

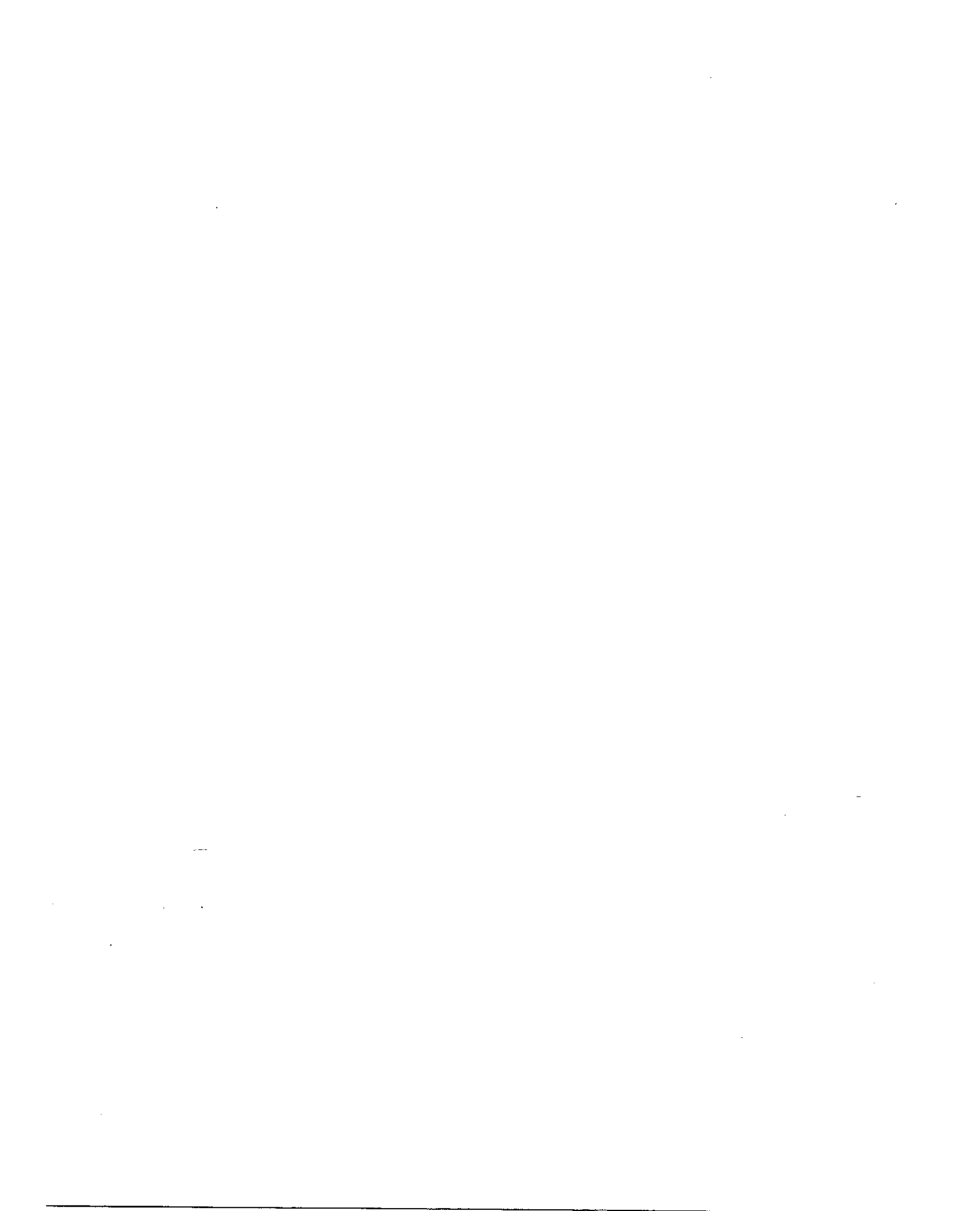
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

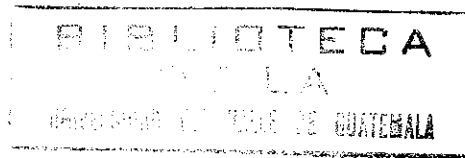
Libro guía para el curso de  
análisis estructural

Guatemala  
2002

---



Libro guía para el curso de  
análisis estructural



**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

**Facultad de Ciencias y Humanidades**

**Libro guía para el curso de  
análisis estructural**

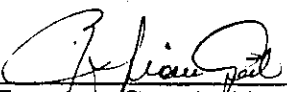
**Ricardo Roberto Ibarra Lira**

**Trabajo de investigación presentado  
para optar al grado académico de  
Licenciatura en Ingeniería Civil**

**Guatemala  
2002**


# VISTO BUENO

Asesor:

  
Ing. Francisco Garavito Lizama

Tribunal examinador:

  
Ing. Franklin Matzdorf Monroy

  
Ing. Margarita Jerez González

  
Ing. Francisco Garavito Lizama

Fecha de aprobación de examen:

Guatemala, 25 de junio de 2002

## PREFACIO

Uno de los roles primordiales de una Institución de Estudios Superiores, como lo es la Universidad Del Valle, es aportar nuevos medios de enseñanza para las futuras generaciones. Considero de suma importancia y utilidad que un estudiante egresado de esta casa de estudios pueda dejar un aporte a los próximos estudiantes. Uno de estos aportes puede ser una herramienta de estudio para uno de los cursos más importantes en la Carrera de Ingeniería Civil, como lo es el de Análisis Estructural. Por lo tanto, este trabajo de graduación consiste en la elaboración de un Libro Guía para el Curso de Análisis Estructural.

En el curso de Análisis Estructural, impartido en la Universidad del Valle, se han utilizado varios libros de referencia. El contenido de estos libros es bastante completo y profundizan de manera satisfactoria los temas contenidos en el programa del curso. Sin embargo, siempre ha existido la necesidad de utilizar varios libros para obtener lo más útil de cada uno, ya que la mayoría no contiene todos los temas contemplados en el curso.

Este trabajo de graduación se inició con un estudio del contenido actual de los cursos de Análisis Estructural en la Universidad del Valle. Luego se procedió a estudiar los temas en diversos libros de texto y a consultar con catedráticos e ingenieros estructurales de Guatemala. Tras obtener la información necesaria se procedió a clasificarla y sintetizarla para luego integrar todo en el Libro Guía.

Este trabajo de graduación fue posible gracias a la valiosa información y ayuda de varios profesionales de Guatemala. Ellos son Ing. Javier Furlán, Ing. Francisco Garavito, Ing. Ricardo Augusto Ibarra, Arq. Sergio Nilton Ibarra, Ing. Margarita Jerez e Ing. Franklin Matzdorf.

# ÍNDICE

	Pagina
PREFACIO .....	<i>vi</i>
ÍNDICE .....	<i>vii</i>
RESUMEN .....	<i>viii</i>
Capítulos	
I. INTRODUCCIÓN .....	1
II. UBICACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DENTRO DEL PROCESO GENERAL DEL DISEÑO ESTRUCTURAL .....	2
III. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL .....	9
IV. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS .....	41
V. ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. SU USO Y EJEMPLOS .....	67
VI. ANÁLISIS APROXIMADO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS .....	81
VII. ANÁLISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR MÉTODOS ITERATIVOS .....	111
VIII. ANÁLISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR MÉTODOS ENERGÉTICOS .....	140
IX. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	155
X. BIBLIOGRAFÍA .....	156

## RESUMEN

Con este trabajo de graduación, que consiste en la elaboración de un Libro Guía para el curso de Análisis Estructural, se busca proveer al estudiante y al catedrático de una útil herramienta de estudio. Su fin es que se pueda encontrar en él todo el contenido del curso explicado de una manera sencilla, pero completa. La hipótesis presentada es que la implementación de este Libro Guía para el Curso de Análisis Estructural ayudará en forma directa a que los estudiantes cubran más contenido y al mismo tiempo adquieran satisfactoriamente el conocimiento.

Este trabajo representa una propuesta de investigación para el futuro. Su marco práctico consistirá en una comparación de resultados antes y después de la utilización del Libro Guía. Cuantitativamente se podrá analizar su utilidad al comparar la cantidad de temas cubiertos en el mismo tiempo y las calificaciones de los alumnos con años anteriores. Cualitativamente se puede determinar la aceptación de los alumnos y de los catedráticos a la implementación del Libro Guía, por medio de una encuesta.

# I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de Graduación consiste en la elaboración de un Libro Guía para el curso de Análisis Estructural en la Universidad del Valle de Guatemala. En él se busca presentar todo el contenido del curso de una manera más dinámica y directa, lo que ayudará a que el estudiante asimile con más facilidad los conocimientos. Los temas son abordados de una manera sencilla, sin dejar de ser completa. Presenta, también, diversos ejemplos y problemas propuestos para el estudiante. El estudiante encontrará comentarios y discusiones para el mejor entendimiento de los temas y sus aplicaciones.

Los objetivos del trabajo son facilitar la enseñanza del Análisis Estructural y al mismo tiempo motivar al estudiante al utilizar un libro de texto elaborado especialmente para la Universidad del Valle. Específicamente se buscó cubrir el contenido actual del Curso de Análisis Estructural en el Libro Guía, y además incluir en él temas que aun no se cubren en el curso, pero que podrían ser útiles para el estudiante.

La metodología consistió en un trabajo de investigación de los temas en libros de texto, con ingenieros guatemaltecos experimentados en el tema y con catedráticos de Análisis Estructural. La información recolectada fue analizada y sintetizada para poder crear el Libro Guía del Curso.

La hipótesis planteada es que la implementación de un Libro Guía para el Curso de Análisis Estructural, elaborado por un exestudiante de la misma Universidad, beneficiará en forma directa para que los estudiantes cubran mas contenido y al mismo tiempo asimilen satisfactoriamente el conocimiento." Si los Catedráticos del Curso de Análisis Estructural deciden utilizar el Libro Guía, se podrá observar si esta hipótesis se cumple por medio de la obtención de resultados cuantitativos y cualitativos.

Se recomienda que los Catedráticos estudien esta propuesta y si es aceptada evaluar los resultados de su implementación para poder poner a prueba la hipótesis planteada. Este Libro Guía está diseñado para utilizarse en los dos cursos de Análisis de Estructuras en la Universidad del Valle y no se recomienda cubrir todo su contenido en un solo curso.

## II. UBICACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DENTRO DEL PROCESO GENERAL DEL DISEÑO ESTRUCTURAL

### A. Proceso general de un diseño estructural

El ingeniero civil a lo largo del ejercicio de su carrera profesional deberá involucrarse en el diseño estructural de un proyecto. El proceso general de un diseño estructural comprende varias etapas. Estas etapas consisten en:

1. **Definición de las necesidades, condiciones y especificación de los objetivos del proyecto.** Aquí se contestan las interrogantes de por qué se necesita el proyecto, qué condiciones debe reunir y qué se logrará con su realización. Por ejemplo las necesidades pueden ser cubrir la demanda de vivienda, espacios comerciales, de oficinas o de almacenamiento o bodegas, vías de acceso a determinadas regiones, etc. Las condiciones pueden ser que una vivienda tenga un costo popular, que un estadio pueda albergar 50 mil personas, que una carretera resista el paso continuo de camiones pesados. Ejemplos de objetivos son la construcción exitosa de un complejo habitacional, un centro comercial, un edificio, una carretera, un puente etc.
2. **Planteamiento preliminar de varias alternativas de solución.** En esta etapa se proponen varias soluciones para alcanzar los objetivos del proyecto. Por ejemplo, para el caso de vivienda unifamiliar, considerar las alternativas de materiales a usar, como block, ladrillo, madera, para muros, estructura metálica o losas de concreto prefabricadas o fundidas in situ para el techo. Si se piensa en un edificio multifamiliar, se podrían considerar alternativas de estructura metálica, de concreto prefabricado o elementos fundidos in situ. En el caso de un puente podríamos plantear las opciones de construirlo en madera, acero, o concreto.
3. **Análisis, diseño y evaluación preliminar de las alternativas de solución.** Esto se debe realizar con cada alternativa para poder luego conocer la más adecuada.
4. **La selección de la alternativa más adecuada.** Tras el análisis, diseño y evaluación de las diferentes alternativas, se elige la que represente las mayores ventajas en

cuanto a costo, tiempo, ubicación, clima, factibilidad técnica de construcción, seguridad etc.

5. **El análisis y diseño final del proyecto.** Una vez seleccionada la alternativa más conveniente, se procede a efectuar el análisis estructural por medio de métodos exactos y posteriormente también el diseño estructural definitivo de la alternativa seleccionada.
6. **Elaboración de documentos de construcción.** Ya con el análisis y diseño final se procede a elaborar los documentos de construcción, los cuales no consisten únicamente en los planos y detalles, sino también, en las especificaciones técnicas, donde se amplía la información sobre los materiales que se utilizarán y las bases generales en las que se describen aspectos legales, forma de pago, requisitos de la constructora que ejecutará el proyecto, fianzas requeridas, etc.
7. **La realización del proyecto.** Es la etapa más visible del proyecto, consiste en hacer realidad lo diseñado al hacer uso de los documentos de construcción y bajo una supervisión profesional. En esta etapa, muchas veces se hace necesaria la aplicación del análisis estructural para las obras complementarias que no vienen especificados en los documentos, como formaletas, puentes grúa, etc.

## B. Ejemplo: La construcción del puente “Del Incienso”

En los años setenta se realizó en Guatemala una obra de gran magnitud aun para los estándares actuales. Esta obra fue la construcción del Puente Martín Prado Vélez, mejor conocido como puente del Incienso, que sirvió como complemento del Anillo Periférico para unir las zonas 1, 2 y 3 con las zonas 7, 11 y 19 de la Ciudad Capital. El puente tiene una altura de aproximadamente 300 metros en su parte más alta, salva una luz de 400 metros y posee seis carriles por donde circulan miles de vehículos, de todo tipo, al día. A continuación estudiaremos la evolución de esta estructura.

### 1. Necesidades, condiciones y objetivos

El proyecto comenzó cuando se identificaron las necesidades, se estudiaron las condiciones y se determinaron los objetivos. Se estableció la finalidad de la estructura y se justificó su realización. Finalmente se buscó el financiamiento.

Se necesitaba de una forma de conectar dos grandes sectores de la ciudad que estaban separados por un gran barranco. La zonas 7, 11 y 19 estaban creciendo rápidamente y el flujo vehicular proveniente de ellas aumentaba considerablemente. Proveer de una vía de comunicación más corta entre los sectores representaría un ahorro de tiempo y combustible considerable. Además, con el tiempo las calles de la ciudad que absorbían ese tráfico ya no se darían abasto.

Una de las condiciones que debía reunir el proyecto era soportar holgadamente el paso continuo de una gran cantidad de todo tipo de vehículos, por lo cual debía tener carriles suficientes y poder resistir fuertes cargas vivas. Debía ser duradero y de mantenimiento relativamente barato. Y, otra condición muy importante era la capacidad de soportar un posible terremoto, lo cual logró en 1976.

Aunque el costo era elevado, el proyecto se justificaba con los beneficios económicos que representaba esta nueva vía y que además las calles regulares de la ciudad eventualmente no se darían abasto.

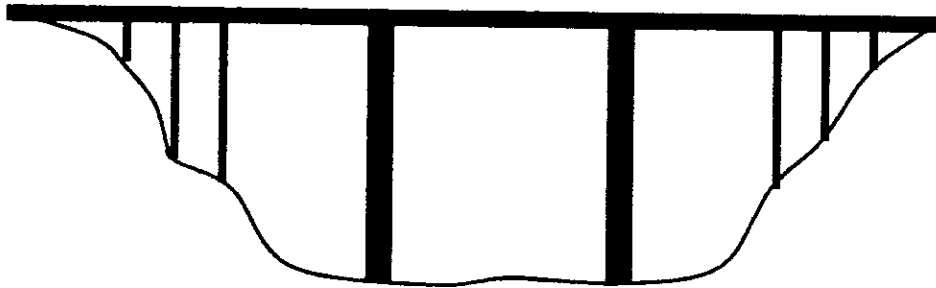
## 2. Planteamiento preliminar de las alternativas de solución

Esta es quizá la parte más importante en un diseño, ya que el éxito de la estructura depende de las decisiones tomadas en esta etapa. Al plantear las primeras alternativas, viene la etapa de determinación aproximada de las fuerzas en cada elemento de la estructura, para establecer los parámetros de diseño como peraltes de vigas, sección de columnas y áreas de cimientos. De la creatividad, imaginación y conocimiento de procedimientos de construcción del ingeniero dependen la realización satisfactoria y económica del proyecto.

Para nuestro ejemplo, se debía salvar el gran claro sobre un profundo barranco y soportar el peso de un tráfico pesado, su peso, el viento, un terremoto, la fuerza del frenado de los vehículos y los cambios por temperatura. También era necesario considerar el material para su construcción pues si se pensaba en un puente colgante habría que importar el acero.

Esquema del Puente "El Incienso"

Fig. 2.1



### 2.1 Posibles sistemas del proyecto

- Un solo claro: la luz sería demasiado grande lo que implica un alto costo y una gran dificultad técnica.
- Un apoyo vertical central con una pileta: la luz seguiría siendo demasiado grande y la pileta debía ser muy alta y obstaculizaría el cauce de la escorrentía pluvial.
- Dos pilas verticales principales (3 claros), la luz sería más corta, aunque las piletas seguirían siendo bastante altas. Esta fue la opción escogida.

### 2.2 Posibles materiales a utilizar

- Acero
- Concreto

El acero era demasiado caro, mientras que el concreto era relativamente económico, pues en Guatemala se tiene una gran industria del cemento.

## 3. Análisis, diseño y evaluación preliminar de las alternativas

Se hicieron varios tipos de análisis y es aquí donde son de mucha utilidad los métodos aproximados que veremos más adelante, para predimensionar y presupuestar las posibles alternativas de solución. Algunas se van desechando automáticamente ya que se ven muy desfavorables a simple vista. (Aunque no siempre sucede así)

#### 4. Selección de alternativa más adecuada

Después de las evaluaciones correspondientes, se optó por construir un puente de concreto, con dos pilas principales, varias pilas secundarias, y vigas tipo cajón construidas con el sistema de doble voladizo para los tramos centrales. Además se evaluaron varios factores como el económico, tiempo, durabilidad, mantenimiento, etc.

#### 5. Análisis y diseño final

Después de seleccionado el sistema se determinaron las propiedades finales de las uniones y de cada uno de los miembros. Se hizo el análisis formal y definitivo. Si los cambios de los parámetros no eran significativos, se podían quedar así, de lo contrario hubiera sido necesario hacer un nuevo análisis con las nuevas dimensiones para los miembros.

#### 6. Elaboración de papelería de construcción

Se elaboraron los planos con sus detalles y se complementaron con la elaboración de especificaciones escritas en las cuales se describieron los materiales a usarse y los requerimientos que debían llenar, la calidad de la mano de obra y los reglamentos y códigos a los que había que apegarse, así como también los aspectos legales y requerimientos de contratación.

#### 7. Realización del proyecto

La fase más visible de la ingeniería es la construcción del proyecto. Para la construcción del puente, se debía especificar la secuencia de las operaciones. El grado de supervisión varía de una obra a otra y de la etapa del proyecto. Generalmente hay necesidad de realizar cálculos en el transcurso de la obra, como formaletas tradicionales, formaletas en voladizo, formaletas deslizables y estructuras auxiliares de complemento.

Las pilas principales del "Incienso" fueron construidas con formaleta deslizable en forma continua, con trabajo de 24 horas diarias, desde el inicio en la base, hasta llegar a su altura total.

Las vigas fueron de tipo cajón, por el sistema de doble voladizo. Debió utilizarse también una formaleta deslizable y se fundió un tramo con acelerantes de fraguado, y luego de obtener la resistencia necesaria se desplazaba la formaleta en voladizo para fundir el siguiente tramo.

## C. El campo de la ingeniería estructural

Como se ha visto, el ingeniero estructural no es solamente la persona que calcula, sino que desarrolla una serie de procesos íntimamente relacionados entre sí a lo largo de la ejecución de un proyecto.

El ingeniero como diseñador debe pensar en todo lo planeado anteriormente, en los requerimientos de los clientes, la factibilidad del proyecto, el factor económico, y sobre todo su seguridad. Por tal motivo, el ingeniero estructural debe trabajar con mucha exactitud.

Los ingenieros estructurales intervienen en un sin fin de tipos de construcciones. Por ejemplo, puentes, edificios, presas, aviones, naves espaciales, plantas industriales, plantas generadoras de energía eléctrica, antenas, torres, túneles, trenes subterráneos, barcos etc.

Así también hay ingenieros estructurales dedicados a la investigación, al perfeccionamiento y desarrollo de nuevas tecnologías. El trabajo de ellos constituye un aspecto vital para el mejoramiento de las estructuras en el futuro.

De acuerdo a la magnitud del proyecto, pueden intervenir además varios tipos de profesionales, como mercadólogos, abogados, administradores de empresas, arquitectos, e ingenieros de diversas ramas como estructurales, sanitaristas, electricistas, mecánicos, etc. Con todos ellos el ingeniero puede relacionarse en un momento dado.

La relación del ingeniero estructural con el de carreteras, de recursos hidráulicos, aeronáutico, etc. no es sencilla, ya que sus respectivos diseños deben estar interrelacionados para que no solamente no interfieran entre sí (por ejemplo las instalaciones del ingeniero hidráulico con las del ingeniero electricista), sino que trabajen correctamente en una forma conjunta y se beneficien unos y otros.

El ingeniero estructural debe trabajar en combinación con arquitectos y otros ingenieros. Debe crear una estructura adecuada y conveniente para cada proyecto y que se ajuste a las alternativas arquitectónicas. A la vez, el ingeniero estructural debe ser realista y práctico. El ingeniero estructural debe optimizar la relación entre la economía y la seguridad de la estructura.

### III. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Definición:

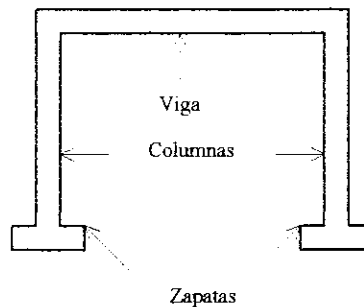
Se le llama análisis estructural a la determinación de fuerzas y desplazamientos, tanto en el diseño preliminar como en el final.

#### A. Componentes estructurales, apoyos y conexiones

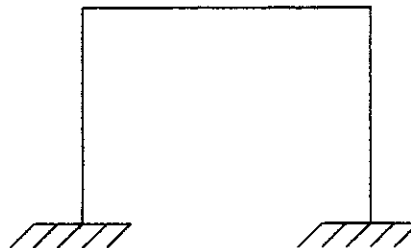
##### 1. Componentes estructurales

Las estructuras están formadas por la unión de varios tipos de miembros, y pueden variar en la forma en que están apoyados y conectados.

La estructura básica, en el caso de un marco rígido, está compuesta de la siguiente forma:



Sus componentes estructurales son las vigas, las columnas y los cimientos (zapatas) y su modelo matemático es el siguiente:



## 2. Apoyos

Existen diferentes tipos de apoyos y conexiones en las estructuras. A continuación se muestran los más importantes.

Empotramiento:

Este tipo de apoyo restringe el giro y el desplazamiento en cualquier sentido.



Fig. 3.3

Modelo matemático:

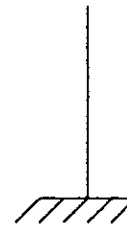


Fig. 3.4

Reacciones que genera:

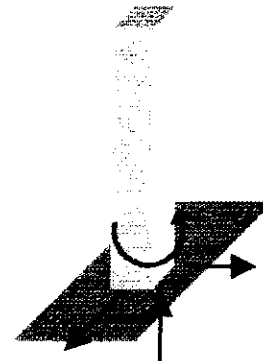
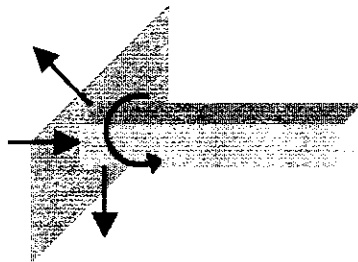


Fig. 3.5

### Apoyo articulado:

El apoyo articulado restringe el desplazamiento horizontal y vertical, y permite el giro.

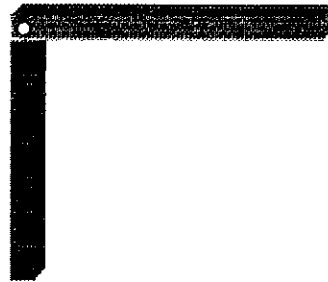


Fig. 3.6

Modelo matemático:

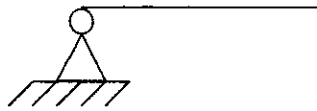


Fig. 3.7

Reacciones que genera y giro que permite:

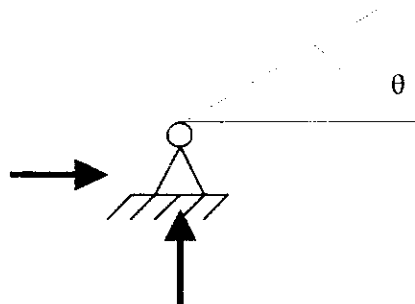


Fig. 3.8

Apoyo simple

Este tipo de apoyo permite el giro y además el desplazamiento en un sentido.



Fig. 3.9

Modelo matemático:

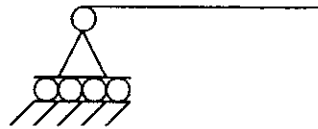


Fig. 3.10

Reacciones que genera, giro y desplazamiento que permite:

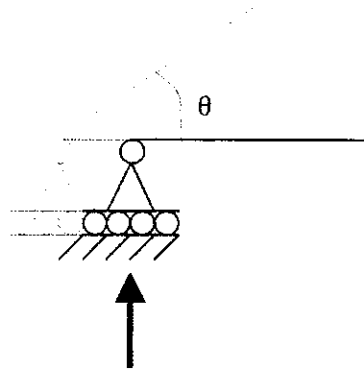


Fig. 3.11

### 3. Conexiones

Conexión Rígida

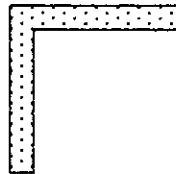


Fig. 3.12

La conexión rígida es una unión de miembros que permite la transmisión de fuerzas de corte, fuerzas axiales y momento

Modelo matemático:

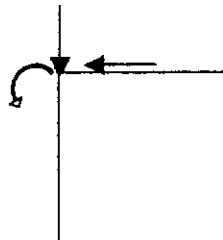
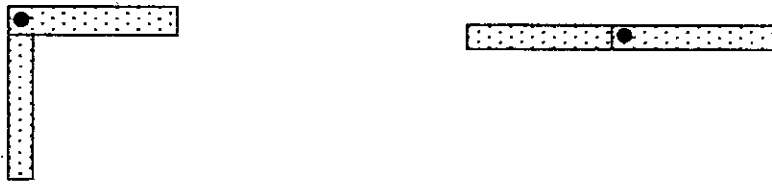


Fig. 3.13

## Conexión Articulada

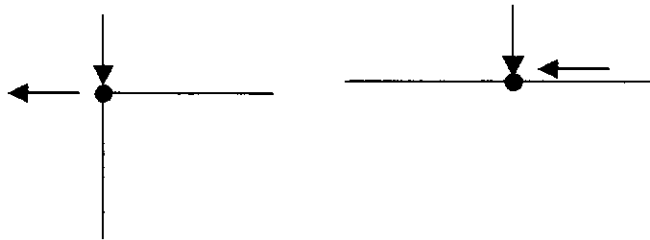
Fig. 3.14



Una conexión articulada es una unión de miembros que permite la transmisión de fuerzas de corte, fuerzas axiales pero no momento.

Modelo matemático:

Fig. 3.15

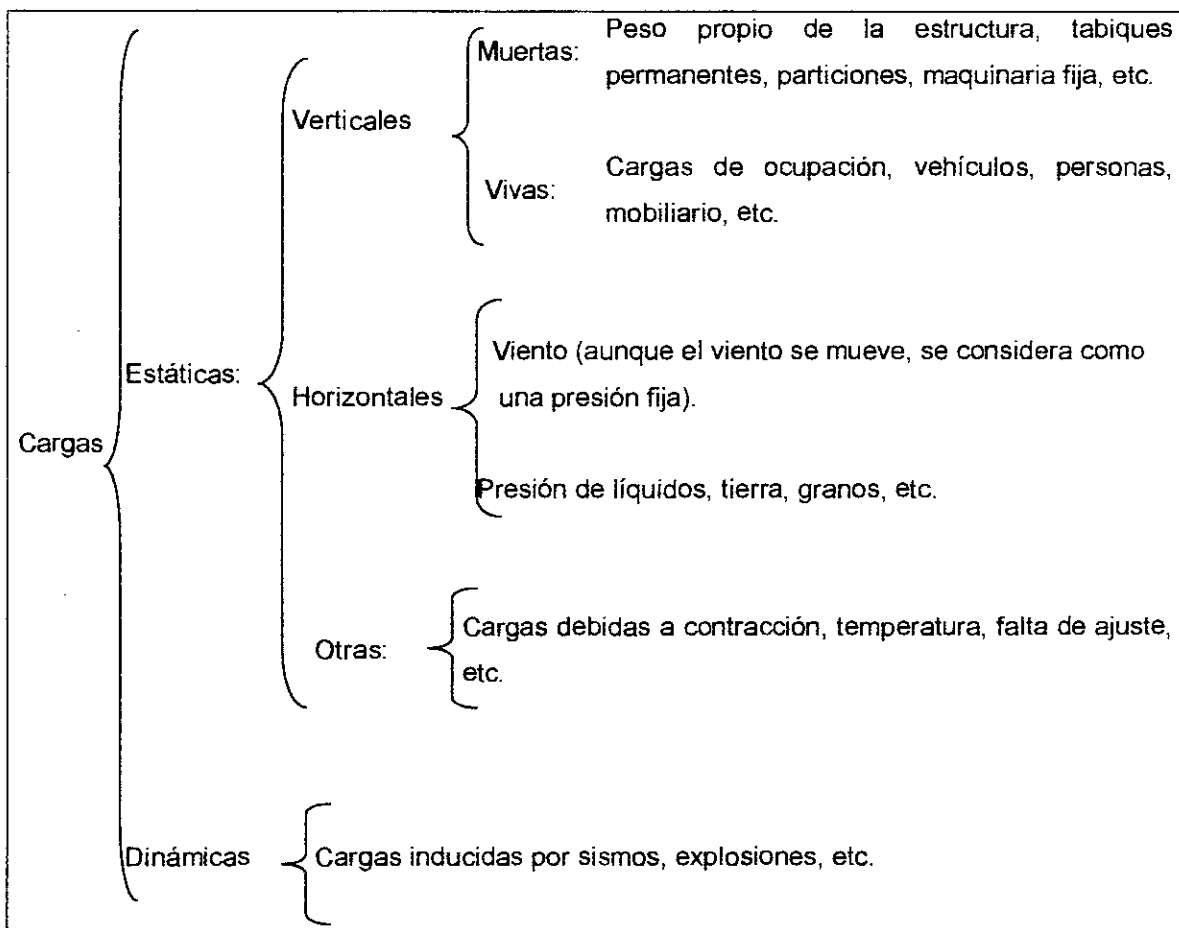


## B. Tipos de Cargas

Todas las estructuras están sujetas a la aplicación de diverso tipo de acciones, cargas o solicitaciones. Los códigos de estructuras de diferentes países establecen el tipo de cargas y la cuantía mínima necesaria que debe considerarse al diseñar una estructura.

A continuación se muestra un cuadro sinóptico, con los tipos de cargas más comunes que suelen presentarse en las estructuras.

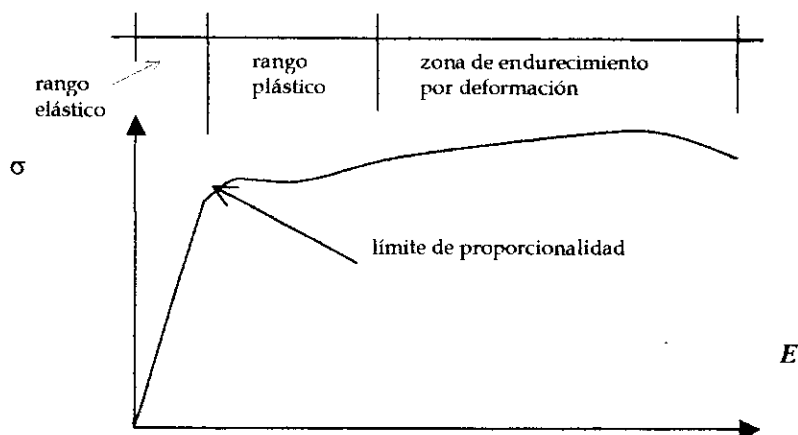
Tabla 3.1



## C. Comportamiento Elástico y Lineal

Al estudiar los elementos de una estructura encontramos que las deformaciones debidas a los esfuerzos que actúan sobre ellas, varían los resultados. Por esta razón se debe estudiar y comprender bien el comportamiento elástico y lineal de las estructuras.

Se sabe que un material es lineal si cumple con la Ley de Hooke, o sea que la deformación es proporcional a la carga aplicada hasta llegar al límite de proporcionalidad. La constante de proporcionalidad o pendiente de la curva se llama Módulo de Elasticidad de Young ( $E$ ).



Es posible decir que un material lineal es un caso especial de la condición más general llamada comportamiento elástico.

Un material es elástico cuando al descargarlo su curva esfuerzo-deformación sigue la curva de la carga. (En el caso lineal se cumple automáticamente ya que la descarga es lineal, pero materiales como el hule no son lineales, aunque son elásticos).

Una Estructura es Lineal cuando:

- Los materiales de sus miembros son lineales
- Las deformaciones de los miembros cargados son pequeñas.

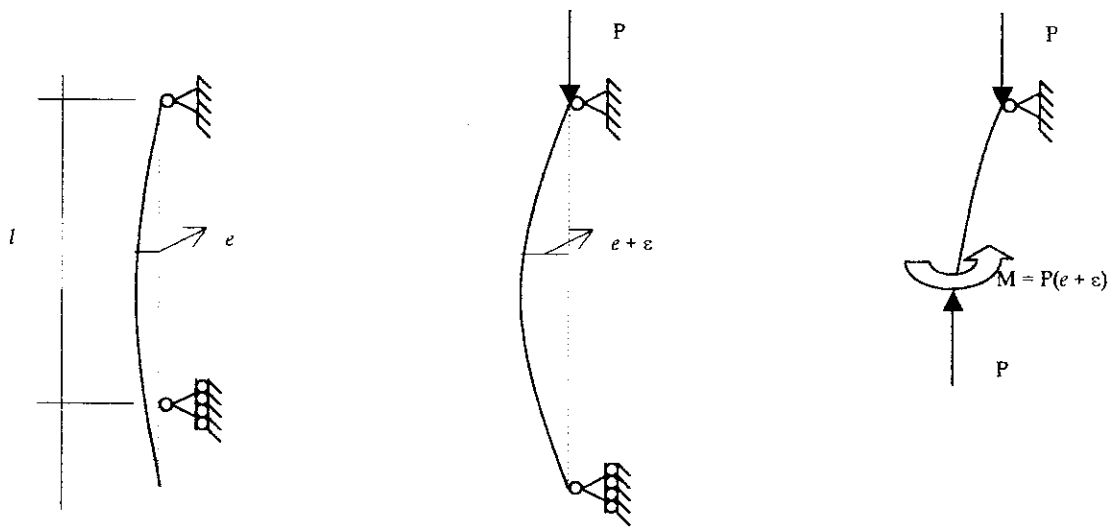
Se dice que las deformaciones son pequeñas, cuando las ecuaciones de equilibrio planteadas en función de la forma geométrica antes de cargar la estructura dan resultados iguales a los obtenidos con las mismas ecuaciones, planteadas en función de la forma final deformada (cargada). O sea, cuando la forma geométrica inicial es "idéntica" a la final para fines prácticos.

La habilidad para reconocer esta condición se adquiere al hacer muchos ejemplos. Más adelante, se verá un estudio del comportamiento inelástico y no lineal.

Ejemplo de Comportamiento No Lineal:

Una viga columna imperfecta.

Fig. 3.17

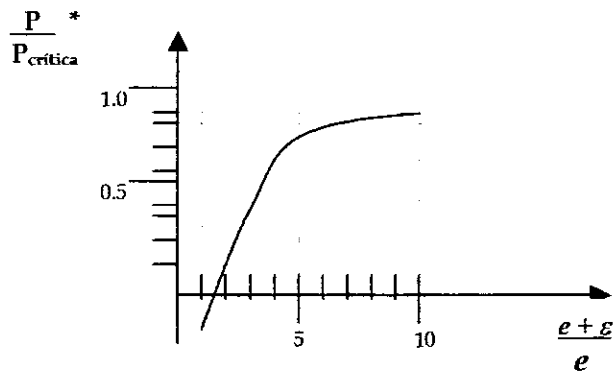


$e$ : deformación unitaria

$e + \varepsilon$ : deformación por carga

Gráfica Carga-desplazamiento a //2 de la columna:

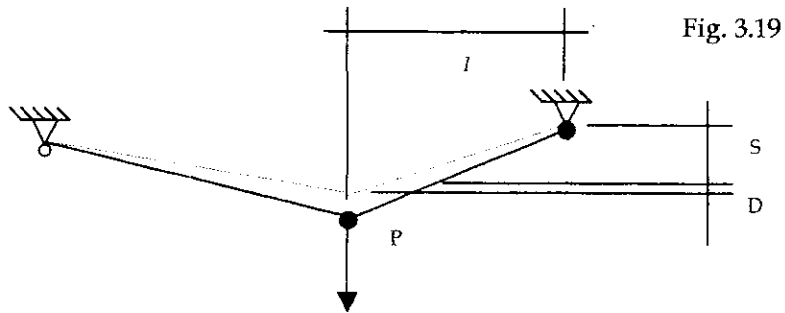
Fig. 3.18



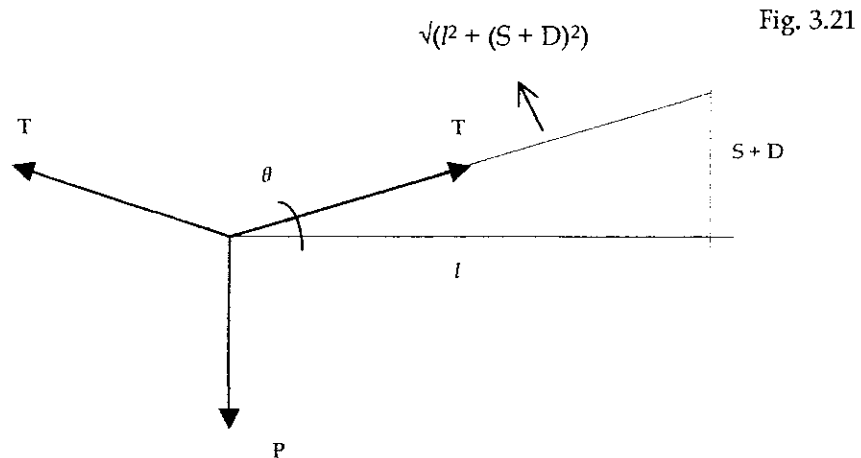
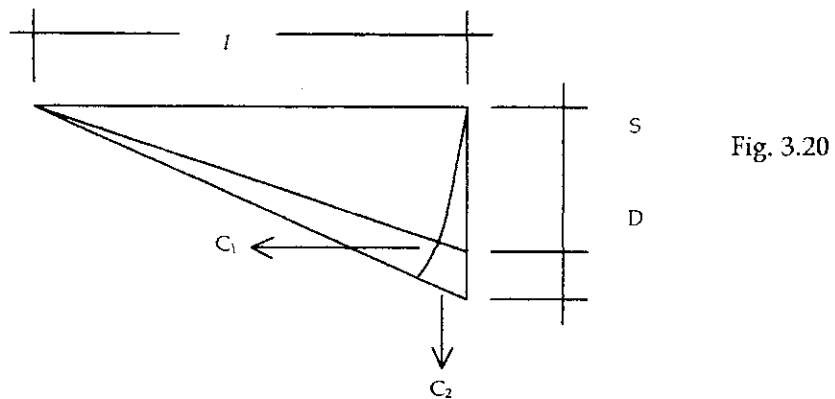
\*  $P/P_{crítica}$  es la relación de la carga aplicada  $P$  a la carga de pandeo de Euler para una columna perfecta.

La no linealidad es función de la esbeltez, ya que en una columna gruesa  $\varepsilon$  no depende mucho de  $P$ .

