

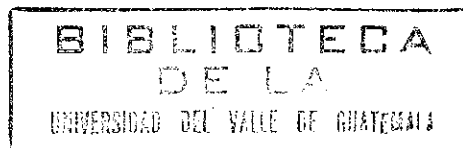
Universidad del Valle de Guatemala.

**Facultad de Ciencias y Humanidades.
Departamento de Matemática.**

**Una Aplicación de la Recursión Transfinita:
El Problema de la Construcción de los Números Cardinales
Inaccesibles.**

Oseas Elí Paredes Recinos.

**Trabajo de Graduación presentado para optar
el grado académico de Licenciado en Matemática.**



**Guatemala
1996.**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

**Facultad de Ciencias y Humanidades
Departamento de Matemática.**

**Una Aplicación de la Recursión Transfinita:
El Problema de la Construcción de los Números Cardinales
Inaccesibles.**

Oseas Paredes Recinos.

Guatemala

1996.

**Una Aplicación de la Recursión Transfinita:
El Problema de la Construcción de los Números Cardinales
Inaccesibles.**

Universidad del Valle de Guatemala.

**Facultad de Ciencias y Humanidades.
Departamento de Matemática.**


**Una Aplicación de la Recursión Transfinita:
El Problema de la Construcción de los Números Cardinales
Inaccesibles.**

Oseas Elí Paredes Recinos.

**Trabajo de Graduación presentado para optar
el grado académico de Licenciado en Matemática.**

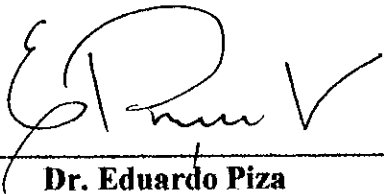
**Guatemala
1996.**

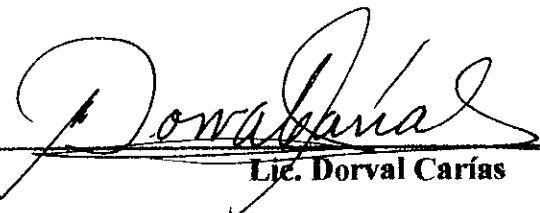
Vo. Bo.:

(f) 
Lic. Dorval Carías
Asesor.

Tribunal:

(f) 
Dr. Raúl González

(f) 
Dr. Eduardo Piza

(f) 
Lic. Dorval Carías

Fecha de Aprobación: 28 de octubre de 1996.

*A mis padres.
Mi amor por ellos es
recursivo y transfinito,
monótono creciente,
no acotado superiormente
y convergente más allá de
cualquier ordinal inaccesible.*

Agradecimientos

Quiero manifestar en este punto la valiosa colaboración ofrecida desinteresadamente del Lic. Dorval Carías por la revisión del presente texto, así como por sus valiosas sugerencias. De igual manera, agradezco a Luis Pedro Poitevin su ayuda invaluable, sin la cual la mayor parte de la información bibliográfica de la presente monografía sería imposible. En especial quiero agradecer a Luis Von Ahn, alumno y amigo mío, el haberme facilitado desinteresadamente su computadora e impresora en la cual se escribió el presente trabajo, así como a Jonatán Recinos y a Sergio Samayoa por la ayuda ofrecida en la revisión y corrección de errores.

Quiero agradecer en forma especial al Dr. Eduardo Piza, de la Universidad de Costa Rica, su colaboración al revisar y ampliar el material que se presenta en el siguiente trabajo, principalmente en lo que se refiere a los Cardinales Atractores y los últimos avances en Metamatemática de la existencia o no existencia de los Cardinales Inaccesibles, atribuidos principalmente a Dana Scott.

Finalmente, quiero reconocer a mis padres René Paredes y Abigail Recinos de Paredes su apoyo incondicional que me brindaron durante el tiempo que me llevó el trabajo; en especial a mi hermano, David, quien me brindó su ayuda al pasar en limpio gran parte del mismo, así como a Elizabeth Barillas, mi fuente de inspiración, por su comprensión y apoyo. La realización final del presente trabajo se debe en gran parte a la cooperación sacrificial de cada uno de ellos.

A todos ellos, en especial a mi hermana Dámaris, y muchos otros cuyos nombres me es imposible poner en lista, mil gracias.

***“Si he visto más lejos que otros
fue por estar en pie sobre
hombros de gigantes.”
(Isaac Newton)***

**UNA APLICACIÓN DE LA RECURSIÓN TRANSFINITA:
EL PROBLEMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS
CARDINALES INACCESIBLES.**

PREFACIO

*Deja volar alto la Fantasía;
Sin ilusión, la vida ¿qué sería?
(Malba-Tahan)*

Se ha dicho que el ingenio humano, amparado por la ciencia, debe consagrarse a la resolución de los grandes problemas de la vida. Se ha dicho además que los sabios no alzaron el deslumbrante edificio de la matemática para que esa noble ciencia viniera a ser utilizada en cosas pueriles sin utilidad práctica de ningún tipo, porque ¿de qué nos sirve saber que no existe algún conjunto cuya cardinalidad sea mayor que la de los números naturales, pero menor que la de los números reales? Por ello, para muchos -matemáticos inclusive-, es un crimen reducir la ciencia de Euclides, de Arquímedes, de Newton, de Euler o del excepcional Riemann, a esa mísera condición devaluadora de hablar y razonar acerca del infinito, pues nos interesan -dicen ellos- la resolución de problemas de valor real, esto es, problemas que se relacionen con las necesidades y exigencias de la vida cotidiana; en resumen, problemas que nada tengan que ver con el infinito.

Otros sin embargo, no ignoran que la Matemática surgió con el despertar del alma humana, pero pese a ello, no surgió meramente con fines utilitarios. Fue el ansia de resolver el misterio del Universo y su vinculación con el pensamiento humano lo que dio a esta ciencia su primer impulso. Su verdadero desarrollo resultó, ante todo, del esfuerzo de penetrar y comprender el Infinito.

A partir de estas dos concepciones, la pregunta natural que surge en nuestro espíritu es ¿cuál es el fundamento de la matemática? Es decir, ¿sobre qué bases debemos alzar el edificio de la matemática para que éste envuelva o no, la idea del infinito? Para contestar a esta pregunta han surgido tres principales escuelas del pensamiento:

Logicismo: La tesis logicista es que la matemática es una rama de la lógica. Las nociones matemáticas han de ser definidas en términos de las nociones lógicas. Los teoremas de la matemática han de ser demostrados como teoremas de lógica. Leibniz en 1666 concibió, por primera vez a la lógica, como una ciencia que contiene las ideas y principios que se encuentran a la base de todas las demás ciencias. Dedekind en 1888 y Frege entre los años 1884, 1893 y 1903 se comprometieron en la tarea de definir nociones matemáticas en términos de nociones lógicas, y Peano (entre los años 1889, 1894-1908), en la de expresar teoremas en un simbolismo lógico.

La deducción de la matemática como rama de la lógica, fue llevada a cabo sobre esta base, utilizando un simbolismo lógico, en la obra "Principia Mathematica" de Whitehead y Russell. Esta deducción de la matemática partiendo de la lógica era ofrecida como axiomática intuitiva. Se pretendía que se creyeran los axiomas, o al menos que se los aceptase como hipótesis plausibles sobre el mundo.

La dificultad es ahora la siguiente: ¿en qué fundamento debe apoyarse nuestra creencia en determinado axioma? Si las propiedades han de ser construidas, la materia en cuestión debería establecerse sobre la base de construcciones, no mediante un axioma. De hecho, Weyl afirma que, en el sistema de "Principia Mathematica", "la matemática no se funda ya en la lógica, sino en una suerte de paraíso del lógico ..."; y observa que aquel que esté dispuesto a creer en ese "mundo trascendental", podría igualmente aceptar el sistema de la teoría axiomática de

conjuntos (Zermelo, Fraenkel, etc.), que tiene la ventaja, para la deducción de la matemática, de ser de estructura más simple.

El logicismo trata la existencia de los números naturales como una hipótesis sobre el mundo actual ('axioma del infinito'). Un tratamiento distinto del problema del infinito es propuesto por los intuicionistas y los formalistas, como se hará más adelante.

La tesis logicista puede ser, finalmente, cuestionada sobre la base de que la lógica presupone ideas matemáticas en su formulación.

intuicionismo: En la década de 1880, cuando los métodos de Weierstrass, Dedekind y Cantor fueron conocidos, Kronecker argumentó que las definiciones fundamentales de estos autores eran sólo palabras, puesto que no permitían, en general, deducir si un objeto dado las satisface.

Poincaré, defensor de la inducción matemática como un instrumento irreducible del razonamiento matemático intuitivo, es también un precursor de la moderna escuela intuicionista.

En 1908 Brouwer, en un trabajo titulado "La no fiabilidad de los principios de la lógica", se enfrentó a la creencia de que las reglas de la lógica clásica, que se han transmitido desde Aristóteles (384-322 a.C.), poseen una validez absoluta, independiente de la materia a la que se apliquen. En cita de Weyl, en 1946, expuso: "De acuerdo con su punto de vista y su interpretación de la historia (de Brouwer), la lógica clásica fue abstraída de la matemática de los conjuntos finitos y sus subconjuntos... Olvidando este limitado origen, se entendió después erróneamente, que la lógica es algo que se encuentra por encima de y que es anterior a toda matemática. Finalmente se la aplicó, sin justificación, a la matemática de conjuntos infinitos".

Dos ejemplos harán ver que principios válidos para el pensamiento referido a

conjuntos finitos, no extienden necesariamente su validez al ámbito de los conjuntos infinitos.

Uno es el principio de que "el todo es mayor que cualquiera de sus partes propias", cuando se lo aplica a correspondencias de 1-1 entre conjuntos. Otro es el principio de que un conjunto de números naturales contiene un máximo.

Un principio de lógica clásica, que vale cuando se razona sobre conjuntos finitos y que Brouwer no acepta para conjuntos infinitos, es la ley del tercio excluido (tercero excluido), la cual en su forma general, dice: **para toda proposición P, es válida P o es válida no-P**. Sea ahora A la proposición **existe un miembro del conjunto (o dominio) D que tiene la propiedad P**. Entonces **no-A** es equivalente a **todo miembro de D que no tiene la propiedad P, o todo miembro de D tiene la propiedad no-P**.

Supóngase ahora que D es un conjunto finito. En tal caso, podríamos examinar uno tras otro todo miembro de D, y de este modo o hallar un miembro que tenga la propiedad P, o verificar que todos los miembros tienen la propiedad **no-P**. Podrían suscitarse dificultades prácticas, si el conjunto es muy grande. No obstante la posibilidad de completar la indagación existe en principio. Es esta posibilidad la que constituye la ley del tercio excluido, a juicio de Brouwer, un principio válido para el razonamiento que se refiera a conjuntos finitos D (por muy grandes que éstos sean) y propiedades P del tipo especificado.

Para un conjunto infinito D, la situación es fundamentalmente diferente. Ya no es posible, en principio, llevar a cabo la búsqueda a través del conjunto D.

En esta situación no queda tampoco salvaguardada la ley para Brouwer si se

sustituye la imposible indagación a través de todos los miembros del conjunto infinito D , por una situación matemática del problema propuesto. Podemos en algunos casos, esto es, para algunos conjuntos D , y propiedades P , tener éxito al encontrar un miembro de D que tenga la propiedad P ; y en otros casos, tener éxito al mostrar por razonamiento matemático, que todo miembro de D tiene la propiedad no- P . Por ejemplo, al deducir una contradicción del supuesto de que un miembro arbitrario (esto es, no especificado) de D que tenga la propiedad P . Un ejemplo del segundo tipo de solución es el caso en que D es el conjunto de todos los pares ordenados (m, n) de enteros positivos, y P es la propiedad que tiene un par (m, n) de que $m^2 = 2n^2$. El resultado es el descubrimiento de Pitágoras de que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Pero no tenemos base para afirmar la posibilidad de obtener en todo caso el uno o el otro de estos tipos de solución). La no aceptación, por parte de Brouwer, de la ley del tercio excluido para conjuntos infinitos D , no se basa en el hecho de que los matemáticos hayan fracasado hasta el presente en el intento de resolver este problema particular, o cualquier otro problema particular.

Para hacer frente a esta objeción, habría que suministrar un método adecuado para solucionar no solamente todo problema matemático relevante no resuelto, sino también cualquier otro que pudiera ser propuesto en el futuro.

A la matemática, con sus métodos y lógica tal y como ha sido desarrollada con anterioridad a la crítica de Brouwer o no teniendo en cuenta esta crítica, la denominamos **clásica**. A la matemática, métodos y lógica que emplean Brouwer y su escuela, le damos el nombre de **intuicionista**. La matemática clásica incluye partes que son intuicionistas y partes no-intuicionistas.

La matemática no-intuicionista, que culminó en las teorías de Weierstrass, Dedekind y Cantor, y la matemática intuicionista de Brouwer, difieren esencialmente en su consideración del infinito. En el primer caso, el infinito es tratado como **actual o completo o extendido o existencial**. Un conjunto infinito, es considerado como algo que existe como totalidad completa, con anterioridad o independencia de cualquier proceso humano de generación o construcción, y como si pudiera desplegarse por completo ante nuestra inspección. En el segundo caso, el infinito es tratado tan sólo como **potencial o en devenir o constructivo**. El reconocimiento de esta distinción, en el caso de magnitudes infinitas, se remonta a Gauss, quien escribió en 1831: "Protesto... contra el uso de una magnitud infinita como algo ya completo, lo que nunca puede permitirse en matemática" (*Werke* viii, p.216).

De acuerdo con Weyl, "Brouwer estableció claramente, y a mi entender más allá de toda duda, que no hay evidencia que soporte la creencia en el carácter existencial de la totalidad de los números naturales... La secuencia de números que va creciendo más allá de todo límite ya alcanzado, mediante el paso al número siguiente, es una multitud de posibilidades abierta al infinito. Permanece siempre en estado de creación, y no es un dominio cerrado de cosas existentes en sí mismas. Que ciegamante convertimos lo uno en lo otro, es la verdadera fuente de nuestras dificultades, incluyendo las antinomias, una fuente de naturaleza más fundamental que el indicado principio russelliano del círculo vicioso. Brouwer abrió nuestros ojos y nos hizo ver en qué medida la matemática clásica, nutrida por una creencia en el 'absoluto' que trasciende todas las posibilidades humanas de realización, va más allá de tales enunciados, en tanto que pretenden ostentar significado real y verdad fundada en evidencia." De esta actitud con respecto al infinito, surge la crítica de Brouwer a la lógica clásica, cuando ésta se aplica a un conjunto infinito D (digamos, al conjunto de los números naturales).

La cuestión inmeditata es : ¿qué tipo de matemática puede ser construida

ateniéndose a las restricciones intuicionistas? Si la matemática clásica existente pudiera ser reconstruida ateniéndose a las restricciones intuicionistas, sin un excesivo incremento en la labor requerida y sin sacrificios demasiado grandes en los resultados obtenidos, el problema de su fundamentación parecía estar resuelto. Los intuicionistas han creado una matemática totalmente nueva, incluyendo una teoría del continuo y una teoría de conjuntos (Heyting, 1934). Esta matemática emplea conceptos y hace distinciones que no se encuentran en la matemática clásica; y es considerada en sí misma, muy atractiva. Como sustituto de la matemática clásica ha resultado ser menos poderosa que ésta, y en muchos aspectos, más complicada en su desarrollo. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos de Brouwer no podemos afirmar que cualesquiera dos números reales a y b son iguales o desiguales. Nuestro conocimiento acerca de la igualdad o la desigualdad de a y b puede ser más o menos específico. Es manifiesto que tales complicaciones, reemplazan la teoría clásica del continuo de una forma mucho menos clara. Pese a ello, la posibilidad de una reconstrucción intuicionista de la matemática clásica, no puede ser excluida aunque ello signifique una nueva reinterpretación de los conceptos desarrollados en ella.

Formalismo: Brouwer ha revelado lo que la tendencia constructiva envuelve en sus últimos refinamientos; Hilbert hace lo mismo con respecto a la tendencia axiomática o existencial. El método axiomático había cobrado ya un mayor rigor desde la axiomática de Euclides a la axiomática formal de los "Grundlagen der Geometrie" (1899) de Hilbert. El formalismo es el resultado de un nuevo paso, encaminado a afrontar la crisis causada por las paradojas y el desafío de Brouwer y Weyl a la matemática clásica. Este paso fue previamente bosquejado por Hilbert en 1904, y seriamente acometido por él y sus colaboradores Bernays, Ackermann, Von Neumann y otros, desde 1920 (Cfr. Bernays 1935, Weyl 1944).

Hilbert concedía que las proposiciones de la matemática clásica que

envuelven el infinito completo, van más allá de la evidencia intuitiva. Pero rehusó seguir a Brouwer y abandonar por esa razón la matemática clásica.

Para salvar la matemática clásica frente a la crítica intuicionista, propuso un programa que podemos establecer preliminarmente como sigue: la matemática clásica deberá ser formulada como una teoría axiomática formal, y deberá demostrarse que esta teoría es consistente, esto es, libre de contradicción. Ello está íntimamente conectado con la cuestión de saber qué nos motiva a tomar como base el sistema axiomático particular elegido. A este fin, la consistencia es un argumento necesario pero no suficiente. Un veredicto sobre el pensamiento de los formalistas dependerá en parte de los frutos del programa que proponen. Este programa propugna una disciplina denominada "metamatemática", por la que pretenden en particular, establecer la consistencia de la matemática clásica (Kleene, 1952).

En resumen, desde que se representó al infinito, en matemática, con el símbolo ∞ (introducido por Wallis, en su obra *Aritmetica Infinitorum*, publicada en Francia en 1808¹) hasta la construcción actual de \aleph^2 (hecha por Cantor, entre 1895 y 1897 y publicada en la revista alemana *Mathematische Annalen*³), el problema del infinito ha sido una de las preocupaciones fundamentales de la matemática. Tanto así que han surgido diferentes escuelas de pensamiento que intentan develar su misterio, como ya se ha expuesto. Se puede decir entonces, que el desarrollo de la Matemática resultó, en gran parte, al esfuerzo de penetrar y comprender lo infinito. El progreso material de los hombres, depende de las investigaciones abstractas o científicas del presente, y será a los hombres de ciencia, que trabajan para fines puramente científicos sin pensar en la aplicación práctica de sus doctrinas, a quienes deberá la humanidad su desarrollo material en tiempos futuros.

¹ Leibnitz simbolizaba al infinito al usar la primera letra del alfabeto griego α (alfa); seguramente el símbolo ∞ es una variante de dicha letra.

² Primera letra del alfabeto hebreo (alef).

³ Volumen 46, 1895, p.481-512; Volumen 49, 1897, p.207-246.

Es la búsqueda del equilibrio entre las diferentes ideas en torno del infinito, así como sus diferentes concepciones, la que ha motivado la escritura del presente material, cuyo fin es el de dar a conocer el método de recursión transfinita (un método basado en la idea formal del infinito) y una de sus aplicaciones en especial: la construcción de ciertas entidades numéricas, desde hace un siglo atrás desconocidas, y que hoy en día las conocemos como **números cardinales inaccesibles**.

El matemático Kurt Gödel en los años treinta, demostró que hay enunciados matemáticos que son desde luego ciertos, (es decir, son constructibles a partir de las reglas de deducción del sistema axiomático formal en cuestión) pero que no pueden ser demostrados, esto es, son indecidibles (no se puede probar su veracidad o su falsedad dentro del sistema). Y esto no ocurre sólo en algunos campos abstractos de la matemática, sino también en las operaciones cotidianas de cálculo. Poco después de que Gödel publicara su hallazgo, el matemático inglés Alan Turing lo utilizó para demostrar que hay cifras que no pueden ser calculadas. Son cifras (números) que, aunque está demostrada su existencia, no se derivan de ningún cálculo realizado por cualquier procedimiento matemático sistemático finitista (algoritmo). De modo que sólo podemos resolver una pequeña parte de las verdades matemáticas (fórmulas bien formadas en un sistema formal) existentes. Quizá el presente trabajo, ayude al lector a encaminarse por la senda escarpada que algunos pensadores, como Cantor, Gödel, Cohen y otros, nos han abierto con el fin de ampliar, aunque sea en una pequeña porción, la mínima parte de las verdades matemáticas existentes y conocer otras entidades numéricas hasta hace poco desconocidas, fruto de la aplicación de métodos novedosos que involucran la idea del infinito; este es el deseo del autor.

Seguramente, los cardinales inaccesibles pertenecen a esa gama de entidades numéricas, predichas por Turing, que hasta hoy hemos podido develar.

Contenido

Páginas

Prefacio.....	xiii
I. Introducción: La Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel.....	1
A. Introducción Histórica.....	1
B. Lenguaje y Símbolos.....	5
C. Igualdad.....	8
D. Construcción de Clases.....	12
E. Propiedades Elementales de Clases.....	21
F. Funciones y Relaciones.....	34
II. Los Números Naturales y Ordinales.	
El Principio de Inducción Transfinita.....	54
G. Los Números Ordinales.....	54
III. La Recursión Transfinita.	
Los Números Cardinales Inaccesibles.....	69
H. Conceptos Básicos de Aritmética Ordinal.....	82
I. Los Números Cardinales.....	85
J. Hipótesis Acerca de la Construcción de los Números Cardinales Inaccesibles.....	105
K. Sucesiones y Funciones Normales: Hacia los Cardinales Atractores.....	112
L. Puntos Fijos: Atractores.....	116
M. Aplicación a los Cardinales.....	117
IV. El Problema del Infinito.....	121
N. Introducción.....	121
O. Acerca del Infinito: El Bosquejo de una Prueba de la Hipótesis del Continuo Haciendo Uso del Método de Recursión.....	123
V. Bibliografía.....	172

*Él, en el momento preciso,
todo lo hizo hermoso;
puso además en la mente
humana la idea de lo
infinito, aun cuando el
hombre no alcanza a
comprender en toda su
amplitud lo que Dios ha
hecho y lo que hará.
(Eclesiastés 3.11)*

I. INTRODUCCIÓN:

La teoría de conjuntos de Zermelo–Fraenkel

(Versión de Paul Cohen)

*“¡En nombre de Allah, Clemente y Misericordioso!
¡Lado sea el Omnipotente Creador de todos los mundos!
¡La misericordia de Dios es nuestro atributo supremo!
¡Te adoramos, Señor, e imploramos Tu asistencia!
¡Condúcenos por el camino cierto!
¡Por el camino de los iluminados y bendecidos por Ti!”*

(El Corán)

A. Introducción Histórica.

En 1885 y 1897 Georg Cantor (1845-1918) publicó su trabajo sobre números ordinales y cardinales¹. La teoría de Cantor de los números ordinales y cardinales fue la culminación de tres décadas de descubrimiento sobre números “agregados”. Empezando con su trabajo sobre la enumeración de conjuntos infinitos², publicado en 1874, Cantor construyó una nueva teoría del infinito. En esta teoría una colección de objetos, también una colección infinita, es concebida como una entidad singular, es decir, como un solo objeto independiente de los objetos que lo forman.

¹ Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Erster artikel). Math. Ann. Vol. 46, 1885, p.481-512 (Zweiter Artikel) Math. Ann. Vol. 49, 1887, p.207-246. Para una traducción al inglés ver Cantor Georg, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Dover Publications, Inc.

² Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. J. Reine Angew. Math. Vol.77,1874,p.258-262. En este tratado Cantor prueba que el conjunto de todos los números es enumerable y que el conjunto de todos los números reales no lo es.

La noción de un conjunto infinito como una entidad completa no fue universalmente aceptada. Críticos argumentaron que la lógica es una extrapolación de experiencias que son necesariamente finitistas. Extender la lógica de lo finito a lo infinito, ocasionó riesgos muy graves para apoyar la teoría de Cantor. Esta predicción de desastres lógicos, pareció vindicada con el regreso del siglo de las paradojas que fueron descubiertas en los fundamentos de la nueva disciplina. Dedekind detuvo la publicación de su *Was sind und was sollen die Zahlen?*³ Frege concedió que el fundamento de su *Grundgesetze der Arithmetik*⁴ fue destruido.

No obstante, la teoría de conjuntos ganó suficiente soporte para sobrevivir la crisis de las paradojas. En 1908, hablando en el congreso Internacional de Roma, Henri Poincaré (1854-1912) propuso un remedio para ser probado⁵. Como recompensa él prometió “el trabajo del físico llamado a tratar un bello caso patológico”. Pero al mismo tiempo Zermelo y Russell fueron ya de antemano buscando los principios fundamentales sobre los cuales una teoría consistente pudiera ser construida.

De esto, uno puede suponer que el único propósito de axiomatizar es evitar las paradojas. Hay sin embargo, razones para creer que la axiomática de la teoría de conjuntos, habría evolucionado siempre en la ausencia de paradojas.

Ciertamente el trabajo de Dedekind y de Frege en la fundamentación de la aritmética, no fue motivado por temor a las paradojas. Fue más bien un deseo de ver qué principios fundamentales fueron requeridos. En su *Begriffsschrift* Frege señala: “... dividamos todas las verdades que requieren justificación en dos tipos, esas para las cuales la prueba puede ser llevada a cabo puramente por medio de la lógica y esas para las cuales deben ser apoyadas en hechos de la experiencia... Ahora, cuando considero la pregunta a cuál de estos dos tipos pertenece el juicio

³ El título de esta obra es posible traducirla como: *¿Qué son y qué significan los números?*

⁴ El título de esta obra es posible traducirla como: *Las leyes fundamentales de la Aritmética.*

⁵ Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici Roma 1909, Vol. 1, p.182.

aritmético, primero he considerado cuán lejos uno puede proceder en Aritmética únicamente por medio de inferencias..."⁶

Muy temprano en la historia de la teoría de conjuntos, se descubrió que el axioma de elección, la hipótesis del continuo, y la hipótesis del continuo generalizada, son principios de especial interés e importancia. La hipótesis del continuo, es la solución conjeturada por Cantor sobre la cuestión de cuántos puntos hay en una línea en un espacio Euclideoano⁷. Un enunciado formal de la hipótesis del Continuo y su generalización, fue dada posteriormente.

El axioma de elección, en una formulación, asevera que dada cualquier colección de conjuntos disjuntos por pares, no vacíos, existe un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada conjunto de la colección dada. El descubrimiento del axioma de elección, tiene importantes aplicaciones para la mayoría de las áreas de la matemática, y esto forzó a proveer razones para su aceptación. Su estatus como axioma, así como la hipótesis del continuo generalizada, no fue clarificada hasta que Kurt Gödel, en 1938, los probó ser consistentes con los axiomas de la teoría de conjuntos y Paul Cohen, en 1963, probó que son cada uno independientes de los axiomas de la teoría general de conjuntos⁸. En orden, al hacer esto, debemos desarrollar una teoría de conjuntos satisfactoria.

Para Cantor un conjunto fue "cualquier colección entre un todo, M , de objetos definidos y separados, m , de nuestro pensamiento"⁹. Esta aceptación intuitiva de cualquier colección como un conjunto, conduce a las paradojas clásicas, como por

⁶ Van Heigenoort, Jean. From Frege to Gödel. Cambridge:Harvard University Press, 1967.p.5.

⁷ Ver What is Cantor's Continuum Problem? por Kurt Gödel in the Amer. Math. Montly. Vol.54 (1947), p.515-525. Una versión revisada y extendida de este tratado es también fundada en Benacerraf, Paul and Putman, Hilary, Philosophy of Mathematics Selected Readings, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc. 1964.

⁸ Cohen también probó que la negación de la Hipótesis del Continuo también es consistente con la axiomática de ZF, y su aceptación conduce a la dependencia del axioma de elección.

⁹ Cantor Georg. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. New York: Dover Publications, Inc.

ejemplo, la paradoja de Russell sobre colecciones: si la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos es un conjunto, entonces este conjunto tiene la propiedad de que es un elemento de sí mismo si y sólo si no es elemento de sí mismo. Al desarrollar una teoría de conjuntos tenemos dos opciones, o debemos abandonar la idea de que nuestra teoría abarca colecciones arbitrarias en el sentido de Cantor, o debemos distinguir al menos dos tipos de colecciones: colecciones arbitrarias, que llamaremos clases, y ciertas colecciones especiales que llamaremos conjuntos. Las clases o colecciones arbitrarias, son no obstante tan útiles y nuestros sentimientos intuitivos acerca de clases son tan fuertes que no nos atrevemos a abandonarlas. Una teoría satisfactoria de conjuntos, debe proveer un medio de hablar sin peligro acerca de clases. Hay muchas maneras de desarrollar tal teoría.

Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) en su *Principia Mathematica* (1910) resolvieron las dificultades con una teoría de tipos. Ellos establecieron una jerarquía de tipos de colecciones. Una colección x puede ser un miembro de una colección y si y sólo si y está un nivel superior en la jerarquía y desde aquí, hay infinitas nociones primitivas (universos del discurso).

Entre otros sistemas, se encuentran la teoría de conjuntos de Gödel-Bernay (GB) y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), desarrolladas del trabajo de Bernays (1937-1954), Fraenkel (1922) y Zermelo (1908). Nuestra lista es alfabética. No intentaremos identificar la contribución específica de cada uno. Siguiendo cada nombre, hemos indicado el año o período de años de mayor contribución.

En la teoría de conjuntos de Gödel-Bernays, las paradojas clásicas son evitadas por el reconocimiento de dos tipos de clases, conjuntos y clases propias. Los conjuntos son clases que se permite que sean miembros de otras clases. Las clases propias tienen conjuntos como elementos pero no se les permite a ellas mismas ser

elementos de otras clases.

En la teoría de Zermelo-Fraenkel, tenemos únicamente dos nociones primitivas: conjunto y membresía. La clase es introducida como un término definido. En el lenguaje formal tenemos únicamente un conjunto de variables y un predicado binario con el símbolo " \in ". Así, en la teoría de Zermelo-Fraenkel la cuantificación se permite únicamente sobre el dominio de variables. Como resultado, hay teoremas en la teoría de Gödel-Bernays que no son teoremas en la teoría de Zermelo-Fraenkel. Podemos, sin embargo, probar que GB es una extensión conservadora de ZF en el sentido de que toda fórmula bien formada de ZF es demostrable en ZF si y sólo si es demostrable en GB.

El trabajo de Gödel¹⁰ fue terminado en lo que posteriormente se conoció como teoría de conjuntos de Gödel-Bernays. Sin embargo, en el presente trabajo, se prefiere la teoría de Zermelo-Fraenkel en la cual Cohen¹¹ trabajó.

B. Lenguaje y Símbolos.

Nota: El lenguaje de la teoría a construir consiste de

variables individuales¹² : x_0, x_1, \dots

un predicado constante: \in ("pertenece a", "es elemento de")

símbolos lógicos: \neg ("no"), \vee ("o"), \wedge ("y"), \Rightarrow ("si... entonces", "implica

que", "por consiguiente"), \Leftrightarrow ("si y sólo si", "equivale a"), \forall ("para todo",

"para cualquier ..."), \exists ("existe... tal que")

¹⁰ Gödel, Kurt: *The Consistence of the Continuum Hypotesis*. Princeton: Princeton University Press, 1940.

¹¹ Cohen, Paul J.: *The Independence of the Continuum Hypotesis*. Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America. Vol. 50, 1963, pp. 1143-1148.

¹² En el sistema axiomático de ZF generalmente se eligen dos nociones indefinidas: la palabra clase y la relación de membresía \in . Todos los objetos de nuestra teoría (variables individuales) son clases como se probará más adelante.

símbolos auxiliares: (,), [,], ∴ (“por lo tanto”, “así”, “por consiguiente”).

No se restringirá a una lista mínima de símbolos lógicos, ni en general, se distinguirá entre símbolo primitivo y símbolos definidos lógicamente. Cuando en un contexto dado, es conveniente tener una lista de símbolos primitivos, supondremos cualquier lista que mejor se ajuste a nuestras necesidades inmediatas.

Usaremos a, b, c, \dots, x, y, z como variables en el meta-lenguaje cuyo dominio es la colección de variables individuales del lenguaje formal. Cuando necesitemos más variables usaremos x_0, x_1, \dots y dependerá del contexto hacer aclaraciones.

También usaremos φ, ψ, η como metavariables que toman valores a partir de las fórmulas bien formadas. Nuestras reglas para fórmulas bien formadas son las siguientes:

Postulado 0

(reglas para la construcción de fórmulas bien formadas):

- i) Si x y y son variables individuales entonces $x \in y$ es una fórmula bien formada.
- ii) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas entonces $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ y $\varphi \Leftrightarrow \psi$ son fórmulas bien formadas.
- iii) Si φ es una fórmula bien formada, en la cual aparece la variable individual, y x es una variable individual entonces $(\forall x)\varphi$ y $(\exists x)\varphi$ son fórmulas bien formadas.
- iv) Una fórmula es bien formada si y sólo si su existencia es deducible a partir de las reglas (i), (ii) y (iii).

Nota: Esto significa que toda fórmula bien formada puede ser descompuesta en un número finito de pasos dentro de la primera fórmula bien formada, es decir, en una fórmula bien formada que no puede ser descompuesta en más partes bien

formadas.

Del lenguaje descrito hasta ahora, obtenemos la *Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)* por colindancia lógica de axiomas, reglas de inferencia, y axiomas no-lógicos. Los axiomas no-lógicos para ZF serán introducidos en su contexto, en tanto que los axiomas lógicos y las reglas de inferencia para nuestra teoría son los siguientes:

Postulado 1 (axiomas lógicos):

$$\text{i) } \varphi \Rightarrow [\psi \Rightarrow \varphi]$$

$$\text{ii) } [\varphi \Rightarrow [\psi \Rightarrow \eta]] \Rightarrow [[\varphi \Rightarrow \psi] \Rightarrow [\varphi \Rightarrow \eta]]$$

$$\text{iii) } [\neg \varphi \Rightarrow \neg \psi] \Rightarrow [\psi \Rightarrow \varphi]$$

$$\text{iv) } (\forall \mathbf{x})[\varphi \Rightarrow \psi] \Rightarrow [\varphi \Rightarrow (\forall \mathbf{x})\psi] \text{ donde } \mathbf{x} \text{ no es libre}^{13} \text{ en } \varphi.$$

$$\text{v) } (\forall \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{a}) \text{ donde } \mathbf{x} \text{ no tiene ocurrencia libre en una parte bien formada de } \varphi \text{ de la forma } (\forall \mathbf{a})\psi.$$

Postulado 2 (reglas de inferencia):

$$\text{i) De } \varphi \text{ y } \varphi \Rightarrow \psi \text{ se infiere } \psi.$$

$$\text{ii) De } \varphi \text{ se infiere } (\forall \mathbf{x})\varphi.$$

Nota: Usaremos el símbolo convencional “ \vdash ” para indicar que una fórmula bien formada es un teorema en nuestra teoría. Esto es, “ $\vdash\varphi$ ” es el meta-enunciado que indica que la fórmula bien formada φ es deducible a partir de reglas de inferencia de la lógica, axiomas y los axiomas no-lógicos¹⁴. Para indicar que φ es deducible

¹³ Esto es, la variable en consideración no es independiente en la fórmula bien formada, es decir, aparece en la fórmula bien formada.

¹⁴ Para una exposición más amplia consultar Takeuti G., Zaring W. M., Introduction to axiomatic Set Theory (serie Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, p.196.

usando únicamente axiomas lógicos escribiremos " $\vdash_{LA} \varphi$ ". Decimos que dos fórmulas bien formadas φ y ψ son lógicamente equivalentes si y sólo si $\vdash_{LA} \varphi \Leftrightarrow \psi$.

C. Igualdad.

Definición 0: Dos variables, a y b , se dice que son iguales (y se escribe $a=b$) si y sólo si todo elemento de a es elemento de b y viceversa. En símbolos:

$$a=b \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in b]^{15}$$

Nota: La definición 0 es incompleta en el sentido de que la variable x no ocurre en $a=b$, por consiguiente no hemos hecho aclaración alguna de cuáles de las múltiples fórmulas, equivalentes bajo cambio alfabético de variables, nosotros queremos decir $a=b$ por simple inspección. Es decir, si es válida la regla de reemplazo de a por b en una fórmula bien formada donde aparezca b , y viceversa. Este problema es fácilmente resuelto especificando que x es la primera variable de nuestra lista x_0, x_1, \dots que es distinta de a y de b . Habiendo de tal modo mostrado que podemos especificar una fórmula particular, no nos molestaremos en proceder de la misma manera aquí o en definiciones similares en adelante.

Nuestra idea intuitiva de igualdad es, por supuesto, la de identidad. Una propiedad básica que exceptuaremos de nuestra idea de igualdad es la que parafrasea dice: "iguales pueden ser sustituidos por iguales", esto es, si $a=b$ entonces algo que pueda ser declarado como a puede ser también declarado como b . En particular si cierta fórmula bien formada es válida para a , debe ser válida para b .

Si φ_x es una fórmula bien formada en la cual la variable x ocurre sin límite,

¹⁵ Esto es, dos conjuntos (clases) son iguales si y sólo si poseen los mismos elementos.

cero o más veces, entonces la aseveración de que φ_x es válida para a , no significa simplemente que la fórmula se haya obtenido de φ_x reemplazando cada ocurrencia libre de x por la validez de a . Un problema puede susitar si a ocurre limitada en φ_x . Por ejemplo, en la teoría de Zermelo-Fraenkel: $(\forall a)[a=x]$ es falso para cada x , a pesar de que $(\forall a)[a=a]$ es verdadero.

Por " φ_x válida para a " queremos decir que la fórmula siguiente es válida: primero reemplazaremos la ocurrencia limitada de a en φ_x por una variable que no ocurra en φ_x . Luego reemplazaremos cada ocurrencia libre de x por a ; resultando la fórmula que denotaremos por $\varphi_x(a)$ o simplemente $\varphi(a)$. Nuestra propiedad de sustitución para la igualdad puede ser establecida como: $a=b \Rightarrow [\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(b)]$.

Nosotros, sin embargo, no necesitaremos postular tal principio de sustitución; como lo probaremos, puede ser deducido de la definición 0 y del siguiente principio débil.

Axioma 0 (axioma de extensión¹⁶): Si $x=y$ y $x \in a$, entonces $y \in a$. Es decir:

$$(\forall a)(\forall x)(\forall y)[(x=y \wedge x \in a) \Rightarrow y \in a].$$

Nota: Básicamente, el anterior axioma nos asegura que dos variables individuales (conjuntos) son iguales si están constituidos de los mismos elementos (entidades que los forman). En el siguiente teorema, se establecen las propiedades Reflexiva, Simétrica y Transitiva de la igualdad.

Teorema 0: (i) $(\forall a)[a = a]$

$$(ii) a=b \Rightarrow b=a$$

$$(iii) (a=b \wedge b=c) \Rightarrow a=c$$

Demostración:

$$i) (\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in a]$$

¹⁶ También llamado axioma de extensionalidad.

ii) $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in b] \Rightarrow (\forall x)[x \in b \Leftrightarrow x \in a]$

iii) Si $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in b]$ y $(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow x \in c]$, entonces $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in c]$ ■

Corolario 1.0: $(\forall a)(\forall b)[a=b \Leftrightarrow b=a]$

Demostración:

Ya que $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in b] \Leftrightarrow (\forall x)[x \in b \Leftrightarrow x \in a]$,

se sigue que $a=b \Leftrightarrow b=a$ (según definición 0).

Luego, de la generalización universal de la fórmula anterior, se sigue la tesis. ■

Teorema 1: Si dos variables son iguales, entonces ambas pertenecen a una misma variable. En símbolos: $x=y \Rightarrow [x \in a \Leftrightarrow y \in a]$ ¹⁷.

Demostración: Válido a partir del Axioma 0 y el teorema 0(ii). ■

Teorema 2: Si dos variables, a y b , son iguales entonces $\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(b)$ ¹⁸. Esto es, $a=b \Rightarrow [\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(b)]$.

Demostración:

Por inducción sobre n , el número de partes bien formadas de φ :

Si $n=0$ entonces $\varphi(a)$ es de la forma $c \in d$, $c \in a$, $a \in c$, ó $a \in a$. Claramente,

$$a=b \Rightarrow [c \in d \Leftrightarrow c \in d]$$

De la definición de igualdad: $a=b \Rightarrow [c \in a \Leftrightarrow c \in b]$

Del teorema 1: $a=b \Rightarrow [a \in c \Leftrightarrow b \in c]$

Además, de la definición de igualdad y el teorema 1 respectivamente:

$$a=b \Rightarrow [a \in a \Leftrightarrow a \in b]$$

¹⁷ Esto es, si dos objetos son iguales, decir que uno de ellos pertenece a un conjunto (clase) equivale a decir que el otro también es elemento de dicho conjunto (clase).

¹⁸ Es decir, dos variables individuales (conjuntos, clases, etc.) son iguales si y sólo si ambas satisfacen las mismas fórmulas bien formadas (proposiciones, funciones proposicionales, etc.).

$$a=b \Rightarrow [b \in a \Leftrightarrow b \in b]$$

$$\therefore a=b \Rightarrow [a \in a \Leftrightarrow b \in b].$$

Como nuestra hipótesis de inducción supongamos el resultado válido para cada fórmula bien formada que tenga menos de n partes bien formadas.

Si $n > 0$ y $\varphi(a)$ tiene exactamente n partes bien formadas entonces $\varphi(a)$ debe ser de la forma

$$i) \neg\psi(a) \quad ii) \psi(a) \wedge \eta(a) \quad \text{ó} \quad iii) (\forall x)\psi(a)$$

En cada caso $\psi(a)$ y $\eta(a)$ tienen menos que n partes bien formadas, por consiguiente, de la hipótesis de inducción:

$$a=b \Rightarrow [\psi(a) \Leftrightarrow \psi(a)] \quad (a)$$

$$a=b \Rightarrow [\eta(a) \Leftrightarrow \eta(a)] \quad (b)$$

de las propiedades de negación y conjunción se sigue que:

$$a=b \Rightarrow [\neg\psi(a) \Leftrightarrow \neg\psi(a)] \quad \text{a partir de (a)}$$

$$a=b \Rightarrow [[\psi(a) \wedge \eta(a)] \Leftrightarrow [\psi(a) \wedge \eta(b)]] \quad \text{a partir de (a) y (b)}$$

Así, si $\varphi(a)$ es $\neg\psi(a)$ ó $\psi(a) \wedge \eta(a)$ tenemos que:

$$a=b \Rightarrow [\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(b)] \quad (c)$$

Si $\varphi(a)$ es $(\forall x)\psi(a)$, primero elegimos un x que sea distinto de a y b , por generalización de la hipótesis de inducción, entonces obtenemos:

$$a=b \Rightarrow [(\forall x)\psi(a) \Leftrightarrow (\forall x)\psi(b)] \quad \blacksquare$$

Nota: La extensionalidad nos asegura que un conjunto está completamente determinado por sus elementos. De un conocimiento casual con este axioma, uno puede asumir que la extensionalidad es un principio de sustitución que trata más con lógica que con teoría de conjuntos. Esto sugiere que si la igualdad fuese tomada como noción primitiva, quizá este axioma podría ser omitido. Dana

Scott¹⁹ sin embargo, ha probado que ésto no puede ser hecho sin debilitar el sistema. Así, aunque si tomásemos la igualdad como una noción primitiva lógica, sería aún necesario agregar un axioma de extensionalidad²⁰.

D. Construcción de Clases

Nota: Se ha hecho notar en la introducción, que uno de los objetivos de la teoría axiomática de conjuntos, es evitar las paradojas clásicas. La paradoja de Russell provino de la aceptación intuitiva de que dada cualquier propiedad, existe un conjunto cuyos elementos son esos objetos que tienen dicha propiedad, es decir, dada una fórmula bien formada $\varphi(x)$ que no contenga variables libres más que x , existe un conjunto que contiene todos los objetos para el cual $\varphi(x)$ es válida y no contiene todos los objetos para los cuales $\varphi(x)$ no lo es. Más formalmente:

$$(\exists a)(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow \varphi(x)]$$

Este principio, llamado **axioma de abstracción** (o el axioma de construcción de clases), fue aceptado por *Frege en su Grundgesetze der Arithmetik* (1893). En una carta²¹ a Frege (1902), Bertrand Russell señaló que el principio conduce a la siguiente paradoja: considere el predicado $x \notin x$. Si existe un conjunto "a" tal que: $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \notin x]$ entonces en particular, $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$.

