

**Universidad del Valle de Guatemala**  
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**HOLOGRAFÍA, ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO Y  
HOYOS NEGROS**

Trabajo de graduación presentado por  
**Rodrigo Castillo Vásquez**  
para optar al grado académico de  
Licenciado en Física

Guatemala  
2015



Holografía, entrelazamiento cuántico  
y hoyos negros

**Universidad del Valle de Guatemala**  
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**HOLOGRAFÍA, ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO Y  
HOYOS NEGROS**

Trabajo de graduación presentado por  
**Rodrigo Castillo Vásquez**  
para optar al grado académico de  
Licenciado en Física

Guatemala  
2015

Vo. Bo.:



---

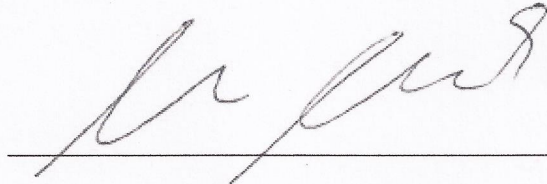
Dr. Álvaro Véliz Osorio

Tribunal Examinador:




---

MSc. Zaida Urrutia



---

Dr. Álvaro Véliz Osorio



---

Lic. Adrián Licht

Fecha de aprobación:

Guatemala, 7 de diciembre de 2015

# PREFACIO

El proceso de realizar un trabajo de graduación es una experiencia que realmente no le deseo a nadie, pero que hasta cierto punto es interesante y divertida. Ciertamente considero que aprendí muchas cosas para llegar a redactar esta tesis y plasmarla de resultados que ya habían sido obtenidos por varios científicos, pero que fui capaz de replicarlos por mi cuenta y con mucha ayuda de mi asesor, el doctor Álvaro Véliz Osorio.

La motivación e historia de este trabajo inició desde diciembre de 2014, cuando gracias a MSc. Michael Morales, entré en contacto con Álvaro con el fin de colaborar de varias formas, una de ellas en mi tesis de licenciatura. Pasé el inicio del año aprendiendo sobre relatividad general y otros temas para estar preparado para la realización de este trabajo. Mucha parte de ese aprendizaje fue por mi cuenta, con una ayuda y guía invaluable por parte de Álvaro para lograr un aprendizaje efectivo y terminar este trabajo a tiempo. A él, agradezco mucho por tanta paciencia conmigo a lo largo del año, por su esfuerzo para enseñarme y ayudarme con la redacción de esta tesis, y por introducirme a este extraño y entretenido mundo de la holografía y la correspondencia AdS/CFT. Sé que aún me falta mucho por aprender y que el tema es bastante extenso, pero este solo es el primer paso de toda una travesía.

También agradezco mucho el apoyo de mi familia, especialmente de mis padres que se esforzaron tanto por lograr financiarme una educación decente, además de darme su cariño y apoyar varias de mis decisiones. Agradezco a mis dos hermanos por su aprecio y apoyo desde siempre. A mis buenos amigos de la universidad, del colegio y de la colonia, gracias por hacer de estos cuatro años una entretenida experiencia llena de recuerdos y toda clase de emociones; gracias porque sin ustedes, qué aburrido habría sido. En especial, quiero agradecer y dedicar este trabajo a la memoria de mi mejor amigo, José Luis.

Un agradecimiento especial a Olga Castellanos y Byron Alay del Departamento de Física por su ayuda en toda clase de situaciones. Por último pero no menos importante, agradezco a aquellos catedráticos que me enseñaron a amar la Física y la Matemática, así como a ver la vida desde distintas perspectivas; en especial, agradezco a MSc. Zaida Urrutia, al doctor Eduardo Rubio, al licenciado Juan Diego Chang y a MSc. Michael Morales por las enseñanzas, conversaciones, locuras y apoyo durante estos cuatro años.

No puedo dejar pasar la oportunidad para citar al gran físico teórico Richard Feynman con una de sus mejores frases sobre esta área de la ciencia:

*«Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that's not why we do it.»*

# ÍNDICE

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>IX</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>x</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>II. RELATIVIDAD GENERAL: GRAVEDAD COMO GEOMETRÍA</b>	<b>3</b>
A. Principios de Relatividad General . . . . .	3
1. El Principio de Equivalencia. . . . .	3
2. Física en el espacio-tiempo curvado. . . . .	6
3. Conos de luz y causalidad. . . . .	7
B. Ecuaciones de Einstein-Hilbert . . . . .	8
1. Acción de Einstein-Hilbert. . . . .	8
2. Propiedades de las EFE. . . . .	12
C. Geodésicas . . . . .	14
1. Transporte paralelo y geodésicas. . . . .	14
2. Propiedades de las geodésicas. . . . .	16
D. El hoyo negro de Schwarzschild . . . . .	18
1. Singularidades. . . . .	18
2. Horizonte de eventos. . . . .	19
3. Coordenada tortuga. . . . .	21
4. Hoyos negros. . . . .	22
E. Hoyos negros cargados: Reissner-Nordström . . . . .	23
<b>III. ESPACIO ANTI-DE SITTER</b>	<b>26</b>
A. Coordenadas globales . . . . .	26
B. AdS como solución de las EFE . . . . .	28
C. Diagrama de Penrose de AdS . . . . .	31
D. Coordenadas de Poincaré . . . . .	31
E. Geodésicas en AdS . . . . .	33
<b>IV. GRAVEDAD EN 2+1 DIMENSIONES</b>	<b>35</b>
A. Lo simple de la gravedad (2+1)-dimensional. . . . .	36