Ejemplo de Análisis No Lineal:



Nota:  $S \ll L$ . Las deformaciones son dibujadas exageradamente.



$$\sum F_v = 0$$

$$2T \text{sen}(\theta) = P$$

$$2T \left[ \frac{(S+D)}{\sqrt{L^2 + (S+D)^2}} \right] = P$$

$$T = \frac{P \sqrt{l^2 + (S+D)^2}}{2(S+D)} \approx \frac{Pl}{2(S+D)}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \epsilon = \frac{T}{AE}$$

$$\epsilon = \frac{Pl}{2AE(S+D)}$$

$$(l + C_1)^2 = S^2 + l^2$$

$$l^2 + 2lC_1 + C_1^2 = S^2 + l^2$$

$C_1^2$  es muy pequeño  $\rightarrow$  se deprecia

$$2lC_1 = S^2$$

$$C_1 = \frac{S^2}{2l}$$

De igual forma,

$$C_2 = \frac{(S+D)^2}{2l}$$

$$\Delta = C_2 - C_1 = \frac{(S+D)^2 - S^2}{2l} = \frac{S^2 + 2SD + D^2 - S^2}{2l}$$

$$\Delta = \frac{2SD + D^2}{2l}$$

Deformación unitaria

$$\epsilon' = \frac{\Delta}{l_{total}} = \frac{\Delta}{l + C_1} = \frac{2SD + D^2}{2l \left[ 1 + \frac{S^2}{2l} \right]}$$

Despreciando  $S^2$  por ser muy pequeño:

$$\epsilon' = \frac{2SD + D^2}{2l^2}$$

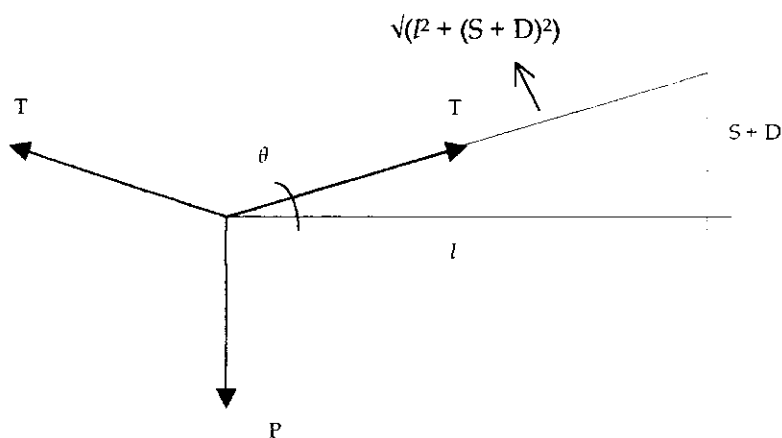
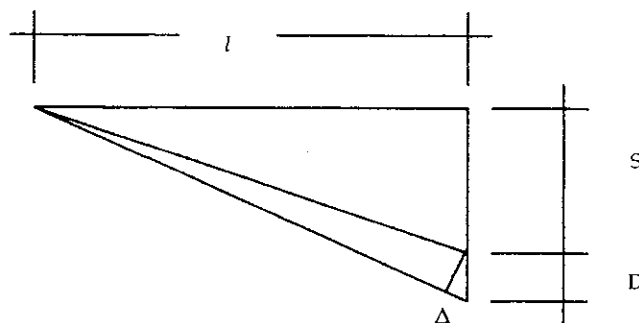
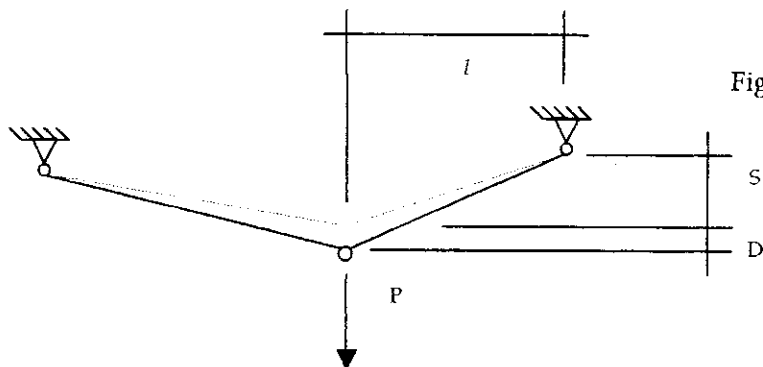
$$\epsilon = \epsilon'$$

$$\frac{Pl}{2AE(S+D)} = \frac{2SD + D^2}{2l^2}$$

$$P = \frac{AE(S+D)(2SD + D^2)}{l^2}$$

$$P = \frac{AE(D^3 + 3SD^2 + 2S^2D)}{l^2}$$

Por lo tanto,  $P$  no es una función lineal de  $D$ . Y al considerar:



$$\sum F_v = 0:$$

$$T = \frac{P \sqrt{(l^2 + (S+D)^2)}}{2(S+D)} \approx \frac{P \sqrt{(l^2 + S^2)}}{2S}$$

$$\epsilon = \frac{P \sqrt{(l^2 + S^2)}}{2AES}$$

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{S}{\sqrt{(l^2 + S^2)}} \quad \text{entonces,} \quad \Delta = \frac{SD}{\sqrt{(l^2 + S^2)}}$$

$$\varepsilon^1 = \frac{\Delta}{\sqrt{I^2 + S^2}} = I + \frac{SD}{S^2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon^1$$

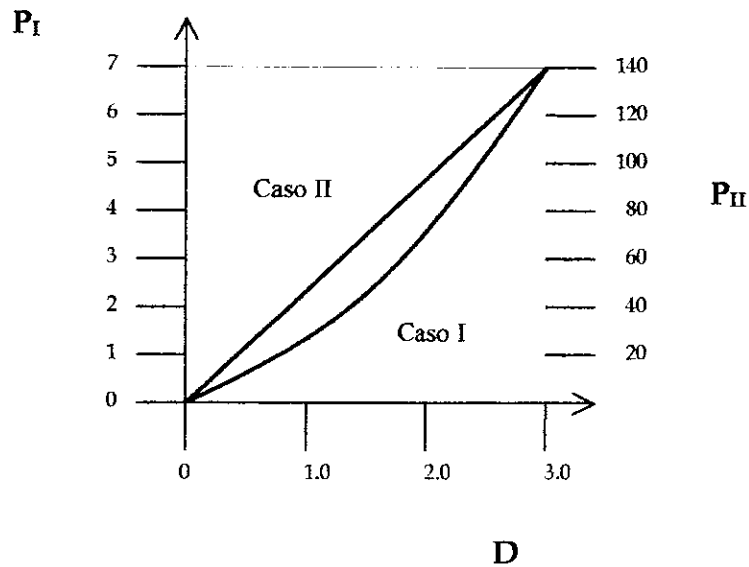
$$\frac{P\sqrt{I^2 + S^2}}{2AES} = I + \frac{SD}{S^2}$$

$$P = \frac{2AES^2}{(I^2 + S^2)^{3/2}} D$$

en donde P es una función lineal de D.

### Curva carga-desplazamiento

Fig. 3.25



En el ejemplo anterior se tenían 2 estructuras básicamente con la misma forma, pero en el análisis de cada una de ellas se tomaban simplificaciones diferentes matemáticamente hablando, por lo cual se obtuvieron resultados diferentes en la relación que hay entre carga y desplazamiento.

En cierta forma todas las estructuras son no lineales, ya que para hacer un análisis exacto habría que considerar el desplazamiento en las ecuaciones de equilibrio. Los miembros sometidos a compresión son lineales de por sí.

## D. El Principio de Superposición

La principal razón de nuestro estudio sobre la suposición del comportamiento lineal estructural, es que nos permite usar el principio de superposición. El desplazamiento total debido a la acción de varias fuerzas se puede obtener al sumar los desplazamientos individuales que produce cada fuerza. A la inversa, la fuerza que produce un desplazamiento total, puede obtenerse al sumar las fuerzas que producen desplazamientos parciales.

Ejemplo:

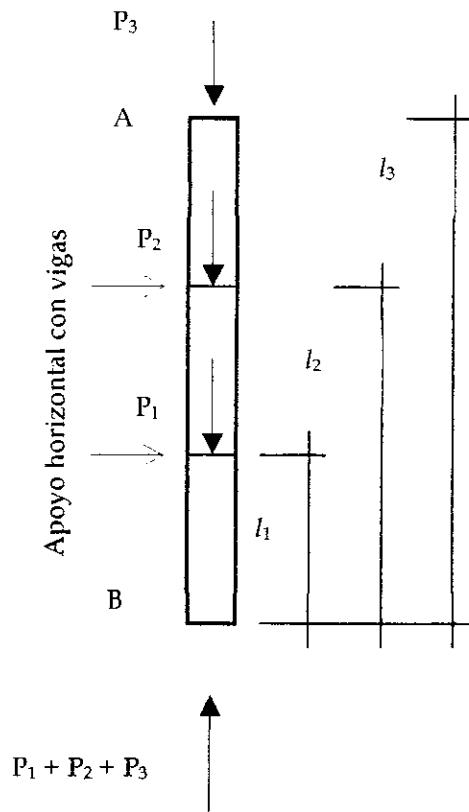


Fig. 3.26

El esfuerzo en B será:

$$\sigma_B = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{A} = \frac{P_1}{A} + \frac{P_2}{A} + \frac{P_3}{A}$$

La suma de los esfuerzos parciales es igual al esfuerzo total.

El acortamiento total de la barra es:

$$\Delta = \frac{(P_1 + P_2 + P_3)l_1}{AE} + \frac{(P_2 + P_3)(l_2 - l_1)}{AE} + \frac{P_3(l_3 - l_2)}{AE}$$

$$\Delta = \frac{P_1 l_1}{AE} + \frac{P_2 l_2}{AE} + \frac{P_3 l_3}{AE}$$

Si la estructura no es lineal no se puede aplicar el principio de superposición. (Comparar el  $\Delta$  para una P de valor 3 y otra de 6 para el Caso I en la gráfica anterior).

## E. Determinación estática

Las estructuras pueden ser estáticamente determinadas (isostáticas) o estáticamente indeterminadas (hiperestáticas). Pero en ambos casos deben ser estables geoméricamente.

Definición:

Estructuras estáticamente determinadas son aquellas en las que pueden determinarse las fuerzas internas y externas para cualquier carga, solamente con las ecuaciones del equilibrio estático.

Llamaremos "n" al grado de indeterminación estática de una estructura. La forma de obtener el valor de "n" se presenta más adelante.

Ejemplos:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

} para 2 dimensiones

$$\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$$

} para 3 dimensiones

Definición:

Estructuras estáticamente indeterminadas son aquellas en las que para determinar las fuerzas, además de usar las ecuaciones de equilibrio estático, son necesarias otras ecuaciones que se refieren a la compatibilidad de las deformaciones en la estructura.

Cuando son necesarias "n" ecuaciones adicionales, se dice que estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática en "n" grado.

Cuando "n" es igual a cero la estructura es estáticamente determinada, ya sea estable o inestable; y cuando "n" es menor que cero se tiene la plena seguridad de que la estructura es inestable, como se ampliará posteriormente.

**Ejemplo:**

Encontrar las reacciones para la armadura estáticamente determinada.

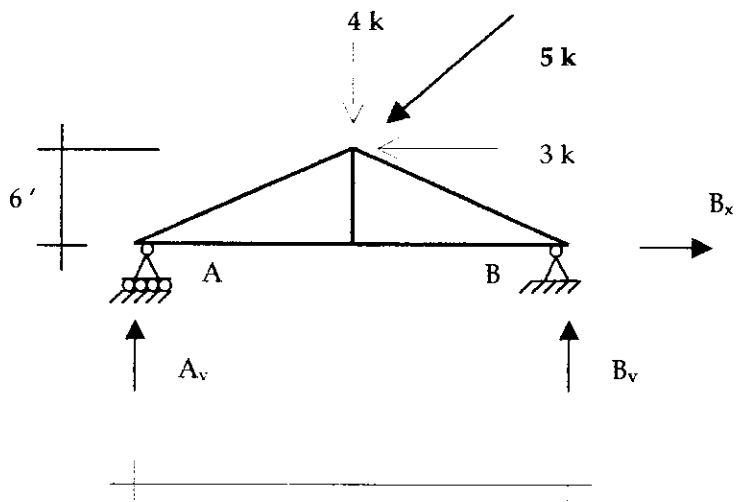


Fig. 3.27

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow +$$

15'

$$B_x - 3 = 0$$

$$B_x = 3k \rightarrow$$

$$\Sigma M_A = 0: \curvearrowright +$$

$$-A_y 15 + 4(7.5) = 0$$

$$A_y = 2k \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0 \uparrow +$$

$$B_y + 2 - 4 = 0$$

$$B_y = 2k \uparrow$$

Ejemplo:

Calcular las reacciones.

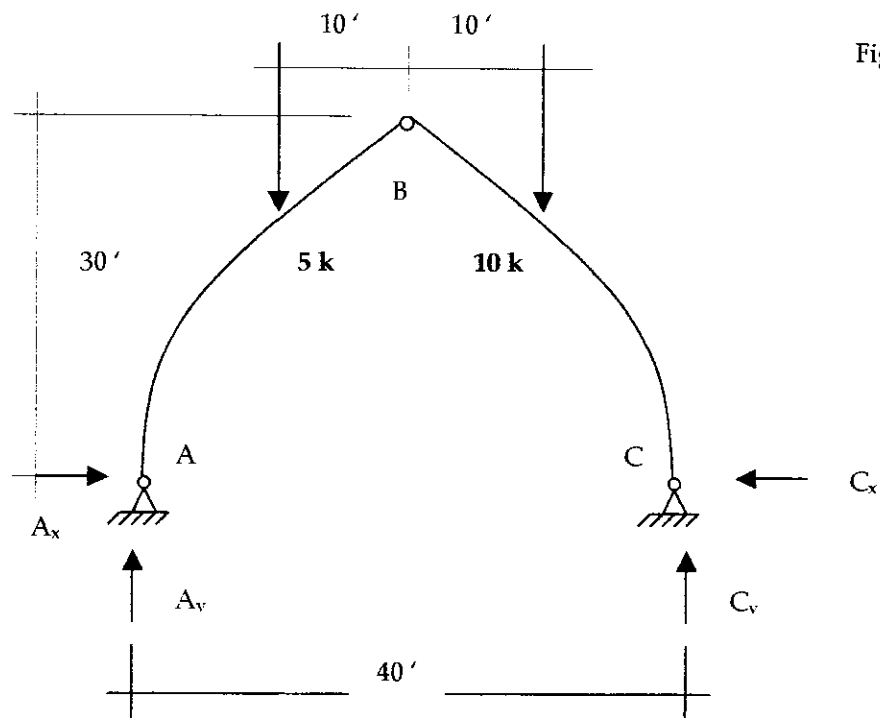


Fig. 3.28

Exteriormente la estructura tiene 4 incógnitas y es posible aplicarle 3 ecuaciones de estática.

Pero si separamos la estructura en la articulación en el punto B, obtendremos 2 cuerpos libres, a cada uno de los cuales podemos aplicarles 3 ecuaciones de estática.

#### Cuerpos Libres

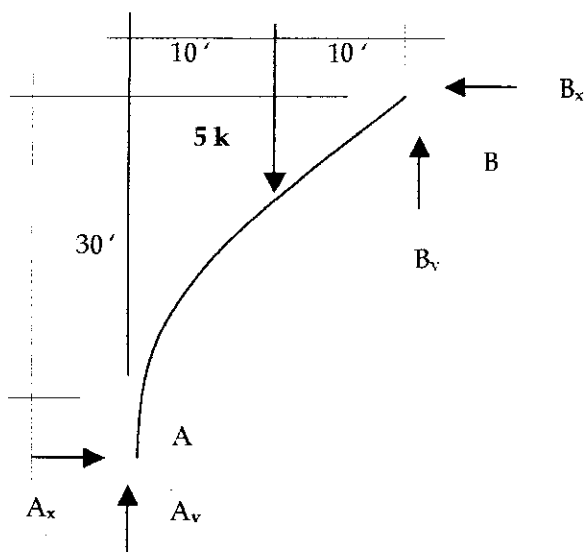


Fig. 3.29

$$\Sigma F_x = 0$$

$$A_x = B_x$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$A_y + B_y = 5$$

$$B_y = 5 - A_y \text{ Ec. 1}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad \curvearrowright$$

$$B_x(30) + B_y(20) - 5(10) = 0$$

$$B_x = \frac{50 - 20B_y}{30}$$

$$B_x = \frac{5 - 2B_y}{3} \quad \text{Ec. 2}$$

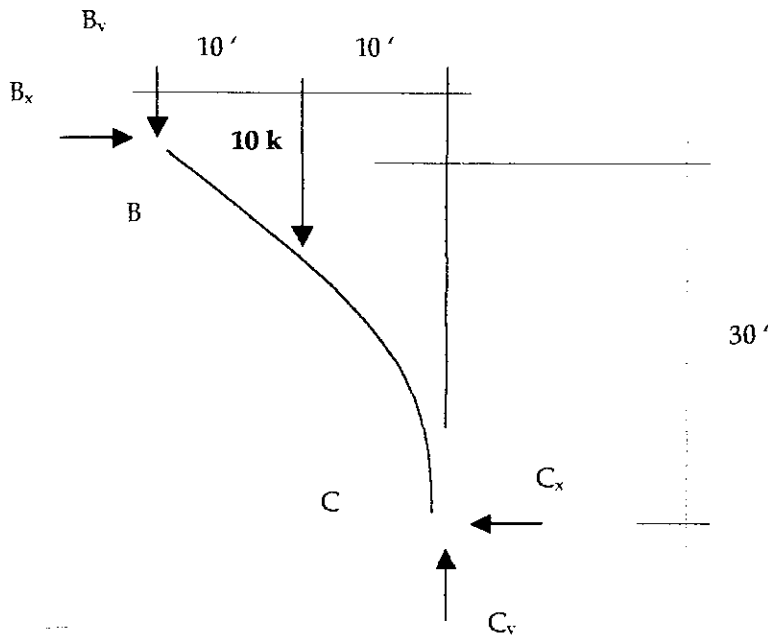


Fig. 3.30

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$B_x = C_x$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$C_y - B_y = 10$$

$$B_y = C_y - 10 \text{ Ec. 3}$$

$$\underline{\Sigma M_c = 0:}$$



$$B_y(20) - B_x(30) + 10(10) = 0$$

$$B_x = \frac{100 + 20B_y}{30}$$

$$B_x = \frac{10 + 2B_y}{3} \quad \text{Ec. 4}$$

Al igualar la Ec. 2 con la Ec.4 se obtiene:

$$\text{Ec.2} = \text{Ec.4}$$

$$\frac{5 - 2B_y}{3} = \frac{10 + 2B_y}{3}$$

$$4B_y = -5 \text{ k}$$

$$B_y = -1.25 \text{ k}$$

Sustituyendo  $B_y = -1.25$  en Ec. 2

$$B_x = \frac{5 - 2(-1.25)}{3}$$

$$B_x = 2.5 \text{ k} = A_x = C_x$$

Sustituyendo  $B_y$  en Ec.1

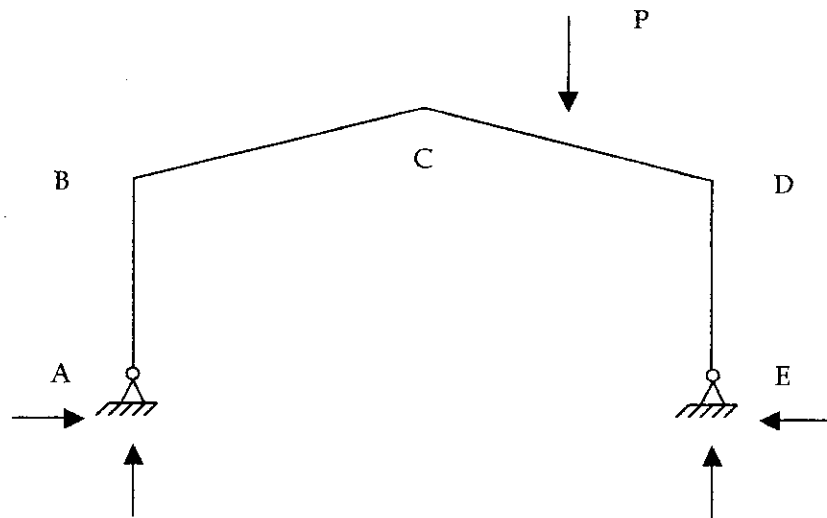
$$A_y = 5 - (-1.25) = 6.25 \text{ k}$$

y,

$$C_y = B_y + 10 = 8.75 \text{ k}$$

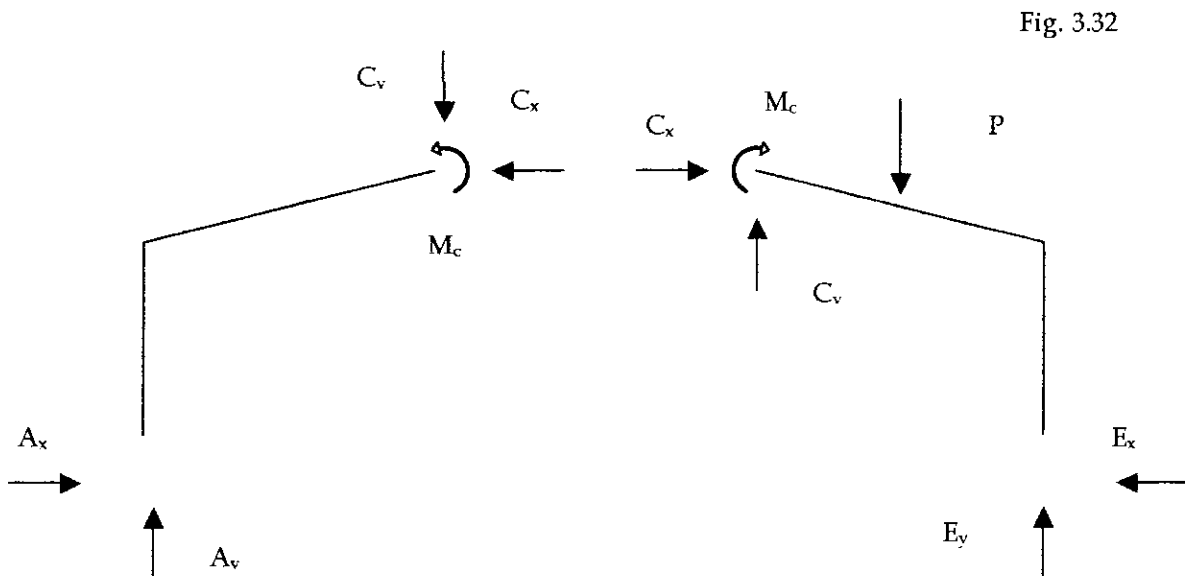
Ejemplo:

Estudiar la indeterminación estática de la siguiente estructura.



Por el tipo de apoyos se generan 4 reacciones que en este caso serían las incógnitas y podemos aplicar 3 ecuaciones de estática: sumatoria de fuerzas horizontales igual a cero, sumatoria de fuerzas verticales igual a cero y sumatoria de momentos igual a cero.

Si separamos la estructura en el punto C:

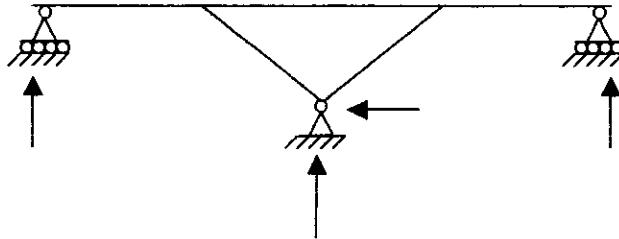


Ahora, este sistema tiene 7 incógnitas y es posible aplicar sólo 6 ecuaciones de estática, tres ecuaciones a cada cuerpo libre. Por lo tanto, tenemos más incógnitas que ecuaciones aplicables, por lo que es estáticamente indeterminada.

Ejemplo:

Estudiar la indeterminación estática de la siguiente estructura.

Fig. 3.33



Sea:

F: fuerzas desconocidas

t: partes en que se divide la estructura

n: grado de indeterminación estática

Y si se corta la estructura en el claro central de la viga, para no tener anillos cerrados, tenemos:

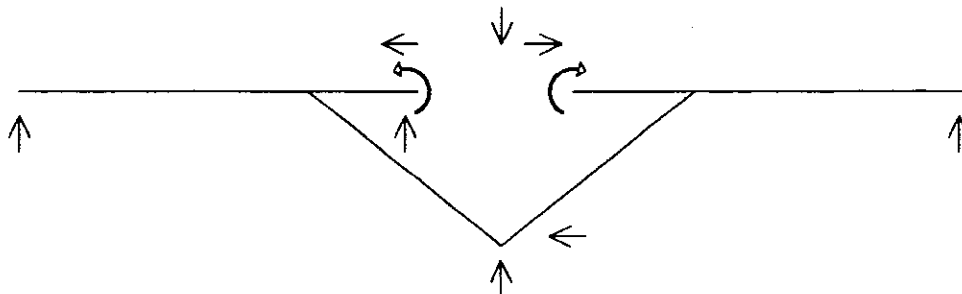


Fig. 3.34

Ahora, podemos plantear la ecuación para determinar el grado de indeterminación estática:

$$n = F - 3t$$

para este ejemplo:

$$F = 7; \quad t = 1$$

$$n = F - 3t = 7 - 3 = 4$$

$$n = 4$$

O bien, si cortamos también en el miembro inclinado del lado izquierdo:

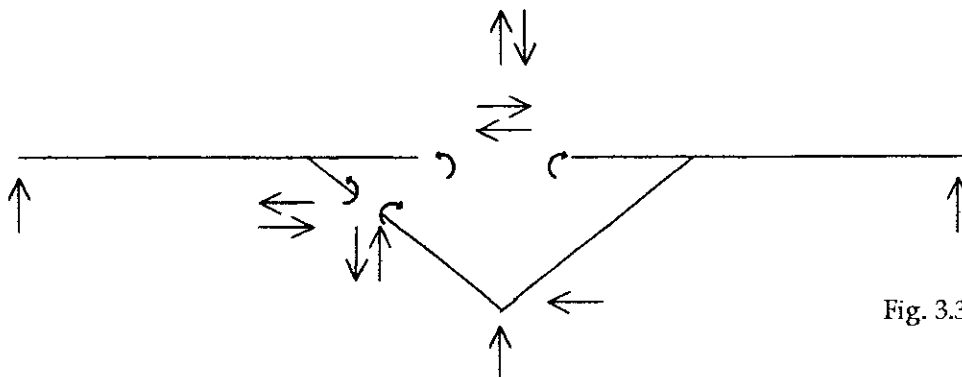


Fig. 3.35

Al calcular, de nuevo, el grado de indeterminación estática:

$$F = 10; \quad t = 2$$

$$n = F - 3t = 10 - 3(2)$$

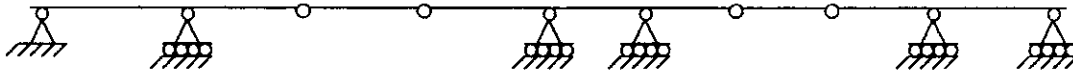
$$n = 4$$

Y se tienen resultados iguales, por lo que no importa en cuántas partes separemos la estructura, siempre y cuando no se dejen anillos cerrados, el grado de indeterminación estática es el mismo.

Ejemplo:

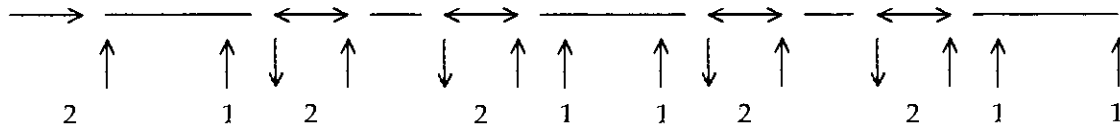
Calcular el grado de indeterminación estática para la siguiente viga.

Fig. 3.36



Al cortar en cada articulación:

Fig. 3.37



$$F = 15; \quad t = 5$$

$$n = F - 3t = 15 - 3(5)$$

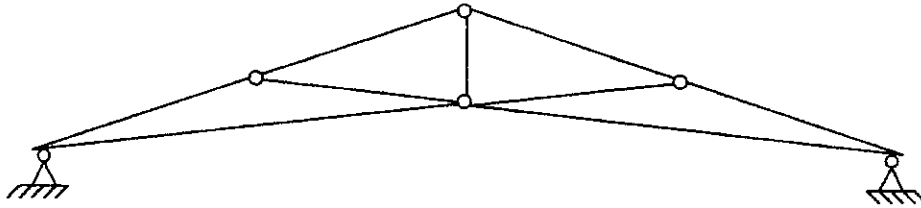
$$n = 0$$

Por lo tanto, es estáticamente determinada

Ejemplo:

Para el caso de una armadura, la formula para hallar "n" la obtenemos de la siguiente forma.

Fig. 3.38



Sea:

m: # de miembros

j: # de nudos

n: grado de indeterminación estática

R: # de reacciones

Solo se tienen, en este caso, 2 ecuaciones de estática ya que las fuerzas son concurrentes, entonces no existen momentos. Solo podemos aplicar  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ .

Incógnitas:  $m + R$

Ecuaciones de equilibrio:  $2j$

entonces, para armaduras estables contenidas en un plano

$$n = m + R - 2j$$

$$n = 9 + 4 - 2(6) = 13 - 12$$

$$n = 1$$

NOTA: Para armaduras estables tridimensionales  $n = m + R - 3j$

## F. Estabilidad geométrica

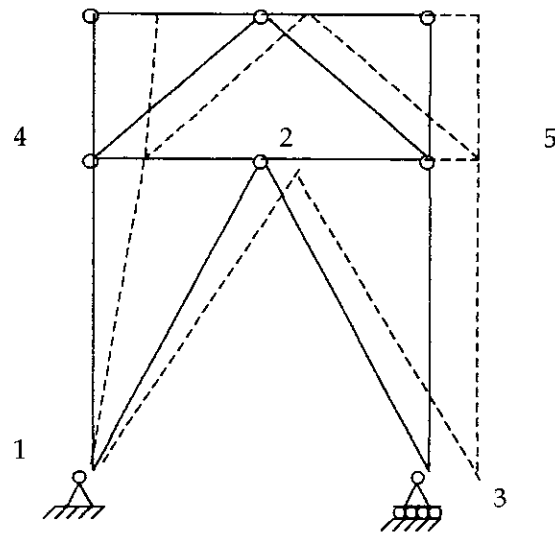


Fig. 3.39

$$N = m + R - 2j$$

$$N = 12 + 3 - 2(8) = -1$$

Esta estructura es geoméricamente inestable, porque puede cambiar su forma sin que sus miembros se esfuercen.

El proyectista debe saber evitar la selección de formas estructurales que son geoméricamente inestables.

Para que la armadura sea estable, es suficiente colocar otro miembro del punto 1 al punto 3.

Por lo que hemos visto anteriormente, necesitamos un método para determinar si la estructura es inestable:

Si el grado de indeterminación estática  $n$  resulta negativo, se tienen menos incógnitas que ecuaciones, entonces la estructura debe ser inestable. Si  $n$  es no negativo, entonces la estructura puede ser inestable o estable.

Si  $n$  es negativo entonces es necesario hacer un cuidadoso estudio de la estructura para descubrir posibles formas inestables o críticas.

En vigas y marcos se hace con sentido común, se examina la estructura para visualizar si existen mecanismos de movimiento en toda ella o en cualquiera de sus partes, que hagan a un miembro o a toda la estructura inestable.

Si un componente estructural se restringe de manera que solamente se permiten fuerzas paralelas o fuerzas concurrentes, entonces ese componente es geoméricamente inestable. La razón es que no hay restricción al giro y al desplazamiento vertical.

Ejemplo:

Determinar si la estructura es estable.

Fig. 3.40

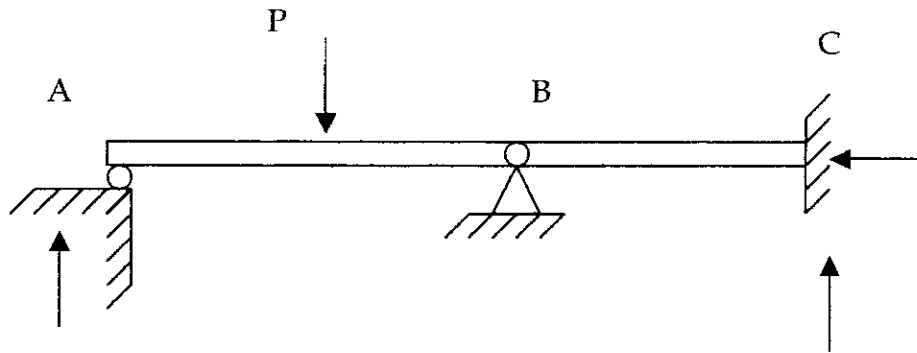
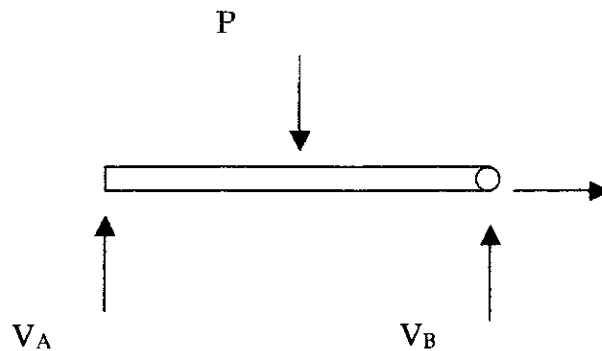


Fig. 3.41



$$n = F - a = 3 - 3$$

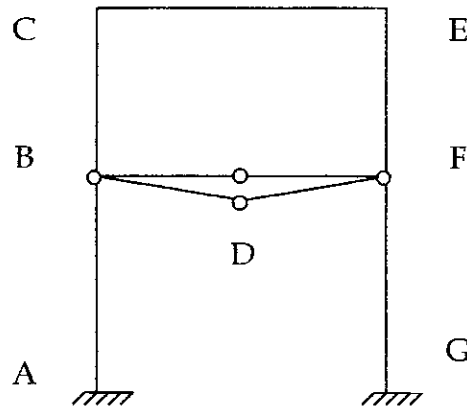
$$n = 0$$

por lo tanto, es estable.

Ejemplo:

Determinar si la estructura es estable.

Fig. 3.42



$$n = F - A$$

$$n = 6 - 3$$

$$n = 3,$$

pero si analizamos el miembro BDF,

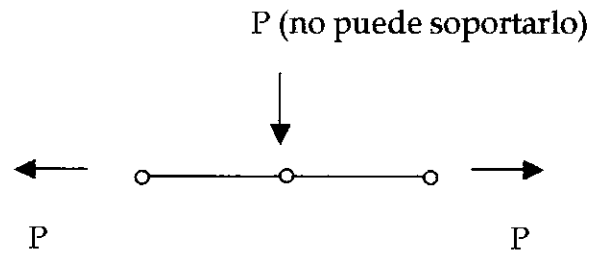


Fig. 3.43

Fuerzas concurrentes.  $n = -2$

En elementos aislados deben aparecer cuando menos 3 reacciones, ya que se introducirán 3 ecuaciones de equilibrio.

Ejemplo:

Determinar si la estructura es estable.

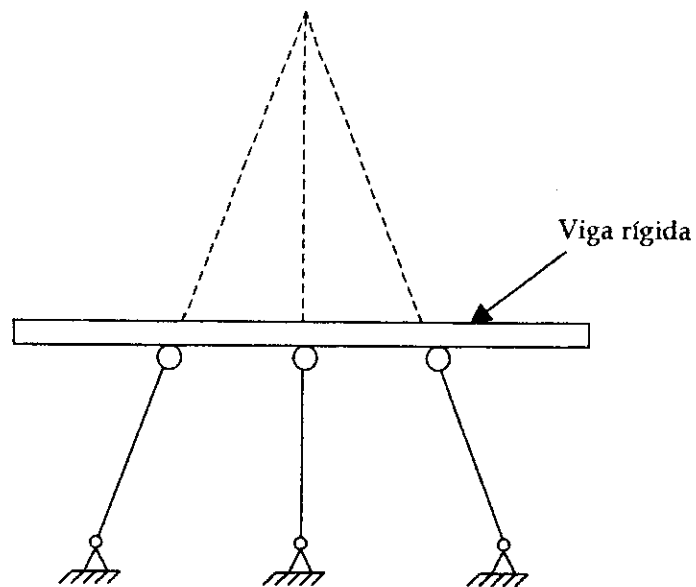


Fig. 3.44

Existen fuerzas concurrentes, por lo tanto la estructura es inestable.

Ejemplo:

Determinar si la estructura es estable.

Fig. 3.45

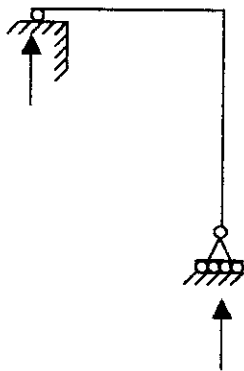
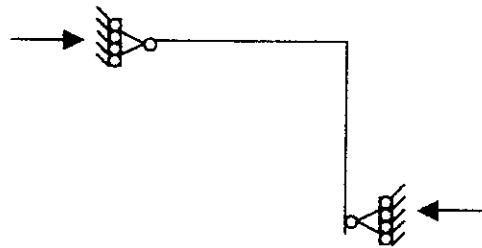


Fig. 3.46

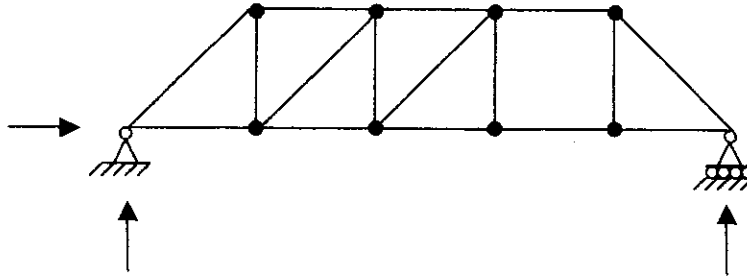


Existen fuerzas concurrentes, por lo tanto la estructura es inestable

Ejemplo:

Para el caso de una armadura, determinar si es estable.

Fig. 3.47



$$n = m + R - 2j$$

$$n = 16 + 3 - 2(10)$$

$$n = 19 - 20$$

$$n = -1$$

La estructura es inestable (mecanismo de movimiento en el tramo sin diagonal).

### 1. La estabilidad en el caso de las armaduras

Los triángulos son figuras estables y rígidas. Pueden disponerse para formar armaduras.

#### Armadura Simple

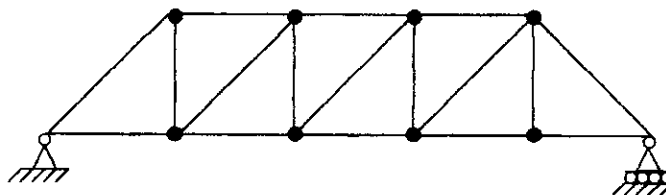
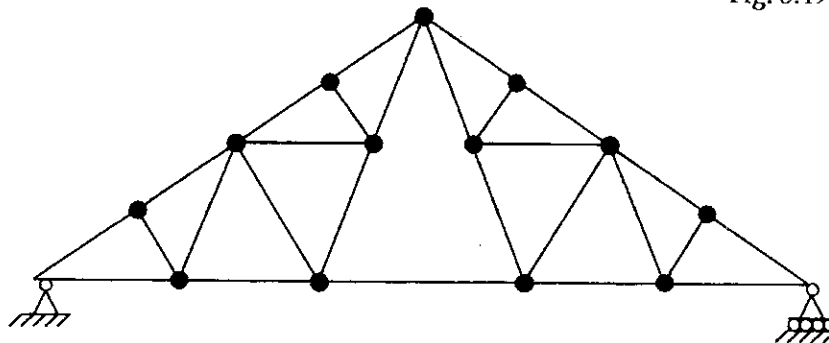


Fig. 3.48

Si la armadura simple se conecta a apoyos en forma estable entonces tendremos una estructura estable.

Si se conectan dos o más armaduras simples con un sistema de pasadores con fuerzas internas no paralelas ni concurrentes y sin mecanismos internos, se tendrá una armadura compuesta estable.

Fig. 3.49



La estabilidad de armaduras simples y compuestas es fácil de determinar, mediante inspección de los triángulos y los apoyos de las armaduras. No sucede así para las armaduras complejas. Las armaduras complejas son aquellas que no pueden clasificarse como simples ni como compuestas.

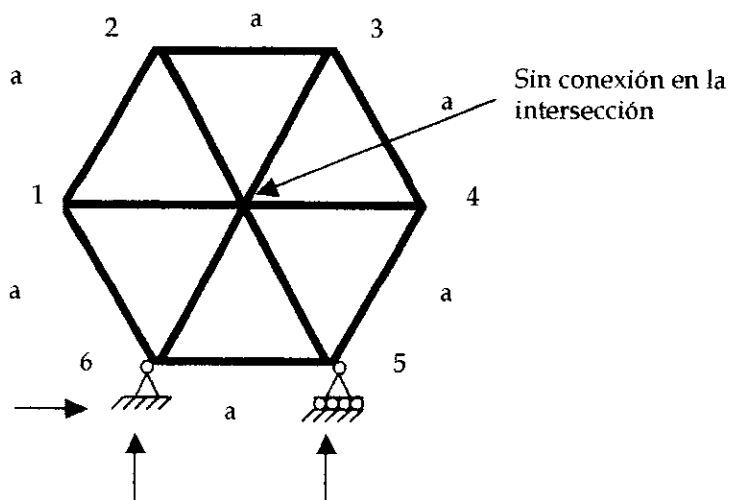
La existencia de formas críticas o inestables en armaduras complejas en las que  $n = 0$ , puede analizarse por la Prueba de la Carga Cero.

#### Prueba de la Carga Cero:

Una estructura estable, para la que  $n=0$  debe tener un conjunto único de fuerzas en el miembro para cualquier condición de carga. Si no puede hallarse una solución única (ya sea que no existan o que haya más de una) entonces la estructura es inestable.

Ejemplo:

Fig. 3.50



m: # de miembros

R: # de reacciones

j: # de nudos

$$n = m + R - 2j = 9 + 3 - 2(6) = 12 - 12$$

$$n = 0$$

Si la carga aplicada es igual a cero,

entonces las reacciones son igual a cero.

$$n = 3 + 9 - 2(6) = 12 - 12$$

$$n = 0$$

Imaginemos ahora una tensión de 1 k en la barra 1-4 (cero cargas aplicadas)

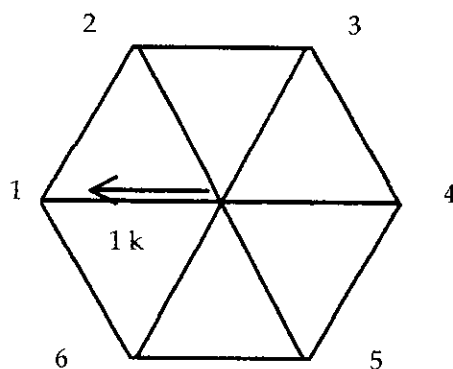


Fig. 3.51

- Diagrama de Cuerpo Libre en Nudo 1

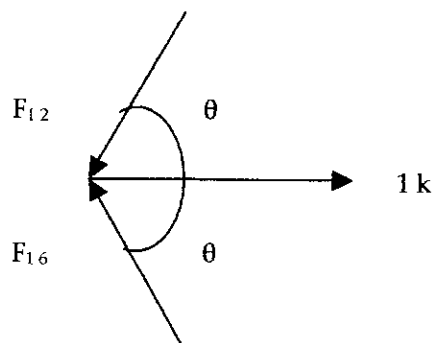


Fig. 3.52

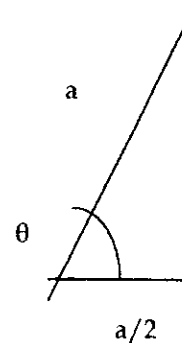


Fig. 3.53

$$\cos(\theta) = \frac{(a/2)}{a}$$

$$\Sigma F_y = 0: \uparrow +$$

$$F_{16} \text{sen}(\theta) = F_{12} \text{sen}(\theta)$$

$$F_{16} = F_{12}$$

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow +$$

$$-1 + F_{12} \cos(\theta) + F_{16} \cos(\theta) = 0$$

Por simetría:

$$-1 + 2F_{12} \cos(\theta) = 0$$

entonces,

$$F_{12} = \frac{1}{2 \cos(\theta)} = \frac{1}{2 \left( \frac{a}{2a} \right)} = 1$$

$$F_{16} = F_{12} = 1 \text{ kip (miembro a compresión)}$$

De igual forma obtendremos que para el equilibrio en punto 2 se requiere que  $F_{25} = 1$  kip a tensión y  $F_{23} = 1$  kip a compresión. Al analizar cada nudo en el sentido de las agujas del reloj, encontramos que todo está en equilibrio con las barras exteriores sometidas a una compresión de 1 kip. Y las interiores sometidas a una tensión de 1 kip y con cero cargas aplicadas. Pero también una carga de cero en el miembro satisface el equilibrio.

Al tener que  $n = 0$  se tiene más de una solución, entonces la armadura es inestable.

Cómo eliminar la inestabilidad?

Para eliminar la inestabilidad, basta con romper la simetría al alargar el miembro horizontal interno y los miembros inclinados que llegan al nudo 1.

