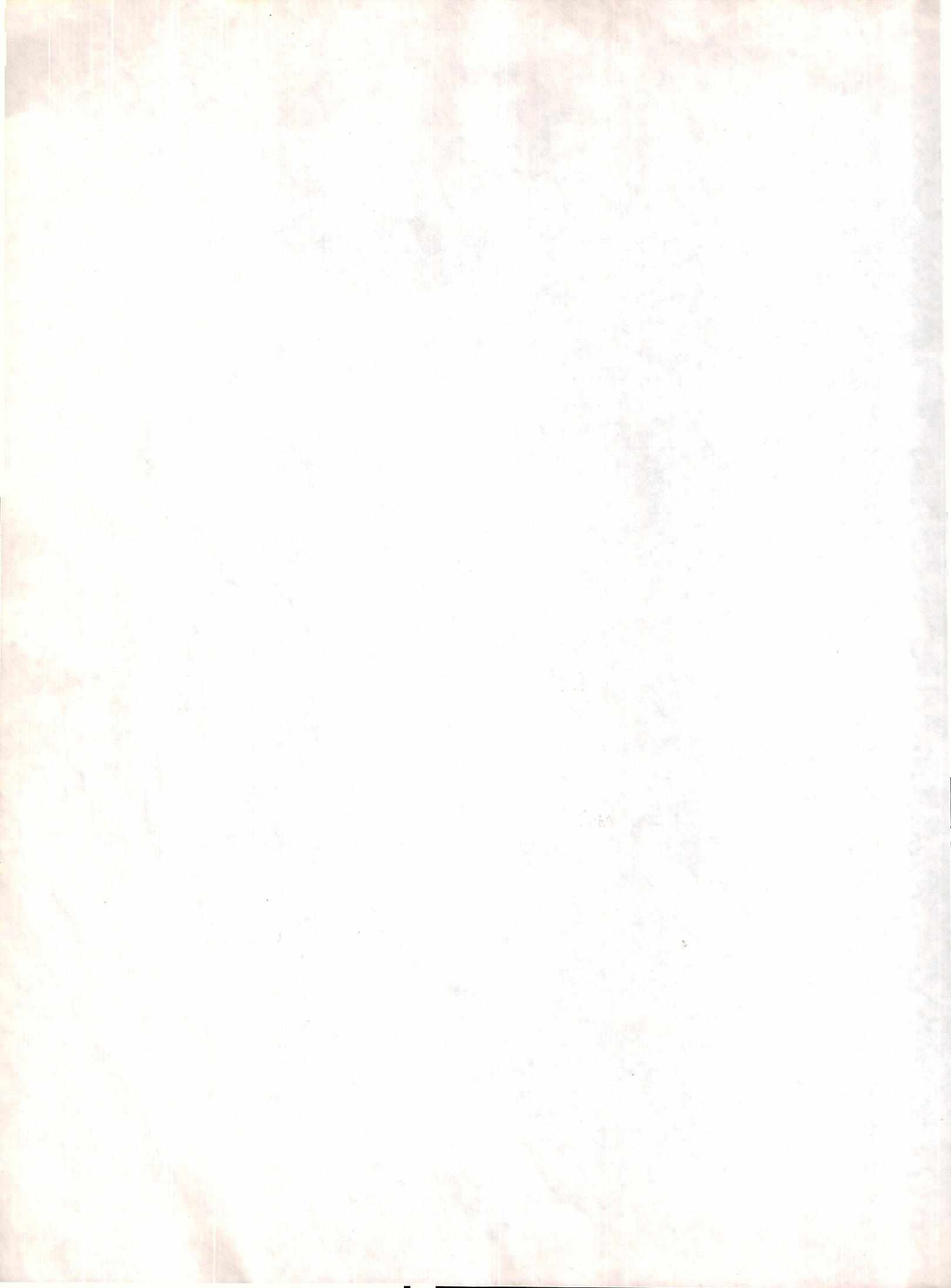


EL TEOREMA DE COMPLETITUD  
PARA LA LOGICA DE PRIMER ORDEN



Te  
UVG  
Mat  
a354  
1986

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

EL TEOREMA DE COMPLETITUD PARA LA

LOGICA DE PRIMER ORDEN

FRANCISCO ALARCON RIVERA

Ensayo presentado para optar  
al grado académico de Licenciado en Matemáticas

Guatemala

1986

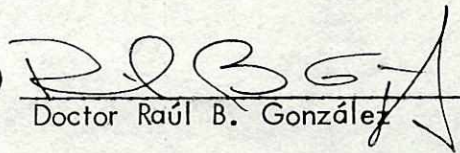


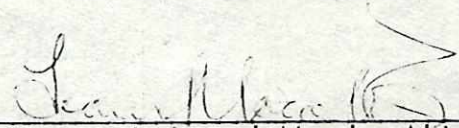
Vc.B.::

(f) \_\_\_\_\_  
Doctor Belisario Ventura  
Asesor

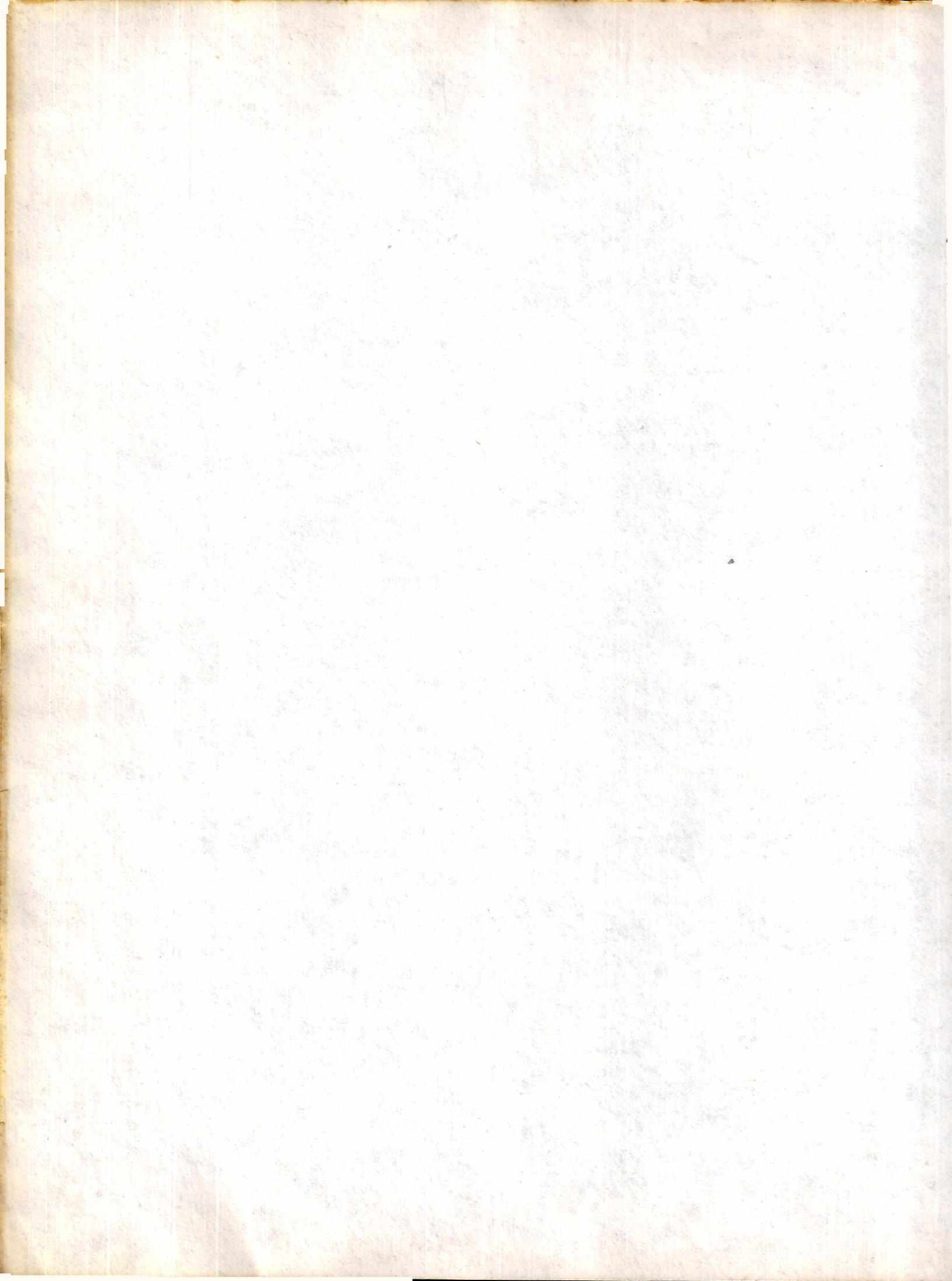
Tribunal:

(f) \_\_\_\_\_  
Doctor Belisario Ventura

(f)  \_\_\_\_\_  
Doctor Raúl B. González

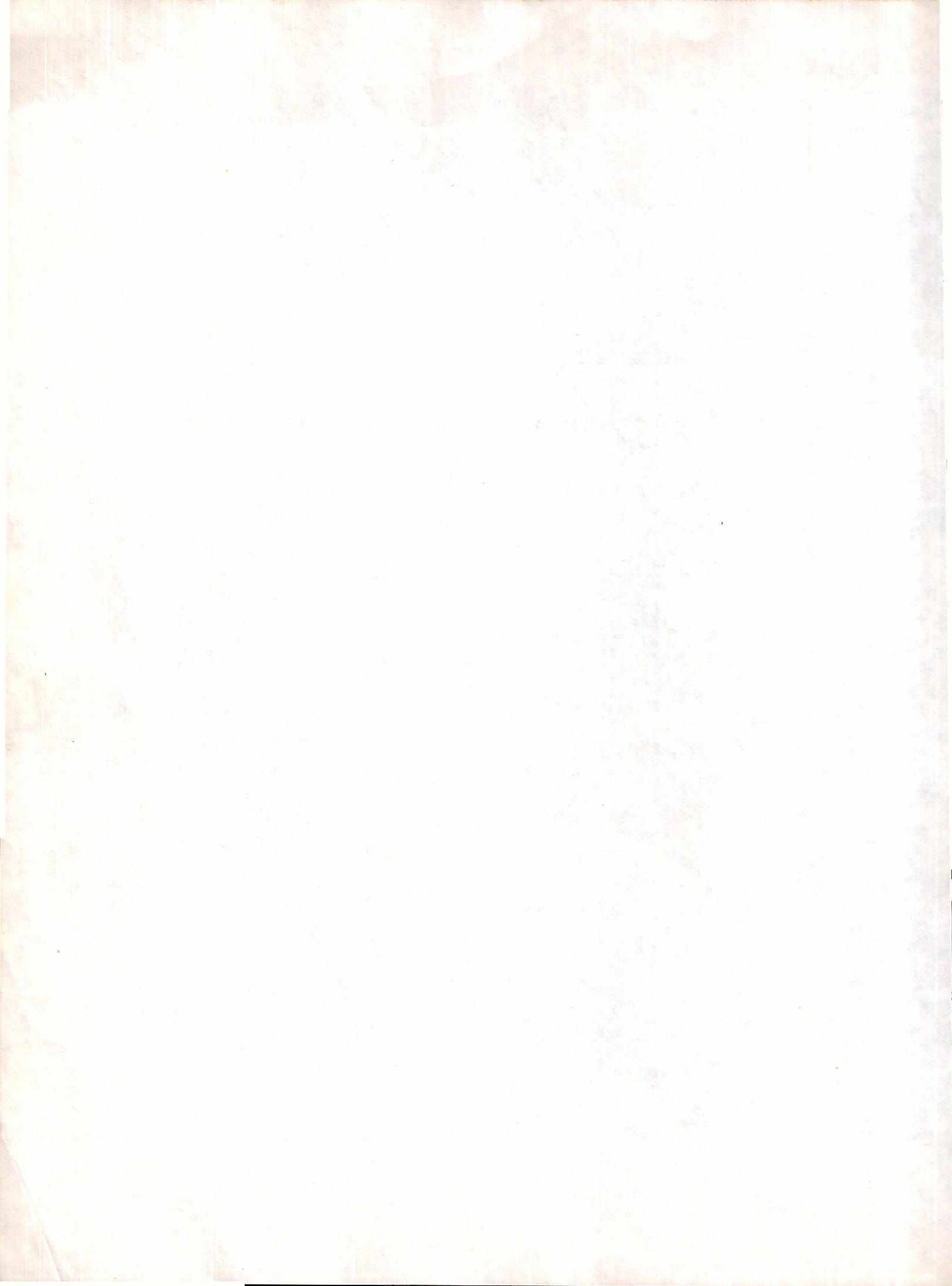
(f)  \_\_\_\_\_  
Licenciado Leonel Morales Aldana

Fecha de aprobación: 10 de Enero de 1986



## CONTENIDO

	Páginas
I. INTRODUCCION HISTORICA	1
II. LOGICA DE PRIMER ORDEN	9
III. EL TEOREMA DE COMPLETITUD	31
IV. BIBLIOGRAFIA	43



## I. INTRODUCCION HISTORICA

"Logic is an old subject,  
and since 1879 it has been  
a great one."