La idea de la colección de todos los objetos teniendo una propiedad específica, es tan básica que difícilmente la abandonaríamos. Pero si es retenida ¿cómo sería resuelta la paradoja? La aproximación de Zermelo-Fraenkel es la siguiente:

¹⁹ *Essays on the foundations of Mathematics*. Amsterdam. North-holland publishing company, 1962, p. 115-131.

²⁰ Ver Quine, Van Orman: *Set Theory and Its Logic*. Cambridge. Mass. Harvard University press, 1969. 30f.

²¹ van Heijenoort, Jean: *From Frege to Gödel*. Cambridge: Harvard University press, p. 124-125.

Definición 1: Para cada fórmula bien formada $q(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ introduciremos el símbolo de clase: $\{x \mid q(x, a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ la cual se lee "la clase de todos los x tales que $q(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ ".

Nota: Nuestra principal interpretación, es que la clase símbolo $\{x \mid q(x)\}$ denota la clase de las variables individuales x que tienen la propiedad $q(x)$. Probaremos que la clase es una extensión de la noción de conjunto en el sentido de que todo conjunto es una clase pero no toda clase es un conjunto.

Extenderemos la \in -relación a clases símbolo de manera similar a un objeto que es un elemento de una clase $\{x \mid q(x)\}$ si y sólo si ese objeto es un conjunto y posee la propiedad definida para la clase. La paradoja de Russell, se resuelve entonces probando que $\{x \mid x \notin x\}$ es una clase propia, es decir, una clase que no es un conjunto. Se descalifica entonces por asociación a cualquier clase, incluyéndose a sí misma, por causa de que es un conjunto.

Si nosotros adjuntáramos los símbolos $\{x \mid q(x)\}$ para nuestro lenguaje objeto, debería ser necesario extender nuestras reglas para fórmulas bien formadas y agregar axiomas que restringieran los nuevos símbolos. Elegiremos preferiblemente introducir clases como términos definidos. Es esencial que proveamos un procedimiento efectivo para reducir a símbolos primitivos cualquier fórmula que contiene un término definido. Iniciaremos definiendo los contextos en los cuales las clases símbolos son permitidas aparecer. Nuestra única preocupación será su aparición en fórmulas bien formadas en *el sentido más amplio*²² que se

²² La idea básica consiste en que ahora nuestras fórmulas bien formadas no las limitaremos a determinada jerarquía de objetos (variables individuales, conjuntos, clases, etc.) sino que de aquí en adelante las clases las podremos interpretar como variables individuales (objetos) aún cuando ellas en sí mismas estén compuestas de variables individuales, de esa manera, a los conjuntos formados por conjuntos de conjuntos de objetos los podremos ver como variables individuales (elementos u objetos simples) de tal manera que el postulado 0, para la construcción de fórmulas bien formadas, siga siendo válido para nuestro nuevo sentido más amplio de variable individual.

definen por las siguientes reglas:

Definición 2:

(i) Si a y b son variables individuales entonces $a \in b$ es una fórmula bien formada en el sentido más amplio.

(ii) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio y si a y b son variables individuales, entonces $a \in \{x \mid \psi(x)\}$, $\{x \mid \varphi(x)\} \in b$, y $\{x \mid \varphi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\}$ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio.

(iii) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio entonces $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, y $\varphi \Leftrightarrow \psi$ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio.

(iv) Si φ es una fórmula bien formada en el sentido más amplio y x es una variable individual, entonces $(\exists x)\varphi$ y $(\forall x)\varphi$ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio.

(v) Una fórmula es bien formada en el sentido más amplio si y sólo si su existencia es deducible de (i)-(iv).

Nota: Es nuestra intención que toda fórmula bien formada en el sentido más amplio sea una abreviatura para una fórmula bien formada en el sentido original. Es también nuestra intención de que un conjunto pertenezca a una clase bien formada si y sólo si tiene la propiedad que define la clase, es decir, $a \in \{x \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(a)$.

Definición 3: Si φ y ψ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio, entonces

$$(i) a \in \{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \varphi(a)$$

$$(ii) \{x \mid \varphi(x)\} \in a \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists y \in a)(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow \varphi(z)]^{23}$$

$$(iii) \{x \mid \varphi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists y \in \{x \mid \psi(x)\})(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow \varphi(z)]^{24}$$

Nota: De la definición anterior, se prueba fácilmente que cada fórmula bien formada en el sentido más amplio, es reducible a una fórmula bien formada φ^* que se determina únicamente por las siguientes reglas:

Definición 4: Si φ y ψ son fórmulas bien formadas en el sentido más amplio, entonces

$$(i) [a \in b]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} a \in b$$

$$(ii) [a \in \{x \mid \varphi(x)\}]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\varphi(a)]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \varphi^*(a)$$

$$(iii) [\{x \mid \varphi(x)\} \in a]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists y \in a)(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow \varphi^*(z)]$$

$$(iv) [\{x \mid \varphi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\}]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists y)[\psi^*(y) \wedge (\forall z)[z \in y \Leftrightarrow \varphi^*(z)]]$$

$$(v) [\neg \varphi]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \neg \varphi^*$$

$$(vi) [\varphi \wedge \psi]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\varphi^* \wedge \psi^*)$$

$$(vii) [(\forall x)\varphi]^* \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)\varphi^*$$

Teorema 3: Toda fórmula bien formada en el sentido más amplio φ , es reducible a una y sólo una fórmula bien formada φ^* determinada a partir de φ mediante las reglas (i)-(vii) de la definición 4.

Demostración:

²³ En otros términos: la clase (conjunto), $\{x \mid \varphi(x)\}$, es un elemento de la familia a si y sólo si es posible encontrar algún elemento y de a , cuyos elementos satisfacen φ , es decir, si y sólo si existe algún y elemento de a tal que $y = \{x \mid \varphi(x)\}$.

²⁴ Una clase es elemento de otra (llamada comúnmente familia) si y sólo si en esta última existe un elemento compuesto de los mismos elementos de la primera clase.

Por inducción sobre n , el número de partes bien formadas²⁵, en el sentido más amplio, en φ :

Si $n=0$, es decir, si φ no tiene partes bien formadas en el sentido más amplio, entonces φ debe ser de la forma $a \in b$. De la definición 4(i), φ^* es $a \in b$.

Como nuestra hipótesis de inducción asumamos que cada fórmula bien formada en el sentido más amplio tiene menos que n partes bien formadas, en el sentido más amplio, y es reducible a una y sólo una fórmula bien formada que es determinada por las reglas (i)-(vii) de la definición 4.

Si φ es una fórmula bien formada en el sentido más amplio teniendo exactamente n partes bien formadas en el sentido más amplio y, si $n > 0$ entonces φ debe ser de una de las formas siguientes:

$$(i) a \in \{x \mid \psi(x)\}$$

$$(ii) \{x \mid \psi(x)\} \in a$$

$$(iii) \{x \mid \psi(x)\} \in \{x \mid \eta(x)\}$$

$$(iv) \neg \psi$$

$$(v) \psi \wedge \eta$$

$$(vi) (\forall x)\psi$$

En cada caso ψ y η tienen menos que n partes bien formadas en el sentido más amplio y por consiguiente hay una única fórmula bien formada ψ^* y η^* determinada por ψ y η , respectivamente, y las reglas (i)-(vii) de la definición 4. Luego, por las reglas de la definición 4(ii)-(vii), φ determina una única fórmula bien formada φ^* . ■

Nota: Del teorema anterior, toda fórmula bien formada en el sentido más amplio φ

²⁵ Una parte bien formada de cualquier fórmula bien formada, es otra fórmula bien formada (postulado 0) que es parte sintáctica de la primera. Así, por ejemplo, en la fórmula bien formada $(\forall x)[x \in a \Leftrightarrow x \in b]$, $x \in a$ es una parte bien formada de dicha fórmula, así como $x \in a \Leftrightarrow x \in b$.

es una abreviación para una fórmula bien formada φ^* . La prueba implícitamente asume la existencia de un procedimiento efectivo para determinar el número de partes bien formadas en el sentido más amplio. Tal procedimiento existe y es deducible a partir del último teorema, sin embargo nosotros no lo haremos aquí. De tal principio es inmediato que hay un procedimiento efectivo para determinar φ^* de φ .

El anterior teorema también asegura que en las definiciones 2 y 3 no se ha extendido la noción de clase (tan solo se ha extendió únicamente la notación para clase en el sentido de que si $\varphi(x)$ es una fórmula bien formada en el sentido más amplio entonces $\{x | \varphi(x)\}$ y $\{x | \varphi^*(x)\}$ son la misma clase. Esto es inmediato del teorema anterior y la igualdad para clases que ya definimos). Nótese que la definición 0 concuerda no sólo para la igualdad entre clase y clase, sino también entre conjunto y clase. Por esto, y otros propósitos se introducirá la noción de *término*.

Definición 5: Un *término* es una variable individual o una clase símbolo.

Nota: Denotaremos por A, B, C, ... a las meta-variables sobre términos.

Definición 6: Si A y B son términos entonces: $A=B$ si y sólo si $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, para cualquier variable x. Es decir, $A=B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$.²⁶

Teorema 4: $A \in B \Leftrightarrow (\exists x)[x=A \Leftrightarrow x \in B]$.²⁷

Demostración (Esquema):

Válido a partir de la definiciones 3 y 6, y el axioma 0. ■

Teorema 5: Si A, B y C son términos, entonces

²⁶ En otras palabras, dos términos son iguales si están constituidos de los mismos elementos.

²⁷ Esto es, una variable individual (objeto) o una clase símbolo, A, es elemento de un término B, es decir, de otra clase símbolo si y sólo si A es una variable individual y B es necesariamente una clase símbolo. Esto es, A se puede considerar como "objeto" respecto de B (un conjunto de objetos) en el sentido de la definición 2(I).

(i) $A=A$

(ii) $A=B \Rightarrow B=A$

(iii) $(A=B \wedge B=C) \Rightarrow A=C$

Corolario 1.5: $A=B \Leftrightarrow B=A$.

Nota: La prueba es similar a la del teorema 0 y el corolario 0.1.

Teorema 6: Si A y B son términos y φ es una fórmula bien formada en el sentido más amplio, entonces: $A=B \Rightarrow [\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)]$.²⁸

Demostración (esquema):

La prueba es por inducción sobre el número de partes bien formadas, en el sentido más amplio, sobre φ . Es similar a la prueba del teorema 2. ■

Teorema 7: $a=\{x|x \in a\}$ ²⁹

Demostración:

$x \in a \Leftrightarrow x \in a$ ■

Corolario 1.7: $A=\{x|x \in A\}$.

Nota: El teorema anterior, establece que toda variable individual es una clase. Se debe notar, sin embargo, que no toda clase es una variable individual (esto dependerá, en última instancia, de la fórmula bien formada que defina a la clase). A las clases que sean variables individuales las llamaremos *conjuntos* (de modo que aún las variables individuales resultarán ser conjuntos) y a las clases que no sean conjuntos las llamaremos *clases propias*. Para el efecto, introduciremos los predicados "***A es un conjunto***", $\mathcal{M}(A)$, y "***A es una clase propia***", $\mathcal{P}(A)$,

²⁸ Dos clases símbolo (o dos variables individuales) son iguales ssi cualquier fórmula bien formada, válida para una de ellas, es válida también para la otra.

²⁹ **Teorema 7:** Cualquier variable individual (conjunto) es una clase símbolo. En este caso basta tener la fórmula bien formada $x \in a$ (o bien la fórmula bien formada adecuada) para definir a una clase que en esencia simboliza una variable individual. En lo que resta aparecerán otras.

respectivamente.

Definición 7:

(i) Un término A es un conjunto si y sólo si existe una variable x tal que $x=A$.

Esto es, $\mathcal{M}(A) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists x)[x=A]$.³⁰

(ii) Un término A es una clase propia si y sólo si no es un conjunto.

Es decir, $\mathcal{PZ}(A) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \neg \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow (\forall x)[x \neq A]$.³¹

Teorema 8: Toda variable individual es un conjunto. Esto es, $(\forall a)\mathcal{M}(a)$.

Demostración: Ya que para cualquier a , $a=a$ (teorema 0(i)), es claro entonces que existe alguna variable x (en particular a misma) tal que $x=a$. Luego, a es un conjunto (definición 7(i)). ■

Teorema 9: $A \in \{x \mid \varphi(x)\}$ si y sólo si A es un conjunto y es válida $\varphi(A)$.³²

En símbolos: $A \in \{x \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow [\mathcal{M}(A) \wedge \varphi(A)]$

Demostración (Esquema):

El resultado se obtiene de las definiciones 3(i), 7(i), y teoremas 4 y 6. ■

Corolario 1.9: $A \in B \Rightarrow \mathcal{M}(A)$.

Demostración:

$A \in B \Leftrightarrow A \in \{x \mid x \in B\}$ ya que $B = \{x \mid x \in B\}$ (corolario 1.7), por teorema 6.

$\Leftrightarrow [\mathcal{M}(A) \wedge A \in B]$ según teorema 9.

$\Rightarrow \mathcal{M}(A)$ simplificando la fórmula anterior. ■

³⁰ Una variable individual, o una clase símbolo, es un conjunto si y sólo si se puede ver como variable individual. Esto es, por un conjunto se entiende cualquier clase que es elemento de alguna clase.

³¹ Esto es, una clase símbolo, es una clase propia si sólo si no es variable individual (desde el nivel jerárquico de los tipos que estamos trabajando).

³² Un término (variable individual o clase símbolo) es elemento de una clase símbolo si y sólo si dicho término es un conjunto y satisface la fórmula bien formada (proposición) que caracteriza a la clase símbolo. En otras palabras, $A \in B$ si y sólo si B es una clase y A es un conjunto que satisface la fórmula bien formada que define a B .

Nota: El anterior corolario, establece que toda clase o variable individual para la cual sea válido afirmar que es elemento de alguna otra clase, es un conjunto.

Corolario 2.9: $\exists x(A) \Rightarrow A \notin B$.

Demostración:

Válido a partir de la contrapuesta del corolario anterior. ■

Nota: El anterior corolario establece, tal como lo habíamos comentado antes, que la clase propia es aquella clase que no es elemento de clase alguna (inclusive ni de ella misma). Por lo tanto, es posible notar que todo conjunto es una clase, pero que no toda clase es un conjunto. Ya sabemos que $\{x | x \in a\}$ es una clase que es un conjunto (a partir de los teoremas 7 y 8), a continuación expondremos un ejemplo de una clase propia.

Definición 8 (La clase de Russell): $Ru \triangleq \{x | x \notin x\}$ ³³

Teorema 10: Ru es una clase propia. Esto es, $\exists x(Ru)$.

Demostración:

Si Ru es un conjunto entonces Ru es una variable individual (definición 7(i)); luego, la siguiente fórmula bien formada es válida a partir del teorema 8 y la definición 8: $Ru \in Ru \Leftrightarrow Ru \notin Ru$ ³⁴ (lo que conduce a contradicciones). Así, Ru es una clase propia. ■

Nota: Mientras la clase de Russell, Ru, sea una clase propia la paradoja de Russell se evita en la teoría. Nótese que la clase de Russell es la primera que hemos encontrado que no es un conjunto. Otras aparecerán más adelante.

³³ La clase de Russell se define como el conjunto de todas las variables individuales (conjuntos) que no se pertenecen a sí mismas. Por otro lado, el símbolo " \triangleq " se debe entender como una igualdad en el metalenguaje.

³⁴ Si la clase de Russell fuera un conjunto entonces la proposición $Ru \notin Ru$ es válida, es decir, Ru satisface la fórmula bien formada $x \notin x$, que define a la clase Ru. Luego, por la definición 2(i), $Ru \in Ru$.

Hemos ya establecido ejemplos de que las clases de objetos individuales, para los cuales una fórmula bien formada dada φ es válida, pueden ser conjuntos o clases propias. Estos conjuntos, $\{x \mid \varphi(x)\}$, para los cuales $\varphi(x)$ no tiene variables libres, excepto x , los llamaremos conjuntos *definibles*.³⁵

Definición 9: Un conjunto a es *definible* si y sólo si existe una fórmula bien formada $\varphi(x)$ que no contiene otras variables libres más que x , tal que $a = \{x \mid \varphi(x)\}$.

Nota: Toda variable individual es un conjunto definible, según teorema 7.

E. Propiedades Elementales de Clases.

Nota: A continuación se introducirán ciertas propiedades de clases. La mayoría de ellas son de consecuencia inmediata; es por ello que omitiremos las pruebas para algunos teoremas. Sin embargo, antes de ello, presentaremos los conceptos de par no-ordenado y conjunto unitario.

Definición 10: (i) $\{a, b\} \triangleq \{x \mid x=a \vee x=b\}$

(ii) $\{a\} \triangleq \{a, a\}$

Nota: Postularemos que los pares (no-ordenados), $\{a, b\}$, son conjuntos.

Axioma 1 (axioma de apareamiento): $(\forall a)(\forall b) \exists M(\{a, b\})$.³⁶

Definición 11: $(a \ b) \triangleq \{x \mid x=\{a\} \vee x=\{a, b\}\}$ ³⁷

³⁵ Precisamente los conjuntos que no son definibles son aquellos que coinciden con la noción de elemento primario de nuestra mente, como en el caso del conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ donde el elemento "a" por ejemplo, visto como una vocal, impide que le veamos como un conjunto definible, a menos que le asignemos una fórmula bien formada; así, "a" es un conjunto (teorema 8) no-definible en este caso.

³⁶ *Axioma de apareamiento:* Si a y b son conjuntos (variables individuales, teorema 8), $\{a, b\}$ es un conjunto. Note que es imposible formular un enunciado similar para clases propias.

³⁷ Una manera equivalente de definir parejas ordenadas es la siguiente: $(a \ b) \triangleq \{\{a, \phi\}, \{b, \{\phi\}\}\}$ siendo ϕ la clase vacía (definición 20).

Teorema 11:

(i) $x \in \{a, b\} \Leftrightarrow [x=a \vee x=b]$

(ii) $x \in \{a\} \Leftrightarrow x=a$

(iii) $x \in (a \ b) \Leftrightarrow [x=\{a\} \vee x=\{a, b\}]$

(iv) $\{a\}=\{b\} \Leftrightarrow a=b$

(v) $\{a\}=\{b, c\} \Leftrightarrow a=b=c$

(vi) $(a \ b)=(c \ d) \Leftrightarrow [a=c \wedge b=d]$

(vii) $\mathcal{M}((a \ b))$

(viii) $(\forall x)[a \in x \Rightarrow b \in x] \Rightarrow a=b$

(i) Demostración:

Válida a partir de las definiciones 4(i) y 10(i).

(ii) Demostración:

$$x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{a, a\} \quad \text{a partir de la definición 10(ii)}$$

$$\Leftrightarrow [x=a \vee x=a] \quad \text{según teorema 11(ii)}$$

$$\therefore x \in \{a\} \Leftrightarrow x=a$$

(iii) Demostración:

Válida a partir de las definiciones 4(i) y 10(i).

(iv) Demostración:

$$\{a\}=\{b\} \Leftrightarrow (\forall x)[x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{b\}] \Leftrightarrow (\forall x)[x=a \Leftrightarrow x=b] \text{ (def. 0 y teorema 11(ii)).}$$

(v) Demostración:

$$\{a\}=\{b, c\} \Leftrightarrow (\forall x)[x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{b, c\}] \Leftrightarrow (\forall x)[x=b \Leftrightarrow (x=a \vee x=c)] \text{ (definición 0 y teorema 11(i),(ii)).}$$

(vi) Demostración:

$(a \cup b) = (c \cup d) \Leftrightarrow (\forall x)[x \in (a \cup b) \Leftrightarrow x \in (c \cup d)]$ según definición 0

$\Leftrightarrow (\forall x)[(x = \{a\} \vee x = \{a, b\}) \Leftrightarrow (x = \{c\} \vee x = \{c, d\})]$ de la definición 11

$\Leftrightarrow (\forall x)[[(x = \{a\} \Leftrightarrow x = \{c\}) \wedge (x = \{a, b\} \Leftrightarrow x = \{c, d\})] \vee$

$\vee [(x = \{a\} \Leftrightarrow x = \{c, d\}) \wedge (x = \{a, b\} \Leftrightarrow x = \{c\})]$

$\Leftrightarrow [(a = c \wedge b = d) \vee b = c \wedge a = d]$ teoremas 11(iv),(v) y el corolario 0.1

$\Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$ a partir de la definición 0.1(ii). ■

Nota: La noción de par no-ordenado y par ordenado tienen generalizaciones naturales a n-adas no-ordenadas, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y n-adas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Definición 12: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \triangleq \{x \mid x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}$

Definición 13: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \triangleq ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n), n \geq 3$.

Nota: Ya que los pares ordenados son conjuntos se sigue, por inducción, que las n-adas ordenadas son también conjuntos. Del hecho de que los pares no-ordenados son conjuntos, podemos también esperar (usando inducción) que las n-adas no-ordenadas sean conjuntos también. Para tales pruebas, sin embargo, necesitamos ciertas propiedades de la unión de conjuntos.

Definición 14: (i) $\cup A \triangleq \{x \mid (\exists y)[y \in A \wedge x \in y]\}$

(ii) $\cap A \triangleq \{x \mid (\forall y)[y \in A \Rightarrow x \in y]\}$.

Axioma 2 (axioma de uniones): $(\forall a) \mathcal{M}(\cup a)$.³⁸

Definición 15: (i) $A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(ii) $A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Teorema 12: $a \cup b = \cup \{a, b\}$

³⁸ *Axioma de las uniones:* Dado cualquier conjunto de conjuntos, entonces la unión de todos sus elementos es también un conjunto.

Demostración:

$$\begin{aligned} x \in a \cup b &\Leftrightarrow [x \in a \vee x \in b] \\ &\Leftrightarrow (\exists y)[x \in y \wedge y \in \{a, b\}] \\ &\Leftrightarrow x \in \cup\{a, b\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 1.12: $\mathcal{M}(a \cup b)$.³⁹

Demostración:

$$\mathcal{M}\{a, b\} \Leftrightarrow \mathcal{M}(\cup\{a, b\}) \Leftrightarrow \mathcal{M}(a \cup b) \quad (\text{axiomas 1 y 2, teoremas 8 y 12}). \blacksquare$$

Nota: A continuación se presentan algunas propiedades importantes, las cuales incluimos sin demostración ya que son de fácil comprensión.

Teorema 13:

$$(i) \quad b \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Leftrightarrow (b = a_1 \vee b = a_2 \vee \dots \vee b = a_n)$$

$$(ii) \quad \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}, \quad n \geq 1$$

$$(iii) \quad \mathcal{M}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}).$$

$$(iv) \quad \mathcal{M}((a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)).$$

$$(v) \quad a \in b \cup \{b\} \Leftrightarrow [a \in b \vee a = b]$$

$$(vi) \quad A \cup B = B \cup A$$

$$(vii) \quad A \cap B = B \cap A$$

$$(viii) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(ix) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(x) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(xi) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

³⁹ La unión de dos conjuntos cualesquiera es un conjunto.

(i) Demostración:

Válida a partir de la definición 4(i) y la definición 10.

(ii) Demostración:

$$x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} \Leftrightarrow x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \vee x \in \{a_{n+1}\} \text{ definición 15(i)}$$

$$\Leftrightarrow (x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n \vee x = a_{n+1})$$

teorema 13(i) y teorema 11(ii)

$$\Leftrightarrow x \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} \text{ por teorema 13(i).}$$

(iii) Demostración:

Por inducción sobre n , el número de elementos de la clase. Para $n=1$ la conclusión es evidente a partir de la definición 12(ii) y del axioma de apareamiento (axioma 1). Para $n=2$ la conclusión se sigue también del axioma 1. Sea ahora válida la tesis para cualquier índice menor o igual a $n-1$, esto es, $\mathcal{M}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$, $n \geq 2$. Luego, $\mathcal{M}(\{a_n\})$. Ya que $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (teorema 13(ii)), la tesis se sigue del axioma de las uniones (axioma 2) y de la hipótesis de inducción.

(v) Demostración:

Válida a partir de las definiciones 4(i) y 15(i) y del teorema 11(ii). ■

Nota: A continuación se introducirán las nociones de subclase, $A \subseteq B$, y el conjunto potencia, $\mathcal{P}(a)$.⁴⁰

Definición 16: (i) $A \subseteq B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B]$.

(ii) $A \subset B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B \wedge A \neq B]$.

⁴⁰ Algunos autores simbolizan al conjunto potencia como 2^a .

Definición 17 (La clase potencia de un conjunto): $\mathcal{P}(a) \triangleq \{x \mid x \subseteq a\}$ ⁴¹

Nota: No tenemos base alguna para clasificar la potencia de un conjunto como clase propia o como conjunto; supondremos pues la validez del siguiente axioma:

Axioma 3 (axioma de potencias): $(\forall a) \mathcal{M}(\mathcal{P}(a))$.⁴²

Nota: Las siguientes fórmulas bien formadas en el sentido más amplio, pueden ser reducidas a fórmulas bien formadas como sigue:

(i) $\{a, b\} \in U_c \Leftrightarrow [\{a, b\} \in U_c]^*$ (definición 4(i))

(ii) $\mathcal{M}(\{a, b\}) \Leftrightarrow (\exists x)[a \in x \vee b \in x]^*$ (definiciones 7(i), 8(i), 4(vii))

(iii) $\mathcal{M}(U_a) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)[z \in x \Leftrightarrow z \in U_a]^* \Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)[z \in x \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)]^*$
(definiciones 0, 7(i), 13(i)).

(iv) $\mathcal{M}(\mathcal{P}(a)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)[y \in x \Leftrightarrow y \subseteq a]^* \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)[y \in x \Leftrightarrow (\forall z)(z \in y \Rightarrow z \in a)]^*$
(definiciones 7(i), 0, 16, 15(i)).

Teorema 14:

(i) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

(ii) Si $A \subseteq B$ entonces $C \cap A \subseteq C \cap B$

(iii) Si $A \subseteq B$ entonces $C \cup A \subseteq C \cup B$

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

(v) $A \subseteq B \Leftrightarrow A = A \cap B$

(vi) $A \subseteq A$

⁴¹ La clase potencia de un conjunto es la clase de todos los subconjuntos de dicho conjunto. Además, nótese que la clase potencia de una clase propia es imposible construirla a la luz del corolario 2.9, ya que una de las propiedades intrínsecas de esta clase es que uno de sus elementos debe ser la clase propia misma, lo cual es imposible (ver teorema 14(xii)).

⁴² Es decir, $\mathcal{P}(a)$ es siempre un conjunto. Una de las motivaciones para la formulación de este axioma es el hecho de poder construir la clase potencia de otra clase potencia ya construida (que de otro modo sería imposible). Este hecho será de gran utilidad como se verá en la sección H. De aquí en adelante nos referiremos a la clase potencia como *el conjunto potencia de un conjunto* o simplemente como el *potencia de un conjunto*.

- (vii) $A \subseteq A \cup B$
- (viii) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
- (ix) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$
- (x) Si $A=B$ entonces $A \cup C = B \cup C$
- (xi) $a \in \mathcal{P}(a)$
- (xii) $\bigcup \mathcal{P}(a) = a$
- (xiii) $a \subseteq b \Leftrightarrow \mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(b)$
- (xiv) $a=b \Leftrightarrow \mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b)$

Nota: Ya que existen clases que no son conjuntos, debemos restringir el axioma de abstracción ya antes expuesto: existe (un conjunto) a tal que $x \in a \Leftrightarrow \varphi(x)$, para todo (conjunto) x . Zermelo propuso en su lugar el axioma de separación que asegura que la clase de todos los objetos en un conjunto que tienen una propiedad dada, es un conjunto, es decir, $a \cap A$ es un conjunto. Fraenkel a su vez reemplazó el axioma de Zermelo por un principio que asevera que las funciones mapean conjuntos sobre conjuntos. La condición de que una fórmula bien formada $\varphi(u, v)$ deba definir una función, es decir, que $\{(u, v) | \varphi(u, v)\}$ sea una relación univaluada es simplemente que: Si $\varphi(u, v)$ y $\varphi(u, w)$ entonces $v=w$. Si este es el caso y si

$$A = \{u | (\exists v)\varphi(u, v)\} \quad \text{y} \quad B = \{v | (\exists u)\varphi(u, v)\}$$

entonces la función en cuestión mapea A sobre B y, por el axioma de Fraenkel, mapea $a \cap A$ sobre un subconjunto de B (fig.1). Esto es,

$$(\forall a) \in \mathcal{M}(\{y | (\exists z \in a)\varphi(z, y)\})$$

o equivalentemente: $(\forall a)(\exists b)(\forall y)[y \in b \Leftrightarrow (\exists z \in a)\varphi(z, y)]$ ⁴³

⁴³ Esto es, para cualquier conjunto a existe un conjunto b tal que para cualquier y : $y \in b \Leftrightarrow \varphi(z, y)$, para algún z .

Del axioma de Fraenkel podemos fácilmente deducir el de Zermelo. Los dos son, sin embargo, no equivalentes. En efecto, Richard Montague ha probado que la teoría de Zermelo-Fraenkel no es una extensión finita de la teoría de conjuntos de Zermelo⁴⁴.

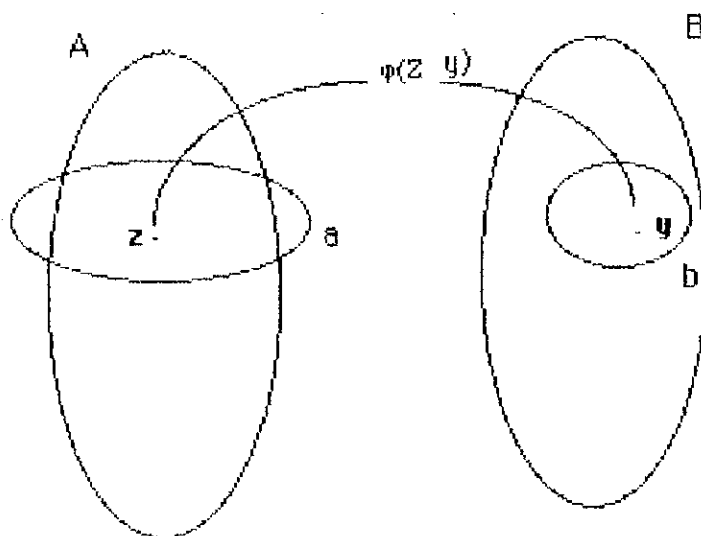


fig.1

Axioma 4 (axioma del esquema de reemplazo o sustitución):

$$(\forall a)[(\forall u)(\forall v)(\forall w)[(\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, w)) \Rightarrow v=w] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists b)(\forall y)[y \in b \Leftrightarrow (\exists x)[x \in a \wedge \varphi(x, y)]]^{45}$$

Teorema 15 (esquema de separación de Zermelo⁴⁶):

$$(\forall a)(\exists b)(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x))]$$

⁴⁴ Essays on The Foundations of Mathematics. Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

⁴⁵ Esto es, para cualquier variable (conjunto) a , si una fórmula bien formada, $\varphi(u, v)$, define una función (una relación univaluada, es decir, si para cualesquiera u, v, w se cumple que si $\varphi(u, v)$ y $\varphi(u, w)$ entonces $v=w$), entonces existe una variable (conjunto) b tal que para todos sus elementos existe una preimagen bajo la función definida por φ , esto es, para toda variable (conjunto) y se tiene que $y \in b$ si y sólo si $x \in a$ y $\varphi(x, y)$, para algún x . En otras palabras, toda función definida por una fórmula bien formada mapea conjuntos sobre conjuntos.

⁴⁶ También llamado Axioma de especificación de Frege: A todo conjunto "a" y a toda fórmula bien formada (condición) $\varphi(x)$ corresponde un conjunto "b" cuyos elementos son precisamente aquellos elementos "x" de "a" para los cuales se cumple $\varphi(x)$. Esto es, para todo conjunto a existe otro conjunto b tal que $x \in b$ si y sólo si $x \in a$ y $\varphi(x)$, para todo x .

Demostración:

Aplicando el axioma 4 a la fórmula bien formada $\varphi(x) \wedge u=v$ donde v no ocurre en $\varphi(u)$, tenemos que:

$$[[\varphi(u) \wedge u=v] \wedge [\varphi(u) \wedge u=w]] \Rightarrow v=w \quad (\text{teorema 0})$$

De ahí que: $(\exists b)(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow (\exists u)[\varphi(u) \wedge u=x \wedge x \in a]]$ (axioma 5)

Es decir: $(\exists b)(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow (\varphi(x) \wedge x \in a)]$ (teorema 2). ■

Corolario 1.15: $(\forall a) \exists \mathcal{M}(\{x | x \in a \wedge \varphi(x)\})$ ⁴⁷

Demostración:

Por el teorema 15, $(\exists b)[b = \{x | x \in a \wedge \varphi(x)\}]$ (definición 0); Así, del teorema 8 y de la generalización universal (sobre a) de la proposición anterior se sigue la tesis. ■

Nota: De aquí en adelante escribiremos $\{x \in a | \varphi(x)\}$ en lugar de $\{x | x \in a \wedge \varphi(x)\}$.

Definición 18: $\{x \in a | \varphi(x)\} \triangleq \{x | x \in a \wedge \varphi(x)\}$.

Corolario 2.15 (axioma de separación): $\exists \mathcal{M}(a \cap A)$. ⁴⁸

Demostración:

$a \cap A = \{x \in a | x \in A\}$ (definiciones 15(ii), 18). Así, del corolario 1.15 se sigue la conclusión. ■

Definición 19: $A - B \triangleq \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

Teorema 16: $\exists \mathcal{M}(a - A)$.

Demostración:

$a - A = \{x \in a | x \notin A\}$ (definiciones 18 y 19). Por lo tanto, aplicando el corolario 1.15 obtenemos la conclusión. ■

⁴⁷ Corolario 1.15: A todo conjunto "a" corresponde la clase $\{x \in a | \varphi(x)\}$, la cual es un conjunto.

⁴⁸ Corolario 2.15: La intersección de un conjunto con una clase cualquiera (término) es un conjunto.

Definición 20 (La clase vacía y el cero): $0 \triangleq \phi \triangleq \{x \mid x \neq x\}$

Nota: En nuestro desarrollo teórico tanto el 0 (cero) como la clase vacía, $\{x \mid x \neq x\}$, (denotada generalmente por ϕ) significan lo mismo. Como veremos, la clase vacía (cero) será nuestro primer número ordinal.

Teorema 17: $(\forall a)[a-a=\phi]$.

Demostración:

$x \in a-a \Leftrightarrow (x \in a \wedge x \notin a)$ (definición 17), es decir, $x \in a-a \Leftrightarrow x \neq x$ (negación de la conjunción del teorema 1 y el teorema 11(viii)). En otras términos $x \in a \Leftrightarrow x \in \phi$ (definición 18).■

Corolario 1.17: $\mathcal{M}(\phi)$.

Demostración:

Del teorema 17: $(\forall a)[a-a=\phi] \Rightarrow (\exists a)[a-a=\phi]$

Así, del teorema 16 y de la definición 6(i) se sigue que ϕ es un conjunto.■

Teorema 18:

(i) $(\forall a)[a \notin \phi]$

(ii) $a \neq \phi \Leftrightarrow (\exists x)[x \in a]$

(i) **Demostración:**

$(\forall a)[a=a]$ Por teorema 0(i). De ahí que $a \notin \phi$ (definición 18).

(ii) **Demostración:**

$a \neq \phi \Leftrightarrow [(\exists x)[x \in \phi \wedge x \notin a] \vee (\exists x)[x \in a \wedge x \notin \phi]]$ negación de la definición 0.

$\Leftrightarrow (\exists x)[x \in a]$ del teorema 18(i).■

Nota: Con el fin de excluir la posibilidad de que un conjunto pueda ser un elemento

de sí mismo y también excluir la posibilidad de tener “ \in -loops” (cadenas cerradas bajo la relación \in), es decir, $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1$. Zermelo introdujo su axioma de regularidad, también conocido como el axioma de fundamentación, el cual asegura que todo conjunto no-vacío “ a ” contiene un elemento “ x ” con la propiedad de que ningún elemento de “ x ” es también elemento de “ a ”. Una forma fuerte de este axioma asegura la misma propiedad para clases no-vacías. Es posible probar que las formas débil y fuerte son, en efecto, equivalentes.

Axioma 5 (axioma de regularidad, forma débil):

$$a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)[x \in a \wedge x \cap a = \emptyset]^{49}$$

Axioma 5' (axioma de regularidad, forma fuerte):

$$A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)[x \in A \wedge x \cap A = \emptyset]^{50}$$

Nota: En realidad, este último axioma es posible deducirlo como teorema a partir de la axiomática aquí expuesta y de la colindancia de los conceptos de función y relación.⁵¹

Teorema 19: $\neg(a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1)$

Demostración (por contradicción):

Del teorema 8 y el teorema 13(iii), $(\exists a)[a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}]$.

De ahí que si $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1$ entonces $(\forall x)[x \in a \Rightarrow x \cap a \neq \emptyset]$ (definición 13(ii)).

Lo que contradice al axioma de regularidad. ■

Corolario 1.19: $(\forall a)[a \notin a]$.

Demostración:

Basta aplicar el teorema 19 para $n=1$. ■

⁴⁹ Esto es, todo conjunto no vacío tiene al menos un elemento disjunto con dicho conjunto.

⁵⁰ Esto es, toda clase tiene al menos un elemento disjunto con dicha clase.

⁵¹ Para una mejor exposición del tema consulte el libro *Introduction to axiomatic set theory*, p.69, que aparece en la bibliografía del presente trabajo.

Definición 21 (La clase universal): $V \triangleq \{x \mid x=x\}$

Nota: Nótese que la clase universal es la clase de todos los conjuntos (a partir del teorema 0(i)), esto es, de clases no propias. Claramente, una clase que contenga a todas las clases propias es imposible de construir a la luz del corolario 2.9. En esencia, este es nuestro segundo ejemplo de clase propia aunque, como se verá, tanto V como R_u son iguales.

Teorema 20: $\mathfrak{P}(V)$.

Demostración (por contradicción):

Puesto que $V=V$ (Teorema 5(i)) se sigue que si V es un conjunto, entonces $V \in V$ (teorema 9 y definición 19), lo que contradice al corolario 1.19. ■

Nota: De la forma fuerte de regularidad, podemos deducir el siguiente principio de inducción, el cual afirma que cualquier subconjunto de la clase universal es elemento de la misma. Esto vendría a confirmar el hecho de que la clase universal es la clase de todos los conjuntos (clases que no son propias).

Teorema 21: $(\forall a)[a \subseteq A \Rightarrow a \in A] \Rightarrow A=V$ ⁵²

Demostración (por contradicción):

Si $B=V-A$ entonces por la regularidad fuerte (axioma 5'), existe $x \in B$ tal que $x \cap B = \emptyset$, es decir, $(\forall y)[y \in x \Rightarrow y \notin B]$. Pero si $y \notin B$ entonces $y \in A$ (hipótesis inicial, definición 17 y definición 0), de donde obtenemos que $x \subseteq A$ (definición 14(i)) y de ahí, $x \in A$ (según hipótesis: $(\forall a)[a \subseteq A \Rightarrow a \in A]$). Pero esto contradice el hecho de que $x \in B$. Por lo tanto, $B = \emptyset$ y $A = V$ (ver el teorema 18(ii)). ■

Nota: El teorema anterior nos asegura que si cualquier conjunto "a" tiene una determinada propiedad, $\varphi(a)$, siempre que cada elemento tenga esa propiedad,

⁵² Esto es, "Para cualquier subconjunto de una clase, si dicho subconjunto es también elemento de la misma, entonces la clase en cuestión es igual a V ."

entonces todo conjunto *tiene la propiedad*. Considere el siguiente ejemplo: si cada elemento de un conjunto "a" no tiene una \in -cadena infinita descendente entonces claramente "a" no tiene una \in -cadena infinita descendente. De ahí que no haya \in -cadenas infinitas descendentes.

Teorema 22:

(i) $\phi \subseteq A \wedge A \subseteq V$.

(ii) $(\forall x)[x \notin A] \Rightarrow A = \phi$.

(iii) $A \subseteq a \Rightarrow \mathcal{M}(A)$ ⁵³ (Axioma de subconjuntos).

(iv) $\mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M}(A \cap B)$ ⁵⁴ (Axioma de separación).

(v) $Ru = V$.

(vi) $A \notin \Lambda$

(vii) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

(viii) $A - B = A \cap \{x \mid x \notin B\}$

(ix) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (leyes de D'Morgan).

(x) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (leyes de D'Morgan).

(xi) $A - (B - A) = A$

(xii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

(xiii) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

(xiv) $A - B \subseteq A$

(xv) $A \subseteq B \Rightarrow C - B \subseteq C - A$

(iii) Demostración:

Supóngase que A no es un conjunto, es decir, A es una clase propia (definición 7(ii)).

⁵³ Este teorema se conoce también como el axioma de subconjuntos.

⁵⁴ Este teorema es conocido también como el axioma de separación.

Ya que $A \subseteq a \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in a]$ (definición 14(i)) entonces, en particular $A \subseteq a \Rightarrow (a \in A \Rightarrow a \in a)$ es válida, lo que contradice el corolario 1.19.

(iv) Demostración:

Sea A un conjunto. Ya que $A \cap B \subseteq A$ (Teorema 14(viii)), se concluye fácilmente que $A \cap B$ es un conjunto (teorema 22(iii)).

(v) Demostración:

$x \notin x \Leftrightarrow x = x$ a partir del teorema 0(i) y el corolario 1.19. ■

F. Funciones y Relaciones

Definición 22 (La clase del Producto Cartesiano):

$$A \times B \triangleq \{x \mid (\exists a)(\exists b)[a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a \ b)]\}$$

Teorema 23: $\mathcal{M}(a \times b)$.⁵⁵

Demostración:

$c \in a \times b \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[x \in a \wedge y \in b \wedge c = (x \ y)]$ Definiciones 4(ii) y 22.

$\Rightarrow (\exists x)(\exists y)[\{x\} \subseteq a \cup b \wedge \{x, y\} \subseteq a \cup b \wedge c = (x \ y)]$ Definición 15(i).

$\Rightarrow (\exists x)(\exists y)[\{x\} \in \mathcal{P}(a \cup b) \wedge \{x, y\} \in \mathcal{P}(a \cup b) \wedge c = (x \ y)]$ Definición 17.

$\Rightarrow (\exists x)(\exists y)[(x \ y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \wedge c = (x \ y)]$ Definiciones 10(i), 11, 15(i) y 17.

$\Rightarrow c \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ Axioma de extensión (axioma 0).

$\therefore a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ A partir de la definición 16(i).

Luego, $a \times b$ es un conjunto, según el axioma de potencias (axioma 3) y el teorema 22(iii). ■

⁵⁵ Esto es, el producto cartesiano de dos conjuntos es un conjunto.

Definición 23:

(i) $A^2 \triangleq A \times A$

(ii) $A^{-1} \triangleq \{(x, y) \mid (y, x) \in A\}$

Nota: Si A contiene elementos que no son parejas ordenadas, por ejemplo si $A = \{0, (0, 1)\}$, entonces $(A^{-1})^{-1} \neq A$. En efecto, para el ejemplo disponible $A^{-1} = \{(1, 0)\}$ y $(A^{-1})^{-1} = \{(0, 1)\}$.

A continuación se definen los conceptos de relación, relación univaluada, relación uno-a-uno, función y función uno-a-uno.