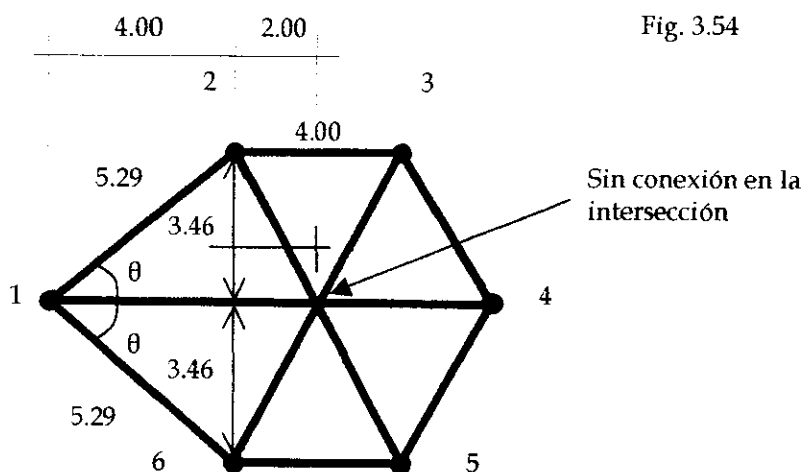


Fig. 3.54

D.C.L. Nudo 1

$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

$$F_{16}(\text{sen}\theta) - F_{12}(\text{sen}\theta) = 0$$

$$F_{16} = F_{12}$$

$$\Sigma F_h = 0 \rightarrow +$$

$$1 - F_{12}(\text{cos}\theta) - F_{16}(\text{cos}\theta) = 0$$

$$1 - 2F_{12}(\text{cos}\theta) = 0$$

$$F_{12} = \frac{1}{2(\text{cos}\theta)} = \frac{1}{2(4/5.29)} = 0.66 = F_{12}$$

D.C.L. Nudo 2

$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

$$0.66(\text{sen}\theta) - F_{25}(\text{sen}\alpha) = 0$$

$$F_{25} = \frac{0.66(3.46/5.29)}{(3.46/4)} = 0.5$$

$$\Sigma F_h = 0 \rightarrow +$$

$$0.66(\text{cos}\theta) + 0.5(\text{cos}\alpha) = F_{23}$$

$$F_{23} = 0.66(4/5.29) + 0.5(2/4)$$

$$F_{23} = 0.75 \leftarrow$$

D.C.L. Nudo 3

$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

$$F_{34}(\text{sen}\alpha) = F_{36}(\text{sen}\alpha)$$

$$F_{34} = F_{36}$$

$$\Sigma F_h = 0 \rightarrow +$$

$$0.75 - 2F_{34}(\text{cos}\alpha) = 0$$

$$F_{34} = \frac{0.75}{2(\text{cos}\alpha)} = \frac{0.75}{2(2/4)}$$

$$F_{34} = 0.75 = F_{36}$$

Fig. 3.55

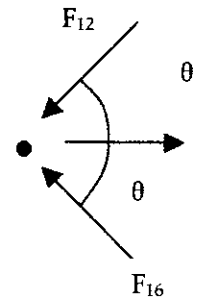


Fig. 3.56

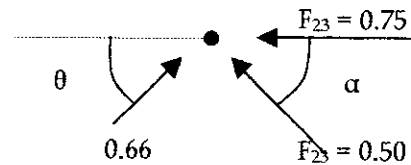
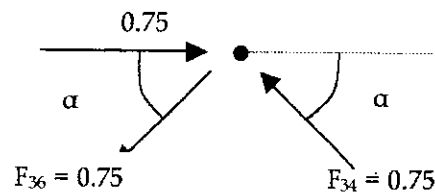


Fig. 3.57



D.C.L. Nudo 4

$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

$$F_{4.5}(\text{sena}) = 0.75(\text{sena})$$

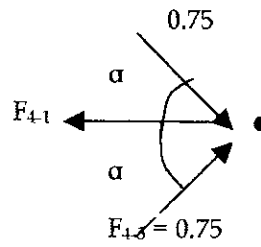
$$F_{4.5} = 0.75$$

$$\Sigma F_h = 0 \rightarrow +$$

$$0.75(\text{cosa}) + 0.75(\text{cosa}) = F_{4.1}$$

$$(0.75)(0.50) * 2 = F_{4.1}$$

$$F_{4.1} = 0.75$$



# IV. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Como se definió anteriormente, las estructuras estáticamente determinadas son aquellas que podemos analizar o resolver al utilizar únicamente las ecuaciones de estática. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo:

Analizar la siguiente estructura de puente, con articulaciones en los puntos C y D.

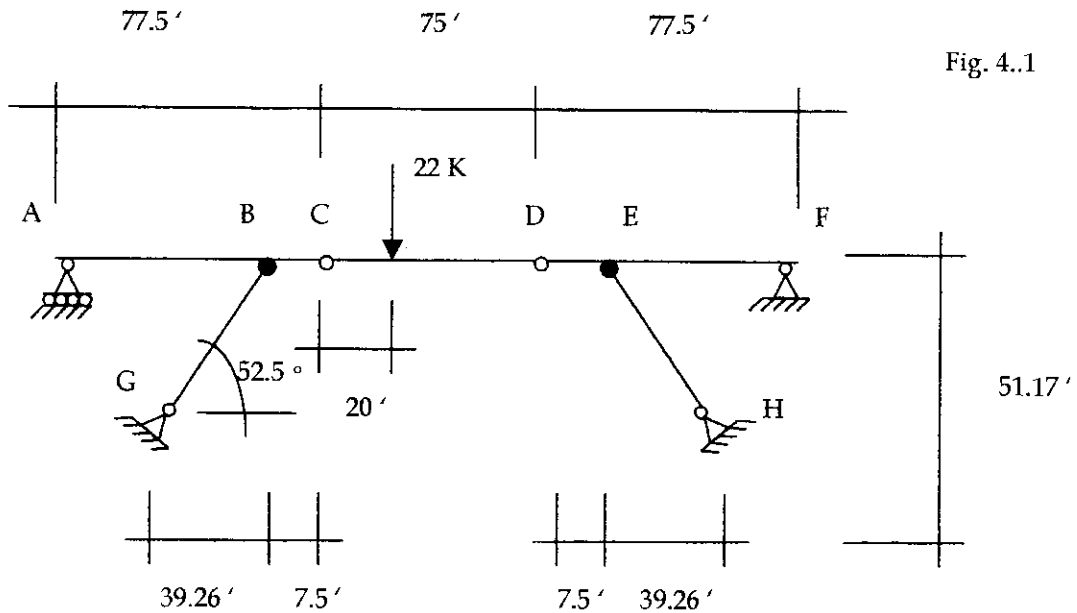


Fig. 4.1

Inicialmente, parecería que la estructura es indeterminada, pero si separamos en los puntos de inflexión tenemos:

Análisis por Cuerpos Libres

Tramo C-D

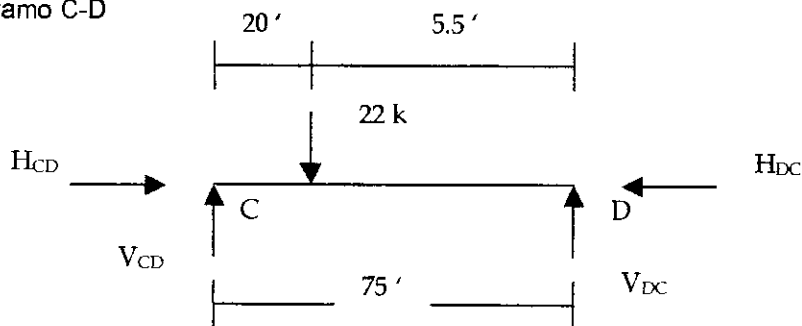


Fig. 4.2

$$\Sigma M_C = 0: \curvearrowright +$$

$$V_{DC}(75) = 22(20)$$

$$V_{DC} = 5.87 \text{ k } \uparrow$$

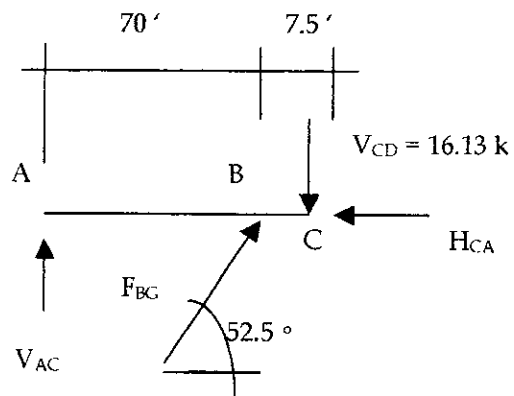
$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$V_{CD} - 22 + 5.87 = 0$$

$$V_{CD} = 16.13 \text{ k } \uparrow$$

Tramo A-C

Fig. 4.3



$$\Sigma M_B = 0: \curvearrowright +$$

$$-V_{AC}(70) - 16.13(7.5) = 0$$

$$V_{AC} = -1.73 \text{ k } \downarrow$$

$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$-1.73 + F_{BG}(\text{sen } 52.5) - 16.13 = 0$$

$$F_{BG} = 22.51 \text{ K}$$

$$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$$

$$22.51 (\cos 52.5) = H_{CA}$$

$$H_{CA} = -13.70$$

$$H_{CA} = 13.70 \text{ k } \leftarrow$$

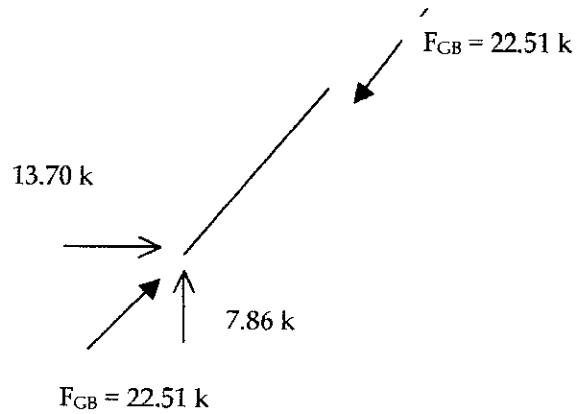
entonces,

$$H_{DC} = 13.70 \text{ k } \leftarrow$$

$$H_{CD} = 13.70 \text{ k } \rightarrow$$

Tramo G-B

Fig. 4..4



$$F_{BGX} = 22.51 (\cos 52.5) = 13.70$$

$$F_{BGY} = 22.51 (\sen 52.5) = 7.86$$

Tramo D-F

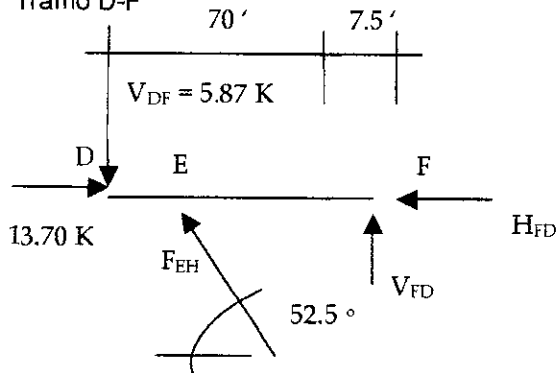


Fig. 4..5

$$\Sigma M_E = 0: \quad \curvearrowright +$$

$$V_{FD}(70) = -5.87(7.5)$$

$$V_{FD} = -0.63$$

$$V_{FD} = 0.63 \text{ K} \downarrow$$

$$\Sigma F_V = 0: \quad \uparrow +$$

$$-5.87 + F_{EH}(\sen 52.5) - 0.63 = 0$$

$$F_{EH} = \frac{0.63 + 5.87}{\sen 52.5}$$

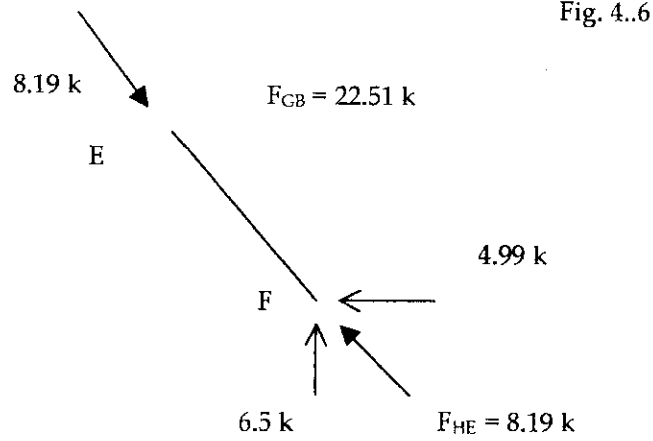
$$F_{EH} = 8.19 \text{ k}$$

$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$

$13.70 - 8.19(\cos 52.5) - H_{FD} = 0$

$H_{FD} = 8.71 \text{ k} \leftarrow$

Tramo E-H

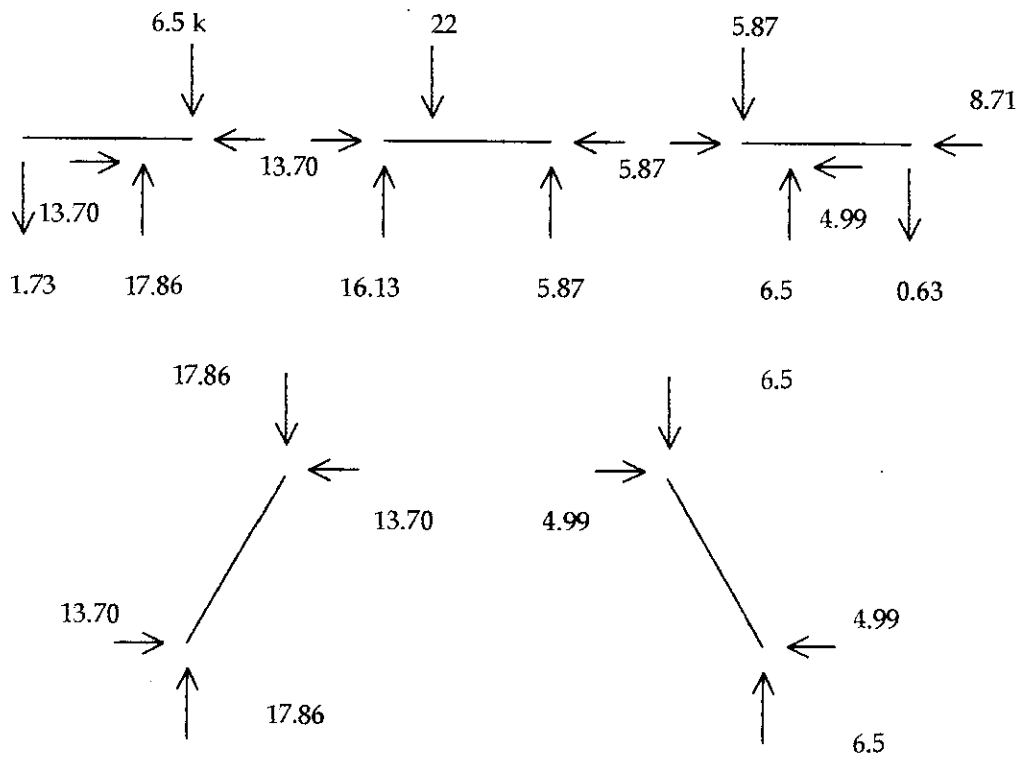


$F_{HEX} = 8.19(\cos 52.5) = 4.99 \text{ k}$

$F_{HEY} = 8.19(\sin 52.5) = 6.50 \text{ k}$

Al reunir los cuerpos libres con sus respectivas fuerzas tenemos:

Fig. 4.7



Chequeo:

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow +$$

$$13.70 - 4.99 - 8.71 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \uparrow +$$

$$-1.73 + 17.86 + 6.5 - 0.63 - 22 = 0$$

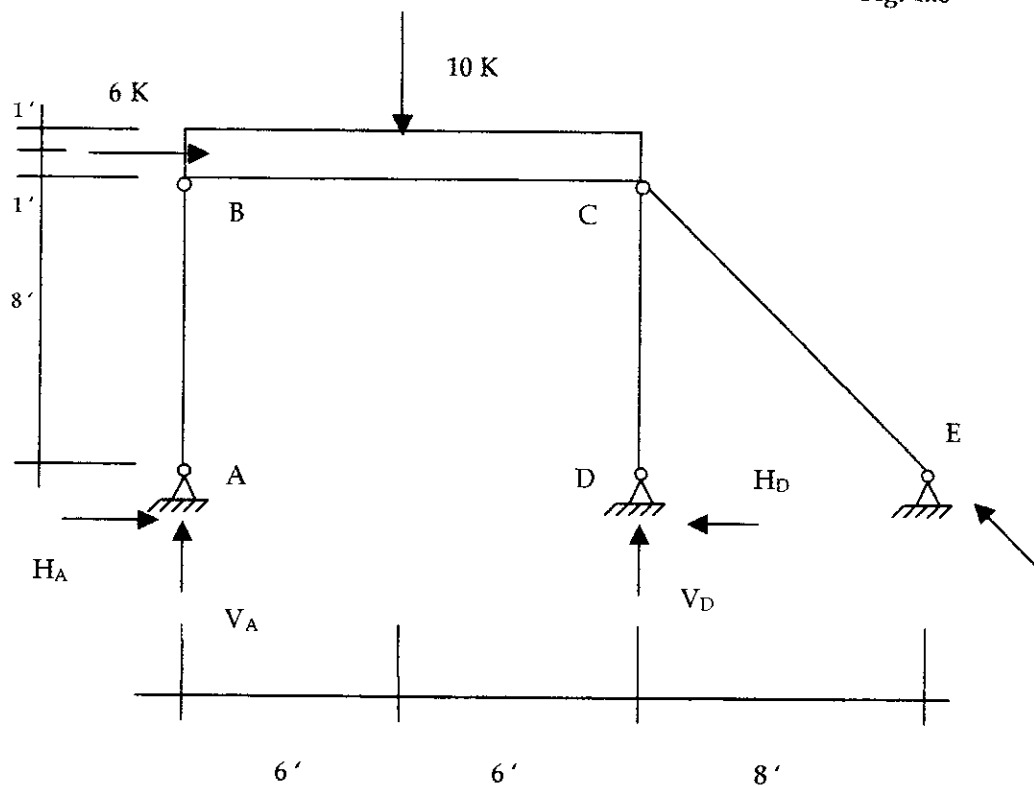
$$\Sigma M_{FG} = 0: \curvearrowright +$$

$$1.73(230) + 22(132.50) - 17.86(199.26) - 6.5(30.74) + 13.70(51.17) - 4.99(51.17) = 0$$

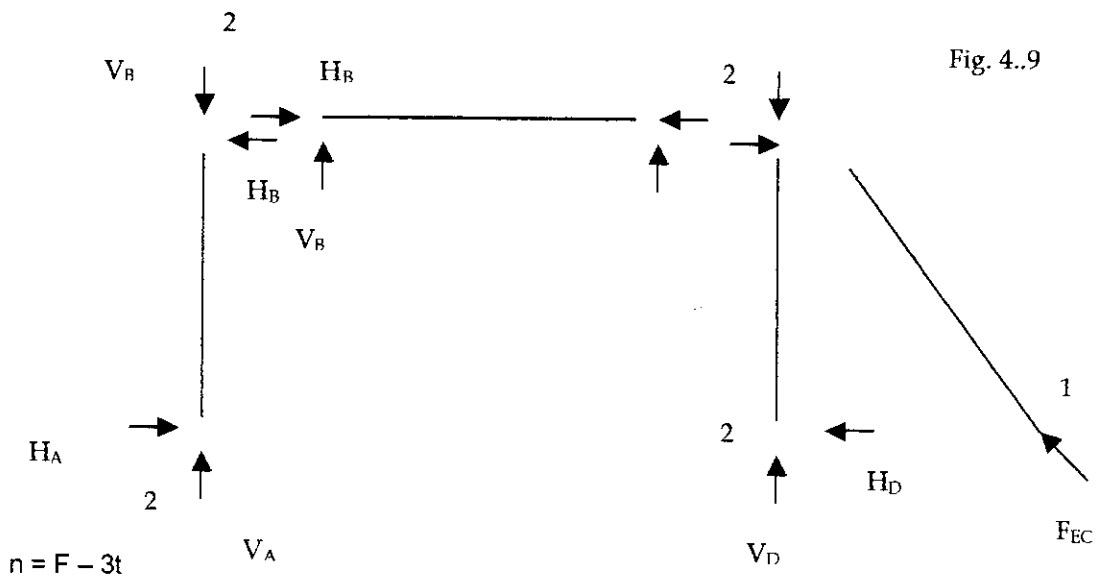
Ejemplo:

Analizar la siguiente estructura

Fig. 4.8

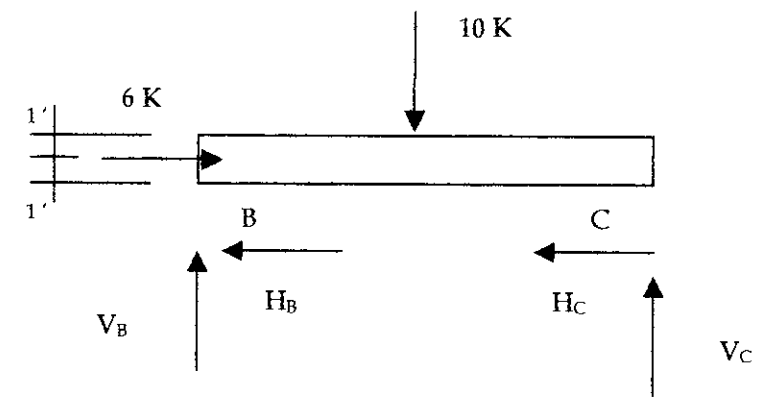


De igual forma que en el ejemplo anterior, si separamos la estructura en los puntos de inflexión, tenemos:



$n = F - 3t$   
 $n = 9 - 3(3)$   
 $n = 0$

Tramo B-C



$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$   
 $6 - H_B - H_C = 0$

$\Sigma M_C = 0: \curvearrowright +$   
 $10(6) - 6(1) - V_B(12) = 0$

$V_B = 4.50\text{ k}\uparrow$

$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$

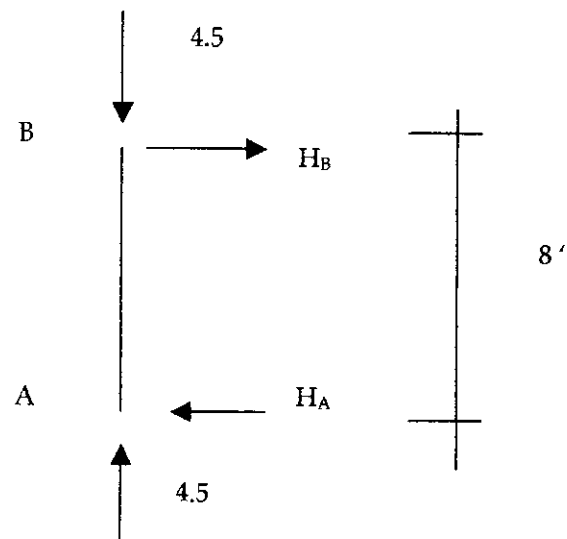
$$V_B + V_C = 10$$

$$V_C = 10 - V_B = 10 - 4.5$$

$$V_C = 5.50 \text{ k } \uparrow$$

Miembro B-A

Fig. 4.11



$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow +$$

$$H_B = H_A$$

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright +$$

$$H_B(8) = 0$$

$$H_B = 0$$

$$H_A = 0$$

por lo tanto,

$$6 - 0 - H_C = 0$$

$$H_C = 6 \text{ K } \leftarrow$$

Miembro C-D

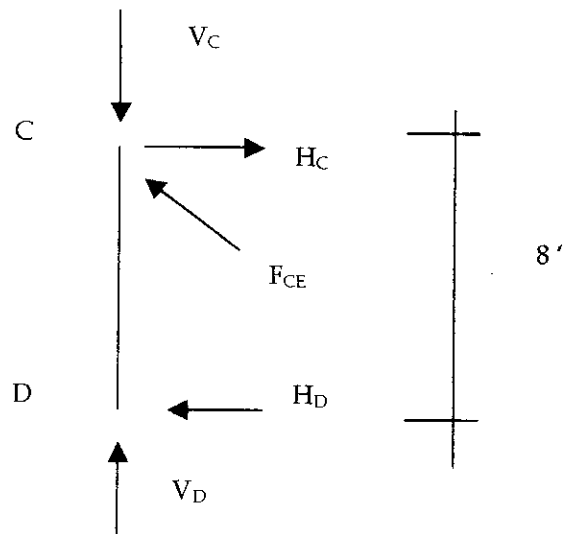


Fig. 4.12

$$\Sigma M_C = 0 \quad \curvearrowright +$$

$$-H_D(8) = 0$$

$$H_D = 0$$

Al tomar toda la estructura:

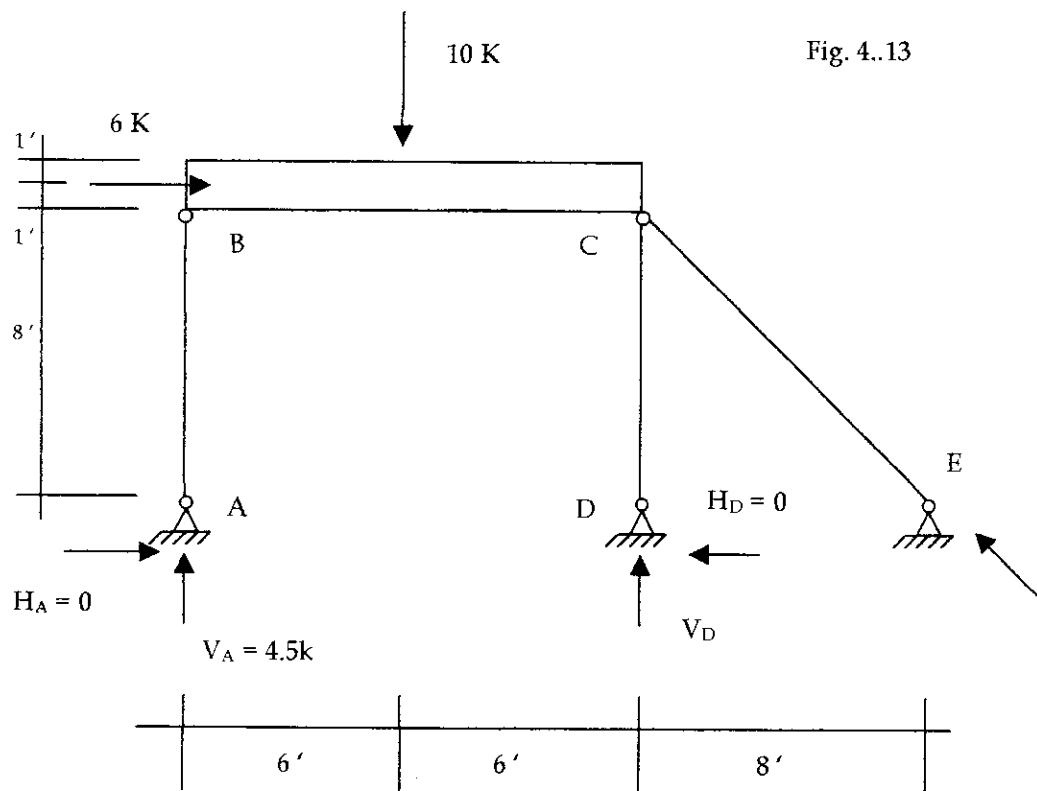


Fig. 4.13

Si conocemos las reacciones en A, podemos hallar las otras tres por medio de las ecuaciones de estática aplicadas externamente a toda la estructura.

$$\Sigma M_D = 0: \quad \curvearrowright +$$

$$F_{EC}(\cos 45)8 + 10(6) - 4.5(12) - 6(9) = 0$$

$$F_{EC} = \frac{54 + 54 - 60}{8(\cos 45)} = 8.49 \text{ k}$$

$$F_{ECX} = 6.00$$

$$F_{ECY} = 6.00$$

$$\Sigma F_V = 0:$$

$$4.5 - 10 + V_D + 6 = 0$$

$$V_D = 10 - 6 - 4.5$$

$$V_D = -0.5$$

$$V_D = 0.5 \text{ k} \leftarrow$$

## A. Cables

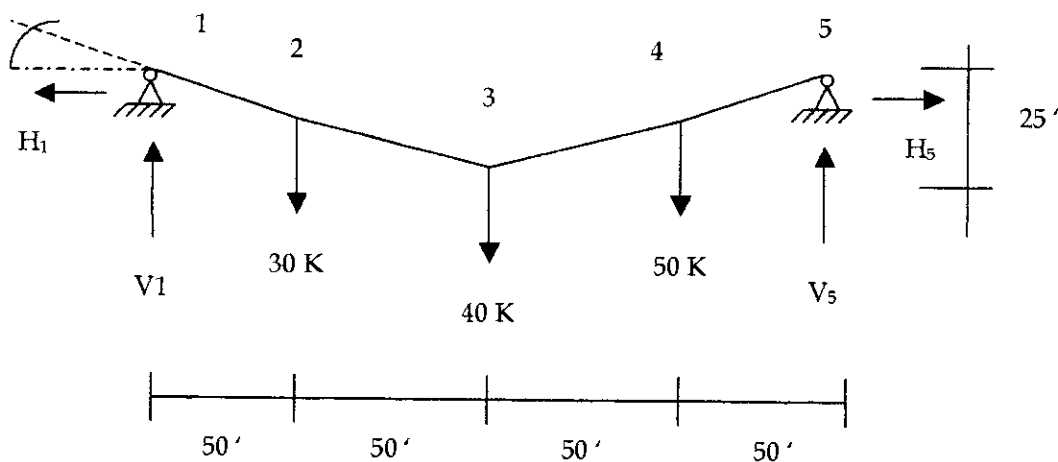
En algunas estructuras suele aparecer la utilización de cables, los cuales se usan para soportar cargas en claros grandes (puentes colgantes, cubiertas de techo, etc.). La única fuerza que puede existir en un cable es la tensión directa (carga axial), ya que los cables son demasiado flexibles para soportar momentos. La forma de un cable está determinada únicamente por las condiciones de equilibrio. Al conocerse una coordenada se puede calcular la flecha en cualquier punto.

Ejemplo:

Calcular la tensión en cada tramo del siguiente cable cargado.

26.57°

Fig. 4.14



$$\Sigma M_5 = 0: \quad \curvearrowright +$$

$$-V_1(200) + 30(150) + 40(100) + 50(50) = 0$$

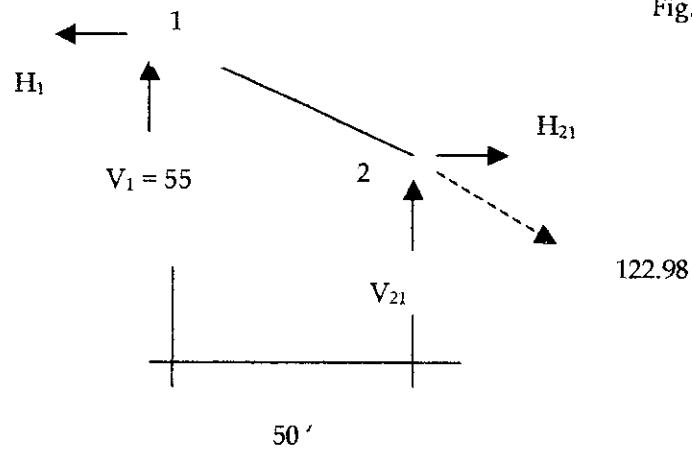
$$V_1 = 55 \text{ k } \uparrow$$

$$\Sigma F_V = 0: \quad \uparrow +$$

$$55 - 30 - 40 - 50 + V_5 = 0$$

$$V_5 = 65 \text{ k } \uparrow$$

Tramo 1-2



$$\Sigma M_2 = 0: \curvearrowleft +$$

$$H_1(25) - 55(50) = 0$$

$$H_1 = 110 \text{ k} \leftarrow$$

$$H_{21} = 110 \text{ k} \leftarrow$$

$$\Sigma F_V = 0:$$

$$V_{21} = V_1$$

$$V_{21} = 55 \text{ k}$$

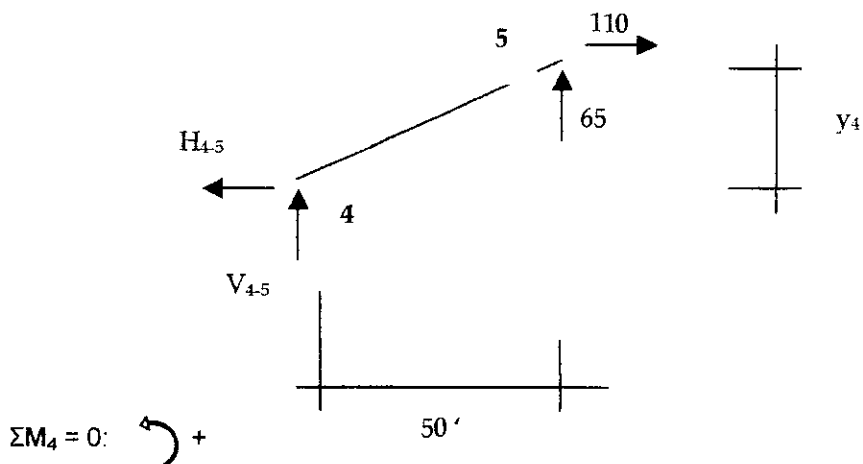
$$\Sigma F_H = 0: \rightarrow + \text{ (en toda la estructura)}$$

$$H_5 = 110 \text{ k} \rightarrow$$

Evaluación de las fuerzas internas:

Tramo 4-5

Fig. 4.16



$$\Sigma M_4 = 0: \curvearrowleft +$$

$$65(50) - 110(y_4) = 0$$

$$y_4 = 29.55'$$

$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$V_{4-5} = -65$$

$$V_{4-5} = 65 \text{ k}\downarrow$$

$$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$$

$$H_{4-5} = 110 \text{ k} \rightarrow$$

$$R_4 = 127.77 \swarrow$$

Tramo 3-5

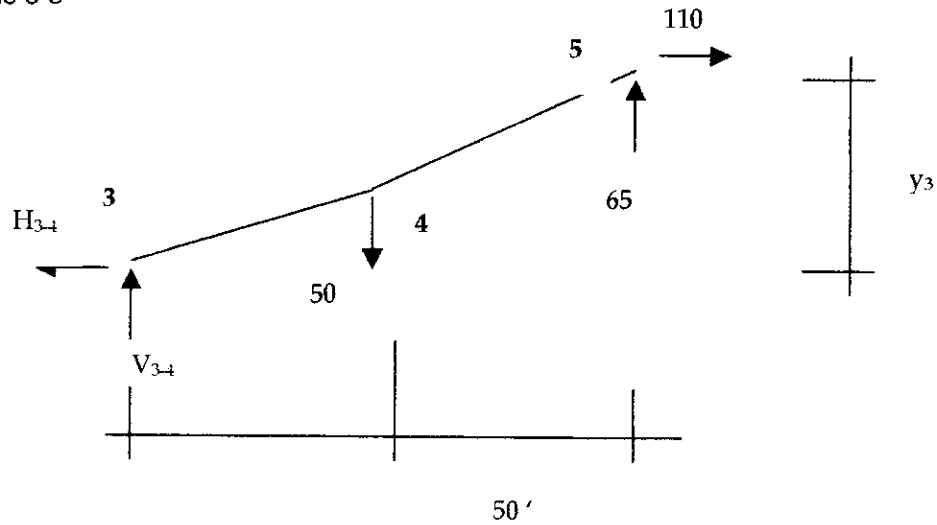


Fig. 4.17

$$\Sigma M_3 = 0: \curvearrow +$$

$$65(100) - 50(50) - 110(y_3) = 0$$

$$y_3 = 36.36'$$

$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$V_{3-4} = 50 - 65 = -15$$

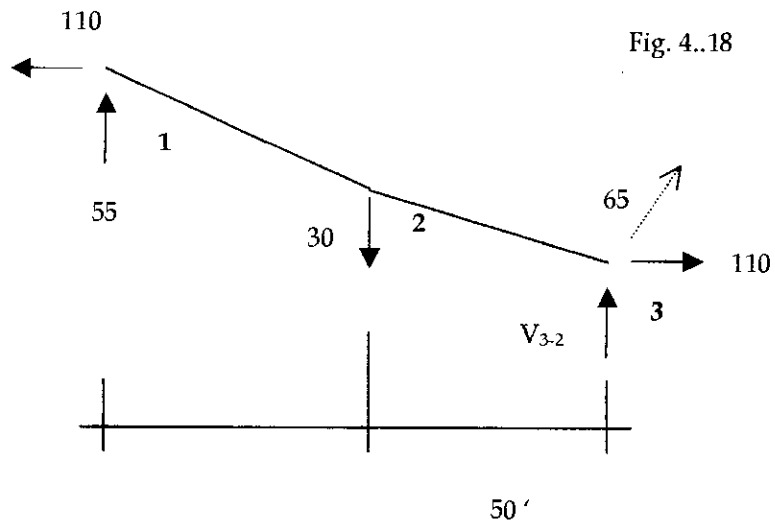
$$V_{3-4} = 15 \text{ k}\downarrow$$

$$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$$

$$H_{3-4} = 110 \text{ k} \rightarrow$$

$$R = 111.02 \text{ k} \swarrow$$

Tramo 1-3



$$\Sigma F_H = 0: \rightarrow +$$

$$H_{3-2} = 110 \text{ k} \rightarrow$$

$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$55 - 30 + V_{3-2} = 0$$

$$V_{3-2} = -25 \text{ k}$$

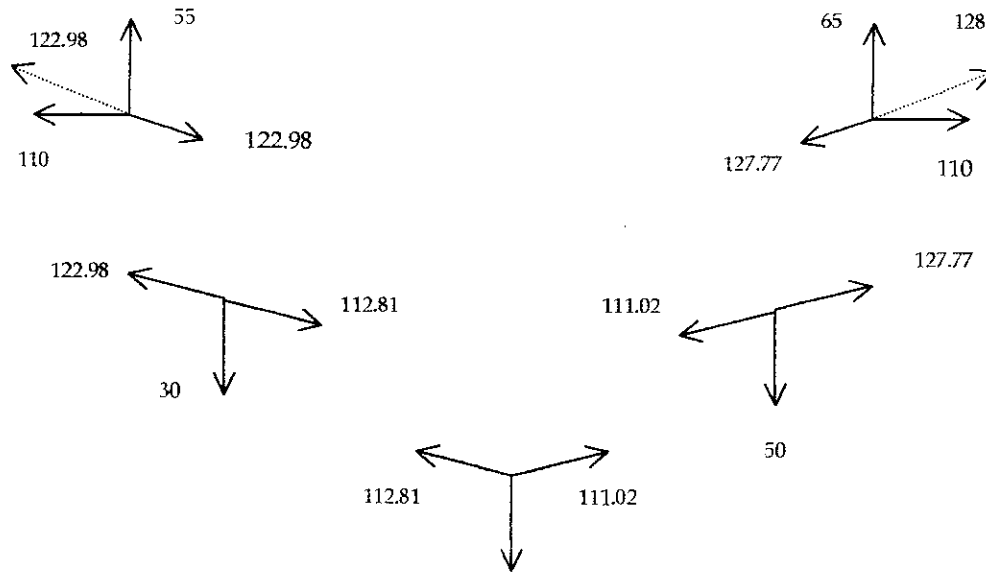
$$V_{3-2} = 25 \text{ k} \downarrow$$

$$V_{2-2} = 25 \text{ k} \downarrow$$

$$R = 112.81 \text{ k} \searrow$$

En resumen:

Fig. 4.19



Ejemplo:

Hallar las reacciones y la ecuación de la deformación para el siguiente cable, con una carga distribuida  $w$  aplicada.

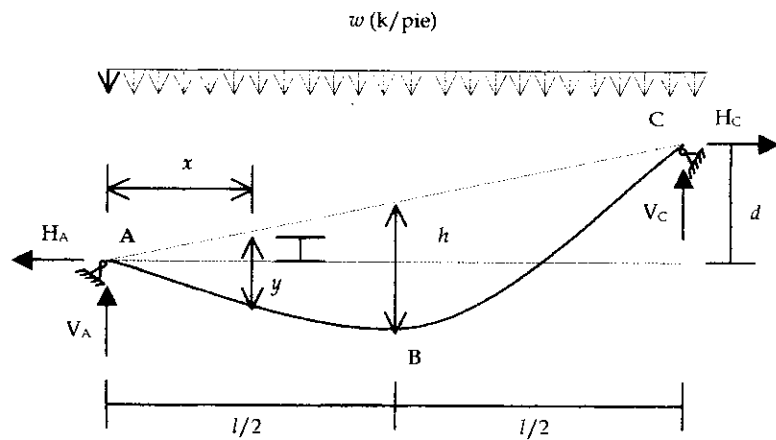


Fig. 4.20

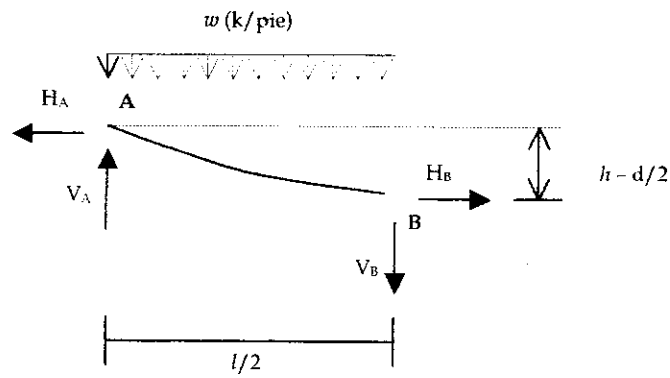
$$\Sigma M_C = 0:$$

$$\frac{wl^2}{2} - H_A(d) - V_A(l) = 0$$

$$V_A = \left( \frac{wl^2}{2} - H_A d \right) \frac{1}{l} = \frac{wl}{2} - \frac{H_A d}{l} = V_A \quad \text{Ec. 1}$$

Cortando en B

Fig. 4.21



$$\Sigma M_B = 0:$$

$$\frac{w(l/2)^2}{2} + H_A(h-d/2) - V_A(l/2) = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

Sustituyendo la Ec. 1 en la Ec. 2

$$\frac{w(l)^2}{8} + H_A(h - d/2) - \left( \frac{wl}{2} - \frac{H_A d}{2} \right) \frac{l}{2} = 0$$

$$H_A(h - d/2) + \frac{H_A d}{2} = \frac{wl^2}{4} - \frac{wl^2}{8}$$

$$H_A(h - d/2 + d/2) = \frac{wl^2}{8}$$

$$H_A = \frac{wl^2}{8h} = H_B \quad (\text{Por } \Sigma F_H)$$

Como se hizo para una carga cualquiera "w", esta sería la fórmula general para las horizontales en A y B.