W.V.O. Quine

En el año de 1930, Kurt Goedel presentó, en su disertación doctoral, la primera prueba de la completitud de la lógica de primer orden o cálculo funcional. El mismo dice en su trabajo (1967: pág. 583) que fue lo que lo motivó a realizarlo: "Whitehead y Russell, como es bien sabido, construyeron la lógica y la matemática tomando ciertas proposiciones evidentes como axiomas y derivando los teoremas de la lógica y la matemática a partir de éstos, por medio de principios de inferencia formulados con precisión, de manera formal (esto es, sin hacer uso del significado de los símbolos). Por supuesto, al seguir este procedimiento, de inmediato surge la pregunta siguiente: Si el sistema de axiomas y principios de inferencia es completo, esto es, si realmente es suficiente para derivar todas las proposiciones lógico-matemáticas verdaderas, o si quizás sea concebible que hayan proposiciones verdaderas (que pudieran incluso probarse usando otros principios) que no puedan ser derivadas en el sistema bajo consideración."

Lo anterior quiere decir, averiguar si el método para la deducción de te-

oremas propuesto por Whitehead y Russell, en su Principia Mathematica, es completo en el sentido que, para todo teorema (proposición verdadera) de los sistemas de primer orden es posible encontrar una demostración utilizando el método y los axiomas propuestos; o bien establecer si algunos teoremas no pueden encontrarse o probarse con ellos.

Es interesante, pues tratar de establecer la motivación que impulsó a los dos matemáticos británicos a escribir su Principia Mathematica. Esto implica trazar un recorrido de casi 2000 años en la historia de la lógica y la matemática, que incluye a un gran número de célebres pensadores. El proceso se inicia hace casi veinte y dos siglos con Aristóteles, quien buscaba un método para decidir cuándo un argumento era válido y cuándo no. Aristóteles hacía esto por tres razones diferentes:

- 1) Conocer la verdadera naturaleza de la argumentación.
- 2) Conocer las condiciones según las cuales una proposición queda demostrada. (Esto especialmente motivado por la geometría.)
- 3) Por el deseo de refutar y vencer a sus oponentes en las discusiones.

Aristóteles fue el primero en usar símbolos en lógica y también uno de los primeros en trabajar lógica formal; es decir que reconoció ciertos tipos de argumentos válidos por su forma y no por su significado o contenido. Lo que Aristóteles realmente desarrolló fue todo un estudio sobre silogismos, aunque reconoció que no todos los argumentos eran de este tipo. Su estudio de los silogismos fue muy completo y detallado y, aunque no sea perfecto, hay que reconocer el inmenso mérito que tiene el haber hecho el primer estudio serio sobre

lógica que ha llegado hasta nosotros. Como veremos más adelante, durante casi 2000 años no se hizo más que trabajar sobre lo que ya había hecho Aristóteles.

El segundo paso - muy grande tanto para la lógica matemática como para toda la matemática - lo dio Euclides, también hace dos milenios, con su libro Los elementos. El propósito de Euclides fue el de continuar el trabajo de Platón, quien había intentado unir la aritmética y la cosmología. Euclides pretendía lograrlo, basando ambas en la geometría (que ahora se conoce como geometría euclidiana). Para ello, presentó la geometría en forma axiomática, y fue esta presentación novedosa por la que su trabajo se considera importante en la actualidad. Esta forma serviría más adelante como modelo para toda la matemática. El libro de Euclides se inicia con una serie de 23 definiciones, 5 postulados o axiomas y 5 nociones comunes. En las definiciones, se presentan objetos geométricos a partir de otros objetos más simples o fundamentales. Las nociones comunes son realmente nociones intuitivas que van a usarse en las deducciones y demostraciones, pero que son generales o aplicables a cualquier ciencia y no únicamente a la geometría. Los axiomas o postulados son ciertas proposiciones que se justifican en forma intuitiva y que garantizan la existencia de ciertos objetos geométricos, así como también la posibilidad de realizar cierto tipo de construcciones geométricas.

Dados estos tres grupos, Euclides empieza a listar proposiciones o teoremas que luego demuestra a partir de los postulados iniciales y definiciones utilizando las nociones comunes y sin usar nada más que lo que está en estas tres catego-

rías. Euclides tuvo algunas pequeñas fallas, pero su método se convertiría en el que habría de usarse en toda la matemática.

Del trabajo en lógica, desde esa época hasta mediados del siglo XIX, muy poco se ha estudiado. No se han logrado avances significativos y, de haberlos, éstos no habrían tenido mayor influjo en el desarrollo de la lógica matemática. Podemos, entonces, decir que no pasó nada importante hasta la segunda mitad del siglo XIX, en la que se inició un período de transición y de muchos cambios, por causa de tres aspectos diferentes:

- 1) El avance de la matemática hasta ese tiempo.
- 2) El descubrimiento de las geometrías no euclidianas.
- 3) La creación de la teoría de conjuntos.

La matemática había avanzado considerablemente y necesitaba que la lógica hubiera marchado a la par. La búsqueda de este avance (en la lógica) llevó a la aplicación de métodos matemáticos en la lógica, creándose así la lógica matemática. De esta manera, la lógica recibió un impulso totalmente novedoso y sumamente fructífero.

Veamos el primer punto: el avance de la matemática. En análisis se había hecho mucho progreso: se tenía ya el cálculo, aunque con problemas (por la naturaleza de los diferenciales). Con el trabajo de Descartes y Fermat (la geometría analítica) se habían unido el álgebra y la geometría, haciendo correspondencias entre figuras geométricas y ecuaciones. Estos mapeos de una rama de la matemática en otra probaron ser muy convenientes y, por lo mismo, se seguirían usando con mayor frecuencia y en otras ramas. Siguiendo esta lí-

nea, George Boole creó, a mitad del siglo XIX, un álgebra de la lógica (álgebra "booleana"). En cuanto a la aritmética, se conocían ya, en forma satisfactoria, los diferentes conjuntos numéricos, incluyendo los números complejos y los cuaterniones.

El segundo punto que es más importante y se refiere al descubrimiento de la geometría no euclidiana. La geometría propuesta por Euclides tenía ya una historia de 2000 años, así que todo el mundo suponía que ésta era 'la geometría correcta'. Además, se creía que se adecuaba perfectamente a la realidad física (mucho más tarde la teoría de la relatividad general demostraría que el espacio es euclidiano sólo localmente). Por estas razones, la simple idea de que la geometría euclidiana estuviese 'equivocada' parecía descabellada a la mayoría de las personas. Sin embargo tres personas, en forma independiente, encontraron una nueva geometría que Gauss llamó no euclidiana. Estas tres personas fueron: el alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el húngaro János Bolyai (1802-1860) y el ruso Nicolai Lobachevski (1793-1856). Ya que el primero en publicar su trabajo fue el ruso, a esta geometría se le llama "lobachevskiana". La diferencia entre esta geometría y la propuesta por Euclides estaba en su quinto postulado o postulado de las paralelas. Según la geometría euclidiana, dados una línea recta y un punto fuera de ella, existe sólo una línea recta paralela a la recta dada que pasa por ese punto. Según la geometría de Lobachevski, dados un punto y una línea recta, existen al menos dos líneas paralelas a la recta dada que pasan por el punto dado. ¿Por qué razón se cambió este postulado? Varias personas habían dudado de su veraci-

dad, pues se conocían curvas que se acercan cada vez más entre sí pero no se intersectan (asíntotas). Además no parecía ser lo suficientemente simple o evidente para ser un postulado; así que, durante algún tiempo, se había tratado de demostrar (sin éxito) su veracidad a partir de los otros postulados.

(Más tarde se probaría que esto no era posible.) También se buscó -sin éxito- algún otro postulado equivalente, más simple, o que fuera más intuitivo. Para terminar de complicar el asunto, unos años más tarde, un alumno de Göttingen, Bernhard Riemann (1826-1866), presentaría otra geometría no euclidiana llamada luego geometría "riemanniana", para la cual el postulado de las paralelas es el siguiente: Dados una línea recta y un punto fuera de ella no existe ninguna recta paralela a la recta dada que pase por el punto dado.

Claramente las tres geometrías, al tener un postulado diferente, tienen diferencias en algunos de sus teoremas. Por ejemplo, los ángulos de todo triángulo suman 180 grados en la euclidiana, menos de 180 en la lobachevskiana y más de 180 en la riemanniana. Se intensificó entonces la investigación de la consistencia (esto es, la ausencia de contradicciones) de las geometrías no euclidianas, reduciendo estos sistemas a otros conocidos; y se llegó a establecer que éstas eran consistentes (carecían de contradicciones) si lo era la geometría euclidiana. El hecho de reducir un sistema a otro dio la clave para pensar que quizás había que trabajar de manera formal, es decir, sin prestar tanta atención al significado que pudieran tener los postulados. Se pensó, entonces, que el trabajo de un matemático tenía que ser obtener proposiciones o teoremas a partir de un determinado grupo de axiomas, haciendo uso de prin-

cipios de inferencia específicos y sin preocuparse del significado de los símbolos. Una vez desarrollada la teoría, podrían hacerse las interpretaciones que se desearan. El desarrollo de las geometrías no euclidianas -unido a la reunión de la geometría, el álgebra y la teoría de números y por ende el análisis- abrió la posibilidad de unir las diferentes ramas de la matemática en una unidad lograda por la lógica.

El último toque para que cayera la antigua lógica lo dió una nueva teoría surgida a finales del siglo XIX: la teoría de conjuntos desarrollada por el alemán Georg Cantor (1845-1918), que vino a botar totalmente la intuición como criterio de verdad. ¿Qué más intuitivo y claro que la quinta noción común de Euclides; que el todo es más grande que la parte? Sin embargo esto no resulta cierto cuando se aplica a conjuntos infinitos. También se comprobó, mediante el famoso proceso de diagonalización que había distintos tipos de infinitos. Se probó exactamente que los naturales no eran equipotentes con los reales. Finalmente, aparecieron, relacionadas con la teoría de conjuntos, ciertas paradojas o contradicciones que llevaron a un nuevo análisis de la validez de un argumento. Probablemente la paradoja históricamente más importante sea la de Russell. Luego aparecieron otras, como la de Cantor, la de Buralli-Forti y algunas más, que inestabilizaron toda la lógica antigua. Todo esto llevó, pues a la creación de la lógica matemática y del método axiomático formal. Podemos decir brevemente que el método axiomático tiene los siguientes elementos:

- 1) Un conjunto de objetos primitivos o indefinidos, así como también algunas relaciones entre los objetos primitivos que tampoco se definen.