Definición 24 (Relaciones y Funciones):

(i) $\text{Rel}(A) \triangleq A \subseteq V^2$ ⁵⁶

(ii) $\text{Un}(A) \triangleq (\forall u)(\forall v)(\forall w)[((u, v) \in A \wedge (u, w) \in A) \Rightarrow v = w]$ ⁵⁷

(iii) $\text{Un}_2(A) \triangleq [\text{Un}(A) \wedge \text{Un}(A^{-1})]$ ⁵⁸

(iv) $\text{Fnc}(A) \triangleq [\text{Rel}(A) \wedge \text{Un}(A)]$ ⁵⁹

(v) $\text{Fnc}_2(A) \triangleq [\text{Rel}(A) \wedge \text{Un}_2(A)]$ ⁶⁰

Nota: La interpretación de los predicados en la definición anterior son los siguientes:

$\text{Rel}(A)$ denota "A es una relación";

$\text{Un}(A)$ denota "A es univaluada";

⁵⁶ A es una relación (grafo) si y sólo si es subconjunto de la clase $V \times V$, siendo V la clase universal.

⁵⁷ A es univaluada si y sólo si para cualquier "u" que esté relacionado con "v", bajo A, se tiene que este "v" es único.

⁵⁸ A es uno-a-uno si y sólo si tanto A, como su inversa, A^{-1} , son univaluadas.

⁵⁹ A es una función si y sólo si es univaluada.

⁶⁰ A es una función uno-a-uno si y sólo si A es una relación uno-a-uno.

$Un_2(A)$ denota "A es uno-a-uno";

$Fnc(A)$ significa "A es una función";

$Fnc_2(A)$ significa "A es una función uno-a-uno".

A continuación, se definen el dominio y el rango (imagen) de una relación.

Definición 25:

$$(i) \text{Dom}(A) \triangleq \{x \mid (\exists y)[(x, y) \in A]\}^{61}$$

$$(ii) \text{Im}(A) \triangleq \{y \mid (\exists x)[(x, y) \in A]\}^{62}$$

Nota: La interpretación de los anteriores términos dados en la definición anterior, son los siguientes:

$\text{Dom}(A)$ denota el dominio de A;

$\text{Im}(A)$ denota la imagen o rango de A.

Se definen a continuación los siguientes conceptos: la restricción de una relación a un determinado conjunto, es decir, una relación vista como subconjunto del producto cartesiano de algún par de conjuntos, su imagen o rango y la composición de dos relaciones.

Definición 26:

$$(i) A|_B \triangleq A \cap (B \times V)$$

$$(ii) A[B] \triangleq \text{Im}(A|_B)$$

$$(iii) A \circ B \triangleq \{(x, y) \mid (\exists z)[(x, z) \in B \wedge (z, y) \in A]\}$$

Nota: Los términos descritos en la definición anterior y su interpretación son los siguientes:

$A|_B$ denota la restricción de A a B.

⁶¹ Esta clase es también denotada por $D(A)$.

⁶² Esta clase es también denotada por $W(A)$.

$A[B]$ denota la imagen o rango de B bajo A .

$A \circ B$ denota la composición de A con B .

Debiera notarse que una clase no tiene que ser una relación para tener un dominio y una imagen. En efecto, toda clase tiene dominio e imagen. El dominio de A es simplemente la clase de las primeras entradas de esos pares ordenados que están en A y la imagen de A es la clase de las segundas entradas de esos pares ordenados que están en A . Además, toda clase tiene ciertas funciones parecidas a propiedades: $A|_B$ es la clase de los pares ordenados en A teniendo la primera entrada en B y $A[B]$ es la clase de las segundas entradas de esos pares ordenados en A que tienen la primera entrada en B .

A continuación, se expondrá una serie de propiedades elementales de relaciones y funciones cuya demostración no se incluye aquí.

Teorema 24:

(i) $(A^{-1})^{-1} \subseteq A$

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A \Leftrightarrow \text{Rel}(A)$

(iii) $A \times B \subseteq V^2$

(iv) $V^2 \subset V$

(v) $[\text{Rel}(A) \wedge \text{Rel}(B)] \Rightarrow \text{Rel}(A \cup B)$

(vi) $(\forall x)[x \in A \Rightarrow \text{Rel}(a)] \Rightarrow \text{Rel}(UA)$

(vii) $\text{Un}_2(A) \Rightarrow (\forall w)(\forall x)(\forall y)(\forall z)[[(w \ x) \in A \wedge (z \ y) \in A] \Rightarrow [w=z \Leftrightarrow x=y]]$

(viii) $\text{Fnc}_2(A) \Rightarrow [\text{Fnc}(A) \wedge \text{Fnc}(A^{-1})]$

(ix) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

$$(x) A \subseteq B \Rightarrow \text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(B)$$

$$(xi) A \subseteq B \Rightarrow \text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(B)$$

$$(xii) \text{Rel}(A|_B)$$

$$(xiii) (x, y) \in A|_B \Leftrightarrow [(x, y) \in A \wedge x \in B]$$

$$(xiv) \text{Dom}(A|_B) = B \cap \text{Dom}(A)$$

$$(xv) A|_B \subseteq A$$

$$(xvi) A = A|_B \Leftrightarrow \text{Rel}(A)$$

$$(xvii) B \subseteq C \Rightarrow (A|_C)|_B = A|_B$$

$$(xviii) \text{Un}(A) \Rightarrow \text{Un}(A|_B)$$

$$(xix) b \in A[B] \Leftrightarrow (\exists a)[(a, b) \in A \wedge a \in B]$$

$$(xx) [A \subseteq B \wedge C \subseteq D] \Rightarrow A[C] \subseteq B[D]$$

$$(xxi) \text{Si } A = \{(x, y) \mid (y, x)\} \mid x \in V \wedge y \in V \text{ \textit{entonces} } \text{Un}(A) \wedge A[B] = B^{-1}$$

$$(xxii) \text{Si } A = \{(x, y) \mid x\} \mid x \in V \wedge y \in V \text{ \textit{entonces} } \text{Un}(A) \wedge A[B] = \text{Dom}(B)$$

$$(xxiii) \text{Si } A = \{(x, y) \mid y\} \mid x \in V \wedge y \in V \text{ \textit{entonces} } \text{Un}(A) \wedge A[B] = \text{Im}(B)$$

$$(xxiv) \text{Rel}(A \circ B)$$

$$(xxv) [\text{Un}(A) \wedge \text{Un}(B)] \Rightarrow \text{Un}(A \circ B)$$

$$(xxvi) [\text{Un}(A) \wedge \text{Un}(B)] \Rightarrow \text{Fnc}(A \circ B)$$

$$(xxvii) [\text{Un}_2(A) \wedge \text{Un}_2(B)] \Rightarrow \text{Un}_2(A \circ B)$$

$$(xxviii) [\text{Un}_2(A) \wedge \text{Un}_2(B)] \Rightarrow \text{Fnc}_2(A \circ B)$$

$$(xxix) [\text{Fnc}(A) \wedge \text{Fnc}(B)] \Rightarrow \text{Fnc}(A \circ B)$$

$$(xxx) [\text{Fnc}_2(A) \wedge \text{Fnc}_2(B)] \Rightarrow \text{Fnc}_2(A \circ B)$$

$$(xxxi) A^{-1} = (A \cap V^2)^{-1}$$

(xv) Demostración:

$$A|_B = A \cap (B \times V) \quad \text{Definición 26(i)}$$

$$\subseteq A \quad \text{Teorema 14(viii).}$$

(xix) Demostración:

$$b \in A[B] \Leftrightarrow b \in \text{Im}(A|_B) \quad \text{Definiciones 26(i) y 0.}$$

$$\Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A|_B] \quad \text{Definiciones 25(ii) y 3(i).}$$

$$\Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \cap (B \times V)] \quad \text{Definiciones 26(i) y 0.}$$

$$\Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \wedge (a \ b) \in B \times V] \quad \text{Definiciones 15(ii) y 3(i).}$$

$$\Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \wedge a \in B \wedge b \in V] \quad \text{Definiciones 22 y 0.}$$

$$\therefore b \in A[B] \Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \wedge a \in B]$$

(xx) Demostración:

$$[A \subseteq B \wedge C \subseteq D] \Leftrightarrow [(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge (\forall y)[y \in C \Rightarrow y \in D]] \quad \text{Definición 16(i)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(x \in A \wedge y \in C) \Rightarrow (x \in B \wedge y \in D)]$$

$$\therefore b \in A[C] \Leftrightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \wedge a \in C] \quad \text{según teorema anterior.}$$

$$\Rightarrow (\exists a)[(a \ b) \in A \wedge a \in D] \quad \text{por hipótesis.}$$

$$\Rightarrow b \in B[D] \quad \text{según teorema anterior.}$$

(xxi) Demostración:

Si $A = \{(x \ y) \ (y \ x) \mid x \in V \wedge y \in V\}$ entonces:

(a) $\text{Un}(A)$

En efecto,

$$[(x \ y) \ (y \ x) \in A \wedge ((x \ y) \ (v \ u)) \in A] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in V \wedge y \in V \wedge u \in V \wedge v \in V \wedge x = u \wedge y = v] \quad \text{según hipótesis y definición 3(i)}$$

$\Leftrightarrow (y \ x)=(v \ u)$ a partir del teorema 11(vi).

(b) $A[B]=B^{-1}$

En efecto,

$$\begin{aligned} (b \ a) \in B^{-1} &\Leftrightarrow (a \ b) \in B && \text{por definición 21(ii)} \\ &\Leftrightarrow [(a \ b) \in B \wedge ((a \ b) \ (b \ a)) \in A] && \text{por hipótesis} \\ &\Leftrightarrow (\exists x)[x \in B \wedge (x \ (b \ a)) \in A] \\ &\Leftrightarrow (a \ b) \in A[B] && \text{por teorema 26(xix)}. \end{aligned}$$

De la conjunción de (a) y (b) se sigue la tesis. ■

Nota: El teorema siguiente asegura que relaciones univaluadas, es decir, funciones, mapean conjuntos sobre conjuntos.

Teorema 25: $Un(A) \Rightarrow \mathcal{M}(A[a])$.

Demostración:

$$Un(A) \Leftrightarrow (\forall u)(\forall v)(\forall w)[[(u \ v) \in A \wedge (u \ w) \in A] \Rightarrow v=w] \quad \text{Definición 24(ii)}.$$

Del axioma del esquema de reemplazo (axioma 4) se sigue que:

$$Un(A) \Rightarrow (\forall a)(\exists b)(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow (\exists y)[y \in a \wedge (y \ x) \in A]].$$

Es decir,

$$\begin{aligned} Un(A) &\Rightarrow (\forall a)(\exists b)(\forall x)[x \in b \Leftrightarrow x \in A[a]] && \text{a partir de las definiciones 26(i), (ii).} \\ &\Rightarrow (\forall a)(\exists b)[b=A[a]] && \text{según definición 0} \\ &\Rightarrow (\forall a)\mathcal{M}(a) && \text{a partir de la definición 8(i).} \blacksquare \end{aligned}$$

Nota: El teorema 25 nos asegura que las funciones (relaciones univaluadas) mapean conjuntos sobre conjuntos.

Corolario 1.25:

(i) $\mathcal{M}(a^{-1})$

(ii) $\mathcal{M}(\text{Dom}(a))$

(iii) $\mathcal{M}(\text{Im}(a))$

(i) Demostración:

Si $A = \{((x \ y) \ (y \ x)) \mid x \in V \wedge y \in V\}$ entonces $\text{Un}(A) \wedge A[a] = a^{-1}$ (teorema 24(xxi)). Luego, $\mathcal{M}(a^{-1})$ por teorema 25.

(ii) Demostración:

Si $A = \{((x \ y) \ x) \mid x \in V \wedge y \in V\}$ entonces $\text{Un}(A) \wedge A[a] = \text{Dom}(a)$ (teorema 24(xxii)). Luego, $\mathcal{M}(\text{Dom}(a))$ según teorema 25.

(iii) Demostración:

Si $A = \{((x \ y) \ y) \mid x \in V \wedge y \in V\}$ entonces $\text{Un}(A) \wedge A[a] = \text{Im}(a)$ (teorema 24(xxiii)). Luego, $\mathcal{M}(\text{Im}(a))$ según teorema 25. ■

Corolario 2.25:

(i) $\mathcal{M}(A \times B) \Leftrightarrow \mathcal{M}(B \times A)$

(ii) $[\exists \mathcal{L}(A) \wedge B \neq \emptyset] \Rightarrow [\exists \mathcal{L}(A \times B) \wedge \exists \mathcal{L}(B \times A)]$

(i) Demostración:

Si $C = \{((x \ y) \ (y \ x)) \mid x \in V \wedge y \in V\}$ entonces $\text{Un}(C) \wedge C[A \times B] = B \times A \wedge C[B \times A] = A \times B$; luego, $\mathcal{M}(A \times B) \wedge \mathcal{M}(B \times A)$ (teorema 25).

(ii) Demostración (por contradicción):

Si $B \neq \emptyset$ entonces $(\exists b)[b \in B]$, según teorema 18(ii).

Si $C = \{((x \ b) \ x) \mid x \in A\}$ entonces $\text{Un}(C) \wedge \text{Dom}(C) \subseteq A \times B$, a partir del teorema

24(xxii). Por lo tanto, $\mathcal{M}(A \times B) \Rightarrow \mathcal{M}(\text{Dom}(C))$ según teorema 22(iii).

Pero $\Lambda = C[\text{Dom}(C)]$ (definiciones 25(i) y 26(ii)), de donde $\mathcal{M}(\text{Dom}(C)) \Rightarrow \mathcal{M}(\Lambda)$, a partir del corolario 1.25(iii) (lo que contradice la hipótesis, $\mathfrak{P}_\tau(\Lambda)$). De esta contradicción concluimos que $\Lambda \times B$ es una clase propia, y de ahí, por el corolario 2.25(i), también $B \times \Lambda$ lo es. ■

Definición 27 (Cuantificador existencial de unicidad):

$$(\exists!x)\varphi(x) \triangleq [(\exists x)\varphi(x) \wedge (\forall x)(\forall y)[(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \Rightarrow x=y]]$$

Nota: El símbolo $\exists!$ se lee "existe un único...", o bien "existe a lo más un..."

Definición 28 (La imagen de un conjunto bajo una función):

$$A(b) \triangleq \{x \mid (\exists y)[x \in y \wedge (b \rightarrow y) \in A] \wedge (\exists!y)[(b \rightarrow y) \in A]\}$$

Teorema 26:

$$(i) [(b \rightarrow y) \in A \wedge (\exists!y)[(b \rightarrow y) \in A]] \Rightarrow A(b) = y$$

$$(ii) \neg(\exists!y)[(b \rightarrow y) \in A] \Rightarrow A(b) = \phi$$

(i) **Demostración:**

De la definición 28, $(b \rightarrow y) \in A \wedge (\exists!y)[(b \rightarrow y) \in A]$ implica que $x \in A(b) \Leftrightarrow x \in y$ (teorema 9). Es decir, $A(b) = y$, según definición 0.

(ii) **Demostración:**

$\neg(\exists!y)[(b \rightarrow y) \in A]$ implica $(\forall x)[x \notin A(b)]$ (teorema 9). Es decir, $A(b) = \phi$ (teorema 18(i)). ■

Nota: Del teorema 26, vemos que la definición 28 es una extensión de la función valuada. Si A es una función y si b está en $\text{Dom}(A)$ entonces $A(b)$ es el valor de A evaluada en b en el sentido usual. Si b no está en $\text{Dom}(A)$, entonces $A(b) = \phi$. Si A

no es una función, $A(b)$ está sin embargo definida. Claro, si b no está en $\text{Dom}(A)$ entonces $A(b)=0$. Si b está en el $\text{Dom}(A)$ pero hay dos diferentes pares ordenados en A , siendo la primera entrada b , entonces de nuevo $A(b)=0$. Si b está en $\text{Dom}(A)$ y (b, y) es el único par ordenado en A siendo la primera entrada b , entonces $A(b)=y$.

Teorema 27: $\mathcal{M}(A(b))$.

Demostración:

El teorema 26 nos asegura que

$$(\exists y)[A(b)=y],$$

es decir, $\mathcal{M}(A(b))$ (definición 8(i)). ■

Definición 29:

$$(i) A \mathfrak{F}_1 B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\text{Fnc}(A) \wedge \text{Dom}(A)=B]^{63}$$

$$(ii) A \mathfrak{F}_2 B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\text{Fnc}_2(A) \wedge \text{Dom}(A)=B]^{64}$$

$$(iii) F: A \longrightarrow B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [F \mathfrak{F}_1 A \wedge \text{Im}(A) \subseteq B]^{65}$$

$$(iv) F: A \xrightarrow{\text{sobre}} B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [F \mathfrak{F}_1 A \wedge \text{Im}(A)=B]^{66}$$

$$(v) F: A \xrightarrow{1-1} B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [F \mathfrak{F}_2 A \wedge \text{Im}(A) \subseteq B]^{67}$$

⁶³ Se dice que A es función de B (y se escribe $A \mathfrak{F}_1 B$) si A es una función que tiene como dominio a B .

⁶⁴ A es una función inyectiva sobre B (y se escribe $A \mathfrak{F}_2 B$) si es una función uno-a-uno y su dominio es B .

⁶⁵ F es una función de A en B si y sólo si F es función de A y su imagen (rango) está contenida en B .

⁶⁶ F es una función sobreyectiva de A en B si es función de A y su imagen (rango) es B .

⁶⁷ F es una función inyectiva de A en B si es una función inyectiva sobre A y su imagen (rango) está contenida en B .

$$(vi) F: A \xrightarrow{\text{sobre}} B \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [F \mathfrak{F}_2 A \wedge \text{Im}(A)=B]^{68}$$

Nota: La interpretación de los predicados definidos anteriormente son: $A \mathfrak{F} B$ significa "A es función de (sobre) B", $A \mathfrak{F}_2 B$ significa "A es función inyectiva sobre B", $F: A \longrightarrow B$ denota a "la función F de dominio A y contradominio B", $F: A \xrightarrow{\text{sobre}} B$ denota a "la función sobreyectiva F de dominio A y contradominio B", $F: A \xrightarrow{1-1} B$ denota a "la función inyectiva F de dominio A y contradominio B" y $F: A \xrightarrow{\text{sobre}} B$ a "la función biyectiva F de dominio A y contradominio B".

Teorema 28:

$$(i) A \mathfrak{F} a \Rightarrow \mathcal{M}(A)$$

$$(ii) A \mathfrak{F}_2 a \Rightarrow \mathcal{M}(A)$$

(i) Demostración:

$$A \mathfrak{F} a \Rightarrow [A \subseteq a \times A[a] \wedge \text{Un}(A)] \text{ (a partir de las definiciones 29(i),(ii) 22(iv) y 23(i))}$$

pero $\text{Un}(A) \Rightarrow \mathcal{M}(A[a])$ (teorema 25); por consiguiente $\mathcal{M}(a \times A[a])$ (teoremas 8 y 23), y de ahí $\mathcal{M}(A)$ (teorema 22(iii)).

(ii) Demostración:

$$A \mathfrak{F}_2 a \Rightarrow A \mathfrak{F} a \text{ a partir de las definiciones 27(i),(ii) y 22(iv),(v)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(A) \text{ por teorema 28(i).} \blacksquare$$

$$\text{Teorema 29: } \text{Un}(A) \Rightarrow \mathcal{M}(A|_a)$$

Demostración:

$$\text{Un}(A) \Rightarrow \text{Un}(A|_a) \text{ por teorema 24(xviii).}$$

⁶⁸ F es una función biyectiva de A en B si es una función inyectiva sobre A y su imagen (rango) es B. Esto es, F es biyectiva de A en B si es inyectiva y sobreyectiva de A en B.

Pero también tenemos que $\text{Rel}(A|_a) \wedge \text{Dom}(A|_a) \subseteq a$ (teoremas 24(xii) y 24(xv)). Por lo tanto $(A|_a) \mathcal{F} \text{Dom}(A|_a) \wedge \mathcal{M}(\text{Dom}(A|_a))$ según teorema 22(iii) y las definiciones 27(i), 22(iv). De ahí que $\mathcal{M}(A|_a)$ (por teorema 28(i)). ■

Teorema 30:

$$(i) \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A^2).$$

$$(ii) \mathcal{P}(V^2).$$

$$(iii) [\text{Un}(B) \wedge (\exists a)[A \cdot \text{Im}(B|_a) = \phi]] \Rightarrow \mathcal{M}(A).$$

$$(iv) (A \mathcal{F} C \wedge B \mathcal{F} D) \Rightarrow [A=B \Leftrightarrow [C=D \wedge (\forall x)[x \in C \Rightarrow A(x)=B(x)]]]$$

$$(v) [\text{Un}(A) \wedge \text{Un}(B) \wedge a \in \text{Dom}(A \circ B)] \Rightarrow (A \circ B)(a) = A(B(a)).$$

$$(vi) [A_1 \mathcal{F} B_1 \wedge A_2 \mathcal{F} B_2 \wedge \text{Im}(A_2) \subseteq B_1] \Rightarrow A_1 \circ A_2 \mathcal{F} B_2.$$

$$(vii) [A_1 \mathcal{F}_2 B_1 \wedge A_2 \mathcal{F}_2 B_2 \wedge \text{Im}(A_2) = B_1] \Rightarrow [A_1 \circ A_2 \mathcal{F}_2 B_2 \wedge \text{Im}(A_1 \circ A_2) = \text{Im}(A_1)].$$

$$(viii) [A \mathcal{F}_2 B \wedge \text{Im}(A) = C] \Rightarrow [A^{-1} \mathcal{F}_2 C \wedge \text{Im}(A^{-1}) = B].$$

$$(ix) [\text{Un}(A) \wedge \mathcal{M}(B)] \Rightarrow \mathcal{M}(A|B).$$

$$(x) \text{Un}(A) \Rightarrow A|B = \{A(b) \mid b \in B \cap \text{Dom}(A)\}.$$

$$(xi) [A \mathcal{F} B \vee A \mathcal{F}_2 B] \Rightarrow A = A|_B.$$

$$(xii) (\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (b \ x) \in A \wedge (b \ y) \in A] \Rightarrow A(b) = \phi.$$

$$(xiii) \neg(\exists x)[(b \ x) \in A] \Rightarrow A(b) = \phi.$$

Nota: En secciones posteriores estudiaremos estructuras que consisten de una clase A sobre la cual está definida una relación R , es decir, $R \subseteq A^2$. Ya que para cualquier clase B , $B \cap A^2 \subseteq A^2$ es posible ver que toda clase B determina una relación sobre A de un modo natural. Es posible escoger iniciar nuestra discusión con una teoría muy general de pares ordenados de clases (A, R) que llamaremos sistemas

relacionales.

Definición 30 (notación): $xRy \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (x, y) \in R$.

Nota: En el material expuesto anteriormente, estuvimos interesados en muchos tipos de sistemas relacionales. En la próxima sección por ejemplo, estudiaremos una clase especial de objetos llamados números ordinales. Sobre esta clase hay una importante relación de orden. Posteriormente estaremos interesados en el ordenamiento de ciertos conjuntos.

Definición 31 (Relaciones de orden total y parcial):

(i) $R \text{ Or } A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [(\forall x, y \in A)[xRy \Leftrightarrow \neg [x=y \vee yRx]] \wedge (\forall x, y, z \in A)[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]]$

(ii) $R \text{ Po } A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [(\forall x \in A)[xRx] \wedge (\forall x, y \in A)[(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y] \wedge (\forall x, y, z \in A)[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]]$

Nota: $R \text{ Or } A$ denota a una relación R de orden total de dominio en A , así como $R \text{ Po } A$, que denota a una relación de orden parcial de dominio en A . La primera se define como aquella relación cuyos elementos son pares ordenados de la forma (x, y) , tales que $x \neq y$ y (y, x) no es elemento de la relación y además es una relación *transitiva* en el sentido de que si $(x, y), (y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$. La segunda se define como aquella relación que es *reflexiva* (en el sentido de que $(x, x) \in R$, para todo $x \in A$), *antisimétrica* (en el sentido de que si $(x, y), (y, x) \in R$ entonces $x=y$) y transitiva. Hay muchas propiedades de sistemas relacionales cuyas pruebas dependen de la clase de los R -predecesores: $\{x \mid xRy\}$.

Teorema 31: $R^{-1}[\{y\}] = \{x \mid xRy\}$.

Demostración:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

$$\Leftrightarrow (y \ x) \in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \in R^{-1}[\{y\}]. \blacksquare$$

Definición 32 (Notación): $R^{-1}A \triangleq R^{-1}[A]$.

Nota: Del teorema 31 es posible notar que $A \cap R^{-1}\{y\} = \emptyset$ significa que ningún elemento de A precede a y en el sentido de R . Si, en suma, $y \in A$ entonces y es un elemento R -minimal de A . Se considerarán relaciones con respecto a las cuales cada subclase de una clase dada tiene un elemento R -minimal. A tal relación la llamaremos relación *fundamental*. Ya que no podemos cuantificar sobre las clases símbolos, debemos formular nuestra definición en términos de subconjuntos e imponer condiciones adicionales que facilitarán deducir la propiedad para subclases. Posteriormente mostraremos que estas condiciones adicionales no son esenciales.

Definición 33 (Relación Fundamental):

$$R \text{ Fr } A \triangleq (\forall a)[(a \subseteq A \wedge a \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in a)[a \cap R^{-1}\{x\} = \emptyset]].^{69}$$

Definición 34 (Relación de Pertenencia): $E \triangleq \{(a \ b) \mid a \in b\}$.

Nota: Del Axioma de Regularidad, vemos que la \in -relación E es una relación fundamental sobre V , la clase universal. Como en el caso de la \in -relación, las relaciones fundamentales no tienen lazos relacionales y , como se probará posteriormente, no posee cadenas relacionales infinitas descendentes.

Teorema 32:

$$[R \text{ Fr } A \wedge a_1 \in A \wedge \dots \wedge a_n \in A] \Rightarrow \neg [a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \wedge \dots \wedge a_n R a_1].$$

Nota: Hay dos tipos de relaciones fundamentales que son de especial interés, las relaciones bien fundadas y las relaciones bien ordenadas.

⁶⁹ R es una relación fundamental definida sobre una clase A si para cualquier subclase de A , distinta del vacío, existe siempre un elemento que no tiene predecesor en dicha subclase. Esta relación también se llama *relación fundacional*.

Definición 35 (Relaciones Bien Fundadas y Bien Ordenadas):

$$(i) R \text{ Wfr } A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [R \text{ Fr } A \wedge (\forall x \in A) [E \mathcal{M}(A \cap R^{-1}\{x\})]].$$

$$(ii) R \text{ We } A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [R \text{ Fr } A \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \vee x=y \vee yRx]].$$

$$(iii) R \text{ Wfwe } A \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [R \text{ Wfr } A \wedge R \text{ We } A].^{70}$$

Nota: R es una relación fundamental sobre A si cada subconjunto no-vacío de A tiene un elemento R -minimal. R es una relación bien fundada sobre A ($R \text{ Wfr } A$) si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento R -minimal y cada segmento R -inicial de A es un conjunto. Por un segmento R -inicial de A entendemos la clase de todos los elementos en A que preceden, en el sentido de R , a un elemento dado de A , es decir, $A \cap R^{-1}\{x\}$, $x \in A$. Por ejemplo, cada segmento E -inicial de V es un conjunto, ciertamente $E^{-1}\{a\} = \{x \mid x \in a\} = a$ (según teorema 7). Entonces $a \cap x = a \cap E^{-1}\{x\}$ y por consiguiente del axioma de regularidad: $a \neq \phi \Rightarrow (\exists x \in a)[a \cap E^{-1}\{x\} = \phi]$, se sigue que E es bien fundada sobre V .

Existen relaciones que no son bien fundadas. Sea A la clase de todos los conjuntos finitos y para $a, b \in A$ defínase aRb en el sentido de que a tiene menos elementos que b . Dada cualquier colección no vacía de conjuntos finitos hay un conjunto en la colección que tiene el menor número de elementos. Así R es fundamental. No obstante, el segmento R -inicial de A que contiene todos los conjuntos finitos que preceden, en el sentido de R , a un conjunto binario contiene a todo conjunto unitario, por lo tanto es una clase propia. Así R no es bien fundada.

R es un buen ordenamiento de A ($R \text{ We } A$) si y sólo si R determina un

⁷⁰ R es una relación bien-fundada-bien-ordenada si R es bien fundada y bien ordenada.

elemento R -minimal para cada subconjunto no vacío de A y los elementos en A son parejas R -comparables. Si hubiera elementos $a, b \in A$ que no fueran R -comparables, es decir, ni aRb ni bRa , entonces ambos a y b serían elementos R -minimales de $\{a, b\}$. Conversamente si a y b son R -comparables entonces a y b no pueden ser ambos elementos R -minimales del mismo conjunto. Así, si R ordena bien a A entonces R determina un único elemento R -minimal por cada subconjunto no-vacío de A . El siguiente teorema establece que toda relación transitiva satisface la tricotomía.

Teorema 33: $R \text{ We } A \Rightarrow R \text{ Or } A.$ ⁷¹

Teorema 34:

(i) $(R \text{ Fr } A \wedge B \subseteq A) \Rightarrow R \text{ Fr } B.$

(ii) $R \text{ Fr } a \Rightarrow R \text{ Wfr } a$

(iii) $(R \text{ Wfr } A \wedge B \subseteq A) \Rightarrow R \text{ Wfr } B.$

(iv) $(R \text{ We } A \wedge B \subseteq A) \Rightarrow R \text{ We } B.$

(v) $R \text{ We } A \Rightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \Rightarrow \neg [x=y \vee yRx]].$

(vi) $R \text{ We } A \Rightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz].$

Nota: Si una relación R ordena bien a una clase A , ¿se sigue que R determina un elemento R -minimal para toda subclase no-vacía de A ? Si R es bien-fundada-bien-ordenada ($R \text{ Wfwe } A$) entonces la respuesta es, sí:

Teorema 35: $(R \text{ Wfwe } A \wedge B \subseteq A \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists a \in B)[B \cap R^{-1}\{a\} = \emptyset].$

Demostración (por contradicción):

Ya que $B \neq \emptyset$, $\exists x \in B$. Si $B \cap R^{-1}\{a\} \neq \emptyset$ entonces, ya que $B \cap R^{-1}\{x\}$ es un conjunto,

⁷¹ Es decir, si R ordena bien a la clase A entonces R es una relación de orden sobre A .

$$(\exists a \in B \cap R^{-1}\{x\})[B \cap R^{-1}\{x\} \cap R^{-1}\{a\} = \emptyset]$$

luego $a \in B$ y aRx . Además, $y \in B \cap R^{-1}\{a\} \Rightarrow yRa$, y de ahí yRx . Así,

$$B \cap R^{-1}\{x\} \cap R^{-1}\{a\} = \emptyset \Rightarrow B \cap R^{-1}\{x\} = \emptyset. \blacksquare$$

Teorema 36:

$$[R \text{ Wfwe } A \wedge B \subseteq A \wedge (\forall x \in A)[A \cap R^{-1}\{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B]] \Rightarrow A=B.$$

Demostración (por contradicción):

Si $A - B \neq \emptyset$ entonces, por el teorema anterior, $(\exists x \in A - B)[(A - B) \cap R^{-1}\{x\} = \emptyset]$. Luego,

$$A \cap R^{-1}\{x\} \subseteq B.$$

Ya que $x \in A$ se sigue de la hipótesis que $x \in B$. Pero esto contradice el hecho de que $x \in A - B$. De ahí que $A - B = \emptyset$, es decir, $A \subseteq B$. Ya que por hipótesis $B \subseteq A$, concluimos que $A = B$. \blacksquare

Nota: El teorema anterior es un principio de inducción. Para probar que $(\forall x \in A)\varphi(x)$, basta considerar $B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$. Si para cualquier R que es bien-fundada-bien-ordenada sobre A , podemos probar que

$$(\forall x \in A)[A \cap R^{-1}\{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B]$$

se sigue que $A = B$, es decir, $(\forall x \in A)\varphi(x)$.

Se probará posteriormente que los teoremas 35 y 36 poseen hipótesis extras. Probaremos que la hipótesis acerca de que R Wfwe A puede ser reemplazada por R Fr A .

Claramente dos sistemas relacionales, (A, R_1) y (A, R_2) son esencialmente el mismo si R_1 y R_2 tienen la misma parte relacional en común con A^2 , es decir si $A^2 \cap R_1 = A^2 \cap R_2$. Aún cuando R_1 y R_2 no tengan la misma parte relacional, hay un

modo en el cual dos sistemas relacionales son equivalentes. Pueden ser equivalentes en el sentido de que existe un isomorfismo entre los dos sistemas relacionales.

Definición 36 (Isomorfismo entre dos sistemas relacionales):

$$H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [H : A_1 \xrightarrow{\text{I-I sobre}} A_2 \wedge (\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)[xR_1y \Leftrightarrow H(x)R_2H(y)]]$$

Definición 37 (Relación identidad): $I \triangleq \{(x, x) \mid x \in V\}$.

Teorema 37:

$$(i) (I|_A) \text{ Isom}_{R, R}(A, A).$$

$$(ii) H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2) \Rightarrow H^{-1} \text{ Isom}_{R_2, R_1}(A_2, A_1).$$

$$(iii) (H_1 \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2) \wedge H_2 \text{ Isom}_{R_2, R_3}(A_2, A_3)) \Rightarrow H_2 \circ H_1 \text{ Isom}_{R_1, R_3}(A_1, A_3).$$

Nota: El teorema anterior nos asegura que el isomorfismo entre sistemas relacionales es una relación de equivalencia.

Teorema 38: Si $H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2) \wedge B \subseteq A_1 \wedge x \in A_1$, entonces

$$(i) B \cap R_1^{-1}\{x\} = \emptyset \Leftrightarrow H[B \cap R_2^{-1}\{H(x)\}] = \emptyset.$$

$$(ii) H[A_1 \cap R_1^{-1}\{x\}] = A_2 \cap R_2^{-1}\{H(x)\}.$$

(i) Demostración:

$$y \in B \cap R_1^{-1}\{x\} \Rightarrow (y \in B \wedge yR_1x)$$

$$\Rightarrow (H(y) \in H[B] \wedge H(y)R_2H(x))$$

$$\Rightarrow H(y) \in H[B] \cap R_2^{-1}\{H(x)\}.$$

$$z \in H[B] \cap R_2^{-1}\{H(x)\} \Rightarrow (\exists y \in B)[z = H(y) \wedge zR_2H(x)]$$

$$\Rightarrow (\exists y \in B)[H(y)R_2H(x)]$$

$$\Rightarrow (\exists y \in B)[yR_1x]$$

$$\Rightarrow \exists y \in B \cap R_1^{-1}\{x\}.$$

(ii) Demostración:

$$\begin{aligned} z \in H[A_1 \cap R_1^{-1}\{x\}] &\Leftrightarrow (\exists y)[y \in A_1 \wedge y R_1 x \wedge z = H(y)] \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in A_1)[z = H(y) \wedge H(y) R_2 H(x)] \\ &\Leftrightarrow z \in A_2 \cap R_2^{-1}\{H(x)\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Nota: Del teorema anterior vemos que el isomorfismo entre sistemas relacionales preserva los elementos minimales y preserva los segmentos iniciales.

Teorema 39: Si $H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2)$ entonces

- (i) $R_1 \text{ Fr } A_1 \Leftrightarrow R_2 \text{ Fr } A_2$,
- (ii) $R_1 \text{ Wfr } A_1 \Leftrightarrow R_2 \text{ Wfr } A_2$,
- (iii) $R_1 \text{ We } A_1 \Leftrightarrow R_2 \text{ We } A_2$.

Nota: Del teorema anterior notamos que si en una clase de equivalencia dada hay un sistema relacional que es fundamental, entonces todo sistema relacional en esa clase de equivalencia es fundamental. Similarmemente, si hay un sistema relacional que es bien fundado, entonces todo sistema en esa clase de equivalencia, es bien fundado; si un sistema es bien ordenado, todos son bien ordenados.

Cada clase de equivalencia representa un tipo particular de ordenamiento. Supóngase que damos un tipo particular de orden $[A_1, R_1]$ con $R_1 \subseteq A_1^2$ y una clase A_2 , ¿podemos definir un ordenamiento sobre A_2 del mismo tipo? esto es, ¿podemos definir una relación $R_2 \subseteq A_2^2$ tal que el ordenamiento $[A_2, R_2]$ está ordenado isomórficamente al ordenamiento $[A_1, R_1]$?

De la definición del ordenamiento isomórfico vemos que es necesario que exista una correspondencia uno-a-uno entre A_1 y A_2 . Lo cual también es suficiente.

Teorema 40:

Si $H: A_1 \xrightarrow{\text{sobre}} A_2 \wedge R_2 = \{(H(x) \ H(y)) \mid x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge (x \ y) \in R_1\}$ entonces

$$H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2).$$

Nota: La relación R_2 en el teorema anterior dice ser inducida sobre A_2 por la función uno-a-uno, H , y la relación R_1 sobre A_1 . El teorema nos asegura que si una correspondencia uno-a-uno existe entre dos clases, entonces cualquier tipo de ordenamiento que pueda ser definido sobre una clase, puede también definirse sobre la otra clase. Aunque este es un resultado muy útil, no permite contestar a la pregunta acerca de qué tipos de relaciones son definibles sobre una clase dada A . ¿Hay relaciones fundamentales definibles sobre A ? ¿Hay relaciones bien fundadas sobre A ? ¿Puede ser A bien ordenada? Las primeras dos preguntas se responden fácilmente ya que la \in -relación es bien fundada sobre A .

La última pregunta es la más interesante. Del trabajo de Paul Cohen sabemos que la pregunta de que ya sea que todo conjunto pueda ser bien ordenado, o no, es Indecidible en ZF. Tendremos más que decir sobre este tema posteriormente. Concluimos esta sección con el siguiente teorema que caracteriza a los sistemas relacionales bien ordenados.

Teorema 41: Si $R_2 \text{ We } A_2$ entonces

$$H \text{ Isom}_{R_1, R_2}(A_1, A_2) \Leftrightarrow [H: A_1 \xrightarrow{\text{sobre}} A_2 \wedge (\forall x \in A_1)[H(x) \in A_2 - H[R_1^{-1}\{x\}] \wedge \\ \wedge (A_2 - H[R_1^{-1}\{x\}]) \cap R_2^{-1}\{H(x)\} = \emptyset]]$$

II. Los Números Ordinales y Naturales.

El Principio de Inducción Transfinita.

(Versión de von Neumann)

*“Sólo es útil el conocimiento que nos hace mejores.”
(Sócrates)*

G. Los Números Ordinales.

La teoría de los números ordinales es esencialmente una teoría de conjuntos bien ordenados. Para Cantor un número ordinal fue “el concepto general el cual resulta de (un agregado bien-ordenado) M si abstraemos de la naturaleza de sus elementos mientras se retiene su orden de precedencia...” Fue Gottlob Frege (1848-1925) y Bertrand Russell (1872-1970), trabajando independientemente, quienes removieron los números de Cantor del reino de la Psicología. En 1903 Russell definió un número ordinal como una clase de equivalencia de conjuntos bien ordenados bajo orden isomórfico.

Nuestra aproximación es la de von Neumann. Elegimos definir números ordinales como miembros de clases de equivalencia antes que las clases de equivalencia mismas. Probaremos que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a exactamente un único conjunto que está bien ordenado por la \in -relación y que es transitivo en el siguiente sentido.

Definición 38 (Clases Transitivas): $\text{Tr}(\Lambda) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in \Lambda \Rightarrow x \subseteq \Lambda]$.

Teorema 42: $(\text{Tr}(A) \wedge B \in A) \Rightarrow B \subset A$.

Demostración:

$B \in A \Rightarrow \mathcal{M}(B)$. Por definición 38, $(\mathcal{M}(B) \wedge B \in A \wedge \text{Tr}(A)) \Rightarrow B \subseteq A$.

Pero $B=A \Rightarrow A \in A$ lo cual es una contradicción. De ahí $B \subset A$. ■

Nota: A continuación definimos las clases ordinales. De aquí en adelante preferimos simbolizar a la clase vacía por 0 (definición 18).

Definición 39 (Clase Ordinal): $\text{Ord}(A) \stackrel{\Delta}{=} (\text{Tr}(A) \wedge E \text{ We } A)$.

Nota: Ya que la \in -relación, E , es fundamental, claramente bien fundada, sobre cualquier clase, se sigue que para que E ordene bien a A es suficiente que E ordene linealmente a A .

Teorema 43: $\text{Ord}(A) \Leftrightarrow [\text{Tr}(A) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)[x \in y \vee x=y \vee y \in x]]$

Demostración:

Obvio a partir de la definición de ordinal, la definición de bien ordenado y del hecho de que $E \text{ Fr } V$. ■

Teorema 44: $[\text{Ord}(A) \wedge B \subseteq A \wedge B \neq 0] \Rightarrow (\exists x \in B)[B \cap x = 0]$.

Demostración:

De la definición 39, E ordena bien a A . Ya que E es también bien fundada sobre A , es decir, E es fundamental sobre A y los segmentos E -inicial de A son conjuntos, se sigue del teorema 35 que B tiene un elemento E -inicial, esto es,

$$(\exists x \in B)[B \cap E^{-1}\{x\} = 0].$$

Pero $E^{-1}\{x\} = x$. ■

Teorema 45: $(\text{Ord}(A) \wedge a \in A) \Rightarrow \text{Ord}(a)$.

Demostración:

Ya que A es transitivo $a \in A$ implica $a \subseteq A$. Entonces, puesto que E ordena bien a A , E ordena bien a $a \subseteq A$. Además, de la transitividad de A , $(x \in y \wedge y \in a) \Rightarrow x \in a$. Ya que E ordena bien a A debemos tener que $x \in a \vee x = a \vee a \in x$, por teorema 32. De ahí que $(x \in y \wedge y \in a) \Rightarrow x \in a$, es decir, $y \in a \Rightarrow y \subseteq a$.

Ya que a es transitivo y bien ordenado por E , a es un ordinal. ■

Nota: Deseamos probar que la \in -relación también ordena bien la clase de los conjuntos ordinales. De esto y del teorema 45 se seguirá entonces que la clase de los conjuntos ordinales es una clase ordinal.

Teorema 46: $(\text{Ord}(A) \wedge \text{Tr}(B)) \Rightarrow [B \subset A \Leftrightarrow B \in A]$.

Demostración:

Del teorema 42, $B \in A \Rightarrow B \subset A$. Conversamente, si $B \subset A$ entonces $A - B \neq \emptyset$. Del teorema 44, $A - B$ tienen un elemento E -minimal, es decir,

$$(\exists x \in A - B)[(A - B) \cap x = \emptyset].$$

Ya que $x \in A$ y A es transitivo, $x \subset A$. Puesto que $(A - B) \cap x = \emptyset$, $x \subseteq B$.

Si $y \in B$ entonces, puesto que $B \subset A$, $y \in A$ pues A es una clase ordinal y $x \in A$.

Además, $y \in x \vee y = x \vee x \in y$.

De la transitividad de B se sigue que $[(x \in y \vee x = y) \wedge y \in B] \Rightarrow x \in B$

lo cual contradice el hecho de que $x \in A - B$. Concluimos que $y \in x$, es decir, $B \subseteq x$.

Entonces $x = B \wedge x \in A$; de ahí que $B \in A$. ■

Corolario 1.46: $[\text{Ord}(A) \wedge \text{Ord}(B)] \Rightarrow [B \subset A \Leftrightarrow B \in A]$.

Deomstración:

$\text{Ord}(A) \Rightarrow \text{Tr}(B)$. ■

Nota: Entre otras cosas los teoremas 45 y 46 nos aseguran que una subclase transitiva de un ordinal es un ordinal.

Teorema 47: $[\text{Ord}(A) \wedge \text{Ord}(B)] \Rightarrow \text{Ord}(A \cap B)$.