Al sustituir en Ec. 1

$$V_A = \frac{wl}{2} - \frac{wl^2 d}{8h l} = \frac{wl}{2} - \frac{wl d}{8h}$$

$$V_A = \frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right)$$

Formula general para hallar la vertical en A

$$\Sigma F_V = 0:$$

$$\frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) - \frac{wl}{2} = V_B$$

$$V_B = \frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} - \frac{wl}{2} \right)$$

$\Sigma F_V = 0$ : (En todo el cable)

$$\frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) - wl + V_C = 0$$

$$V_C = wl - \frac{wl^2}{2} + \frac{wld}{8h} = \frac{wl}{2} + \frac{wld}{8h}$$

$$V_C = \frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) \quad \text{Fórmula general para hallar la vertical en el punto C}$$

Si quisiéramos la flecha o deflexión vertical en cualquier punto del cable:

$$\frac{r}{x} = \frac{d}{l}$$

entonces,

$$r = \frac{dx}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad \curvearrowleft +$$

$$wx^2 + H_A \left( y - \frac{xd}{l} \right) - V_A x = 0$$

$$\frac{wx^2}{2} + \frac{wl^2}{8h} \left( y - \frac{xd}{l} \right) - \frac{wlx}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) = 0$$

$$\frac{wl^2}{8h} y = \frac{wlx}{2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) + \frac{wl^2 xd}{8hl} - \frac{wx^2}{2} = 0$$

$$y = \frac{wlx}{2wl^2} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) + \frac{wl^2 xd}{8h \cdot l \cdot wl^2} - \frac{wx^2}{2} \frac{8h}{wl^2}$$

$$y = \frac{4hx}{l} \left( 1 - \frac{d}{4h} \right) + \frac{xd}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$$

$$y = \frac{4hx}{l} - \frac{xd}{l} + \frac{xd}{l} - \frac{4hx^2}{l^2} = \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$$

$$y = \frac{4hx}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad \text{Fórmula general para la flecha en cualquier punto del cable, ubicado a una distancia } x.$$

## B. Armaduras

Trabajan también sólo a carga axial, ya sea a tensión o compresión, bajo las siguientes suposiciones:

- Los miembros están conectados con pasadores (o articulaciones)
- Las cargas actúan sobre los nudos.
- Los ejes centroidales de los miembros que llegan a un nudo se intersectan en un mismo punto.

Ejemplo:

Hallar las fuerzas internas en las barras 1 y 2 indicadas ( $F_1$  y  $F_2$ ).

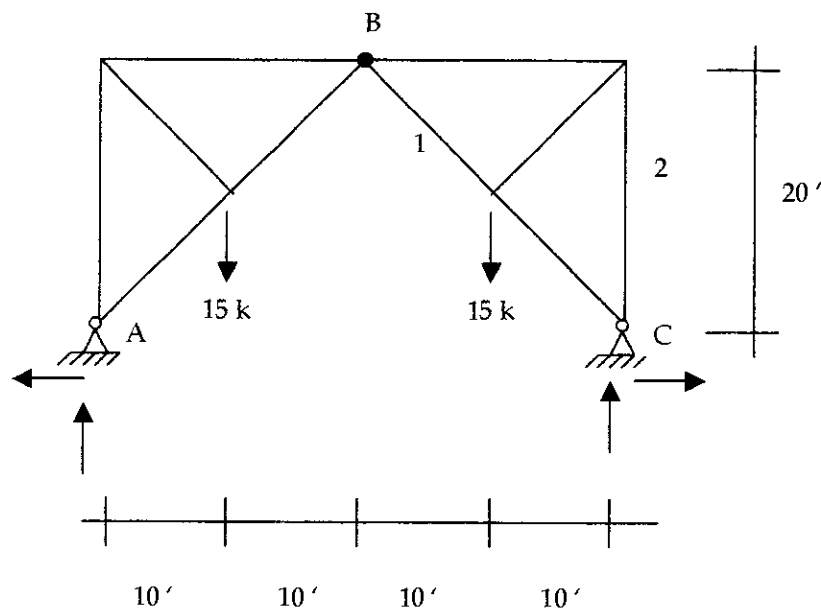
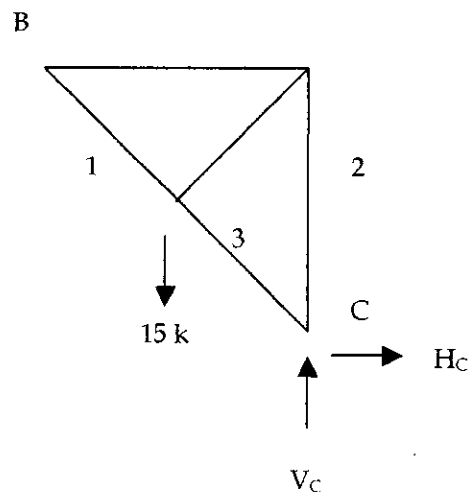


Fig. 4.23



$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$V_C = 15 \text{ k } \uparrow \text{ (Por simetría o } \Sigma M_{A \circ B})$$

$$\Sigma M_B = 0:$$

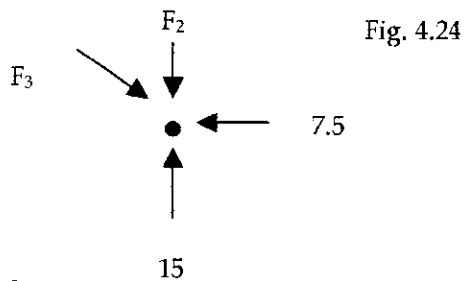
$$H_C(20) + 15(20) - 15(10) = 0$$

$$H_C = -7.50 \text{ k}$$

$$H_C = 7.5 \text{ k } \leftarrow$$

Análisis por el método de nudos.

Nudo C



$$\Sigma F_V = 0: \uparrow +$$

$$15 - F_2 - F_3(\cos 45) = 0$$

$$F_2 = 15 - F_3(0.71) \text{ Ec. 1}$$

$$\Sigma F_H = 0:$$

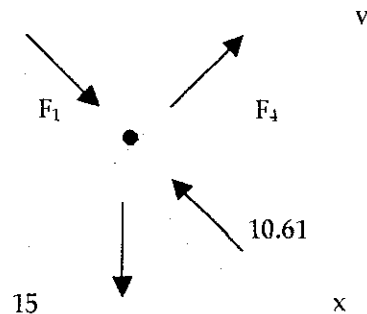
$$F_3(\cos 45) = 7.5$$

$$F_3 = 10.61 \text{ compresión}$$

$$F_2 = 15 - 10.61(0.71)$$

$$F_2 = 7.50 \text{ k } \downarrow \text{ compresión}$$

Nudo en carga:



$$\Sigma F_x = 0:$$

$$- 10.61 + F_1 + 15(0.71) = 0$$

$$F_1 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$F_4 = 15(0.71)$$

$$F_4 = 10.61 \text{ k tensión}$$

## C. Arcos

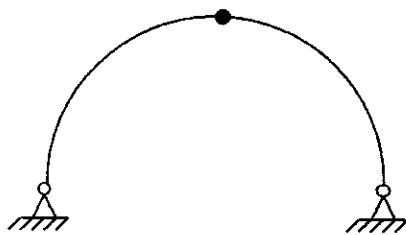
Son estructuras para soportar fuerzas axiales, pero sólo existe compresión, bajo un determinado tipo de carga.

Pueden ser de mampostería, concreto o acero para resistir el pandeo y la compresión.

Trabajan en forma similar a un cable invertido, pero su forma no cambia con la carga para evitar la flexión.

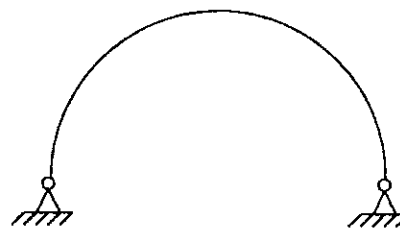
Tipos de arcos

Fig. 4.26



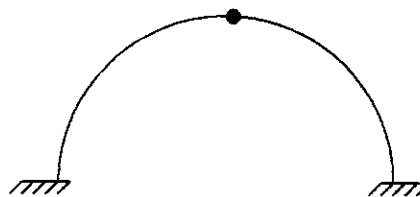
Estructura determinada

a



Estructura indeterminada

b



Estructura Indeterminada

c

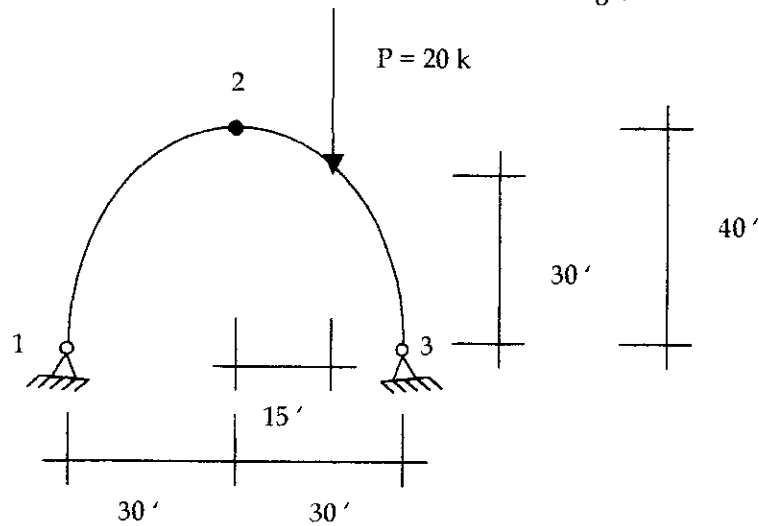
## Análisis gráfico de arcos

Se basa en 2 hechos:

- 1 Si solamente 3 fuerzas no paralelas actúan sobre un cuerpo, éstas deben pasar por un punto común.
- 2 Si las magnitudes de 2 fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre son las únicas incógnitas, sus magnitudes se determinan completando el diagrama de fuerzas.

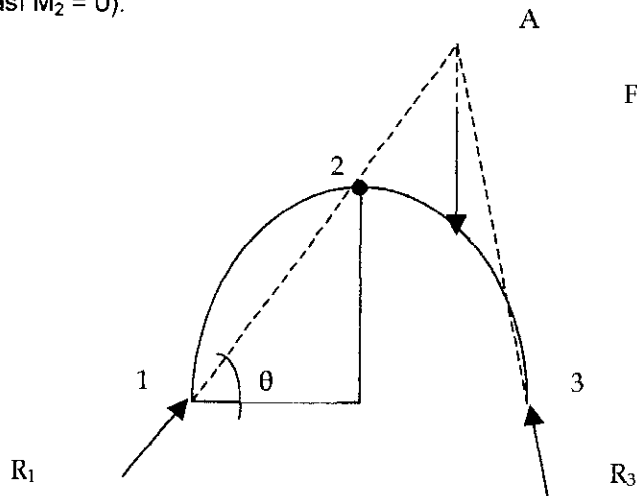
Ejemplo:

Hallar las reacciones del siguiente arco parabólico.



Sólo actúan 3 fuerzas en la estructura.

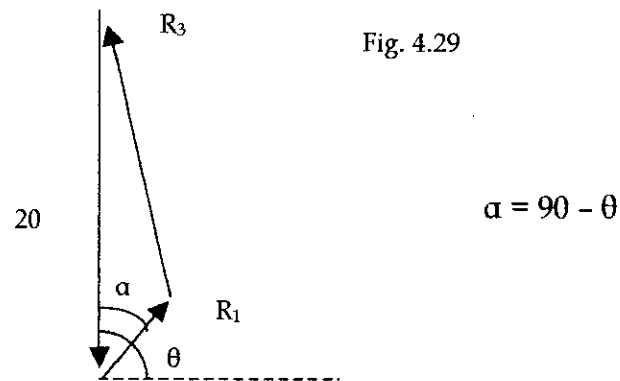
Como el miembro 1-2 tiene articulaciones en sus extremos y no está cargado, sus fuerzas extremas deben ser colineales. Entonces la dirección de la reacción en 1 debe pasar por el nudo 2 (sólo así  $M_2 = 0$ ).



$$\theta = \tan^{-1} (40/30)$$

$R_3$  debe pasar también por A.

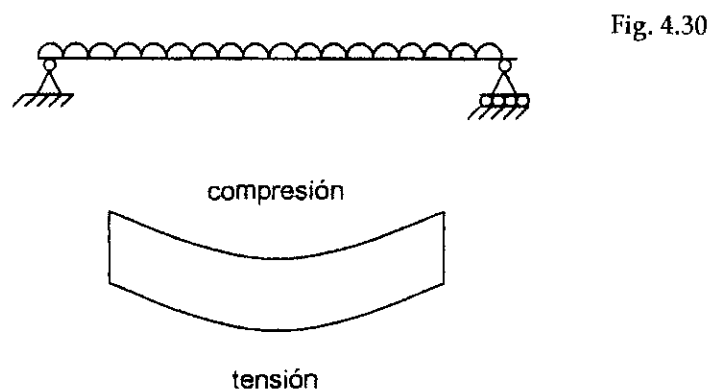
Trazado a escala:



A este método también se le conoce con el nombre de Método de las 3 Fuerzas o Líneas de Presión. Si en el arco actuaran varias fuerzas usaríamos el principio de superposición.

## D. Estructuras a flexión (vigas y marcos)

Por lo general todas las estructuras tienen miembros sometidos a flexión. Por ejemplo, las vigas al soportar cargas verticales de cualquier tipo, están sometidas a flexión.

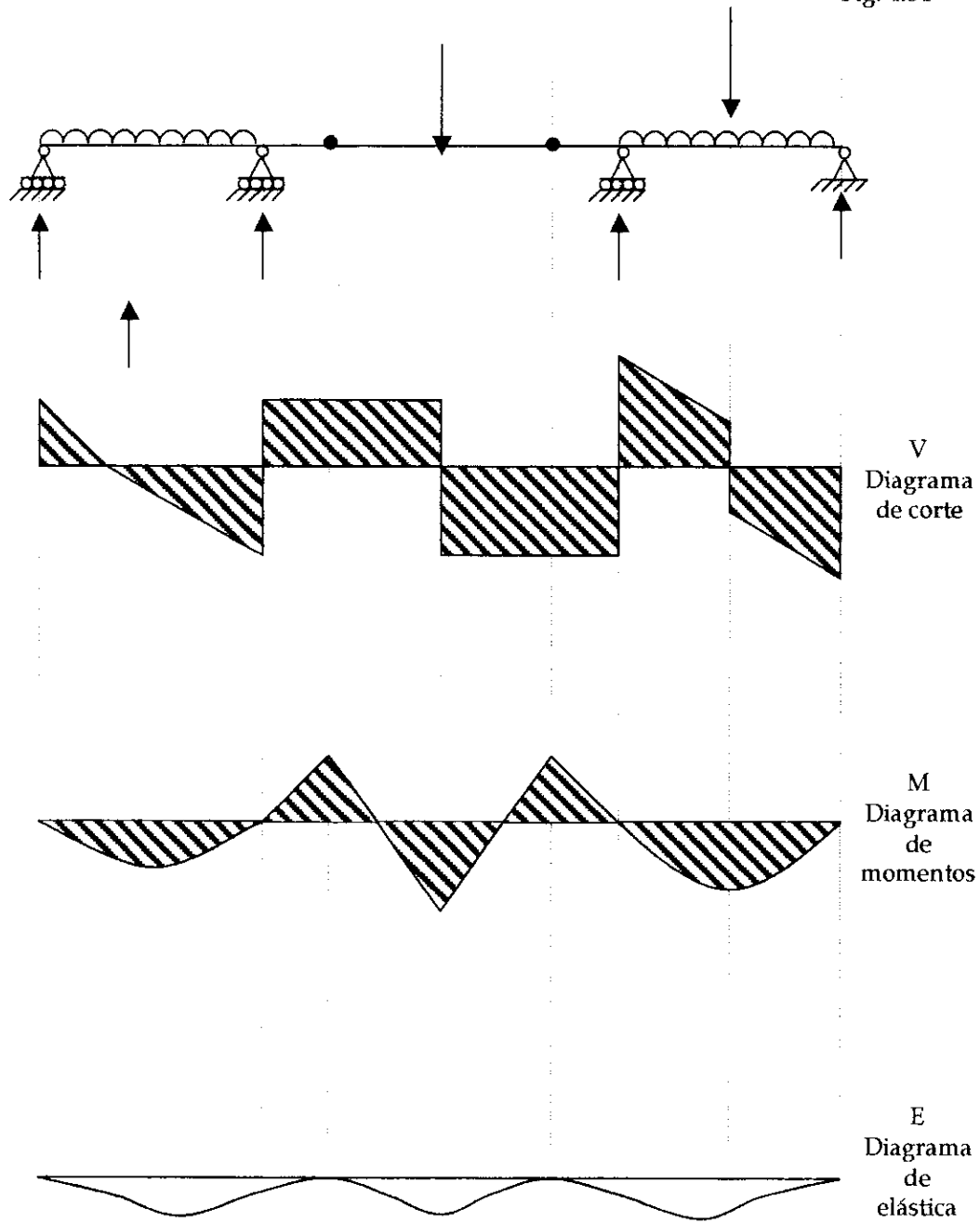


Los esfuerzos de flexión dependen del valor del momento, el que varía a lo largo de toda la viga, por lo cual nos interesa conocerlo, para eso dibujamos diagramas con la variación de éstos, fuerzas cortantes y a veces diagramas de fuerzas axiales.

Ejemplo:

Estos serían los diagramas para la siguiente viga.

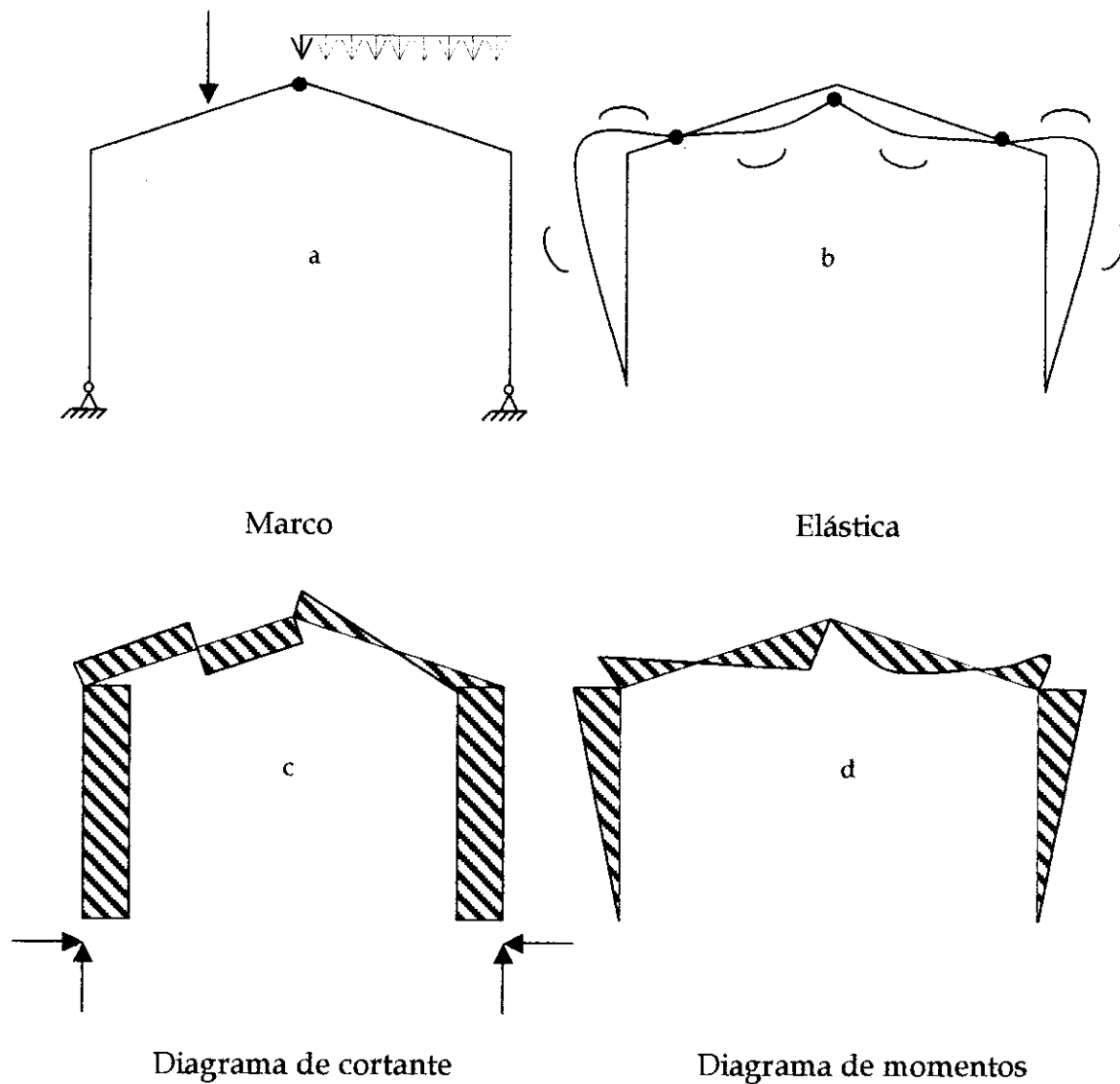
Fig. 4.31



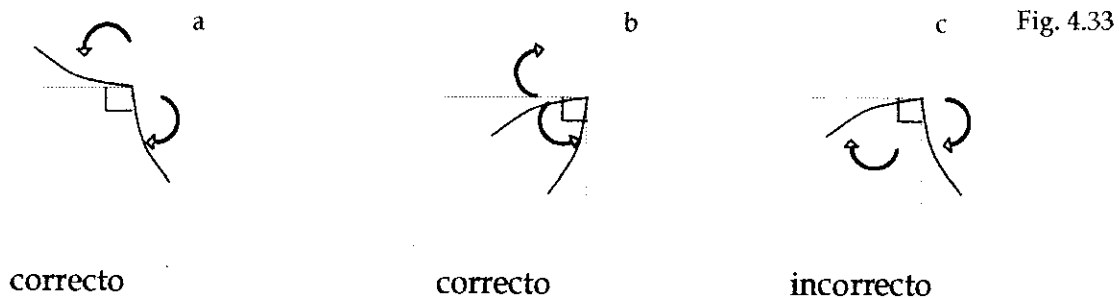
Ejemplo:

Para los siguientes marcos sus diagramas son:

Fig. 4.32



Observaciones: Para el trazo de las curvas elásticas, se debe tomar en cuenta que en los nudos rígidos siempre debe mantenerse el equilibrio de los momentos.

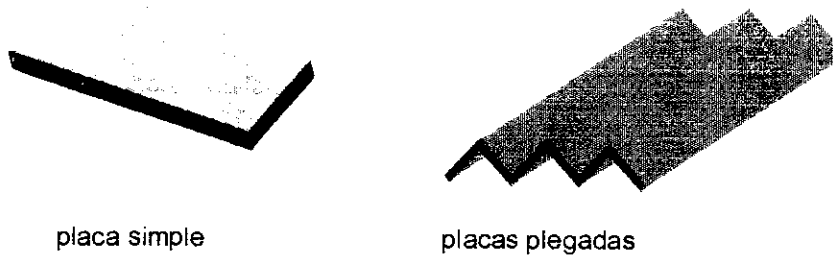


## E. Fuerzas en estructuras planas y cascarones

En algunas estructuras, de acuerdo a requerimientos arquitectónicos suele aparecer el uso de estructuras especiales para las cubiertas, como lo son las "placas" y "cascarones".

Placas

Fig. 4.34

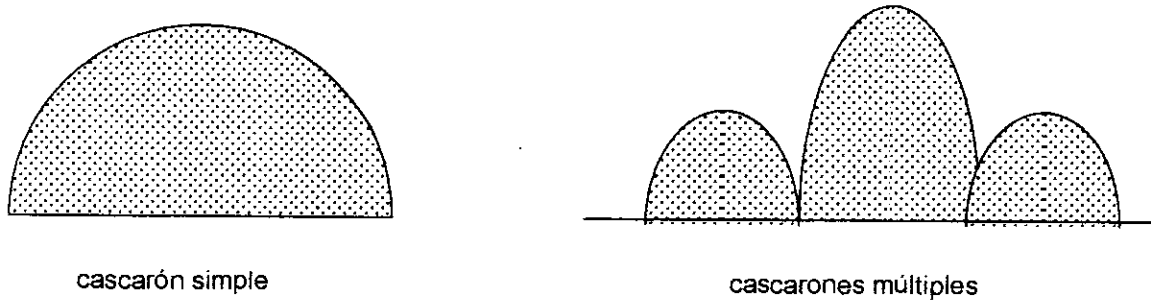


placa simple

placas plegadas

Cascarones

Fig. 4.35

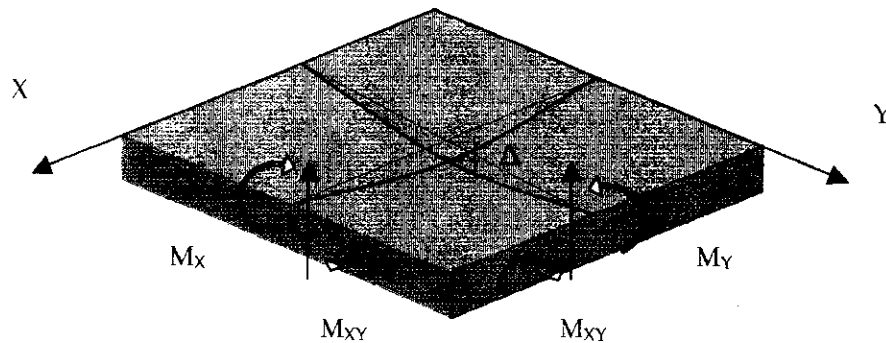


cascarón simple

cascarones múltiples

### Elemento de placa

Fig. 4.36

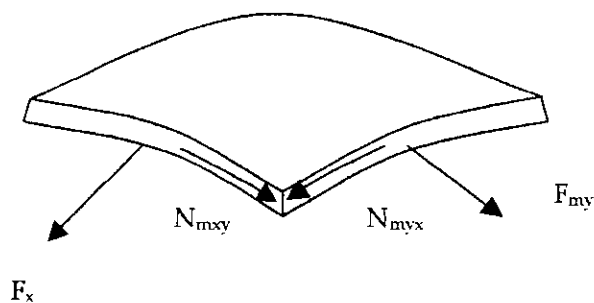


En un elemento de cascarón o una placa con deflexión grande aparecen fuerzas de membrana (además de las de flexión) ↔ a la fuerza axial en los miembros lineales. Los  $\sigma_m < \sigma_f$ .

Las  $F_m$  y los  $\sigma_m$  dependen de la curvatura del cascarón.

### Elemento de cascarón con curvatura doble (esférico)

Fig. 4.37



En un elemento de cascarón con curvatura doble (esférico), los esfuerzos de flexión son pequeños (se les suele llamar esfuerzos de membrana), por lo cual tienen una gran capacidad de carga. Tal es el caso del cascarón de un huevo.

## El Caso de un huevo

Si se aplica una presión en el sentido longitudinal de un huevo, los esfuerzos se transmiten a través de la cáscara del mismo, en ambos extremos, hasta llegar a quedar en equilibrio al centro, no se generan esfuerzos de corte y de flexión y por lo tanto tienen una gran capacidad de resistencia.

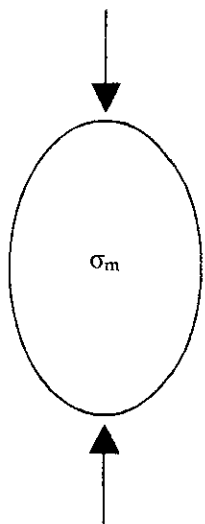


Fig. 4.38

Por el contrario, si la presión se aplica en el sentido transversal del huevo, se generan inmediatamente esfuerzos de corte y flexión, y dado que tiene un espesor de pared muy delgado, su capacidad de resistencia es casi nula.

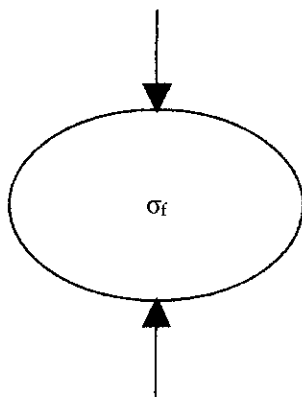


Fig. 4.39

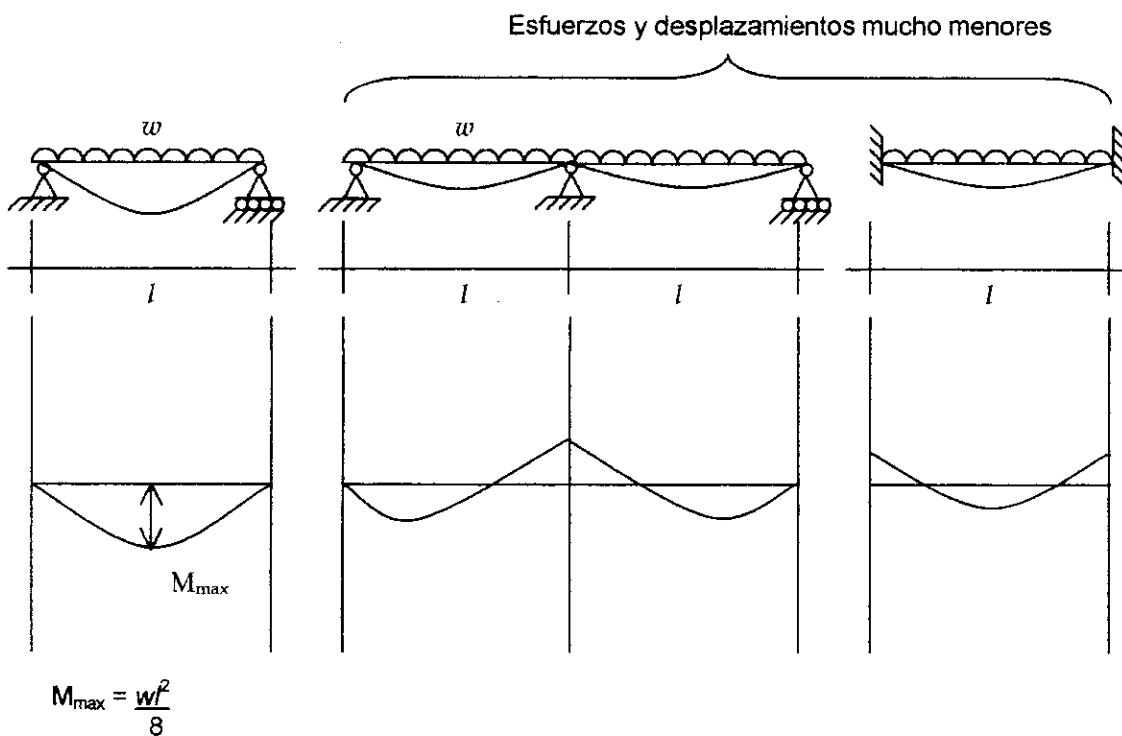
## V. ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS: SU USO Y EJEMPLOS

¿Por qué usar estructuras estáticamente indeterminadas en lugar de estructuras estáticamente determinadas si su análisis es mucho más complejo?

Las estructuras de concreto reforzado, como los marcos de edificios de varios pisos se construyen como estructuras indeterminadas continuas.

La razón es que en una estructura estáticamente indeterminada las fuerzas son menores que en la correspondiente estructura estáticamente determinada.

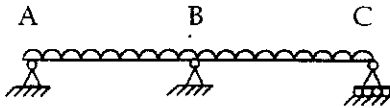
Fig. 5.1



Con frecuencia la redundancia significa seguridad adicional. Las redundantes redistribuyen las fuerzas aplicadas.

Por ejemplo, supongamos:

Fig. 5.2



Si sobrecargamos la viga aparecerá una cedencia en el apoyo central (articulación plástica) con momento constante. El momento ya no puede aumentar después de que se ha presentado la cedencia total de la sección.

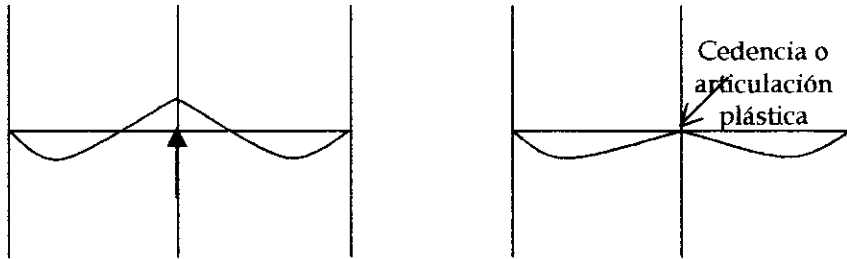
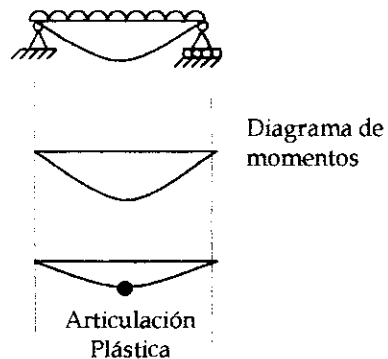


Fig. 5.3

La carga adicional se soporta cuando se aumenta el momento positivo en cada claro. (La estructura debe tener suficiente ductibilidad)

En cambio en una viga estáticamente determinada, la aparición de una articulación plástica significa el colapso de la viga.

Fig. 5.4



En resumen las ventajas de las estructuras estáticamente indeterminadas sobre las estructuras estáticamente determinadas son:

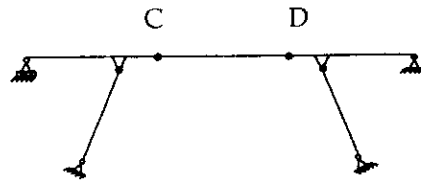
- Las fuerzas que se producen son menores.
- Las deflexiones son menores.
- Hay una capacidad adicional de carga.

Ejemplo:

El caso de un puente construido con elementos prefabricados que posee articulaciones. (El Puente sobre el Río Solleks en Washington)

Forma temporal con articulaciones

Fig. 5.5



Forma final



Los miembros fueron colados en una fábrica de estructuras prefabricadas.

Inicialmente el trabe central se colocó sobre los voladizos de los traveses extremos, por lo tanto, durante la construcción existían conexiones articuladas y el puente estaba estáticamente determinado.

Después, al terminarlo se le dio continuidad a los traveses reforzando y fundiendo estas conexiones y por lo tanto se le dio resistencia a la flexión en los puntos C y D.

Finalmente, la estructura se convierte en estáticamente indeterminada y estructuralmente más eficiente.

### Marcos Rígidos

El uso de marcos para soportar techos es muy común. Los marcos están formados por vigas y columnas. Si las vigas están solamente apoyadas en las columnas, entonces, éstas trabajan como vigas simples.

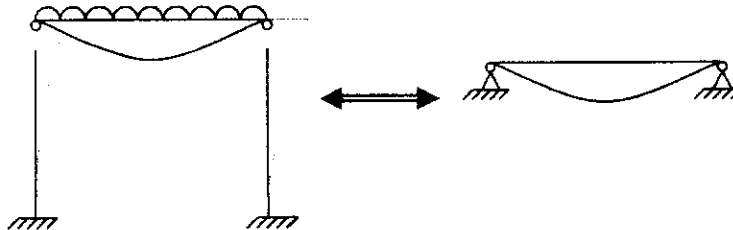


Fig. 5.6

En este caso, se dan momentos y deflexiones muy grandes

Además, el marco tiene muy poca resistencia a las fuerzas horizontales (por ejemplo un sismo)

Si las vigas y las columnas están unidas rígidamente

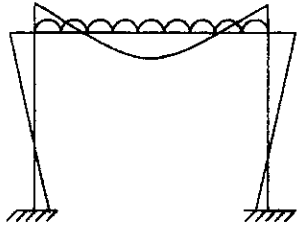


Fig. 5.7

la flexión en la viga se reduce y el marco adquiere resistencia lateral. Este tipo de marcos es el más utilizado para la construcción de edificios.

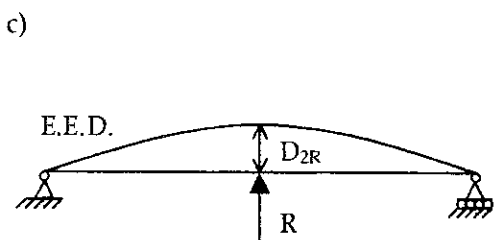
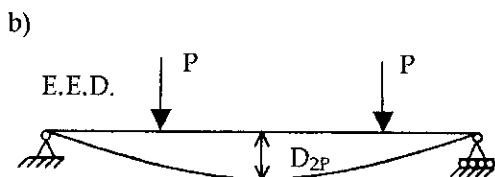
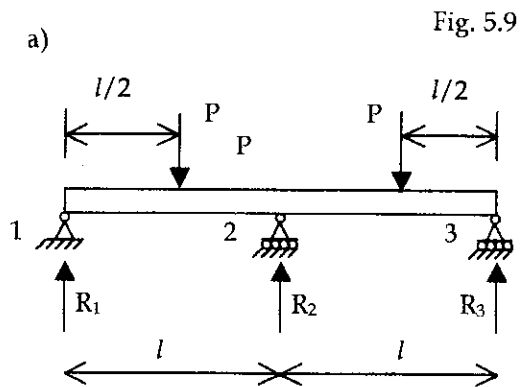
## A. Enfoques básicos del análisis indeterminado

### 1. Compatibilidad y equilibrio

Examinaremos los conceptos básicos de los 2 métodos fundamentales para el análisis de estructuras lineales, elásticas y estáticamente indeterminadas.

- El Método de las Fuerzas, o de las flexibilidades
- El Método de los Desplazamientos (giros y deflexiones), o de las rigideces

Tomemos la siguiente viga:



Existen 3 reacciones verticales y solo 2 ecuaciones de estática para este sistema de fuerzas paralelas.

¿Cómo hallar  $R$  (redundante) ?

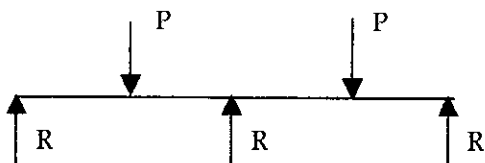
Sabemos que la deflexión en 1, 2 y 3 es igual a cero.

Esta es la elástica al quitar  $R$ .

Ahora, se debe hallar el valor de la fuerza que evite la deflexión en punto considerado.

Esta es la elástica producida por  $R$ .

Fig. 5.8



Aplicación del Teorema de Superposición

$$D_{2P} - D_{2R} = 0 \quad (\text{Ecuación de compatibilidad})$$

Por el método de área de momentos

$$D_{2P} = \left( \frac{11}{48} \right) \left( \frac{Pl^3}{EI} \right)$$

y

$$D_{2R} = \left( \frac{Rl^3}{6EI} \right)$$

Sustituyendo y despejando

$$R = \frac{11P}{8}$$

En una estructura con "n" redundantes, se deben calcular los desplazamientos para n + 1 sistemas de carga. 1 análisis para la carga real y n análisis para los efectos de cada redundante.

Se plantearán entonces sistemas de n ecuaciones simultáneas, en donde cada ecuación expresa una condición conocida de los desplazamientos finales.

## 2. Método de los desplazamientos (lineales y angulares)

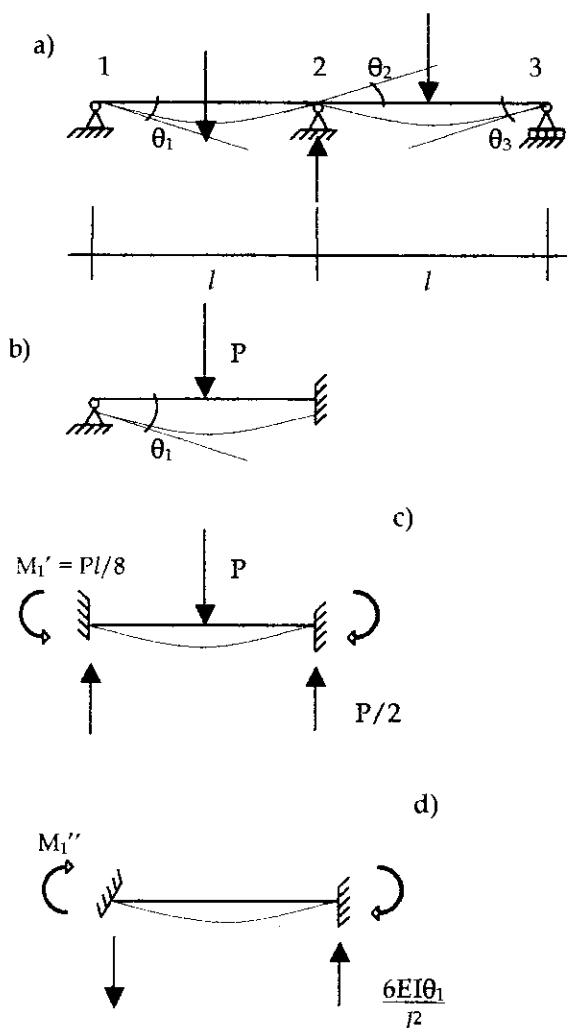


Fig. 5.10

Los desplazamientos desconocidos que tomaremos serán los giros en 1, 2 y 3.

Por simetría sabemos que  $\theta_1 = \theta_3$  y que  $\theta_2 = 0$  es equivalente a un empotramiento, entonces es posible simplificar la estructura así. El problema ahora es hallar  $\theta_1$ .

Para hallar R (redundante) se hace temporalmente  $\theta_1 = 0$

$$M_1 = \frac{Pl}{8}$$

En la estructura real el  $M_1 = 0$ , entonces el  $M_1'$  debe estar equilibrado por un momento igual y opuesto el cual producirá un giro  $\theta_1$  (ya que no existen otras fuerzas externas aplicadas).

$$y M'' = \left( \frac{4EI}{l} \right) \theta_1$$

Planteamiento de la ecuación de equilibrio  $M_1' - M_1'' = 0$

Sustitución los valores

$$\frac{P}{8} - \frac{4EI\theta_1}{l} = 0 \quad \text{entonces,} \quad \theta_1 = \frac{Pl}{32EI}$$

$$R_2 = 2 \left( \frac{P}{2} + \frac{6EI\theta_1}{l^2} \right) = 2 \left( \frac{P}{2} + \frac{6EI}{l^2} \frac{Pl}{32EI} \right) = 2 \left( \frac{P}{2} + \frac{3P}{16} \right)$$

$$R_2 = \frac{11P}{8}$$

Una estructura con  $n$  desplazamientos desconocidos (grados de libertad) tendrá  $n$  ecuaciones de equilibrio que son función de los  $n$  desplazamientos desconocidos.

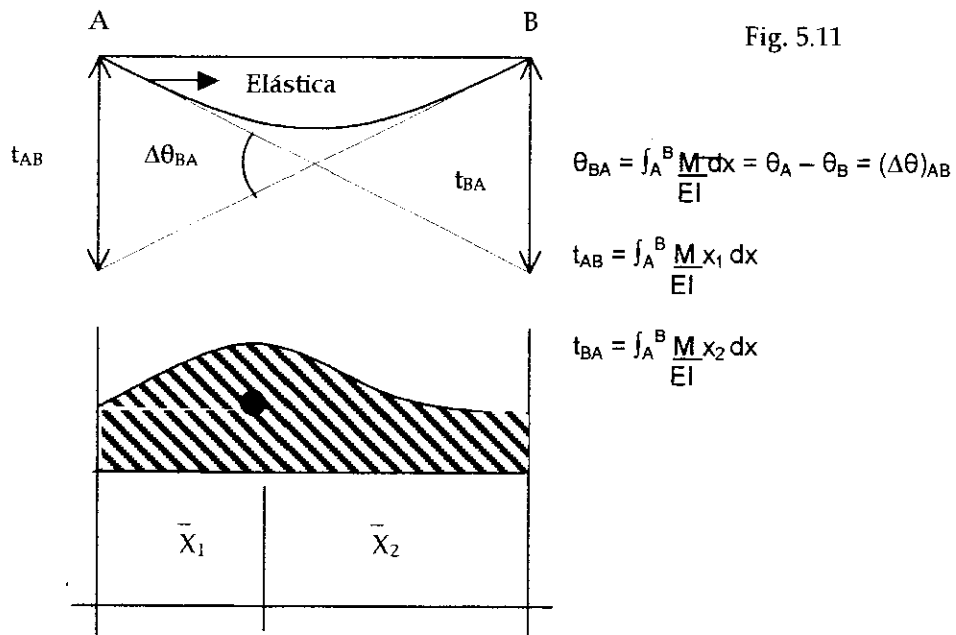
En el ejemplo considerado había una sola incógnita en los 2 métodos. El método de las desplazamientos produce mas incógnitas que el de las fuerzas.

