \frac{Q\Psi_n^{(1)}}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \quad (\text{V.16})$$

Además, dada la ecuación No. V.7 es posible notar que Q es un análogo al operador de aniquilación en el ejemplo de la partícula bajo un potencial armónico (Culpitt & Ghosh, 2014). Y es que se vuelve un hecho evidente, ya que

$$H_1\Psi_0^{(1)} = 0 \Rightarrow Q^\dagger(Q\Psi_0^{(1)}) = 0 \Rightarrow Q\Psi_0^{(1)} = 0 \quad (\text{V.17})$$

Lo cual expresa que $\Psi_0^{(1)}$ es el estado de más bajo nivel que el sistema puede tener (el estado base). Además, nótese que el tercer supuesto que se hizo al principio del capítulo es sobre V_1 únicamente, lo cual quiere decir que el estado base solamente corresponde a H_1 y sugiere que, dada la ecuación No. V.15, existe un corrimiento entre los valores de energía de H_1 . Entonces, tomando a Q como un operador de aniquilación, se obtiene que

$$\Psi_m^{(2)} = \frac{Q\Psi_n^{(1)}}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \Rightarrow \Psi_{n-1}^{(2)} = \frac{Q\Psi_n^{(1)}}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \quad (\text{V.18})$$

Y similarmente,

$$\Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{Q^\dagger\Psi_n^{(2)}}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \quad (\text{V.19})$$

■

Debido a las ecuaciones No. V.18 y V.19, el Cuadro V.1 puede transformarse en el Cuadro V.2.

A continuación se desarrollará un pequeño ejemplo de la teoría desarrollada anteriormente, el cual será el de la partícula encerrada en una caja, desarrollado en la primera sección del presente trabajo.

$\Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{Q^\dagger \Psi_n^{(2)}}{\sqrt{E_n^{(2)}}}$
$\Psi_n^{(2)} = \frac{Q \Psi_{n+1}^{(1)}}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}$
$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$
$E_0^{(1)} = 0$

Cuadro V.2: Relaciones entre eigenfunciones y eigenvalores de ambos hamiltonianos.

B. Par supersimétrico del potencial de la partícula en una caja

El ejemplo del potencial de la partícula en una caja, es un ejemplo típico cuya solución puede ser encontrada en cualquier libro introductorio a la mecánica cuántica. Empezamos entonces recordando la forma de dicho potencial. Este es

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

Además se sabe que la solución para la ecuación de Schrödinger es

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ E_0 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Dada las suposiciones que se hizo al inicio del capítulo, es necesario trasladar la energía base a cero, con lo que el resto de niveles de energía toman la forma de

$$E_n^{(1)} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = (n^2 - 1) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{V.22})$$

Como siguiente paso haremos una sustitución, $n \rightarrow n + 1$ tal que el estado base tenga índice $n = 0$

(Culpitt & Ghosh, 2014). Con esta sustitución obtenemos,

$$\begin{aligned}\Psi_n^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right) \\ E_n^{(1)} &= \frac{n(n+2)\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{V.23}$$

Para hallar el superpotencial utilizamos la ecuación No. V.10,

$$\begin{aligned}W(x) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)}{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \\ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)\end{aligned}\tag{V.24}$$

Finalmente, con la ayuda de la ecuación No. V.9 obtenemos que el par supersimétrico es

$$\begin{aligned}V_2(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \cot^2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \csc^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \left[\cot^2\left(\frac{x}{L}\right) + \csc^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]\end{aligned}\tag{V.25}$$

Usando la identidad $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$ obtenemos

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \left[2 \csc^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right]\tag{V.26}$$

La Figura No. V.1 muestra la forma de dicho potencial, tomando a $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, la masa como $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ (la masa del electrón) y arbitrariamente $L = 1 \text{ m}$.