- 2) Un grupo de proposiciones, formadas con objetos y relaciones primitivas, que se toman como axiomas de la teoría. Además, principios de inferencia que permiten obtener nuevas proposiciones a partir de proposiciones dadas.
- 3) Los teoremas que se obtienen de los axiomas, usando los principios de inferencia un número finito de veces, y sin hacer uso de nada más.

Siguiendo este esquema, Whitehead y Russell intentaron, a principios de este siglo, proveer una axiomática de la cual se pudiera deducir toda la matemática. Este es el propósito fundamental de Principia Mathematica.

## II. LOGICA DE PRIMER ORDEN

En este capítulo se enuncian algunos elementos de la lógica de primer orden, necesarios para la presentación y demostración de el teorema de completitud.

Algunas de las paradojas que se encontraron durante el período de transición, del que ya hemos hablado, se debían únicamente a ambigüedades en el lenguaje que se usaba. Para evitarlas se decidió trabajar la lógica de primer orden con un lenguaje carente de dichos problemas. Se indican los símbolos que intervienen y como formar expresiones con ellos, de una manera determinada. Veamos pues como son estos lenguajes.

### II.1 Lenguajes de primer orden

Hay dos tipos de símbolos que se utilizan:

a) Símbolos lógicos, que están presentes y son iguales en todos los lenguajes de primer orden.

b) Parámetros, que son los que diferencian un lenguaje de otro.

a) Símbolos lógicos:

1) Paréntesis: (, )

2) Conectivos:  $\neg$ ,  $\rightarrow$

3) Variables:  $\forall_1$ ,  $\forall_2$ ,  $\forall_3$ , ...

y opcionalmente se tiene

4) Igualdad: =

b) Parámetros:

1) Cuantificador:  $\forall$

2) Símbolos predicados:  $A_1^1, A_2^1, A_3^1, \dots, A_1^2, A_2^2, \dots, A_1^n, A_2^n, \dots$

3) Símbolos constantes:  $a_1, a_2, a_3, \dots$

4) Símbolos función:  $f_1^1, f_2^1, f_3^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots$

Los superíndices en los símbolos predicado y función indican el número de argumentos de ellos, y los subíndices nos sirven para diferenciarlos. Suponemos que todos los símbolos son diferentes y que ninguno es una combinación de los otros. Se admite la posibilidad de que no hayan símbolos función ni constantes, pero si suponemos que hay cuando menos un símbolo predicado.

Así como en un lenguaje común, en los lenguajes de primer orden, hay algunas expresiones con sentido y otras sin sentido al ser interpretadas. Vamos a ver cuales son las expresiones con sentido.

Definición 11.1.1: Una expresión es cualquier secuencia finita de símbolos de el lenguaje de primer orden.

Si consideramos para cada símbolo función  $f$ , un operador constructor de términos  $\mathcal{F}_f$  que actúa sobre expresiones:  $\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = f\epsilon_1\epsilon_2\dots\epsilon_n$ ; donde  $f$  es un símbolo función de  $n$  argumentos y  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  son expresiones, podemos dar la siguiente definición.

Definición 11.1.2: El conjunto de términos es el conjunto generado por los operadores  $\mathcal{F}_f$  a partir de las constantes y variables.

Para aclarar esta definición podemos decir que los términos son:

- i) Las variables y constantes.
- ii) Las expresiones de la forma  $f(t_1, t_2, \dots, t_u)$  donde  $f$  es una función de  $n$  argumentos y  $t_1, t_2, \dots, t_u$  son términos.
- iii) Solo las expresiones determinadas por i) y ii) son términos.

Con los términos se pueden empezar a construir las fórmulas.

Definición II.1.3: Una fórmula atómica es una expresión de la forma siguiente:  $P(t_1, t_2, \dots, t_u)$ , donde  $P$  es un símbolo predicado de  $n$  argumentos y  $t_1, t_2, \dots, t_u$  son términos.

Las fórmulas bien formadas se obtienen a partir de las fórmulas atómicas, usando los conectivos y el cuantificador. Considerando los siguientes operadores constructores de fórmulas:  $E_{\neg}(y) = (\neg y)$ ;  $E_{\rightarrow}(y, \varphi) = (y \rightarrow \varphi)$ ;  $Q_i(y) = \forall v_i y$ ; podemos definir las fórmulas bien formadas.

Definición II.1.4: El conjunto de las fórmulas bien formadas es el conjunto generado por los operadores  $E_{\neg}, E_{\rightarrow}, Q_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) a partir de el conjunto de las fórmulas atómicas.

Como con la definición de los términos lo que se quiere decir es que:

- i) Las fórmulas atómicas son fórmulas bien formadas.
- ii) Si  $y$  y  $\varphi$  son fórmulas bien formadas;  $(\neg y)$ ,  $(y \rightarrow \varphi)$  y además  $\forall v_i y$ , ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) son fórmulas bien formadas.
- iii) Solo las expresiones determinadas por i) y ii) son fórmulas bien formadas.

De aquí en adelante se abreviará fórmula bien formada por medio de fbf y el plural por fbfs. Además ssi abreviará a si y solo si. Como es acostum-

brado el símbolo ■ marcará el fin de una demostración.

Definición II.1.5: Una variable  $x$  ocurre libre en una fbf ssi:

- 1) Para  $\alpha$  atómica si  $x$  es un símbolo de  $\alpha$ .
- 2)  $x$  ocurre libre en  $(\neg \alpha)$  ssi  $x$  ocurre libre en  $\alpha$ .
- 3)  $x$  ocurre libre en  $(\alpha \rightarrow \beta)$  ssi  $x$  ocurre libre en  $\alpha$  o si  $x$  ocurre libre en  $\beta$ .
- 4)  $x$  ocurre libre en  $\forall v_i \alpha$  ssi  $x$  ocurre libre en  $\alpha$  y además  $x \neq v_i$ .

Definición II.1.6: Una oración es una fbf que no tiene ocurrencias libres de ninguna de sus variables.

Se introducen ahora nuevas abreviaturas y convenciones para facilitar la escritura de ciertas fórmulas y para una posible interpretación de un lenguaje de primer orden.

$(\alpha \vee \beta)$  abrevia a  $((\neg \alpha) \rightarrow \beta)$ .

$(\alpha \wedge \beta)$  abrevia a  $(\neg (\alpha \rightarrow (\neg \beta)))$ .

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$  abrevia a  $(\neg ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg (\beta \rightarrow \alpha))))$ .

$\exists x \alpha$  abrevia a  $(\neg \forall x (\neg \alpha))$ .

$\mu = t$  abrevia a  $= \mu t$  y en forma similar para otros símbolos predicado de dos argumentos.

$\mu \neq t$  abrevia a  $(\neg = \mu t)$  y similarmente para otros predicados de dos argumentos.

Con respecto a los paréntesis se toman las siguientes convenciones:

- 1) Los paréntesis más exteriores de una fbf pueden omitirse. Por ejemplo:

$\forall x \alpha \rightarrow \beta$  es  $(\forall x (\alpha \rightarrow \beta))$ .

2)  $\neg$ ,  $\forall$  y  $\exists$  deben aplicarse a lo menos posible. Por ejemplo  $\neg \alpha \wedge \beta$  es  $((\neg \alpha) \wedge \beta)$  y no  $(\neg (\alpha \wedge \beta))$ .

3)  $\wedge$  y  $\vee$  se aplican a lo menos posible, sujeto a lo estipulado en 2). Por ejemplo:  $\neg \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$  es  $((\neg \alpha) \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ .

4) Cuando un conectivo aparece repetido, la expresión se agrupa a la derecha. Por ejemplo:  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$  es  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ .

## II.2 Verdad y modelos

Un papel similar al que tienen las asignaciones de verdad en el cálculo proposicional lo tienen, en la lógica de primer orden, las estructuras; para poder hablar de oraciones verdaderas.

Definición II.2.1: Una estructura  $\mathcal{U}$  es una función con dominio en los parámetros del lenguaje de primer orden y tal que:

- 1)  $\mathcal{U}$  le asigna a  $\forall$  un conjunto no vacío  $|\mathcal{U}|$ , llamado el universo de  $\mathcal{U}$ .
- 2)  $\mathcal{U}$  le asigna a cada símbolo predicado de  $n$  argumentos  $P$ , una relación  $n$ -aria  $P^{\mathcal{U}} \subset |\mathcal{U}|^n$
- 3)  $\mathcal{U}$  le asigna a cada símbolo constante  $c$  un elemento del universo. A ese elemento se le denota  $c^{\mathcal{U}}$ .
- 4)  $\mathcal{U}$  le asigna a cada símbolo función de  $n$  argumentos  $f$ , una operación  $n$ -aria  $f^{\mathcal{U}}$  en  $|\mathcal{U}|$ . Es decir  $f^{\mathcal{U}}: |\mathcal{U}|^n \rightarrow |\mathcal{U}|$

La idea de esta definición es que una estructura asigna sentido a nuestro

lenguaje.  $\forall$  significaría: para cualquier elemento de  $\mathcal{U}$ . El símbolo  $c$  sería el nombre de  $c^u$ . La fórmula atómica  $P t_1 t_2 \dots t_n$  significaría: los elementos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  están en la relación  $P^u$ .

El propósito de una estructura y de la definición de la misma es poder decir cuando una oración es verdadera, pero esto lo definimos primero para una fbf en general.

Sea  $\varphi$  una fbf,  $\mathcal{U}$  una estructura para el lenguaje y  $s$  una función con dominio  $V$ , el conjunto de las variables del lenguaje, y contradominio  $\mathcal{U}$ .

Definición 11.2.2: Para  $\mathcal{U}$  se satisface  $\varphi$  con  $s$ , denotado  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s]$  ssi:

1) Para términos definimos una extensión  $\bar{s}$  de  $s$  así:

a) Para variables  $x$ :  $\bar{s}(x) = s(x)$

b) Para constantes  $c$ :  $\bar{s}(c) = c^u$ .

c) Para términos  $t_1, \dots, t_n$  y símbolo función  $f$ :

$$\bar{s}(f t_1 t_2 \dots t_n) = f^u(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$$

2) Para fórmulas atómicas:

a)  $\models_{\mathcal{U}} t_1 t_2 [s]$  ssi  $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

b) Para un símbolo predicado  $n$ -ario  $P$ :

$$\models_{\mathcal{U}} P t_1 \dots t_n [s] \text{ ssi } (\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^u.$$

3) Para otras fórmulas bien formadas:

a)  $\models_{\mathcal{U}} \neg \varphi [s]$  ssi  $\not\models_{\mathcal{U}} \varphi [s]$ .

b)  $\models_{\mathcal{U}} (\varphi \rightarrow \psi) [s]$  ssi  $\not\models_{\mathcal{U}} \varphi [s]$  o  $\models_{\mathcal{U}} \psi [s]$  o ambas.

c)  $\models_{\mathcal{U}} \forall x \varphi [s]$  ssi para todo  $d \in \mathcal{U}$ ,  $\models_{\mathcal{U}} \varphi [s(x|d)]$

con  $s(x|d) = s$ , salvo en  $x$ , donde  $s(x|d) = s(d)$ .