Por ejemplo, si la estructura no hubiera sido simétrica, entonces  $\theta_1 \neq \theta_3$ . Entonces existen 3 incógnitas.

Lo visto anteriormente implica que la determinación de los desplazamientos es una parte integral del análisis indeterminado, por lo cual nos dedicaremos a estudiar métodos para hallar los desplazamientos.

### 3. Calculo de desplazamientos por el método de área momento

Repaso del Método (ya estudiado en Resistencia de Materiales) y aplicación en vigas



Ejemplo:

Hallar  $\theta_A$ ,  $\theta_C$ ,  $D_B$  y  $D_{max}$ . Valores de E e I constantes

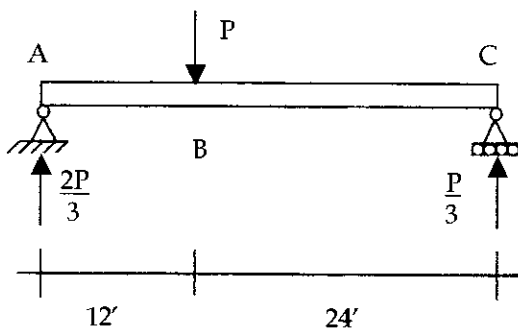
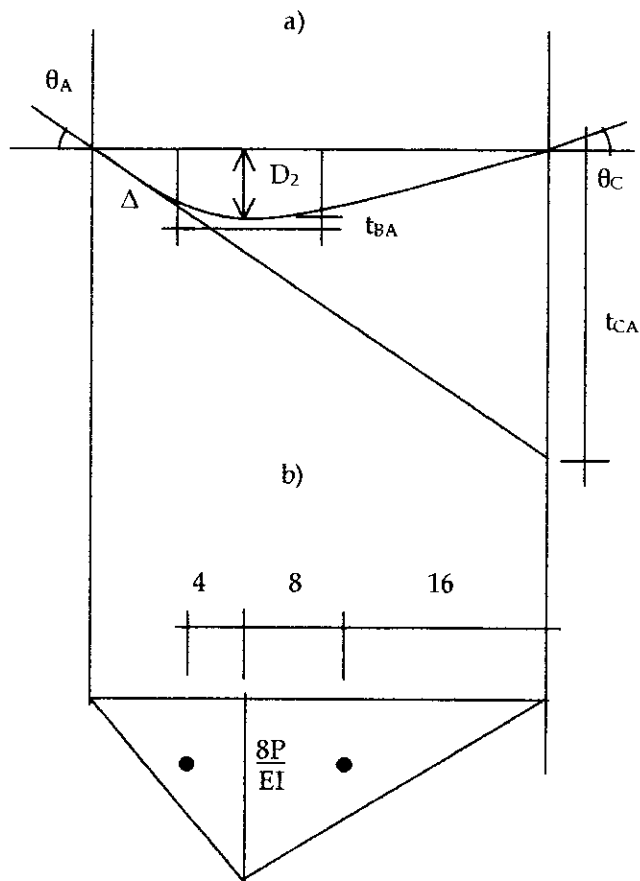


Fig. 5.12

Fig. 5.13



$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{36}$$

$$t_{CA} = 16 \frac{(8P)(24)}{EI} + 28 \frac{(8P)(12^2)}{EI}$$

$$t_{CA} = \frac{2,880P}{EI} \quad E \text{ en kips/pie}^3$$

$$\theta_A = \frac{2,880P}{36EI} = \frac{80P}{EI} \quad + \curvearrowright$$

$$\theta_{CA} = \theta_A - \theta_C$$

$$\theta_C = \theta_A - \theta_{CA} = \frac{80P}{EI} - \left( \frac{48P}{EI} + \frac{96P}{EI} \right)$$

$$\theta_C = \frac{-64P}{EI} \quad - \curvearrowright$$

entonces,

$$D_2 = \Delta - t_{BA}$$

$$\Delta = \theta_A(12) = \frac{80P(12)}{EI} = \frac{960P}{EI}$$

$$t_{BA} = \left( \frac{8P}{EI} \right) \left( \frac{12}{2} \right) (4)$$

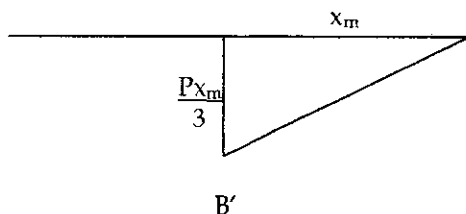
$$t_{BA} = \frac{192P}{EI}$$

$$D_2 = \frac{960P}{EI} - \frac{192P}{EI} = \frac{768P}{EI}$$

$D_{\max}$  cuando la pendiente = 0

Fig. 5.14

a)



$$\theta_C = \theta_{B'} - \theta_{CB'} = \theta_{CB'}$$

$$+64P = + \frac{P x_m^2}{EI}$$

$$x_m = 19.6 \text{ pies}$$

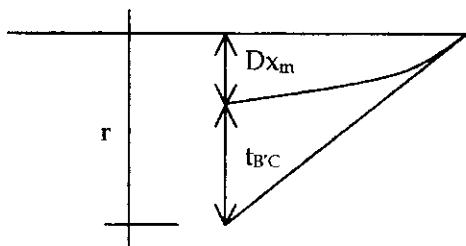
$$Dx_m = r - t_{B'C}$$

$$r = 19.6 \theta_C$$

$$Dx_m = (19.6)(64P) - \left( \frac{19.6P}{3EI} \right) \left( \frac{19.6}{2} \right) \left( \frac{19.6}{3} \right)$$

$$Dx_m = \frac{836P}{EI}$$

b)



$$t_{21} = \left( \frac{PL}{2EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{3} \right) - \left( \frac{0.2PL}{2EI} \right) \left( \frac{0.2L}{2} \right) \left( L + \frac{2(0.2L)}{3} \right)$$

$$t_{21} = \left( \frac{PL^3}{12EI} \right) - \left( \frac{0.01PL^2}{EI} \right) (1.133L)$$

$$t_{21} = \frac{0.0833 PL^3}{EI} - \frac{0.0113 PL^3}{EI}$$

$$t_{21} = \frac{0.072 PL^3}{EI}$$

$$\theta_3 = \frac{PL^2}{4EI} - \frac{0.01 PL^2}{EI} + \frac{PL^2}{EI}$$

$$\theta_3 = \frac{1.24 PL^2}{EI} + \curvearrowright$$

$$t_{43} = \left( \frac{PL}{EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{2L}{3} \right) = \frac{0.333 PL^3}{EI}$$

$$D_{4h} = \frac{0.333 PL^3}{EI} + \frac{1.24 PL^3}{EI} - \frac{0.72 PL^3}{EI}$$

$$D_{4h} = \frac{1.501 PL^3}{EI}$$

**Ejemplo:**

Calcular el desplazamiento horizontal en el punto 4.

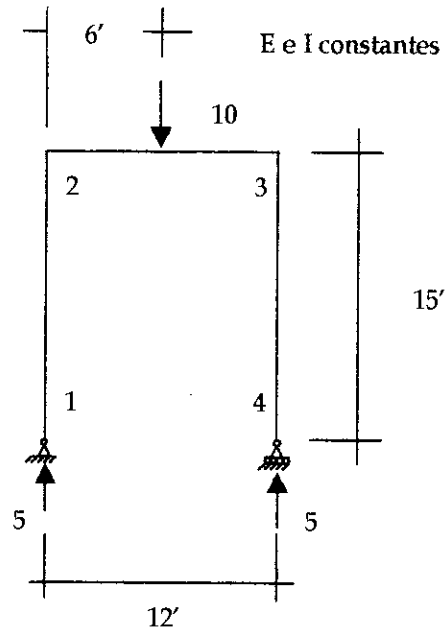
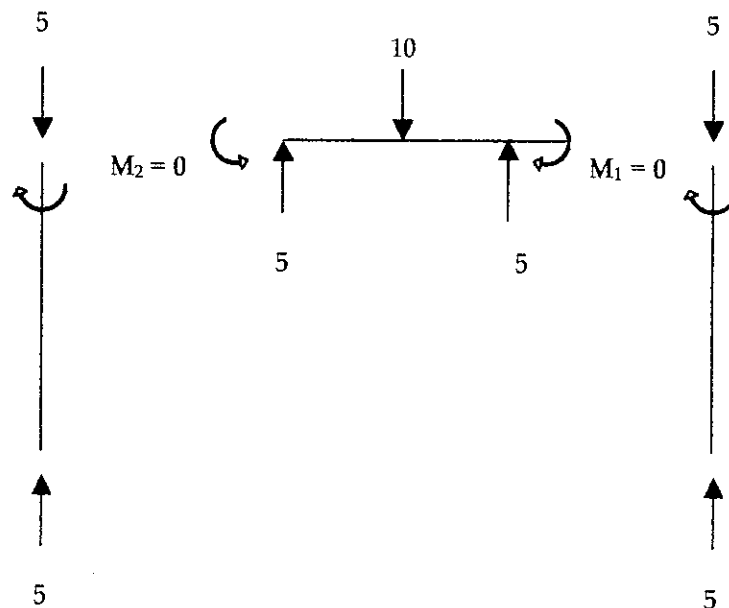


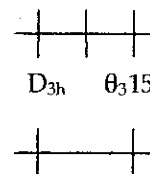
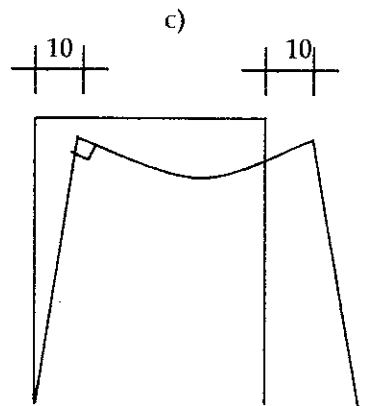
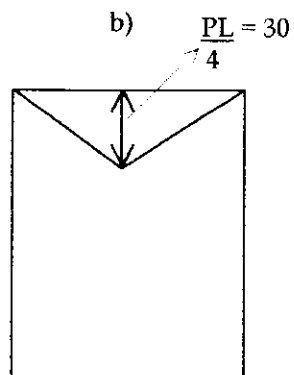
Fig. 5.15

Cuerpos Libres

a)

Fig. 5.16





$$D_{4h} = D_{3h} + 15\theta_3$$

$$\theta_1 = \frac{t_{4-1}}{l_{total}}$$

$$t_{41} = \frac{180(6+15)}{EI} = \frac{3,780}{EI}$$

$$\theta_1 = \frac{t_{41}}{(15+12+15)} = \frac{3,780}{42EI} = \frac{90}{EI}$$

$$D_{3h} = D_{2h} = \theta_1(15) = \frac{90(15)}{EI} = \frac{1,350}{EI} = D_{3h} \rightarrow$$

$$\Delta\theta_{31} = \theta_1 - \theta_3$$

$$\theta_3 = \theta_1 - \Delta\theta_{3-1}$$

$$\theta_3 = \frac{90}{EI} - \frac{(30)(12)}{2EI} = \frac{90 - 180}{EI} = \frac{-90}{EI}$$

$$D_{4h} = \frac{1,350}{EI} + \frac{90(15)}{EI} = \frac{1,350 + 1,350}{EI}$$

$$D_{4h} = \frac{2,700}{EI} \rightarrow$$



$$D_9 = D_3 + t_{3-9}$$

$$o D_9 = T_{3-9} - D_3$$

$$D_3 = r - t_{3-2} = -7.5 \theta_2 + t_{3-2}$$

$$\theta_2 = \frac{t_{1-2}}{70}$$

$$t_{1-2} = \frac{2(458)(30.5)}{EI \cdot 3} * \frac{5(30.5)}{8} + \frac{2(458)(30.5)}{EI \cdot 3} \left( \frac{3(30.5)}{8} + 30.5 \right) - \frac{(309)9}{EI \cdot 3} \left( \frac{3(9)+61}{4} \right)$$

$$t_{1-2} = \frac{505,268}{EI}$$

entonces,

$$\theta_2 = \frac{505,268}{70} = 7,218 = \theta_2 \quad \curvearrowright$$

$$t_{3-2} = \left( \frac{309.75}{3EI} \right) \left( \frac{3(7.5)}{4} \right) = \frac{4,345}{EI}$$

así,

$$D_3 = -7.5 \left( \frac{7,218}{EI} \right) + \frac{4,345}{EI} = \frac{-49,790}{EI}$$

$$t_{3-9} = \frac{5w^4}{348 EI} = \frac{5(1k/pie)(75pies)^4}{384 EI} = \frac{411,987}{EI} \text{ k-pies}^3$$

y,

$$D_9 = \frac{-49,790}{EI} + \frac{411,987}{EI} = \frac{(362,197 \text{ k-pies}^3) (1,728 \text{ pulg}^3/1\text{pie}^3)}{(3,400 \text{ k/pulg}^2) (164,000 \text{ pulg}^4)}$$

$$D_9 = 1.12 \text{ pulgadas}$$

## VI. ANÁLISIS APROXIMADO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

En este capítulo se inicia el estudio de estructuras estáticamente indeterminadas con los métodos aproximados. Estudiaremos el método de trazo de la curva elástica y la ubicación de los puntos de inflexión para estructuras con cargas verticales, y los métodos del portal y del voladizo para cargas horizontales.

Los métodos aproximados son de gran utilidad para el ingeniero estructural, ya que pueden utilizarse para predimensionar las estructuras.

### A. Método del trazo de la curva elástica y ubicación de los puntos de inflexión

#### **Principio de equilibrio**

Todas las estructuras estables están en equilibrio bajo las cargas que se le apliquen. La mayor parte de las estructuras alcanzan un estado de compatibilidad de deformación, mientras sus miembros estén dentro del rango elástico (la estructura deformada permanece unida).

#### **Vigas**

##### **Principios básicos**

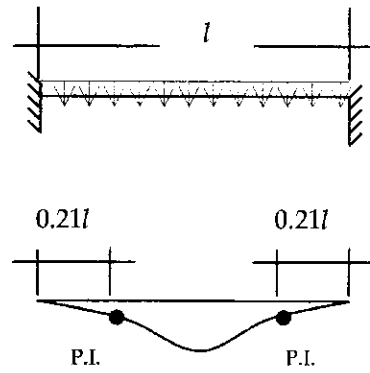
- En una estructura deformada, siempre habrá cuando menos los suficientes puntos de inflexión para reducir la estructura a una estructura determinada.

#### **Casos típicos**

A continuación se presenta la ubicación de los puntos de inflexión para algunos casos típicos de vigas.

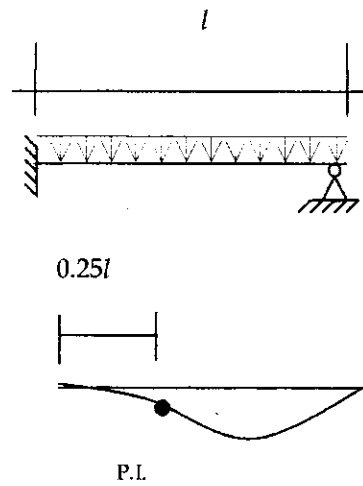
Viga doblemente empotrada con carga distribuida:

Fig. 6.1



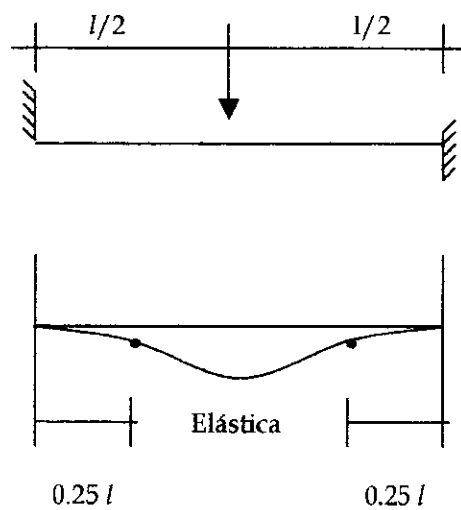
Viga empotrada en un extremo y articulada en el otro, con carga distribuida:

Fig. 6.2



Viga doblemente empotrada, con carga puntual al centro:

Fig. 6.3



Viga empotrada en un extremo y articulada en el otro, con carga puntual al centro:

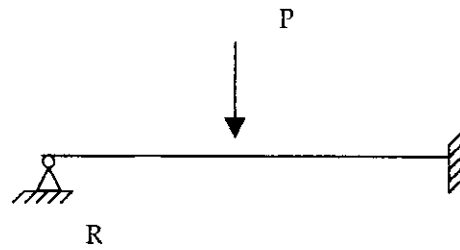
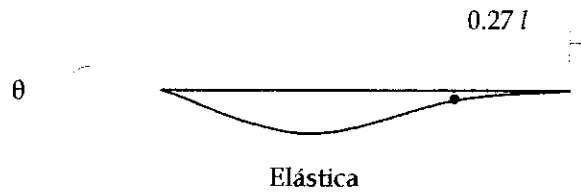


Fig. 6.4



Obsérvese que al eliminar el empotramiento del lado derecho, ambos puntos de inflexión se moverán a la derecha, en la dirección donde se redujo la rigidez del apoyo.

Vigas sin carga

Viga sin carga, con momentos con sentidos opuestos en los extremos:

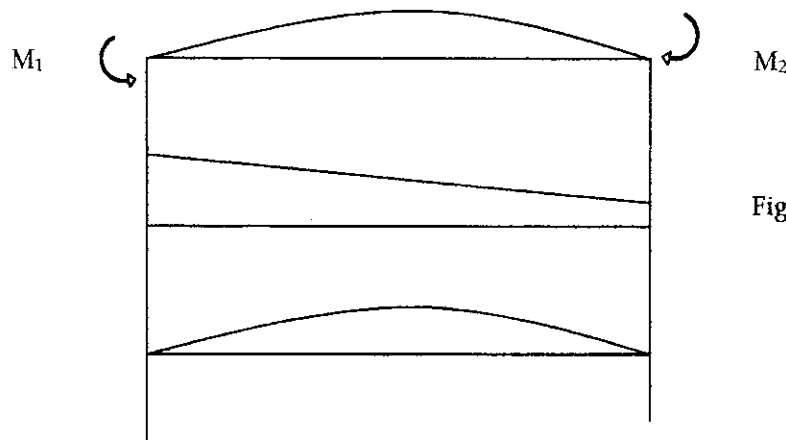


Fig. 6.5

Tiene cero puntos de inflexión

Viga sin carga, con momentos de igual sentido en los extremos:

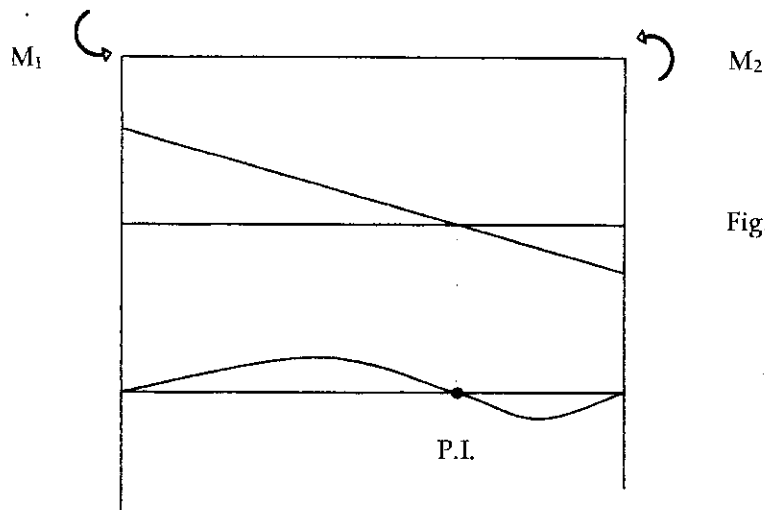


Fig. 6.6

Esta viga tiene un punto de inflexión.

De lo anterior podemos concluir que en un claro sin carga no puede existir más de un punto de inflexión.

Vigas o miembros con varias cargas

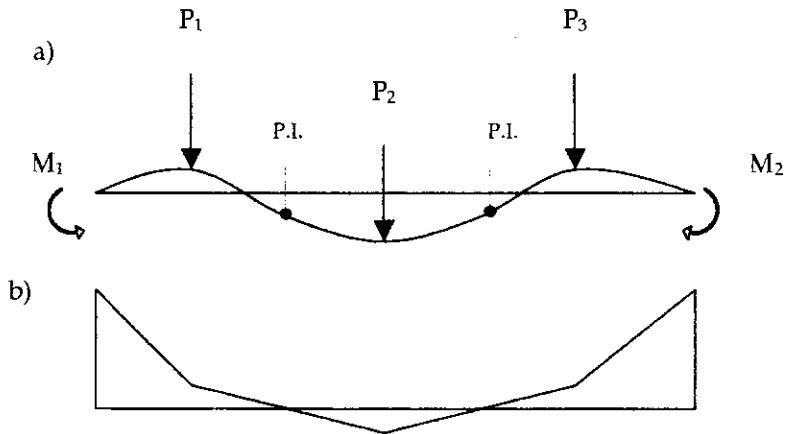


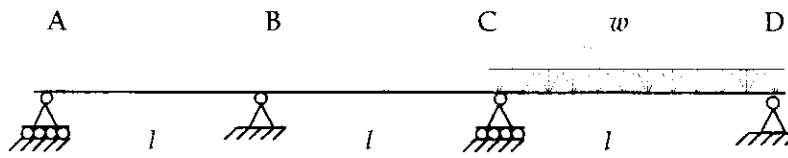
Fig. 6.7

Si en un claro actúan varias cargas en la misma dirección, pueden presentarse hasta 2 puntos de inflexión en el claro. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

**Ejemplo 1:**

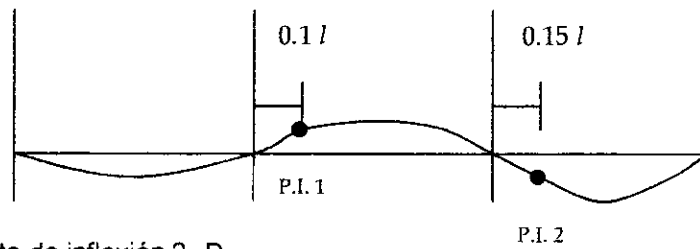
Analizar la siguiente viga continua

Fig. 6.8



Dibujar de la elástica estimada y exagerada.

Fig. 6.9



Tramo punto de inflexión 2- D

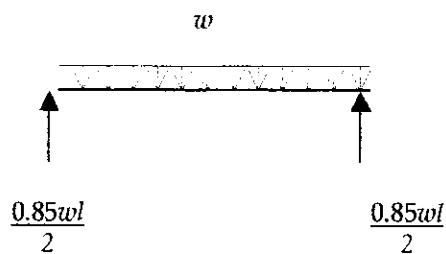


Fig. 6.10

$M_{\max}$  cuando  $x = 0.5 l$

$$M = 0.425wx - \frac{wx^2}{2}$$

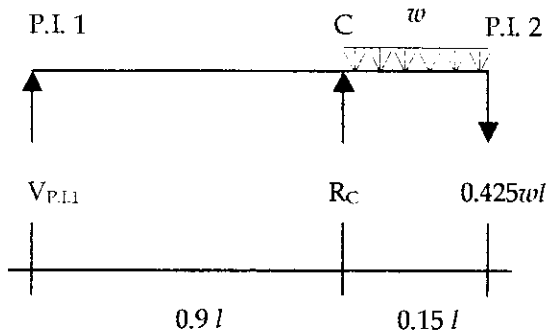
$$M = 0.425w(0.5l) - 0.125wl^2$$

$$M = 0.213wl^2 - 0.125wl^2$$

$$M = 0.0875wl^2$$

Tramo Punto de Inflexión 1 – Punto de Inflexión 2

Fig. 6.11



$$M_C = -(0.425w/l)(0.15l) - \frac{w(0.15l)^2}{2}$$

$$M_C = 0.075 w l^2$$

$$\underline{\sum M_{P.1.1} = 0}$$

$$R_C(0.9l) - (0.425w/l)(1.05l) - \frac{w(0.15l)^2}{2} = 0$$

$$R_C = \frac{0.4575w l^2}{0.9l}$$

$$R_C = 0.51w/l$$

$$\underline{\sum F_V = 0}$$

$$V_{P.1.1} + 0.51w/l - 0.15w/l - 0.425w/l = 0$$

$$V_{P.1.1} = -0.065w/l$$

$$V_{P.1.1} = 0.065w/l \downarrow$$

$$M_B = (0.065w/l)(0.10l)$$

$$M_B = -0.0065 w l^2$$

Diagrama de momentos

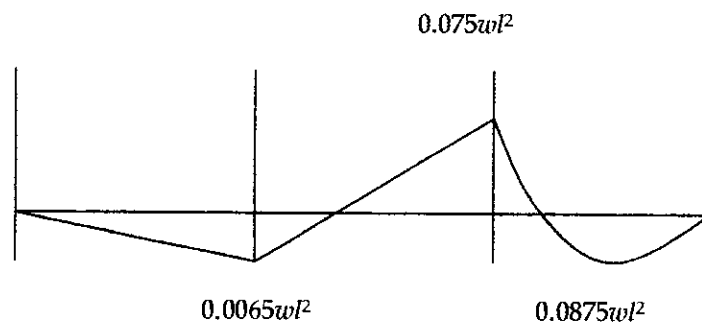


Fig. 6.12

Ejemplo 2:

Analizar el siguiente marco.

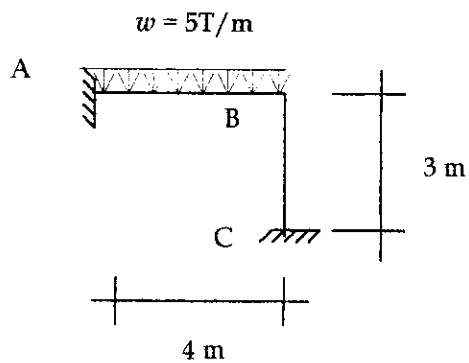
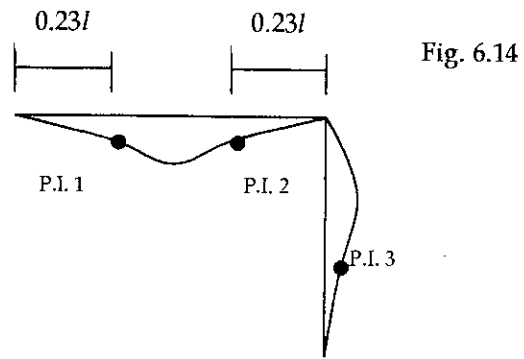
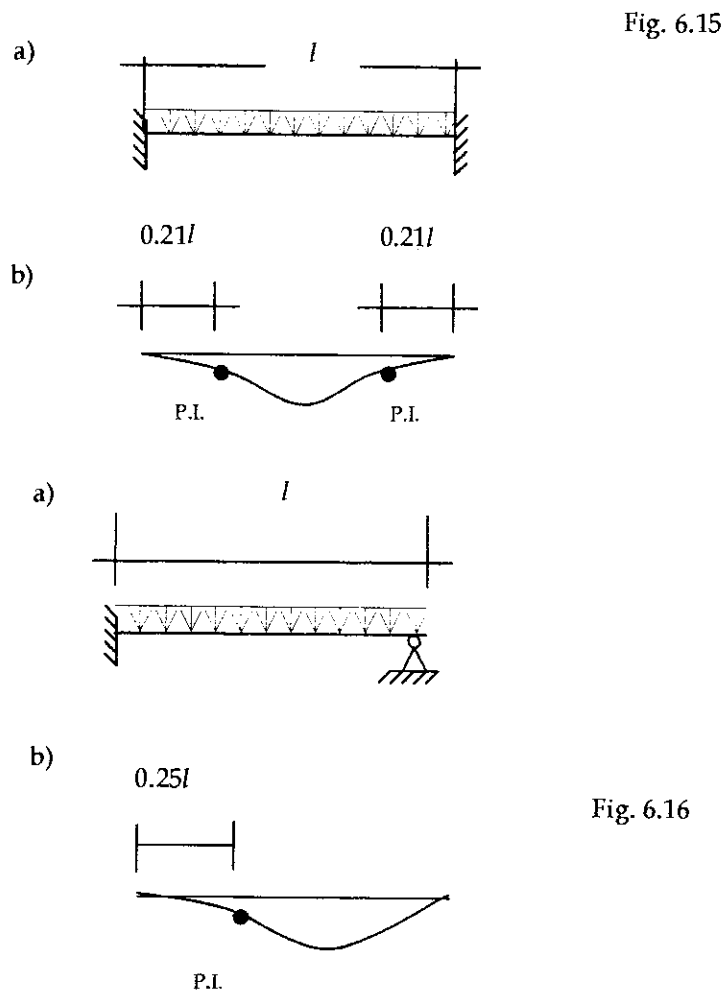


Fig. 6.13

## Dibujo de la elástica estimada y exagerada



## Aplicación de casos típicos



## Cuerpos Libres

Tramo 1-2

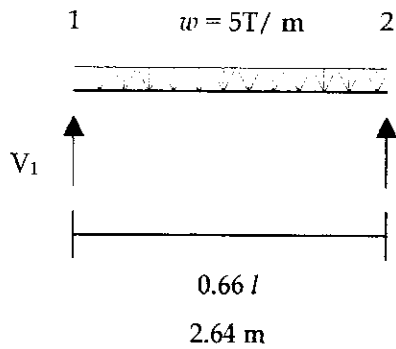


Fig. 6.17

 $\Sigma F_V = 0:$ 

$$V_1 + V_2 = (5)(2.64) = 13.20$$

Por simetría:  $V_1 = V_2 = 6.60$  Ton

$$M_{\max} = \frac{wl^2}{8} + \frac{(5)(2.64)^2}{8} = 4.36 \text{ Ton-m}$$

Tramo A-1

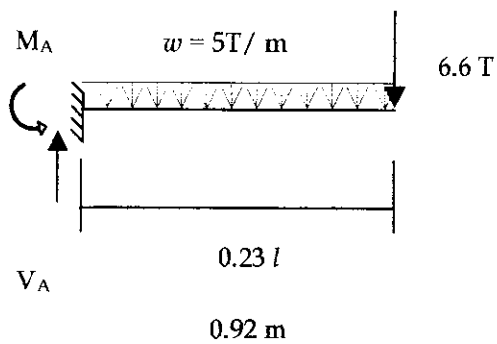


Fig. 6.18

 $\Sigma F_V = 0:$ 

$$V_A = (5)(0.92) + 6.6 = 11.2$$

$$M_A = \frac{wl^2}{2} + (Pl) = \frac{(5)(0.92)^2}{2} + (6.6)(0.92)$$

$$M_A = 8.19 \text{ T-m}$$

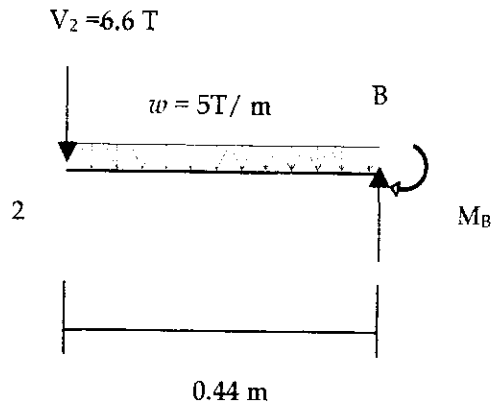
Tramo 2-B

Fig. 6.19

$$V_B = (5)(0.44) + 6.6 = 8.8 \text{ Ton}$$

$$M_B = \frac{(5)(0.44)^2}{2} + (6.6)(0.44)$$

$$M_B = 3.39 \text{ Ton-m}$$

Para la columna:

Cuando se tiene una barra empotrada en un extremo y apoyada en el otro, (sin carga) sin desplazamiento y con un momento  $M$  aplicado en el extremo articulado, trasmite la mitad del momento aplicado al otro extremo. Entonces para este ejemplo:

$$M_c = M_B/2$$

Demostración:

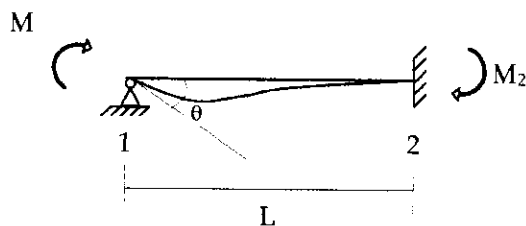


Fig. 6.20

El miembro anterior se puede representar igual a:

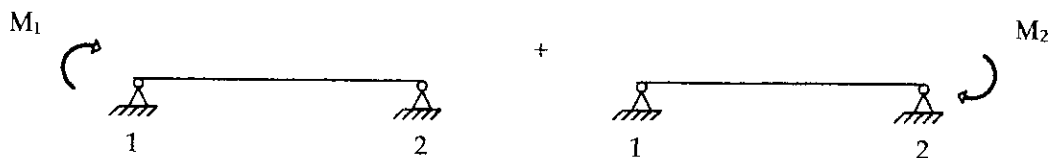
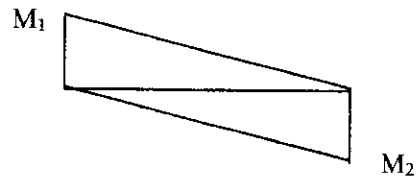


Fig. 6.21



Aplicación del Método del Área del Diagrama de Momento

$$EI\Delta_1 = (M_1L) (L/3) - M_2L (2L/3)$$

$$\Delta_1 = \frac{M_1L^2}{6EI} - \frac{M_2L^2}{3EI}$$

Sabemos que  $\Delta_1 = 0$

entonces,

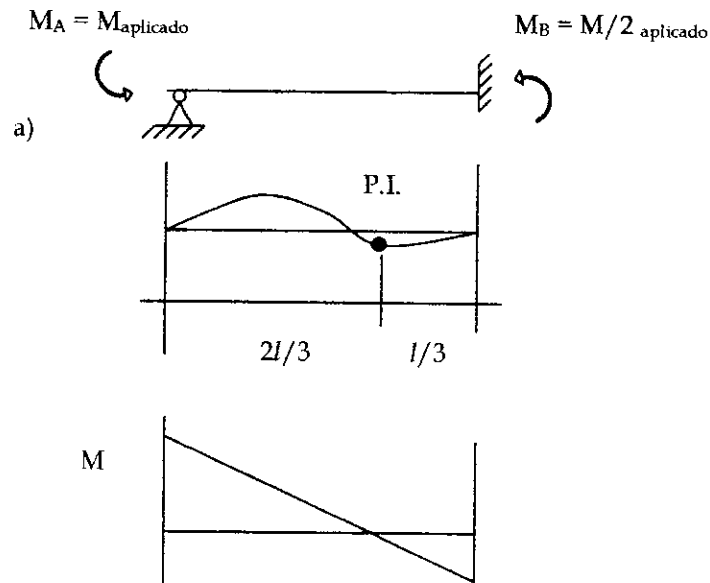
$$0 = M_1L^2 - M_2L^2$$

$$M_2 = \frac{(M_1L^2)}{6EI} \frac{(3EI)}{L^2}$$

$$M_2 = \frac{M_1}{2}$$

Regreso al ejemplo:

Fig. 6.22



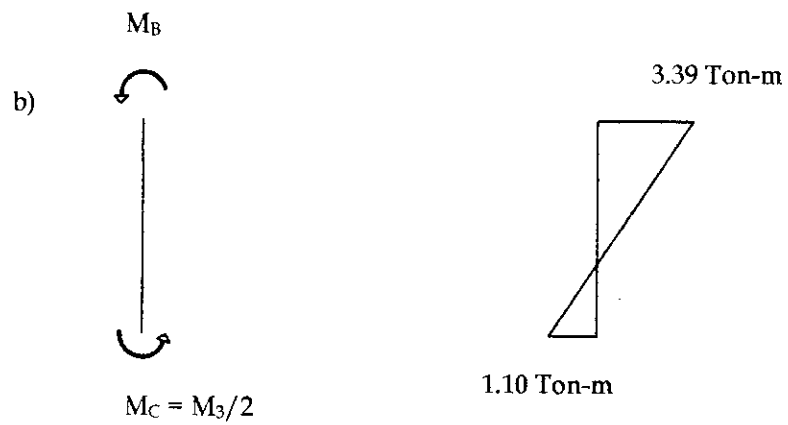
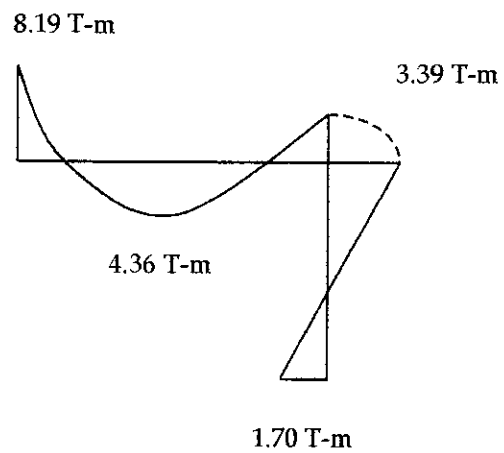


Diagrama de momentos:

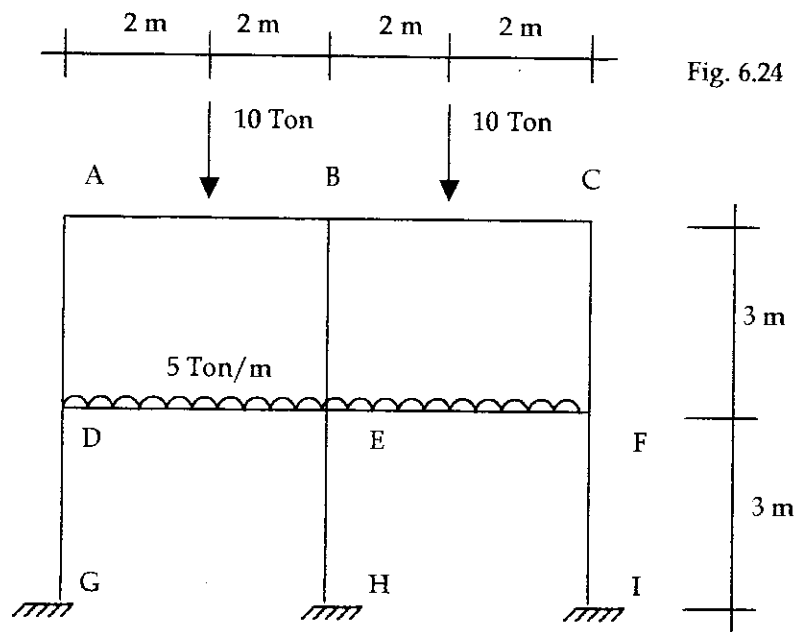
Fig. 6.23



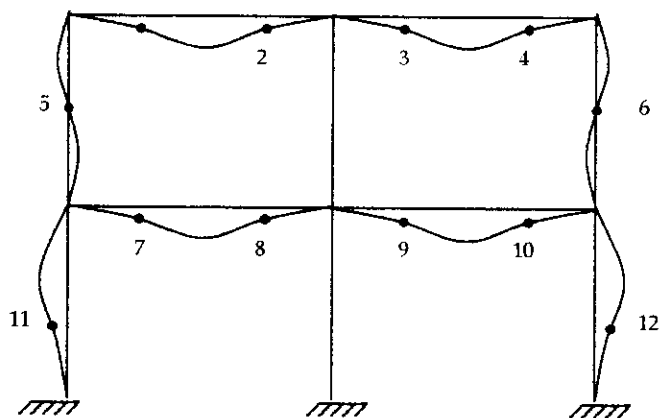
Siempre que no hay ladeo o desplazamiento lateral.

**Ejemplo:**

Analizar el siguiente marco rígido simétrico de 2 claros y dos niveles.



Si trazamos la curva elástica estimada en una forma exagerada y sus puntos de inflexión, ésta sería así:



Aplicación de los casos típicos

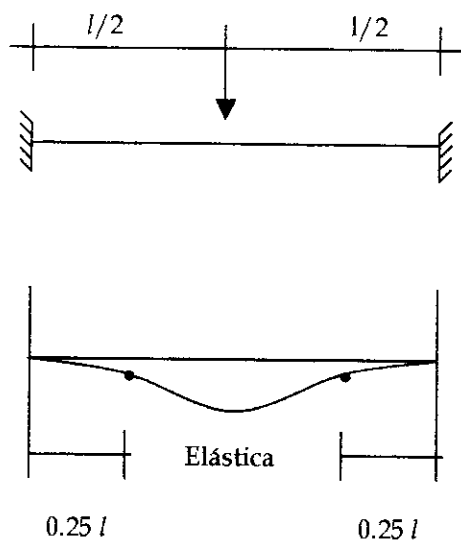


Fig. 6.26

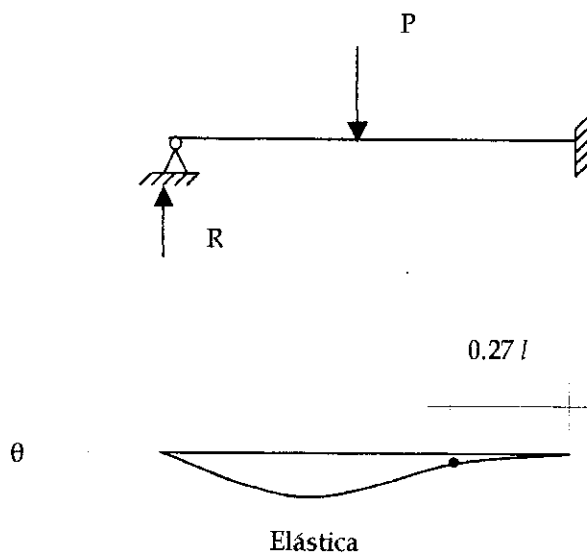
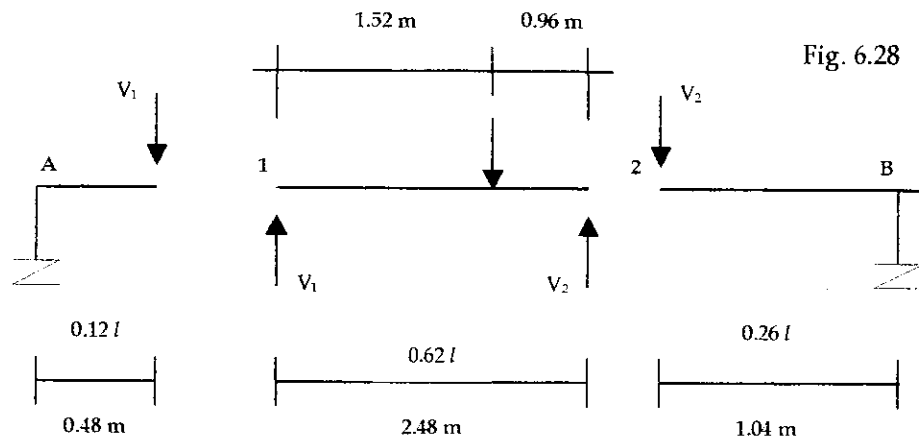


Fig. 6.27

Por simetría sólo analizaremos la mitad

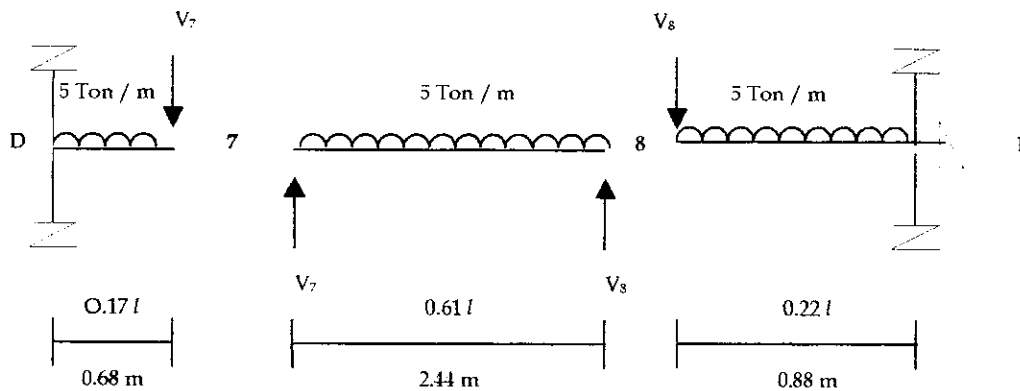
Separación en los puntos de inflexión de la viga superior izquierda A-B.