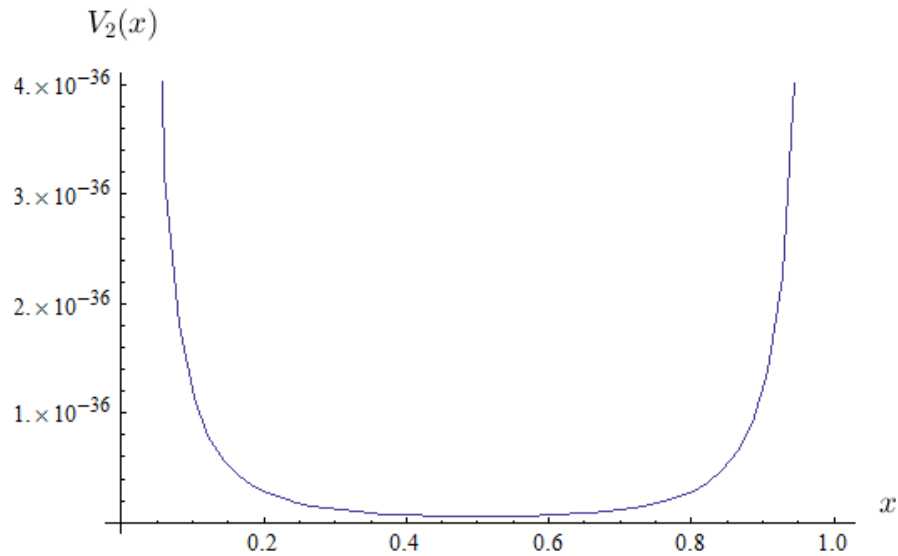


Figura V.1: Par supersimétrico para el potencial de la partícula en una caja

Por último notemos que V_1 es,

$$\begin{aligned}
 V_1(x) &= W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx} \\
 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left[\cot^2 \left(\frac{x}{L} \right) - \csc^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] \\
 &= -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \\
 &= 0 - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \\
 &= V(x) - E_0^{(1)}
 \end{aligned} \tag{V.27}$$

lo cual concuerda con las ecuaciones No. V.1 y No. V.20. A continuación, en la Figura No. V.2, se graficarán las eigenfunciones $\Psi_0^{(1)}$ y $\Psi_0^{(2)}$. En dicha figura es posible ver que ambas eigenfunciones son diferentes, no obstante, para evidenciar que ambas eigenfunciones poseen los mismos eigenvalores es necesario resolver la ecuación. Es debido a esto que no se realizará en esta sección, sin embargo, en los siguientes capítulos se desarrollara el método numérico de Numerov y efectivamente se comprobara para los potenciales hallados, que sus eigenvalores coinciden.

Para realizar las gráficas de la Figura V.2 se utilizó el Cuadro No. V.2 con $L = \pi$ y $\hbar = m = 1$.

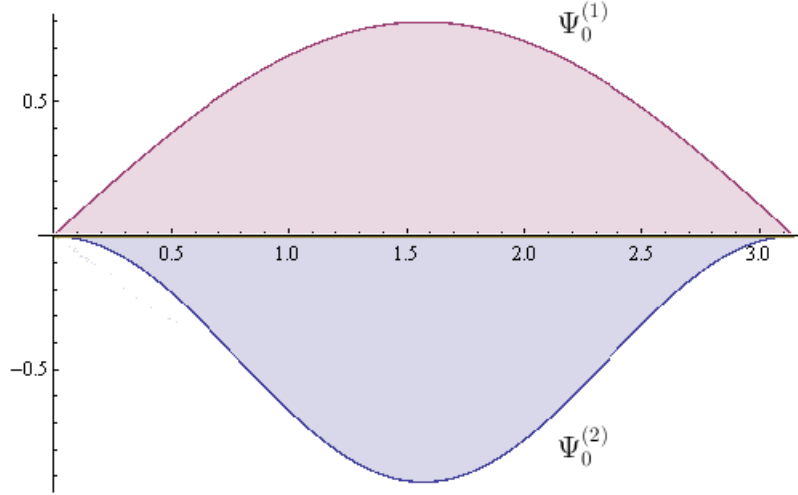


Figura V.2: Gráfica de las eigenfunciones $\Psi_0^{(1)}$ y $\Psi_0^{(2)}$ para el potencial de la partícula en una caja.