Definición 11.2.3: Sea  $\Gamma$  un conjunto de fbfs y  $\varphi$  una fbf.  $\Gamma$  implica lógicamente a  $\varphi$ , denotado  $\Gamma \models \varphi$ , ssi para toda estructura  $\mathcal{U}$  para el lenguaje y toda función  $s$ ; si para toda  $\gamma \in \Gamma$  se da  $\models_{\mathcal{U}} \gamma[s]$  entonces  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s]$

Es decir que si se satisface todo miembro de  $\Gamma$ , se debe necesariamente satisfacer  $\varphi$ .

Definición 11.2.4: Dos fbfs  $\varphi$  y  $\gamma$  son lógicamente equivalentes, denotado  $\varphi \equiv \gamma$  ssi  $\{\varphi\} \models \gamma$  y  $\{\gamma\} \models \varphi$ .

Definición 11.2.5: Una fbf  $\varphi$  es válida, denotado  $\models \varphi$ , ssi  $\emptyset \models \varphi$ .

Es decir que una fbf es válida si se satisface en toda estructura  $\mathcal{U}$  y con cualquier función  $s$ .

Teorema 11.2.1: Sean  $s_1$  y  $s_2$  funciones de  $V$  en  $|\mathcal{U}|$  tales que concuerdan en todas las variables libres de una fbf  $\varphi$ , entonces  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_1]$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_2]$ .

Demostración: Como la definición de satisfabilidad fue dada en forma recursiva, la demostración también es así.

Si  $\varphi$  es una fbf atómica,  $\varphi = P t_1 t_2 \dots t_n$  con  $P$  un símbolo predicado de  $n$  argumentos y  $t_1, t_2, \dots, t_n$  términos. En una fórmula así toda ocurrencia de cada variable en  $\varphi$  es libre, y por lo mismo  $s_1$  y  $s_2$  concuerdan en todas las variables de los términos  $t_i$  (para cada  $i$ ). Por lo tanto, para cada  $i$ ,  $\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$  y por lo tanto  $(\bar{s}_1(t_1), \dots, \bar{s}_1(t_n)) \in P^{\mathcal{U}}$  ssi  $(\bar{s}_2(t_1), \dots, \bar{s}_2(t_n)) \in P^{\mathcal{U}}$ .

Si  $\varphi = \neg \alpha$ , por hipótesis de inducción  $\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_1]$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_2]$

Así que si  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_1]$ , necesariamente  $\not\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_1]$  pero entonces  $\not\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_2]$  y esto prueba que  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_2]$ . Similarmente si  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_2]$  entonces por definición de satisfabilidad  $\not\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_2]$  y entonces  $\not\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_1] \dots \models_{\mathcal{U}} \varphi[s_1]$

Si  $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ , la prueba es también inmediata de la hipótesis de inducción y la definición de la satisfabilidad de  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Si  $\varphi = \forall x \alpha$ , entonces las variables libres de  $\varphi$  son las mismas que las de  $\alpha$ , exceptuando a  $x$ . Por eso para cada elemento  $d \in |\mathcal{U}|$ ,  $s_1(x|d) = s_2(x|d)$  para las variables libres de  $\varphi$  y además  $s_1(x|d)(x) = s_2(x|d)(x) = d$ , entonces por la hipótesis de inducción  $\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_1(x|d)]$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \alpha[s_2(x|d)]$  y por lo tanto se da:  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_1]$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s_2]$ .



Teorema 11.2.2: Para una oración  $\varphi$  se da una y solo una de las siguientes alternativas:

- i)  $\varphi$  se satisface en  $\mathcal{U}$  con toda función  $s$ .
- ii)  $\varphi$  no se satisface en  $\mathcal{U}$  con ninguna función  $s$ .

Demostración: Sea  $\varphi$  una oración. Sea  $s$  una función de  $V$  en  $|\mathcal{U}|$ . Si  $\models_{\mathcal{U}} \varphi[s]$ , como  $\varphi$  no tiene variables libres, concuerda con cualquier otra función en sus variables libres y por el teorema anterior se satisface  $\varphi$  con cualquier otra función. Si  $\not\models_{\mathcal{U}} \varphi[s]$ , por el mismo teorema no se satisface  $\varphi$  con ninguna función.



Definición 11.2.6: Sea  $\varphi$  una oración,  $\mathcal{U}$  una estructura tal que se satisface  $\varphi$  en  $\mathcal{U}$  con alguna función. Entonces decimos que  $\varphi$

es verdadera en  $\mathcal{U}$ , denotado  $\vDash_{\mathcal{U}} \varphi$ . También diremos en ese caso que  $\mathcal{U}$  es un modelo para  $\varphi$ . En el caso contrario diremos que  $\varphi$  es falsa en  $\mathcal{U}$ , denotado  $\not\vDash_{\mathcal{U}} \varphi$ .

Definición 11.2.7:  $\mathcal{U}$  es un modelo para un conjunto de oraciones  $\Sigma$ , si  $\mathcal{U}$  es un modelo para cada miembro de  $\Sigma$ .

Teorema 11.2.3: Para un conjunto de oraciones  $\Sigma$  y una oración  $\varphi$ ,  $\Sigma \vDash \varphi$  ssi todo modelo de  $\Sigma$  es también un modelo de  $\varphi$ .

Demostración: Supongamos que  $\Sigma$  implica lógicamente a  $\varphi$ . Sea  $\mathcal{U}$  una estructura en la que se satisface todo miembro de  $\Sigma$ , entonces por hipótesis  $\varphi$  se satisface en  $\mathcal{U}$ . Pero esto significa que todo modelo de  $\Sigma$  es también modelo de  $\varphi$ .

Si suponemos ahora que todo modelo de  $\Sigma$  es también un modelo de  $\varphi$ ; y  $\mathcal{U}$  es una estructura que es un modelo de  $\Sigma$ , todo elemento de  $\Sigma$  se satisface en  $\mathcal{U}$ . Pero por hipótesis  $\mathcal{U}$  es un modelo de  $\varphi$ , i.e.,  $\varphi$  se satisface en  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  es una estructura cualquiera, necesariamente  $\Sigma$  implica lógicamente a  $\varphi$ .



### 11.3 Cálculo deductivo

En esta sección se tratarán los métodos para probar cuando una oración es implicada lógicamente por otras. Como una demostración se hace para convencer a otras personas, las pruebas deben ser de una longitud finita y debe existir un método efectivo para revisar que la demostración sea correcta. Para

evitar malentendidos las llamaremos deducciones. Para nuestras deducciones formales tomaremos un conjunto infinito de fórmulas que llamaremos axiomas lógicos, y que denotaremos con el siguiente símbolo:  $\Lambda$ . Emplearemos solo una regla de inferencia, el llamado modus ponens. Con él podemos inferir la fórmula  $\beta$  de las fórmulas  $\alpha$  y  $\alpha \rightarrow \beta$ . Estas inferencias las simbolizaremos así:

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta} .$$

Para un conjunto de fbfs  $\Gamma$ , los teoremas de  $\Gamma$  serán las fórmulas que se pueden obtener de  $\Gamma \cup \Lambda$  usando modus ponens un número finito de veces.  $\Gamma \vdash \varphi$  denotará que  $\varphi$  es un teorema de  $\Gamma$ . Una deducción de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$  es una secuencia de fórmulas que nos muestra en forma explícita como se obtiene  $\varphi$  de  $\Gamma \cup \Lambda$ .

Definición 11.3.1: Una deducción de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$  es una secuencia de fórmulas  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , tales que  $\alpha_n = \varphi$  y para todo  $i \leq n$  se da una de las siguientes alternativas:

- i)  $\alpha_i \in \Gamma \cup \Lambda$
- ii) para  $j$  y  $k$  menores que  $i$ ,  $\alpha_i$  se obtiene de  $\alpha_j$  y  $\alpha_k$  usando modus ponens.

Teorema 11.3.1: Existe una deducción de  $\alpha$  a partir de  $\Gamma$  ssi  $\alpha$  es un teorema de  $\Gamma$ .

Demostración: Hay que notar aquí que pudimos definir los teoremas de  $\Gamma$  como el conjunto generado a partir de  $\Gamma \cup \Lambda$  usando modus ponens. Supongamos que existe una deducción  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  para  $\alpha$ . Por la definición de deducción, cada  $\alpha_i$  pertenece al conjunto

generado a partir de  $\Gamma \cup \Lambda$  usando modus ponens; y por lo tanto  $\alpha$  es un teorema de  $\Gamma$ . Esto prueba realmente que el conjunto de las fbfs deducibles a partir de  $\Gamma$  está contenido en el conjunto de los teoremas de  $\Gamma$ .

Por otro lado el conjunto de las fbfs para las que existen deducciones a partir de  $\Gamma$  incluye a  $\Gamma \cup \Lambda$ ; pues sus elementos tienen deducciones de una línea; además el conjunto es cerrado bajo modus ponens; pues se podrían concatenar las deducciones. Por lo tanto, el conjunto de las fbfs deducibles a partir de  $\Gamma$  incluye al conjunto de los teoremas de  $\Gamma$ .

Esta demostración de la equivalencia entre ser teorema de  $\Gamma$  y ser deducible a partir de  $\Gamma$  justifica la siguiente definición.

Definición 11.3.2: Una fbf  $\varphi$  es deducible de  $\Gamma$  ssi  $\varphi$  es un teorema de  $\Gamma$ .

Definición 11.3.3: Una fbf  $\varphi$  es una generalización de  $\alpha$  ssi para algún entero no negativo  $n$  y variables  $x_1, \dots, x_n$ ;  $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \alpha$ .

Teniendo esta definición de generalización podemos dar la forma de los axiomas con los que vamos a trabajar. Solo podemos dar la forma de los axiomas, pues el conjunto de axiomas  $\Lambda$  es un conjunto infinito.

Los axiomas lógicos son todas las generalizaciones de las fbfs con las siguientes formas; donde  $x, y$  son variables y  $\alpha, \beta$  son fbfs:

i) Tautologías

ii)  $\forall x \alpha \rightarrow \alpha^x_t$ , donde  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\alpha$ .

$$\text{iii) } \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$$

$$\text{iv) } \alpha \rightarrow \forall x \alpha, \text{ donde } x \text{ no ocurre libre en } \alpha.$$

y si el lenguaje de primer orden tiene igualdad, también

$$\text{v) } x = x$$

$$\text{vi) } x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha'), \text{ donde } \alpha \text{ es atómica y } \alpha' \text{ se obtiene de } \alpha \text{ cambiando } x \text{ por } y \text{ cuantas veces queramos.}$$

A continuación se dará una breve explicación de los grupos i y ii.

Las tautologías mencionadas en i) son todas las fbfs que pueden obtenerse al cambiar, en una tautología del cálculo proposicional, cada símbolo proposicional por una fbf del lenguaje de primer orden.