Cuerpo Libre de la Viga A-B

Separación en los puntos de inflexión de la viga de entrepiso D-E.

Fig. 6.29



Cuerpo libre de la viga D-E

Por medio de las ecuaciones de estática:

$$V_1 = 3.87 \text{ Ton}$$

$$V_2 = 6.13 \text{ Ton}$$

$$V_7 = V_8 = 6.10 \text{ Ton}$$

Podemos calcular también los momentos y obtenemos:

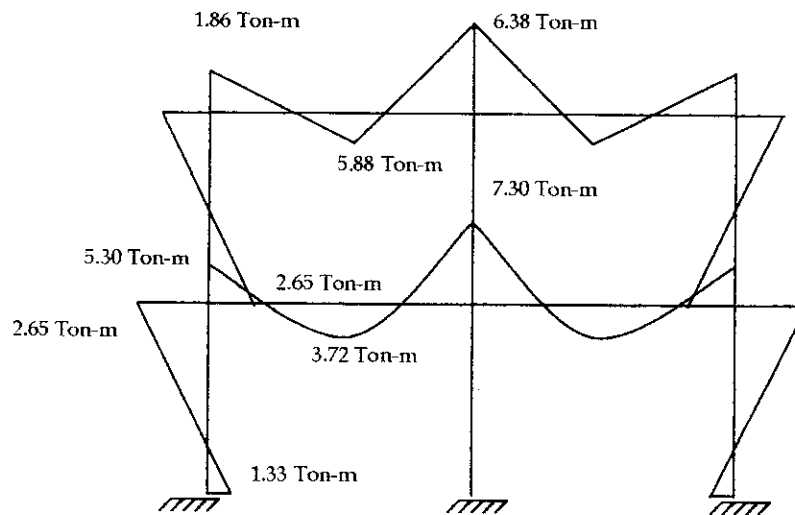
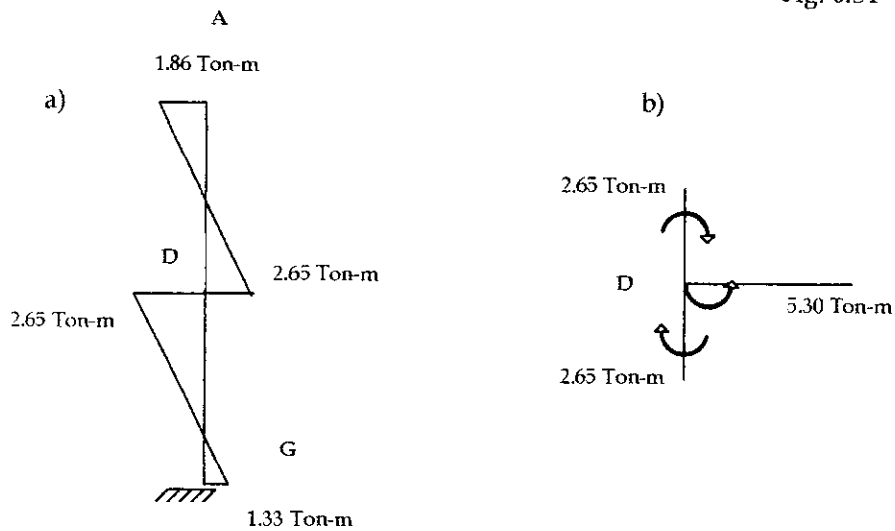


Fig. 6.30

Los momentos en el nudo D se obtuvieron de la siguiente forma:

Fig. 6.31



Nótese que existe una correspondencia entre el diagrama de momentos y las elásticas de las estructuras. Podríamos decir que el diagrama de momento queda del lado donde se produce la tensión en el miembro.

## B. Estructuras con marcos rectangulares y nudos rígidos bajo el efecto de cargas horizontales

De acuerdo con sus dimensiones y geometría los marcos pueden ser clasificados como marcos bajos y marcos altos.

### Marco Bajos:

Son aquellos cuya base total es mayor que su altura total.

### Marcos Altos:

Son los que tienen una altura total mayor que su base total.

### 1. Metodo del Portal

El metodo del portal es aplicable con mejores resultados a marcos bajos, ya que su comportamiento está regido principalmente por las fuerzas de corte. Consideremos el siguiente marco o panel:

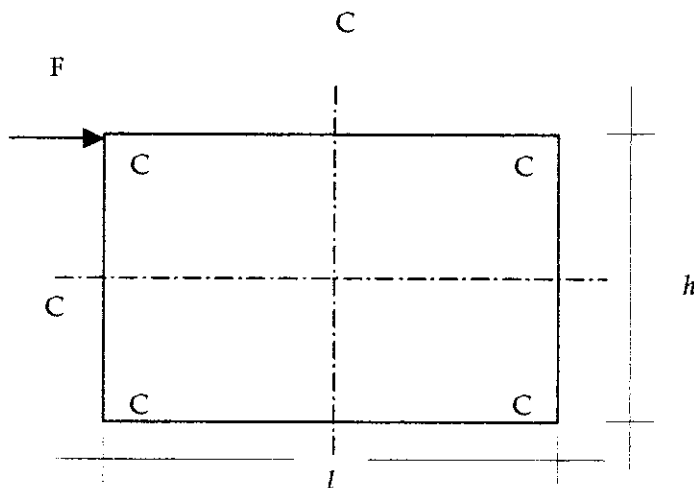
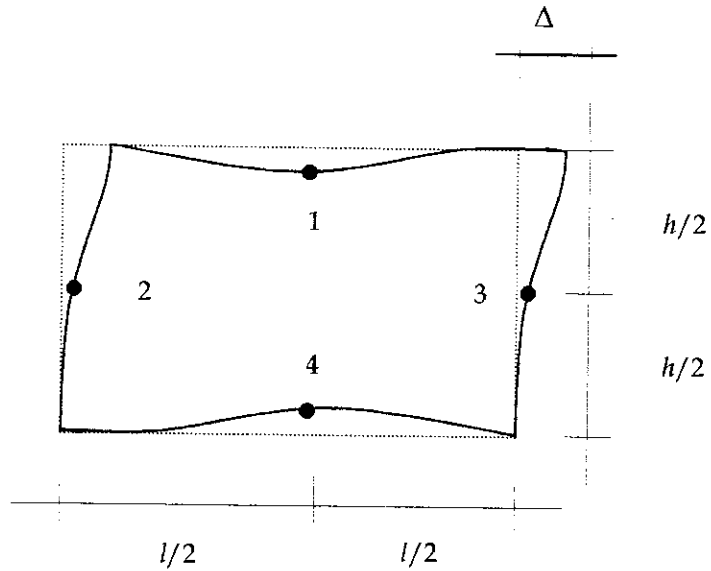


Fig. 6.32

Si trazamos su elástica, se deformaría así:

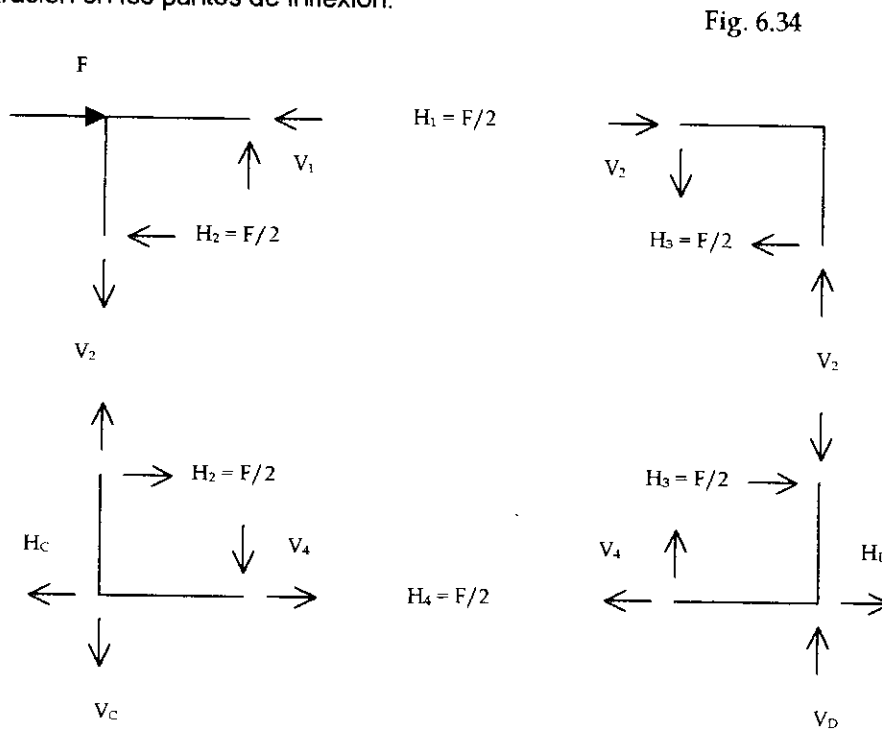
Fig. 6.33



Al analizarlo podemos concluir:

- Las longitudes horizontales y verticales no cambiaron, ya que las deformaciones axiales son mucho menores que las deformaciones por flexión.
- Todos los nudos conservan sus ángulos rectos iniciales.
- Los claros entre nudos no tienen carga. Entonces, no puede existir más que un punto de inflexión.
- Por simetría el punto de inflexión está a la mitad de cada claro.

Separación en los puntos de inflexión:

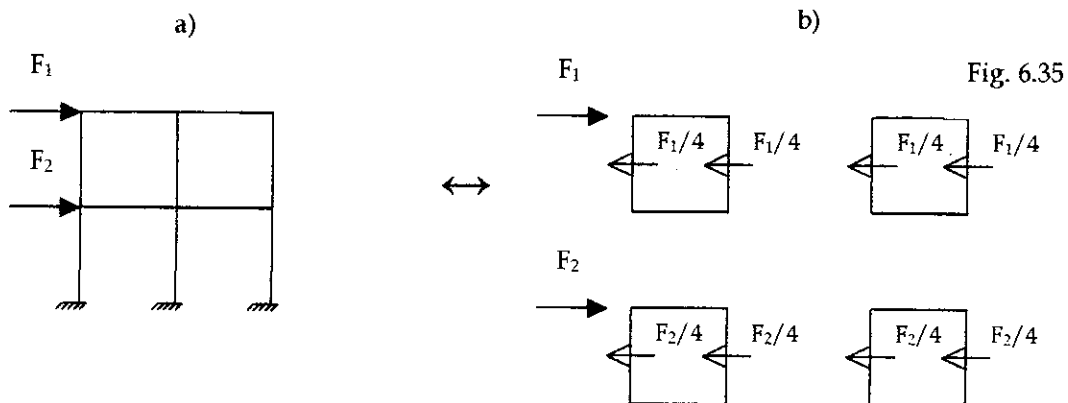


- Por medio de la estática el valor de todas las fuerzas interiores es posible hallarlo.
- Si el comportamiento de la estructura está dominado completamente por las fuerzas de corte a través de los marcos (marcos de poca altura sometidos a una fuerza lateral) suponemos que cada panel tiene igual capacidad de corte.

entonces:

$$V_{\text{interior}} = 2V_{\text{exterior}}$$

Podemos representar una estructura de vigas y columnas como la unión de varios paneles.



$$F = F_1 + F_2$$

Todas estas suposiciones constituyen el Método del Portal, cuyos principios o suposiciones serán:

- Se forma un punto de inflexión al centro de cada viga.
- Se forma un punto de inflexión al centro de cada columna.
- Las columnas interiores absorben el doble de corte que las columnas exteriores.
- La sumatoria de las fuerzas de corte de todas la columnas en cada piso debe ser igual al total de la fuerzas horizontales aplicadas acumuladas hasta dicho piso.

**Ejemplo:**

Analizar por el Método del Portal el siguiente marco.

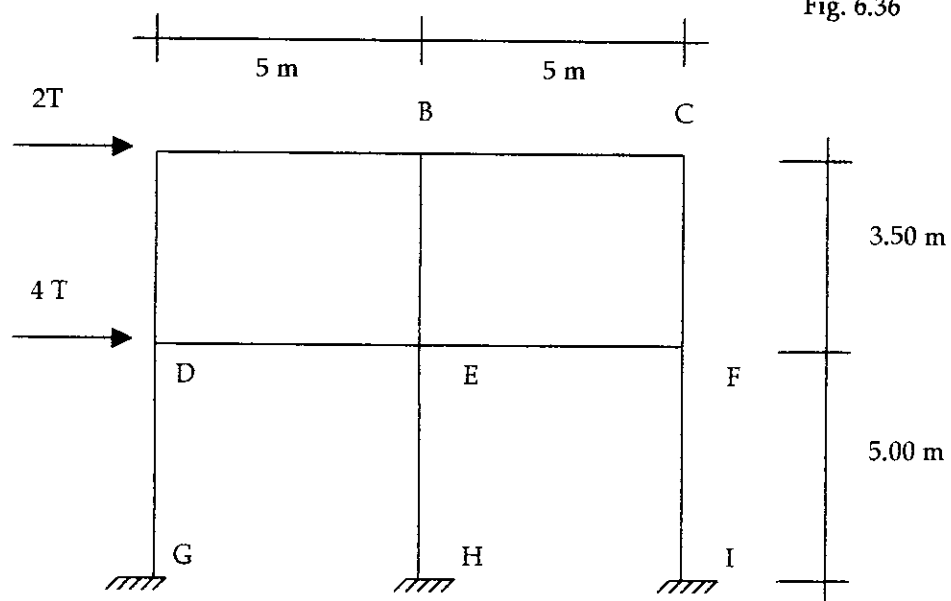
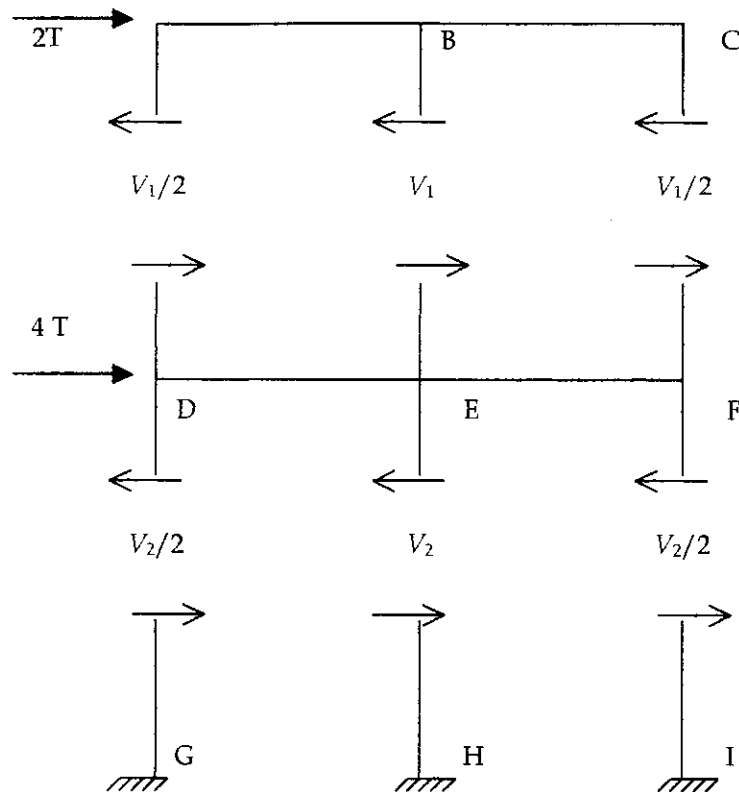


Fig. 6.36

Al cortar en los puntos de inflexión de las columnas, tenemos

Fig. 6.37



Análisis del nivel 2:

$\Sigma F_h = 0:$

$$2 = \frac{V_1}{2} + V_1 + \frac{V_1}{2}$$

$$2 = 2V_1$$

$$V_1 = 1 \text{ Ton}$$

Análisis del nivel 1:

$\Sigma F_h = 0:$

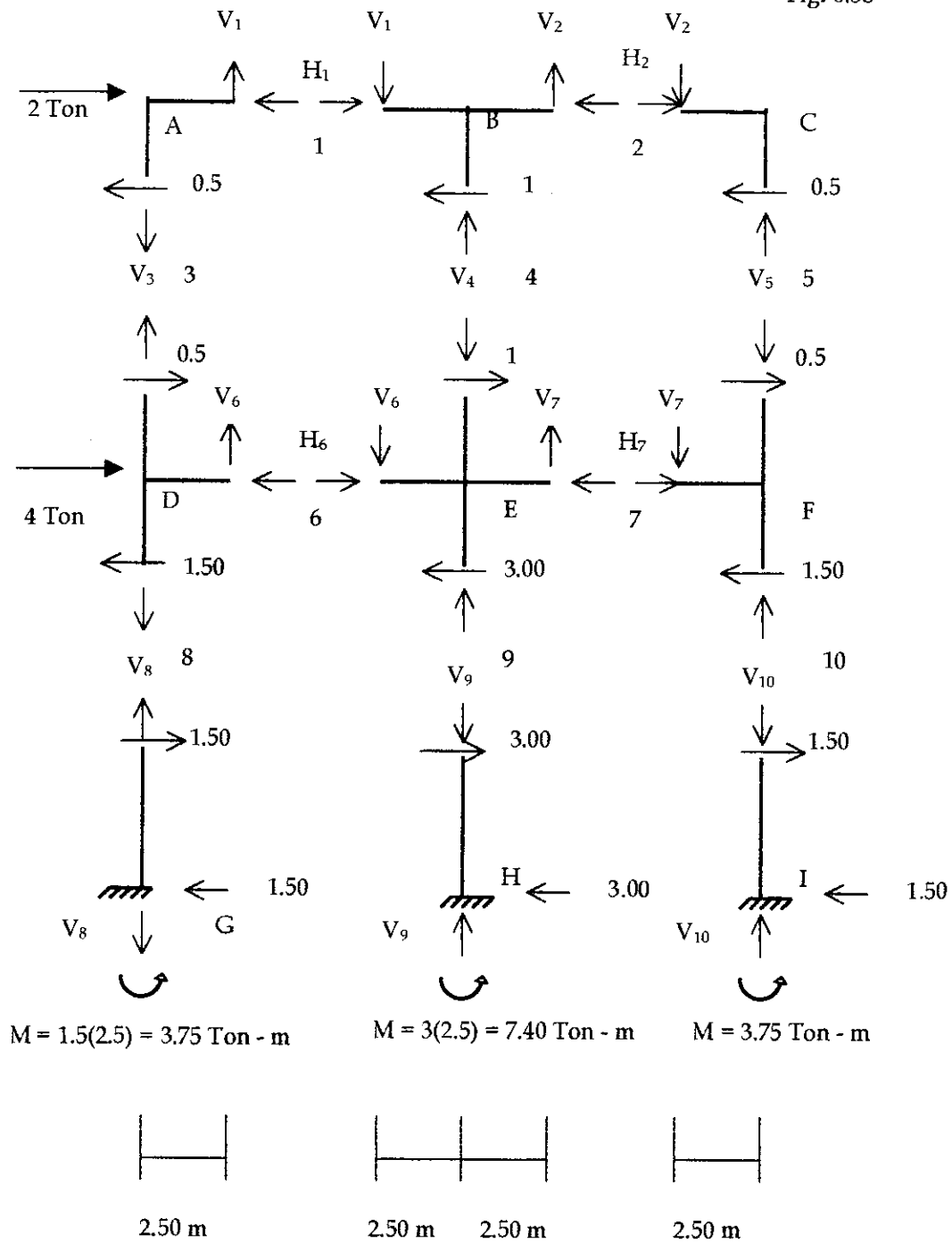
$$2 + 4 = \frac{V_2}{2} + V_2 + \frac{V_2}{2}$$

$$6 = 2V_2$$

$$V_2 = 3 \text{ Ton}$$

## Cuerpos libres

Fig. 6.38



## Análisis por nudos

Nudo A:

$$\underline{\Sigma F_H = 0}$$

$$2 - 0.50 - H_1 = 0$$

$$H_1 = 1.50 \text{ Ton}$$

$$\underline{\Sigma M_1 = 0}$$

$$(0.50)(1.75)(1.75) = 2.5 V_3$$

$$V_3 = 0.35 \text{ Ton}$$

$$\underline{\Sigma F_V = 0:}$$

$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = 0.35 \text{ Ton}$$

Del mismo modo se procede para los nudos B, C, D, E y F. Por ser un elemento simétrico no hay necesidad de resolver los nudos C y F, ya que son iguales a los primeros.

○ Nudo B:

$$H_2 = 0.50 \text{ Ton}$$

$$V_4 = 0 \text{ Ton}$$

$$V_2 = 0.35 \text{ Ton}$$

○ Nudo C: (igual a nudo A)

$$H_1 = 1.50 \text{ Ton}$$

$$V_3 = 0.35 \text{ Ton}$$

$$V_1 = 0.35 \text{ Ton}$$

○ Nudo D:

$$H_6 = 3 \text{ Ton}$$

$$V_6 = 1.85 \text{ Ton}$$

○ Nudo E:

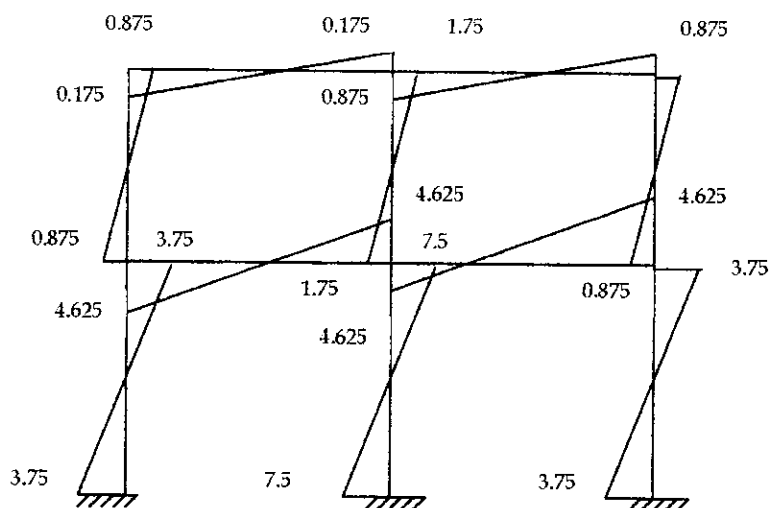
$$H_7 = 1 \text{ Ton}$$

$$V_9 = 0 \text{ Ton}$$

$$V_7 = 1.85 \text{ Ton}$$

Los nudos G, H, e I ya están resueltos al tener las fuerzas en las columnas.

Al multiplicar las fuerzas por sus brazos se obtienen los momentos.

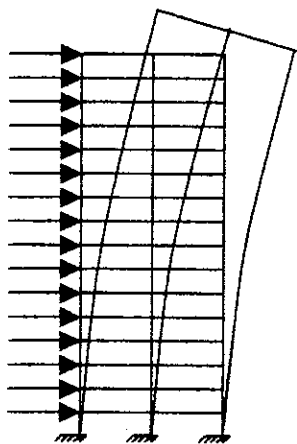


Los resultados son mejores para los pisos intermedios que para los inferiores y superiores.

Es aplicable más que todo a edificios bajos (donde la altura es mucho menor que la base).

## 2. Método del Voladizo

- 1 Aunque el corte en los marcos o paredes es importante, el comportamiento de estructuras elevadas (marcos altos) está más afectado por la flexión total que sufre, ya que se comporta como si fuera una viga en voladizo (de allí su nombre) empotrada en el suelo.



- 2 Como resultado de la flexión, las columnas funcionan como las fibras de una viga, con tensión de un lado y compresión del otro. Su intensidad depende de la distancia a que se encuentren del centroide del grupo de columnas.
- 3 Este método también se basa en suponer los puntos de inflexión en las vigas y las columnas al centro, pero en lugar de distribuir las fuerzas de corte en las columnas asume una distribución de fuerzas axiales en las mismas.
- 4 Las suposiciones de los puntos de inflexión y de las fuerzas axiales en las columnas constituyen el Método del Voladizo.

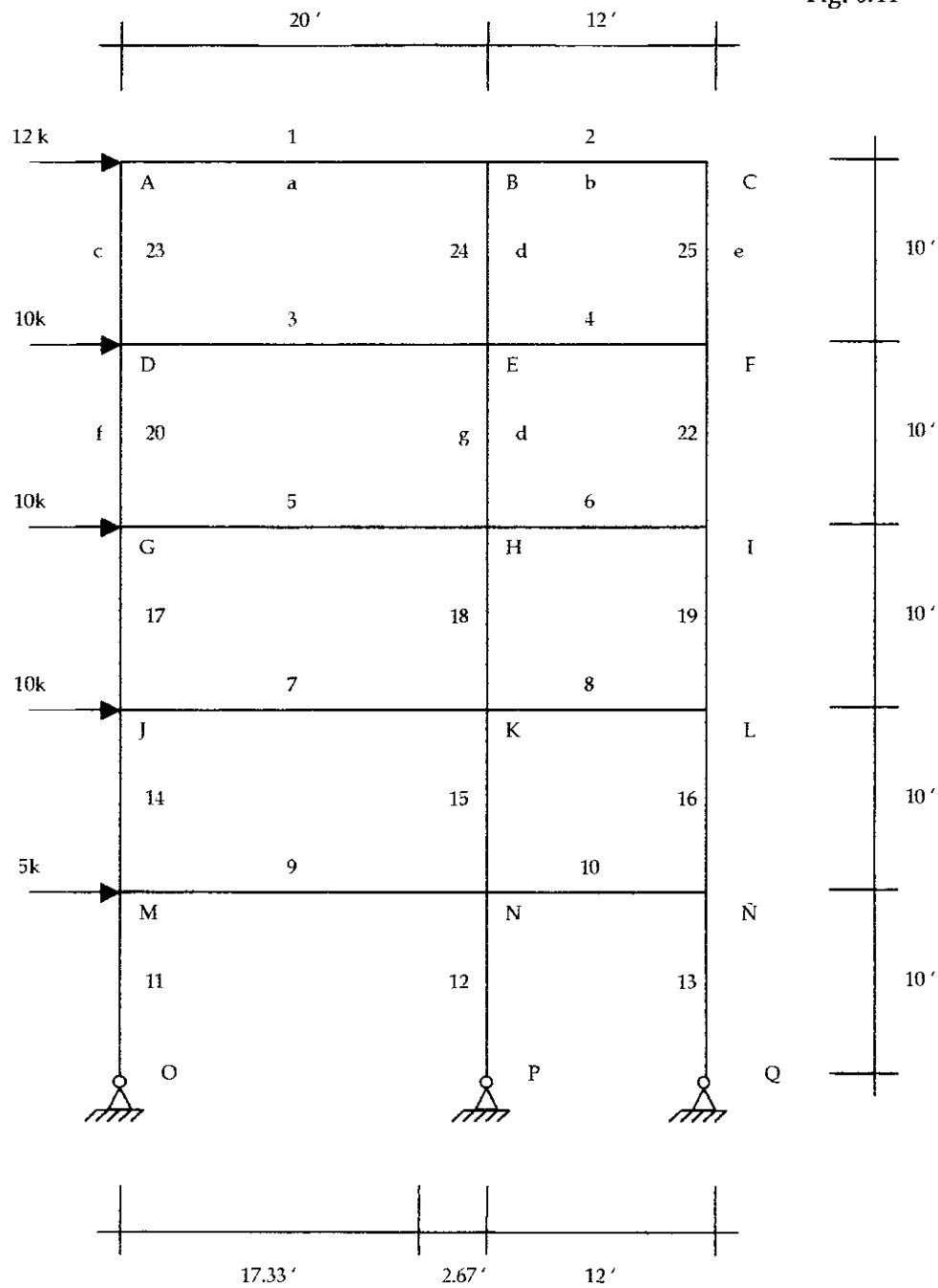
### **Resumen de suposiciones**

- Se forma un Punto de Inflexión al centro de cada viga
- Se forma un Punto de Inflexión al centro de cada columna
- La estructura se comporta como una viga en voladizo empotrada en su base.
- Las columnas funcionan como las fibras de una viga, con tensión de un lado y compresión del otro. Su intensidad depende de la distancia de la columna al centroide del grupo de columnas.

**Ejemplo:**

Analizar el siguiente marco, por el Método del Voladizo.

Fig. 6.41



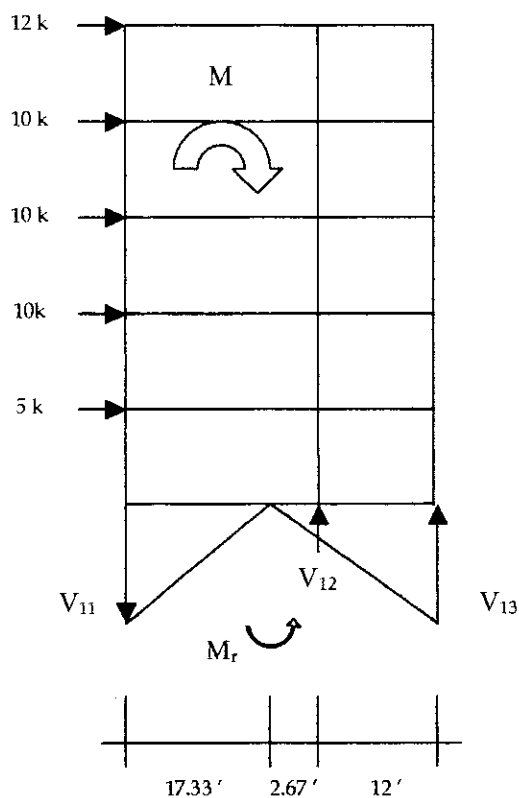
Calculo de ubicación del centroide de columnas:

Se supone un área = 1 (ya que aún no tenemos secciones de miembros)

$$y = \frac{1(0) + 1(20) + 1(32)}{3} = \frac{52}{3} = 17.33$$

Nivel 1:

Fig. 6.42



$$V_{11} \quad \text{-----} \quad 17.33$$

$$V_{12} \quad \text{-----} \quad 2.67$$

Por regla de tres, obtenemos el valor de  $V_{12}$

$$V_{12} = \frac{2.67 V_{11}}{17.33} = 0.154 V_{11}$$

$$V_{13} = \frac{14.67 F}{17.33} = 0.846 V_{11}$$

$\Sigma M_c = 0:$

$$12(50) + 10(40) + 10(30) + 10(20) + 5(10) = V_{11}(17.33) + 0.154 V_{11}(2.67) + 0.846 V_{11}(14.67)$$

$$V_{11} = \frac{1,550}{30.152}$$

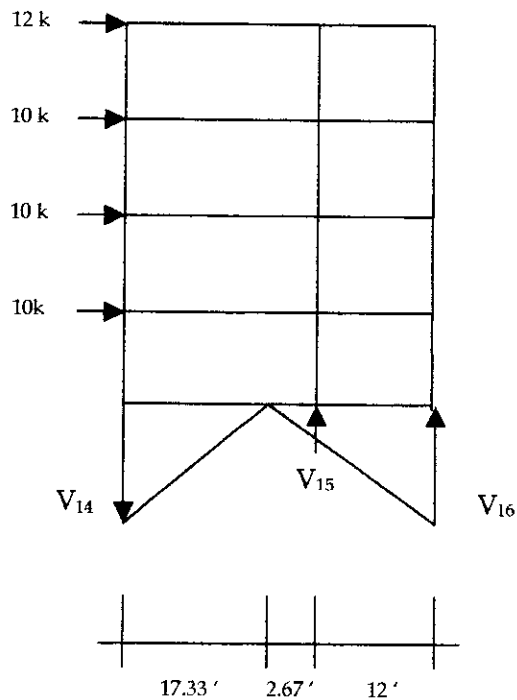
$$V_{11} = 51.41 \text{ kips}$$

$$V_{12} = -7.92 \text{ kips}$$

$$V_{13} = -43.49 \text{ kips}$$

Nivel 2:

Fig. 6.43



$$V_{15} = \frac{2.67 V_{14}}{17.33} = 0.154 V_{14}$$

$$V_{16} = 0.846 V_{11}$$

$\Sigma M_C = 0$ :

$$(30.152)V_{14} = 12(35) + 10(25) + 10(15) + 10(15)$$

$$V_{14} = 28.856 \text{ kips}$$

$$V_{15} = -4.443 \text{ kips}$$

$$V_{16} = -24.41 \text{ kips}$$

Y así procedemos en igual forma para cada nivel:

$$V_{17} = 16.6 \text{ kips} \quad V_{18} = -2.6 \text{ kips} \quad V_{19} = -14.0 \text{ kips} \quad V_{20} = 7.7 \text{ kips}$$

$$V_{21} = -1.2 \text{ kips} \quad V_{22} = -6.5 \text{ kips} \quad V_{23} = -2.0 \text{ kips} \quad V_{24} = -0.3 \text{ kips}$$

$$V_{25} = -1.7 \text{ kips}$$

Si ahora hacemos cuerpos libres en cada nudo:

Nudo A:

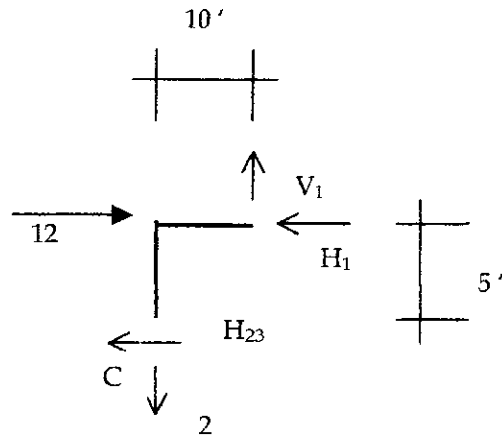


Fig. 6.44

$$\Sigma F_V = 0:$$

$$V_1 = 2 \text{ kips } \uparrow$$

$$\Sigma M_a = 0$$

$$5H_C - 2(10) = 0$$

$$H_{23} = 4 \text{ kips } \leftarrow$$

$$\Sigma F_H = 0:$$

$$12 - 4 = H_a$$

$$H_1 = 8 \text{ kips } \leftarrow$$

Nivel 5:

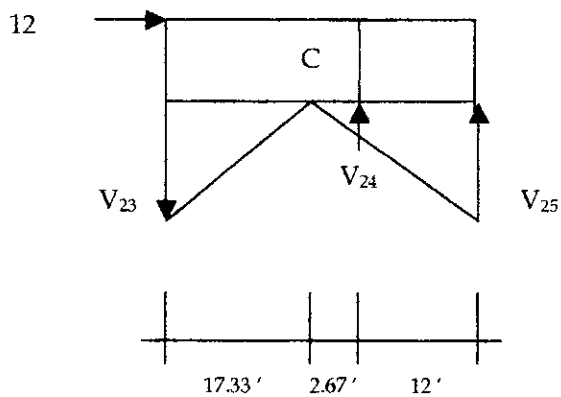


Fig. 6.45

$$V_{24} = \frac{2.67V_{23}}{17.33} = 0.154V_{23}$$

$$V_{25} = 0.846 V_{23}$$

$$\Sigma M_C = 0:$$

$$12(5) = (17.33)V_{23} + 2.67(0.154)V_{23} + 12(0.846)V_{23}$$

$$V_{23} = \frac{60}{27.89}$$

$$V_{23} = 2.15 \text{ kips}$$

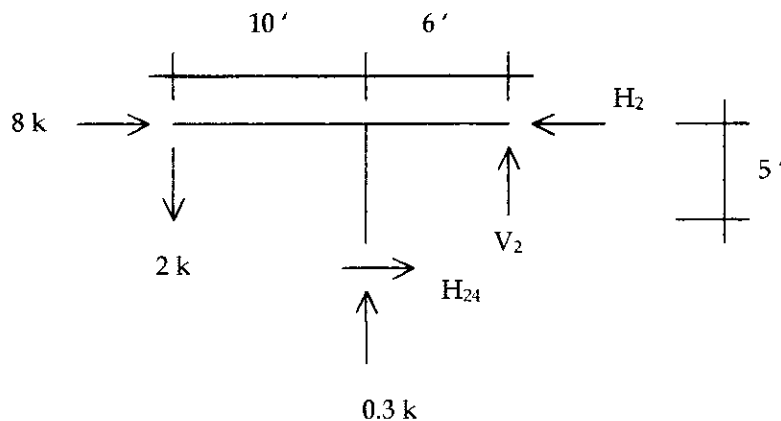
$$V_{24} = 0.33 \text{ kips} \quad V_{25} = 1.81 \text{ kips}$$

De la misma forma, obtenemos los demás valores.

Al multiplicar las fuerzas cortantes por sus brazos en cada miembro obtenemos los momentos para el último nivel y en igual forma se procede para el resto del edificio.

Cálculo de los momentos en el último nivel.

Fig. 6.46



$$\Sigma F_V = 0:$$

$$V_2 = 1.7 \text{ kips } \uparrow$$

$$M = 10.2 \text{ kips-pie}$$

$$\Sigma M_{P.1.2} = 0:$$

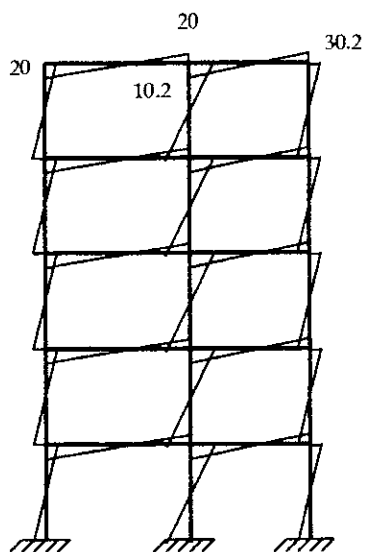
$$2(16) + H_{24}(5) - 0.3(6) = 0$$

$$H_{24} = 6.04 \text{ kips}$$

$$M = 30.2 \text{ kips}$$

Diagrama de momentos

Fig. 6.47

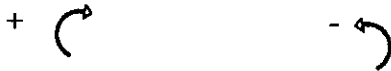


# VII. ANÁLISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR MÉTODOS ITERATIVOS

## A. El método de Cross

Convención de signos

Fig. 7.1



### 1. El factor de transporte o de transmisión

El factor de transporte o transmisión es el factor por el cual debe multiplicarse el momento desarrollado en el extremo girado, siendo el otro extremo fijo o restringido, para obtener el momento inducido en el otro extremo fijo o restringido.

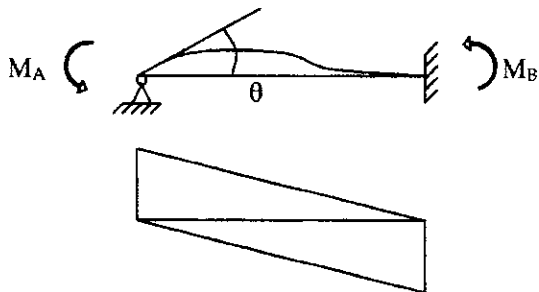


Fig. 7.2

Demostración de  $M_B = M_A/2$

Deducción del factor de transporte para miembros prismáticos

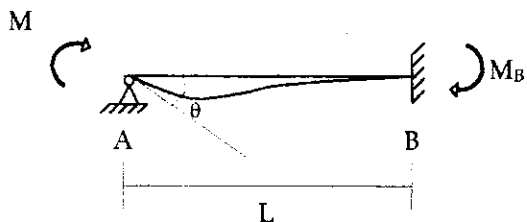


Fig. 7.3

Podemos representar la viga anterior igual a:

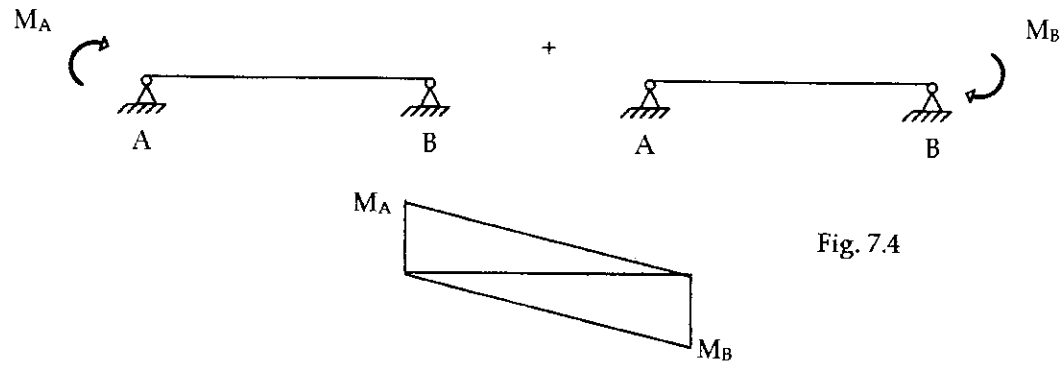


Fig. 7.4

Aplicación del Método del Área del Diagrama de Momento

$$EI\Delta_A = (M_A L) (L/3) - M_B L (2L/3)$$

$$\Delta_A = \frac{M_A L^2}{6EI} - \frac{M_B L^2}{3EI}$$

Sabemos que  $\Delta_A = 0$

entonces,

$$0 = M_A L^2 - M_B L^2$$

$$M_B = \frac{(M_A L^2) (3EI)}{6EI L^2}$$

$$M_B = \frac{M_A}{2}$$

## 2. Rigidez Absoluta (K)

La rigidez absoluta es la acción necesaria para producir una deformación unitaria en cualquier clase de sollicitaciones, flexión, compresión, tensión, torsión, etc. que no permite traslación de ninguno de los extremos.