La gráfica morada representa a $\Psi_0^{(1)}$ y la azul a $\Psi_0^{(2)}$. Estas funciones se encontraron utilizando el Cuadro No. V.2, y procediendo de la siguiente manera. Sabemos que,

$$\begin{aligned}
 \Psi_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\
 E_1 &= \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \Rightarrow \sqrt{E_1} \frac{\hbar\pi}{L} \\
 Q &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \\
 W(x) &= -\frac{\hbar\pi}{L\sqrt{2m}} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\
 \Psi_0^{(2)} &= \frac{Q\Psi_1^{(1)}}{\sqrt{E_1}}
 \end{aligned} \tag{V.28}$$

$$\begin{aligned}
 Q\Psi_1^{(1)} &= \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\
 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\pi}{L} \left[2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} 2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2\pi}{L} \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{V.29}$$

La identidad $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ se utilizó en la segunda igualdad. Utilizando ahora la

identidad $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$, y la identidad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L} \frac{2\pi}{L}} \left[2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 1 \right] \\
 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L} \frac{2\pi}{L}} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 1 \right] \\
 &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L} \frac{2\pi}{L}} \left[-\sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{V.30}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_0^{(2)} &= \frac{Q\Psi_1^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(1)}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L} \frac{2\pi}{L}} \left[-\sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] \frac{L}{\hbar\pi} \sqrt{\frac{2m}{3}} \\
 \Psi_0^{(2)} &= -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{V.31}$$

VI. POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES

Tal y como se comenta en (Turbiner, 2016) las soluciones exactas a problemas no-triviales pueden proveer información valiosa acerca del problema y en ocasiones pueden revelar propiedades ocultas de este mismo. Tal y como se comentó en el primer capítulo del presente, la ecuación de Schrödinger es el objeto básico de la mecánica cuántica, por lo que es de suma importancia encontrar tanta información como sea posible acerca de ella.

Debe mencionarse que otra motivación para buscar soluciones exactas es que, luego, podemos usar estas combinadas con teoría de perturbaciones para encontrar respuestas a otros problemas. Por otro lado, alrededor de 1980, el tema de encontrar soluciones exactas cobró mayor interés debido al descubrimiento de una nueva clase de problema cuántico relacionado con el espectro de energía, llamado problemas cuasi-exactamente solubles. En esta clase de problemas, únicamente un número de eigenestados puede ser encontrado explícitamente. Tal vez, tal y como lo comenta (Turbiner, 2016), algo que se debe enfatizar de este hallazgo es la idea de tipo filosófica que se deriva. Esta, es que no es posible conocer o bien saberlo todo acerca de la naturaleza. El planteamiento de estos problemas cuasi-exactamente solubles puede considerarse como una manifestación de la idea de una especie de frontera de lo que podemos conocer en base a los desarrollos matemáticos conocidos hasta hoy en día.

Estos problemas cuasi-exactamente solubles surgen considerando nuevamente a la ecuación de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (\text{VI.1})$$

y notando que esta ecuación depende de dos parámetros, de la función $\Psi(x)$ y del potencial $V(x)$. Actualmente, no existe una forma única y general para encontrar todos los potenciales $V(x)$. entre la literatura, existen dos métodos muy famosos para la determinación de dichos potenciales y para su resolución, estos son: *el método algebraico* y *método por medio de la ecuación confluyente de Heun*. Debido a que el objetivo del presente trabajo es mostrar el procedimiento para hallar el par supersimétrico usando como ejemplo un potencial cuasi-exactamente soluble propuesto por (Condori, 2017), no se profundizará en este tema. No obstante, se hará una breve introducción hacia

ambos métodos para motivar al lector a investigar en dichos temas.

A. Método algebraico

Este método, tal como su nombre lo indica, es de tipo algebraico. Este pretende utilizar una representación de álgebras de Lie y ecuaciones diferenciales lineales.

Muy a grosso modo, un grupo de Lie lo conforman variedades suaves que son diferenciables. Luego, un álgebra de Lie lo conforman los grupos de Lie cuyos elementos son operados entre sí por medio de funciones continuamente diferenciables, i.e. C^∞ .