Para entender mejor la forma de los axiomas en el grupo ii) es necesario aclarar lo siguiente:  $\alpha_t^x$  es la expresión que se obtiene al substituir en  $\alpha$  la variable  $x$ , siempre que ocurra libre en  $\alpha$ , por el término  $t$ . Podemos definir como encontrar  $\alpha_t^x$  así:

Definición 11.3.4: La forma de substituir  $t$  por  $x$  en  $\alpha$  es la siguiente:

i) Si  $\alpha$  es atómica solo cambiamos  $x$  por  $t$ .

$$\text{ii) } (\neg \alpha)_t^x = (\neg \alpha_t^x)$$

$$\text{iii) } (\alpha \rightarrow \beta)_t^x = (\alpha_t^x \rightarrow \beta_t^x)$$

$$\text{iv) } (\forall y \alpha)_t^x = \begin{cases} \forall y \alpha & \text{si } x=y \\ \forall y (\alpha_t^x) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Veamos unos ejemplos para aclarar esto.

$$\text{i) } \varphi_x^x = \varphi$$

$$\text{ii) } (\exists x \rightarrow \forall x P x)_y^x = (\exists y \rightarrow \forall x P x)$$

iii) Si  $\alpha$  es  $\neg \forall \gamma x = \gamma$  entonces  $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$  es  $\forall x \neg \forall \gamma x = \gamma \rightarrow \neg \forall \gamma z = \gamma$

Estos ejemplos ilustran como encontrar la expresión  $\alpha_t^x$ ; pero no por que hay que tener cuidado y ver si  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\alpha$ . Sea  $\alpha$  como en el ejemplo iii) y encontremos  $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$ ; esta expresión es igual a  $\forall x \neg \forall \gamma x = \gamma \rightarrow \neg \forall \gamma \gamma = \gamma$ . Observemos que el antecedente  $\forall x \neg \forall \gamma x = \gamma$  es verdadero en cualquier estructura cuyo universo tenga al menos dos elementos; pero el consecuente  $\neg \forall \gamma \gamma = \gamma$  es falso en cualquier estructura. El problema en este ejemplo se da porque al substituir  $\gamma$  por  $x$ ,  $\gamma$  fue capturado por el cuantificador  $\forall \gamma$  al inicio de la fbf. Debemos evitar esto, así que podemos decir que no será sustituible  $t$  por  $x$  en  $\alpha$  si alguna variable  $\gamma$  en  $t$  es capturada por algún cuantificador  $\forall \gamma$  de  $\alpha_t^x$ . En forma precisa podemos dar la siguiente definición.

Definición 11.3.5:  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\alpha$  así:

- i) Para  $\alpha$  atómica;  $t$  siempre es sustituible por  $x$  en  $\alpha$ .
- ii) Para  $(\neg \alpha)$ ,  $t$  es sustituible por  $x$  ssi  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\alpha$ .
- iii) Para  $(\alpha \rightarrow \beta)$ ,  $t$  es sustituible por  $x$  ssi  $t$  es sustituible por  $x$  tanto en  $\alpha$  como en  $\beta$ .
- iv) Para  $\forall \gamma \alpha$ ,  $t$  es sustituible por  $x$  ssi se da una de las siguientes posibilidades:
  - a)  $x$  no ocurre libre en  $\forall \gamma \alpha$ .
  - b)  $\gamma$  no ocurre en  $t$  y  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\alpha$ .

Ahora que las fbfs del lenguaje de primer orden son también fbfs del cálculo

lo proposicional, podemos aplicarles a éstas, nociones del cálculo proposicional como la implicación tautológica. Con esta noción podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 11.3.2:  $\Gamma \vdash \varphi$  ssi  $\Gamma \cup \Lambda$  implica tautológicamente a  $\varphi$ .

Demostración: ( $\Rightarrow$ ) Es obvio que el conjunto  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$  implica tautológicamente a  $\beta$ . Supongamos entonces que tenemos una asignación de verdad  $\nu$  que satisface a todo miembro de  $\Gamma \cup \Lambda$ . Puede probarse por inducción que  $\nu$  satisface entonces a todo teorema de  $\Gamma$ ; el paso de inducción usa precisamente lo enunciado en la primera línea de la demostración.

( $\Leftarrow$ ) Asumamos ahora que  $\Gamma \cup \Lambda$  implica tautológicamente a  $\varphi$ . Por el teorema de compacidad para el cálculo proposicional, existe un conjunto finito  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  contenido en  $\Gamma \cup \Lambda$  que implica tautológicamente a  $\varphi$ . Pero entonces  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_m \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_n \rightarrow \varphi$  es una tautología y por lo mismo un elemento de  $\Lambda$ . Aplicando modus ponens  $m+n$  veces a esta tautología y a  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  se obtiene  $\varphi$ .

Ahora que se ha terminado completamente la descripción de los axiomas lógicos podemos enunciar ciertos metateoremas; metateoremas pues tratan sobre deducciones y no sobre fbfs; que son sumamente importantes, pues dan la forma en que generalmente se hace una demostración en matemáticas; o en otras palabras en la interpretación que se haga del lenguaje de primer orden.

El primero de estos teoremas refleja la forma de demostrar ciertos enunciados, en la que éstos se prueban para un elemento  $x$  y ya que  $x$  se supone arbitrario, el enunciado queda probado para todo  $x$ .

Teorema II.3.3: ( Teorema de la Generalización )

Si  $\Gamma \vdash \varphi$  y  $x$  no ocurre libre en ninguna fbf de  $\Gamma$ , entonces  $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ .

Demostración: Consideramos un conjunto de fbfs  $\Gamma$  fijo y una variable  $x$  que no ocurra libre en  $\Gamma$ , aunque puede ocurrir libre en  $\varphi$ , y se probará por inducción que para cualquier teorema  $\varphi$  de  $\Gamma$ ,  $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ ; i.e. es suficiente probar que el conjunto  $\{\varphi: \Gamma \vdash \forall x \varphi\}$  contiene a  $\Gamma \cup \Lambda$  y es cerrado bajo modus ponens.

Caso 1: Si  $\varphi$  es un axioma lógico, entonces  $\forall x \varphi$  también lo es por ser una generalización de  $\varphi$ . Pero entonces  $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ , pues para un axioma  $\alpha$  se da  $\emptyset \vdash \alpha$  (denotado  $\vdash \alpha$ ).

Caso 2: Si  $\varphi \in \Gamma$ , entonces  $x$  no ocurre libre en  $\varphi$ . Pero si  $x$  no ocurre libre en  $\varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$  es un axioma lógico del grupo cuatro, y entonces  $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \forall x \varphi}{\forall x \varphi}$  obtenemos la fbf  $\forall x \varphi$ .

Caso 3: Si  $\varphi$  se obtiene por modus ponens de  $\alpha$  y  $\alpha \rightarrow \varphi$ .

Entonces por hipótesis de inducción  $\Gamma \vdash \forall x \alpha$  y  $\Gamma \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \varphi)$ .

Además  $\forall x (\alpha \rightarrow \varphi) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \varphi)$  está en el grupo de axiomas

tres, así que podemos seguir la siguiente deducción:

$$\frac{\forall x (\alpha \rightarrow \varphi), \forall x (\alpha \rightarrow \varphi) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \varphi)}{\forall x \alpha \rightarrow \forall x \varphi} \text{ y luego } \frac{\forall x \alpha, \forall x \alpha \rightarrow \forall x \varphi}{\forall x \varphi}$$



Este teorema y el de la deducción, que se verá un poco más adelante, son frecuentísimamente usados. La inclusión de los grupos tres y cuatro de los axiomas lógicos podría tratar de justificarse por la necesidad de éstos en esta demostración.

Teorema II.3.4: ( Regla T )

Si  $\Gamma \vdash \alpha_1, \Gamma \vdash \alpha_2, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$  y  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  implica tautológicamente a  $\beta$ , entonces  $\Gamma \vdash \beta$ .

Demostración: Como  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  implica tautológicamente a  $\beta$ , necesariamente  $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$  es una tautología, y por lo tanto un axioma lógico. Aplicando modus ponens a éste y a  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  n veces obtenemos  $\beta$ .

■

Teorema II.3.5: ( Teorema de la Deducción )

Si  $\Gamma, \gamma \vdash \varphi$ , entonces  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$ .

Demostración: Por inducción se probará que para todo teorema  $\varphi$  de  $\Gamma$  y la fbf  $\gamma$ ; la fórmula  $\gamma \rightarrow \varphi$  es un teorema de  $\Gamma$ .

Caso 1: Si  $\varphi = \gamma$ , entonces obviamente  $\vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$  por ser  $\gamma \rightarrow \varphi$  un axioma; y entonces necesariamente  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$ .

Caso 2: Si  $\varphi$  es un axioma lógico o un miembro de  $\Gamma$ , entonces  $\Gamma \vdash \varphi$ . Como  $\varphi$  implica tautológicamente a la fórmula  $(\gamma \rightarrow \varphi)$ , por la regla T,  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$ .

Caso 3: Si  $\varphi$  se obtiene por modus ponens de  $\alpha$  y  $\alpha \rightarrow \varphi$ , entonces por la hipótesis de inducción  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \alpha)$  y además

$\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$ ; pero como el conjunto  $\{(\gamma \rightarrow \alpha), (\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))\}$  implica tautológicamente a  $(\gamma \rightarrow \varphi)$ , por la regla T, tenemos que  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$ .

Teorema 11.3.6: ( Contraposición )

$$\Gamma, \varphi \vdash \neg \alpha \quad \text{ssi} \quad \Gamma, \alpha \vdash \neg \varphi.$$

Demostración: ( $\Rightarrow$ ) Si  $\Gamma, \varphi \vdash \neg \alpha$ , entonces por el teorema de la deducción,  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \neg \alpha)$ . Como  $(\varphi \rightarrow \neg \alpha)$  implica tautológicamente a  $(\alpha \rightarrow \neg \varphi)$ , entonces por la regla T,  $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \neg \varphi)$ . Pero si  $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \neg \varphi)$ , entonces  $\Gamma, \alpha \vdash \neg \varphi$  pues basta concatenar la deducción de  $\alpha \rightarrow \neg \varphi$  a partir de  $\Gamma$  con  $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \neg \varphi}{\neg \varphi}$  para obtener una deducción de  $\neg \varphi$  a partir de  $\Gamma, \alpha$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $\Gamma, \alpha \vdash \neg \varphi$ , entonces por el teorema de la deducción  $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \neg \varphi)$ . Como  $(\alpha \rightarrow \neg \varphi)$  implica tautológicamente a la fbf  $(\varphi \rightarrow \neg \alpha)$ , por la regla T,  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \neg \alpha)$ . Pero si  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \neg \alpha)$ , entonces  $\Gamma, \varphi \vdash \neg \alpha$ ; pues basta concatenar la deducción de  $(\varphi \rightarrow \neg \alpha)$  a partir de  $\Gamma$  con  $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \neg \alpha}{\neg \alpha}$ , para obtener una deducción de  $\neg \alpha$  a partir de  $\Gamma, \varphi$ .

Antes de enunciar y demostrar el siguiente metateorema necesitamos definir el concepto: inconsistente. La idea es que un conjunto no es consistente si podemos deducir de él una fbf y su negación. Esto claramente porque en ese caso cualquier fbf será un teorema de ese conjunto; ya que  $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$

es una tautología.

Definición 11.3.6: Un conjunto de fbfs es inconsistente ssi. para alguna fórmula

la  $\beta$ , tanto  $\beta$  como  $\neg\beta$  son teoremas de ese conjunto.

Teorema 11.3.7: ( Reducción al Absurdo )

Si  $\Gamma, \varphi$  es inconsistente, entonces  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .

Demostración: Como  $\Gamma, \varphi$  es inconsistente existe  $\beta$  tal que  $\Gamma, \varphi \vdash \beta$  y

$\Gamma, \varphi \vdash \neg\beta$ . Entonces por el teorema de la deducción se dan

$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \beta)$  y  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \neg\beta)$ . Como  $\{(\varphi \rightarrow \beta), (\varphi \rightarrow \neg\beta)\}$  implica tautológicamente a  $\neg\varphi$ , por la regla T,  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .

■

Teorema 11.3.8: ( Generalización sobre Constantes )

Sea  $\Gamma$  un conjunto de fbfs,  $\varphi$  una fbf tales que  $\Gamma \vdash \varphi$ .

Sea  $c$  un símbolo constante que no ocurre en  $\Gamma$ . Entonces

existe una variable  $\gamma$  que no ocurre en  $\varphi$  tal que  $\Gamma \vdash \forall\gamma \varphi^c$

Además existe una deducción de  $\forall\gamma \varphi^c$  a partir de  $\Gamma$ , en

la que no ocurre  $c$ .