Fig. 7.5

$$e = \frac{PL}{AE} = 1 \text{ entonces, } P = \frac{AE}{L} = F_{\text{axial}}$$

Deducción de la rigidez absoluta para un miembro prismático

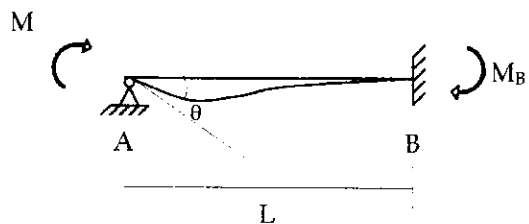


Fig. 7.6

Es igual a:

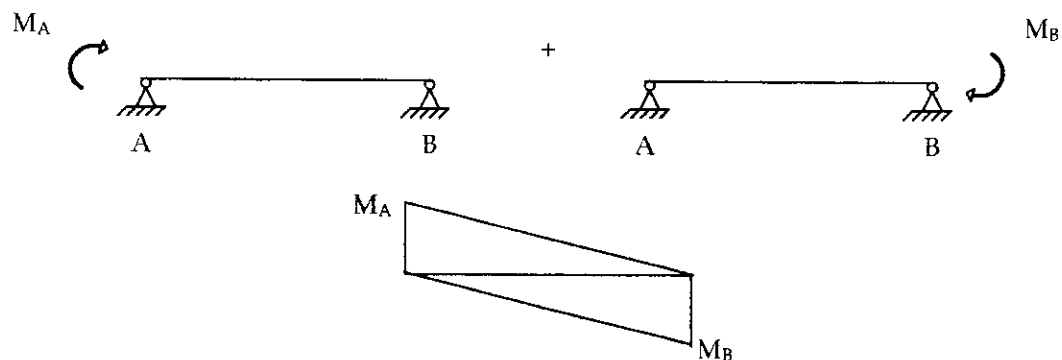


Fig. 7.7

Aplicación del método del Área del Diagrama de Momento

$$\theta_A = \left( \frac{M_A L}{2} - \frac{M_B L}{2} \right) \frac{1}{EI}$$

Sabemos que  $M_B = \frac{M_A}{2}$

$$\theta_A = \left( \frac{M_A L}{2} - \frac{M_A L}{(2)(2)} \frac{1}{EI} \right)$$

$$\theta_A = \left( \frac{M_A L}{2} - \frac{M_A L}{4} \frac{1}{EI} \right) = \frac{M_A L}{4EI}$$

entonces,

$$M_A = \frac{4EI\theta_A}{L}$$

Si  $\theta = 1$  entonces,  $M = K$  (rigidez absoluta)

$$Y K = \frac{4EI}{L}$$

$$M = \frac{4EI\theta_A}{L}$$

si  $\theta = 1$  entonces,

$$K = \frac{4EI}{L}$$

### 3. Momento fijo (MF)

Los momentos fijos son los necesarios en los extremos de un miembro para que los giros en esos extremos sean cero.

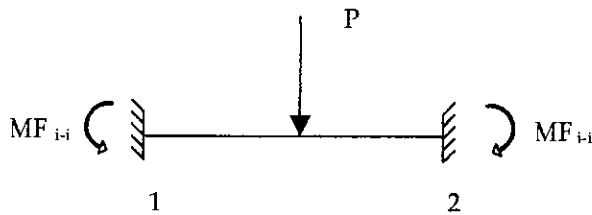


Fig. 7.8

### 4. Factor de distribución

El factor de distribución es el valor por el cual debemos multiplicar el momento aplicado en un nudo de una estructura para obtener el valor de momento que absorbe cada uno de los miembros que concurren a ese nudo.

Deducción:

Calcular el momento que absorbe cada elemento.

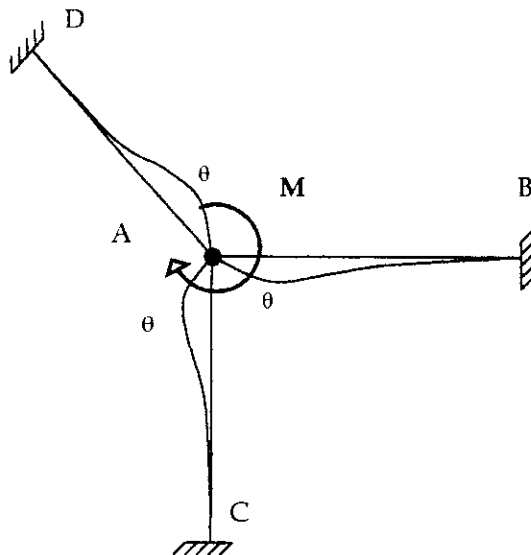


Fig. 7.9

$$\begin{array}{l} \text{Si } M = K_{i-j} \rightarrow \theta = 1 \\ M_{i-j} \rightarrow \theta_i \end{array}$$

Regla de 3:

$$\theta_i = M_{ij} \rightarrow M_{ij} = K_{ij} \theta_i$$

$$M_{AB} = K_{AB} \theta_A$$

$$M_{AC} = K_{AC} \theta_A$$

$$M_{AD} = K_{AD} \theta_A$$

$$\Sigma M_{i-j} = \theta_A (K_{AB} + K_{AC} + K_{AD}) = M$$

$$\theta_A (\Sigma K_{i-j}) = M$$

$$\theta_A = \frac{M}{\Sigma K_{i-j}}$$

entonces,

$$M_{AD} = \frac{K_{AB} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}} = \frac{K_{AB} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}}$$

$$M_{AC} = \frac{K_{AC} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}} = \frac{K_{AC} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}}$$

$$M_{AD} = \frac{K_{AD} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}} = \frac{K_{AD} \cdot M}{\Sigma K_{i-j}}$$

Factor de Distribución  
 $M_{i-j} = \frac{K_{i-j} \cdot M}{\Sigma K}$

$$D_{AB} + D_{AC} + D_{AD} = 1$$

Ejemplo:

Encontrar el momento que absorbe cada elemento

$E = \text{constante}$

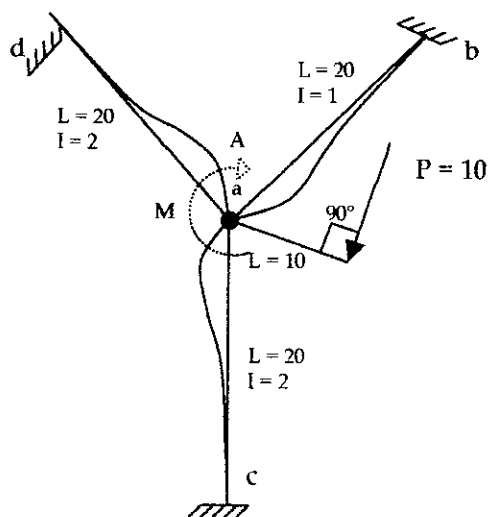


Fig. 7.10

Cálculo de Rigidez:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

$$K_{AB} = \frac{4E(1)}{20} = \frac{E}{5}$$

$$K_{AC} = \frac{4E(2)}{20} = \frac{2E}{5}$$

$$K_{AD} = \frac{4E(2)}{20} = \frac{2E}{5}$$

Rigidez Relativa:

$$\text{Si } K_{A-B} = E = 1$$

entonces,

$$K_{AB} = \frac{2E}{5} = 2 \quad \text{y} \quad K_{AD} = \frac{2E}{5} = 2$$

Factores de Distribución:

$$D = \frac{K_{ij}}{\Sigma K}$$

$$D_{AB} = \frac{1}{(1+2+2)} = \frac{1}{5} = 0.20$$

$$D_{AC} = \frac{2}{(1+2+2)} = \frac{1}{5} = 0.40$$

$$D_{AD} = \frac{2}{(1+2+2)} = \frac{1}{5} = 0.40$$

} suma = 1

Momentos  $M_A$  en el miembro:

$$M_{ij} = D_{ij} M$$

$$M = PL = (10)(10) = -100$$

$$M_{AB} = (0.20)(-100) = +20$$

$$M_{AC} = (0.40)(-100) = +40$$

$$M_{AD} = (0.40)(-100) = +40$$

Transmisión de momentos:

$$M_{ji} = (\text{Factor de Transporte}) * M$$

$$M_{BA} = (0.5)(20) = 10$$

$$M_{CA} = (0.5)(40) = 20$$

$$M_{DA} = (0.5)(40) = 20$$

Cuerpos Libres

Fig. 7.11

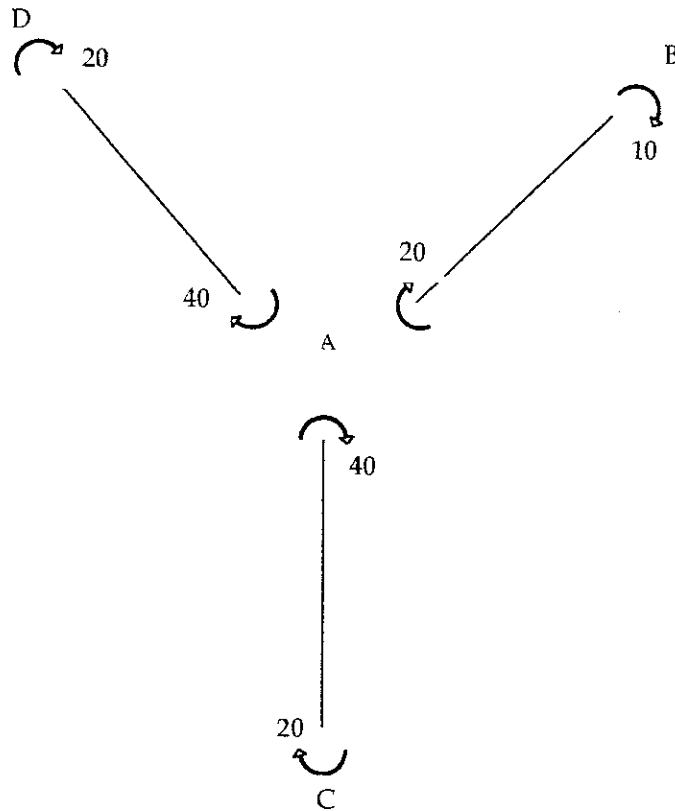
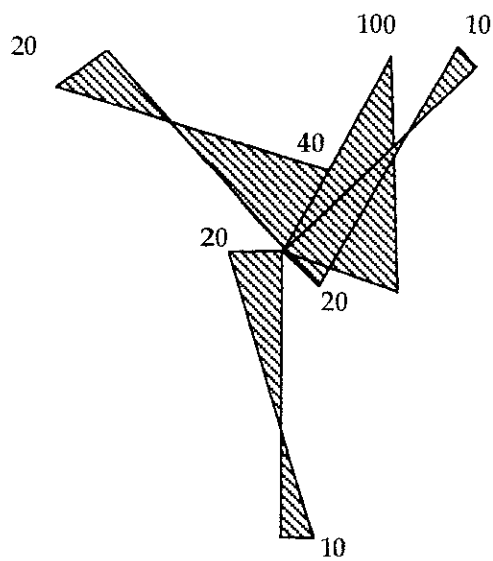


Diagrama de momentos:

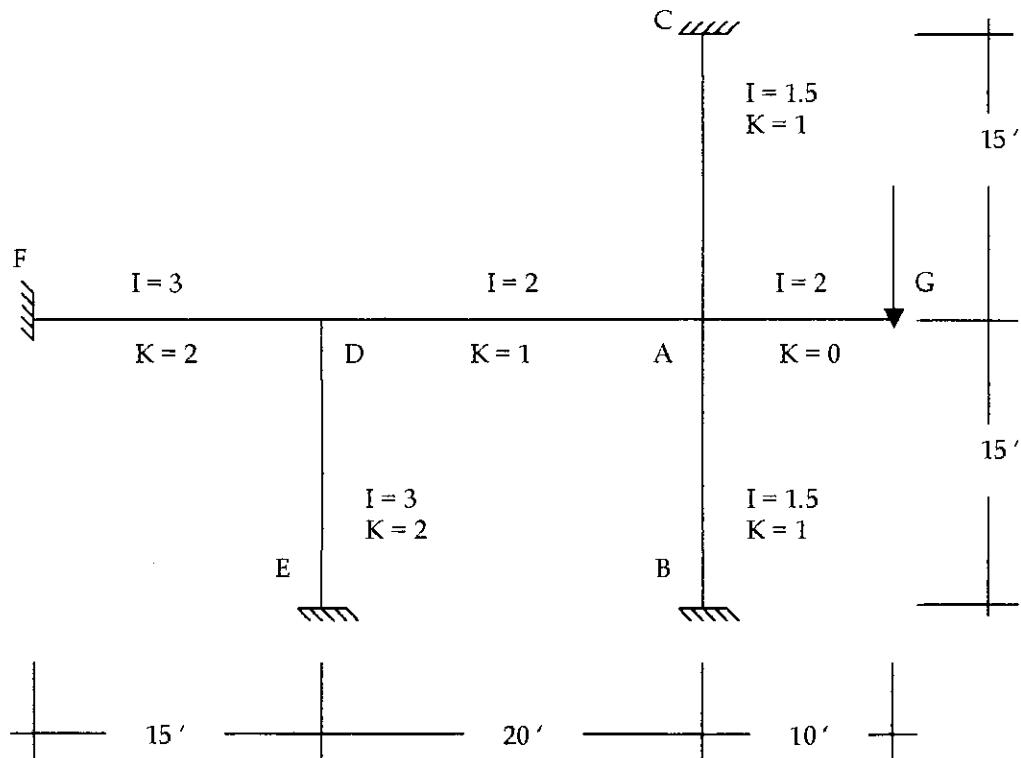
Fig. 7.12



Ejemplo:

Calcular diagrama de momentos del siguiente marco.

Fig. 7.13



Rigidez:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

$$K_{AG} = 0$$

$$K_{AC} = \frac{4E(1.5)}{15} = 0.40 E$$

$$K_{AD} = \frac{4E(2)}{20} = 0.40 E$$

$$K_{AB} = \frac{4E(1.5)}{15} = 0.40 E$$

$$K_{DF} = \frac{4E(3)}{15} = 0.80 E$$

$$K_{DE} = \frac{4E(3)}{15} = 0.80 E$$

Si hacemos  $K = 0.40E = 1$  (rigidez relativa)  
entonces,

$$K_{AG} = 0$$

$$K_{AC} = 1$$

$$K_{AD} = 1$$

$$K_{AB} = 1$$

$$K_{DF} = 2$$

$$K_{DE} = 2$$

Factor de Distribución:

En nudo A

$$D_{AG} = 0$$

$$D_{AB} = \frac{1}{(1+1+1+0)} = \frac{1}{3}$$

$$D_{AC} = \frac{1}{(1+1+1+0)} = \frac{1}{3}$$

$$D_{AD} = \frac{1}{(1+1+1+0)} = \frac{1}{3}$$

suma = 1

En nudo D

$$D_{DA} = \frac{1}{(2+2+1)} = \frac{1}{5}$$

$$D_{DE} = \frac{2}{(2+2+1)} = \frac{2}{5}$$

$$D_{DF} = \frac{2}{(2+2+1)} = \frac{2}{5}$$

suma = 1

$$\text{Coeficiente de transmisión} = C = \frac{1}{2}$$

Tabla de distribución de momentos

Tab. 7.1

FD	DF	DE	DA	AD	AB	AC	AG
0	0.4	0.4	0.2	0.33	0.33	0.33	0
0	0	0	0	0	0	0	-100
0	0	0	0	34	33	33	0
0	0	0	17	0	0	0	
0	-7	-7	-3	0	0	0	
-4	0	0	0	-2	0	0	
0	0	0	0	0.66	0.66	0.66	
-4	-7	-7	14	32.66	33.66	33.66	-100

CA
0
0
0
17
0
0
17

ED
0
0
0
-4
0
0
0
-4

BA
0
0
0
17
0
0
0
17

Cuerpos Libres:

Fig. 7.14

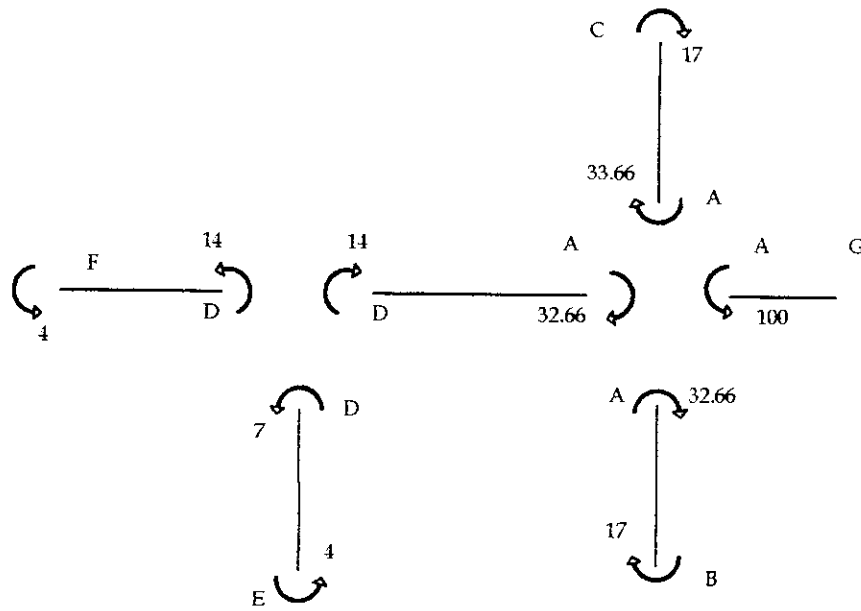
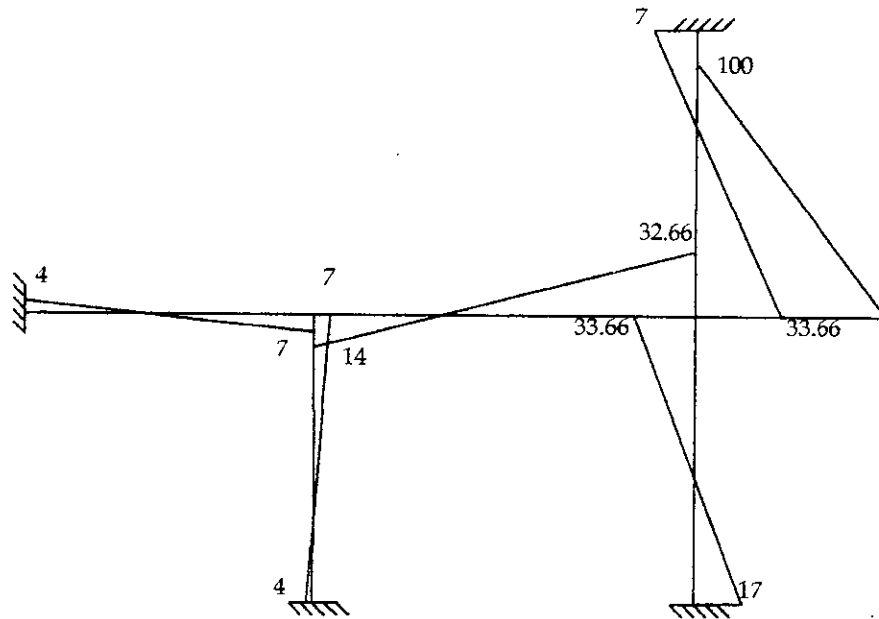


Diagrama de momentos:

Fig. 7.15



Elástica:

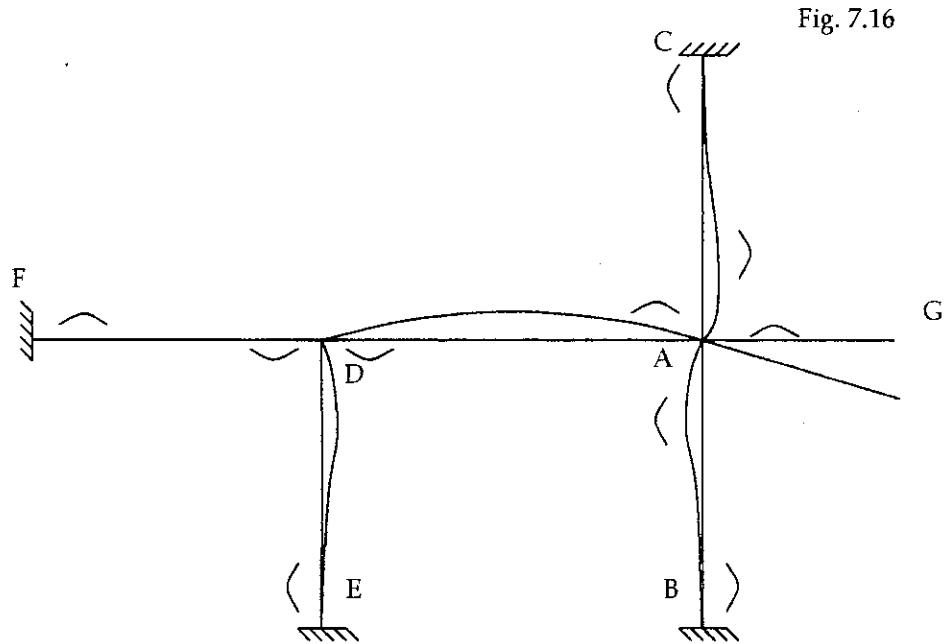
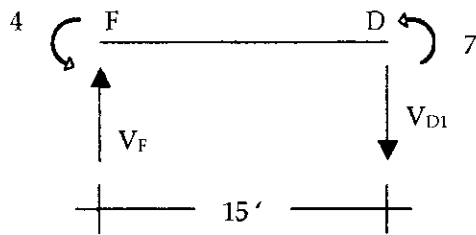


Fig. 7.16

Corte:

Miembro F-D

Fig. 7.17



$\Sigma M_F = 0$

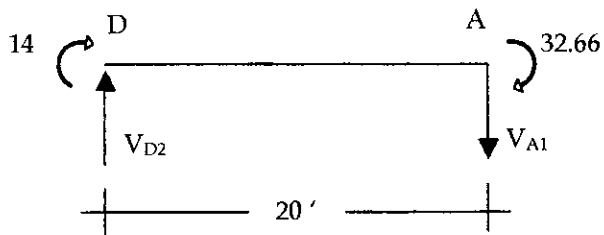
$V_{D1}(15) = 7 + 4$

$V_{D1} = 0.74 \text{ kips } \downarrow$

$V_F = 0.73 \text{ kips } \uparrow$

Miembro D-A

Fig. 7.18



$\Sigma M_D = 0$

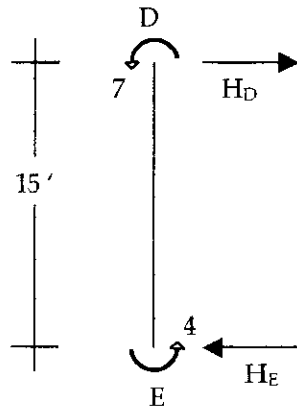
$14 + 32.66 = V_{A1}(20)$

$V_{A1} = 2.33 \text{ kips } \uparrow$

$V_{D2} = 2.33 \text{ kips } \downarrow$

Miembro D-E

Fig. 7.19



$$\underline{\Sigma M_D = 0}$$

$$H_E(15) = 7 + 4$$

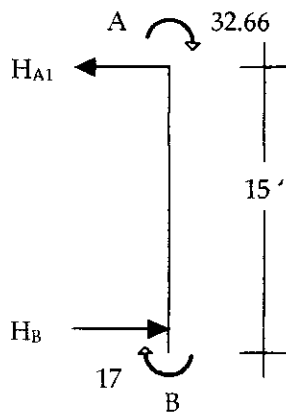
$$H_E = 0.73 \text{ kips } \leftarrow$$

$$H_D = 0.73 \text{ kips } \rightarrow$$

$$V_{D2} = 2.33 \text{ kips } \downarrow$$

Miembro A-B

Fig. 7.20



$$\underline{\Sigma M_A = 0}$$

$$H_B(15)33.66 + 17$$

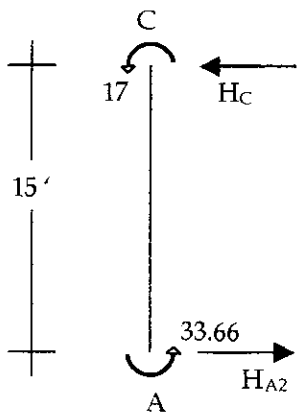
$$H_B = 3.38 \text{ kips } \rightarrow$$

$$H_{A1} = 3.38 \text{ kips } \leftarrow$$

$$V_{D2} = 2.33 \text{ kips } \downarrow$$

Miembro A-C

Fig. 7.21



$$\underline{\Sigma M_C = 0}$$

$$H_{A2}(15) = 17 + 33.66$$

$$H_{A2} = 3.38 \text{ kips } \rightarrow$$

$$H_C = 3.38 \text{ kips } \leftarrow$$

$$V_{D2} = 2.33 \text{ kips } \downarrow$$

Miembro A-G

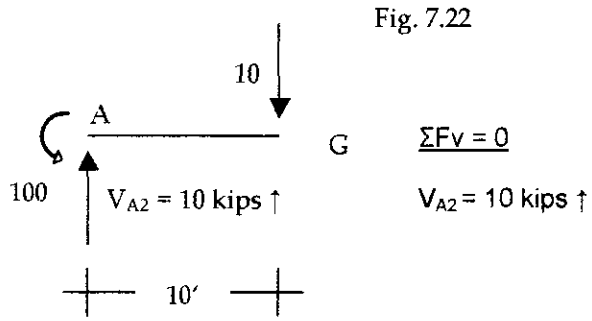
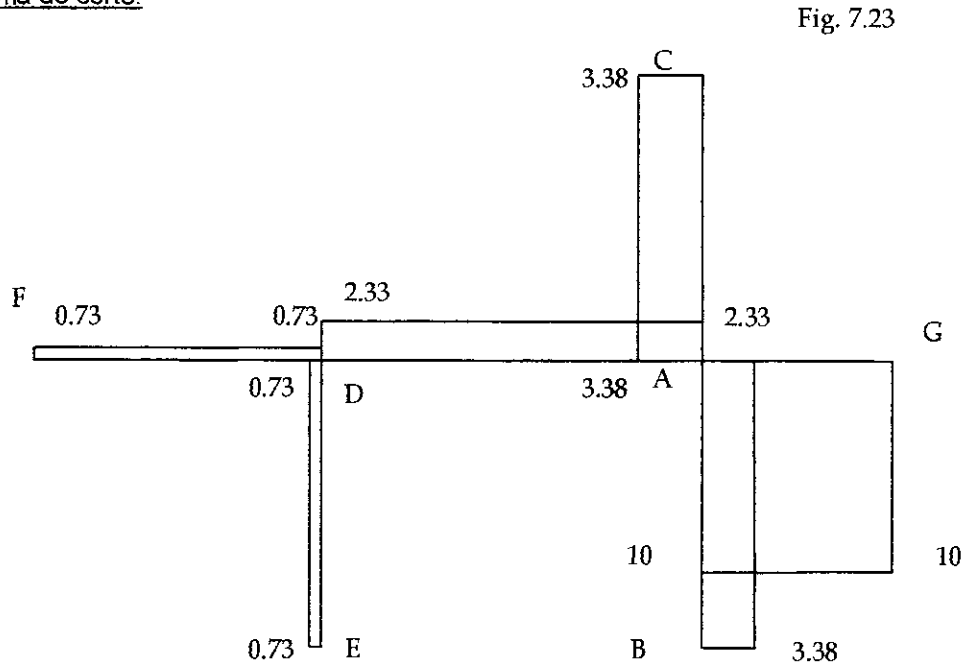


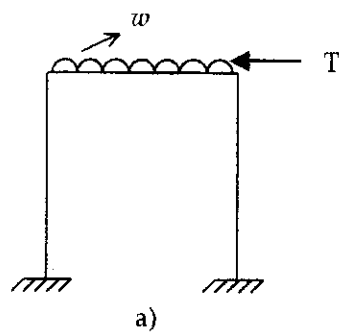
Diagrama de corte:



Marcos con libertad de desplazamiento

Casos que se pueden presentar

Por antisimetría de cargas



Antisimetría geométrica

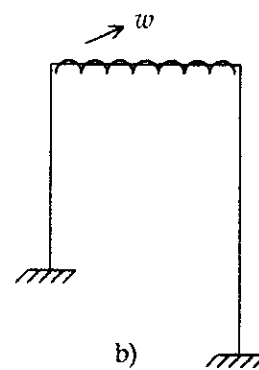
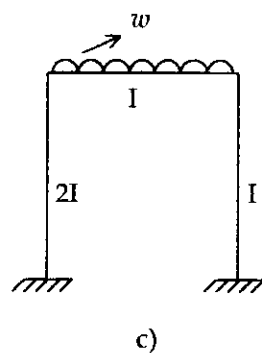
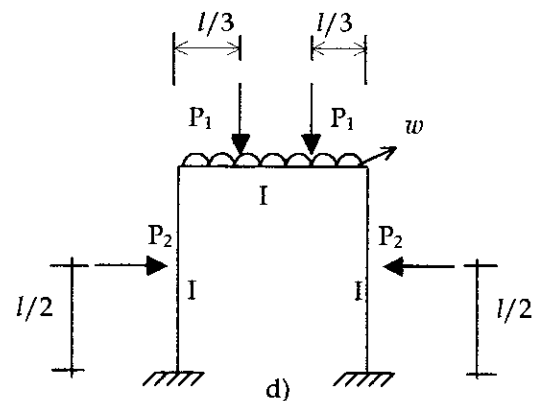


Fig. 7.24

Antisimetría de rigidez de miembros



Marco sin ladeo (simetría total)



Deducción de  $\Delta$  (desplazamiento) en función de momentos fijos para una viga doblemente empotrada.

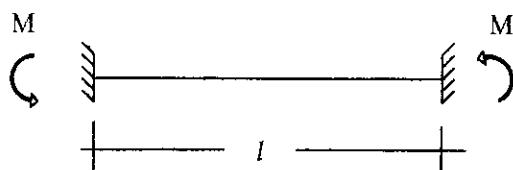
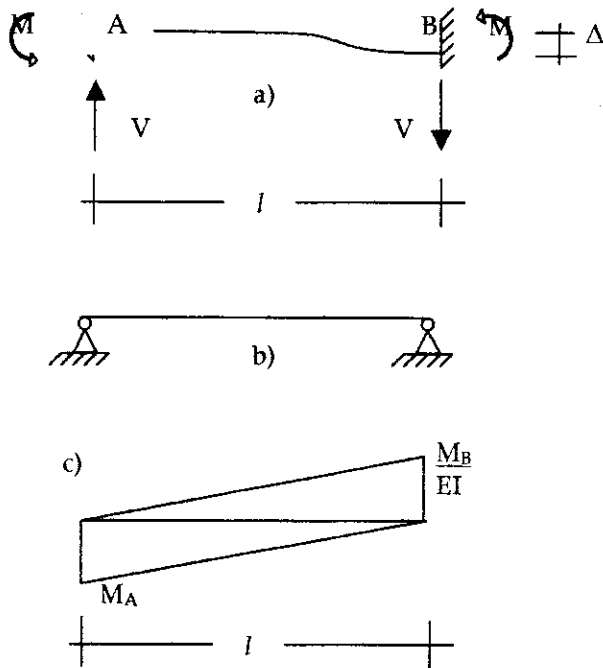


Fig. 7.25

Fig. 7.26



$$EI\Delta = \frac{M_A l}{2} = \frac{l}{3} \left( \frac{M_A l}{2} - \frac{2l}{3} \right) = \frac{M_A l^2}{6} - \frac{M_A l^2}{3}$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \left( \frac{M_A l^2}{6} - \frac{2M_A l^2}{6} \right) = \frac{M_A l^2}{6EI}$$

entonces,

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Fig. 7.27



$$\Sigma M_A = 0$$

$$VL = 2M = 2 \left( \frac{6EI\Delta}{L^2} \right)$$

$$V = \frac{12EI\Delta}{L^2}$$

$L^3$ 

Procedimiento general de solución de marcos con ladeo

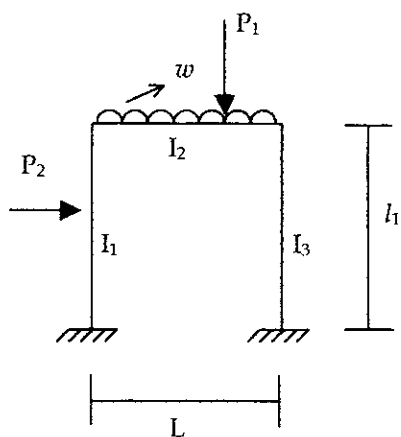


Fig. 7.28

- 1) Suponer marco sin ladeo (con las cargas)
- 2) Estudiar ladeo
- 3) Combinar 1 y 2

- 1) Suposición de un ladeo = 0 (le agregamos un tope horizontal)

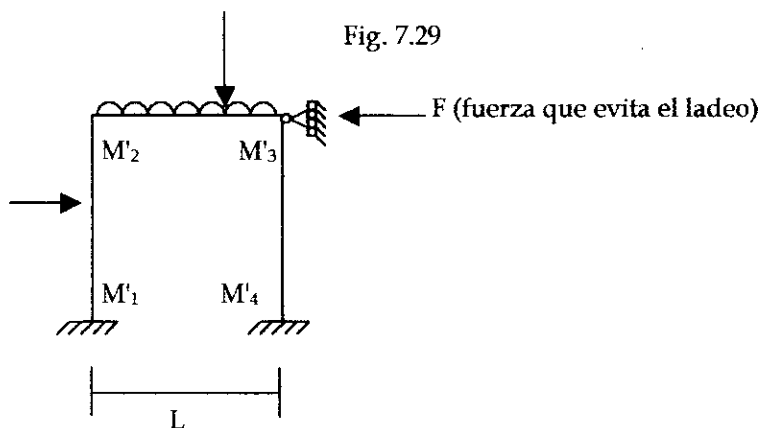


Fig. 7.29

- 2) Estudio del ladeo (solo).

Aplicación al marco de momentos asumidos para provocar el ladeo.

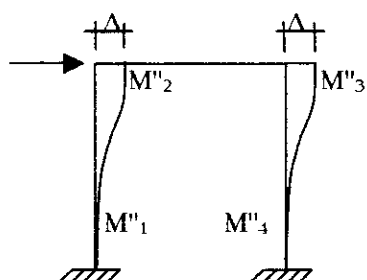


Fig. 7.30

$$M F = \frac{6EI\Delta}{l^2} \text{ (valores asumidos)}$$

Como los momentos de ladeo asumidos, seguramente no coincidirán con los verdaderos momentos que producen el ladeo,  $f$  será igual a un valor diferente de  $F$ .

Procedimiento (del estudio del ladeo)

- Suponemos un ladeo  $\Delta$
- Con dicho ladeo encontramos una fuerza  $f$  capaz de producir dicho ladeo.
- Como  $f$  no es igual a  $F$  obtenemos un factor de corrección  $F/f$ .
- Todos los momentos,  $M_1''$ ,  $M_2''$  etc., se multiplican por dicho factor de corrección.

3) Combinación de pasos 1 y 2

Los momentos finales serán:

Fig. 7.31

$$M_2 = M'_2 + (M''_2 * FC) \quad M_3 = M'_3 + (M''_3 * FC)$$

$$M_1 = M'_1 + (M''_1 * FC) \quad M_4 = M'_4 + (M''_4 * FC)$$

Ejemplo propuesto:

Calcular el diagrama de momentos, elástica y diagrama de corte del siguiente marco.

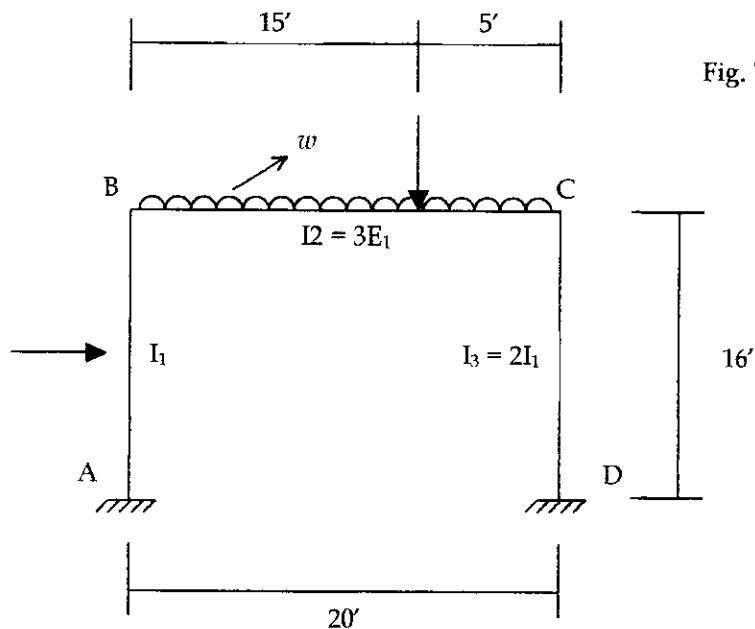


Fig. 7.32

## B. Método de Kani

El método de Kani es un método exacto iterativo, similar al método de Cross, con la ventaja de que pueden hacerse varios niveles y considerar el lado o desplazamiento lateral en un solo proceso, aunque el número de ciclos necesarios sea mayor que en Cross.

### Notación:

$M_{ik}$ : Momento flector en el extremo  $i$  de la barra  $i-k$ .

$M_i^k$ : Momento de empotramiento perfecto en el extremo  $i$  producido por cargas exteriores.

$M_i$ : Momento de sujeción.

$M'_{ik}$ : Momento en extremo  $i$  debido al giro del mismo.

$M''_{ki}$ : Momento en extremo  $i$  debido al giro del extremo  $k$ .

$M'''_{ik}$ : Momento debido al desplazamiento del extremo  $i$  en barra  $i-k$ .

$M_r$ : Momento del piso =  $\frac{Q_r h_r}{3}$

$Q_r$ : Fuerza cortante en piso  $r$ .

$h_r$ : Altura de la columna del piso  $r$ .

$h$ : Altura de una columna.

$K = \frac{I}{l}$  Coeficiente de rigidez ( $K = -1/2$  en barras sección etc.)

$M_{ik}$ : Coeficiente de reparto o factor de giro.

$v$ : Factor de corrimiento o coeficiente de desplazamiento

( $v = -3/2$  en barras de sección constante)

$C = hr/h$  : Factor de reducción en columnas.

$H$  = Fuerza de fijación al deslizamiento.

### Convención de signos:



Fig. 7.33

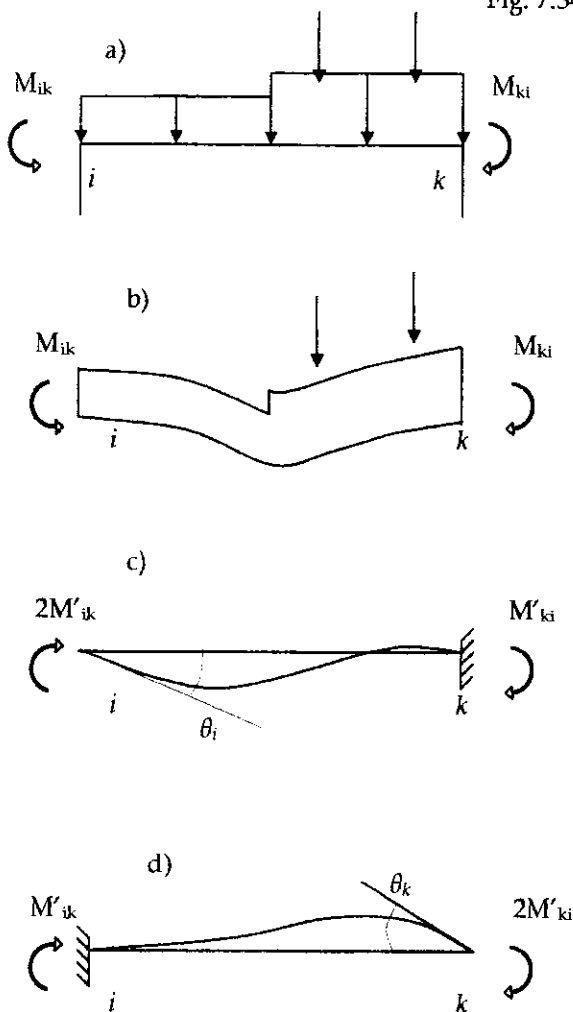
### Definición:

El momento de sujeción  $M_i$ : Es el momento exterior que impide el giro del nudo.

$$M_i = \sum_{\theta} \overline{M}_{iK}$$

## 1. Estructuras sin lado:

Fig. 7.34

Barra  $i-k$  con cargas externas

Utilización del principio de superposición

1) Consideramos la barra  $i-k$  sin giro en los extremos (empotrada)

2) Se considera el giro  $\theta_i$  en el extremo  $i$ , mientras  $k$  no gira ( $k$  empotrada)

3) Consideramos el giro  $\theta_k$  en el extremo  $k$ , mientras el extremo  $i$  no gira ( $i$  empotrada)

Por lo tanto:

$$M_{ik} = M_{jk} + 2 M'_{ik} + M'_{ki} \quad \text{Ec. 1}$$

Se hace  $\sum_{(i)} M_{jk} = 0$  ( De todas las barras que concurren al nudo  $i$  )

Sustitución en Ec. 1:

$$\sum_{(i)} M_{jk} + 2 \sum_{(i)} M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} = 0$$

Como  $\sum_{(i)} M_{jk} = M_i$

$$M_i + 2 \sum_{(i)} M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} = 0$$

entonces,

$$\bar{M}_i + \sum M'_{ki} = -2 \sum M'_{jk}$$

$$\sum_{(i)} M_{jk} = -1/2 ( M_i + \sum_{(i)} M'_{ki} )$$

Con lo cual obtenemos que la suma de los momentos, debidos al giro del propio extremo es igual al momento total de sujeción  $M_i$  más la suma de los momentos debidos al giro del extremo, opuesto de la barra multiplicado todo por  $-1/2$ .

Para simplificar se afectarán los factores de distribución por  $-1/2$  para introducir sistemáticamente esta variación en los momentos.

**A continuación se describe el procedimiento a seguir:**

El procedimiento de cálculo se hará sobre un dibujo de la estructura, para poder visualizar en mejor forma (ver ejemplo más adelante).

- 1- Calcular momentos fijos y anotarlos encima de los extremos de la barra.
- 2- Calcular momentos de sujeción y colocarlos en el centro del cuadro de el nudo.
- 3- Calcular los factores de giro (coeficiente de distribución).

$$M_{jk} = - \frac{1}{2} \frac{K_{jk}}{\sum_{(i)} K_{jk}} \quad \text{Comprobar } \sum_{(i)} M_{jk} = - \frac{1}{2}$$

y anotarlos frente al extremo de la barra correspondiente dentro del cuadro exterior.

4. Las sucesivas influencias del giro de los nudos a los momentos  $M'_{jk}$  se calculan en forma repetitiva en la siguiente forma:

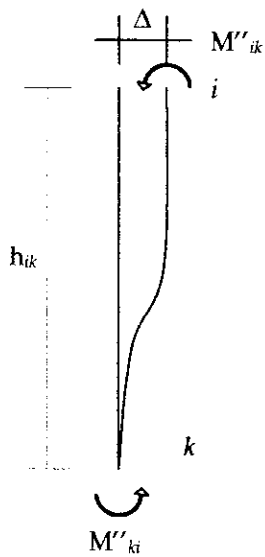
$$M'_{jk} = M_{jk} ( M_i + \sum_{(i)} M'_{ki} ) \text{ y sigue de un nudo a otro.}$$

Los momentos finales en los extremos de las barras en el nudo se obtienen de la fórmula

$$M_{jk} = M_{jk} + 2M'_{jk} + M_{ki}$$

## 2. Estructuras con lado

Fig. 7.35



Considerar que los extremos i-k se desplazan entre ellos en un valor  $\Delta$ , sin que dichos extremos giren.