La idea es primero tomar una espacio lineal de la forma

$$\mathcal{F}_n^{(1)} = \langle f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y) \rangle \quad (\text{VI.2})$$

donde $f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)$ son naturalmente funciones linealmente independientes. El desarrollo se complica si se toma cualquier conjunto de funciones linealmente independientes, por lo que se elige generalmente el espacio lineal

$$\mathcal{P}_{n+1} = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle \quad (\text{VI.3})$$

Posteriormente, se toma el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, el cual puede ser representado por operadores diferenciales de primer orden (cuando trabajamos en una variable) de la forma

$$\begin{aligned} J_n^+ &= x^2 \frac{d}{dx} - nx \\ J_n^0 &= x \frac{d}{dx} - \frac{n}{2} \\ J_n^- &= \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

donde $n \in \mathbf{R}$. Por otro lado, se define que un operador diferencial lineal de orden k , $T_k \left(x, \frac{d}{dx} \right)$ es casi-exactamente soluble si preserva el espacio polinomial \mathcal{P}_{n+1} , es decir

$$T_k \left(x, \frac{d}{dx} \right) : \mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \quad (\text{VI.5})$$

Contando con estos conocimientos previos, la teoría parte en demostrar que cualquier operador T_k cuasi-exactamente soluble puede representarse por un polinomio de grado k de los operadores J_n^\pm , suponiendo que $k < (n + 1)$. De lo contrario, es decir, para $k \geq (n + 1)$, únicamente puede representarse hasta la parte del operador T_k que contenga n -ésimas derivadas, igualmente por un polinomio de grado n de los mismos operadores. La prueba de este teorema, se basa en usar el teorema de Burnside, el cual dice que si un conjunto de operadores actúa sobre algún espacio lineal de dimensión finita, entonces cualquier operador que actúe sobre el espacio es un polinomio en estos operadores (Turbiner, 2016). De nuevo, se hace énfasis que el objetivo del presente trabajo no es desarrollar dicha teoría y que lo escrito anteriormente no es más que la introducción a este enfoque, pero para el lector interesado se recomienda leer (Turbiner, 2016).

B. El método de la ecuación confluyente de Heun

Considere la ecuación

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + p(z)\frac{du(z)}{dz} + q(z)u(z) = 0 \quad (\text{VI.6})$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas, es decir, pueden representarse alrededor de un punto z_0 por medio de una serie de potencias centrada en z_0 .

Definición: Un punto $z = c$, $c \in \mathbb{C}$ se llama **punto regular** de una ecuación diferencial $p(z)$ y $q(z)$ son analíticos en una vecindad con centro en $z = c$. Un punto $z = c$, $c \in \mathbb{C}$ se llama punto singular de una ecuación diferencial, si $p(z)$ o $q(z)$ posee una singularidad en $z = c$.

Considere ahora la transformación

$$\begin{aligned} \varsigma &= \frac{1}{z} \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} &= -\varsigma^2 \frac{d}{d\varsigma} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} &= \varsigma^4 \frac{d^2}{d\varsigma^2} + 2\varsigma^3 \frac{d}{d\varsigma} \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Entonces la ecuación No. VI.6 puede reescribirse como

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \left(2 - \frac{1}{\zeta} p(1/\zeta) \right) \frac{du}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4} q(1/\zeta) u = 0 \quad (\text{VI.8})$$

La ecuación No. VI.8 es singular regular en infinito, es decir $zp(z)$ es analítica en $z = \infty$ si y solo si

$$2 - \frac{1}{\zeta} p(1/\zeta) \quad (\text{VI.9})$$

es analítica en $\zeta = 0$.

La ecuación de Heun es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, con un punto singular regular en en infinito y tres puntos singulares regulares localizados en $z = 0$, $z = 1$ y $z = a$ de la forma

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a} \right] \frac{du(z)}{dz} + \frac{\alpha\beta(z-h)}{z(z-1)(z-a)} u(z) = 0 \quad (\text{VI.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &= \gamma + \delta + \epsilon \\ h &\in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Definición: Una ecuación diferencial es confluyente cuando una singularidad regular z_2 es removida tal que esta coincida con otra singularidad z_1 .