Demostración:

Ya que $A \cap B \subseteq A$ y $E \text{ We } A$, se sigue que $E \text{ We } (A \cap B)$. Además, ya que A y B son transitivos

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow (x \subseteq A \wedge x \subseteq B) \\ &\Rightarrow x \subseteq A \cap B. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \cap B$ es transitivo, y de ahí $A \cap B$ es una clase ordinal. ■

Teorema 48: $[\text{Ord}(A) \wedge \text{Ord}(B)] \Rightarrow [A \in B \vee A = B \vee B \in A]$.

Demostración:

$A \cap B \subseteq A$ \wedge $A \cap B \subseteq B$. Si $A \cap B \subset A$ \wedge $A \cap B \subset B$ entonces $A \cap B \in A$ \wedge $A \cap B \in B$ (teoremas 46 y 47), de ahí que $A \cap B \in A \cap B$. Pero, ya que por hipótesis E es fundamental sobre A , esto último contradice el teorema 32.

Por lo tanto $A \cap B = A$ o bien, $A \cap B = B$; es decir, $B \subseteq A$ o bien $A \subseteq B$. De ahí, por el corolario 1.46, $A \in B \vee A = B \vee B \in A$. ■

Definición 40 (La clase de los números ordinales): $\text{On} \triangleq \{x \mid \text{Ord}(x)\}$.

Teorema 49: $\text{Ord}(\text{On})$.

Demostración:

Del teorema 45: $x \in \text{On} \Rightarrow x \subseteq \text{On}$, es decir, On es transitivo. De los teoremas 45 y 48:

$$(x \in \text{On} \wedge y \in \text{On}) \Rightarrow (x \in y \vee x = y \vee y \in x).$$

Si $a \subseteq \text{On}$ \wedge $a \neq 0$ entonces $(\exists x)[x \in a]$. Pero $x \in a \Rightarrow \text{Ord}(x)$. Si $a \cap x = 0$ entonces

x es un elemento E-minimal de a . Si $a \cap x \neq 0$ entonces $a \cap x \subseteq x$ y se sigue que $a \cap x$ tiene un elemento E-minimal, es decir, $(\exists y \in a \cap x)[(a \cap x) \cap y = 0]$.

Luego $z \in a \cap y \Rightarrow (z \in a \wedge z \in y)$. Pero ya que $y \in x \wedge \text{Ord}(x)$, se sigue que $z \in y \Rightarrow z \in x$, es decir, $z \in a \cap y \Rightarrow z \in (a \cap x) \cap y$. Además, $a \cap y = 0$, es decir, y es un elemento E-minimal de a .

Así, E es una relación fundamental sobre On y de ahí $E \text{ We } \text{On}$. Ya que On es transitivo, es una clase ordinal. ■

Nota: Con excepción del teorema 43 hemos evitado, a propósito, usar el Axioma de Regularidad (axioma 5) en el establecimiento de nuestra teoría de ordinales. Al hacerlo así se posee la ventaja de probar la consistencia relativa del Axioma de Regularidad y los otros axiomas de ZF.

Teorema 50: $\mathfrak{P}_E(\text{On})$.

Demostración (por contradicción):

$\mathfrak{M}(\text{On}) \Rightarrow \text{On} \in \text{On}$. ■

Corolario 1.50: $\text{Ord}(A) \Rightarrow [A \in \text{On} \vee A = \text{On}]$.

Demostración:

De los teoremas 48 y 49, $\wedge A \in \text{On} \vee A = \text{On} \vee \text{On} \in A$. Pero $\mathfrak{P}_E(\text{On}) \Rightarrow \text{On} \notin A$. ■

Corolario 2.50: $\text{Ord}(A) \Rightarrow A \subseteq \text{On}$.

Demostración:

Válido a partir del corolario 1.50, teorema 49 y el corolario 1.46. ■

Nota: Los elementos de On son los números ordinales en nuestro sistema. Hemos probado que toda clase ordinal es un número ordinal excepto por una, On . Los números ordinales desempeñan un papel tan importante en la teoría por delante que

encontramos conveniente usar los símbolos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ como variables sobre los números ordinales. Nótese que todo ordinal es un conjunto, a excepción de On .

Definición 41 (Notación):

$$(i) (\forall \alpha)\varphi(\alpha) \stackrel{\Delta}{\equiv} (\forall x)[\text{Ord}(x) \Rightarrow \varphi(x)].$$

$$(ii) (\exists \alpha)\varphi(\alpha) \stackrel{\Delta}{\equiv} (\exists x)[\text{Ord}(x) \wedge \varphi(x)].$$

Nota: Hemos de aclarar en qué sentido la Definición 41 es una definición, esto es debemos hacer claro precisamente de qué fórmula bien formada $(\forall \alpha)\varphi(\alpha)$ es una abreviatura para ella. Para el efecto, podríamos estandarizar nuestra lista de variables ordinales: $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ e insistir en que nuestra intención es que

$$(\forall \alpha_n)\varphi(\alpha_n) \text{ es } (\forall x_n)[\text{Ord}(x_n) \Rightarrow \varphi(x_n)].$$

$$(\exists \alpha_n)\varphi(\alpha_n) \text{ es } (\exists x_n)[\text{Ord}(x_n) \wedge \varphi(x_n)].$$

Teorema 51 (El Principio de Inducción Transfinita):

Si $A \subseteq On \wedge (\forall \alpha)[\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A]$ entonces $A = On$.

Demostración (por contradicción):

Si $On - A \neq 0$ entonces $(\exists \alpha \in On - A)[(On - A) \cap \alpha = 0]$. Ya que $\alpha \subset On$, se sigue que $\alpha \subseteq A$. Entonces, del hecho de que $(\forall \alpha)[\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A]$, se sigue que $\alpha \in A$. Pero esto contradice el hecho de que $\alpha \in On - A$. Por lo tanto, $On - A = 0$, es decir, $On \subseteq A$. Por consiguiente, ya que $A \subseteq On$, $A = On$. ■

Definición 42 (Notación):

$$(i) \alpha < \beta \stackrel{\Delta}{\equiv} \alpha \in \beta.$$

$$(ii) \alpha \leq \beta \stackrel{\Delta}{\equiv} (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta).$$

$$(iii) \text{máx}(\alpha, \beta) \stackrel{\Delta}{\equiv} \alpha \cup \beta.$$

$$(iv) \alpha > \beta \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \beta < \alpha.$$

$$(v) \alpha \geq \beta \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\alpha > \beta \vee \alpha = \beta).$$

Teorema 52:

$$(i) (\forall \alpha)[\alpha \subseteq \text{On}].$$

$$(ii) (\forall \alpha)(\forall \beta)[\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha].$$

$$(iii) (\alpha \leq \beta \wedge \beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

$$(iv) (\alpha < \beta \wedge \beta \leq \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

$$(v) \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

$$(vi) (\forall \alpha)(\exists \beta)[\beta = \alpha \cup \{\alpha\}].$$

$$(vii) \text{Tr}(A) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(x \in y \wedge y \in A) \Rightarrow x \in A].$$

$$(viii) (\text{Ord}(A) \wedge a \in A) \Rightarrow a = a \cap A.$$

$$(ix) (A \subseteq \text{On} \wedge A \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists \alpha)[\alpha \in A \wedge (\forall \beta)[\beta \in A \Rightarrow \alpha \leq \beta]].$$

$$(x) \text{Tr}(A) \Rightarrow \cup A \subseteq A.$$

$$(xi) \cup \text{On} = \text{On}.$$

$$(xii) \text{Ord}(\text{máx}(\alpha, \beta)).$$

$$(xiii) \alpha \leq \text{máx}(\alpha, \beta) \wedge \beta \leq \text{máx}(\alpha, \beta).$$

$$(xiv) \alpha = \text{máx}(\alpha, \beta) \vee \beta = \text{máx}(\alpha, \beta).$$

Teorema 53: $A \subseteq \text{On} \Rightarrow \text{Ord}(\cup A).$

Demostración:

$x \in \cup A \Rightarrow (\exists y)[x \in y \wedge y \in A]$. Pero $y \in A \Rightarrow y \subseteq \cup A$, y puesto que $A \subseteq \text{On}$ se sigue que $(x \in y \wedge y \in A) \Rightarrow x \subseteq y$. Por lo tanto $x \subseteq \cup A$, es decir, $\cup A$ es transitiva. Además, del

hecho de que $A \subseteq \text{On} \wedge \text{Tr}(\text{On})$ se sigue que: $x \in A \Rightarrow x \subseteq \text{On}$, es decir, $\cup A \subseteq \text{On}$. Ya

que UA es una subclase transitiva del ordinal On , se sigue que UA es una clase ordinal. ■

Teorema 54: $(A \subseteq On \wedge \alpha \in A) \Rightarrow \alpha \leq UA$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \alpha \in A &\Rightarrow \alpha \subseteq UA \\ &\Rightarrow \alpha \leq UA. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 55: $[A \subseteq On \wedge (\forall \beta)[\beta \in A \Rightarrow \beta \leq \alpha]] \Rightarrow UA \leq \alpha$.

Demostración:

Nótese que $\beta \in UA \Leftrightarrow (\exists \gamma)[\beta < \gamma \wedge \gamma \in A]$. Además $\beta < \gamma \wedge \gamma \leq \alpha$. De ahí que $\beta < \alpha$, es decir, $UA \subseteq \alpha$. ■

Nota: El teorema 54 nos asegura que UA es una cota superior para la clase de los ordinales A . El teorema 55 nos asegura que UA es también la mínima cota superior de A . Además si A tiene un ordinal maximal, es decir, si $(\exists \alpha)[\alpha \in A \wedge (\forall \beta)[\beta \in A \Rightarrow \beta \leq \alpha]]$ entonces $\alpha = UA$ y, por consiguiente, $UA \in A$. Si A no posee elemento maximal entonces $UA \notin A$. En particular, si A es un número ordinal, es decir, $(\exists \alpha)[\alpha = A]$ y si $U\alpha \notin \alpha$ entonces $U\alpha = \alpha$. Tal ordinal es llamado *ordinal límite*.

Definición 43 (El Sucesor de un Número Ordinal): $\alpha+1 \triangleq \alpha \cup \{\alpha\}$.

Nota: La definición anterior es válida también para cualquier conjunto. $\alpha+1$ se lee "el sucesor de α " o bien, " α sucesor". Nótese además que la anterior definición no es válida para clases propias ya que, como lo probaremos a continuación, $\alpha \in \alpha+1$, lo que contradice al corolario 2.9 en caso que α fuese clase propia. En particular, $On+1$ no está definido.

Definición 44 (Construcción de los Números Naturales):

$$(i) 0+1=0\cup\{0\}=\{0\} \triangleq 1,$$

$$(ii) 1+1=1\cup\{1\}=\{0, 1\} \triangleq 2,$$

$$(iii) 2+1=2\cup\{2\}=\{0, 1, 2\} \triangleq 3, \text{ etc.}$$

Nota: el lector podrá notar que:

$$0 = \phi, 1 = \{\phi\}, 2 = \{\phi, \{\phi\}\}, 3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \text{ etc.}$$

Los números naturales son pues, construcciones a partir del conjunto vacío.

Teorema 56: $(\forall \alpha)[\alpha \in \alpha+1 \wedge \alpha \subseteq \alpha+1]$.

Demostración:

$\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} \wedge \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ a partir de los teoremas 11(ii), 13(v) y 14(vii). ■

Teorema 57: $(\forall \alpha)[\alpha+1 \in \text{On}]$.

Demostración:

$(\forall \alpha)[\alpha \in \text{On} \wedge \alpha \subseteq \alpha+1]$. Por consiguiente, $\alpha+1 \subseteq \text{On}$. Además,

$$\begin{aligned} x \in \alpha+1 &\Rightarrow (x \in \alpha \vee x = \alpha) \\ &\Rightarrow x \subseteq \alpha. \end{aligned}$$

Pero $\alpha \subseteq \alpha+1$ y, por consiguiente, $x \subseteq \alpha+1$. Así $\alpha+1$ es un subconjunto transitivo de una clase ordinal, y por consiguiente es un ordinal, es decir, $\alpha+1 \in \text{On}$. ■

Definición 45 (Notación): $\alpha < \beta < \gamma \triangleq (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma)$.

Teorema 59: $\neg(\exists \beta)[\alpha < \beta < \alpha+1]$.

Demostración:

Si $(\exists \beta)[\alpha < \beta < \alpha+1]$ entonces $\alpha \in \beta \wedge [\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha]$. Pero esto contradice el hecho de que \in Fr On. ■

Teorema 60: $a \in On \Rightarrow (\forall \alpha)[\alpha \in a \Rightarrow \alpha < U_{a+1}]$.

Demostración:

De los teoremas 53 y 54 tenemos que $Ord(U_a) \wedge \alpha \leq U_a$. Del teorema 56, concluimos que $\alpha < U_{a+1}$. ■

Nota: El teorema anterior nos asegura que dado un número ordinal, existe un número ordinal que es mayor, verdaderamente, dado cualquier conjunto de números ordinales hay un número ordinal que es mayor que cada elemento del conjunto dado. La aceptación intuitiva de On como conjunto conduce a la paradoja del ordinal más grande posible, es decir, un número ordinal que es mayor que todo número ordinal, incluyéndose él mismo.

La paradoja fue descubierta por Cantor en 1895. Apareció por primera vez en la impresión de 1897 habiendo sido redescubierta por Burali-Forti, cuyo nombre lleva ahora.

Definición 46 (La Clase de los Ordinales No-Límite y Límite):

(i) $K_I \triangleq \{\alpha \mid \alpha=0 \vee (\exists \beta)[\alpha=\beta+1]\}$.

(ii) $K_{II} \triangleq On - K_I$.

Definición 47 (La Clase de los Números Naturales):

$\mathbb{N} \triangleq \omega \triangleq \{\alpha \mid \alpha+1 \subseteq K_I\}$.

Teorema 61:

(i) $\alpha \in K_{II} \Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \wedge \alpha = U\alpha)$.

(ii) $\mathbb{N} \neq 0$.

(iii) $(\forall \alpha)[\alpha+1 \in K_I]$.

(iv) $\mathbb{N} \subseteq K_I$.

(v) $\beta \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall \gamma)[\gamma \leq \beta \Rightarrow \gamma \in K_I]$.

$$(vi) (\beta < \alpha \wedge \alpha \in K_{\text{LI}}) \Rightarrow (\exists \gamma)[\beta < \gamma < \alpha].$$

$$(vii) \alpha \subseteq K_{\text{LI}} \Rightarrow \alpha + 1 \subseteq K_{\text{LI}}.$$

Nota: Del teorema 61(i) vemos que K_{LI} es la clase de todos los ordinales límite. Nos referiremos a los elementos de esta clase como ordinales límite, y a los elementos de K_{LI} como los ordinales no-límite. Los elementos de \mathbb{N} (también denotado por ω) son los números naturales o sea los enteros no-negativos, como lo mostraremos ahora, probando que satisfacen los postulados de Peano. Como una conveniencia notacional usaremos i, j, k, \dots, m, n como variables sobre \mathbb{N} .

Definición 48 (Notación):

$$(i) (\forall n)\varphi(n) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(x)].$$

$$(ii) (\exists n)\varphi(n) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists x)[x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x)].$$

Teorema 62 (Postulados de Peano):

$$(i) 0 \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) (\forall n)[n+1 \in \mathbb{N}].$$

$$(iii) (\forall n)[n+1 \neq 0].$$

$$(iv) (\forall m)(\forall n)[m+1 = n+1 \Leftrightarrow m = n].$$

$$(v) [0 \in A \wedge (\forall n)[n \in A \Rightarrow n+1 \in A]] \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A.$$

(i) Demostración:

De la definición 46(i) tenemos que $0 \in K_{\text{LI}}$. Además, $0 \cup \{0\} \subseteq K_{\text{LI}}$ y por lo tanto $0 \in \mathbb{N}$.

(ii) Demostración:

Ya que $n+1 \in K_{\text{LI}}$ y puesto que $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \subseteq K_{\text{LI}}$, se sigue que $(n+1) \cup \{n+1\} \subseteq K_{\text{LI}}$. Es decir, $n+1 \in \mathbb{N}$.

(iii) Demostración:

$n \in n+1$. Por lo tanto, $n+1 \neq 0$.

(iv) Demostración:

$m=n \Rightarrow m+1=n+1$. Conversamente, si $m+1=n+1$ entonces ya que $m \in m+1$ tenemos que $m \in n \vee m=n$ y $n \in m \vee n=m$. Ya que $m \in n \wedge n \in m$ y $m \in n \wedge n=m$ cada una contradice el hecho de que E es fundamental sobre On , concluimos que $m=n$.

(v) Demostración:

Si $\mathbb{N} - A \neq \emptyset$ entonces hay un elemento minimal n en $\mathbb{N} - A$. Ya que $0 \in A$ se sigue que $0 \neq n$. Pero $n \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subseteq K_1$; por lo tanto $(\exists \beta)[n = \beta + 1]$. Además, $n \subseteq n+1 \wedge n+1 \subseteq K_1$. Por consiguiente, $\beta + 1 \subseteq K_1$, es decir, $\beta \in \mathbb{N}$. Ya que $\beta < n$ y n es el elemento más pequeño en $\mathbb{N} - A$, debemos tener que $\beta \notin \mathbb{N} - A$, es decir $\beta \in A$. Pero $(\beta \in \mathbb{N} \wedge \beta \in A) \Rightarrow \beta + 1 \in A$, esto es $n \in A$. Esto último es una contradicción, la cual nos obliga a concluir que $\mathbb{N} \subseteq A$. ■

Corolario 1.62 (Principio de Inducción Finita):

Si $A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge (\forall n)[n \in A \Rightarrow n+1 \in A]$ entonces $A = \mathbb{N}$.

Demostración:

Obvio a partir del teorema 62. ■

Teorema 63: $\text{Ord}(\mathbb{N})$.

Demostración:

Ya que $\mathbb{N} \subseteq K_1 \wedge K_1 \subseteq On$ tenemos que $\mathbb{N} \subseteq On$. Además,

$$(x \in y \wedge y \in \mathbb{N}) \Rightarrow [\text{Ord}(y) \wedge y+1 \subseteq K_1].$$

Por lo tanto, $x \subseteq y \wedge y \subseteq y+1 \wedge y+1 \subseteq K_1$, de donde se obtiene que $x \in K_1 \wedge x \subseteq K_1$, esto es $x \in \mathbb{N}$. Así, $\mathbb{N} \subseteq \text{On} \wedge \text{Tr}(\mathbb{N})$; por consiguiente $\text{Ord}(\mathbb{N})$. ■

Nota: Del teorema anterior se puede observar que o $\mathbb{N} \in \text{On}$ o bien $\mathbb{N} = \text{On}$ (según corolario 1.50). Pero ¿cuál de estas alternativas es verdadera? La pregunta es si \mathbb{N} es o no un conjunto. Esta cuestión no puede ser resuelta por los axiomas establecidos hasta ahora. Elegimos resolver el punto en disputa postulando que \mathbb{N} es un conjunto. Esta elección tiene la considerable ventaja de permitir la construcción de los *ordinales transfinitos o de la segunda clase*: $\mathbb{N}+1, (\mathbb{N}+1)+1, \dots$, haciendo uso de la definición 43, el cual será el tema principal a desarrollar en lo consiguiente.

Axioma 6 (Axioma de Infinitud): $\mathcal{M}(\mathbb{N})$.¹

Teorema 64: $\mathbb{N} \in K_{II}$.²

Demostración:

Del Axioma 6 y del teorema 63 tenemos que $\mathbb{N} \in \text{On}$. Ya que $\mathbb{N} \subseteq K_1$ se sigue que si $\mathbb{N} \in K_1$ entonces $\mathbb{N}+1 \subseteq K_1$ y por consiguiente $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{N} \in K_{II}$. ■

Teorema 65: $F \notin \mathfrak{N} \Rightarrow (\exists n)[F(n+1) \notin F(n)]$.

Demostración:

Del Axioma de Infinitud, F es una función cuyo dominio es un conjunto. Además, la imagen de F , $\text{Im}(F)$, es un conjunto. Entonces del Axioma de Regularidad (axioma 5)

$$(\exists x \in \text{Im}(F))[\text{Im}(F) \cap x = \emptyset].$$

Pero $x \in \text{Im}(F) \Rightarrow (\exists x)[x = F(n)]$. Ya que $F(n+1) \in \text{Im}(F)$ tenemos que $F(n+1) \notin F(n)$. ■

Nota: El teorema anterior asegura que no hay \in -cadenas infinitas descendentes.

¹ También llamado axioma del infinito. La causa del nombre del axioma debe estar clara. No hemos dado aún una definición precisa del infinito, pero parece razonable que conjuntos tales como los que describe el axioma de Infinitud merecen ser llamados infinitos (Halmos, P. R.)

² Es decir, \mathbb{N} es el primer número ordinal límite.

Dado un conjunto no-vacío a_0 , $\exists a_1 \in a_0$. Si $a_1 \neq 0$, $\exists a_2 \in a_1$, etc. Sin embargo, por el teorema 65, vemos que después de un número finito de pasos debemos obtener un conjunto $a_n \in a_{n-1}$ con $a_n = 0$.

Siempre que toda \in -cadena descendente sea de longitud finita, se sigue que para un conjunto dado "a" hay una cota sobre la longitud de la \in -cadena descendente de "a". Considere, por ejemplo, a \mathbb{N} :

$$(\forall n)[0 \in 1 \in 2 \in \dots \in n \in \mathbb{N}].$$

Así, \mathbb{N} es el primer número ordinal límite (teorema 64) y el menor de todos ellos, tal como lo prueba el siguiente teorema.

Teorema 65:

$$(i) \alpha \in K_{\aleph_1} \Rightarrow \mathbb{N} \leq \alpha.$$

$$(ii) (A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \neq 0) \Rightarrow (\exists n \in A)(\forall m \in A)[n \leq m].$$

$$(iii) (F: \mathbb{N} \rightarrow A \wedge R \text{ Fr } A) \Rightarrow (\exists n)[F(n+1) \notin R^{-1}\{F(n)\}].$$

Definición 49 (Supremo e Infimo de una Clase):

$$(i) \sup(A) \triangleq \cup(A \cap 0_n) \text{ ssi } A \cap 0_n \neq 0.$$

$$\triangleq 0 \quad \text{ssi } A \cap 0_n = 0.$$

$$(ii) \inf(A) \triangleq \cap(A \cap 0_n) \text{ ssi } A \cap 0_n \neq 0.$$

$$\triangleq 0 \quad \text{ssi } A \cap 0_n = 0.$$

$$(iii) \sup_{\alpha < \beta}(A) \triangleq \cup(A \cap \beta) \text{ ssi } A \cap \beta \neq 0$$

$$\triangleq 0 \quad \text{ssi } A \cap \beta = 0.$$

$$(iv) \inf(A) \triangleq \bigcap (A \cap On) - \beta \text{ ssi } (A \cap On) - \beta \neq 0.$$

$$\quad \quad \quad \triangleq 0 \quad \quad \quad \text{ssi } (A \cap On) - \beta = 0.$$

Definición 50: $\mu_\alpha(\varphi(\alpha)) \triangleq \inf\{\alpha \mid \varphi(\alpha)\}.$

Nota: $\sup(A)$ e $\inf(A)$, denotan al supremo e ínfimo de la clase A , en tanto que $\sup(A)_{<\beta}$ e $\inf(A)_{>\beta}$ denotan el supremo e ínfimo de la clase A relativa al ordinal β .

Por otro lado, $\mu_\alpha(\varphi(\alpha))$ denota al mínimo ordinal que satisface φ .

Concluimos esta sección con algunas propiedades interesantes de ínfimos y supremos de clases ordinales.

Teorema 66:

- (i) $\cap\{a, b\} = a \cap b.$
- (ii) $\text{Tr}(A) \Rightarrow \cap A \subseteq A.$
- (iii) $a \in A \Rightarrow \cap A \subseteq a.$
- (iv) $\mathcal{M}(\cap a).$
- (v) $[\text{Tr}(A) \wedge A=0] \Rightarrow \cap A=0.$
- (vi) $A=0 \Rightarrow \cap A=V.$
- (vii) $\sup(A)_{<\beta} \in On$
- (viii) $\inf(A)_{>\beta} \in On \wedge \inf(A)_{>\beta} \in On$
- (ix) $\sup(A) \in On \vee \sup(A)=On.$
- (x) $\inf(A) \in A \Leftrightarrow A \cap On \neq 0.$
- (xi) $(\exists \alpha) \varphi(\alpha) \Rightarrow \varphi(\mu_\alpha(\varphi(\alpha))).$
- (xii) $[\text{Ord}(A) \wedge A - \alpha \neq 0] \Rightarrow \alpha = \inf(A - \alpha).$

III. La Recursión Transfinita. Los Números Cardinales Inaccesibles.

(Versión de Neumann-Cohen)

“Estoy convencido de que el conocimiento no es útil si no contribuye al mismo tiempo a que los hombres sepan más sobre el mundo y sobre ellos mismos. ¿De qué serviría dominar las cosas si no podemos dominar nuestro comportamiento?”

(Albert Einstein)

Nota: Todo número ordinal es bien ordenado por la \in -relación, esto es $(\forall \alpha)[E|_{\alpha \times \alpha} \text{ We } \alpha]$. Así, $(E|_{\alpha \times \alpha}, \alpha)$ es miembro de alguna clase de equivalencia determinada por el isomorfismo de orden. Deseamos probar ahora que hay exactamente un único par tal en cada clase de equivalencia de conjuntos bien ordenados, esto es, si $r \text{ We } a$ entonces hay uno y sólo un ordinal α para el cual

$$(\exists f)[f \text{ Isom}_{E, r}(\alpha, a)].$$

Primero probaremos que hay a lo más un ordinal que satisface lo anterior.

Teorema 67: $(\text{Ord}(A) \wedge \text{Ord}(B) \wedge \exists f \text{ Isom}_{E, E}(A, B)) \Rightarrow A=B.$

Demostración:

Es suficiente probar que F es la función identidad I restringida a A . Esto se prueba por inducción transfinita. Si $\beta \in A \wedge (\forall \alpha < \beta)[F(\alpha)=\alpha]$ entonces $F(\beta)=\beta$. Además, ya

que β es el elemento E-minimal en $A - \beta$ (teorema 66(xii)) y puesto que los isomorfismos de orden mapean elementos minimales sobre elementos minimales (teorema 38), se sigue que $F(\beta)$ es el elemento E-minimal en $B - F(\beta) = B - \beta$, es decir, $F(\beta) = \beta$. ■

Teorema 68:

$[\text{Ord}(A) \wedge \text{Ord}(B) \wedge F_1 \text{ Isom}_{E, R}(A, C) \wedge F_2 \text{ Isom}_{E, R}(B, C)] \Rightarrow A=B$.

Demostración:

Del teorema 67 y del hecho de que $F_2 \circ F_1^{-1} \text{ Isom}_{E, E}(A, B)$. ■

Nota: El teorema 68 nos asegura que toda clase bien ordenada, es isomórfica en el orden α , a lo más, un ordinal bien ordenado por la \in -relación. Probaremos que mientras no toda clase bien ordenada sea isomórfica en el orden α a un ordinal, todo conjunto es bien ordenado.

Ya que los isomorfismos de orden deben mapear elementos minimales en elementos minimales y segmentos iniciales en segmentos iniciales (teorema 38), debemos probar que si $R \text{ We } a$ entonces existe un número ordinal α y una función F que mapea α sobre a , de tal manera que $\forall \beta < \alpha$, $F(\beta)$ es el elemento R-minimal en $a - F(\beta)$. Pero esto significa que F debe ser definida de modo que su valor en β siga dependiendo de β , en el sentido de que los valores de F los asuma en todos los ordinales menores que β , y el requisito adicional de que $F(\beta)$ sea el elemento R-minimal en $a - F[\beta]$. ¿Existe una función que llene todos estos requisitos? Probaremos que tal función existe. Ciertamente, probaremos que existe una única función F definida sobre On , de tal manera que su valor en β depende de β y de los valores que F asume en todos los ordinales menores que β , y por lo tanto en $F|_{\beta}$, y también depende de cualquier condición, G , dada previamente. Tal función F se dice

estar definida por recursión transfinita.

Para alcanzar nuestro objetivo, sin embargo, debemos probar el siguiente lema.

Lema 1.69:

$$[f \mathfrak{R} \beta \wedge (\forall \alpha < \beta)[f(\alpha) = G(f|_{\alpha})] \wedge g \mathfrak{R} \gamma \wedge (\forall \alpha < \gamma)[g(\alpha) = G(g|_{\alpha})] \wedge \beta \leq \gamma] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall \alpha < \beta)[f(\alpha) = g(\alpha)].$$

Demostración (por inducción transfinita):

Si $(\forall \delta < \alpha)[f(\delta) = g(\delta)]$ entonces $f|_{\alpha} = g|_{\alpha}$ y, por lo tanto, $f(\alpha) = G(f|_{\alpha}) = G(g|_{\alpha}) = g(\alpha)$. ■

Teorema 69 (Principio de Recursión Transfinita):

Si $K = \{f \mid (\exists \beta)[f \mathfrak{R} \beta \wedge (\forall \alpha < \beta)[f(\alpha) = G(f|_{\alpha})]]\}$ y si $F = \cup K$ entonces:

(i) $F \mathfrak{R} \text{On}$.

(ii) $(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F|_{\alpha})]$.

(iii) $[A \mathfrak{R} \text{On} \wedge (\forall \alpha)[A(\alpha) = G(A|_{\alpha})]] \Rightarrow A = F$.

Demostración:

(i) Ya que $f \in K \Rightarrow \text{Rel}(f)$, tenemos que F es una relación. Además,

$$[(a \ b) \in F \wedge (a \ c) \in F] \Rightarrow (\exists f \in K)(\exists g \in K)[(a \ b) \in f \wedge (a \ c) \in g].$$

Del Lema 1.69 tenemos que $f(a) = g(a)$, es decir, $b = c$. Así, F es univaluada y por lo tanto es una función.

Si $x \in a \wedge a \in \text{Dom}(F)$ entonces, de la definición de F y K , se sigue que

$$(\exists f)(\exists \beta)[f \mathfrak{R} \beta \wedge a \in \beta].$$

Pero ya que los ordinales son transitivos, y los elementos de los ordinales son ordinales, es decir, $\text{Ord}(a) \wedge x \in \beta$. Así, $\text{Dom}(F) \subseteq \text{On} \wedge \text{Tr}(\text{Dom}(F))$. Por lo tanto, $\text{Ord}(\text{Dom}(F))$, es decir, $\text{Dom}(F) = \text{On} \vee (\exists \gamma)[\gamma = \text{Dom}(F)]$.

Si $\gamma = \text{Dom}(F)$ y si $g = F \cup \{(\gamma, G(F|_\gamma)) \mid \gamma = \text{Dom}(F)\}$ entonces

$$g \in \mathcal{F}_K(\gamma + 1) \wedge (\forall \alpha < \gamma + 1)[g(\alpha) = G(g|_\alpha)].$$

Así, $g \in K$ y $\gamma \in \text{Dom}(F)$. Pero $\gamma = \text{Dom}(F)$. Esta es una contradicción; y por lo tanto $\text{Dom}(F)$ y $F \in \mathcal{F}_K \text{ On}$.

(ii) $(\forall \alpha)(\exists f)[f \subseteq F \wedge F(\alpha) = f(\alpha) \wedge f(\alpha) = G(f|_\alpha)]$. Se sigue entonces $F|_\alpha = f|_\alpha$ y, por lo tanto, $F(\alpha) = f(\alpha) = G(f|_\alpha) = G(F|_\alpha)$.

(iii) Ya que $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(F)$ es suficiente probar que $(\forall \alpha)[A(\alpha) = F(\alpha)]$. Esto lo hacemos por inducción transfinita. Si $(\forall \alpha)[\alpha < \gamma \Rightarrow A(\alpha) = F(\alpha)]$ entonces $A|_\alpha = F|_\alpha$.

Por consiguiente, $A(\gamma) = G(A|_\gamma) = G(F|_\gamma) = F(\gamma)$. ■

Corolario 1.69: $(\exists! f)[f \in \mathcal{F}_K \alpha \wedge (\forall \beta < \alpha)[f(\beta) = G(f|_\beta)]]$

Nota: El teorema 69 es un teorema de esquema y, por lo tanto, un metateorema. Con la cuantificación en el metalenguaje, lo podemos establecer como sigue:

$$(\forall G)(\exists! F)[F \in \mathcal{F}_K \text{ On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F|_\alpha)]]$$

Mientras que este enunciado comunica más fácilmente el contenido del teorema como se usará, es no obstante de interés notar que el teorema 69, como se estableció, es muy fuerte. No sólo asegura la existencia de la función F sino que prescribe un método para exhibir F cuando G está dada.

Para ciertos tipos de problemas, es suficiente conocer qué funciones pueden ser definidas recursivamente sobre los números naturales en el siguiente sentido. Dada cualquier función h y cualquier conjunto a hay una función f definida sobre \mathbb{N} de tal manera que:

$$f(0) = a,$$

$$f(n+1)=h(f(n)).$$

Este tipo de recursión puede ser extendido a funciones sobre On , agregando el requisito de que en los límites ordinales α el valor de f sea el supremo de sus valores en los ordinales precedentes a α , es decir,

$$F(\alpha)=\bigcup\{f(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}, \alpha \in K_I.$$

Deseamos probar lo siguiente:

$$(\forall H)(\forall a)(\exists F) [F \text{ es } On \wedge F(0)=a \wedge F(\beta + 1)=H(F(\beta)) \wedge \\ \wedge [\beta \in K_I \Rightarrow F(\beta)=\bigcup\{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\}]]$$

Para el enunciado de nuestro teorema, elegimos retener el formato de un teorema de esquema y, por consiguiente, recurrimos a los circunloquios normales para evitar la cuantificación sobre clases símbolo.

Definición 51 (Notación): $\bigcup_{\alpha < \beta} F(\alpha) \triangleq \bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}$.

Teorema 70: Si $G=\{(x, y) \mid [x=0 \wedge y=a] \vee [x \neq 0 \wedge \text{sup}(\text{Dom}(x)) \neq \text{Dom}(x)] \wedge \\ \wedge y=H(x(\text{sup}(\text{Dom}(x))))\} \vee [x \neq 0 \wedge \text{sup}(\text{Dom}(x))=\text{Dom}(x) \wedge y=\bigcup \text{Im}(x)]\}$ y si $F \text{ es } On \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha)=G(F|_{\alpha})]$ entonces

(i) $F(0)=a$.

(ii) $F(\beta + 1)=H(F(\beta))$.

(iii) $F(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} F(\gamma)$, $\beta \in K_{II}$.

(iv) F es única.

Demostración:

$$(i) \quad F(0)=G(F|_0)=G(0)=a.$$

(ii) $F(\beta+1)=G(F|_{\beta+1})$. Ya que $\text{Dom}(F|_{\beta+1})=\beta+1 \wedge \text{sup}(\beta+1)=\beta \neq \beta+1$ tenemos que

$$G(F|_{\beta+1})=H(F|_{\beta+1}(\text{sup}(\beta+1)))=H(F(\beta)),$$

es decir, $F(\beta+1)=H(F(\beta))$.

(iii) $f(\beta)=G(F|_{\beta})$. Ya que $\text{dom}(F|_{\beta})=\beta$ y $\beta \in K_{1F}$, tenemos que $\text{sup}(\beta)=\beta$.

Por consiguiente:

$$G(F|_{\beta}) = \cup \text{Im}(F|_{\beta}) = \cup_{\gamma < \beta} F(\gamma), \text{ es decir, } F(\beta) = \cup_{\gamma < \beta} F(\gamma).$$

(iv) Obvio por inducción transfinita. ■

Corolario 1.70 (Principio de Recursión Finita):

$$(\exists! f)[f \mathfrak{N} \mathbb{N} \wedge f(0)=a \wedge (\forall k)[f(k+1)=H(f(k))]]$$

Demostración:

Si en el teorema 70 restringimos F a \mathbb{N} (donde $\mathbb{N}=\omega$) entonces $(F|_{\omega}) \mathfrak{N} \mathbb{M}$, por lo tanto $\mathcal{M}(F|_{\omega})$, es decir $(\exists f)[f=F|_{\omega}]$. Luego, $f \mathfrak{N} \mathbb{N} \wedge f(0)=a \wedge (\forall k)[f(k+1)=H(f(k))]$. Es obvio por inducción, que f es única. ■

Nota: En el estudio de los isomorfismos de orden, estamos especialmente interesados en aquellos órdenes que preservan funciones que mapean ordinales sobre ordinales. Cualquier función cuyo dominio es un ordinal y cuya imagen es una clase de números ordinales la llamaremos una *función ordinal*. Si en suma una función ordinal preserva el orden, decimos que es *estrictamente monótona*.

Definición 52 (Función Ordinal y Función Estrictamente Monótona):

$$(i) \text{Orf}(G) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [G \text{ es un } \mathfrak{F}_n \text{ sobre } \text{Dom}(G) \wedge \text{Ord}(\text{Dom}(G)) \wedge \text{Im}(G) \subseteq \text{On}]$$

$$(ii) \text{Smo}(G) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\text{Orf}(G) \wedge (\forall \alpha \in \text{Dom}(G))(\forall \beta \in \text{Dom}(G))[\alpha < \beta \Rightarrow G(\alpha) < G(\beta)]]$$

Teorema 71:

$$(i) \text{Smo}(G) \Rightarrow (\forall \alpha)[\alpha \in \text{Dom}(G) \Rightarrow \alpha \leq G(\alpha)].$$

$$(ii) [F \text{ Isom}_{E,E}(A, B) \wedge \text{Ord}(A) \wedge B \subseteq \text{On}] \Rightarrow \text{Smo}(F).$$

$$(iii) [F: A \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} B \wedge \text{Smo}(F) \wedge \text{Ord}(A) \wedge B \subseteq \text{On}] \Rightarrow F \text{ Isom}_{E,E}(A, B).$$

(iii) Demostración:

Supóngase que $F(x) \leq F(y)$; ya que $x, y \in \text{On}$, entonces $x \leq y \vee y < x$. Si $y < x$ entonces $F(y) < F(x)$, pues $\text{Smo}(F)$. Esto contradice nuestra suposición, de ahí que $x \leq y$. ■

Nota: El principio de recursión transfinita, nos asegura que podemos definir una función F sobre On de tal manera que su valor en α dependa de sus valores en todos los ordinales menores que α y sobre cualquier condición dada G . Si $R \text{ We } A$ y si F tiene un isomorfismo que preserva el orden de algún ordinal en A , entonces $F(\alpha)$ debe ser el elemento R -minimal en $A - F(\alpha)$. Supóngase que podemos definir G de tal manera que $G(F_\alpha)$ es el elemento R -minimal en $A - F[\alpha]$. Luego, claramente F debe ser un mapeo que preserva el orden hacia el interior de A . Faltaría probar únicamente que F agota a los elementos de A , es decir, $\text{Im}(F) = A$. De hecho, descubriremos que existen dos casos de interés. Si R es una relación bien fundada entonces $\text{Im}(F) = A$; si R no es bien fundada, entonces $\text{Im}(F)$ será un segmento R -inicial de A .

Nótese que $\text{Im}(F)$ es R -transitivo, esto es $(xRy \wedge y \in \text{Im}(F)) \Rightarrow x \in \text{Im}(F)$.

Teorema 72:

Si $R \text{ We } A \wedge R \text{ Wfr } A \wedge B \subseteq A \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in B)[xRy \Rightarrow x \in B]$ entonces

$$A = B \vee (\exists x \in A)[B = A \cap R^{-1}\{x\}].$$

Demostración (por contradicción):

Si $A \neq B$ entonces, ya que $B \subseteq A$, $A - B \neq \emptyset$. Así, $A - B$ tiene un elemento R -minimal, a (teorema 35). Puesto que $a \in A \wedge a \notin B$ y, por hipótesis,

$$(x \in A \wedge xRy \wedge y \in B) \Rightarrow x \in B$$

se sigue que $(\forall x \in B)[xRa]$, pues de otro modo $a \in B$. Por lo tanto $B \subseteq A \cap R^{-1}\{a\}$.

Además $x \in A \cap R^{-1}\{a\} \Rightarrow (x \in A \wedge xRa)$. Pero a es el elemento R -minimal en $A - B$. Por consiguiente, $x \notin A - B$, es decir, $x \in B$. Así, $A \cap R^{-1}\{a\} \subseteq B$ y, por lo tanto $B = A \cap R^{-1}\{a\}$. ■

Nota: En el teorema anterior el requisito de que R fuese bien fundada se usa únicamente para establecer que $A - B$ tiene un elemento R -minimal. Posteriormente probaremos que es suficiente con que R sea fundamental. Consecuentemente este resultado es válido aún si R es una relación bien ordenada que no es bien fundada.

Teorema 73:

Si $F \in \mathfrak{F}_n \text{ On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F_\alpha)] \wedge (\forall \alpha)[G(F_\alpha) \in A - F[\alpha]]$ entonces

- (i) $\text{Im}(F) \subseteq A$.
- (ii) $\text{Un}_2(F)$.
- (iii) $\mathfrak{P}_\tau(A)$.

Demostración:

- (i) $(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F_\alpha) \wedge G(F_\alpha) \in A - F(\alpha)]$, es decir, $(\forall \alpha)[F(\alpha) \in A]$.

(ii) $\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) \in F[\beta]$. Además, $F(\beta) \in A - F[\beta]$, es decir, $F(\beta) \notin F[\beta]$. Por lo tanto, $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Consecuentemente, $\alpha \neq \beta \Rightarrow F(\alpha) \neq F(\beta)$, es decir, $F(\alpha) = F(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$.

(iii) Ya que $\text{Im}(F) \subseteq A$ tenemos que $\mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M}(\text{Im}(F))$. Además,

$$\text{Un}_2(F) \Rightarrow [\mathcal{M}(\text{Im}(F)) \Leftrightarrow \mathcal{M}(\text{On})].$$

Así, $\mathcal{P}_T(\Lambda)$. ■

Teorema 74:

Si $F \in \mathcal{F}_n \text{ On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F|_\alpha)] \wedge (\forall \alpha)[A - F[\alpha] \neq \emptyset \Rightarrow G(F|_\alpha) \in A - F[\alpha]] \wedge \mathcal{M}(A)$
entonces $(\exists \alpha)(\forall \beta < \alpha)[A - F[\beta] \neq \emptyset] \wedge F[\alpha] = A \wedge \text{Un}_2(F|_\alpha)$.

Demostración:

Si $(\forall \alpha)[A - F[\alpha] \neq \emptyset]$ entonces $(\forall \alpha)[G(F|_\alpha) \in A - F[\alpha]]$ y, por el teorema 73, A es una clase propia. Ya que, por hipótesis, A es un conjunto concluimos que $(\exists \alpha)[A - F[\alpha] = \emptyset]$. Existe entonces un α mínimo, es decir,

$$(\exists \alpha)[A - F[\alpha] = \emptyset \wedge (\forall \beta < \alpha)[A - F[\beta] \neq \emptyset]].$$

Si $x \in F(\alpha)$ entonces $(\exists \beta < \alpha)[x = F(\beta)]$. Pero $\beta < \alpha \Rightarrow A - F[\alpha] \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $F(\beta) \in A - F[\beta]$, es decir, $x \in A$. Así, $F[\alpha] \subseteq A$. Pero, ya que $A - F[\alpha] = \emptyset$, $A \subseteq F[\alpha]$. Por consiguiente, $A = F[\alpha]$.