Demostración: Sea  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  una deducción de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$ . Sea  $\gamma$

la primera variable que no aparece en ninguna  $\alpha_i$ . Se propone

que  $((\alpha_1)_\gamma^c, \dots, (\alpha_n)_\gamma^c)$  es una deducción de  $\varphi_\gamma^c$  a partir de  $\Gamma$ .

Así que es necesario comprobar que para cualquier  $k$ ,  $(\alpha_k)_\gamma^c$  es-

tá en  $\Gamma \cup \Delta$  o se obtiene de fórmulas anteriores usando modus po-

nens. Esto lo haremos revisando los diferentes casos posibles.

Caso 1:  $\alpha_k \in \Gamma$ , entonces  $c$  no ocurre en  $\alpha_k$  y por lo tanto

$$(\alpha_k)_\gamma^c = \alpha_k \dots (\alpha_k)_\gamma^c \in \Gamma \cup \Lambda.$$

Caso 2:  $\alpha_k \in \Lambda$ , entonces  $(\alpha_k)_\gamma^c$  es también un axioma lógico, y por lo tanto  $(\alpha_k)_\gamma^c \in \Lambda \cup \Gamma$ .

Caso 3: Si  $\alpha_k$  se obtiene con modus ponens de  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  con  $i, j$  menores que  $k$ . Necesariamente  $\alpha_j = \alpha_i \rightarrow \alpha_k$ . Como  $(\alpha_j)_\gamma^c = (\alpha_i \rightarrow \alpha_k)_\gamma^c = ((\alpha_i)_\gamma^c \rightarrow (\alpha_k)_\gamma^c)$ ;  $(\alpha_k)_\gamma^c$  se obtiene por modus ponens de  $(\alpha_i)_\gamma^c$  y  $(\alpha_j)_\gamma^c$ .

Esto demuestra que  $((\alpha_1)_\gamma^c, \dots, (\alpha_n)_\gamma^c)$  es una deducción de  $\varphi_\gamma^c$  a partir de  $\Gamma$ .

Sea ahora  $\Phi$  el subconjunto finito de  $\Gamma$  usado para esta deducción. Entonces  $((\alpha_1)_\gamma^c, \dots, (\alpha_n)_\gamma^c)$  es una deducción de  $\varphi_\gamma^c$  a partir de  $\Phi$ , y además  $\gamma$  no ocurre en  $\Phi$ . Entonces por el teorema de la generalización,  $\Phi \vdash \forall \gamma \varphi_\gamma^c$ . Además en esta deducción de  $\forall \gamma \varphi_\gamma^c$  a partir de  $\Phi$  no ocurre  $c$ ; pero como  $\Phi \subset \Gamma$ , esta también es una deducción a partir de  $\Gamma$ .

■

Teorema 11.3.9: Asuma que  $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ , donde el símbolo constante  $c$  no ocurre en  $\Gamma$  ni en  $\varphi$ . Entonces  $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ , y existe una deducción de  $\forall x \varphi$  a partir de  $\Gamma$  en la que no ocurre  $c$ .

Demostración: Por el teorema anterior, existe una deducción para  $\forall \gamma (\varphi_c^x)_\gamma^c$  a partir de  $\Gamma$ ; donde  $\gamma$  no ocurre en  $\varphi_c^x$ . Pero como  $c$  no ocurre en  $\varphi$ ,  $(\varphi_c^x)_\gamma^c = \varphi_\gamma^x$ . Resta probar ahora  $\forall \gamma \varphi_\gamma^x \vdash \forall x \varphi$ . Como  $x$  es sustituible por  $\gamma$  en  $\varphi_\gamma^x$  y  $(\varphi_\gamma^x)_x^\gamma = \varphi$ , tenemos que

$\forall \gamma \varphi \rightarrow \varphi$  es un axioma lógico del grupo dos.

Usando los teoremas de la deducción y generalización obtenemos el resultado deseado.



Muchas veces al trabajar con una fbf, no es importante la escogencia de las variables; pero cuando se trata de ver si un término es sustituible o no por una variable en una fórmula, esto puede hacer una gran diferencia. Considere el ejemplo siguiente:

Suponga que se quiere probar  $\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall y Pyy$ . En esta fbf  $y$  no es sustituible por  $x$ , así que no podemos decir que está en el grupo dos de los axiomas lógicos. Esto se puede evitar si tenemos que demostrar que  $\forall x \forall z Pxz \rightarrow \forall y Pyy$ , es sencillo. Podemos resolver el problema original sabiendo que  $\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall x \forall z Pxz$ , que tampoco es difícil de probar. Esto motiva el siguiente teorema.

Teorema 11.3.10: (Existencia de variantes Alfabéticas)

Sea  $\varphi$  una fórmula,  $t$  un término y  $x$  una variable.

Podemos encontrar una fórmula  $\varphi'$ , que difiere de  $\varphi$  únicamente en la escogencia de las variables cuantificadas, y tal que

a)  $\varphi \vdash \varphi'$  y  $\varphi' \vdash \varphi$ .

b)  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\varphi'$ .

Demostración:

Considere  $t$  y  $x$  fijos y construyamos  $\varphi'$  en forma recursiva a partir de  $\varphi$ . Para  $\varphi$  atómica,  $\varphi' = \varphi$ ;  $(\neg \varphi)' = (\neg \varphi')$  ;

$(\alpha \rightarrow \beta)' = (\alpha' \rightarrow \beta')$  y para  $(\forall \gamma \varphi)'$  así:

Si  $\gamma$  no ocurre en  $t$  o  $\gamma = x$  tome  $(\forall \gamma \varphi)' = \forall \gamma \varphi'$

En otro caso se debe cambiar la variable. Sea entonces  $z$  una variable que no en  $\varphi'$  ni  $t$  ni  $x$ . Tome entonces  $(\forall x \varphi)$  igual a  $\forall z (\varphi)_{\frac{z}{x}}$ .

Para comprobar que se da a), notar que: por hipótesis de inducción  $\varphi \vdash \varphi'$ ; pero entonces  $\forall x \varphi \vdash \forall x \varphi'$ . Ahora como  $z$  no ocurre en  $\varphi'$ ,  $\forall x \varphi' \vdash (\varphi')_{\frac{z}{x}}$  y por generalización  $\forall x \varphi' \vdash \forall z (\varphi')_{\frac{z}{x}}$ .  
Entonces  $\forall x \varphi \vdash \forall z (\varphi)_{\frac{z}{x}}$

En la otra dirección se da lo siguiente: Por los axiomas del grupo dos se da, juntamente con el teorema de la deducción,

$\forall z (\varphi')_{\frac{z}{x}} \vdash ((\varphi')_{\frac{z}{x}})_{\frac{x}{z}} = \varphi'$ . Por hipótesis de inducción  $\varphi' \vdash \varphi$ ;  
 $\therefore \forall z (\varphi')_{\frac{z}{x}} \vdash \varphi$ . Ahora como  $x$  no ocurre libre en  $(\varphi')_{\frac{z}{x}}$ , a menos que  $x = z$ ; pero aun así no ocurriría libre en  $\forall z (\varphi')_{\frac{z}{x}}$ , podemos usar el teorema de la generalización y entonces de da  
 $\forall z (\varphi')_{\frac{z}{x}} \vdash \forall x \varphi$

Definición 11.3.7: Las fórmulas  $\varphi'$  construidas en la prueba del teorema anterior se llamarán variantes alfabéticas de  $\varphi$ .



### III. EL TEOREMA DE COMPLETITUD

Ahora que ya contamos con una base y un cálculo deductivo, se presentan y demuestran dos teoremas sumamente importantes para ese cálculo deductivo; y por ende para quien busca pruebas a partir de axiomas.

Teorema III.1: ( Teorema de Solidez )

Si  $\Gamma \vdash \varphi$ , entonces  $\Gamma \models \varphi$ .

Demostración: La base de la demostración es que los axiomas lógicos son válidos y que el modus ponens preserva las implicaciones lógicas.

Vamos a suponer que todo axioma lógico es válido, (esto se probará después), y con esa suposición se probará por inducción que toda fórmula  $\varphi$  deducible de  $\Gamma$  es implicada lógicamente por  $\Gamma$ ; revisando los distintos casos posibles.

Caso 1: Si  $\varphi$  es un axioma lógico, entonces  $\models \varphi$ , y por lo tanto  $\Gamma \models \varphi$ .

Caso 2: Si  $\varphi \in \Gamma$ , entonces claramente  $\Gamma \models \varphi$ .

Caso 3: Si  $\varphi$  se obtiene por modus ponens a partir de  $\alpha$  y  $\alpha \rightarrow \varphi$ . Si este es el caso, por hipótesis de inducción  $\Gamma \models \alpha$  y  $\Gamma \models (\alpha \rightarrow \varphi)$ , pero entonces necesariamente  $\Gamma \models \varphi$ .

Esto terminaría la demostración si ya se hubiera probado que todo axioma lógico es válido. Probemos esto.

Como la generalización de una fórmula válida es otra fórmula va

lida es otra fórmula válida, basta revisar que cada uno de los grupos de axiomas es válido, y no las generalizaciones de éstos.

Para el grupo 1: Como si  $\phi$  es implicada tautologicamente por  $\Gamma$ ,  $\Gamma \models \phi$ ; y como una tautología  $\alpha$  es implicada tautologicamente por  $\phi$ ,  $\models \alpha$ .

Para el grupo tres, cuatro, cinco, la prueba es sencilla.

Para el grupo 6: Asuma que  $\alpha$  es atómica y  $\alpha'$  se obtiene de  $\alpha$  substituyendo  $x$  por  $y$  en algunos lugares. Basta probar que  $\{x=y, \alpha\} \models \alpha'$ . Tomemos  $\mathcal{U}$  y  $s$  tales que:

$\models_{\mathcal{U}} x=y [s]$ , es decir  $s(x) = s(y)$ . Entonces todo término  $t$  tiene la propiedad que  $t'$  se obtiene de él cambiando en algunos

lugares  $x$  por  $y$ . Entonces por inducción sobre  $t$ ,  $\bar{s}(t) = \bar{s}(t')$ .

Si  $\alpha$  es  $t_1 = t_2$  ent.  $\alpha'$  es  $t'_1 = t'_2$  y  $\models_{\mathcal{U}} \alpha [s]$  ssi

$\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$  ssi  $\bar{s}(t'_1) = \bar{s}(t'_2)$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \alpha' [s]$ .

Similarmente si  $\alpha$  es  $P_{t_1 \dots t_n}$ ,  $\alpha'$  es  $P_{t'_1 t'_2 \dots t'_n}$  y entonces  $\models_{\mathcal{U}} \alpha [s]$  ssi  $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in \mathcal{P}^{\mathcal{U}}$  ssi

$(\bar{s}(t'_1), \dots, \bar{s}(t'_{n-1}), \bar{s}(t'_n)) \in \mathcal{P}^{\mathcal{U}}$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \alpha' [s]$ .