Notación: $z_2 \rightarrow z_1$

Existen varias formas de volver a la ecuación de Heun confluyente. El método que se usará para esta breve introducción será el propuesto por (Kristensson, 2010)

$$\begin{aligned} \alpha &= k_1 a^{1/2} \\ \beta &= k_2 a^{1/2} \\ a &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

Con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 1}{z-a} \right] \frac{du(z)}{dz} + \frac{\alpha\beta(z-h)}{z(z-1)(z-a)} u(z) = 0 \\
 u''(z) + \lim_{a \rightarrow \infty} & \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{k_1 a^{1/2} + k_2 a^{1/2} - \gamma - \delta + 1}{z-a} \right] u'(z) + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{1/2} a^{1/2} k_1 k_2 (z-h)}{z(z-1)(z-a)} u(z) = 0 \\
 & u''(z) + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} \right] u'(z) - \frac{k_1 k_2 (z-h)}{z(z-1)} = 0
 \end{aligned} \tag{VI.13}$$

donde

$$\epsilon = \alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta \tag{VI.14}$$

$$h \in \mathbb{C}$$

y k_1 y k_2 dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 (k_1 + k_2) a^{1/2} + 1 &= \gamma + \delta + \epsilon \\
 \lim_{a \rightarrow \infty} (k_1 + k_2) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a^{1/2}} + \frac{\gamma + \delta + \epsilon}{a^{1/2}} \right) \\
 \Rightarrow k_1 + k_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{VI.15}$$

Una vez contando con la ecuación confluyente de Heun, el método se basa básicamente en tratar de reducir la ecuación de Schrödinger a la ecuación de Heun, de la cual sabemos algunas soluciones para determinados valores de k_1 , γ y δ , dichas soluciones pueden encontrarse en (Kristensson, 2010). Dicho procedimiento es extenso y varía dependiendo de qué potencial se tome, sin mencionar que para ciertos potenciales cuasi-exactamente solubles este método no es útil, con lo que se debe de buscar otro tipo de ecuaciones o bien evaluar si es posible utilizar lo que en la literatura se conoce como el ansatz de Bethe. Debido a esto (además que no se tiene como objetivo demostrar que el potencial a utilizarse en el siguiente capítulo es en efecto un potencial cuasi-exactamente soluble), no se desarrollará dicho procedimiento en el presente.

VII. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NUMEROV PARA LA BÚSQUEDA DE PARES SUPERSIMÉTRICOS EN POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES

Para desarrollar este capítulo y así cumplir con el objetivo de este trabajo, se desea aplicar la teoría desarrollada en el capítulo dos a un potencial cuasi-exactamente soluble en específico, el cual se tomo de (Condori, 2017) y posee la forma de

$$V(x) = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x)) \quad (\text{VII.1})$$

Dada la referencia (Condori, 2017), este potencial da como resultado la eigenfunción base y un eigenestado base siguiente

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_0^{(1)} &= e^{-\frac{1}{2} \cosh^2(x)} \\ E_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

Debe mencionarse que la referencia (Condori, 2017) toma a

$$\hbar = m = 1 \quad (\text{VII.3})$$

con lo que la ecuación de Schrödinger toma la forma de

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + V \Psi = E \Psi \quad (\text{VII.4})$$

Como paso inicial hallamos quién es V_1 , para esto utilizamos la ecuación No. V.1

$$V_1 = V(x) - E_0 = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1) \quad (\text{VII.5})$$

Luego, hallamos el superpotencial $W(x)$

$$\begin{aligned}
W(x) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\Psi_0}{dx} \frac{1}{\Psi_0} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\Psi_0}{dx} \frac{1}{\Psi_0} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} [2 \cosh(x) \sinh(x)] e^{-\frac{1}{2} \cosh^2(x)} \right) e^{\frac{1}{2} \cosh^2(x)} \\
W(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x) \sinh(x)
\end{aligned} \tag{VII.6}$$

Comprobamos que en efecto la ecuación No. VII.6 es el superpotencial. Para esto utilizamos la ecuación que se utilizó para pasar de la ecuación No. V.6 a la ecuación No. V.7.