Ya que F es una función, $F|_\alpha$ es univaluada. Además,

$$\gamma < \beta < \alpha \Rightarrow F(\gamma) \in F[\beta] \wedge F(\beta) \in A - F[\beta],$$

es decir, $F(\gamma) \in F[\beta] \wedge F(\beta) \notin F[\beta]$. Entonces $F(\beta) \neq F(\gamma)$. Así,

$$[\gamma < \alpha \wedge \beta < \alpha \wedge F(\gamma) = F(\beta)] \Rightarrow \gamma = \beta,$$

esto es, $F|_\alpha$ es uno-a-uno. ■

Nota: En el teorema 73 vemos que el requisito de que $(\forall \alpha)[G(F|_\alpha) \in A - F[\alpha]]$, nos asegura que la función F definida por inducción transfinita será uno-a-uno. A su vez,

si F es uno-a-uno entonces $\text{Im}(F)$ será una clase propia y $(\forall \alpha)[G(F_\alpha) \in A - F[\alpha]]$. Además, si $\text{Im}(F)$ es un conjunto entonces F no puede ser uno-a-uno. En este caso el teorema 74 nos asegura que si F llena los requisitos para las relaciones uno-a-uno "tan grandes como se puedan", es decir, cuando los elementos de $\text{Im}(F)$ se agotan, entonces la restricción de F a algún ordinal α ($F|_\alpha$) mapeará uno-a-uno a α sobre $\text{Im}(F)$. De esto último podemos probar que todo conjunto bien ordenado es isomorfo en el orden a un número ordinal.

Teorema 75: Si R es bien fundada sobre A y además ordena bien a A , y si

$G = \{(x, y) \mid y \in A - \text{Im}(x) \wedge (A - \text{Im}(x)) \cap R^{-1}\{y\} = \emptyset\} \wedge F \text{ Fr On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F_\alpha)]$
entonces G es univaluada y $G(x) \in A - \text{Im}(x) \Leftrightarrow A - \text{Im}(x) \neq \emptyset$.

Demostración:

Si $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ entonces $y_1 \in A - \text{Im}(x) \wedge y_2 \in A - \text{Im}(x)$ y además

$$(A - \text{Im}(x)) \cap R^{-1}\{y_1\} = \emptyset \wedge (A - \text{Im}(x)) \cap R^{-1}\{y_2\} = \emptyset.$$

Por lo tanto, $y_1 \notin R^{-1}\{y_2\} \wedge y_2 \notin R^{-1}\{y_1\}$. Ya que $R \text{ We } A$ debemos tener que $y_1 = y_2$.

Si $G(x) \in A - \text{Im}(x)$ entonces, claramente, $A - \text{Im}(x) \neq \emptyset$. Contrariamente, si $A - \text{Im}(x) \neq \emptyset$ entonces R es bien fundada sobre A y ordena bien a A . Así, $A - \text{Im}(x)$ tiene un elemento R -minimal, y . Pero $G(x) = y$, es decir, $G(x) \in A - \text{Im}(x)$. ■

Teorema 76: Si A es una clase propia que es bien ordenada por R , siendo R bien fundada sobre A y si

$G = \{(x, y) \mid y \in A - \text{Im}(x) \wedge (A - \text{Im}(x)) \cap R^{-1}\{y\} = \emptyset\} \wedge F \text{ Fr On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F_\alpha)]$
entonces $F \text{ Isom}_{E,R}(\text{On}, A)$.

Demostración:

Si $(\exists \alpha)[A - F[\alpha] \neq \emptyset]$ entonces $A \subseteq F[\alpha]$. Ya que $F[\alpha]$ es un conjunto, entonces se sigue que A es un conjunto. Pero como A es una clase propia tenemos entonces que $(\forall \alpha)[A - F[\alpha] \neq \emptyset]$. Del teorema 75 y de las propiedades de definición de F y G se sigue que $F(\alpha)$ es el elemento R -minimal en $A - F[\alpha]$, es decir.

$$F(\alpha) \in A - F[\alpha] \wedge (A - F[\alpha]) \cap R^{-1}\{F(\alpha)\} \neq \emptyset.$$

Del teorema 73 se sigue entonces que $\text{Im}(F) \subseteq A$ y F es uno-a-uno. Para probar que F es sobreyectiva, notemos que si $y \in \text{Im}(F)$ entonces $(\exists \alpha)[y = F(\alpha)]$. Además, ya que $F(\alpha)$ es el elemento R -minimal de $A - F[\alpha]$: $xRy \Rightarrow x \notin A - F[\alpha]$, entonces $(x \in A \wedge xRy) \Rightarrow x \in F[\alpha]$

$$\Rightarrow x \in \text{Im}(F).$$

Tenemos entonces así satisfecha la hipótesis del teorema 72:

$$R \text{ We } A \wedge \text{Im}(F) \subseteq A \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in \text{Im}(F))[xRy \Rightarrow x \in \text{Im}(F)].$$

Concluimos que $\text{Im}(F) = A \vee (\exists x \in A)[\text{Im}(F) = A \cap R^{-1}\{x\}]$. Pero $\text{Im}(F)$ no puede ser un segmento R -inicial de A porque los segmentos R -iniciales de A son conjuntos, y siendo $\text{Im}(F)$ la imagen, uno-a-uno, de la clase propia On , no puede ser un conjunto.

Por lo tanto, $\text{Im}(F) = A$ y

$$F: \text{On} \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} A.$$

Finalmente, $\alpha < \beta \Rightarrow F[\alpha] \subseteq F[\beta]$ y por lo tanto $A - F[\beta] \subseteq A - F[\alpha]$. Ya que $F(\beta) \in A - F[\alpha]$ se sigue que $F(\beta) \in A - F[\alpha]$. Pero $F(\alpha)$ es el elemento R -minimal de $A - F[\alpha]$, por consiguiente $F(\alpha) R F(\beta) \vee F(\alpha) = F(\beta)$.

Ya que F es uno-a-uno, $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Entonces $\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) R F(\beta)$, por lo tanto $F \text{ Isom}_{E,R}(\text{On}, A)$. ■

Corolario 1.76: Si A es una clase propia de ordinales y si

$$G = \{(x, y) \mid y \in A - \text{Im}(x) \wedge [A - \text{Im}(x)] \cap R^{-1}\{y\} = \emptyset\} \wedge F \mathfrak{F}_R \text{ On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F|_\alpha)]$$

entonces $F \text{ Isom}_{E,E}(\text{On}, A)$.

Demostración:

$$E \text{ We } A \wedge E \text{ Wfr } A. \blacksquare$$

Teorema 77: $[R \text{ We } A \wedge \mathfrak{M}(A)] \Rightarrow (\exists! \alpha)(\exists! f)[f \text{ Isom}_{E,R}(\alpha, A)]$.

Demostración:

Si $G = \{(x, y) \mid y \in A - \text{Im}(x) \wedge [A \cap \text{Im}(x)] \cap R^{-1}\{y\} = \emptyset\}$ y si

$$F \mathfrak{F}_R \text{ On} \wedge (\forall \alpha)[F(\alpha) = G(F|_\alpha)]$$

entonces por el teorema 74, $(\exists \alpha)[F|_\alpha = A \wedge \text{Un}_2(F|_\alpha)]$, es decir,

$$F|_\alpha: \alpha \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} A.$$

Que $F|_\alpha$ preserva el orden se prueba análogamente a la demostración del teorema

76. Entonces $F|_\alpha \text{ Isom}_{E,R}(\alpha, A)$. Pero $F|_\alpha$ es un conjunto, es decir, $(\exists f)[f = F|_\alpha]$. Luego,

$(\exists f)[f \text{ Isom}_{E,R}(\alpha, A)]$. La unicidad se obtiene por recursión. \blacksquare

Corolario 1.77: $[A \subseteq \text{On} \wedge \mathfrak{M}(A)] \Rightarrow (\exists! \alpha)(\exists! f)[f \text{ Isom}_{E,E}(\alpha, A)]$.

Demostración:

$$A \subseteq \text{On} \Rightarrow E \text{ We } A. \blacksquare$$

Nota: Ya que E es una relación bien fundada y la buena fundación se preserva bajo el isomorfismo de orden, se sigue que el requisito en el teorema 76, de que R sea bien fundada sobre A , no se puede omitir. En su ausencia únicamente podemos probar que On es isomorfo en el orden a algún segmento R -inicial de A . Esto puede ocurrir como lo mostraremos en el siguiente ejemplo, el así llamado ordenamiento

lexicográfico de $On \times On$.

Definición 53 (Orden Lexicográfico):

$$Le \triangleq \{((\alpha \ \beta) \ (\gamma \ \delta)) \mid \alpha < \gamma \vee [\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta]\}.$$

Teorema 78:

$$(i) \ Le \ We \ On^2 \wedge [(B \subseteq On^2 \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in B)[B \cap Le^{-1}\{x\} = \emptyset]].$$

$$(ii) \ \neg Le \ Wfr \ On^2.$$

(ii) Demostración:

Si $F(\alpha) = (0 \ \alpha)$ entonces

$$F: On \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} Le^{-1}\{(1 \ 0)\}.$$

Por lo tanto $Le^{-1}\{(1 \ 0)\}$ es una clase propia. ■

Nota: Del ordenamiento lexicográfico a su vez, definimos una relación R_0 que será valiosa en secciones posteriores. Probaremos que esta relación R_0 no sólo ordena bien On^2 , sino que es bien fundada sobre On^2 .

Definición 54:

$$R_0 \triangleq \{((\alpha \ \beta) \ (\gamma \ \delta)) \mid \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee [\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha, \beta) Le(\gamma, \delta)]\}.$$

Teorema 79:

$$(i) \ R_0 \ We \ On^2 \wedge [(B \subseteq On^2 \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in B)[B \cap R_0^{-1}\{x\} = \emptyset]].$$

$$(ii) \ R_0 \ Wfr \ On^2.$$

(ii) Demostración:

Si $\gamma = \max(\alpha, \beta) + 1$ entonces $(\delta, \tau) R_0(\alpha, \beta) \Rightarrow \max(\delta, \tau) \leq \max(\alpha, \beta) < \gamma$. Luego, $(\delta, \tau) \in \gamma \times \gamma$ y, por consiguiente $On^2 \cap R_0^{-1}\{(\alpha, \beta)\} \subseteq \gamma \times \gamma$. Ya que $\gamma \times \gamma$ es un conjunto,

$On^2 \cap R_0^{-1}\{(\alpha, \beta)\}$ es un conjunto. Así, R_0 es bien fundada sobre On^2 . ■

Nota: R_0 ordena bien a On^2 y es bien fundada sobre On^2 . Consecuentemente, el ordenamiento (R_0, On^2) es isomorfo en el orden a (E, On) . Por el teorema 76, existe un isomorfismo de orden entre los dos sistemas ordenados.

Definición 55: $J_0 \text{Isom}_{R_0, E}(On^2, On)$.

H. Conceptos básicos de Aritmética Ordinal.

En el capítulo anterior se definió $\alpha+1$ como $\alpha \cup \{\alpha\}$. Se probó que $\alpha+1$ es un ordinal, esto es, $\alpha+1$ es un conjunto transitivo que es bien ordenado por la \in -relación, ya que un conjunto bien ordenado de la forma $\alpha+1$ tiene un segmento inicial α y su segmento "terminal" inicia con α que consiste precisamente de un único elemento, a saber α .

Si se suma 1 a $\alpha+1$, se obtiene un ordinal con un segmento inicial α y un segmento terminal, iniciando con α , que consiste de dos elementos α y $\alpha+1$. Ya que este segmento terminal $\{\alpha, \alpha+1\}$ es isomorfo en el orden a $2 \triangleq 1+1$, se llama a la suma de $\alpha+1$ y 1, $\alpha+2$.

En general, por $\alpha+\beta$ entendemos un ordinal que se obtiene de α al adicionarle 1, β veces. Esto es, $\alpha+\beta$ es el ordinal con un segmento inicial α y un segmento terminal, iniciando con α , que es isomorfo en el orden a β . De que tal número existe es claro del hecho de que $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ es bien ordenado por el orden lexicográfico, i.e. Con respecto a i.e., $\{0\} \times \alpha$ es un segmento inicial isomorfo en el orden a α y $\{1\} \times \beta$ es un segmento terminal isomorfo en el orden a β . Sería entonces razonable definir $\alpha+\beta$ como el ordinal que es isomorfo en el orden a

$(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$. Sin embargo, para ciertos propósitos es preferible definir $\alpha + \beta$ recursivamente de la siguiente manera.

Definición 56 (Suma de Dos Números Ordinales):

- (i) $\alpha + 0 \triangleq \alpha$,
- (ii) $\alpha + (\beta + 1) \triangleq (\alpha + \beta) + 1$,
- (iii) $\alpha + \beta \triangleq \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$, $\beta \in K_{II}$.

Nota: La definición 56 es un ejemplo de una forma muy conveniente de definición por recursión transfinita. Para definir la adición de β a α , es decir, $\alpha + \beta$ especificamos el resultado de adicionar 0 a α , definimos la suma de α y $(\beta + 1)$ como una operación sobre $\alpha + \beta$, a saber la operación de adicionar uno, y definimos $\alpha + \beta$ para $\beta \in K_{II}$ como el supremo del conjunto de sumas $\alpha + \gamma$, para $\gamma < \beta$.

De que esto sea suficiente para definir $\alpha + \beta$ para todo α y β es claro del teorema 70. Si en el teorema 70, $H = \{(\alpha \rightarrow \alpha + 1) \mid \alpha \in On\}$ y $a = \alpha$ entonces:

$$F(0) = \alpha,$$

$$F(\beta + 1) = H(F(\beta)),$$

$$F(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} F(\gamma), \beta \in K_{II}.$$

Es decir, $\alpha + \beta = F(\beta)$.

Nota: Del mismo modo que definimos la multiplicación de los enteros como adiciones repetidas, es decir, adiciones de sumandos iguales, se puede también definir la multiplicación ordinal como una adición recursiva. Para la justificación de nuestra definición una vez más apelaremos al teorema 70.

Si en el teorema 70, $H_\alpha = \{(\beta \rightarrow \beta + \alpha) \mid \beta \in On\}$ y si $a = 0$, entonces

$$\Gamma_\alpha(0)=0.$$

$$\Gamma_\alpha(\beta+1)=I_\alpha(F_\alpha(\beta)).$$

$$F_\alpha(\beta)=\bigcup_{\gamma<\beta} F_\alpha(\gamma), \beta \in K_{II}.$$

Definimos el producto de α y β , es decir $\alpha\beta$, como $F_\alpha(\beta)$.

Definición 57 (El Producto de dos Números Ordinales):

- (i) $\alpha \cdot 0 \triangleq 0$.
- (ii) $\alpha(\beta+1) \triangleq \alpha\beta + \alpha$.
- (iii) $\alpha\beta \triangleq \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha\gamma, \beta \in K_{II}$.

Nota: Teniendo definida la multiplicación como adición repetida, se define a continuación la exponenciación como multiplicación repetida, es decir, como la multiplicación de factores iguales. Sin embargo, creemos conveniente introducir antes cierta notación que será de utilidad más adelante.

Definición 58 (Notación):

- (i) $A \not\subseteq B \triangleq \neg A \subseteq B$.
- (ii) $A \neq B \triangleq \neg A = B$.

Definición 59 (Potenciación en On):

- (i) $\alpha^0 \triangleq 1$.
- (ii) $\alpha^{\beta+1} \triangleq \alpha^\beta \cdot \alpha$.
- (iii) $\alpha^\beta \triangleq \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma, \beta \in K_{II}$.
- (iv) $\alpha^\beta \triangleq 0, \beta \in K_{II} \wedge \alpha = 0$.

Nota: A partir de las definiciones anteriores, es posible probar que la adición y multiplicación ordinal son asociativas pero no conmutativas, así como el hecho de que la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, en los ordinales, sea válida únicamente por la izquierda. Esto es, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Por otro lado, a partir de las definiciones anteriores y de los teoremas 61 y 64 tenemos que las clases de los ordinales no-límite y límite (definición 46) son respectivamente:

$$K_1 = \{0, 1, \dots, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_2+1, \aleph_2+2, \dots, \aleph_3+1, \aleph_3+2, \dots, \aleph_2+1, \aleph_2+2, \dots, \aleph_1+1, \dots\},$$

$$K_{11} = \{\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots, \aleph_2, \dots, \aleph_1+1, \dots, \aleph_1+1, \dots\}.$$

Más adelante probaremos que ambas clases son clases propias.

I. Los Números Cardinales.

La equivalencia entre conjuntos, es básica para la teoría de los números cardinales. Dos conjuntos son equivalentes, o equipotentes, a condición de que exista una correspondencia uno-a-uno entre ellos.

Definición 60 (Equivalencia de Conjuntos):

$$a \approx b \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists f)[f: a \xrightarrow{\text{sobre}} b].$$

Teorema 80:

- (i) $a \approx a$.
- (ii) $a \approx b \Rightarrow b \approx a$.
- (iii) $(a \approx b \wedge b \approx c) \Rightarrow a \approx c$.

Nota: Un resultado básico de la teoría de la equivalencia de conjuntos es el

siguiente teorema primeramente probado por Cantor. La prueba de Cantor sin embargo, suponía tácitamente el Axioma de Elección. Ernst Schröder en 1896 y Felix Bernstein en 1898, independientemente, dieron pruebas que no requerían del Axioma de Elección. El teorema establece que si un conjunto a es equivalente a un subconjunto de b y si b es equivalente a un subconjunto de a , entonces $a \simeq b$.

Teorema 81 (Cantor-Schröder-Bernstein):

$$(a \simeq c \wedge c \subseteq b \wedge b \simeq d \wedge d \subseteq a) \Rightarrow a \simeq b.$$

Demostración:

Sabemos que $a \simeq c \Leftrightarrow (\exists f)[f: a \xrightarrow[\text{sobre}]{} c]$,

$$b \simeq d \Leftrightarrow (\exists g)[g: b \xrightarrow[\text{sobre}]{} d].$$

Si $H(x) = (g \circ f)(x)$ entonces, existe una función h definida sobre \mathbb{N} tal que

$$H(0) = a - d,$$

$$h(n+1) = H(H(n)) = (g \circ f)[h(n)].$$

Ya que $h(0) \subseteq a$ y puesto que $(g \circ f)$ mapea a sobre a se sigue que, por inducción, $(\forall n)[h(n) \subseteq a]$. Consecuentemente $(\forall n)[f[h(n)]]$.

Definimos a continuación una función F sobre a de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \text{ si } x \in a \wedge (\exists n)[x \in h(n)] \\ &= g^{-1}(x) \text{ si } x \in a \wedge (\forall n)[x \notin h(n)]. \end{aligned}$$

entonces $F: a \rightarrow b$. Para probar que F es sobreyectiva, notemos que

$$y \in b \Rightarrow [(\exists n)[y \in f[h(n)]] \vee (\forall n)[y \notin f[h(n)]]],$$

Si $(\exists n)[y \in f[h(n)]]$ entonces $(\exists x \in h(n))[y = f(x)]$. Pero $x \in h(n) \Rightarrow x \in a$ y $x \in a \wedge x \in h(n) \Rightarrow F(x) = f(x) = y$.

Si $(\forall n)[y \notin f[h(n)]]$ entonces se sigue que $(\forall n)[g(y) \notin h(n)]$, pues de lo contrario, si $(\exists n)[g(y) \in h(n)]$ entonces, ya que $h(0)=a-d$ y $g(y) \in d$, se sigue que $n \neq 0$. Por lo tanto, $(\exists m)[n=m+1]$. Pero $h(m+1)=g[f[h(m)]]$. Consecuentemente, ya que g es uno-a-uno, $g(y) \in h(m+1) \Rightarrow y \in f[h(m)]$. Esto es una contradicción, de lo cual concluimos que $(\forall n)[g(y) \notin h(n)]$. Por otro lado, ya que $y \in b$ se sigue que $g(y) \in a$. Por lo tanto, $F(g(y))=g^{-1}(g(y))=y$ y, por consiguiente, $\text{Im}(F)=b$.

Para probar que F es uno-a-uno, notemos que si $x \in a \wedge y \in a \wedge F(x)=F(y)$ entonces $(\exists m)[x \in h(m)] \Leftrightarrow (\exists m)[y \in h(m)]$; pues si $x \in h(m) \wedge (\forall n)[y \notin h(n)]$ entonces $F(x)=F(y) \Rightarrow f(x)=g^{-1}(y)$, es decir, $y=(g \circ f)(x)$. Pero $x \in h(m)$; por lo tanto

$$y \in (g \circ f)[h(m)] = h(m+1).$$

Similarmente podemos probar que $y \in h(m) \Rightarrow x \in h(m+1)$.

Así, $F(x)=F(y) \Rightarrow [f(x)=f(y) \vee g^{-1}(x)=g^{-1}(y)]$. Ya que ambas, f y g , son uno-a-uno se sigue que $x=y$. Puesto que F es una función de dominio a , F es un conjunto. ■

Teorema 82 (Cantor): $\neg [a \simeq \mathcal{P}(a)]$.

Demostración:

Si $(\exists f)[f: a \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} b]$

y si $B = \{b \in a \mid b \notin f(b)\}$ entonces $B \subseteq a$. Por lo tanto, B un conjunto y de ahí $B \in \mathcal{P}(a)$.

Consecuentemente $(\exists b)[b \in a \wedge B = f(b)]$. De la definición de B se sigue que

$$b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b).$$

Pero $f(b)=B$, es decir, $b \in B \Leftrightarrow b \notin B$. ■

Corolario 1.82: $\neg (\exists f)[f: \mathcal{P}(a) \xrightarrow{1-1} a]$.

Demostración:

Si $g(b)=\{b\}$, $b \in a$

entonces $g: \mathcal{P}(a) \xrightarrow{1-1} a$. Si se supone lo contrario a la tesis, entonces por el teorema de Cantor-Berstein-Schröder, $a \simeq \mathcal{P}(a)$. Pero esto contradice al teorema anterior. ■

Teorema 83: $a \simeq b \Rightarrow \mathcal{P}(a) \simeq \mathcal{P}(b)$.

Demostración:

$$a \simeq b \Leftrightarrow (\exists f)[f: a \xrightarrow{1-1} b].$$

Si $F = \{(x, f[x]) \mid x \in \mathcal{P}(a)\}$ entonces $F: \mathcal{P}(a) \rightarrow \mathcal{P}(b)$. Además, ya que $f[x] = \{f(z) \mid z \in x\}$ se sigue que si $f[x] = f[y]$ entonces $z \in x \Rightarrow f(z) \in f[x] = f[y]$. Esto es,

$$(\exists w)[w \in y \wedge f(z) = f(w)].$$

Pero ya que f es uno-a-uno se sigue que $z = w$ y por lo tanto $z \in y$. Similarmente, $z \in y \Rightarrow z \in x$. Por consiguiente, $x = y$, es decir, F es uno-a-uno.

Finalmente, si $y \in \mathcal{P}(b)$ y si $x = f^{-1}[y]$ entonces $x \in \mathcal{P}(a)$ y $F(x) = f[f^{-1}[y]] = y$. Así,

$$\text{Im}(F) = \mathcal{P}(b). \blacksquare$$

Teorema 84:

(i) $a \simeq 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(ii) $(\forall b)[\{b\} \times a \simeq a \times \{b\} \simeq a]$.

(iii) $(\forall b)[a \cup \{b\} \simeq a \vee a \cup \{b\} \simeq a \cup \{a\}]$.

(iv) $(a_1 \simeq a_2 \wedge b_1 \simeq b_2) \Rightarrow a_1 \times b_1 \simeq a_2 \times b_2$.

(v) $a \simeq b \Leftrightarrow a \cup \{a\} \simeq b \cup \{b\}$.

(vi) $a \times b \simeq b \times a$.

(vii) $\alpha \geq \aleph \Rightarrow \alpha \simeq \alpha + 1$.

(viii) $\alpha \geq \aleph \Rightarrow \alpha \simeq \alpha + \aleph$.

Nota: Cantor definió el número cardinal de un conjunto M como “el concepto general que, por significados de nuestra facultad activa de pensar, proviene de los agregados M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus varios elementos m y del orden en el cual ellos están dados.” La definición de Cantor sugiere que para él un número cardinal no es un objeto matemático, sino más bien una entidad psicológica.

Frege, en 1884, y Russell, independientemente en 1903, removieron los números cardinales de este reino psíquico al definir el numeral de un conjunto a como la clase $\#a$ de todos los conjuntos que son equivalentes al conjunto a . Elegimos preferiblemente definir $\#a$ como el número ordinal más pequeño que es equivalente a a . Si hay una clase de equivalencia que contiene números no ordinales entonces esa clase de equivalencia no será representada entre nuestros números cardinales. Del trabajo de Cohen, sabemos que la cuestión, de que ya sea que tal clase exista o no, es indecidible en ZF. Esta cuestión, sin embargo, es decidible a partir del Axioma de Elección:

$$(\forall a)(\exists f)(\forall x \in a)[x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in x] \text{ (forma débil),}$$

$$(\exists F)(\forall x)[x \neq 0 \Rightarrow F(x) \in x] \text{ (forma fuerte).}$$

Nosotros, sin embargo, desarrollaremos las propiedades de los cardinales que no requieren del Axioma de Elección.

Definición 61 (Construcción de Los Números Cardinales): $\#a \triangleq \mu_\alpha(\alpha \simeq a)$.

Nota: Nótese que $\#a = \mu_\alpha(\alpha \simeq a) = \inf\{\alpha \mid \alpha \simeq a\}$

$$= \cap(\{\alpha \mid \alpha \simeq a\} \cap \aleph_n) \quad \text{si } \{\alpha \mid \alpha \simeq a\} \cap \aleph_n \neq 0.$$

$$= 0 \quad \text{si } \{\alpha \mid \alpha \simeq a\} \cap \aleph_n = 0.$$

Es decir, si no hay α equivalente a a entonces $\#a=0$.

Teorema 85: $\#a \in \mathcal{O}_n$

Teorema 86:

$$(i) a \approx \#a \Leftrightarrow (\exists \alpha)[\alpha \approx a].$$

$$(ii) a \approx \#a \Leftrightarrow (\exists b)[b \subseteq \mathcal{O}_n \wedge b \approx a].$$

$$(iii) \#a=0 \vee \#a \approx a.$$

Teorema 87:

$$(i) \alpha \approx \#\alpha.$$

$$(ii) \#\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0.$$

Teorema 88: $(\forall \alpha)[a \approx \alpha \Rightarrow \#a \leq \alpha]$.

Corolario 1.88: $\#\alpha \leq \alpha$.

Teorema 89: $a \approx b \Rightarrow \#a = \#b$.

Nota: Los resultados anteriores se siguen fácilmente de la definición 61. A continuación se introducen los predicados “Fin” e “Inf” para conjuntos finitos e infinitos. Nótese que Inf es diferente de inf .

Definición 62 (Conjuntos Finitos e Infinitos):

$$(i) \text{Fin}(a) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists n)[a \approx n].$$

$$(ii) \text{Inf}(a) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \neg \text{Fin}(a).$$

Teorema 90:

$$(i) \text{Fin}(a) \Rightarrow \text{Fin}(a \cup \{b\}).$$

$$(ii) \text{Fin}(a) \Rightarrow \text{Fin}(a - \{b\}).$$

$$(iii) \text{Fin}(a) \Rightarrow \text{Fin}(\{b\} \times a).$$

(iv) $\text{Fin}(n)$.

(v) $\text{Inf}(a) \Rightarrow \#a = \#(a \cup \{a\})$.

(vi) $(\text{Inf}(a) \wedge a \simeq b) \Rightarrow \text{Inf}(b)$.

(vii) $(a \cap b = 0 \wedge a \simeq \alpha \wedge b \simeq \beta) \Rightarrow a \cup b \simeq \alpha + \beta$.

(viii) $\alpha \times \beta \simeq \alpha \beta$.

(ix) $\text{Fin}(a) \Rightarrow (\exists x)[x \subset a \wedge \neg(x \simeq a)]$.

(x) $a \simeq a \cup \{a\} \Leftrightarrow (\exists x)[x \subset a \wedge x \simeq \mathbb{N}]$.

Nota: A continuación se introduce la clase de los números cardinales.

Definición 63 (La Clase de los Números Cardinales): $\mathbb{N} \triangleq \{\alpha \mid (\exists x)[\alpha = \#x]\}$.

Teorema 91: $\mathbb{N} \subseteq \text{On}$

Demostración:

Válida a partir de la definición 63. ■

Teorema 92: $\alpha \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha = \#a$.

Demostración:

Si $\alpha = \#a$ entonces, por la definición 63, $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $(\exists x)[\alpha = \#x]$. Del teorema 87 se sigue que $\alpha = 0 \vee x \simeq \#x$. Si $\alpha = 0$ entonces $\#a = \#0 = 0 = \alpha$. Si $x \simeq \#x$ entonces ya que $\alpha \simeq \#a$ tenemos que $x \simeq \#a$. Por lo tanto $\#x \leq \#a$. Pero $\#x = \alpha$, por consiguiente $\alpha \leq \#a$. Del corolario 1.88, $\#a \leq a$. Consecuentemente $\alpha = \#a$. ■

Teorema 93: $m \simeq n \Rightarrow m = n$.

Demostración (por inducción sobre n):

Si $m \simeq 0$ entonces $m = 0$. Si $(\forall m)[m \simeq n \Rightarrow m = n]$, entonces, ya que $m \simeq (n+1) \Rightarrow m \neq 0$, se sigue que $(\exists p)[m = p+1]$. Pero $p+1 \simeq n+1 \Rightarrow p \simeq n$ (según teorema 84(v)). Entonces de la hipótesis de inducción, $p = n$ y, por lo tanto, $m = p+1 = n+1$. ■

Teorema 94: $\#n=n$.

Demostración:

Ya que $\#n \leq n$ se sigue que $\#n \in \mathbb{N}$. Ya que $\#n \neq n$ tenemos, del teorema 93, que $\#n=n$. ■

Teorema 95: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$.

Demostración:

Válida a partir de los teoremas 92 y 94. ■

Nota: Es nuestro objetivo probar que \mathbb{N} es una clase propia. Esto se prueba fácilmente a partir del siguiente teorema.

Teorema 96:

$$(\forall a)(\exists \beta \in \mathbb{N})[\beta = \{\alpha \mid (\exists f)[f: \alpha \xrightarrow{1-1} a]\} \wedge \neg (\exists f)[f: \beta \xrightarrow{1-1} a]].$$

Demostración:

Para cada $r \subseteq a$ y para cada $x \subseteq a$, si $r \in x$ entonces

$$(\exists! \beta)(\exists! f_{r,x})[f_{r,x} \text{ Isom}_{r,E}(x, \beta)].$$

Sea $F((r \ x)) = f_{r,x}[x]$ si $r \in x$,

= 0, de otro modo,

entonces F es una función sobre $\mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a) \triangleq \mathcal{P}^3(a)$. Por lo tanto $\mathbb{H}[\mathcal{P}^3(a)]$ es un conjunto, y claramente un conjunto de ordinales.

Si $b = \mathbb{H}[\mathcal{P}^3(a)]$ entonces

$$y \in b \Leftrightarrow (\exists r \subseteq a)(\exists x \subseteq a)[y = F((r \ x))]$$

$$\therefore y \in b \Leftrightarrow [y=0 \vee (\exists r \subseteq a)(\exists x \subseteq a)[r \in x \wedge y = f_{r,x}[x]]]$$

$$\Leftrightarrow [y \in \mathbb{O}_n \wedge (\exists f)[f: y \xrightarrow{1-1} a]],$$

es decir, $b = \{\alpha \mid (\exists f)[f: \alpha \xrightarrow{-1} a]\}$.

Si $\gamma < \beta \wedge \beta \in b$ entonces $(\exists f)[f: \beta \xrightarrow{-1} a]$. Entonces $f|_\gamma: \gamma \xrightarrow{-1} a$; por consiguiente $\gamma \in b$. Así, b es un conjunto transitivo de ordinales. Por lo tanto b es un ordinal, es decir, $(\exists \beta)[\beta = \{\alpha \mid (\exists f)[f: \alpha \xrightarrow{-1} a]\}]$. Además, si $\gamma \approx \beta$ y $\gamma < \beta$ entonces $(\exists g)[g: \beta \xrightarrow{-1} \gamma]$ y $(\exists f)[f: \gamma \xrightarrow{-1} a]$. Luego $f \circ g: \beta \xrightarrow{-1} a$, es decir, $\beta \in \beta$. De esta contradicción concluimos que $\gamma \approx \beta \Rightarrow \beta \leq \gamma$, y por consiguiente $\# \beta = \beta$, es decir, $\beta \in \mathbb{N}$.

Además si $(\exists f)[f: \beta \xrightarrow{-1} a]$ se sigue de nuevo que $\beta \in \beta$, por consiguiente

$$\neg (\exists f)[f: \beta \xrightarrow{-1} a]. \blacksquare$$

Teorema 97: $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$.

Demostración (por contradicción):

Si $(\exists a)[a = \mathbb{N}]$ entonces, ya que $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O}_n$, $U_a \in \mathcal{O}_n$. Si $\alpha = U_a$ entonces, por el teorema anterior $(\exists \beta \in a)[\beta = \{\delta \mid (\exists f)[f: \delta \xrightarrow{-1} \alpha]\} \wedge \neg (\exists f)[f: \beta \xrightarrow{-1} \alpha]]$. Pero $\beta \in a \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$, por consiguiente $(\exists f)[f: \beta \xrightarrow{-1} \alpha]$. De esta contradicción concluimos que \mathbb{N} es una clase propia. \blacksquare

Corolario 1.97: $K_1 \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Demostración:

$\alpha \in K_1 \cap \mathbb{N} \Leftrightarrow [\alpha \in K_1 \wedge \alpha \in \mathbb{N}]$ según definiciones 15(ii), 3(i)

$\Leftrightarrow [(\alpha = 0 \vee (\exists \beta)[\alpha = \beta + 1]) \wedge \alpha = \#\alpha]$ definiciones 46(i), 3(i), teorema 92

$\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{N}$ a partir de los teoremas 94 y 95. \blacksquare

Corolario 2.97: $\mathcal{M}(K_1 \cap \mathbb{N})$.

Demostración:

Válido a partir del corolario anterior y del axioma 6. \blacksquare

Definición 64 (La Clase de los Números Cardinales Transfinitos):

$$N' \triangleq N - \mathbb{N}.$$

Teorema 98: $\mathfrak{A}z(N')$.

Demostración (por contradicción):

$$N = N' \cup \mathbb{N}. \text{ Por lo tanto, } \mathfrak{M}(N') \Rightarrow \mathfrak{M}(N). \blacksquare$$

Corolario 1.98: $\mathfrak{A}z(K_{II})$.

Demostración (por contradicción):

Supóngase lo contrario, esto es, $\mathfrak{M}(K_{II})$. Entonces, del corolario anterior y del teorema 22(iii), se sigue que $\mathfrak{M}(N')$, lo cual contradice al teorema 98. Luego, $\mathfrak{A}z(K_{II})$. \blacksquare

Corolario 2.98: $\mathfrak{A}z(K_I)$.

Demostración (por contradicción):

Si $\mathfrak{M}(K_I)$, es decir, si $(\exists a)[a=K_I]$, ya que $K_I \subseteq On$, se sigue que $\cup a \in On$ (a partir del axioma 2, el teorema 53 y la definición 40). Si $\alpha = \cup a$ entonces, por el teorema anterior $(\exists \beta \in a)[\beta = \{\delta \mid (\exists f)[f: \delta \xrightarrow{1-1} \alpha]\} \wedge \neg(\exists f)[f: \beta \xrightarrow{1-1} \alpha]]$. Pero $\beta \in a \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$, por consiguiente $(\exists f)[f: \beta \xrightarrow{1-1} \alpha]$. De esta contradicción concluimos que $\mathfrak{A}z(K_I)$. \blacksquare

Nota: Ya que N' es una clase propia de ordinales, se sigue que es isomorfa en el orden a On (Corolario 1.76). A tal isomorfismo bajo la relación E (definiciones 34, 36) lo denotaremos por \aleph (álef), la primera letra del alfabeto hebreo.

Definición 65: $\aleph \text{ Isom}_{E,E}(On, N')$.¹

Definición 66 (Notación): $\aleph_\alpha \triangleq \aleph(\alpha)$.

¹ Es posible dar una definición recursiva del presente isomorfismo:

(i) $\aleph_0 = \omega$; (ii) $\aleph_{\alpha+1} = \mu_\beta(\#\beta > \aleph_\alpha)$; (iii) $\aleph_\alpha = \cup \{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$ ssi $\alpha \in K_{II}$.

Sin embargo, como se verá, dicha definición supone tácitamente la hipótesis del continuo.

Nota: El problema fundamental del presente trabajo consiste en determinar, en forma explícita, cuáles son aquellos ordinales que resultan ser imágenes bajo este isomorfismo. No pretendemos construirlos todos. Solamente expondremos aquellos que serán candidatos a ser, lo que llamaremos más adelante, cardinales inaccesibles.

Teorema 99: $(a \subseteq b \wedge b \simeq \#b) \Rightarrow \#a \leq \#b$.

Demostración:

$b \simeq \#b \Leftrightarrow (\exists f)[f: b \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} \#b]$. Ya que $a \subseteq b$, $f[a] \subseteq \#b$. Entonces

$$(\exists \beta)(\exists h)[h \text{ Isom}_{E,E}(\beta, f[a])].$$

Consecuentemente, $a \simeq \beta$ y por consiguiente $\#a \leq \beta$. Pero ya que h es una función estrictamente monótona $\alpha < \beta \Rightarrow (\alpha \leq h(\alpha) \wedge h(\alpha) \in f[b])$. Pero $f[b] = \#b$ y $\#b$ es transitivo, por lo tanto, $\beta \subseteq \#b$, es decir, $\#a \leq \#b$. ■

Corolario 1.99: $a \subseteq a \Rightarrow \#a \leq \#a$.

Demostración:

Válida por los teoremas 87 y 99. ■

Teorema 100: $(a \simeq \#a \wedge \text{Un}(A)) \Rightarrow \#A[a] \leq \#a$.

Demostración:

Ya que $a \simeq \#a$, se sigue que

$$(\exists h)[h: \#a \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} a].$$

Entonces $A \circ h: \#a \rightarrow A[a]$. Pero $x \in A[a] \Rightarrow (\exists b \in a)[x = A(b)]$ y

$$b \in a \Rightarrow (\exists \beta \in \#a)[b = h(\beta)].$$

Por lo tanto $x \in A[a] \Rightarrow (\exists \beta \in \#a)[x = (A \circ h)(\beta)]$, es decir,

$$A \circ h: \#a \xrightarrow[\text{sobre}]{} A[a].$$

Además, si $B = \{\beta \in \#a \mid (\forall \alpha < \beta) [A(h(\alpha)) \neq A(h(\beta))]\}$ entonces $b \subseteq \#a$, es decir, B es un conjunto y $\#B \leq \#a$. También $\beta \in B \wedge \gamma \in B \wedge A(h(\beta)) = A(h(\gamma)) \Rightarrow \beta = \gamma$. Finalmente, si $(\forall x \in A[a]) (\exists \beta \in \#a) [x = A(h(\beta))]$. Existe entonces un ordinal menor que β . Para este β tenemos que $\alpha < \beta \Rightarrow A(h(\alpha)) \neq A(h(\beta))$. Por lo tanto $\beta \in B$, es decir,

$$(A \circ h)|_B : B \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} A[a].$$

Entonces $\#A[a] = \#B \leq \#a$. ■

Teorema 101: $\#a > 0 \Rightarrow [(\exists f)[f: a \xrightarrow[\text{sobre}]{} b] \Leftrightarrow 0 < \#b \leq \#a]$.

Demostración:

Del teorema anterior, $a \simeq \#a$ y además

$$(\exists f)[f: a \xrightarrow[\text{sobre}]{} b],$$

por lo tanto $\#b = \#[\alpha] \leq \#a$. Contrariamente, si $0 < \#b \leq \#a$ entonces $b \simeq \#b \wedge a \simeq \#a$.

Además, $(\exists g)[g: b \xrightarrow{1-1} a]$ y $\exists y \in b$. Si

$$f(x) = g^{-1}(x) \quad \text{ssi } x \in g[b],$$

$$f(x) = y \quad \text{ssi } x \in a - g[b],$$

entonces $f: a \xrightarrow[\text{sobre}]{} b$. ■

Teorema 102: $\#(\#a) = \#a$.

Demostración:

Si $\#a = 0$ entonces $\#(\#a) = \#0 = 0 = \#a$. Si $\#a \neq 0$ entonces, por el teorema 86(iii), $a \simeq \#a$.

Por consiguiente, $\alpha \simeq a \Leftrightarrow \alpha \simeq \#a$, es decir, $\{\alpha \mid \alpha \simeq a\} = \{\alpha \mid \alpha \simeq \#a\}$. Por lo tanto,

$\#(\#a) = \#a$. ■

Corolario 1.102: $\#\alpha < \#\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Demostración:

Ya que $\#\alpha \leq \alpha$ se sigue que $\alpha < \#\beta \Rightarrow \#\alpha < \#\beta$. También $\#\beta = \#(\#\beta) \leq \#\alpha$. ■

Teorema 103: $\alpha > 1 \Rightarrow \#(\alpha+1) \leq \#(\alpha \times \alpha)$.

Demostración:

Ya que $\alpha \times \alpha$ es bien ordenado por R_0 , existe un número ordinal equivalente a $\alpha \times \alpha$.

Por lo tanto, $\alpha \times \alpha \cong \#(\alpha \times \alpha)$. Si

$$g(\beta) = (0 \ \beta) \text{ para } \beta < \alpha,$$

$$g(\alpha) = (1 \ 0)$$

entonces $g: \alpha+1 \xrightarrow{1-1} \alpha \times \alpha$ y por consiguiente $\alpha+1 \cong g[\alpha+1] \subseteq \alpha \times \alpha$. Del teorema 99, se sigue que $\#(\alpha+1) \leq \#(\alpha \times \alpha)$. ■

Teorema 104: $\alpha \geq \aleph \Rightarrow \#(\alpha \times \alpha) = \#\alpha$.

Demostración (por inducción transfinita sobre α):

Como hipótesis de inducción, tenemos $\mu < \alpha \Rightarrow [\mu < \aleph \vee \#(\mu \times \mu) = \#\mu]$. Del corolario

1.99, $\mu < \alpha \Rightarrow \#\mu \leq \#\alpha$. Si $(\exists \mu < \alpha)[\#\mu = \#\alpha]$ entonces $\mu \cong \alpha$ y

$$\#(\alpha \times \alpha) = \#(\mu \times \mu) = \#\mu = \#\alpha.$$

Si $(\forall \mu < \alpha)[\#\mu < \#\alpha]$ entonces, ya que $\mu < \aleph \vee \#(\mu+1) = \#\mu$ se sigue del teorema 103 que, $\mu+1 < \#\alpha \leq \alpha$. De nuestra hipótesis de inducción se sigue entonces que: $\alpha > \mu \geq \aleph \Rightarrow \#((\mu+1) \times (\mu+1)) = \#(\mu+1)$.

Recuerde la relación R_0 de la definición 54. Por el teorema 79, R_0 ordena bien a On^2 . Consecuentemente, hay un isomorfismo de orden, J_0 , tal que

$$J_0 \text{ Isom}_{R_0, E}(On^2, On) \text{ (definición 55).}$$

Deseamos ahora probar que $J_0[\alpha \times \alpha] \subseteq \#\alpha$. Primero recordemos que un isomorfismo de orden mapea segmentos iniciales en segmentos iniciales:

$$J_0[R_0\{(\beta \ \gamma)\}] = E^{-1}\{J_0(\beta \ \gamma)\} = J_0(\beta \ \gamma).$$

Entonces, ya que J_0 es uno-a-uno

$$\#J_0((\beta \ \gamma)) = \#J_0[R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\}] = \#R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\}.$$

Pero si $(\beta \ \gamma) \in \alpha \times \alpha$ y si $\mu = \text{máx}(\beta, \gamma)$ entonces $\mu < \alpha$ y

$$\begin{aligned} (\eta \ \theta) \in R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\} &\Rightarrow (\eta \ \theta) R_0(\beta \ \gamma) \\ &\Rightarrow \text{máx}(\eta \ \theta) \leq \mu \\ &\Rightarrow (\eta \leq \mu \wedge \theta \leq \mu) \\ &\Rightarrow (\eta \ \theta) \in (\mu+1) \times (\mu+1) \end{aligned}$$

es decir, $R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\} \subseteq (\mu+1) \times (\mu+1)$.