Para el grupo dos la situación es un poco más complicada y vale la pena para claridad ver un ejemplo sencillo, aunque no es lo mejor en una demostración. Tomemos el elemento del grupo dos:

$\forall x P_x \rightarrow P_t$ . Asumamos que  $\models_{\mathcal{U}} \forall x P_x [s]$ , entonces para

todo  $d \in \mathcal{U}$ :  $\models_{\mathcal{U}} P_x (s(x|d))$ ; así que si  $d = \bar{s}(t)$ ,  $\models_{\mathcal{U}} P_x [s(x|\bar{s}(t))]$

que es equivalente por satisfabilidad a  $(\bar{s}(t)) \in \mathcal{P}^{\mathcal{U}}$ , que es equivalente

a  $F_u Pt [s]$  . Sin embargo para pasar de  $F_x [s(x|\bar{s}(t))]$

a  $F_u Pt [s]$  en el caso atómico necesitamos un lema pre

vio que diría así: Si  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\phi$  ,

$F_u \phi[s(x|\bar{s}(t))] \text{ ssi } F_u \phi_t^x [s]$  . Previo al lema

hay que notar que: considerando  $u$  y  $s$  fijos, para todo tér

mino  $U$  ; si  $U_t^x$  es el resultado de substituir la variable  $x$

en  $U$  por el término  $t$  ;  $\bar{s}(U_t^x) = \overline{s(x|\bar{s}(t))}(U)$  , pues

( por inducción sobre el término  $U$  ), si  $U$  es constante o una

variable diferente de  $x$ ,  $U_t^x = U$  , y la ecuación de arriba no

es más que  $\bar{s}(U) = \bar{s}(U)$  ; y si  $U = x$ , la ecuación se reduce

a  $\bar{s}(t) = \bar{s}(t)$  .

Probemos el lema: Si  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\phi$  , enton

ces  $F_u \phi_t^x [s] \text{ ssi } F_u \phi[s(x|\bar{s}(t))]$  .

Caso 1: Si  $\phi$  es atómica, se desprende de lo mencionado an

tes del lema. Por ejemplo si  $\phi = P_u$  ,  $F_u P_u t^x [s] \text{ ssi}$

$\bar{s}(U_t^x) \in \mathcal{P}^u \text{ ssi } (\overline{s(x|\bar{s}(t))})(U) \in \mathcal{P}^u \text{ ssi } F_u P_u [s(x|\bar{s}(t))]$ .

Caso 2: Si  $\phi$  es  $\neg \alpha$  o  $\alpha \rightarrow \beta$  , la conclusión es inme

diata de la hipótesis de inducción.

Caso 3: Si  $\phi$  es  $\forall y \alpha$  y  $x$  no ocurre libre en  $\alpha$  ; enton

ces  $s$  y  $s(x|\bar{s}(t))$  concuerdan en todas las variables libres de

$\phi$  y  $\phi_t^x$  es solo  $\phi$  ; así que la conclusión es inmediata.

Caso 4: Si  $\phi$  es  $\forall y \alpha$  y  $x$  ocurre libre en  $\phi$  . Como

$t$  es substituable por  $x$  en  $\phi$  ,  $y$  no ocurre en  $t$  y  $t$

es sustituible por  $x$  en  $\alpha$  . Entonces por lo primero tenemos

$\bar{s}(t) = \overline{s(y|d)}(t)$  para cualquier  $d \in |\mathcal{U}|$ . Como  
 $x \neq y$ ,  $\varphi_t^x = \forall y \alpha_t^x$ .  $\models_{\mathcal{U}} \varphi_t^x [s]$  ssi para todo  $d \in |\mathcal{U}|$   
 $\models_{\mathcal{U}} \alpha_t^x S[y|d]$  ssi para todo  $d$ ,  $\models_{\mathcal{U}} \alpha [s(y|d)(x|\bar{s}(t))]$  por  
 la hipótesis de inducción y ya que  $\bar{s}(t) = \overline{s(y|d)}(t)$  pero esto  
 ssi  $\models_{\mathcal{U}} \varphi [s(x|\bar{s}(t))]$ .

( Esto termina la prueba del lema. )

Para el grupo 2: Asuma que  $\dagger$  es sustituible por  $x$  en  $\varphi$   
 y que  $\models_{\mathcal{U}} \forall x \varphi [s]$ . Entonces para todo  $d$  en  $|\mathcal{U}|$   
 $\models_{\mathcal{U}} \varphi [s(x|d)]$ , si en particular  $d = \bar{s}(t)$ ,  $\models_{\mathcal{U}} \varphi [s(x|\bar{s}(t))]$   
 y por el lema  $\models_{\mathcal{U}} \varphi_t^x (s)$ . ■

Corolario III.1: Si  $\vdash (\varphi \leftrightarrow \alpha)$ , entonces  $\varphi$  y  $\alpha$  son lógicamente equivalentes.

Demostración: Si  $\vdash (\varphi \leftrightarrow \alpha)$ , entonces  $\varphi \vdash \alpha$  pero entonces por el teorema de la solidez  $\varphi \vDash \alpha$ . Ahora como también se da  $\alpha \vdash \varphi$ , de nuevo por el teorema  $\alpha \vDash \varphi$ . ■

Corolario III.2: Si  $\varphi'$  es una variante alfabética de  $\varphi$ , entonces  $\varphi$  y  $\varphi'$  son lógicamente equivalentes.

Demostración: Como  $\varphi'$  es una variante alfabética de  $\varphi$ ,  $\varphi \vdash \varphi'$  y entonces  $\varphi \vDash \varphi'$ . Similarmente  $\varphi' \vdash \varphi$  y luego  $\varphi' \vDash \varphi$ . ■

Definición III.1:  $\Gamma$  es satisfactible ssi existen  $\mathcal{U}$  y  $s$  tales que todo miembro de  $\Gamma$  se satisface en  $\mathcal{U}$  con  $s$ .

Teorema III.2: Teorema de Completitud ( Goedel, 1930 )

a) Si  $\Gamma \models \varphi$  , entonces  $\Gamma \vdash \varphi$  .

b) Todo conjunto de fórmulas consistente es también satisfacible.

Demostración: Realmente a) y b) son equivalentes; así que probaremos el inci-

so b). En esta prueba se supone que nuestro lenguaje es contable; y por lo mismo el conjunto de las fbfs también lo es.

La prueba consta de seis pasos. Se dará la demostración indicando lo hecho en cada paso y a continuación de cada uno, los detalles que lo justifican. Esto para que pueda tenerse una idea de lo central de la demostración y evitar perderse por lo extenso de la misma, o por los diferentes detalles de menor importancia. Debe probarse que todo conjunto consistente es satisfacible. En sus rasgos generales la prueba sigue el siguiente esquema: En los pasos uno a tres se extiende  $\Gamma$  a un conjunto  $\Delta$  tal que:

i)  $\Gamma \subset \Delta$  , ii)  $\Delta$  es consistente, iii)  $\Delta$  es maximal en el sentido que para toda fórmula  $\alpha$  ,  $\alpha \in \Delta$  o  $(\neg \alpha) \in \Delta$  y iv)

para toda fórmula  $\varphi$  y variable  $x$  , existe un símbolo constante  $c$  tal que  $(\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x) \in \Delta$  . En el paso cuatro se forma

una estructura  $\mathcal{U}$  en la que los miembros de  $\Gamma$  sin igualdad son satisfechos. En el paso cinco se transforma  $\mathcal{U}$  para acomodar a las fórmulas con igualdad.

Sea  $\Gamma$  un conjunto de fbfs consistente.

Paso 1      Expanda el lenguaje de primer orden agregando al que se tiene un conjunto contable de nuevos símbolos constantes.  $\Gamma$  sigue siendo un conjunto consistente de fbfs en el nuevo lenguaje.

Detalles:    Es necesario que  $\Gamma$  sea consistente en el nuevo lenguaje pues si no, existe  $\beta$  tal que hay una deducción en el nuevo lenguaje para  $(\beta \wedge \neg\beta)$  a partir  $\Gamma$ . Esta deducción contiene un número finito de las nuevas constantes, por (11.3.8) cada una de esas constantes puede reemplazarse por una variable. Tendríamos entonces una deducción en el lenguaje original para  $(\beta' \wedge \neg\beta')$  a partir de  $\Gamma$ . Y esto contradice la hipótesis de la consistencia de  $\Gamma$ .

Paso 2:      Para cada fbf  $\phi$  ( en el nuevo lenguaje ) y cada variable  $x$ , agregue a  $\Gamma$  la fbf  $\neg \forall x \phi \rightarrow \neg \phi_c^x$ , donde  $c$  es una de las nuevas constantes. Esto puede hacerse de forma que  $\Gamma$  junto con el conjunto  $\Theta$  de las fbfs agregadas sea también consistente.

Detalles:    Fije una enumeración de las parejas  $(\phi, x)$ , donde  $\phi$  es una fbf y  $x$  una variable:  $(\phi_1, x_1), (\phi_2, x_2), (\phi_3, x_3) \dots$ , esto es posible pues el lenguaje es contable. Sea  $\theta_1$  igual a  $\neg \forall x_1 \phi_1 \rightarrow \neg \phi_{c_1}^{x_1}$ , donde  $c_1$  es la primera de las nuevas constantes que no ocurre en  $\phi_1$ ; y continúe de esta forma. Así  $\theta_n$  es igual a  $\neg \forall x_n \phi_n \rightarrow \neg \phi_{c_n}^{x_n}$ , donde  $c_n$  es el primero de los nuevos símbolos constantes que no ocurre en  $\phi_n$  ni

en  $\Theta_k$  para  $k < n$ . Recordemos que  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$ .

$\Gamma \cup \Theta$  es consistente, pues si no existe  $m \geq 0$  tal que  $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1}\}$  es inconsistente. Tome el menor entero  $m$  con esta propiedad. Por reducción al absurdo, (11.3.7),

$\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg \theta_{m+1}$ . Pero  $\theta_{m+1}$  es  $\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x$

para algunos  $\varphi$ ,  $x$ ,  $c$ . Por la regla T, (11.3.4),

$\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \neg \forall x \varphi$  y  $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x \varphi$ .

Como  $c$  no ocurre en  $\varphi$  ni en  $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ , apli-

cando el teorema 11.3.9 obtenemos  $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x \varphi$ .

Pero entonces  $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  es inconsistente, lo que contradice

que  $m$  es el menor entero con dicha propiedad. Si  $m$  es cero

se contradice la consistencia de  $\Gamma$ .

Paso 3: Extienda el conjunto  $\Gamma \cup \Theta$  a un conjunto consistente  $\Delta$ ;

que es maximal en el sentido que para cualquier fbf  $\varphi$ ,

$\varphi \in \Delta$  o  $(\neg \varphi) \in \Delta$ .

Detalles: Sea  $\Lambda$  el conjunto de axiomas lógicos para el lenguaje exten-

dido. Como  $\Gamma \cup \Theta$  es consistente y por el teorema 11.3.2,

no hay fórmula  $\beta$  tal que  $\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$  implique tautologicamen-

te tanto a  $\beta$  como a  $\neg \beta$ . Entonces hay una asignación de

verdad  $\bar{v}$  para el conjunto de las fórmulas primas que satisface

a todo miembro de  $\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$ . (Notar que las fórmu-

las primas son las atómicas o las de la forma  $\forall x \alpha$ , las no

primas son las otras.) Sea  $\Delta = \{\varphi : \bar{v}(\varphi) = v\}$ . Cla

ramente para todo  $\varphi$  se da sólo una de las posibilidades  $\varphi \in \Delta$ ,  $(\neg\varphi) \in \Delta$ . Además se tiene que  $\Delta \vdash \varphi$  nos lleva a que  $\varphi$  es implicada tautológicamente por  $\Delta$ , pues  $\Delta \subset \Delta$ . Pero entonces  $\mathcal{V}(\varphi) = \mathcal{V}$  pues  $\mathcal{V}$  satisface a  $\Delta$ , y por lo tanto  $\varphi \in \Delta$ . Consecuentemente  $\Delta$  es consistente.