$$\begin{aligned}
V_1 &= W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx} \\
&= W^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} \\
&= \frac{1}{2} \cosh^2(x) \sinh^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} [\sinh^2(x) + \cosh^2(x)] \right) \\
&= \frac{1}{2} [(1 + \sinh^2(x)) \sinh^2 - \sinh^2(x) - 1 - \sinh^2(x)] \\
V_1 &= \frac{1}{2} [\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1]
\end{aligned} \tag{VII.7}$$

la cual coincide con la ecuación No. VII.5. En esta última ecuación, la cuarta igualdad fue posible gracias a la identidad $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Para encontrar V_2 utilizamos

$$\begin{aligned}
V_2 &= W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx} \\
&= W^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} \\
&= \frac{1}{2} [(1 + \sinh^2(x)) \sinh^2 + \sinh^2(x) + 1 + \sinh^2(x)] \\
V_2 &= \frac{1}{2} [\sinh^4(x) + 3 \sinh^2(x) + 1]
\end{aligned} \tag{VII.8}$$

La Figura No. VII.1 muestra ambos potenciales. La gráfica color azul muestra a V_1 y la gráfica morada muestra a V_2 . Adicionalmente, usando el método matricial de Numerov comprobamos que los los eigenvalores de ambos hamiltonianos concuerdan con el Cuadro V.2.

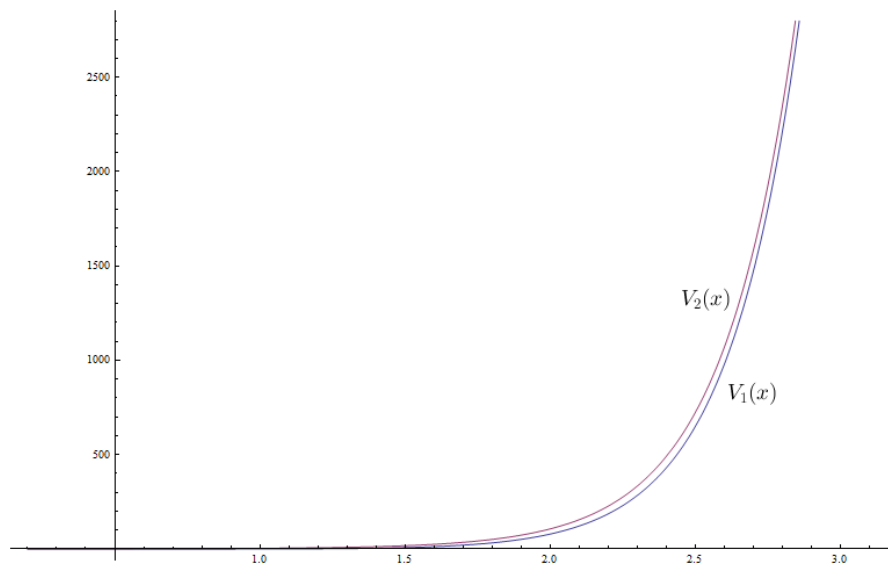


Figura VII.1: Gráfica del par supersimétrico de potenciales, $V_1(x)$ y $V_2(x)$

Usando el código propuesto por (Pillai & *et. al.*, 2012), se encontró que:

n	$E_n^{(1)}$	$E_n^{(2)}$	$\Delta Error$
0	$-1.25 * 10^{-7}$	1.595086925	-
1	1.595086025	4.152652326	$5.64222 * 10^{-7}$
2	4.152647472	7.390910012	$1.16895 * 10^{-6}$
3	7.390889977	11.22377060	$2.71067 * 10^{-6}$
4	11.22370609	15.59751758	$5.74749 * 10^{-6}$
5	15.59734611	20.47437862	$1.09934 * 10^{-5}$

Cuadro VII.1: Eigenvalores de energía.

En el Cuadro No. VII.1 es posible encontrar los eigenvalores de energía encontrados por el método numérico. la columna de $\Delta Error$ se encontró por medio de $\frac{|E_{n+1}^{(1)} - E_n^{(2)}|}{E_{n+1}^{(1)}}$.