Ya que $\mu < \alpha$ se sigue de la hipótesis de inducción y del teorema 99 que, si $\mu \geq \aleph$ entonces $\#R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\} \leq \#[(\mu+1) \times (\mu+1)] = \#(\mu+1) < \#\alpha$.

Por lo tanto $\#J_0((\beta \ \gamma)) < \#\alpha$ y, por consiguiente $J_0((\beta \ \gamma)) < \#\alpha$.

Si $\mu < \aleph$ entonces $(\mu+1) \times (\mu+1)$ es finito. Por consiguiente, $R_0^{-1}\{(\beta \ \gamma)\}$ es finito y finalmente $J_0((\beta \ \gamma))$ es finito. Puesto que $\alpha \geq \aleph$, se sigue $J_0((\beta \ \gamma)) < \#\alpha$. Así,

$$J_0((\beta \ \gamma)) \subseteq \#\alpha.$$

Ya que J_0 es uno-a-uno, $\#(\alpha \times \alpha) = \#J_0[\alpha \times \alpha] \leq \#\alpha$. Pero del teorema anterior.

$$\#\alpha = \#(\alpha+1) \leq \#(\alpha \times \alpha).$$

Por consiguiente, $\#(\alpha \times \alpha) = \#\alpha$. ■

Teorema 105: $\#a \geq \aleph \Rightarrow \#(a \times a) = \#a$.

Demostración:

Ya que $a \cong \#a$, tenemos que $a \times a \cong \#a \times \#a$. Entonces, del teorema anterior

$$\#(a \times a) = \#(\#a \times \#a) = \#a. \blacksquare$$

Teorema 106:

- (i) $\alpha < \aleph_\beta \Leftrightarrow \#\alpha < \aleph_\beta$.
- (ii) $\#(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$.
- (iii) $0 < \gamma < \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow (\exists f)[f: \aleph_\alpha \xrightarrow{\text{sobre}} \gamma]$.

Demostración:

Válido por los teoremas 103, 105 y 101 respectivamente. ■

Teorema 107:

- (i) $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\alpha \leq \aleph_\alpha$.
- (iii) $\aleph_0 = \mathbb{N}$.
- (iv) $N' \subseteq K_{II}$.

(iv) Demostración (por contradicción):

Ya que $N' \subseteq N' \cup \mathbb{N} = \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subseteq \text{On}$, se sigue que $N' \subseteq \text{On}$, es decir, todos los elementos de N' son ordinales transfinitos (mayores o iguales que \mathbb{N} ; según definición 64 y el teorema 91). Si $\alpha \in N' \wedge \alpha \in K_I$, es decir, si $\alpha \in \mathbb{N} \wedge \alpha \notin \mathbb{N} \wedge (\exists \beta)[\alpha = \beta + 1]$ (definiciones 64, 46(i)) entonces $\#\alpha = \#(\beta + 1) = \#\beta$ (teorema 90(v)). Por consiguiente, $\alpha \notin \mathbb{N}$ (a partir del teorema 92). De esta contradicción se sigue que $\alpha \in K_{II}$. ■

Nota: Las funciones estrictamente monótonas proveen otras interesantes vías de investigación. Deseamos considerar funciones ordinales estrictamente monótonas definidas sobre un ordinal β y cuya imagen es un subconjunto de un ordinal mayor α . Requerimos de que todo elemento de α , o esté en la imagen de la función, o bien sea menor que algún ordinal que esté en la imagen. Bajo estas circunstancias decimos que α es cofinal con β .

Definición 67 (Cofinalidad):

$$\text{cof}(\alpha, \beta) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\beta \leq \alpha \wedge (\exists f)[\text{Smo}(f) \wedge f: \beta \rightarrow \alpha \wedge (\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]].$$

Teorema 108:

- (i) $\text{cof}(\alpha, \alpha)$.
- (ii) $(\text{cof}(\alpha, \beta) \wedge \text{cof}(\beta, \gamma)) \Rightarrow \text{cof}(\alpha, \gamma)$.

Teorema 109:

- (i) $\text{cof}(\alpha, 0) \Leftrightarrow \alpha = 0$.
- (ii) $(\alpha \in K_I \wedge \beta \in K_I \wedge 0 < \beta \leq \alpha) \Rightarrow \text{cof}(\alpha, \beta)$.

Corolario 1.109: $1 \leq \alpha \in K_I \Rightarrow \text{cof}(\alpha, 1)$.

Lema 1.110: $\text{cof}(\alpha, \beta) \Rightarrow [\alpha \in K_{II} \Leftrightarrow \beta \in K_{II}]$.

Demostración:

Por hipótesis $\beta \leq \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Además,

$$(\exists f)[\text{Smo}(f) \wedge f: \beta \rightarrow \alpha \wedge (\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma].$$

Si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \in K_I$ entonces $(\exists \gamma)[\alpha = \gamma + 1]$. Ya que $\gamma < \alpha$, $(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]$. Pero como f es estrictamente monótona y $\alpha - (\gamma + 1) = 0$, se sigue que $\beta - (\delta + 1) = 0$, es decir, $\beta = \delta + 1$.

Si $\alpha \in K_{II}$ entonces $\beta \neq 0$. Si $(\exists \delta)[\beta = \delta + 1]$ entonces, ya que f es estrictamente monótona, $\tau < \delta$ implica que $f(\tau) < f(\delta)$, es decir, $\neg(\exists \tau < \beta)[f(\tau) \geq f(\delta + 1)]$. Ahora bien, $f(\delta + 1) < \alpha$ (lo cual es una contradicción). Así, $\beta \in K_{II}$. ■

Lema 2.110:

$$[\beta < \alpha \wedge (\exists f)[f: \beta \rightarrow \alpha \wedge (\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]] \Rightarrow (\exists \eta \leq \beta)[\text{cof}(\alpha, \eta)].$$

Demostración:

Si $a = \{\delta < \beta | (\forall \gamma < \delta)[f(\gamma) < f(\delta)]\}$ entonces $a \subseteq \beta$. Por lo tanto,

$$(\exists \eta \leq \beta)(\exists h)[h \text{Isom}_{E,E}(\eta, a)].$$

Si $g=f \circ h$ entonces $g:\eta \rightarrow \alpha$. Si $\delta < \gamma < \eta$ entonces $h(\delta) < h(\gamma) \wedge h(\delta) \in a \wedge h(\gamma) \in a$. Entonces $f(h(\delta)) < f(h(\gamma))$, es decir, g es estrictamente monótona.

Ya que $(\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]$ se sigue que existe un mínimo, δ . Este δ está en a y por tanto $(\exists v < \eta)[h(v) = \delta]$. Por lo tanto, $\gamma \leq f(\delta) = f(h(v)) = g(v)$. Consecuentemente $\text{cof}(\alpha, \eta)$. ■

Lema 3.110: $[\beta \leq \alpha \wedge \beta \simeq \alpha] \Rightarrow (\exists \eta \leq \beta)[\text{cof}(\alpha, \eta)]$.

Demostración:

$\beta \simeq \alpha \Rightarrow (\exists f)[f: \beta \xrightarrow[\text{sobre}]{1-1} \alpha]$. Entonces $(\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) = \gamma]$.

Luego, del lema anterior, $(\exists \eta \leq \beta)[\text{cof}(\alpha, \eta)]$. ■

Lema 4.110:

(i) $[\alpha \in K_{II} \wedge \text{cof}(\alpha, \beta)] \Rightarrow (\exists f)[f \mathfrak{K} \beta \wedge \alpha = \cup(f[\beta])]$.

(ii) $[\beta \in K_{II} \wedge f \mathfrak{K} \beta \wedge \alpha = \cup(f[\beta]) \wedge \text{Smo}(f)] \Rightarrow \text{cof}(\alpha, \beta)$.

(i) Demostración:

$$[\alpha \in K_{II} \wedge \text{cof}(\alpha, \beta)] \Leftrightarrow [\alpha \in K_{II} \wedge \beta \leq \alpha \wedge (\exists f)[\text{Smo}(f) \wedge f: \beta \rightarrow \alpha \wedge (\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]]]$$

$$\Rightarrow (\exists f)[f \mathfrak{K} \beta \wedge \alpha = \cup\{f(\delta) \mid \delta < \alpha\} = \cup(f[\beta])].$$

En efecto, $\delta < \beta \Rightarrow \delta \leq f(\delta)$ (por Teorema 71 (i)) y como $\delta \leq f(\delta) < \alpha$ (pues $f(\delta) \in \alpha$) se sigue que $\delta < \alpha \Rightarrow \alpha = \cup\{f(\delta) \mid \delta < \alpha\} = \cup(f[\beta])$.

(ii) Demostración:

A partir de la hipótesis, claramente $f: \beta \rightarrow \alpha$, de donde $\beta \leq \alpha$. Nótese que $\alpha \notin K_I$, ya que de lo contrario $\alpha \neq \cup(f[\beta])$. Luego, $\alpha \in K_{II}$. Fácilmente se puede probar que $(\forall \gamma < \alpha)(\exists \delta < \beta)[f(\delta) \geq \gamma]$. Así, $\text{cof}(\alpha, \beta)$. ■

Teorema 110: $\alpha \in K_{II} \Rightarrow \text{cof}(\aleph_\alpha, \alpha)$.

Demostración:

Del teorema 71(ii) y de la definición 65 sabemos que $\text{Smo}(\aleph)$ y, por consiguiente, $\text{Smo}(\aleph|_{\alpha})$. Además, $\aleph_{\alpha} \in \aleph_{\beta} \wedge \alpha \leq \aleph_{\alpha}$ (por definiciones 65, 66 y el teorema 107(ii), (iv)), por lo tanto $\aleph|_{\alpha} \mathfrak{K}_{\aleph} \alpha$ (por definiciones 26(i), 29(i), y el teorema 24(xiv)) de donde se sigue que $\aleph_{\alpha} = \bigcup (\aleph|_{\alpha}[\alpha])$. Así, del lema 4.110(ii), se sigue la tesis. ■

Nota: Si α es cofinal con β y $\beta < \alpha$ entonces α puede ser "alcanzado" mediante un mapeo "inferior", en un sentido claro por la definición de cofinalidad. En particular, note que \aleph no puede ser alcanzado por una función ordinal estrictamente monótona inferior. Esto es, \aleph no es cofinal con cualquier ordinal finito. Así, la cofinalidad describe un sentido en el cual \aleph es mucho, pero mucho mayor que cualquier ordinal finito. ¿Hay otros ordinales mayores que \aleph , en el sentido de que no son cofinales con cualquier ordinal pequeño? El corolario 1.109 (la contrapuesta) nos asegura que tal ordinal debe ser un ordinal límite. Para ayudarnos en nuestro esfuerzo a responder esta pregunta, introduciremos un símbolo para el carácter de cofinalidad de α , mediante el cual entendemos el ordinal más pequeño cofinal con α .

Definición 68 (El Carácter de Cofinalidad de un Ordinal):

$$\text{cf}(\alpha) \triangleq \mu_{\beta}(\text{cof}(\alpha, \beta)).$$

Teorema 111:

$$(i) \text{cf}(\alpha) \leq \alpha.$$

$$(ii) \text{cf}(0) = 0.$$

$$(iii) \text{cf}(\alpha + 1) = 1.$$

$$(iv) \text{cf}(\aleph) = \aleph.$$

$$(v) \text{cof}(\alpha, \text{cf}(\alpha)).$$

Teorema 112: $\text{cf}(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Si $\beta = \text{cf}(\alpha)$ y si $\gamma \approx \beta$ entonces, por el teorema 108,

$$(\exists \eta \leq \gamma) [\text{cof}(\alpha, \eta)].$$

Por lo tanto $\gamma \approx \beta \Rightarrow \beta \leq \gamma$. Pero esto significa que $\beta = \# \beta$, es decir, $\text{cf}(\alpha) \in \mathbb{N}$. ■

Nota: El teorema anterior nos asegura de que si hay un ordinal que es grande, en el sentido de que no es cofinal con cualquier ordinal pequeño, ese ordinal es un número cardinal.

Definición 69 (Cardinales Regulares y Singulares):

$$(i) \text{Reg}(\alpha) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\alpha \in \mathbb{N}' \wedge \text{cf}(\alpha) = \alpha].$$

$$(ii) \text{Sing}(\alpha) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\alpha \in \mathbb{N}' \wedge \text{cf}(\alpha) < \alpha].$$

Nota: Ya que $\aleph_0 = \omega < \aleph_{\omega}$ y $\text{cf}(\aleph_{\omega}) = \omega$, se sigue que \aleph_{ω} es singular. A partir de este ejemplo es claro que $\aleph_{\omega+2}$, $\aleph_{\omega+3}$, etc. son todos singulares. También $\text{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$, de ahí que \aleph_0 es regular. Se puede probar que \aleph_{α} es siempre regular si $\alpha \in K_1$. ¿Existe un cardinal regular \aleph_{α} con $\alpha \in K_1$? Tal cardinal lo llamaremos débilmente inaccesible. La cuestión de si existe o no algún cardinal inaccesible no ha sido hasta ahora completamente resuelta. $\text{Reg}(\alpha)$ y $\text{Sing}(\alpha)$ se leen “ α es un cardinal regular” y “ α es un cardinal singular” respectivamente.

Definición 70 (Cardinales Débilmente Inaccesibles e Inaccesibles²):

$$(i) \text{Inacc}_w(\aleph_{\alpha}) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\alpha \in K_{II} \wedge \text{Reg}(\aleph_{\alpha})].$$

$$(ii) \text{Inacc}(\aleph_{\alpha}) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} [\text{Inacc}_w(\aleph_{\alpha}) \wedge (\forall x) [\#x < \aleph_{\alpha} \Rightarrow \#J^{\#}(x) < \aleph_{\alpha}]].$$

Nota: Claramente todo cardinal fuertemente inaccesible es débilmente inaccesible y

² Los cardinales inaccesibles también son llamados Fuertemente Inaccesibles.

los dos conceptos coinciden si asumimos la hipótesis del continuo generalizada. Como lo estableceremos más adelante, es consistente con la axiomatica de ZF asumir que las inaccesibilidades no existen del todo, pero se sabe que es imposible probar la consistencia de la existencia de las inaccesibilidades. A pesar de estos resultados negativos, la noción de un cardinal inaccesible es muy natural. Han llegado a tomar parte en muchas discusiones matemáticas.

Teorema 113: $\text{Inacc}_w(\aleph_\alpha) \Rightarrow \aleph_\alpha = \alpha$.

Demostración:

Nótese que $\alpha \leq \aleph_\alpha$. Por otro lado \aleph_α , débilmente inaccesible, implica que $\text{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha \wedge \alpha \in K_{\aleph_1}$. Ya que, por el teorema 110, $\text{cof}(\aleph_\alpha, \alpha)$ se sigue entonces que

$$\aleph_\alpha = \text{cf}(\aleph_\alpha) \leq \alpha.$$

Entonces $\alpha = \aleph_\alpha$. ■

Nota: Es posible establecer fácilmente que existen cardinales para los cuales $\aleph_\alpha = \alpha$.

Teorema 114: $[f: a \rightarrow \mathbb{N}] \Rightarrow \cup(f[a]) \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Del teorema anterior $\text{Dom}(f)$ es un conjunto, así como $f[a]$ es un conjunto y, claramente, un conjunto de ordinales. Si $\beta = \cup(f[a])$ entonces $\# \beta \leq \beta$ entonces

$$(\exists x \in a)[\beta < f(x) \wedge f(x) \in f[a]].$$

Por consiguiente, $f(x) \subseteq \beta$ y puesto que $f(x) \in \mathbb{N}$ entonces

$$f(x) = \#f(x) \leq \# \beta.$$

Esto es una contradicción. ■

Corolario 1.114: $[f: a \rightarrow N] \wedge (\exists x \in a)[f(x) \in N'] \Rightarrow U(f[a]) \in N'$.

Demostración:

Por el teorema anterior, $U(f[a]) \in N$. Ya que $(\exists x \in a)[f(x) \in N']$ y puesto que $f(x) \leq U(f[a])$, se sigue que $U(f[a]) \in N'$. ■

Teorema 115 (Punto Fijo de Funciones Normales): $(\exists \alpha)[\alpha = \aleph_\alpha]$.

Demostración (por recursión finita):

Si $h(0) = \aleph_0$ y si $h(n+1) = \aleph_{h(n)}$ entonces $h: \mathbb{N} \rightarrow N'$. Del corolario 1.114, $U(h[\mathbb{N}]) \in N'$.

Así, $(\exists \alpha)[\aleph_\alpha = U(h[\mathbb{N}]) \wedge \alpha \leq \aleph_\alpha]$. Si $\alpha < \aleph_\alpha$ entonces $(\exists n)[\alpha < h(n)]$. Luego,

$$\aleph_\alpha < \aleph_{h(n)} = h(n+1) \leq \aleph_\alpha.$$

Esta es una contradicción. De ahí que $\alpha = \aleph_\alpha$. ■

J. Hipótesis Acerca de la Construcción de los Números Cardinales Inaccesibles.

En la sección anterior definimos los números cardinales de un conjunto, $\#a$, como el menor ordinal que es equivalente a a . Si tal ordinal no existe entonces $\#a = 0$. Esta definición tiene la ventaja de conectar la teoría de los números cardinales a las propiedades de los ordinales. Una visión más tradicional consiste en considerar a $\#a$ como la clase de equivalencia de los conjuntos equipotentes a a .

Para establecer la equivalencia de los dos puntos de vista acerca de los números cardinales, deberíamos probar que todo conjunto es equivalente a un ordinal. Si este fuera el caso, entonces $\#a$ sería un elemento de la clase de equivalencia determinada por a . Del trabajo de Cohen, sabemos que tal prueba es imposible. Estamos entonces obligados a aceptar la posibilidad de que exista un conjunto que no sea equivalente a un ordinal. Primeramente se prueba que un

conjunto es equivalente a un ordinal si y sólo si dicho conjunto puede ser bien ordenado (teorema de Zermelo).

Así, la cuestión de si todas las clases de equivalencia son o no representadas por los ordinales en N se reduce a la de si todo conjunto es, o no, bien ordenado. Que todo conjunto puede ser bien ordenado es equivalente al Axioma de Elección, ya expuesto anteriormente³. Nosotros sin embargo, estamos interesados en construir los elementos de N , vía la aritmética ordinal y una conjetura.

Axioma 7 (Axioma de Elección, versión débil):

$$(\forall a)(\exists f)(\forall x \in a)[x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in x].$$

Axioma 7' (Axioma de Elección, versión fuerte):

$$(\exists F)(\forall x)[x \neq 0 \Rightarrow F(x) \in x].$$

Nota: Ya que no podemos cuantificar sobre las clases símbolo la forma del Axioma de Elección puede únicamente ser expresada en ZF mediante la adición de una constante f_0 al lenguaje adjunto, con los axiomas adicionales

$$Fnc(f_0),$$

$$(\forall x)[x \neq 0 \Rightarrow f_0(x) \in x].$$

Las formas débil y fuerte del axioma de elección no son equivalentes, ya que es posible mostrar que hay fórmulas bien formadas en ZF que se prueban con la forma fuerte y que, en cambio, no se deducen a partir de la forma débil.

Es posible probar que el Axioma de Elección (AC) implica que todo conjunto puede ser bien ordenado y a su vez, que si todo conjunto puede ser bien ordenado entonces AC es válido. A la suposición de que todo conjunto puede ser bien ordenado la llamaremos El Principio del Buen Ordenamiento (WOP).

³ Para una mejor exposición al respecto consultar la obra de Takeuti y Zaring, INTRODUCTION TO AXIOMATIC SET THEORY, p.87-101, que aparece en la bibliografía.

*Teorema 116 (Principio del Buen Ordenamiento): $(\forall a)(\exists r)[r \text{ We } a]$.⁴

*Teorema 117: $(\forall a)(\exists \alpha)[\alpha \cong a]$.

Demostración:

Del AC se sigue que todo conjunto puede ser bien ordenado. Además, todo conjunto bien ordenado es equivalente a un ordinal. ■

Conjetura 1: $N' = \{\alpha \mid (\exists \beta)[\alpha = \aleph^{\beta+1}]\}$.

*Corolario: $(\exists \alpha)[\aleph_\alpha = \aleph^{\alpha+1}]$.

Demostración:

Válido a partir de la conjetura anterior y de la definición 65. ■

Nota: Ahora, en vista de lo que hemos dicho en los párrafos anteriores, es claro que los números cardinales inaccesibles son los cardinales de los conjuntos inaccesibles, es decir conjuntos cuyo cardinal es un inaccesible. La pregunta obvia, la cual surge como ya lo hemos señalado en la teoría axiomática de conjuntos es ¿Hay algún conjunto inaccesible? En otras palabras, ¿Existen los cardinales inaccesibles? La existencia de los cardinales inaccesibles no puede ser demostrada mediante los axiomas que hemos ya introducido; sin embargo un nuevo axioma puede ser añadido a la teoría de conjuntos, llamado el *axioma de los cardinales inaccesibles*, el cual asegura su existencia. Se ha probado en años recientes, que este axioma no es consecuencia de los otros axiomas de la teoría de conjuntos.

Nosotros, sin embargo, construiremos, vía la recursión transfinita y la conjetura anterior, números ordinales que además son cardinales que serán candidatos, a su vez, a ser cardinales inaccesibles.

Si la conjetura anterior es válida, se sigue que el problema de construir cardinales candidatos a ser inaccesibles se reduce a construir ordinales α tales que

⁴ Para la demostración de este teorema consulte la brillante exposición de Takeuti y Zaring. INTRODUCTION TO AXIOMATIC SET THEORY, p.88-89, que aparece en la bibliografía.

$$\aleph_\alpha = \aleph^{\alpha+1} = \alpha.$$

Aún ya construido el número, perdura la pregunta de si tal número es débilmente inaccesible. A tales ordinales los llamaremos *números Bet*.⁵

Lema 1.118: Sea $I \subseteq \text{On}$. Si $\{\beta_i \mid i \in I\} \subseteq \text{On}$ y si $\beta = \sup\{\beta_i \mid i \in I\}$ entonces $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^{\beta_i} \mid i \in I\}$.

Demostración:

(i) Supóngase que $\beta = \beta_i$ para algún $i \in I$. Así, $(\forall j \in I)[\beta_j \leq \beta_i]$, por consiguiente

$$\alpha^{\beta_j} \leq \alpha^{\beta_i}.$$

Se sigue que $\alpha^\beta = \alpha^{\beta_i} = \sup\{\alpha^{\beta_j} \mid j \in I\}$.

(ii) Ahora supóngase que $(\forall i \in I)[\beta \neq \beta_i]$; así, β es un límite ordinal, pero si $\beta = \delta + 1$, entonces $(\exists i \in I)[\beta_i > \delta]$, así $\beta_i = \delta + 1 = \beta$, lo cual es contrario a nuestra suposición.

Ahora $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}$; para cada $i \in I$, $\beta_i < \beta$, por lo tanto, $\alpha^{\beta_i} < \alpha^\beta$; así, $\sup\{\alpha^{\beta_i} \mid i \in I\} \leq \alpha^\beta$. Por otro lado, si $\gamma < \beta$, entonces $\beta_i > \gamma$ para algún $i \in I$, por consiguiente $\alpha^\gamma < \alpha^{\beta_i} \leq \sup\{\alpha^{\beta_i} \mid i \in I\}$. Por lo tanto, $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\} \leq \sup\{\alpha^{\beta_i} \mid i \in I\}$. Consecuentemente, $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^{\beta_i} \mid i \in I\}$. ■

Nota: Ahora se nos plantea la siguiente pregunta ¿Existen ordinales α tales que

$\aleph_\alpha = \aleph^{\alpha+1} = \alpha$? La respuesta es "sí", y esto puede probarse fácilmente como sigue:

Definición 71: $g_0: \mathbb{N} \rightarrow \text{On} \wedge g_0(0) \triangleq \aleph \wedge g_0(n+1) \triangleq \aleph^{g_0(n)+1}$.

Nota: La existencia de g_0 está garantizada por el teorema de recursión finita (corolario 1.70). Claramente, tenemos que

$$g_0(0) = \aleph, g_0(1) = \aleph^{\aleph+1}, g_0(2) = \aleph^{\aleph^{\aleph+1}+1}, \text{ y así sucesivamente.}$$

⁵ Realmente, estos números son un caso particular de los números cardinales atractores. \aleph (bet) es la segunda letra del alfabeto hebreo.

Definición 72 (El Primer Número Bet): $\aleph_0 \triangleq \sup\{g_0(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Nota: La existencia del supremo anterior está garantizada a partir del teorema 70 (ver nota previa al mismo). A continuación se demuestra que \aleph_0 es un número Bet, esto es, un ordinal candidato a ser cardinal inaccesible.

Teorema 118: $\aleph^{\aleph_0+1} = \aleph_0$.

Demostración:

$\aleph^{\aleph_0+1} = \sup\{\aleph^{g_0(n)+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{g_0(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} = \aleph_0$ por lema 1.118 y definición 72. ■

***Corolario 1.118:** $\aleph_{\aleph_0} = \aleph_0$.

Demostración:

Válido a partir de la conjetura inicial y del teorema anterior. ■

Teorema 119: \aleph_0 es el menor número Bet.

Demostración (por inducción finita):

Si α es un número Bet, entonces $g_0(0) = \aleph \leq \alpha$ (ya que claramente $\alpha \in K_{11}$). Ahora supóngase que $g_0(n) \leq \alpha$; entonces $g_0(n+1) = \aleph^{g_0(n)+1} \leq \aleph^{\alpha+1} = \alpha$. Así,

$$(\forall n)[g_0(n) \leq \alpha].$$

Luego $\aleph_0 \leq \alpha$. ■

Nota: ¿Es \aleph_0 el único número Bet o hay otros? Es fácil responder a esta pregunta: por el método usado al construir \aleph_0 es posible construir una infinidad de otros números Bet.

Teorema 120: Si

$$g_\alpha(0) \triangleq \aleph + \alpha,$$

$$g_\alpha(n+1) \triangleq \aleph^{g_\alpha(n)+1}$$

y si $\mathfrak{H}(\alpha) \triangleq \sup\{g_\alpha(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\mathfrak{H}(\alpha)^6$ es un número Bet. De hecho, $\mathfrak{H}(\alpha)$ es el menor número Bet mayor que α .

Demostración (por inducción finita):

$\mathbb{N}^{\mathfrak{H}(\alpha)} = \sup\{\mathbb{N}^{g_\alpha(n)+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{g_\alpha(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{H}(\alpha)$ a partir del lema 1.118.

Claramente, $\alpha < \mathfrak{H}(\alpha)$. Ahora sea γ un número Bet tal que $\alpha < \gamma$; entonces

$$g_\alpha(0) = \mathbb{N} + \alpha \leq \gamma.$$

Por lo tanto, si $g_\alpha(n) \leq \gamma$ entonces $g_\alpha(n+1) = \mathbb{N}^{g_\alpha(n)+1} \leq \mathbb{N}^{\gamma+1} = \gamma$.

Se sigue que, a partir de la inducción finita, que $(\forall n)[g_\alpha(n) \leq \gamma]$, por consiguiente, $\mathfrak{H}(\alpha) \leq \gamma$. Así, $\mathfrak{H}(\alpha)$ es el menor número Bet mayor que α . ■

Nota: Es fácil notar que $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{H}(0)$; así, los primeros números Bet son $\mathfrak{H}(0)$, $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(0))$, $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(0)))$, etc. como lo estableceremos más adelante, ampliando nuestras definiciones anteriores; en tanto que no es difícil notar que $\mathfrak{H}(0)$, $\mathfrak{H}(1)$, $\mathfrak{H}(2)$, etc. son todos iguales a \mathfrak{S}_0 . La siguiente cuestión nos conduce a la siguiente pregunta: ¿Existe algún número Bet mayor que cualquier $\mathfrak{H}(n)$, con $n \in \mathbb{N}$? Esta pregunta se responde fácilmente a partir del siguiente teorema.

Definición 73 (La Clase de los Números Bet): $\text{Bet} \triangleq \{\alpha \mid \mathbb{N}^{\alpha+1} = \alpha\}$.

Teorema 121: Sea $I \subseteq \text{On}$. Si $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subseteq \text{Bet} \wedge \beta = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$ entonces $\beta \in \text{Bet}$.

Demostración:

$\mathbb{N}^{\beta+1} = \sup\{\mathbb{N}^{\alpha_i+1} \mid i \in I\} = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\} = \beta$ a partir del lema 1.118. ■

Definición 74 (Construcción de los Números Bet):

- (i) $\mathfrak{S}(0) \triangleq \mathfrak{H}(0)$,
- (ii) $\mathfrak{S}(\alpha+1) \triangleq \mathfrak{H}(\mathfrak{S}(\alpha))$,
- (iii) $\mathfrak{S}(\beta) \triangleq \sup\{\mathfrak{S}(\gamma) \mid \gamma < \beta\}$, $\beta \in \mathbb{K}_{\text{IT}}$.

⁶ $\mathfrak{H}(\alpha)$ léase "guímel de α ". \mathfrak{H} (guímel) es la tercera letra del alfabeto hebreo.

Definición 75 (Notación): $\aleph_\alpha \triangleq \aleph(\alpha)$.

Nota: La definición anterior es una forma muy conveniente de definir mediante recursión transfinita los números Bet. La existencia, así como la unicidad de $\aleph: \text{On} \rightarrow \text{On}$ está garantizada por los teoremas 69 y 70, respectivamente.

Teorema 122: $\aleph \text{ Isom}_{E,E}(\text{On}, \text{Bet})$.

Demostración:

Para probar que \aleph_β es un número ordinal, para todo β , lo hacemos por inducción transfinita:

(i) Ya hemos visto inicialmente que $\aleph_0 \in \text{Bet}$.

(ii) Ahora, supóngase que $(\forall \alpha < \beta)[\aleph_\alpha \in \text{Bet}]$. Si $\beta \in K_1$ entonces $(\exists \delta)[\beta = \delta + 1]$, por consiguiente, $\aleph_\beta = \aleph_{\delta+1} = \aleph(\aleph_\delta) \in \text{Bet}$, por teorema 120. Si $\beta \in K_{11}$ entonces

$$\aleph_\beta = \sup\{\aleph(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \in \text{Bet}, \text{ según teorema 121.}$$

Luego, $\aleph_\beta \in \text{Bet}$.

Es inmediato de que \aleph es una función estrictamente creciente, esto es $\text{Smo}(\aleph)$, por consiguiente es inyectiva. Para probar que $\text{Im}(\aleph) = \text{Bet}$, la clase de los números Bet, considérese $\delta \in \text{Bet}$ y sea $\aleph_\gamma = \inf\{\aleph_\zeta \mid \delta \in \text{Bet} \wedge \delta < \aleph_\zeta\}$. Ahora, $\gamma \notin K_{11}$ ya que, si se admite lo contrario, se sigue de la definición 74 que $\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\pi \mid \pi < \gamma\}$ y por consiguiente (ya que $\delta < \aleph_\gamma$), $(\exists \pi < \gamma)[\delta < \aleph_\pi < \aleph_\gamma]$, lo que contradice nuestra elección de γ . Así $\gamma \in K_1$ y, por consiguiente, $(\exists \pi)[\gamma = \pi + 1]$; de la elección de γ se sigue que

$$\aleph_\pi \leq \delta < \aleph_{\pi+1},$$

así, de la definición 74, se sigue que $\delta = \aleph_\pi$. El hecho de que \aleph sea un isomorfismo se sigue del teorema 71(iii). ■

Nota: En conclusión, hay tantos números Bet como ordinales. Note que la clase de

todos los números Bet es:

$$\text{Bet} = \{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots, \aleph_{\omega 2}, \dots, \aleph_{\omega 3}, \dots, \aleph_{\omega \omega}, \dots, \aleph_\alpha, \dots\} \text{ donde } \omega = \aleph.$$

Si la conjetura 1 es válida en ZF o en ZF+AC, se sigue que $\text{Bet} \subseteq \aleph$, esto es, todo número Bet es un número cardinal. Las siguientes conjeturas abren más aún nuestras vías de investigación.

Corolario 1.122: $\aleph \subseteq \text{Bet}$.

Demostración:

Válido a partir del teorema anterior, definición 74 y los teoremas 50, 73(iii). ■

***Teorema 123:** $\{\alpha \mid \text{Inacc}_w(\aleph_\alpha)\} \subseteq \text{Bet}$.

Demostración:

Válido a partir del teorema 113 y del corolario de la conjetura 1, así como de la definición 73. ■

***Corolario 1.123:** $\{\alpha \mid \text{Inacc}_w(\aleph_\alpha)\} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists \alpha)[\text{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha]$.

Demostración:

Válido a partir del teorema anterior y de la definición 70(i). ■

Conjetura 2: $\text{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$.

***Teorema 124:** $\text{Inacc}_w(\aleph_0)$.

Demostración:

Válido a partir de la conjetura 2 y de la definición 70(i), así como del hecho de que $\aleph_0 \in K_{\aleph_1}$. ■

Nota: Más adelante propondremos el esquema de la prueba de la conjetura 2. En este sentido, tal conjetura no es indispensable.

K. Sucesiones y Funciones Normales: Hacia los cardinales Atractores.

Definición 76: Sea A un ordinal (es decir, $A \in \text{On}$ v $A = \text{On}$).

(i) Una función f con dominio A se llama *sucesión A -valuada*.

- Notación: $\langle f_\xi \rangle_{\xi \in A}$, o bien por $\langle f_\xi \rangle_{\xi < A}$, si $A \in \text{On}$.
- Si $A \in \mathbb{N}$, f puede denotarse por $\langle f_0, \dots, f_{A-1} \rangle$.
- Si $\text{Im}(f) \subseteq \text{On}$, decimos que la sucesión A -valuada es de ordinales.

Generalmente se emplean las letras μ , ν y ρ .

(ii) Sea μ una sucesión A -valuada de ordinales:

- (a) μ es no decreciente ssi $(\forall \alpha)(\forall \beta)[\alpha < \beta \in A \Rightarrow \mu(\alpha) \leq \mu(\beta)]$.
- (b) μ es estrictamente creciente ssi $(\forall \alpha)(\forall \beta)[\alpha < \beta \in A \Rightarrow \mu(\alpha) < \mu(\beta)]$.
- (c) μ es limitadora ssi $(\forall \alpha \neq 0)[\alpha = \bigcup \{\beta \mid \beta < \alpha\} \in A \Rightarrow \mu(\alpha) = \bigcup \{\mu(\beta) \mid \beta < \alpha\}]$.
- (d) μ es seminormal ssi μ es limitadora y no decreciente.
- (e) μ es normal ssi μ es limitadora y estrictamente creciente.

Nota: $\alpha = \bigcup \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ significa que α es ordinal límite (por teorema 61(I)).

Teorema 125: Sea A una clase ordinal. Si μ es una sucesión A -valuada y estrictamente creciente entonces $\alpha \leq \mu(\alpha)$, $\forall \alpha \in A$.

Demostración:

Inducción transfinita sobre $\alpha \in A$. ■

Teorema 126: Si μ es estrictamente creciente, α -valuada, de ordinales e $\text{Im}(\mu) \subseteq \beta$, entonces $\alpha \leq \beta$.

Demostración:

Sea $\gamma < \alpha$. Entonces $\gamma \leq \mu(\gamma) \in \beta$. Luego $\gamma < \beta$, por lo tanto, $\alpha \subseteq \beta$, de donde $\alpha \leq \beta$. ■

Nota: En el anterior teorema $A=\alpha$.

Definición 77 (Relación de identidad de dominio A):

$$I_A \triangleq \{(x \ x) \mid x \in A\}.$$

Teorema 127: Sea A un ordinal. Si μ es estrictamente creciente, A -valuada, de ordinales, y $\text{Im}(\mu)=A$, entonces $\mu=I_A$.

Demostración:

Suponga que $\mu(\alpha)=\alpha$ para cada $\alpha < \beta$, donde $\beta \in A$. Escoja $\gamma \in A$ tal que $\mu(\gamma)=\beta$. Por el teorema 125, $\gamma \leq \mu(\gamma)=\beta$. La desigualdad estricta es imposible, pues $\gamma < \beta \Rightarrow \mu(\gamma)=\gamma < \beta$. Luego, $\gamma=\beta$, y por lo tanto $\mu(\beta)=\beta$. Esto completa la prueba inductiva. ■

Teorema 128: Sea A un ordinal y sea μ limitadora, A -valuada, de ordinales, tal que $\mu(\beta) \leq \mu(\beta+1)$, $\forall \beta \in A$. Entonces μ es seminormal.

Demostración:

Por inducción transfinita sobre $\beta \in A$. ■

Teorema 129: Sea A un ordinal y sea μ limitadora, A -valuada, de ordinales, tal que $\mu(\beta) \leq \mu(\beta+1)$, $\forall \beta \in A$. Entonces μ es normal.

Demostración:

Por inducción transfinita sobre $\beta \in A$. ■

Teorema 130: Sea A un ordinal y sea μ A -valuada, normal, y sea $\alpha \in A$ un ordinal límite. Entonces, $\mu(\alpha)$ es también un ordinal límite.

Demostración:

Válido por teorema 61 (i), (vi). ■

Teorema 131: Sea A un ordinal y sea μ no decreciente, A -valuada, de ordinales y

suponga que $\beta < \alpha \in A$. Luego:

$$\bigcup_{\gamma < \alpha} \mu(\gamma) = \bigcup_{\beta \leq \gamma < \alpha} \mu(\gamma)$$

Teroema 132: Sean A , B y C ordinales y sea μ , ν funciones no-decrecientes:
 $\mu : A \longrightarrow B$, $\nu : B \longrightarrow C$. Entonces $\nu \circ \mu$ es no decreciente.

Teroema 133: Sean A , B y C ordinales y sean μ , ν funciones estrictamente crecientes, tales que $\mu : A \longrightarrow B$, $\nu : B \longrightarrow C$. Entonces $\nu \circ \mu$ es estrictamente creciente.

Nota: Las anteriores pruebas se hacen en forma directa.

Teroema 134: Sean A , B y C ordinales y sean μ , ν funciones seminormales, tales que $\mu : A \longrightarrow B$, $\nu : B \longrightarrow C$. Entonces $\nu \circ \mu$ es seminormal.

Demostración:

Hay que chequear solamente la propiedad limitadora. Distingamos dos casos:

CASO 1: Existe $\beta < \alpha$ tal que $\mu(\beta) = \mu(\gamma)$, $\forall \gamma$ tal que $\beta < \gamma < \alpha$. Aplique el teorema 131.

CASO 2: Para todo $\beta < \alpha$ existe γ tal que $\beta < \gamma < \alpha$ y $\mu(\beta) < \mu(\gamma)$. La prueba es directa. ■

Teorema 135: Sean A , B y C ordinales y sean μ , ν funciones normales, tales que $\mu : A \longrightarrow B$, $\nu : B \longrightarrow C$. Entonces $\nu \circ \mu$ es normal.

Demostración:

Consecuencia inmediata de los teoremas 133 y 134. ■

Teorema 136 (Bachmann): Sea A un ordinal y sea μ seminormal, A -valuada, de ordinales. Sea $\alpha \in A$. Suponga que existen $\beta, \gamma \in A$ tales que $\mu(\beta) \leq \alpha < \mu(\gamma)$. Entonces existe un único $\delta \in A$ tal que $\mu(\delta) \leq \alpha < \mu(\delta+1)$.

Demostración:

Sea ε el menor miembro de A tal que $\alpha < \mu(\varepsilon)$. La existencia de ε está garantizada por la hipótesis. Nótese que $\varepsilon \neq 0$, pues $\mu(0) \leq \mu(\beta) \leq \alpha$. Además, $\varepsilon \notin K_1$, pues si así fuera, tendríamos que $\alpha < \bigcup \{\mu(\xi) \mid \xi < \varepsilon\}$, y por lo tanto $\alpha < \xi$ para algún $\xi < \varepsilon$, contradiciendo la escogencia de ε . Luego, ε es el sucesor de algún ordinal, es decir, $\varepsilon \in K_1$. Por lo tanto existe un δ tal que $\varepsilon = \delta + 1$. Tenemos entonces que :

$\mu(\delta) \leq \alpha < \mu(\delta + 1)$, que demuestra la existencia de δ .

La unicidad de δ se obtiene así: Sea θ un ordinal de A distinto de δ . Entonces:

$$(i) \theta < \delta \Rightarrow (\theta + 1 \leq \delta \wedge \mu(\theta + 1) \leq \mu(\delta) \leq \alpha).$$

$$(ii) \theta > \delta \Rightarrow (\delta + 1 \leq \theta \wedge \alpha < \mu(\delta + 1) \leq \mu(\theta)).$$

Luego, es imposible que $\mu(\delta) \leq \alpha < \mu(\delta + 1)$. Luego δ es único. ■

L. Puntos Fijos: Atractores**Teorema 137 (Teorema del punto fijo para funciones normales):**

Sea μ una sucesión \aleph_n -valuada, μ función normal. Entonces, para cada $\beta \in \aleph_n$ existe $\alpha > \beta$ tal que $\mu(\alpha) = \alpha$.

Demostración:

Definamos v en forma recursiva:

$$(i) v(0) \triangleq \mu(\beta + 1)$$

$$(ii) v(m+1) \triangleq \mu(v(m))$$

$$(iii) v(\mathbb{N}) \triangleq \bigcup \{v(m) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Luego, como μ es estrictamente creciente, para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $v(m) \leq \mu(v(m)) = v(m+1)$ (por teorema 125 y la definición anterior). De ahí que v es

seminormal. Luego, $\mu \circ v$ también es seminormal (a partir del teorema 134) y por lo tanto: $v(\mathbb{N}) \leq \mu(v(\mathbb{N})) = \bigcup \{ \mu(v(m)) \mid m \in \mathbb{N} \} = \bigcup \{ v(m+1) \mid m \in \mathbb{N} \} = v(\mathbb{N})$, de manera que el ordinal, $\alpha > \beta$, buscado es $v(\mathbb{N})$. En efecto, $\beta \leq \mu(\beta) < \mu(\beta+1) = v(0) \leq v(\mathbb{N})$, de manera que $\beta < v(\mathbb{N})$. ■

Nota: Pudo también definirse $v(0)$ como $\mu(\beta)$ y la prueba anterior es válida también. El hacerlo tiene ciertas ventajas, entre ellas que el primer punto fijo de \aleph es el supremo de la sucesión $\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \dots$

La construcción de la prueba anterior brinda el menor α tal que $\mu(\alpha) = \alpha$. En efecto, si existiera $\gamma < \alpha = v(\mathbb{N})$ tal que $\mu(\gamma) = \gamma$ entonces μ , por ser normal, es estrictamente creciente y limitadora, es decir, $v(\gamma) \leq \mu(v(\gamma)) < \mu(\alpha) = \alpha$ y por lo tanto $\gamma = \alpha$, lo cual es una contradicción. De ahí que la colección A de todos los puntos fijos de μ es una clase propia, pues si A fuese un conjunto, entonces $\bigcup \{ \alpha \mid \alpha \in A \} \in \text{On}$, y aplicando el teorema del punto fijo hallaremos un nuevo punto fijo δ de μ , tal que $\delta > \bigcup \{ \alpha \mid \alpha \in A \}$, lo cual es imposible. La unicidad de α es válida a partir del teorema 70.

Definición 78: Si μ es una sucesión On-valuada, normal, entonces:

$$A_\mu \triangleq \{ \alpha \mid \mu(\alpha) = \alpha \}.$$

Nota: Claramente A_α no es un conjunto.

M. Aplicación a los Cardinales

Definición 79: $a^+ \triangleq \mu_\alpha(\#\alpha > \#a)$.