Paso 4: De  $\Delta$  se toma una estructura  $\mathcal{U}$  para el nuevo lenguaje, pero cambiando la igualdad por otro predicado binario  $\epsilon$ .  $\mathcal{U}$  no es la estructura que satisface a  $\Gamma$ , sino una preliminar. Definamos  $\mathcal{U}$ :

a)  $|\mathcal{U}|$  es igual al conjunto de términos del nuevo lenguaje.

b)  $\mathbf{E}^{\mathcal{U}}$  queda definida por:  $(u, t) \in \mathbf{E}^{\mathcal{U}}$  ssi  $(u = t) \in \Delta$

c) Para el predicado n-ario  $P$ ,  $P^{\mathcal{U}}$  queda definida por  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in P^{\mathcal{U}}$  ssi  $P_{t_1, \dots, t_n} \in \Delta$ .

d) Para funciones n-arias  $f$ ,  $f^{\mathcal{U}}$  queda definida así:

$$f^{\mathcal{U}}(t_1, \dots, t_n) = f_{t_1, \dots, t_n} \quad . \quad \text{Como esto incluye el caso } n=0, \text{ i.e. } f=c, c^{\mathcal{U}}=c \quad .$$

Sea  $\bar{s}$  la función identidad en  $\mathcal{V}$ . Entonces para todo término  $t$ ,  $\bar{s}(t) = t$ . Para toda fbf  $\varphi$  sea  $\varphi^*$  el resultado de substituir la igualdad por  $\mathbf{E}$ . Entonces  $\vDash_{\mathcal{U}} \varphi^*[s]$  ssi  $\varphi \in \Delta$

Detalles: Que  $\bar{s}(t) = t$  se prueba en forma sencilla por inducción sobre  $t$ . Que  $\vDash_{\mathcal{U}} \varphi^*[s]$  ssi  $\varphi \in \Delta$ , se proba por inducción sobre el número de lugares en el que aparecen conectivos o cuantificadores.

Caso 1: Fórmulas atómicas. Si  $\varphi$  es  $P_{t_1, \dots, t_n}$  entonces  $\models_u \varphi^*[s]$  ssi  $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^u$  ssi  $P_{t_1, \dots, t_n} \in \Delta$

Si  $\varphi$  es  $u = t$ ,  $\models_u u \in t[s]$  ssi  $(\bar{s}(u), \bar{s}(t)) \in E^u$  ssi  $(u, t) \in E^u$  ssi  $(u = t) \in \Delta$ .

Caso 2:  $\models_u (\neg \varphi)^*[s]$  ssi  $\not\models_u \varphi^*[s]$ , pero por hipótesis de inducción esto se da ssi  $\varphi \notin \Delta$  ssi  $(\neg \varphi) \in \Delta$ .

Caso 3: Si  $\varphi$  es  $\alpha \rightarrow \beta$ .  $\models_u (\alpha \rightarrow \beta)^*[s]$  ssi  $\not\models_u \alpha^*[s]$  ó  $\models_u \beta^*[s]$ . Pero por hipótesis de inducción esto se da ssi  $(\neg \alpha) \in \Delta$  o  $\beta \in \Delta$  ssi  $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Delta$ .

Caso 4: A mostrar:  $\models_u \forall x \varphi^*[s]$  ssi  $\forall x \varphi \in \Delta$

( $\Rightarrow$ )  $\models_u \forall x \varphi^*[s]$  implica que  $\models_u \varphi^*[s(x|c)]$ , pero por el lema de sustitución  $\models_u (\varphi^*)_c^*[s]$ , i.e.

$\models_u (\varphi_c^*)^*[s]$ , pero entonces por hipótesis de inducción

$\varphi_c^x \in \Delta$  y claramente  $(\neg \varphi_c^x) \notin \Delta$ . Pero como  $\theta$ , que es igual a la fbf  $\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x$ , está en  $\Delta$  y  $\Delta$  es cerrado bajo deducción,  $(\neg \forall x \varphi) \notin \Delta$  y entonces  $\forall x \varphi \in \Delta$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $\not\models_u \forall x \varphi^*[s]$  entonces para algún  $t$  necesariamente  $\not\models_u \varphi^*[s(x|t)]$ . Ahora tomando una variante alfabética, (11.3.10)  $\varphi^{*t}$ , en la que  $t$  sea sustituible por  $x$ ,  $\not\models_u \varphi^{*t}[s(x|t)]$ . Pero por el lema de la sustitución entonces  $\not\models_u (\varphi_t^x)^*[s]$  y entonces por hipótesis de inducción  $\varphi_t^x \notin \Delta$ . Como  $\Delta$  es cerrado bajo deducción  $\forall x \varphi \notin \Delta$ ; y por variantes alfabéticas  $\forall x \varphi \notin \Delta$ .

Paso 5: Si el lenguaje original no contiene igualdad basta restringir  $\mathcal{U}$  al lenguaje original para obtener una estructura que satisface a  $\Gamma$  con la función de identidad.

Si el lenguaje original si contiene igualdad,  $\mathcal{U}$  no nos sirve, pero si la estructura cociente de  $\mathcal{U}$  módulo  $E^u$ .  $E^u$  es una relación de equivalencia en  $|\mathcal{U}|$ . Para cada  $t$  en  $|\mathcal{U}|$  sea  $[t]$  la clase de equivalencia a la que pertenece  $t$ .  $E^u$  es realmente una relación de congruencia para  $\mathcal{U}$ . Esto significa que:

- i)  $E^u$  es una relación de equivalencia sobre  $|\mathcal{U}|$ .
- ii) Para cada  $P$ ,  $P^u$  es compatible con  $E^u$ ;  $(t_1, \dots, t_n) \in P^u$  y  $t_i E^u t'_i$  para  $i \leq n$  obligan a que  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \in P^u$ .
- iii) Para cada  $f$ ,  $f^u$  es compatible con  $E^u$ . La estructura que satisfecerá a  $\Delta$  es:

a)  $|\mathcal{U}/E|$  es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de  $|\mathcal{U}|$ .

b) Para cada predicado  $P$   $n$ -ario tenemos:

$$([t_1], [t_2], \dots, [t_n]) \in P^{u/E} \text{ ssi } (t_1, t_2, \dots, t_n) \in P^u.$$

c) Para cada función  $f$ ,  $f^{u/E}(t_1, \dots, t_n) = [f^u(t_1, \dots, t_n)]$

$$\text{y entonces para las constantes: } c^{u/E} = [c^u]$$

Tomando  $h: |\mathcal{U}| \longrightarrow |\mathcal{U}/E| :: t \longmapsto h(t) = [t]$

tenemos un homomorfismo de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{U}/E$ . Consecuentemente

para cualquier  $\phi$ ;  $\phi \in \Delta$  ssi  $\models_{\mathcal{U}} \phi^*[s]$  ssi

$$\models_{\mathcal{U}/E} \phi^*[h \circ s] \text{ ssi } \models_{\mathcal{U}/E} \phi[h \circ s].$$

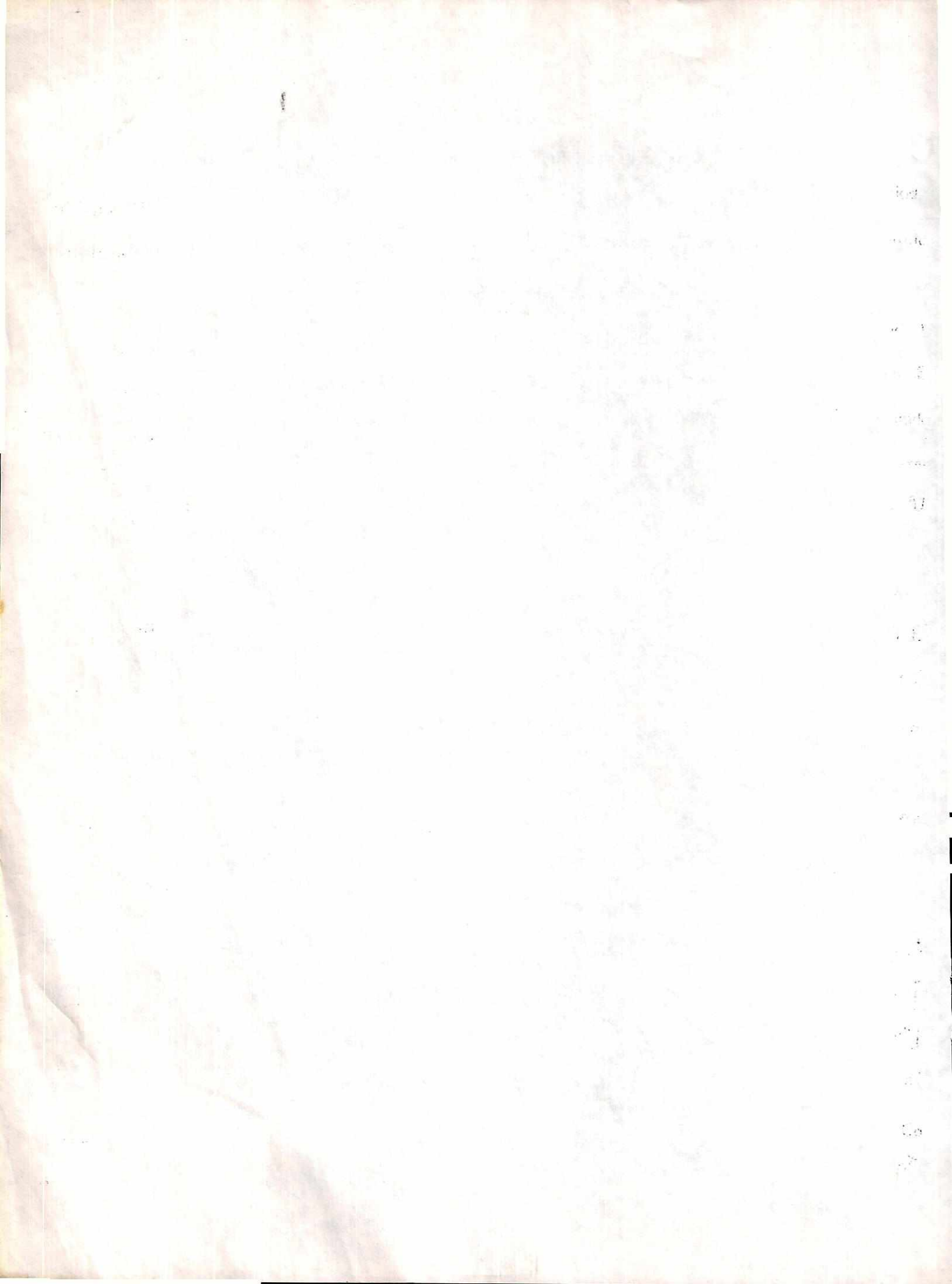
Así  $\mathcal{U}/\mathcal{E}$  satisface a todo miembro de  $\Delta$ , y por lo tanto de  $\Gamma$ ,  
con  $h \circ S$ .

Detalles: Las justificaciones son realmente las propiedades de la igualdad,  
del teorema del homomorfismo y el paso cuatro.

Paso 6: Restringir la estructura  $\mathcal{U}/\mathcal{E}$  para el lenguaje original.

Esta restricción de  $\mathcal{U}/\mathcal{E}$  satisface todo miembro de  $\Gamma$  con  
 $h \circ S$ .

QED. ■



## BIBLIOGRAFIA

- DeLong, Howard. A profile of mathematical logic. 1 st. ed. Reading, 1970 Addison-Wesley Publishing Company. 304 pp.
- Enderton, Herbert B. A mathematical introduction to logic. 1st. ed. 1972 New York, Academic Press, Inc. 289 pp.
- Henkin, Leon. "The completeness of the first-order functional calculus". 1949 Journal of symbolic logic (Estados Unidos); 14 (3): 159-166.
- Van Heijencort, Jean. From Frege to Goedel, a source book in mathematical logic 1879-1931. 1st. ed. Boston, Harvard University Press. 664 pp.