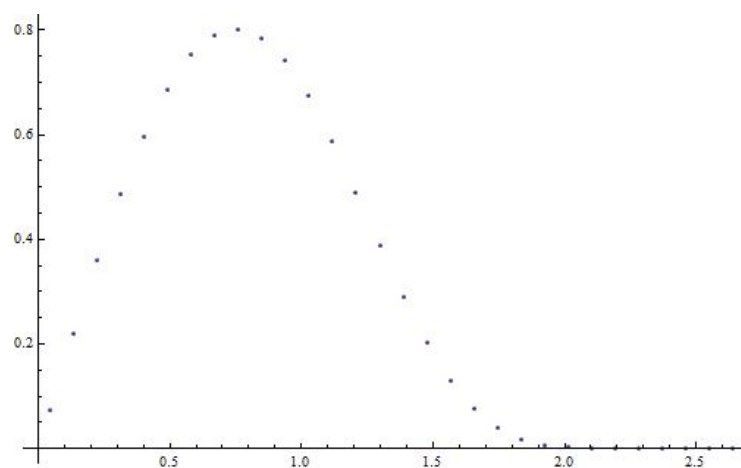


Figura VII.2: Gráfica de la eigenfunciones $\Psi_0^{(1)}$ respectiva a $V_1 = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1)$.

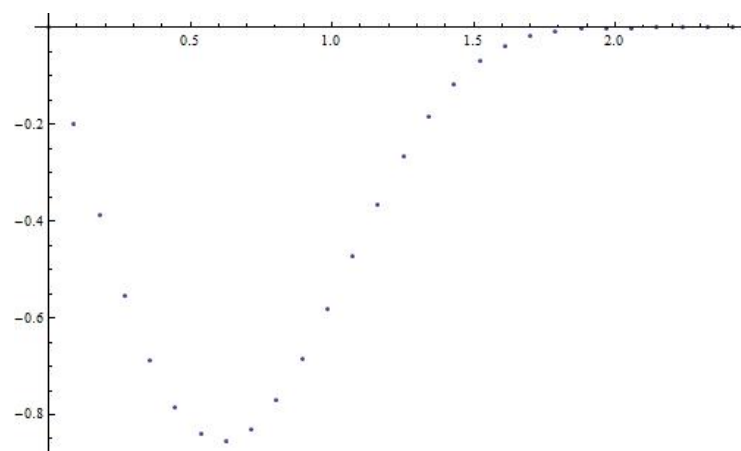


Figura VII.3: Gráfica de la eigenfunciones $\Psi_0^{(2)}$ respectiva a $V_2 = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) + 3 \sinh^2(x) + 1)$.

La Figura No. VII.2 y la Figura No. VII.3 muestran a $\Psi_0^{(1)}$ y a $\Psi_0^{(2)}$, respectivamente, en un intervalo arbitrario. Para finalizar esta sección, se desea únicamente hacer énfasis en lo desarrollado anteriormente y es que se conociendo los eigenvalores de un potencial dado fue posible encontrar otro con los mismos eigenvalores de energía. Es decir, contando con un potencial cuasi-exactamente soluble y sus niveles de energía, fue posible encontrar otro potencial del mismo tipo y los niveles de energía sin tener que pasar a través de algún método propuesto en el capítulo No. VI. Claramente, esto es de gran ventaja, sobretodo si se está en el área de física computacional, ya que si estamos interesados en trabajar con la energía de cierta partícula bajo un potencial, es posible elegir el potencial que numéricamente sea más cómodo o presente menos problemas ya que al final de al cabo, de abmos potenciales se obtiene los mismos valores de energía. Además, es equivalente trabajar con el potencial $V(x)$ o el potencial $V_1(x)$, ya que si se sabe que

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V(x)\Psi_n &= E_n\Psi_n \\ \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V_1(x)\Psi_n &= E_n^{(1)}\Psi_n \end{aligned} \tag{VII.9}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V_1(x)\Psi_n &= E_n^{(1)}\Psi_n \\ \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + [V(x) - E_0]\Psi_n &= E_n^{(1)}\Psi_n \\ \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V(x)\Psi_n &= (E_n^{(1)} + E_0)\Psi_n \\ \frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V(x)\Psi_n &= E_n\Psi_n \end{aligned} \tag{VII.10}$$

La última igualdad es posible debido a que debe de coincidir con la primera ecuación escrita en VII.9. Esta última secuencia de ecuaciones prueba que los eigenvalores de $V(x)$ únicamente están trasladados E_0 de los eigenvalores de $V_1(x)$.