Nota: $a^+ = \inf\{\alpha \mid \#\alpha > \#a\} = \bigcap (\{\alpha \mid \#\alpha > \#a\} \cap \text{On})$ si $\{\alpha \mid \#\alpha > \#a\} \cap \text{On} \neq \emptyset$.
 $= 0$ si $\{\alpha \mid \#\alpha > \#a\} \cap \text{On} = \emptyset$.

Teorema 138: $\aleph: \text{On} \longrightarrow \aleph' \wedge \aleph_0 = \aleph \wedge \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ \wedge$
 $\wedge [\gamma \in K_{\aleph} \Rightarrow \aleph_\gamma = \bigcup \{\aleph_\beta \mid \beta < \gamma\}]$.

Demostración:

Válido a partir de los teoremas 66(xi), 107(xiii), 110, 114 y la definición 65. ■

Teorema 139: \aleph es una función normal, On-valuada, sobreyectiva.

Demostración:

La normalidad de \aleph es trivial a partir del teorema anterior. Sea $\alpha \in \aleph'$, un número cardinal transfinito. Por el teorema 125, $\alpha \leq \aleph_\alpha < (\aleph_\alpha)^+$. Sea $\alpha = \mu_\alpha$ ($\alpha < \aleph_\alpha$). Claramente α no es un ordinal límite ($\alpha \notin K_{\aleph}$) y $\alpha \neq 0$. Luego, $(\exists \beta)[\alpha = \beta + 1]$. De la normalidad de α , obtenemos $\aleph_\beta \leq \alpha < \aleph_{\beta+1}$. Luego, del teorema anterior, se obtiene que $\alpha = \aleph_\beta$, de donde $\alpha \in \text{Im}(\aleph)$. ■

Nota: Algunas consecuencias importantes son las siguientes: si $\alpha, \beta \in \aleph'$ entonces:

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^+ \leq \beta$.

(ii) $\alpha < \beta^+ \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$.

Además, $\alpha^+ \leq \# \mathcal{P}(\alpha)$. La posibilidad de la igualdad es la famosa conjetura generalizada el continuo. La Hipótesis Generalizada del Continuo (GCH) es el último axioma que introduciremos en nuestra teoría. Si a es un conjunto finito que contiene más de un elemento, existe un conjunto b tal que a es equivalente a un subconjunto de b , b es equivalente a un subconjunto de $\mathcal{P}(a)$. Sin embargo, b no es equivalente ni a a ni a $\mathcal{P}(a)$. Del siguiente axioma se deduce el axioma 7.

Axioma 8 (Hipótesis Generalizada del Continuo, GCH):

$$(\forall a)(\forall b \subseteq \mathcal{P}(a)) [\text{Inf}(a) \wedge (\exists x)[a \subseteq x \simeq b]] \Rightarrow (b \simeq a \vee b \simeq \mathcal{P}(a)).$$

Hipótesis del Continuo, CH:

$$(\forall b \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})) (\exists x)[\mathbb{N} \subseteq x \simeq b] \Rightarrow (b \simeq \mathbb{N} \vee b \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

Definición 80 (La Clase de los Atractores): $\text{Atr} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N}^1 \mid \aleph_\alpha = \alpha\}$.

Nota: Una consecuencia inmediata es la igualdad $\text{Atr} = \text{Bet}$. Por otro lado, ambas clases no son conjuntos, es decir, ambas clases son clases propias.

Teorema 140: Sea μ una función normal α -valuada, siendo $\text{Reg}(\alpha) \wedge \alpha > \aleph_0 \wedge \text{Im}(\mu) \subseteq \alpha$. Entonces, para cada $\beta < \alpha$ existe γ tal que $\beta < \gamma < \alpha \wedge \mu(\gamma) = \gamma$.

Demostración:

Sea v definido por:

$$\begin{aligned} v(0) &\triangleq \mu(\beta+1) \\ v(n+1) &\triangleq \mu(v(n)) \\ v(\mathbb{N}) &\triangleq \bigcup \{v(n) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Nótese que $\beta < \beta+1 \leq \mu(\beta+1) = v(0)$, por teorema 125. Por inducción sobre n , se demuestra que $v(n) < \alpha$, $\forall n < \mathbb{N}$, y por tanto, utilizando la regularidad de α ,

$$v(\mathbb{N}) = \bigcup \{v(n) \mid n \in \mathbb{N}\} < \alpha.$$

Más aún, v es semi-normal (a partir del teorema previo), y por lo tanto:

$$v(\mathbb{N}) \leq \mu(v(\mathbb{N})) = \bigcup \{\mu(v(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{v(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} = v(\mathbb{N}), \text{ de donde } \mu(v(\mathbb{N})) = v(\mathbb{N}).$$

Luego, el valor de $\gamma = v(\mathbb{N})$ cumple con el teorema. ■

Nota: La prueba de este teorema provee un método constructivo para hallar β . Además, el valor de $\gamma = v(\mathbb{N})$ es el menor punto fijo mayor que β . Otra consecuencia del teorema anterior, es que el conjunto de todos los puntos fijos de μ tiene

cardinalidad $\#P(\alpha)$, si μ es α -valuada.

Teorema 141: $\text{Atr} \neq \emptyset$.

Demostración:

Válido a partir del teorema 115 y la definición 80. ■

Nota: El teorema anterior también puede demostrarse a partir del siguiente argumento: Ya que \aleph es una función normal de la forma $\aleph: \text{On} \longrightarrow \mathbb{N}'$, se sigue, del teorema 137, que para cada $\beta \in \text{On}$ existe $\alpha > \beta$ tal que $\aleph_\alpha = \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{N}'$. Esto probaría la tesis.

Concluimos esta exposición con una proposición, en la cual deseamos que el lector descubra si es correcta su prueba, y si es posible modificarla. Tal proposición nos conduciría al hecho de que $\text{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$ y por consiguiente $\text{Inacc}_w(\aleph_0)$. Además, se sabe que la Hipótesis Generalizada del Continuo (GCH) implica que todo número cardinal débilmente inaccesible es fuertemente inaccesible y viceversa. Esto indicaría que si las conjeturas aquí planteadas, acerca de los números cardinales y los números cardinales débilmente inaccesibles, se deducen de la Hipótesis Generalizada del Continuo, entonces son válidas para los cardinales fuertemente inaccesibles. A partir del Axioma de elección que $\aleph_{\alpha+1}$ es regular, resulta entonces a partir de nuestra conjetura, acerca de que el carácter de cofinalidad de \aleph_0 es \aleph_0 (es decir, \aleph_0 es regular), que $\aleph_1, \aleph_2, \text{etc.}$ son regulares, y por consiguiente, si nuestra conjetura es válida en $\text{ZF} + \text{GCH}$, son cardinales inaccesibles.

Proposición: $\alpha \in \text{Bet} \Leftrightarrow \text{Inacc}_w(\alpha)$.

Prueba (esquema):

Necesidad: Ya se enunció en el teorema 113.

Suficiencia: $\alpha \in \text{Bet} \Rightarrow \aleph_\alpha = \alpha$, pero $\aleph_\alpha = \aleph^{\alpha+1}$ (por conjetura), luego $\alpha = \aleph^{\alpha+1}$. De la

forma normal de Cantor se sigue que $\alpha \in K_{\aleph_1} \wedge \text{cof}(\alpha) = \alpha$, de donde $\alpha \in \text{Bet}$.

El principio de Recursión Transfinita nos ha abierto nuevas vías de investigación, así como la solución de problemas que son indecidibles en la teoría de ZF, tal como lo revelan las últimas investigaciones en estas áreas⁷. Sin lugar a dudas, la metamatemática de Cantor ha abierto al pensamiento la deslumbrante perspectiva de su propio infinito.

⁷ Para una mejor ampliación del tema al respecto, consultar la excelente exposición de Shoenfield Joseph R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Duke University, 1967. p. 303-314.

IV. EL PROBLEMA DEL INFINITO

Por David Hilbert.

*“Después de ti peregrino, iremos a las cimas
desde donde, píos y temblorosos, veremos al Eterno
ordenar y contar en el alfabeto del cielo
los fuegos del firmamento, los gérmenes de los abismos.”*
A G. Cantor
(Henri Eyraud)

N. Introducción.

El papel que juega en Metamatemática la recursión transfinita, consiste no sólo en facilitar una prueba de GCH en Metamatemática (como se verá en este capítulo), sino también el permitir la construcción de ordinales transfinitos, entre los cuales, al menos uno de ellos, es cardinal débilmente inaccesible en ZF+GCH.

Una manera práctica de justificar el estudio del infinito ante cualquier escuela que se oponga al mismo, es la creciente investigación en física teórica que se ha venido efectuando en los últimos años, con el fin de construir una teoría unificada completa de todo el universo. La idea consiste en construir una teoría cuyo sustento axiomático y deductivo, describa correctamente el comportamiento de todo el universo. Esta teoría debe ser consistente (sin contradicciones) y completa (es decir, debe describir cualquier fenómeno producido en el universo¹). En esta búsqueda,

¹ Esto es claramente imposible pues tal teoría debe contener a la aritmética, la cual a partir de los resultados de Gödel, es consistente pero no completa.

conocida como "la unificación de la física", se han desarrollado teorías parciales, candidatas a formar parte de dicha unificación; sin embargo, se encuentran infinitos aparentemente absurdos en cada una de ellas, pero en todos estos casos los infinitos pueden ser suprimidos mediante un proceso de renormalización, que supone cancelar los infinitos introduciendo otros infinitos. Aunque esta técnica es dudosa matemáticamente, parece funcionar en la práctica, y ha sido utilizada en estas teorías para obtener predicciones, con una precisión extraordinaria, que concuerdan con las observaciones. La renormalización, sin embargo, presenta un serio inconveniente a la hora de encontrar una teoría completa, ya que implica que los valores reales de las masas y las intensidades de las fuerzas no pueden ser deducidos de la teoría, sino que han de ser escogidos para ajustarlos a las observaciones. Las teorías de las cuerdas (una de las teorías candidatas a la unificación) también conducen a infinitos, pero se piensa que todos ellos desaparecerán en versiones como la de las cuerdas heteróticas, aunque esto no se sabe aún con certeza (Hawking, 1994).

La técnica matemática empleada en las anteriores teorías, dudosa mientras permanezca sin justificación, puede ser un incentivo más para el estudio del infinito comparable con el desarrollo de las investigaciones de Fourier en el análisis de funciones generalizadas que, en su tiempo, se empleaban sin justificación alguna en diferentes áreas de la física y la ingeniería, pero que condujo al descubrimiento de un campo hasta entonces desconocido de la matemática muy enriquecedor.

Por otro lado, una justificación un tanto más profunda que las presentadas hasta ahora en el estudio y esencia del infinito así como su aceptación en el ámbito de la matemática es la que nos ofrece David Hilbert. Su sentido crítico, así como su profunda formalización en sus escritos, por encima de su autoridad como uno de los más grandes matemáticos, nos invita a presentarlo como una defensa final y

contundente de las ideas del infinito. Además, nos ofrece una aplicación del método de recursión: la prueba de la Hipótesis del Continuo², planteada por Cantor, que establece que no existe conjunto alguno cuya cardinalidad sea menor que \aleph_1 y, a la vez, mayor que \aleph_0 , o lo que equivale a decir que la cardinalidad del conjunto de puntos de una recta es \aleph_1 . "Acerca del infinito"³ es el texto (presumiblemente ampliado) de una conferencia de Hilbert dedicada a la memoria de Weierstrass en la Sociedad Matemática de Westfalia el 4 de junio de 1925 en Münster. El siguiente artículo se publicó en los *Mathematische Annalen* 95 (1926), pp.161-190 y fue reeditado al año siguiente en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, pp. 201-215 y en forma abreviada como Apéndice a la 7a. ed. de los FG (Alvarez, Segura, 1993).

O. Acerca del infinito: El bosquejo de una prueba de la hipótesis del continuo haciendo uso del método de recursión.

Sin lugar a dudas, el análisis matemático debe a la profunda crítica de Weierstrass su fundamento definitivo. Con sus precisas definiciones de nociones como mínimo, función y derivada, Weierstrass ha contribuido de manera fundamental a subsanar las deficiencias que permeaban hasta entonces el cálculo infinitesimal, al eliminar ideas poco claras y abstrusas acerca de lo infinitamente pequeño y al superar, de una vez por todas, las dificultades que surgen en relación a este concepto.

El acuerdo total y la seguridad completa que en nuestros días reinan en el análisis en lo relativo a las argumentaciones que involucran el concepto de número irracional y, en general, de límite, se deben en gran medida al trabajo científico de

² También conocida como el Teorema del Continuo.

³ über das Unendliche

Weierstrass. Y algo parecido puede afirmarse acerca de la teoría de las ecuaciones diferenciales e integrales. A pesar de las aplicaciones verdaderamente audaces que en ella se hacen de una gran gama de combinaciones de superposición, yuxtaposición y encaje de límites, es posible constatar la existencia de unanimidad esencial al respecto, y el logro de ésta se debe fundamentalmente a Weierstrass.

Sin embargo, la fundamentación weierstrassiana del cálculo infinitesimal se encuentra todavía lejos de representar el punto final de la discusión de los fundamentos del análisis.

La razón de ello reside en el hecho de que el significado del *infinito* para la matemática, aún no ha sido elucidado de una manera plenamente satisfactoria. Por supuesto, al transformar los enunciados que involucran lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande en afirmaciones que se refieren a relaciones entre magnitudes finitas, Weierstrass se encuentra en condiciones de desterrar esos conceptos del análisis. Sin embargo, el infinito continúa estando presente cuando hablamos de las sucesiones numéricas infinitas que definen a los números reales, al igual que en la noción misma de un sistema de tales números, al que normalmente se considera como una totalidad acabada y completa.

Las formas de la inferencia lógica en las que esta concepción del infinito se pone de manifiesto (por ejemplo, cuando se habla de *todos* los números reales que poseen una cierta propiedad, o de que *existen* números reales con tales y cuales características) son requeridas y utilizadas de manera irrestricta en el análisis de Weierstrass sin ser afectado en lo esencial por su crítica.

De todo ello se sigue la imperiosa necesidad de elucidar finalmente, de manera definitiva y en el sentido que acabamos de indicar, el *problema del infinito*. Ahora bien, así como en los procesos de *paso al límite* del cálculo infinitesimal se

demuestra que el infinito en el sentido de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande no es sino una simple forma de hablar, también debemos mostrar que el infinito, en tanto que totalidad infinita, tal y como ésta se pone de manifiesto en los principios de inferencia usuales, es algo meramente aparente.

De manera análoga a como las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron sustituidas por procesos en el ámbito de lo finito con los que podemos llegar exactamente a los mismos resultados y a las mismas y elegantes relaciones formales, debemos ahora reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos que nos conduzcan a lo mismo, es decir, que hagan posible las mismas demostraciones y los mismos métodos de obtención de fórmulas y teoremas.

Es decir, la siguiente teoría se propone como objeto central conferir una seguridad definitiva al método matemático, una seguridad a la que el período crítico del cálculo infinitesimal no pudo llegar. En otras palabras, nuestra meta es concluir la tarea que Weierstrass intentaba llevar a cabo con la fundamentación del análisis y para la cual dio un paso absolutamente necesario y fundamental.

Si queremos llevar a cabo una verdadera elucidación del concepto de infinito, es necesario adoptar una perspectiva más general. La literatura matemática está plagada de absurdos y errores debidos, en gran medida, al infinito. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando a manera de condición restrictiva, se afirma que en la matemática rigurosa, una demostración es aceptable únicamente cuando consta de un número *finito* de inferencias. ¡Como si en alguna ocasión alguien hubiera sido capaz de llevar a cabo un número infinito de inferencias!

Pero también las viejas objeciones que habíamos considerado como algo ya superado se presentan nuevamente, ahora bajo una nueva vestimenta. Así, por ejemplo, se argumenta que aunque es posible la introducción de un concepto sin que

ello represente peligro alguno, esto es, sin que dé lugar a contradicciones -y aún pudiendo probarlo- esto no basta como justificación. Pero, ¿no es ésta precisamente la misma objeción que se hacía no hace mucho de los números complejos cuando se decía que su introducción no era algo justificado porque, en realidad, las cantidades imaginarias no existen?

Ahora bien, si aparte de una prueba de consistencia ha de tener algún sentido el problema de la justificación de un procedimiento, lo único que esto puede significar es que ese procedimiento sea fecundo en resultados. De hecho, el éxito resulta en este contexto algo necesario, la instancia suprema a la que todo el mundo se somete.

Otro autor parece ver contradicciones, cual fantasmas, inclusive cuando nadie ha hecho ningún tipo de afirmaciones, esto es, en el mundo concreto de lo sensible, cuyo "funcionamiento consistente" se considera como una hipótesis especial.

Lo único que puede dar lugar a contradicciones son las afirmaciones y las hipótesis, en tanto que conduzcan, por medio de inferencias, a otras afirmaciones, por lo que la idea misma de una contradicción entre los hechos, me parece un ejemplo paradigmático de descuido conceptual y absurdo.

Todas estas observaciones, tienen como sola intención: poner en claro que la elucidación definitiva de la *naturaleza del infinito* es algo que va mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, algo que, en realidad, se ha convertido en una *cuestión de honor para el entendimiento humano*.

Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos el *ánimo* de los hombres. Ninguna otra *idea* ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento. Pero, como ningún otro *concepto*, requiere de *precisión y esclarecimiento* satisfactorios.

Es necesario tener presente, ahora que nos abocamos a esta tarea de

clarificación del infinito, el significado concreto que éste posee en la realidad.

Examinemos, en primer lugar, lo que la física nos dice al respecto.

La primera y más intuitiva impresión que tenemos de la naturaleza y la materia, es la de algo continuo. Así por ejemplo, si tenemos un trozo de metal o un cierto volumen de algún líquido, la idea que inmediatamente se nos impone es la de que se trata de algo que puede ser subdividido ilimitadamente y que cualquier porción del mismo por pequeña que sea, posee también las mismas características.

Sin embargo, en todos los terrenos en los que la física de la materia ha logrado refinar adecuadamente sus métodos de investigación, se ha topado con límites a esa divisibilidad y ha hallado que esos límites no residen en la insuficiencia de nuestros intentos, sino en la naturaleza misma de los objetos.

Podríamos entonces describir la tendencia dominante en la ciencia moderna, como una especie de emancipación de lo infinitamente pequeño, de tal manera que en lugar del viejo principio de que *natura non facit saltus* (la naturaleza no se presenta en saltos), podríamos afirmar ahora precisamente lo contrario, esto es, que "la naturaleza sí da saltos".

Como se sabe, toda la materia se compone de pequeños bloques, los *átomos*, cuya combinación y unión da origen a la multiplicidad de los objetos macroscópicos. Sin embargo, la física no se ha detenido en la teoría atómica de la materia. A fines del siglo pasado aparece al lado de ésta una teoría a primera vista extraña, la teoría atómica de la electricidad. Hasta entonces se había pensado en la electricidad como en un fluido, teniéndosela además, como el modelo de un agente de acción continua. La nueva concepción atomista, la concibe en oposición a ello como algo conformado por *electrones* positivos y negativos.

Existe otra realidad, aparte de la materia y la electricidad, que la física considera

y para la cual es también válida la ley de la conservación, a saber, la energía. Pero como ahora sabemos, ni siquiera ésta es susceptible sin más, de una división infinita e irrestricta: Planck descubrió que la energía se presenta en *quanta* (paquetes).

Podemos así concluir que en ninguna parte de la realidad existe un continuo homogéneo que pueda ser ilimitadamente divisible y que constituya de algún modo una realización del infinito en la esfera de lo pequeño.

La divisibilidad infinita de un continuo es "exclusivamente" una operación del pensamiento, una idea que la observación de la naturaleza y la experimentación en la física y la química refutan.

La observación del universo como un todo, constituye un segundo sitio en el que nos enfrentamos al problema del infinito en la naturaleza. La dificultad que aquí se nos plantea, es la de examinar la extensión del mundo y determinar si en ella existe algo infinitamente grande.

Durante mucho tiempo se pensó que el universo era infinito. Hasta Kant - inclusive después de él- el carácter infinito del espacio se tuvo como algo indubitable. La ciencia contemporánea, en especial la astronomía, ha planteado de nueva cuenta el problema, abordándolo esta vez no con los inadecuados recursos de la especulación metafísica, sino apoyándose en la experiencia y recurriendo a las leyes de la naturaleza. Como resultado de este proceso, se han hecho objeciones fundamentales en relación a la existencia del infinito.

La suposición de un espacio infinito es una consecuencia directa, necesaria, de la geometría *euclidiana*. Por sí misma, ésta representa un sistema conceptual consistente. Sin embargo, de ello no se sigue que este sistema sea de alguna manera aplicable a la realidad. Más bien, esta cuestión únicamente puede ser decidida por medio de la observación y la experiencia.

El intento de demostrar especulativamente el carácter infinito del espacio presenta igualmente una serie de evidentes errores. En efecto, a partir del hecho de que fuera de cualquier porción del espacio exista siempre otra, solamente se sigue que éste es ilimitado⁴. Ilimitado y finito no son necesariamente incompatibles. Con la geometría *elíptica*, la matemática nos ofrece el modelo natural de un mundo finito. Por lo demás, el abandono en la actualidad de la geometría euclidiana ha dejado de ser una especulación puramente matemática o filosófica, pues hemos llegado a esa decisión a partir de otro tipo de consideraciones que no tienen, en su origen, absolutamente ninguna conexión con el problema de si el mundo es o no finito.

Einstein ha hecho ver la necesidad de apartarse de la geometría euclidiana y ha abordado los problemas cosmológicos con base en su teoría de la gravitación. Con ello ha demostrado la posibilidad de un mundo finito, estableciendo también la esencial compatibilidad de los resultados de la astronomía con la suposición de un mundo elíptico.

Podemos decir así que hemos constatado el carácter finito de la realidad en dos direcciones, en la esfera de lo infinitamente pequeño y en la de lo infinitamente grande. Podría ocurrir, no obstante, que el lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino *nuestro pensamiento*. Y podría muy bien resultar que en éste, el infinito asuma una función conceptual absolutamente imprescindible.

Nuestro objetivo en lo que sigue es examinar lo que ocurre en la matemática con este concepto. Plantearemos para ello el problema, en primer lugar, en la esfera de lo que puede considerarse la criatura más pura e ingenua del espíritu humano, la teoría de los números.

Consideremos una cualquiera entre la rica multitud de las fórmulas elementales. Por ejemplo,

⁴ unbegrenzt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1/6 n(n+1)(2n+1)$$

n puede ser reemplazado en ella por cualquier número entero (por ejemplo por el 2 o por el 5), por lo que esta fórmula contiene, en realidad, una *infinitud* de proposiciones. Es esto precisamente lo esencial de la misma, y es gracias a ello que puede representar la solución de un problema aritmético y requerir de un genuino argumento para su prueba, mientras que cada una de las ecuaciones numéricas específicas

$$1^2 + 2^2 = 1/6(2)(3)(5),$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1/6(5)(6)(11),$$

puede ser verificada directamente ejecutando las operaciones apropiadas, por lo que ninguna de ellas tiene, por sí misma, un interés esencial.

El útil e importante método de los *elementos ideales*, nos ofrece una interpretación y una concepción enteramente distinta del concepto de infinito. Este método ha sido ya objeto de aplicaciones en la geometría plana elemental. En ésta, los puntos y las rectas del plano constituyen los únicos objetos reales originales y con una existencia verdadera. Para estos objetos resulta válido el axioma de conexión: a través de dos puntos cualesquiera pasa una y solamente una línea recta.

De esto último, se obtiene como consecuencia que dos rectas se intersectan a lo más en un punto. Sin embargo, la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un punto no es verdadera, pues pueden ser muy bien paralelas.

Como sabemos, es precisamente gracias a la introducción de elementos ideales, esto es, a la introducción de puntos al infinito y de una recta al infinito, que se logra que la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un solo punto resulte universalmente válida.

Los elementos ideales "al infinito" poseen la ventaja de simplificar considerablemente el sistema de las leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del mismo. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre un punto y una recta hace posible obtener en la geometría el principio tan útil y fructífero como el de la dualidad.

Otro ejemplo de la utilidad de los elementos ideales, lo encontramos en las magnitudes *complejas* ordinarias del álgebra. Con ellas podemos simplificar los teoremas relativos a la existencia y el número de raíces de una ecuación.

Por lo demás y de igual manera que en la geometría se utiliza una infinidad de líneas paralelas entre sí para la definición de punto ideal, también en la aritmética superior confluyen en un *número ideal* ciertos sistemas acerca de un infinito de números. Posiblemente ésta es la aplicación más genial que se ha dado al principio de los elementos ideales en la matemática. Cuando algo como lo que acabamos de describir ha ocurrido en general dentro de un campo algebraico es fácil recuperar en él las sencillas y conocidas leyes de la divisibilidad para los enteros 1, 2, 3, 4, ..., con lo cual nos hallaríamos ya en el terreno de la aritmética superior.

Ocupémosnos ahora del análisis, que bien podría ser considerado como la rama más ingeniosa y más refinadamente elaborada de la matemática. No es necesario señalar aquí el papel absolutamente fundamental que en él desempeña el infinito. En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito.

Los enormes e impresionantes avances llevados a cabo en el cálculo infinitesimal descansan en gran medida en la operación de sistemas matemáticos con una infinidad de elementos. Ahora bien, parecía bastante natural identificar infinito con "muy grande", por lo que no tardaron en aparecer las primeras contradicciones, las llamadas paradojas del cálculo infinitesimal, en parte ya conocidas por los sofistas

desde la Antigüedad.

Un logro de suma importancia en este sentido, fue el reconocimiento del hecho de que muchos principio válidos para la esfera de lo finito *v.gr.* que la parte es siempre menor que el todo, la existencia de un mínimo y un máximo, la posibilidad de cambiar el orden de los sumandos o de los factores, etc., no pueden trasladarse sin más al ámbito de lo infinito.

Sin embargo, por sí solo el análisis resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la teoría de conjuntos de Georg Cantor, una disciplina más cercana a un enfoque filosófico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva. Lo que aquí nos importa de ella es precisamente aquello que en verdad constituye su núcleo fundamental, esto es, la *teoría de los números transfinitos*. El sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.

Si quisiéramos dar expresión en pocas palabras, a la nueva concepción del infinito introducida por Cantor, podríamos decir lo siguiente: En el análisis enfrentamos lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande soamente como un concepto límite⁵ -algo que se encuentra en devenir, en surgimiento, algo que se está generando-. En otras palabras, en el análisis hablamos del infinito como de un *infinito potencial*. Pero el infinito verdadero, el infinito propiamente dicho, es algo distinto. Es precisamente éste al que nos enfrentamos cuando, por ejemplo, consideramos la totalidad de los números enteros positivos 1, 2, 3, 4, ... como una unidad acabada, o cuando pensamos en los puntos de un segmento como una totalidad de objetos que tenemos ante nosotros como algo terminado. A esta forma

⁵ limesbegriff

del infinito se le conoce como el *infinito actual*.

Frege y Dedekind, ambos grandes investigadores de los fundamentos de la matemática, recurren, cada uno por su parte, al infinito actual con el objeto de dar a la aritmética una base puramente lógica independiente de toda intuición y toda experiencia y de deducirla exclusivamente a partir de ésta.

De hecho, en la teoría de Dedekind, los números finitos no se derivan de la intuición, sino que se obtienen puramente a partir de la lógica, haciendo uso esencial del concepto de conjunto finito. El desarrollo sistemático del concepto del infinito actual se debe, sin embargo, a Cantor.

Examinemos con cuidado los dos ejemplos que hemos presentado.

1) 1, 2, 3, 4, ...

2) los puntos del intervalo $[0, 1]$, o, lo que es lo mismo, la totalidad de los números reales entre 0 y 1.

Lo más natural parecería considerarlos únicamente desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen⁶. Sin embargo, si lo hacemos así, podremos constatar los sorprendentes resultados que hoy en día todo matemático conoce.

Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales, esto es, el de todas las fracciones $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, \dots, 3/7, \dots$. Desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen, es claro que este conjunto no es mayor que el de los números enteros. Decimos entonces que los racionales pueden enumerarse, esto es, que el conjunto es enumerable. Esto mismo es también válido para el conjunto de los números que resultan de extraer raíces y, en general, para el de todos los números algebraicos.

Algo similar ocurre en el segundo de nuestros ejemplos. En contra de lo que podrían ser nuestras expectativas, el conjunto de todos los puntos en un cuadrado o

⁶ Vielheitstadtpunkt

en un cubo tampoco es mayor, desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen, que el conjunto de los puntos en el segmento de la recta que va de 0 a 1. Y exactamente lo mismo pasa con el conjunto de las funciones continuas.

Alguien que se ve confrontado por primera ocasión con todos estos hechos, bien podría pensar que en realidad, desde el punto de vista de la cantidad de elementos, no existe sino un único infinito. Sin embargo, no es así.

De hecho, ya los conjuntos de nuestros ejemplos 1 y 2 no tienen, como ahora se dice, "la misma potencia"⁷. El segundo conjunto no es numerable y es mayor que el primer conjunto. Es este precisamente el punto en el que Cantor da inicio al vuelco característico en la formación de sus ideas. Los puntos de la recta no pueden ser enumerados a la manera usual, esto es, usando 1, 2, 3, ...

No obstante, una vez que hemos aceptada la existencia del infinito actual, nuestra enumeración no tiene por qué restringirse a esta forma de contar, no hay razón alguna para terminar en ella. Después de haber contado 1, 2, 3, ... podemos considerar los objetos así enumerados como un conjunto terminado, infinito, ordenado de esa manera. Designaremos ahora este orden, de acuerdo con su tipo y siguiendo a Cantor, con ω .⁸

Nuestra enumeración puede ahora continuar de manera natural con $\omega+1$, $\omega+2$, ... hasta $\omega+\omega$ (esto es ω^2) y seguir luego con ω^2+1 , ω^2+2 , ω^2+3 , ..., $\omega^2+\omega = \omega^3$. Tendríamos más adelante ω^3 , ω^4 , ..., $\omega^\omega = \omega^2$, ω^2+1 , ... Podríamos consignar nuestros resultados en la siguiente tabla.

1, 2, 3, ...

ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ...

⁷ gleich mächtig

⁸ ω equivale aquí, como ya se ha visto, a \mathbb{N} .

$$\omega^2, \omega^{2+1}, \omega^{2+2}, \dots$$

$$\omega^3, \omega^{3+1}, \omega^{3+2}, \dots$$

$$\omega^2, \omega^{2+1}, \omega^{2+2}, \dots$$

$$\omega^{2+\omega}, \omega^{2+\omega 2}, \omega^{2+\omega 3}, \dots$$

$$\omega^{2^2}, \dots$$

$$\omega^{2^2+\omega}, \dots$$

$$\omega^3, \dots$$

$$\omega^\omega, \dots$$

Estos son los primeros números cantorianos transfinitos, o, como dice el mismo Cantor, los números de la segunda clase. La manera de llegar a ellos consiste en llevar el procedimiento de conteo más allá⁹ del infinito numerable ordinario, esto es, en una continuación natural, unívocamente determinada y sistemática de la numeración finita usual. Y así como hasta ahora contábamos el primer objeto de un conjunto, el segundo, el tercero, ..., contamos ahora también los objetos que siguen. Esto es, contamos el ω -ésimo objeto del conjunto, el $\omega+1$ -ésimo, el $\omega+2$ -ésimo, ..., el ω^ω -ésimo, etc.

Es evidente que la primera cuestión que se plantea en relación a todo ello, es la de si con estos números transfinitos, es realmente posible contar conjuntos que en el sentido usual del término no son numerables.

Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo y como culminación del trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito

⁹ Hinüberzählen

alcanzaría vertiginosamente el pináculo del éxito en la matemática.

Sin embargo, la reacción a todo ello no tardó en hacerse sentir y asumió formas en extremo dramáticas. En realidad, todo ocurrió de manera exactamente análoga a como había sucedido en el caso del cálculo infinitesimal. El entusiasmo que los nuevos fructuosos resultados suscitaron entre los matemáticos, dio lugar a una actitud muy poco crítica en relación a la validez de los modos de inferencia que los sustentaban. Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos, permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos. Fue en especial, la contradicción de Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina.

A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonan la posición que habían sustentado hasta entonces, e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado por tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su fundamental tratado *Was sind und was sollen die Zahlen*¹⁰ (1888), mientras que Frege se vio obligado, como él mismo reconoce en una nota al final de los *Grundgesetze der Arithmetik*¹¹ (1893, 1903), a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante.

A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de diversos ámbitos. La reacción es tan radical y en ocasiones tan desmesurada, que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las

¹⁰ ¿Qué son y qué significan los números? (nota del traductor).

¹¹ Las leyes fundamentales de la aritmética (nota del traductor).

argumentaciones y los métodos más importantes de la matemática, llegándose al grado de sugerir una prohibición total de sus aplicaciones.

Ciertamente no faltaron los defensores de lo que parecía derrumbarse, pero las medidas de protección y las soluciones que surgieron son más bien débiles, además de que se trata, en general, de llevarlos a la práctica en puntos que no siempre son los más apropiados. Se ofrecieron demasiados remedios para las paradojas; pero los métodos de clarificación propuestos distan de tener homogeneidad.

Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad de que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que la matemática representa, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?

Por fortuna, existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y las metas que orientan este camino son las siguientes.

1) Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan a nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

2) Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una

contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención.

Es evidente que la realización cabal de estos fines, será posible sólo si somos capaces de clarificar por completo la *esencia del infinito*.

Como anteriormente hemos visto, podemos recurrir a la ciencia que queramos y llevar a cabo el tipo de observaciones y las experiencias que deseemos sin encontrar nada a lo que podamos llamar infinito. Pero, ¿es el pensamiento de las cosas algo tan diverso de los eventos en los que estas cosas intervienen? ¿Se aleja el pensamiento tanto de la realidad? ¿No ocurre más bien que cuando creemos conocer el infinito como algo en algún sentido real sólo nos dejamos engañar por el hecho de que en la realidad ciertamente nos encontramos con frecuencia tanto en la esfera de lo grande como en la de lo pequeño con dimensiones tan inmensas? Y ¿no estará fallando en alguna parte la inferencia lógica concreta¹² y dejando de satisfacer nuestras expectativas cuando la aplicamos a objetos o sucesos reales?

La respuesta a esto último es definitivamente negativa. La deducción lógica concreta es absolutamente indispensable. Sólo puede conducirnos a errores cuando aceptamos construcciones conceptuales arbitrarias, en particular aquellas que se aplican a una infinidad de objetos.

Lo que en tales casos sucede es que hemos usado de manera ilícita la inferencia lógica concreta, es decir, hemos hecho caso omiso de condiciones previas y necesarias para su aplicación.

Por lo demás, en esta observación relativa a la existencia de condiciones de aplicabilidad de tales deducciones e inferencias y de la necesidad de su cumplimiento satisfactorio, coincidimos plenamente con la filosofía, en particular con Kant.

Kant nos enseña, en efecto, en una de las partes centrales de su filosofía, que

¹² das inhaltliche logische Schliessen

la matemática posee un contenido¹² propio e independiente de la lógica, y que, en consecuencia, ésta no puede nunca constituir por sí sola un fundamento para aquellas.

Se sigue de ésto, que los intentos de Frege y Dedekind estaban desde un principio, condenados al fracaso. La existencia de algo dado en la representación, de ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata, previa a todo pensamiento, es una condición necesaria para la aplicación de las inferencias lógicas y el funcionamiento de las operaciones de este tipo.

Es necesario entonces, si es que hemos de tener a nuestra disposición deducciones e inferencias lógicas confiables, que los objetos sean susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata en la intuición, como algo irreductible a cualquier otra cosa, como algo que ya no requiera de ninguna reducción.

Esta es la concepción filosófica fundamental que, en mi opinión, resulta necesaria no sólo para la matemática, sino también para todo pensamiento, toda comprensión y toda comunicación científicos.

En el caso particular de la matemática, el objeto preciso de nuestro examen lo constituyen los signos concretos mismos, cuya forma es, en consonancia con el punto de vista que hemos adoptado, inmediatamente clara y reconocible.

Recordemos nuevamente en qué consiste la teoría finitista usual de los números y cuáles son sus métodos. Es claro que ésta puede obtenerse por medio de una serie de consideraciones concretas intuitivas, recurriendo exclusivamente a construcciones numéricas. Pero es también evidente que la matemática no se agota

¹² Inhalt

en forma alguna en las ecuaciones numéricas y que tampoco pueden reducirse a éstas.

Sin embargo, podemos perfectamente defender la idea de que, en realidad, la matemática no es sino una especie de aparato que al ser aplicado a números enteros debe proporcionarnos siempre igualdades numéricas verdaderas. El problema que en ese caso se plantea, es el de investigar la construcción de ese aparato hasta el punto en el que toda duda al respecto haya desaparecido.

Ahora bien, para llevar a cabo esta tarea, no tenemos a nuestra disposición otros medios que el mismo enfoque concreto¹⁴ y el mismo enfoque finitista del pensamiento que ya habíamos utilizado en la construcción de la teoría de los números para obtener las igualdades numéricas.

Es un hecho, que tenemos la capacidad de satisfacer esta exigencia de la ciencia, es decir, es posible obtener de manera puramente intuitiva y finitista, tal y como ocurre con las verdades de la teoría de los números, aquellas ideas y aquellos resultados que garantizan la plena confiabilidad del aparato matemático.

Ocupémosnos ahora con mayor detalle de la teoría de los números.

En esta teoría tenemos los numerales¹⁵

1, 11, 111, 1111.

A cada uno de estos numerales lo podemos reconocer por el hecho de que al 1 siempre le sigue el 1. Estos numerales que estamos considerando carecen de todo significado.

Pero ya en la teoría elemental de los números necesitamos, además de estos signos, de otros con los que podamos expresar significados y que nos sean útiles para la comunicación (por ejemplo, el signo 2 como abreviatura de 11, de 3 como

¹⁴ konkret inhaltliche Betrachtungsweise

¹⁵ Zahlzeichen

abreviatura de 111, etc.). Nos serviremos además, de los signos $+$, $=$, $>$, y de otros para comunicar información. Así, v. gr. $2+3=3+2$ nos hace saber que $2+3$ y $3+2$ son, en realidad, tomando en cuenta las abreviaturas que estamos usando, el mismo numeral, esto es, 11111. De manera análoga, podemos expresar con $3>2$ el hecho de que el signo 3, es decir, 111 se extiende más allá del signo 2, esto es, que 11; o equivalentemente, que este último es un segmento propio del primero.

Para expresar y comunicar, nos serviremos también de las letras **a**, **b**, **c** para referirnos a numerales. De acuerdo con ello,

$$\mathbf{b} > \mathbf{a}$$

nos dice que el numeral **b** tiene mayor extensión que el numeral **a**. De manera similar, $\mathbf{a+b=b+a}$, solamente estaría expresando que $\mathbf{a+b}$ es el mismo numeral que $\mathbf{b+a}$.

La corrección concreta de esta afirmación, puede ser demostrada mediante inferencias materiales.

Vemos entonces que con este tipo de tratamiento intuitivo y concreto, es posible llegar bastante lejos.

Deseo presentar a continuación, un primer ejemplo en el que este enfoque intuitivo se ve rebasado. Hasta ahora, el mayor número primo conocido¹⁶ es

$$\mathbf{p=170141183460469231731687303715884105727}$$

que consta de 39 dígitos.

Si utilizamos el conocido procedimiento de Euclides, podemos establecer con facilidad, y enteramente de conformidad con el enfoque finitista que hemos adoptado, que entre $\mathbf{p+1}$ y $\mathbf{p! +1}$ existe un nuevo número primo.

¹⁶ Nótese que esta información proviene del año de 1926, en la actualidad (1995) se conocen números primos mucho mayores al presentado acá.

Esta última afirmación es también acorde a nuestro punto de vista finitista, pues la expresión "existe" no es aquí otra cosa que una abreviatura del siguiente enunciado: $p+1$ es primo, o $p+2$ es primo, o $p+3$ es primo, o ..., o $p!+1$ es primo.

Ahora bien, es evidente que esta afirmación resulta equivalente a: existe un número primo que es 1) mayor que p y 2) menor o igual a $p!+1$.

A partir de esta formulación, podemos pasar a una proposición que expresa únicamente una parte de la afirmación euclídiana, esto es,

existe un número primo $> p$.

Sin embargo, aunque desde el punto de vista concreto este enunciado afirma mucho menos que el anterior, y aunque el paso de la afirmación euclídiana a este enunciado parcial de la misma parezca tan inocuo, su afirmación independiente del contexto anterior significa un salto a la esfera de lo transfinito. ¿Cómo puede ser esto?

Lo que tenemos frente a nosotros es un enunciado existencial (de la forma "existe". En la proposición euclídiana también aparecería una afirmación de esta índole. Pero aquí, la expresión "existe" no es otra cosa que una abreviatura de

$p+1$ es primo, o $p+2$ es primo, o $p+3$ es primo, o ..., $p!+1$

del mismo modo que decimos: entre trozos de tiza existe uno que es rojo, en lugar de decir: este trozo de tiza es rojo o ese trozo de tiza es rojo o ... o aquel trozo de tiza es rojo. Un enunciado de este tipo, en el que se afirma que en una totalidad finita "existe" un objeto con una cierta propiedad, se encuentra en completa conformidad con la concepción general finitista que hemos aceptado.

La expresión

$p+1$ es primo, o $p+2$ es primo, o $p+3$ es primo, o ... *ad inf.*

sería una especie de producto¹⁷ lógico infinito. Pero al igual que ocurre en el análisis,

¹⁷ Más bien disyunción (N. de T.)

una transición de este tipo de lo finito a lo infinito no puede aceptarse en general, esto es, sin una discusión especial previa -y, en este caso, sin una observación rigurosa de ciertas precauciones-; de otro modo carece, en principio, de sentido.

Podemos generalizar lo anterior, diciendo que un enunciado existencial de la forma "existe un número con tales y cuales propiedades" únicamente tiene sentido como *enunciado parcial*, es decir, como parte de un enunciado determinado con mayor particularidad y cuyo contenido exacto carece, sin embargo, de importancia para muchas aplicaciones.

De esta manera, nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial que no puede interpretarse como una disyunción¹⁸. Obtenemos igualmente enunciados transfinitos cuando por ejemplo negamos una proposición universal, esto es, una proposición que se refiere a numerales indeterminados. Así, por ejemplo, desde el punto de vista finitista, el enunciado de que, para cualquier numeral **a**,

$$\mathbf{a} + 1 = 1 + \mathbf{a}$$

no es susceptible de negación.

Podemos explicarnos esta situación si tenemos presente que el enunciado no puede ser interpretado como una expresión compuesta de un número infinito de igualdades numéricas conectadas por la palabra "y", sino que debe serlo como juicio hipotético que afirma algo con tal de que dispongamos ya de un numeral.

Una consecuencia importante de esto es que, de acuerdo con la expectativa finitista que estamos discutiendo, nos encontramos imposibilitados para utilizar el principio según el cual una ecuación como la anterior, en la que aparece un numeral

¹⁸ El texto alemán dice "Wir stoßen also heir das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder-Verknüpfung duten läßt". En la versión de 1930 publicada en los *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert corrige la frase: "Wir stoßen also heir das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder-Verknüpfung duten läßt". Es decir: "nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial, ninguna de cuyas partes puede interpretarse como una disyunción". (N. de T.)

no especificado es, o bien satisfecha por todos y cada uno de los numerales, o bien refutada por un contraejemplo. En efecto, esta alternativa descansa esencialmente, en tanto que la aplicación del principio del tercero excluido, en la suposición de que la validez general de esa igualdad puede ser negada.

Podemos concluir en que cuando permanecemos, tal y como estamos obligados a hacerlo, en la esfera de los enunciados finitos, dependemos de relaciones lógicas poco claras, y esta ausencia de claridad se convierte en algo intolerante cuando el "todos" y el "existe" se combinan en enunciados subordinados. Como sea, las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que éste tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez.