Sea  $M''_{ik}$  = La influencia al momento  $M_{ik}$  producida por el desplazamiento  $\Delta$  del extremo  $i$  de la barra.

entonces,

$$M_{ik} = M_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} \quad \text{Ec. 2}$$

De nuevo haciendo  $\sum M_{ik} = 0$

$$-2 \sum_{(i)} M'_{ik} = M_i + \sum (M'_{ik} + M''_{ik})$$

Para barras de sección constante  $M''_{ik} = M''_{ki}$

$$\sum_{(i)} M_{ik} = -1/2 (M_i + \sum (M'_{ki} + M''_{ik}))$$

Marcos con ladeo y carga vertical al cortar horizontalmente en un nivel de un marco cualquiera.

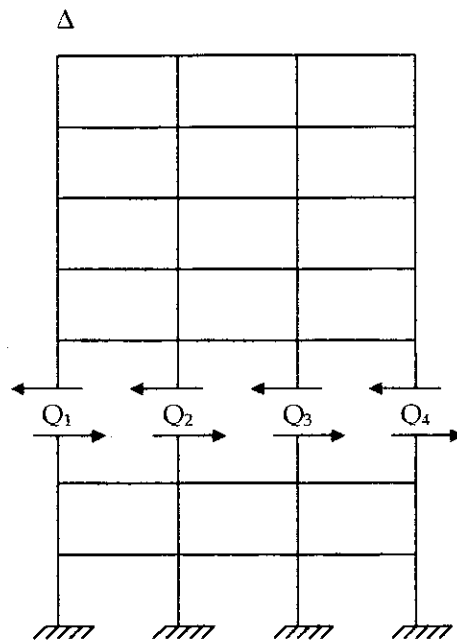


Fig. 7.36

para que exista equilibrio debe cumplirse:

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = 0 \quad r = \text{nivel cualquiera}$$

$$\text{como } Q_{ik} = -\frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}$$

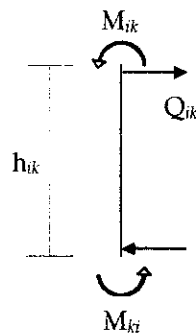


Fig. 7.37

Ejemplo:

Analizar el siguiente marco. E es constante.

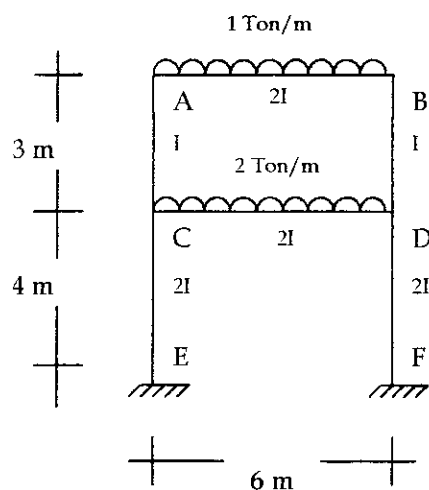


Fig. 7.38

Cálculo de rigideces

$$K_{AB} = \frac{2}{6} = 0.33$$

$$K_{CD} = \frac{2}{6} = 0.33$$

$$K_{AC} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$K_{BD} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$K_{CE} = \frac{2}{4} = 0.50$$

$$K_{DF} = \frac{2}{4} = 0.50$$

Cálculo de factores de giro

$$D_E = 0$$

$$D_F = 0$$

$$D_{AB} = \frac{-1}{2} \frac{(0.33)}{(0.33 + 0.33)} = -0.25 = D_{BA}$$

$$D_{AC} = \frac{-1}{2} \frac{0.33}{0.66} = -0.25 = D_{BD}$$

suma = -0.50

$$D_{CA} = \frac{-1}{2} \frac{(0.33)}{(0.33 + 0.33 + 0.50)} = -0.14 = D_{DB}$$

$$D_{CD} = \frac{-1}{2} \frac{(0.33)}{(1.16)} = -0.14 = D_{DC}$$

suma = -0.5

$$D_{CE} = \frac{-1}{2} \frac{(0.50)}{(1.16)} = -0.22 = D_{DF}$$

Cálculo de momentos de sujeción:

$$M_{AB} = -\frac{1(6)^2}{12} = -3 \text{ Ton-m} = -MF_{BA}$$

$$M_{CD} = -\frac{2(6)^2}{12} = -6 \text{ Ton-m} = -MF_{DC}$$

$$M_A = -3, \quad M_B = 3$$

$$M_C = -6, \quad M_D = 6$$

Cálculo de influencias de los giros a los momentos:

Tab. 7.2

A	- 3.00		- 0.25	- 3.00	3.00	- 0.25	3.00		B
	- 0.25			0.51	- 0.67	- 0.25			
	0.00			0.69	- 0.70	0.00			
	0.51			0.71	- 0.71	- 0.67			
	0.69			0.71	- 0.71	- 0.70			
	0.71					- 0.71			
	0.71					- 0.71			
	0.86					- 0.86			
	0.87					- 0.87			
	0.90					- 0.88			
0.96					- 0.84				
0.00					0.00				
C	- 0.14			- 6.00	6.00	- 0.14	- 3.00		D
	- 3.00		- 0.14	0.96	- 0.84	- 0.22			
	- 0.22			0.90	- 0.88	0.00			
	0.00			0.87	- 0.87	- 1.32			
	1.50			0.86	- 0.86	- 1.38			
	1.40					- 1.36			
	1.36					- 1.36			
	1.35					- 1.36			
	0.00					0.00			
	0.00					0.00			
E	0.00					0.00		F	

Orden del proceso de cálculo: D-C-A-B-D

Se recomienda iniciar con los momentos de sujeción de mayor valor

Cálculo de momentos finales:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -3.00 + 2(0.71) - 0.71 = -2.29 \text{ Ton-m} \\ M_{AC} &= 0 + 2(0.71) + 0.86 = 2.28 \text{ Ton-m} \end{aligned} \right\} \text{ suma} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= 3.00 + 2(-0.71) + 0.71 = 2.29 \text{ Ton-m} \\ M_{BD} &= 0 + 2(-0.71) - 0.86 = -2.28 \text{ Ton-m} \end{aligned} \right\} \text{ suma} = 0$$

$$M_{CA} = 0 + 2(0.86) + 0.71 = 2.43 \text{ Ton-m}$$

$$M_{CD} = -6.00 + 2(0.86) - 0.86 = -5.14 \text{ Ton-m}$$

$$M_{CE} = 0 + 2(1.35) + 0.00 = 2.70 \text{ Ton-m}$$

$$M_{DB} = -2.43 \text{ Ton-m}$$

$$M_{DC} = 5.14 \text{ Ton-m}$$

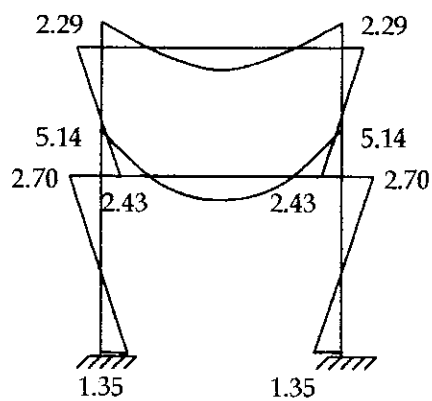
$$M_{DF} = -2.70 \text{ Ton-m}$$

$$M_{EC} = 0 + 2(0) + 1.35 = 1.35 \text{ Ton-m}$$

$$M_{FD} = 0 + 2(0) - 1.36 = -1.36 \text{ Ton-m}$$

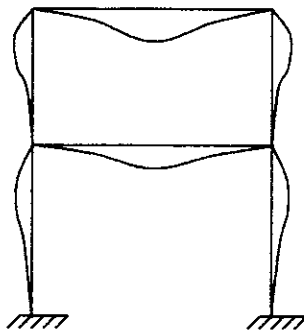
Diagrama de momentos:

Fig. 7.39



Elástica:

Fig. 7.40



$$\sum_{(r)} Q_{ik} = -\frac{1}{h_{ik}} \sum (M_{ik} + M_{ki}) = 0$$

Al sustituir la Ec. 2, Q y al considerar  $M_{ik} + M_{ki} = 0$  (por ser iguales y de signo contrario):

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = -\frac{1}{h_{ik}} \sum (2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} + 2M'_{ki} + M'_{ik} + M''_{ki}) = 0$$

como  $M''_{ki} = M''_{ik}$ :

$$2 \sum_{(r)} M'_{ik} + \sum_{(r)} M'_{ki} + \sum_{(r)} M''_{ik} + 2 \sum_{(r)} M'_{ki} + \sum_{(r)} M'_{ik} + \sum_{(r)} M''_{ik} = 0$$

$$3 \sum_{(r)} M'_{ik} + 3 \sum_{(r)} M'_{ki} + 2 \sum_{(r)} M''_{ik} = 0$$

$$2 \sum_{(r)} M''_{ik} = -3 \sum_{(r)} M'_{ik} - 3 \sum_{(r)} M'_{ki}$$

$$\sum_{(r)} M''_{ik} = \frac{-3}{2} \sum (M'_{ik} + M'_{ki})$$

Por lo tanto, la suma de las influencias de los desplazamientos de las columnas de un piso r sobre los momentos, es igual a la suma de las influencias de los giros de los extremos de las columnas de ese piso, multiplicado por  $-3/2$ .

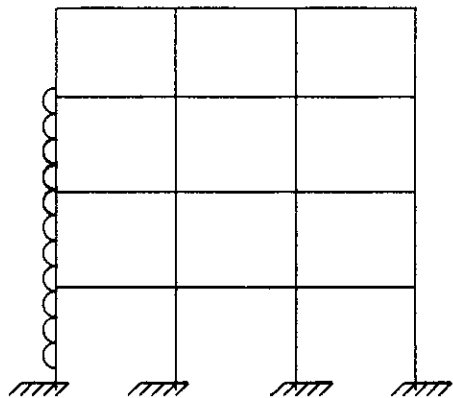
Si suponemos que las vigas no se deforman axialmente, entonces todas las columnas se desplazan el mismo valor de  $\Delta$ . Entonces, la suma de las influencias debido a estos desplazamientos se reparten a las columnas en proporción a su rigidez, y se afecta por el valor  $-3/2$ .

Para facilidad del cálculo, adoptaremos analógicamente a los factores de repartición, unos "factores de corrimiento" (o coeficientes de desplazamiento) al repartir el valor  $-3/2$  proporcionalmente a las rigideces  $k$  de las columnas del piso  $r$ .

Para el cálculo de las influencias del desplazamiento, se suman las influencias de los giros en todos los extremos de las columnas del piso y luego se multiplican por los correspondientes factores de corrimiento de cada columna.

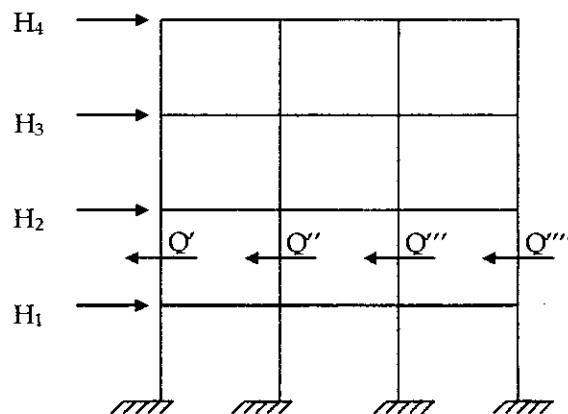
Para cargas horizontales:

Fig. 7.41



Fuerzas de Fijación (exteriores):

Fig. 7.42



$H$  es positivo si actúa de izquierda a derecha.

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = \sum_{(i=1)}^{(r)} H_i = Q_r \quad Q: \text{ Fuerza cortante de piso}$$

Al tomar  $h$  igual para todas las columnas del piso:

$$Q_r = -1 \frac{\sum (M_{ik} + M_{ki})}{h r}$$

Al sustituir en Ec. 2:

$$Q_r * h_r = -\sum_{(i)} \left[ 3 (M'_{ik} + M'_{ki}) + 2 M''_{ik} \right]$$

Al despejar  $M''_{ik}$ :

$$\sum_{(i)} M''_{ik} = \frac{-3}{2} \left[ \frac{Q_r * h_r}{3} + \sum_{(i)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right]$$

Sea  $\frac{Q_r * h_r}{3} = \text{Momento de piso} = M_r$  ( es + cuando Q es + )

entonces,

$$\sum M''_{ik} = \frac{-3}{2} \left( M_r + \sum_{(i)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right)$$

Al resumir el procedimiento a seguir para marcos con carga horizontal, es:

1. Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de las barras y de los momentos de sujeción.
2. Cálculo de las influencias de los giros de los nudos y del desplazamiento de los mismos. Se debe empezar con los momentos de sujeción, igual que para el caso de carga vertical.
3. Cálculo de los esfuerzos cortantes en los pisos y de los momentos de piso  $M_r$ , debidos a las fuerzas de sujeción. Con ellos se calculan las influencias de giro y desplazamiento de los nudos y se suman a las indicadas en el paso 2. ( Esto puede hacerse simultáneamente.)

Designación como  $V_{ik}$  del factor de corrimiento de la barra  $ik$ .

$$M''_{ik} = V_{ik} ( M_r + \sum (M'_{ik} + M'_{ki}) )$$

$$M'_{ik} = \mu_{ik} ( M_l + \sum (M'_{ki} + M''_{ik}) )$$

# VIII. ANÁLISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR MÉTODOS ENERGÉTICOS

## A. Cálculo de desplazamientos por el Método de Trabajo Virtual

### Principio general de la conservación de la energía

Cuando a una estructura rígida en equilibrio se le da un desplazamiento arbitrario, la suma algebraica de todos los términos de trabajo, o de las fuerzas multiplicadas por sus respectivos desplazamientos debe ser cero. (Ya sean externos o internos). En las estructuras deformables existe un término adicional: trabajo interno o energía de deformación.

#### Ejemplo:

Calcular las reacciones de la siguiente viga.

Fig. 8.1

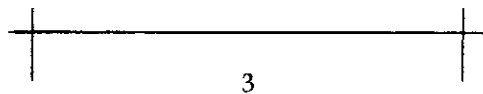
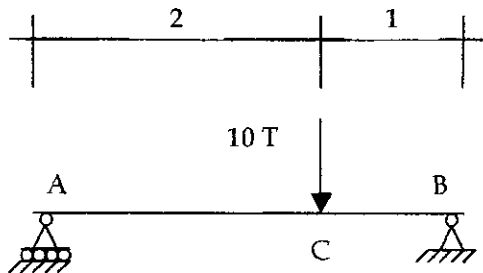
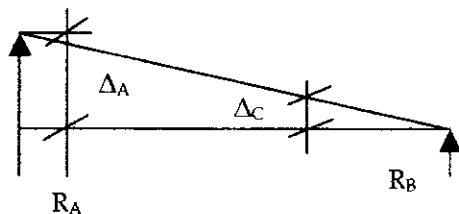


Fig. 8.2



$$\Delta_C = \frac{\Delta_A}{3}$$

Aplicación del principio de conservación de la energía

$$\text{Trabajo efectuado } W = R_A \Delta_A - 10(\Delta_A/3) = 0$$

$$R_A = 10/3 = 3.33 \text{ T}$$

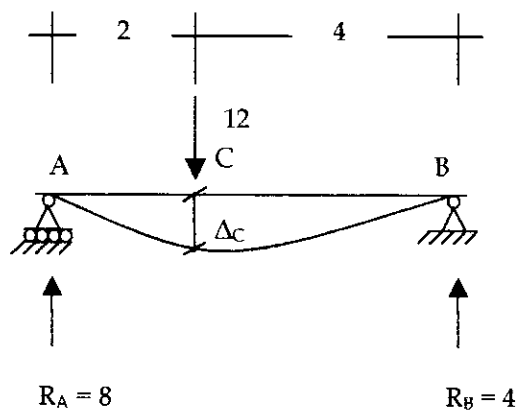
$$R_B = 10 - R_A = 6.67 \text{ T}$$

### Ejemplo:

Aplicación directa de la conservación de la energía en la determinación de los desplazamientos.

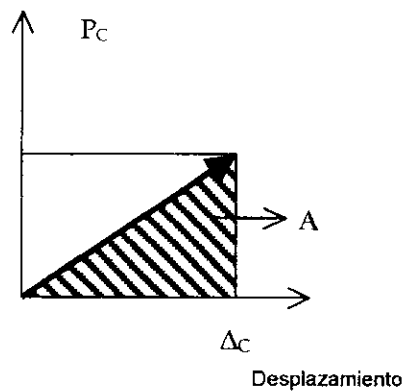
Trabajo Real.

Fig. 8.3



Carga

Fig. 8.4



$$W_e = A$$

$$W_e = A = (1/2)P_C \Delta_C = (1/2)(12)(\Delta_C)$$

$$W_C = 6\Delta_C$$

Deducción de una expresión para el trabajo interno:

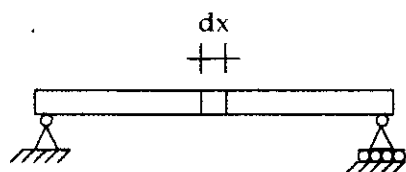


Fig. 8.5

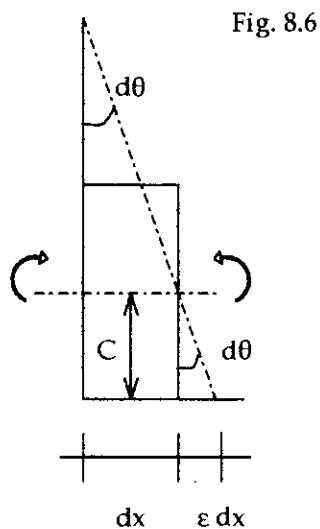


Fig. 8.6

$$\tan d\theta = \frac{\epsilon dx}{C}$$

como  $d\theta$  es un ángulo pequeño

$$\tan d\theta = d\theta$$

entonces,

$$d\theta = \frac{\epsilon dx}{C}$$

Se debe suponer que se está en el rango elástico  $\epsilon = \sigma/E$

entonces,

$$d\theta = \frac{\sigma dx}{EC} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{MC}{I} \quad (\text{esfuerzo interno por flexión})$$

$$d\theta = \frac{MC dx}{I EC} = \frac{M dx}{EI}$$

entonces el trabajo interno en  $dx$  es:

$$dWi = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{1}{2} M \left( \frac{M dx}{EI} \right)$$

$$dWi = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI} \right) dx$$

el trabajo interno para toda la viga viene dado por:

$$Wi = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx \quad (\text{si } EI \text{ es constante})$$

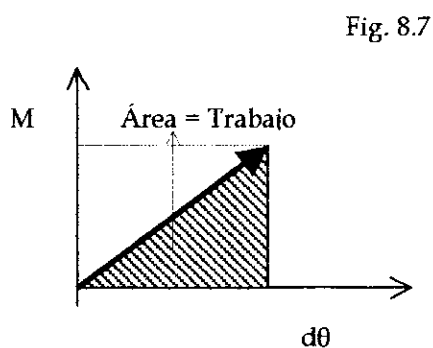


Fig. 8.7

Ejemplo:

Calcular el desplazamiento bajo la carga aplicada en la siguiente viga.

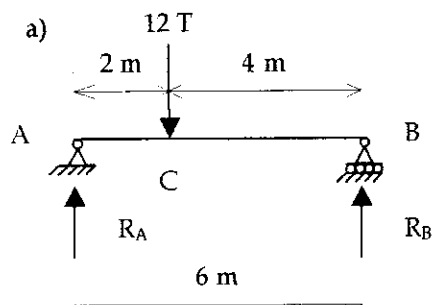


Fig. 8.8

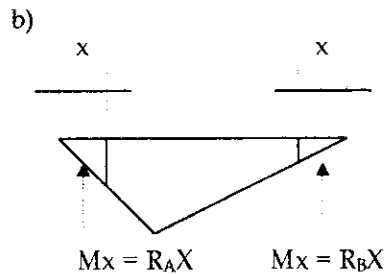
$$\Sigma M_A = 0:$$

$$R_B = \frac{(12)(2)}{6} = 4 \text{ T } \uparrow$$

$$\Sigma F_V = 0:$$

$$12 - 4 - R_A = 0$$

$$R_A = 8 \text{ T } \uparrow$$



Tab. 8.1

Tramo	x = 0 en	M (Ton-m)
AC	A	8x
BC	B	4x

We = Wi:

$$\frac{12\Delta}{2} = \int_0^2 \frac{1(8x)^2}{2EI} dx + \int_0^4 \frac{1(4x)^2}{2EI} dx$$

$$6\Delta = \frac{32}{EI} \int_0^2 x^2 dx + \frac{8}{EI} \int_0^4 x^2 dx$$

$$6\Delta = \frac{32}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{8}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$6\Delta = \frac{32}{EI} \left( \frac{8}{3} \right) + \frac{8}{EI} \left( \frac{64}{3} \right)$$

$$6\Delta = \frac{85.33 + 170.67}{EI}$$

$$\Delta = \frac{42.67}{EI}$$

**Desventajas:**

Se puede utilizar solamente para:

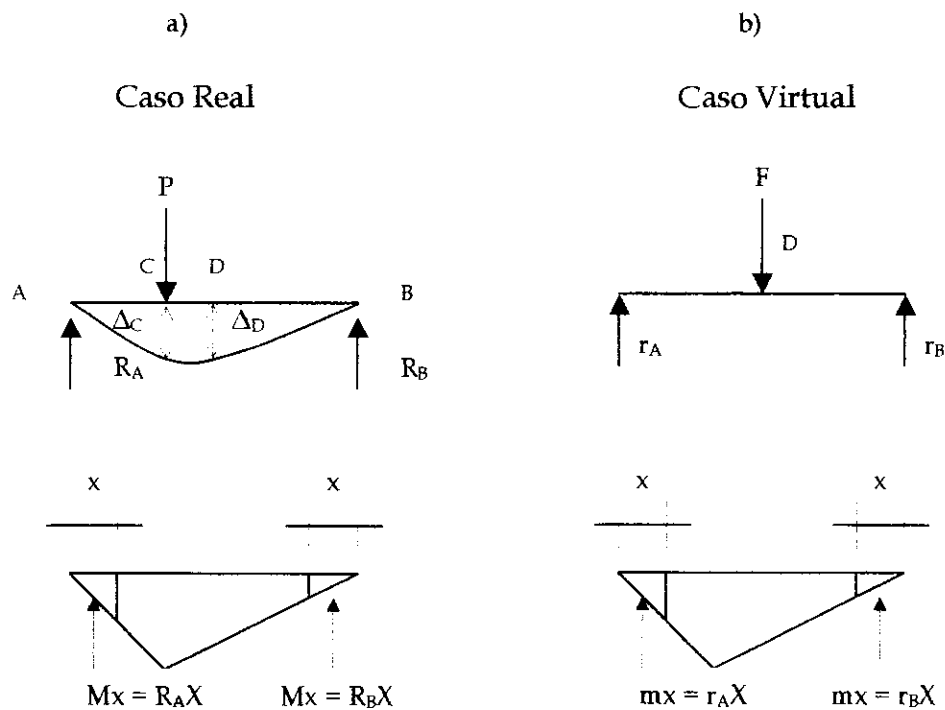
- Miembros inicialmente rectos.
- El cálculo del desplazamiento bajo la carga.
- Una carga que actúa en la estructura.
- Estructuras estáticamente determinadas.

Por ejemplo, si quisiéramos hallar el desplazamiento al centro, o si colocamos más cargas se tendría  $W_e = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2$ ; 2 desplazamientos  $\Delta$  desconocidos (incógnitas).

**Trabajo Virtual:**

Al tomar la viga del caso anterior.

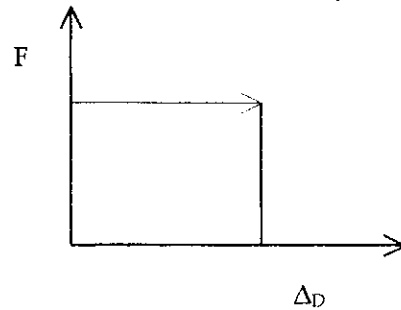
Fig. 8.9



Si se coloca primero sólo la carga  $F$  (virtual) y luego la carga  $P$  (real) gradualmente de 0 a  $P$ , entonces:

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta_C + F \Delta_D \quad \text{Ec. 1}$$

Fig. 8.10



El (1/2) no afecta a  $F \Delta_D$  debido a que ya estaba aplicada al introducir gradualmente la  $P$  y,

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{m}{EI} d\theta \quad \text{como } d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad \text{Ec. 2}$$

$W_e = W_i$ :

$$\frac{1}{2} P \Delta_C + F \Delta_D = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad \text{Ec. 1} = \text{Ec. 2}$$

$$F \Delta_D = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

$$\Delta_D = \frac{1}{F} \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

Si  $F = 1$  entonces,

$$\Delta_D = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

### Principio del Trabajo:

La magnitud del trabajo realizado por fuerzas externas  $P$  al actuar a través de sus respectivos desplazamientos  $D$ , debe ser igual a la magnitud del trabajo realizado por las fuerzas internas  $p$ , al actuar a través de sus desplazamientos  $d$ , o sea:

$$\Sigma PD = \Sigma pd$$

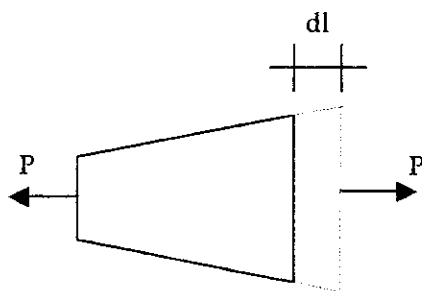
$$W_e = W_i$$

### Expresiones para el trabajo interno:

Carga Axial:

Desplazamiento Real

Fig. 8.11



$$dl = \epsilon dx = \frac{\sigma dx}{E}$$

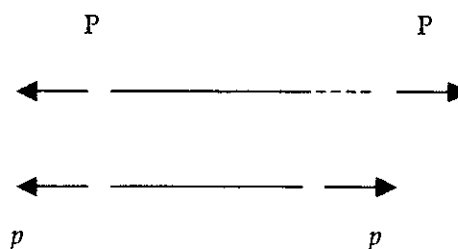
$$dl = \frac{P dx}{EA}$$

Fuerzas Virtuales

Fig. 8.12



Fig. 8.13



$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

Para un miembro:

$$W_i = p\Delta$$

Para toda la estructura:

$$W_i = \frac{\Sigma pPL}{AE}$$

Para un elemento diferencial:

$$dW_i = p \, dl$$

$$dW_i = \frac{pP}{EA} \, dx$$

El trabajo total, lo se obtiene al integrar:

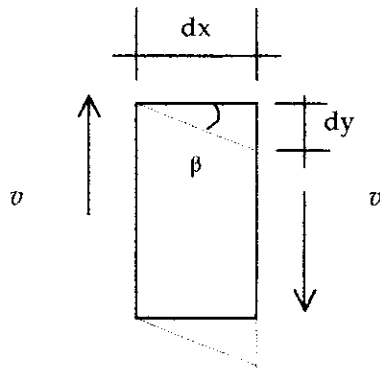
$$W_i = \int \frac{pP}{EA} \, dx$$

$$W_i = \Sigma \frac{pPl}{EA}$$

Corte:

Desplazamiento Real

Fig. 8.14



$$dy = \beta dx = \frac{T dx}{G} = \frac{\lambda V dx}{GA}$$

donde,

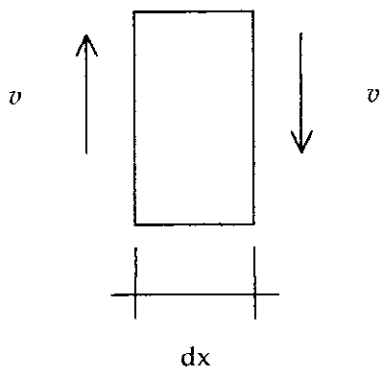
Factores de forma	{	$\lambda = 1.2$ para secciones rectangulares $\lambda = 10/9$ para secciones circulares $\lambda = 1$ para vigas tipo I de patín ancho
-------------------	---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

G: Módulo de elasticidad en cortante

T: Esfuerzo de cortante

Fuerzas virtuales:

Fig. 8.15



$$dW_i = v dy$$

$$dW_i = \frac{v \lambda V dx}{GA}$$

$$W_i = \int_0^L \frac{v \lambda dx}{GA}$$

Torsión:

Desplazamiento real:

Fig. 8.16

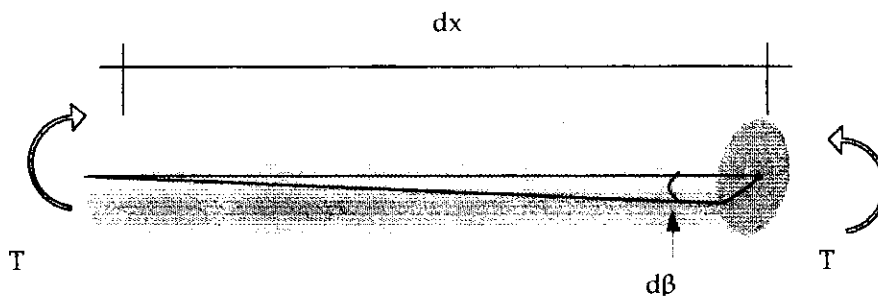
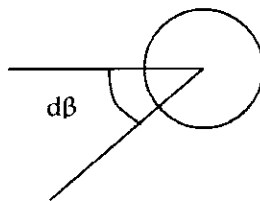


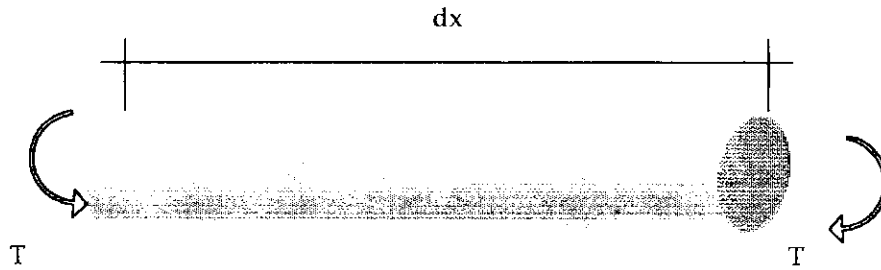
Fig. 8.17



$$d\beta = \frac{T dx}{GJ} \text{ (sección circular)}$$

Fuerzas virtuales:

Fig. 8.18



$$dW_i = t dB$$

$$dW_i = \frac{t T dx}{GJ}$$

$$W_i = \int_0^L \frac{t T dx}{GJ}$$

donde:

J: Momento polar de inercia

Ejemplo:

Determinar la magnitud y dirección del desplazamiento en el extremo A de la siguiente viga:

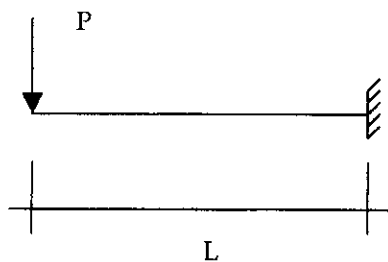


Fig. 8.19

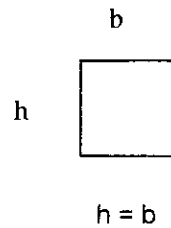


Fig. 8.20

EI: constantes

$$G = 0.4 E$$

Diagrama de corte:

Fig. 8.21

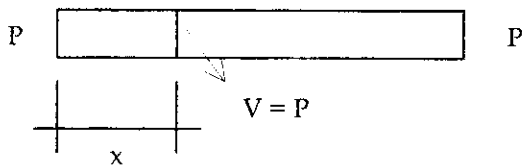


Diagrama de momento:

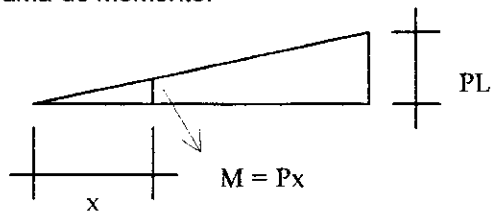


Fig. 8.22

Caso virtual:

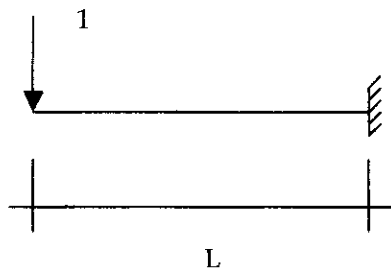


Fig. 8.23

Diagrama de corte:

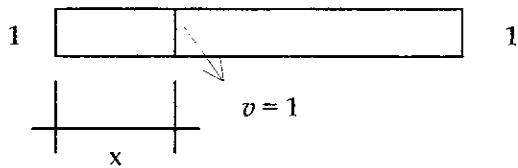


Fig. 8.24

Diagrama de momento:

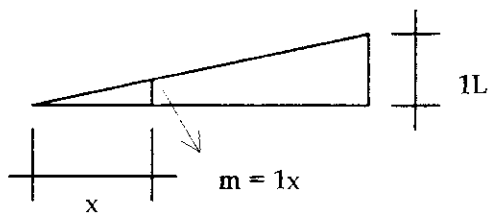


Fig. 8.25

$$W_e = W_i$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \int_0^L \frac{\lambda v V}{GA} dx$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{xPx}{EI} dx + \int_0^L \frac{\lambda P(1)}{GA} dx$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{Px^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{\lambda P}{GA} dx$$

$$\Delta_A = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L + \frac{\lambda P}{GA} (x) \Big|_0^L$$

$$\Delta_A = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{\lambda PL}{GA} \quad \begin{array}{l} \lambda = 1.2 \text{ para vigas rectangulares} \\ G = 0.4 E \end{array}$$

$$\Delta_A = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{0.4EA} = \frac{PL}{3E} \left( \frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A} \right)$$

$$\Delta_A = \frac{PL}{3E} \left( \frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2} \right) = \frac{9PL}{3Eh^2} \left( \frac{1.33L^2}{h^2} + 1 \right)$$

Tomando  $L = 20$  pies y  $h = 1.5$  pies, se obtiene:

$$\Delta_A = \frac{3PL}{Eh^2} \left( 1.33 \left( \frac{20}{1.5} \right)^2 + 1 \right)$$

$$\Delta_A = \frac{3PL}{Eh^2} (2.37 + 1)$$

Como podemos ver, para este caso ( $b=h$ ), el  $\Delta_{\text{flexión}}$  es 2.37 veces el  $\Delta_{\text{corte}}$ , por esto muchas veces despreciamos el  $\Delta$  debido al cortante. Cuando la viga se hace más corta o de mayor peralte, el  $\Delta$  debido al corte aumenta un poco, pero no llega a ser considerable.

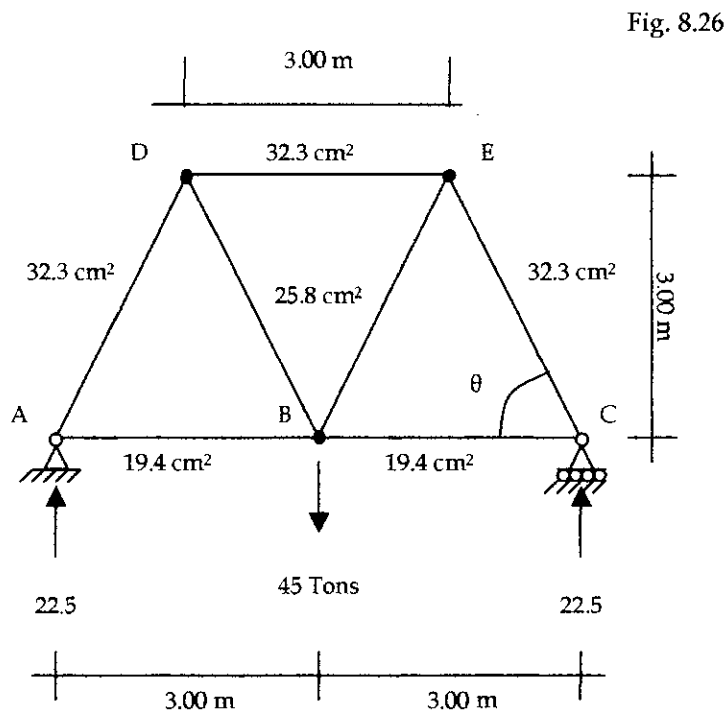
Si  $\frac{L}{h} = 5$ , entonces  $\Delta_f = 1.33(5)^2 = 33$  veces  $\Delta_c$

**Ejemplo:**

En la siguiente armadura calcular el desplazamiento horizontal en C ( $D_{Hc}$ ) y la fuerza horizontal que la hará cero.

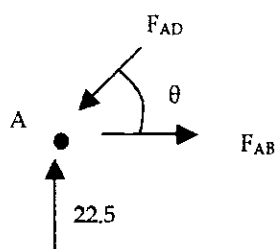
$$E = 2,100 \text{ Ton/cm}^2$$

$$\theta = 63.43^\circ$$

Análisis del caso real:

Nudo A:

Fig. 8.27



$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

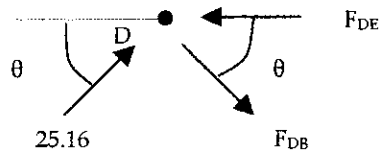
$$F_{AD} = \frac{22.5}{(\text{sen}\theta)} = 25.16 \text{ T compresión}$$

$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow +$$

$$F_{AB} = 25.16(\text{cos}\theta) = 11.25 \text{ T tensión}$$

Nudo D:

Fig. 8.28



$$\Sigma F_v = 0 \uparrow +$$

$$F_{DB} = \frac{25.16(\text{sen}\theta)}{(\text{sen}\theta)} = 25.16 \text{ T tensión}$$

$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow +$$

$$F_{DE} = 25.16(\text{cos}\theta) 2 = 22.50 \text{ T tensión}$$

Nudo B (resuelto por simetría):

Fig. 8.29

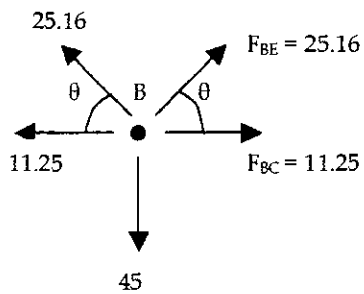
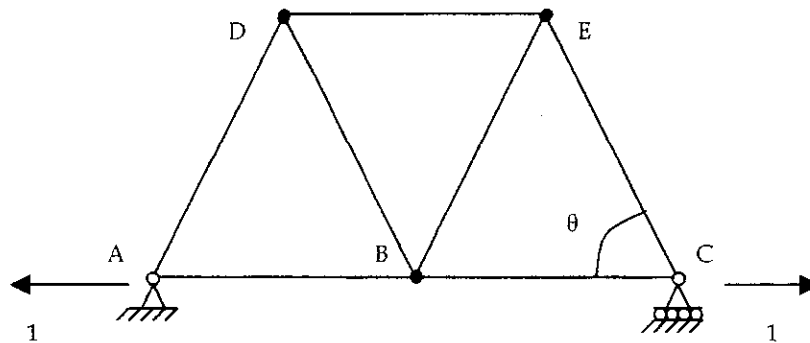


Fig. 8.30

Análisis del caso virtual:

Sólo trabajan los miembros A-B y B-C

$$F_{AB} = F_{BC} = 1 \text{ Ton tensión}$$

$$W_e = W_i$$

$$D_{HC} = \Sigma \frac{P \Delta l}{AE}$$

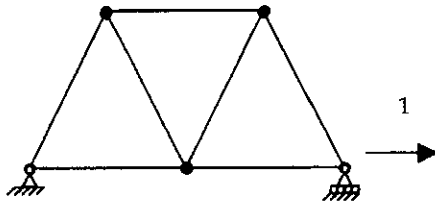
Las únicas barras que no se hacen cero son A-B Y B-C.

$$D_{HC} = 0.166 \text{ cms}$$

Cálculo de la fuerza que hace  $D_{HC} = 0$

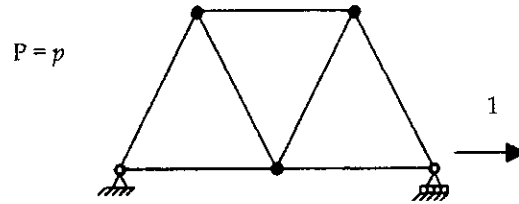
Caso Real

Fig. 8.31



Caso Virtual

Fig. 8.32



$$W_e = W_i = \frac{\sum p^2 l}{AE}$$

$$D'_{HC} = \left( \frac{(1)^2 (300)}{19.4 (2,100)} \right)^2 = 0.015$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.015 \text{ ——— } 1 \text{ Ton} \\ 0.166 \text{ ——— } x \end{array} \right\} \text{ entonces } x = 11.25 \text{ Ton}$$

Respuesta: 11.25 Tons←

## IX. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La implementación de este Libro Guía para el Curso de Análisis Estructural, elaborado por un graduado de la misma Universidad, ayudará en forma directa a que los estudiantes cubran más contenido y al mismo tiempo adquieran satisfactoriamente el conocimiento.

Se recomienda que los Catedráticos estudien esta propuesta y evalúen su utilidad en el Curso de Análisis Estructural. Así también, que se realice una encuesta sobre la aceptación del Libro Guía con los estudiantes y si es satisfactorio proponer la ampliación del mismo y la aplicación a otros cursos de la carrera.

Es muy importante que el estudiante asimile el contenido de este Libro Guía por lo que se recomienda que se cubra en dos cursos de análisis estructural. En el primer curso sería favorable cubrir solamente hasta el capítulo 6, donde se explican los métodos aproximados de análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Luego, los métodos exactos deberían estudiarse en un segundo curso de análisis estructural, donde también se podrían cubrir temas más avanzados como los métodos matriciales.

## X. BIBLIOGRAFÍA

Francis, A.J. 1,984 *Introducción a las Estructuras*. México D.F., Editorial Limusa.  
316 págs.

Jenkins, W. 1,985. *Análisis y Mecánica de las Estructuras*. México D.F.,  
Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A.. 418 págs.

Kanni, G. *Cálculo de Pórticos de Varios Pisos*. 6ª. ed. Editorial Reverté. 550 págs.

Laible, Jeffrey. 1,988. *Análisis Estructural*. México D.F., Editorial McGraw Hill.  
910 págs.

Leontovich, Valerian. 1,961. *Pórticos y Arcos*. México D.F. Compañía Editorial  
Continental S.A. (CECSA). 522 págs.

McCormac, Jack. 1,983. *Análisis Estructural*. 3ª. ed. México D.F. Editorial Harla.  
614 págs.

McCormac, Jack y Elling, Rudolf. 1,984. *Análisis de Estructuras*. México D.F.  
618 págs.

White, Gergely y Sexsmith. 1,984. *Introducción a los Conceptos de Análisis y Diseño*.  
México D.F. Editorial Limusa. 356 págs.

White, Gergely y Sexsmith. 1,990. *Estructuras Estáticamente Indeterminadas*.  
México D.F. Editorial Limusa. 283 págs.