VIII. CONCLUSIONES

Tras el desarrollo de esta teoría se puede concluir lo siguiente.

1. Fue posible hallar el superpotencial y el par supersimétrico de $V(x) = \frac{1}{2} (\sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1)$ y probar numéricamente mediante el método matricial de Numerov el teorema principal del trabajo, el cual dice que el valor n-ésimo del eigenvalor del potencial V_2 coincide con el valor del eigenvalor número n+1 del potencial V_1 .

2. El desarrollo de estos pares supersimétricos de potenciales permite tener mayor flexibilidad al trabajar con eigenfunciones y eigenvalores de energía en la mecánica cuántica, ya que es posible elegir el potencial que, numéricamente o incluso analíticamente, más convega pues los eigenvalores serán idénticos.

3. El tema sobre el cual gira entorno el presente trabajo es adecuado para estudiar métodos numéricos de ecuaciones diferenciales ya dependiendo el potencial que se elija, la demanda numérica crece y debido a que ambos potenciales deben dar eigenvalores idénticos, es posible calcular el error proporcionada por el método.

IX. BIBLIOGRAFÍA

Condori, E. (2017). *Potenciales hiperbólicos como problemas cuasi-exactamente resolubles en mecánica cuántica*. Universidad de Guanajuato. 112 págs.

Culpitt, T. & Ghosh, A. (2014). *An Introduction to Supersymmetric Quantum Mechanics*. 9 págs.

Griffiths, D. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 408 págs.

Downing, C. A. (2018). *On a solution of the Schrödinger equation with a hyperbolic double-well potential*. University of Exeter. 7 págs. arXiv: 1211.0913v1

Turbiner, A. (2016). *One-Dimensional Quasi-Exactly Solvable Schrödinger Equations*. 137 págs. arXiv: 1603.02992

Panahi, H. Baradaran, S. (2015). *Solutions of the Quasi-Exactly Solvable Mathieu Potential by Asymptotic Iteration Method*. Universitu of Guilan, 9 págs.

Dongjiao, T. (2014). *Generalized Matrix Numerov Solutions to the Schrödinger Equation*. National University of Singapore, 38 págs.

Fa-kai, W. Zhan-Ying, Y. (2014). *Exact Polynomial Solutons of Schrödinger Equation with Various Hyperbolic Potentials*. Northwest University of China, 8 págs.

de Souza, A. (1993). *Conditionally Exactly Soluble Class of Quantum Potentials*. Physical Review A. 3 págs.

Maluck, J. (2013). *An Introduction to Supersymmetric Quantum Mechanics and Shape Invariant Potentials*. Amsterdam University College. 73 págs.

Kristensson, G. (2010). *Second Order Differential Equations*. Springer Science+Business Media. 233 págs.

Pillai, M. Goglio, J. & Walker, T. (2012). *Matrix Numerov Method for solving Schrödinger Equa-*

tion. American Journal of Physics. 4 págs.

Landau, R. Páez, M. (1997). *Computational Physics*. Wiley-Interscience Publication. 547 págs.

Marrero, I. (2012). *Clases de operadores I*. Universidad de La Laguna. 20 págs.

Marrero, I. (2012). *Espacios de Hilbert*. Universidad de La Laguna. 29 págs.

de Pablo, A. Pestana, D. (Sin año). *Apuntes de Ampliación de Matemáticas II* . Recopilado de:
<http://ocw.uc3m.es/matematicas/ampliacion-de-matematicas-ii/material-de-clase-1/apuntes-edp-OCW-3.pdf>