Así las cosas, podríamos proponernos como tarea inicial, la determinación explícita de las leyes lógicas que son válidas para la esfera de las proposiciones finitistas. Sin embargo, esto no bastaría, pues en realidad, lo que no queremos es precisamente renunciar al uso de las sencillas leyes de la lógica aristotélica y nadie, no importa qué tan persuasivamente argumente, podrá impedir que los hombres continúen negando afirmaciones de todo tipo, haciendo juicios parciales y aplicando el principio del tercero excluido. Pero entonces ¿cuál debe ser nuestra actitud?

Recordemos en primer lugar, que *somos matemáticos* y que como tales, nos hemos encontrado con frecuencia, en situaciones igualmente difíciles. Recordemos además, que ha sido el genial método de los elementos ideales el que en tales circunstancias nos ha salvado. He mencionado ya, al comienzo de mi exposición, algunos ejemplos notables de su aplicación.

De manera exactamente análoga a como $i = \sqrt{-1}$ ha sido introducido con el objeto de mantener en su forma más sencilla posible las leyes del álgebra, por

ejemplo, las relativas a la existencia y al número de raíces de una ecuación, así como introducimos factores ideales con el fin de preservar la sencillez de las leyes de la divisibilidad entre los números algebraicos (por ejemplo, hemos introducido un divisor común ideal para los números 2 y $1+\sqrt{-5}$ al no existir uno real), tenemos ahora que *añadir a los enunciados finitos los enunciados ideales*, conservando de este modo las reglas de la lógica aristotélica en su simplicidad original.

En realidad, no deja de ser extraño que los principios deductivos que Kronecker ataca con tanta pasión, sean precisamente la contraparte de lo que después él mismo, en la teoría de los números, encuentra admirable en la obra de Kummer, y que califica con tanto entusiasmo como el logro más elevado de la actividad matemática.

Pero ¿cómo podemos llegar a los *enunciados ideales*? Una indicación notable de la esencial corrección de nuestro procedimiento, es el hecho de que la vía para llegar a esos enunciados consista simple y sencillamente en continuar de manera natural y consecuente, el desarrollo seguido por la teoría de los fundamentos de la matemática.

Es fácil constatar que la matemática elemental va más allá de la perspectiva que adopta la teoría intuitiva de los números. Es decir, el método de calcular algebraicamente con letras no es, en la forma en la que hasta ahora lo hemos interpretado, algo que forme parte de la teoría concreta intuitiva de los números (*inhaltlich-anschauliche Zahlentheorie*). En ésta, las fórmulas se utilizan siempre única y exclusivamente con fines de comunicación. Las letras se refieren a numerales y una igualdad no expresa sino la identidad de dos signos.

Por el contrario, en el álgebra, consideramos las expresiones formadas por letras como algo autónomo, al tiempo que los enunciados concretos de la teoría de

los números son formalizados precisamente por esas expresiones.

Así, en lugar de enunciados acerca de numerales, tenemos fórmulas, presentándose éstas ahora como objetos concretos de nuestra intuición; y en lugar de las demostraciones concretas de la teoría de los números (inhaltlich zahlentheoretische Beweise) tenemos ahora la derivación de una fórmula a partir de otra de acuerdo con ciertas reglas.

Lo que obtenemos entonces es, como lo muestra ya el álgebra, una multiplicación de los objetos finitos. Hasta ahora, estos objetos no eran otros que numerales como 1, 11, ..., 11111. Estos signos eran además, los únicos que habían sido objeto de una consideración concreta. Pero ya en el álgebra la praxis matemática va mucho más lejos de eso. Así, aun cuando un enunciado resulte permisible de acuerdo con nuestro enfoque finitista en conjunción con las indicaciones concretas, como por ejemplo, la proposición

$$\mathbf{a+b=b+a}$$

donde **a** y **b** son numerales específicos, la forma de comunicación que utilizaremos no será ésta, sino

$$a+b=b+a.$$

Esta fórmula ya no es la comunicación inmediata de un contenido¹⁹, sino tan sólo una construcción formal cuya relación con los enunciados finitistas originales

$$2+3=3+2,$$

$$5+7=7+5$$

consiste en que en la primera fórmula los numerales 2, 3, 5, 7 reemplazan a **a** y **b**, estableciéndose con ello, por medio de este sencillo procedimiento demostrativo, tales enunciados finitistas particulares.

¹⁹ Inhalt.

De este modo, entonces, podemos concluir que ni a , ni b , ni $=$, ni $+$, ni siquiera la fórmula $a+b=b+a$, poseen por sí mismos, ningún significado, que ocurre con ellos a este respecto lo mismo que con los numerales. Sin embargo, a partir de esa fórmula, es posible derivar otras fórmulas a las que sí podemos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas.

La generalización de esta idea nos lleva a una concepción de la matemática que considera a éstas como un inventario de fórmulas a las que corresponden, en primer lugar, expresiones concretas de enunciados finitistas y a las que se añaden, en segundo, otras fórmulas que carecen de todo significado y que constituyen *los objetos ideales de nuestra teoría*.

Recordemos ahora cuál era nuestro objetivo. Por una parte, encontramos en la matemática, enunciados finitistas que no contienen sino numerales. Por ejemplo,

$$3 > 2, 2+3=3+2, 2=3, 1 \neq 1.$$

De acuerdo con nuestro enfoque finitista, estos enunciados se presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, como algo susceptible de ser negado, que es verdadero o falso, y en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna clase de restricciones, las reglas de la lógica aristotélica. El principio de no contradicción -esto es, un enunciado y su negación, no pueden ser a la vez verdaderos- y el del "tercero excluido" -es decir, o bien un enunciado es verdadero o lo es su negación- son aquí válidos. Así, si digo que este enunciado es falso, esto resulta equivalente a afirmar que su negación es verdadera.

Además de estos enunciados elementales absolutamente no problemáticos, encontramos enunciados más simples. Por último, hemos introducido también los enunciados ideales, cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la lógica.

Ahora bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas, de manera concreta²⁰ como a los enunciados finitistas. Se hace necesario someter a un proceso de formalización tanto a las operaciones lógicas, como a las demostraciones mismas. Pero este proceso requiere, a su vez, de una reformulación de las relaciones lógicas en fórmulas. Por esta razón necesitamos, aparte de los signos matemáticos, signos lógicos, *v. gr.*

$$\begin{array}{cccc} \wedge & \vee & \Rightarrow & \neg \\ \text{y} & \text{o} & \text{implica} & \text{no} \end{array}$$

Además de variables matemáticas a, b, c, \dots necesitamos de variables lógicas, esto es, de variables enunciativas A, B, C, \dots .

¿Cómo podemos lograr todo esto? En la historia de la ciencia es posible observar con frecuencia la existencia de una especie de armonía preestablecida a la que se debe una serie de desarrollos del conocimiento de gran importancia. Es precisamente esa armonía de la que Einstein por ejemplo, saca provecho de su teoría de la gravitación al encontrar como algo dado en forma ya acabada, el cálculo general de Invariantes. Por fortuna, esa misma armonía se pone de manifiesto en relación a nuestra problemática, permitiéndonos hallar como algo ya elaborado de manera avanzada el *cálculo lógico*.

Es evidente por lo demás, que este cálculo se crea originalmente en el marco de una perspectiva completamente diferente a la nuestra. De acuerdo con ese enfoque, los signos del cálculo lógico se introducen exclusivamente como medio de comunicación. Resulta consecuente con el curso que hemos seguido, despojar ahora a los signos matemáticos de cualquier tipo de significado. Según esto, las fórmulas del cálculo lógico no poseen absolutamente ningún significado. Todos ellos son

²⁰ inhaltlich

ahora enunciados ideales.

En el cálculo lógico contamos con un lenguaje de signos²¹ con capacidad no sólo de dar cuenta en fórmulas de las proposiciones de la matemática, sino igualmente de expresar por medio de procesos formales las inferencias lógicas.

Procediendo de manera exactamente análoga al paso de la teoría concreta de los números al álgebra formal, consideremos ahora a los signos y a los símbolos de operación del cálculo lógico como algo desprovisto de su significado concreto. En lugar de la ciencia matemática concreta²², lo que en último término obtenemos con todo ello, es un inventario de fórmulas que contienen signos tanto lógicos como matemáticos, y que se ordenan según reglas definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y ciertas reglas (de acuerdo con las cuales ciertas fórmulas siguen a otras) corresponden a la inferencia concreta. En otras palabras, la inferencia concreta es reemplazada por un manejo externo (Esto es, un manejo formal²³) según reglas. Con ello se realiza de manera estricta el tránsito de un tratamiento intuitivo e ingenuo a uno formal.

Por una parte, esta transición se lleva a cabo con los axiomas mismos, considerados ingenuamente en su origen como verdades básicas y a los cuales la axiomática moderna concibe desde hace mucho como meras interrelaciones de conceptos. Por la otra sin embargo, la transición tiene lugar también en relación al cálculo lógico, originalmente pensado como un simple lenguaje diferente.

Como ejemplo, bastará aquí exponer brevemente la manera en la que ha de formalizarse la *demostración matemática*.

Llamaremos *axiomas* a ciertas fórmulas que sirven como punto de partida para la construcción del edificio formal de la matemática. Una demostración matemática es

²¹ Zeichensprache

²² inhaltliche mathematische Wissenschaft

²³ äusseres Handeln (Nota del T.)

una figura que se presenta ante nosotros como algo intuitivo. Consiste de inferencias llevadas a cabo de acuerdo con el esquema

$$\begin{array}{c} S \\ \hline S \Rightarrow T \\ T \end{array}$$

en la que cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas que corresponden a S y a $S \Rightarrow T$ es o bien un axioma o resulta de un axioma por sustitución, o coincide con la fórmula final de una inferencia previa, o resulta de una fórmula de ese tipo por sustitución. Una fórmula es demostrable si es la fórmula última de alguna demostración.

El programa que hemos enunciado prefigura ya la elección de los axiomas de nuestra teoría de la demostración. Y aunque hay algo de arbitrariedad en tal elección, es posible, como en la geometría, distinguir grupos particulares cualitativamente diversos, de los que ahora ofreceremos algunos ejemplos.

i) Axiomas de implicación

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

(Introducción de una suposición)

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$$

(eliminación de un enunciado)

ii) Axiomas de la negación

$$[A \Rightarrow (B \wedge \neg B)] \Rightarrow \neg A$$

(principio de contradicción)

$$\neg(\neg A) \Rightarrow A$$

(principio de la doble negación)

(Del principio de contradicción se sigue la fórmula $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$; y del principio de la doble negación se sigue el principio del tercero excluido $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$).²⁴

Los axiomas de los grupos i y ii no son, en realidad, otros que los del cálculo de enunciados.

iii) Axiomas de transfinitud

$$(\forall a)[A(a) \Rightarrow A(b)]$$

(inferencia de lo universal a lo particular; axioma de Aristóteles):

$$[\forall (\neg a)]A \Rightarrow (\exists a)[\neg A(a)]$$

(si un predicado no se aplica a todos los individuos, hay un contraejemplo):

$$(\neg \exists a)A \Rightarrow (\forall a)[\neg A(a)]$$

(si no hay un individuo al que un enunciado se aplique, entonces el enunciado es falso para toda a)

En relación a los principios del grupo de axiomas iii se pone de manifiesto una situación por demás notable, a saber: que todos los axiomas transfinitos pueden obtenerse por derivación a partir de uno solo y que éste posee la característica de contener el núcleo fundamental del axioma matemático que más ha provocado controversias en nuestra disciplina, el axioma de elección²⁵:

$$A(a) \Rightarrow (\epsilon A)$$

donde ϵ es la función de elección transfinita²⁶.

A ellos se agregan los axiomas matemáticos especiales:

iv) Axiomas de la igualdad

²⁴ El texto entre paréntesis es un añadido de la tercera versión de 1930.

²⁵ Ver el capítulo 0, artículo 0.

²⁶ Esta es precisamente la función f_0 que se adjunta al lenguaje de la teoría de ZF.

$$a=a;$$

$$a=b \Rightarrow [A(a) \Rightarrow A(b)],$$

y también los

v) Axiomas numéricos

$$a+1 \neq 0$$

y el axioma de inducción completa:

$$[A(0) \wedge (\forall x)[A(x) \Rightarrow A(x')]] \Rightarrow A(a)^{27}$$

Con todos estos axiomas, es posible desarrollar una teoría de la demostración que se ajuste a las exigencias que hemos delineado y erigir un sistema de las fórmulas demostrables, es decir, la ciencia matemática.

Pero en nuestro entusiasmo por el éxito que en general hemos obtenido, y en particular, por contar con una herramienta tan imprescindible como el cálculo lógico como algo ya dado, no debemos de ninguna manera, perder de vista un requisito previo para nuestro proceder y esencial al mismo. Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber: *la prueba de consistencia*.

La extensión por medio de la adición de ideales, es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original, y en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original.

Es un hecho que en la actualidad estamos en grado de plantearnos y abordar este problema de la consistencia. Es evidente que éste se reduce a mostrar que con los axiomas y reglas admitidos es imposible obtener "1≠1" como la fórmula final, es

²⁷ Esta fórmula no aparece en la edición de 1925. Hilbert la añade en 1930.

decir, que la fórmula " $1 \neq 1$ " no es demostrable.

La dificultad a la que aquí nos enfrentamos, se ubica fundamentalmente en la esfera de lo intuitivo, y ocurre con ella lo mismo que, en la teoría concreta de los números con el problema del carácter irracional de $\sqrt{2}$, esto es, con la demostración de que es imposible encontrar dos numerales²⁸ **a** y **b** que se encuentren en la relación $a^2=2b^2$; en otras palabras, que es imposible hallar dos números con una cierta propiedad. En correspondencia con ello, lo que nosotros tenemos que demostrar ahora, es que no puede haber una demostración que exhiba ciertas características.

Al mismo tiempo, lo anterior nos ofrece la grata sorpresa de constituir también la solución de un problema que se había convertido desde hace tiempo en algo verdaderamente perentorio, el de la demostración de *la consistencia de la aritmética*.

La aplicación del método axiomático, plantea de manera natural la cuestión de la consistencia. La elección, la interpretación y el manejo de los axiomas pueden estar basados simplemente en la buena fe y en lo que nuestras creencias nos indiquen. Tanto en la geometría como en la física, es posible dar pruebas de consistencia relativa, esto es, de reducir el problema de la consistencia en esas esferas a la consistencia de los axiomas de la aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de ese tipo para la aritmética misma.

En la medida en la que nuestra teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final y necesario en la construcción del edificio de la teoría axiomática. Y lo que ya hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las

²⁸ Entiéndase aquí como número naturales.

paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca.

Podemos decir, entonces, que la teoría de la demostración, cuyos rasgos principales acabamos de bosquejar, no sólo se encuentra en condiciones de dar una base firme y segura a la matemática, sino que abre también una vía novedosa para abordar los problemas generales de carácter fundamental que caen dentro del dominio de nuestra disciplina y a los que antes no podíamos abocarnos.

La matemática se convierte así en una especie de tribunal superior, esto es, en un tribunal de cuestiones de principio, siempre sobre una base concreta en relación a la cual no sólo es posible un consenso, sino al mismo tiempo un control de cada afirmación.

En mi opinión, inclusive los planteamientos del "intuicionismo", no importa qué tan modestos sean, pueden adquirir su justificación únicamente ante este tribunal.

A manera de ejemplo del tratamiento de este tipo de cuestiones fundamentales, consideremos la tesis de que todo problema en la matemática posee una solución. Esta suposición es compartida por todos los matemáticos. De hecho, una parte muy importante del atractivo que puede tener para nosotros la ocupación con un problema en la matemática, reside precisamente en que de alguna manera escuchamos una especie de llamado: "Allí tienes el problema. ¡Busca la solución! Puedes hallarla con la sola ayuda del pensamiento; ¡en la matemática no hay *ignorabimus*²⁹ (esto es, ignoraremos)!"

Ciertamente, la teoría de la demostración no puede proporcionar un método general para resolver todos los problemas matemáticos. No existe algo de este tipo.

²⁹ Hilbert se refiere aquí a la posición de Emil duBois-Reymond acerca de la limitación esencial de la razón humana en el conocimiento de la naturaleza y, particularmente, a su imposibilidad para resolver ciertos problemas (materia, fuerza, origen del movimiento, conciencia, etc.). DuBois-Reymond resumía sus ideas en la afirmación *Ignoramus et ignorabimus* (ignoramos e ignoraremos). (N. de T.)

Sin embargo, lo que sí cae dentro del campo de acción de nuestra teoría, es la prueba misma de consistencia de la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático.

Pero me gustaría argumentar todavía como sigue. La prueba definitiva para la evaluación de cualquier teoría nueva la constituye su capacidad para resolver problemas planteados antes de que ella existiera, problemas cuya solución no formaba parte de las razones específicas para crearla. "Por sus frutos los conoceréis" es también un principio válido para las teorías. Así, inmediatamente después de que Cantor descubre los primeros números transfinitos, esto es los números de la segunda clase, se plantea el problema de determinar si realmente es posible contar con tales números conjuntos ya conocidos y que en un sentido normal no son numerables.

Uno de estos conjuntos, es evidentemente el de los puntos de la recta. La cuestión de si los números de la tabla que hemos formulado anteriormente bastan para contar los puntos de la recta, es decir, los números reales, constituye el célebre problema del continuo, que Cantor mismo plantea, pero no resuelve. Al principio, algunos matemáticos creyeron poder desembarazarse de este problema, simplemente negando su existencia. Los puntos que a continuación señalamos, muestran claramente lo equivocado de tal actitud.

El problema que el continuo plantea, se caracteriza por su originalidad y su belleza interna. Pero, además, posee en relación a otros problemas también célebres en la matemática, dos rasgos distintivos y preeminentes. Por una parte, su solución requiere de vías alternativas y novedosas, puesto que los métodos conocidos fallan en este caso; por la otra, su solución resulta por sí misma de mayor interés en vista del resultado a obtener.

La solución del problema del continuo, es algo que puede realizarse con la teoría que hemos desarrollado. De hecho, la prueba de que todo problema matemático tiene una solución, representa precisamente el primer paso de importancia en esa dirección.

La respuesta al problema del continuo es afirmativa, esto es, los puntos de una recta pueden ser contados por medio de números de la segunda clase. O para decirlo en forma popular, que un simple conteo que se extiende más allá del infinito numerable³⁰ basta para agotar los puntos de la recta. Llamaremos a esta afirmación el teorema del continuo. Lo que sigue es una breve exposición de las ideas básicas de una demostración del mismo.

En lugar del conjunto de los números reales, consideremos algo que es evidentemente equivalente: el conjunto de las funciones numéricas, esto es, el de las funciones cuyos argumentos y valores son siempre números enteros.

Si queremos ordenar el conjunto de estas funciones en el sentido requerido por el problema del continuo, es necesario hacer referencia al proceso de generación de una función individual. Sin embargo, una función de un solo argumento, puede estar definida de tal manera que los valores que tome para algunos argumentos, o para todos ellos, dependa en cada caso de la solución de ciertos problemas diofantinos de la cuestión de si un número dado (digamos $2^{\sqrt{2}}$) es irracional.

Precisamente para evitar esta dificultad, podemos recurrir a la afirmación mencionada con anterioridad acerca de la solubilidad de cualquier problema matemático bien definido. En realidad, esta afirmación no es otra cosa que un lema general que se ubica en un ámbito al que podemos llamar *metamatemática*, es decir, en la esfera de la teoría concreta de las demostraciones formalizadas³¹. Podemos

³⁰ ein blosses Hinüberzählen über das abzählbare unendlich

³¹ inhaltliche Theorie der formalisierten Beweise

formular como sigue la parte de ese lema que resulta de importancia para nosotros.

LEMA I: Supongamos que tenemos una versión formalizada de una demostración que contradice el teorema del continuo y que esa formalización ha sido llevada a cabo por medio de funciones que requieren para su definición del signo transfinito ϵ (grupo iii de axiomas). Resulta entonces posible sustituir esas funciones por otras, definidas exclusivamente por recursión ordinaria y transfinita y sin apelar al signo ϵ , de tal manera que lo transfinito sólo aparece en la forma del cuantificador universal, \forall .

El desarrollo cabal de la teoría de la demostración requiere, sin embargo, de ciertas estipulaciones de las que ahora nos ocuparemos.

Para los *enunciados variables* (variable Aussagen, esto es fórmulas indeterminadas) utilizaremos siempre letras latinas mayúsculas, mientras que para los *enunciados constantes* (individuelle Aussagen, esto es, fórmulas específicas), nos serviremos de letras griegas mayúsculas. Así, por ejemplo,

$Z(a)$: " a es un número entero ordinario";

$N(a)$: " a es un número de la segunda clase".

Para las *variables matemáticas*, se utilizarán siempre letras latinas minúsculas, mientras que para los *objetos matemáticos constantes* (funciones específicas) recurriremos a las letras griegas minúsculas.

En relación al procedimiento de *sustitución* serán válidas las siguientes convenciones generales.

Las variables enunciativas³² deben ser sustituidas únicamente por otros enunciados (fórmulas) indeterminadas o constantes.

³² Aussagenvariable

Una variable matemática puede ser sustituida por una figura³³ cualquiera. Sin embargo, cuando una variable matemática aparece en una fórmula, el enunciado constante que caracteriza su tipo, debe aparecer antes del signo de implicación. Por ejemplo,

$$Z(a) \Rightarrow (...a...)$$

$$N(a) \Rightarrow (...a...)$$

Nuestra convención tiene el efecto de que por ejemplo, en lugar de a en $Z(a)$ o en $N(a)$ únicamente sean permisibles las sustituciones de esta variable por números ordinarios o por números de la segunda clase, respectivamente.

Las letras en negrita mayúsculas y minúsculas son siempre *indicadores*³⁴ y se utilizan exclusivamente para comunicar información.

Para tener una idea completa de la línea que sigue la demostración del teorema del continuo, es indispensable ante todo una comprensión precisa del concepto de variable matemática en su acepción más general.

Las variables matemáticas son de dos clases:

- (1) las *variables primitivas* (Grundvariablen),
- (2) los *tipos de variables* (Variablentypen).

(1) Mientras que en la aritmética y el análisis en su totalidad es suficiente contar con los números enteros ordinarios como únicas variables primitivas, tenemos ahora que a cada una de las clases numéricas transfinitas de Cantor le corresponde una *variable primitiva* que puede adoptar la forma de números ordinales de esa clase. En consecuencia, a cada una de esas variables se encuentra asociado un enunciado que la caracteriza. Este enunciado se encuentra a su vez caracterizado de manera implícita por los axiomas. Por ejemplo,

³³ Figur

³⁴ Hinweise

$$\begin{aligned}
 & Z(0), \\
 & Z(a) \Rightarrow Z(a+1), \\
 & [A(0) \wedge (\forall a)[A(a) \Rightarrow A(a+1)]] \Rightarrow [Z(a) \Rightarrow A(a)] \\
 & \text{(fórmula de la inducción normal)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & N(0), \\
 & N(a) \Rightarrow N(a+1), \\
 & (\forall n)[Z(n) \Rightarrow N(a)] \Rightarrow N \text{ lím } a(n) \text{ }^{35};
 \end{aligned}$$

y además la fórmula transfinita para los números de la segunda clase.

A cada clase de variables primitivas, corresponde un tipo específico de recursión. Por medio de ésta pueden definirse funciones cuyos argumentos son precisamente las variables primitivas de esa clase. La recursión asociada a las variables numéricas no es otra que la "recursión ordinaria". Por medio de ella, una función de una variable numérica n se encuentra definida cuando se da su valor para $n=0$ y se especifica cómo puede obtenerse el valor de la función para $n+1$ a partir del valor para n . La generalización de la recursión usual, es la recursión transfinita, cuyo principio general consiste en la determinación del valor de la función para un valor de la variable, recurriendo a los valores anteriores de esa misma función.

(2) A partir de las variables primitivas, obtenemos por aplicación de las operaciones lógicas a los enunciados asociados con esas variables, otros tipos de variable, *v.gr.* Z y N . Las variables definidas de esta manera, se llaman *variables tipo*, mientras que los enunciados así definidos reciben el nombre de *enunciados tipo*³⁶. Para estos últimos, se introducen cada vez nuevos signos constantes. La fórmula

³⁵ El predicado $N \text{ lím } a(n)$ indica que a es un número límite de n , de la segunda clase.

³⁶ Typenaussagen

$$(\forall a)[Z(a) \Rightarrow Z(f(a))]$$

constituye el ejemplo más sencillo de un tipo de variable. Es decir, esta fórmula define la variable funcional f y, en tanto que enunciado tipo, es denotada por $\phi(f)$, "ser una función".

Otro ejemplo nos lo ofrece la fórmula

$$(\forall f)[\phi(f) \Rightarrow Zg(f)];$$

Esta expresión define la propiedad de "ser una función de función", $\Psi(g)$, en la que el argumento g representa la nueva variable de función de función ³⁷.

Para la caracterización de los tipos variables superiores, es necesario proveer de índices a los enunciados tipo. Un enunciado tipo que consta de un índice, se define recursivamente, de tal modo que en su definición aparezca ahora en lugar de la igualdad (=), la equivalencia lógica (\Leftrightarrow).

Tanto en la aritmética como en el análisis, las únicas variables superiores que se utilizan, en interacciones finitas son: las funciones, las funciones de función, etc.

Un tipo variable que va más allá de estos sencillos ejemplos, nos ofrece la variable g que asocia un valor numérico $g(f_n)$ a cualquier sucesión f_n que consista de

una función f_1 de un número entero: $\phi(f_1)$;

una función de función f_2 : $\Psi(f_2)$;

una función f_3 de una función de función;

etc.

Podemos representar el enunciado tipo correspondiente, $\phi_\omega(g)$, por medio de las siguientes equivalencias:

³⁷ "Función de función" se refiere a una "funcional" y no a una "composición de funciones" (N. de T.)

$$\phi_0(a) \Leftrightarrow Z(a),$$

$$\phi_{n+1}(f) \Leftrightarrow (\forall b)[\phi_n(b) \Rightarrow Z(f(b))],$$

$$\phi_\omega(g) \Leftrightarrow [(\forall n)\phi_n(f_n) \Rightarrow Z(g(f))];$$

que constituyen igualmente un ejemplo de la definición recursiva de un enunciado tipo.

Los tipos variable pueden clasificarse de acuerdo con su *nivel* (Höhe)³⁸. En el nivel 0 se encuentran todas las constantes numéricas; en el nivel 1, todas las funciones cuyos argumentos y valores poseen en su totalidad la propiedad de una variable primitiva, por ejemplo, la propiedad Z o la propiedad N. Una función cuyo argumento y cuyo valor poseen un nivel determinado, es de un nivel superior en 1 que el del mayor de esos dos niveles de su argumento y su valor. Una sucesión de funciones de distintos niveles, tiene como nivel el límite de esos niveles.

Una vez realizados estos preparativos podemos retomar nuestro problema original. Recordemos que para la prueba del teorema del continuo, resulta esencial establecer una correspondencia biunívoca entre las definiciones de las funciones numéricas en las que no aparece el símbolo ϵ y los números cantorianos de la segunda clase, o bien establecer una correspondencia de tal modo que toda función de ese tipo resulte asociada al menos a un número de la segunda clase.

Es evidente que los mecanismos elementales para la construcción de funciones son, por una parte, la *sustitución* (es decir, el reemplazo de un argumento por una nueva variable o una nueva función) y la *recursión* (según el esquema de derivar el valor de la función para $n+1$ a partir de su valor para n).

Podría pensarse que a estos dos procedimientos, sustitución y recursión, deberían agregarse otros métodos elementales de definición, por ejemplo, la

³⁸ La traducción literal de la palabra *Höhe* es "altura". Utilizamos la palabra "nivel" por considerarla más adecuada. (N. de T.)

definición de una función explicitando sus valores hasta un cierto punto, a partir del cual la función es constante. También la definición por medio de procesos elementales obtenidos a partir de las operaciones aritméticas, como el residuo en la división, la del máximo común divisor de dos números, y la definición de un número como el menor entre una cierta totalidad finita de números dados.

Sin embargo, todas esas definiciones pueden representarse como casos particulares de las operaciones de sustitución y recursión. En realidad, el método de buscar las recursiones requeridas equivale, en esencia, a una argumentación que establece el carácter finitista del procedimiento de definición de que se trate.

Es importante ahora tener una visión de conjunto de los resultados de que esas dos operaciones nos proveen. En relación a las recursiones que pueden utilizarse, la existencia de diversas posibilidades en el paso de n a $n+1$, impide una formulación unitaria, si es que hemos de limitarnos a la operación con variables numéricas ordinarias. Un ejemplo bastará para reconocer esta dificultad.

Consideremos las funciones

$$a+b;$$

a partir de ellas se obtiene por iteración (n veces)

$$a+a+\dots+a=a \cdot n.$$

Asimismo, podemos pasar de $a \cdot b$ a

$$a \cdot a \dots \cdot a = a^n$$

y de a^b a

$$a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \dots$$

De este modo, obtenemos en sucesión de funciones

$$a+b = \varphi_1(a, b),$$

$$a \cdot b = \varphi_2(a, b),$$

$$a^b = \varphi_3(a, b).$$

$\varphi_4(a, b)$ sería el b -ésimo término en la sucesión:

$$a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}}, \dots$$

De manera exactamente análoga, podemos llegar luego a $\varphi_5(a, b)$, $\varphi_6(a, b)$, etc.

Podríamos ahora definir por sustituciones y recursiones $\varphi_n(a, b)$ para n variables, pero esas recursiones no se obtendrían de recursiones ordinarias sucesivas, sino que más bien nos veríamos conducidos a una recursión múltiple para varias variables tomadas simultáneamente. La resolución de esta recursión en sucesiones recursivas ordinarias, no se logra sino cuando utilizamos el concepto de variables funcionales. La función $\varphi_a(a, a)$ sería un ejemplo de una función de variables funcionales. La función $\varphi_a(a, a)$ sería un ejemplo de una función de la variable numérica a que no puede ser definida solamente por sustituciones y recursiones ordinarias sucesivas, si es que sólo aceptamos variables numéricas³⁹.

Las fórmulas

$$\iota(f, a, 1) = a,$$

$$\iota(f, a, n) = f(a, \iota(f, a, n-1));$$

$$\varphi_1(a, b) = a+b,$$

$$\varphi_{n+1}(a, b) = \iota(\varphi_n, a, b),$$

³⁹ La demostración de esta afirmación se debe a W. Ackermann.

en las que ι es una función específica de tres argumentos, de los cuales el primero es una función de dos variables numéricas ordinarias, muestran la manera en la que podemos definir la función $\varphi_n(a, b)$ utilizando variables funcionales.

Un ejemplo de una recursión más complicada es el siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi_0(a) &= \mathbf{a}(a) \\ \varphi_{n+1}(a) &= \mathbf{f}(a, n, \varphi_n(\varphi_n(n+a))),\end{aligned}$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{f} representan expresiones conocidas de uno y tres argumentos respectivamente. Lo peculiar de esta recursión consiste en que en ella el valor numérico de $n+1$ no se deriva del valor correspondiente para n , sino que la determinación de φ_{n+1} requiere que se conozca el curso⁴⁰ de la función φ_n .

Todas las dificultades que estos ejemplos nos plantean, pueden ser superadas si recurrimos a los tipos variable. El esquema general de recursión se encuentra caracterizado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{g}, \mathbf{a}, 0) &= \mathbf{a}, \\ \rho(\mathbf{g}, \mathbf{a}, n+1) &= \mathbf{g}(\rho(\mathbf{g}, \mathbf{a}, n), n),\end{aligned}$$

donde \mathbf{a} es una expresión dada de un tipo variable arbitrario; \mathbf{g} es también una expresión dada de dos argumentos, de los cuales el primero es del mismo tipo variable que \mathbf{a} , mientras que el segundo es un número. \mathbf{g} debe, además, satisfacer la condición de que su valor sea el mismo tipo variable que \mathbf{a} , una vez que han llevado a cabo las sustituciones correspondientes para \mathbf{g} , \mathbf{a} y n . Aparte de esto, en \mathbf{a} , \mathbf{g} y, en consecuencia, también en ρ pueden aparecer parámetros arbitrarios.

A partir de este esquema general y por sustitución, obtenemos recursiones definidas. Así *v. gr.* podemos obtener las recursiones de nuestros ejemplos.

⁴⁰ Verlauf

considerando a f y a a en el primer paso como $\varphi_n(a)$ a $\varphi_{n+1}(a)$ como un paso mediado por la función φ_n a otra φ_{n+1} , de tal manera que a no se considere nunca un parámetro en la recursión.

Comparada con la recursión elemental, la recursión que hemos utilizado en nuestros dos ejemplos, tiene una mayor extensión, pues en un caso hemos introducido un parámetro superior que no es un número entero ordinario, mientras que en el otro hemos elegido para a una función y para g una función de funciones.

Los tipos variable constituyen un enlace que hace posible establecer una correspondencia entre las funciones de una variable numérica y los números de la segunda clase. De hecho, llegamos a una correspondencia así, entre los números de la segunda clase y ciertos tipos de variables de una sucesión numerable, con el modo que incrementan los tipos variable su nivel. Establezcamos una correspondencia entre el proceso de añadir una unidad y tomar una función⁴¹, es decir, la formación de un nuevo tipo variable mediante la unión de una sucesión numerable de tipos variable. Y designemos ahora como *tipos Z* aquellos que correspondan a los números de la segunda clase.

Tenemos así que, además de las operaciones lógicas, en la construcción de los tipos Z se utilizan únicamente las recursiones ordinarias (no transfinitas), precisamente aquellas que resultan necesarias para enumerar una sucesión de tipo como paso preparatorio para el proceso del límite. Una vez que hemos ordenado estos tipos Z de acuerdo con su nivel, tenemos una correspondencia biunívoca en la cual a cada número de la segunda clase, se le asocian los tipos variable de un nivel determinado.

Pero con ello habremos llegado también a una correspondencia biunívoca entre

⁴¹ Funktionen-Nehmen

las funciones definidas por medio de los tipos Z y los números de la segunda clase. Para percatarse de ello, bastará considerar la siguiente argumentación. Si establecemos los tipos variable únicamente hasta un cierto nivel, construyendo luego las funciones exclusivamente por medio de sustitución y recursión, lo que obtenemos es siempre una totalidad numerable de funciones. Podemos también formalizar de manera estricta esa enumeración. En particular, podemos hacer esto generando, en primer lugar, una función recursiva ρ que abarque todas las recursiones en cuestión y que, en consecuencia, contenga un parámetro que sea mayor que los tipos variable admitidos hasta ese momento. La definición de ρ es una aplicación del esquema general de recursión, de modo tal que el uso de un tipo de variable superior, se convierte en algo esencial.

Lo que hacemos es ordenar de acuerdo con su nivel, las especializaciones importantes de los tipos variable que aparecen en ρ , con lo que obtenemos las diferentes sustituciones iniciales. Si colocamos luego a éstas en una sucesión numerable y tomamos como principio de ordenación el número de sustituciones a realizar, obtenemos finalmente las funciones que queríamos definir.

El esquema de prueba que hemos presentado supone esencialmente la teoría de los números de la segunda clase. Los números de esta clase, han sido introducidos simplemente como resultado del proceso continuado de contar más allá del infinito numerable, y hemos caracterizado luego el enunciado constante N , "ser número de la segunda clase" por medio de axiomas.

Sin embargo, esos axiomas proporcionan tan sólo el marco general para una teoría. Una fundamentación más precisa de la misma requiere de una investigación del modo en el que debe formalizarse el proceso continuado de contar más allá del infinito numerable. Esto se logra aplicando ese proceso a una sucesión. La sucesión

misma no puede darse sino por medio de una recursión ordinaria y para ésta nuevamente son necesarios ciertos tipos.

Aunque esta situación parece presentar una dificultad importante, en realidad resulta que precisamente gracias a una argumentación de esta índole, puede obtenerse de manera mucho más restringida, la correspondencia entre los números de la segunda clase y las funciones de una variable numérica.

Los tipos variable que necesitamos para la construcción de los números de la segunda clase, pueden obtenerse sustituyendo formalmente en uno o varios lugares de los enunciados de tipo definitorios que tenemos hasta ese momento: el signo Z por el signo N . Los tipos variables que resultan de ello se llaman *tipos N*. Es evidente que los tipos Z y los tipos N correspondientes, son siempre del mismo nivel.

Por lo demás, no es necesario asignar a un número dado de la segunda clase la totalidad de las funciones del mismo nivel, sino que ahora es posible establecer una correspondencia recíproca entre los números de la segunda clase y las funciones, de acuerdo con el nivel de los tipos variable necesarios para su definición. En detalle, tal correspondencia se podría caracterizar como sigue.

Si en los tipos Z llegamos únicamente hasta un cierto nivel, el nivel de los tipos N correspondientes se ve también restringido. A partir de los números de la segunda clase contruidos con estos tipos podemos obtener, por medio de una sucesión creciente, un número mayor de la segunda clase definido con ayuda de un tipo variable de mayor nivel.

Por otra parte, si tenemos tipos N hasta cierto nivel, también las funciones definibles por medio de los tipos Z correspondientes, pueden ser enumeradas a saber, según el número de las sustituciones, tal y como lo hemos descrito

anteriormente. Como es bien sabido, con una enumeración $\varphi(a \ n)$ de este tipo, podemos llegar, utilizando el método de diagonalización cantoriano, por ejemplo, construyendo $\varphi(a \ n)+1$, una función distinta a todas las funciones enumeradas y que no puede, en consecuencia, ser definida por medio de los tipos variable anteriormente aceptados.

Con todo ello, habríamos hecho posible el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre aquellas funciones definibles en el mismo nivel (y cuya totalidad es enumerable) y los números de la segunda clase definibles en el nivel correspondiente, pero no en un nivel anterior. De esta manera, toda función resulta asociada con al menos un número de la segunda clase.

Sin embargo, la demostración del teorema del continuo no termina allí, pues requiere de una complementación esencial. Un examen del curso que ha seguido nuestra investigación, hace ver que para construir la correspondencia buscada, ha sido necesario hacer ciertas suposiciones. Estas tienen un efecto restrictivo en un sentido doble. Por una parte, porque nuestro esquema de recursión para ρ únicamente representa el caso de la recursión ordinaria, en la que la variable según la cual la recursión avanza es la variable numérica. Por la otra, porque hemos restringido los tipos variable a aquellos que se obtienen por medio del proceso continuado de contar más allá de las sucesiones numeradas.

Es un hecho que las recursiones transfinitas y, en consecuencia, los tipos variable de nivel superior, resultan imprescindibles en la Investigación matemática, por ejemplo, para la construcción de funciones de variable real con ciertas propiedades. Pero en relación al problema que nos ocupa, esto es, cuando se trata de construir funciones de una variable numérica, en realidad no necesitamos esas recursiones superiores, ni de los tipos variable de esa especie. Podemos más bien

recurrir al siguiente lema.

LEMA II: Para la obtención de funciones de una variable numérica, las recursiones transfinitas resultan dispensables. Es decir, la recursión ordinaria, que opera y avanza según una variable numérica, basta no sólo para el proceso de construcción real de las funciones, sino que al mismo tiempo las sustituciones requieren únicamente de tipos variable para cuya definición es suficiente la recursión ordinaria.

Expresando de manera más precisa y acorde a nuestro enfoque finitista, el lema diría lo siguiente: si para la construcción de una función que tiene como único argumento una variable numérica ordinaria se utiliza una recursión superior o un tipo variable correspondiente, entonces podemos definir siempre a esa función por medio de recursiones ordinarias y utilizando exclusivamente tipos Z .

El siguiente ejemplo podrá aclararnos el sentido y el alcance de nuestro lema.

Supongamos que se ha formalizado la correspondencia de las funciones de un argumento numérico y los números de la segunda clase. Con ello tendríamos también una cierta función $\zeta(a, n)$ que asigna un número ordinario al par formado por un número arbitrario a de la segunda clase numérica y el número ordinario n ; $\zeta(a, n)$, con a fija y n variable, representa precisamente la función asociada a a . Sustituyamos ahora a por un número de la segunda clase numérica α_n que depende de n , y consideremos que la sucesión ha sido definida por recursión ordinaria o transfinita, por ejemplo,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}.$$

Entonces $\zeta(a, n)$ es una función de una variable numérica n y nuestro lema II afirmarí­a que esa función también puede definirse por recursión ordinaria por medio

de tipos Z , mientras que una definición de $\zeta(a \rightarrow n)$ por esos medios es imposible, puesto que la suposición de lo contrario conduce a una contradicción.

Es importante subrayar nuevamente que la exposición que acabamos de presentar, no contiene más que las ideas básicas de una demostración del teorema del continuo. La realización completa de las ideas básicas, además de la demostración de los dos lemas, requiere de ciertas reformulaciones cuidadosas en el sentido de las exigencias finitistas.

Intentemos, por último, extraer algunas consecuencias globales de nuestras reflexiones en relación a nuestro problema inicial del infinito.

El infinito no tiene ningún tipo de realidad, no existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectual⁴². Es decir, en relación al infinito, se da una notable y armónica coincidencia entre el ser y el pensar.

En abierta oposición a los intentos de Frege y Dedekind, podemos concluir que existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que resultan imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta. Las operaciones con el infinito, necesitan para ser seguras de una base finita.

El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad. Pero a la vez, el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear.

Para finalizar, quiero dejar constancia aquí de mi sincero agradecimiento a Paul Bernays por su comprensiva colaboración y por su inestimable ayuda, en particular en lo relativo a la demostración del teorema del continuo (Hilbert, Álvarez, Segura, 1993).

⁴² verstandesmässig

V. Bibliografía

- Álvarez C. y Segura L. F. David Hilbert: Fundamentos de las Matemáticas. Servicios 1993 Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México, D. F. 135 p.
- Cantor, G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Dover 1955 Publications, Inc. New York. 211 p.
- Gray, R. Georg Cantor and Transcendental Numbers. The American Monthly. Vol. 101. 1994 p. 819
- Guillen, M. Bridges to Infinity. Jeremy P. Parcher, Inc. Los Ángeles. 204 p. 1983
- Halmos, P. R. Teoría Intuitiva de Conjuntos. 8a. ed. Compañía Editorial Continental. 1969 México, D. F. 151 p.
- Hawking, S. Historia del Tiempo. Del Big Bang a los Agujeros Negros. 5a. ed. Alianza 1994 Editorial. Madrid. 252 p.
- Kamke, E. Theory of Sets. Dover Publications, Inc. New York. 152 p. 1950
- Kasner, E. and J. Neumann. Mathematics and Imagination. Simon and Schuster. New York. 360 p. 1940
- Kleene, S. C. Introducción a la Metamatemática. Gráficas Lormo. Madrid. 494 p. 1974
- Le Lionnais, F. Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático. Editorial 1962 Universitaria. Buenos Aires. 567 p.
- Martin, G. For Your Eyes Only. The American Mathematical Monthly. Vol. 97. p. 418. 1990
- Monk, J. D. Introduction to Set Theory. McGraw-Hill Book Company. EEUU. 193 p. 1969
- Pinter, C. C. Set Theory. Addison-Wesley Publishing Company. EEUU. 216 p. 1970

Shoenfield, J. R. Mathematical Logic. Addison-Wesley Publishing Company. EEUU.
1967 344 p.

Takeuti, G. and W. Zaring. Introduction to Axiomatic Set Theory. Springer-Verlag.
1971 Berlin. 250 p.

Takeuti, G. and W. Zaring. Axiomatic Set Theory. Springer-Verlag. Berlin. 238 p.
1972

“El valor de un sabio... sólo puede ser medido por el poder de su imaginación. Los números tomados al azar, los hechos históricos recordados con precisión y oportunidad, pueden tener un interés momentáneo, pero al cabo de un tiempo caen en el olvido. Hay números, nombres, palabras y obras que están, por su propia naturaleza y finalidad, condenados al irremediable olvido. El saber que no sirve al sabio es vano.”
(Nasir Rahal)