B.	El hoyo negro de BTZ. . . . .	37
<b>V.</b>	<b>ENTRELAZAMIENTO DE SISTEMAS CUÁNTICOS</b>	<b>42</b>
A.	Matrices de densidad . . . . .	42
B.	Entrelazamiento cuántico . . . . .	44
C.	Matrices de densidad reducida y entropía de entrelazamiento . . . . .	46
D.	Un ejemplo simple: osciladores armónicos acoplados . . . . .	48
<b>VI.</b>	<b>TEORÍAS CONFORMES</b>	<b>51</b>
A.	El grupo de Poincaré . . . . .	51
B.	El grupo conforme . . . . .	54
1.	El grupo conforme en $d \geq 3$ . . . . .	56
2.	El grupo conforme en $d = 2$ . . . . .	58
C.	Campos primarios . . . . .	61
D.	El tensor Energía-Momentum . . . . .	62
<b>VII.</b>	<b>FÓRMULA DE RYU Y TAKAYANAGI</b>	<b>64</b>
A.	Entropía de entrelazamiento en $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ . . . . .	64
1.	Entropía de entrelazamiento en coordenadas globales. . . . .	65
2.	Entropía de entrelazamiento a temperatura finita. . . . .	68
3.	Entropía de entrelazamiento a temperatura cero. . . . .	69
<b>VIII.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>72</b>
<b>IX.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>73</b>
<b>X.</b>	<b>APÉNDICE</b>	<b>75</b>
A.	Geometría diferencial . . . . .	75
1.	¿Qué es una variedad? . . . . .	75
2.	Vectores y vectores duales. . . . .	77
3.	Tensores y densidades tensoriales. . . . .	79
4.	La métrica. . . . .	83
5.	Formas diferenciales. . . . .	84
6.	Conexiones de Christoffel y derivada covariante. . . . .	86
7.	Tensor de curvatura de Riemann. . . . .	88

# LISTA DE FIGURAS

III.1.Diagrama de Penrose del espacio AdS . . . . .	31
IV.1.Diagrama de Penrose del hoyo negro de BTZ sin rotación . . . . .	41

# RESUMEN

Este trabajo se realizó con el objetivo de compilar información acerca de los temas de Holografía, Entrelazamiento Cuántico y Hoyos negros, y la relación entre estos dentro del marco de la correspondencia AdS/CFT. A la vez, se replicaron cálculos y resultados pertinentes a los temas a partir del capítulo III, con los resultados principales en el capítulo VII en donde de manera holográfica se hizo el cálculo de la entropía de entrelazamiento de un sistema en una teoría de campo conforme en 1+1 dimensiones al traducir el problema a un espacio anti de-Sitter en 2+1 dimensiones; de esta manera, se llegó al resultado obtenido por Ryu y Takayanagi (2006) al aplicar la llamada fórmula de Ryu y Takayanagi, que es análoga a la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un hoyo negro. La entropía de entrelazamiento se calculó para temperatura finita y se comprobó que el resultado obtenido de forma holográfica concuerda con el resultado obtenido de forma directa por Calabrese y Cardy (2004).

# I. INTRODUCCIÓN

El mundo cuántico es un lugar extraño, ya que en él suceden cosas que van en contra del sentido común, como el efecto túnel o la incertidumbre. Sin embargo, de todas las cosas extrañas en este mundo cuántico, la mayor diferencia que hay respecto a nociones clásicas es el concepto de entrelazamiento. Schrödinger elegantemente capturó la clave del asunto cuando dijo: “*El mejor conocimiento de un todo no necesariamente incluye el mejor conocimiento posible de las partes*”. Esto significa que incluso si tuviéramos un conocimiento completo de todo un sistema, aún seríamos incapaces de predecir el comportamiento de pequeñas porciones del mismo. Grandes científicos como Einstein se dieron cuenta de este fenómeno y lo encontraron inquietante, lo cual los llevó a declarar que algo crucial debía faltar en la mecánica cuántica. Sin embargo, el tiempo y muchas pruebas científicas han demostrado que la mecánica cuántica es una teoría válida, y junto a esta, el entrelazamiento.

El entrelazamiento cuántico es una propiedad esencial de los sistemas cuánticos. La entropía de entrelazamiento es una medida de cuánto están entrelazadas diversas partes diferentes de un sistema cuántico. Calabrese y Cardy (2004) demostraron que la entropía de entrelazamiento en teorías de campos conformes (CFT, por sus siglas en inglés) en (1+1) dimensiones puede ser calculada al utilizar las restricciones impuestas por simetrías conformes sobre las funciones de dos puntos, así como propiedades de transformación del tensor de energía-momentum.

En años recientes, ha habido un interés renovado en el estudio de la entropía de entrelazamiento por parte de científicos que trabajan en holografía y gravedad. Esto es gracias a la reformulación del problema a la luz de la correspondencia AdS/CFT, donde AdS se refiere al espacio anti-de Sitter, que es un espacio de máxima simetría y solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa. La primera materialización concreta del principio holográfico se dio en el contexto de la teoría de cuerdas y ha dado lugar a una cantidad de resultados interesantes; por ejemplo, la conjetura de Maldacena o correspondencia AdS/CFT, relaciona sistemas que son distintos en muchos aspectos al brindar relaciones precisas entre cantidades y fenómenos en un sistema a aquellos en el otro. El problema de calcular la entropía de entrelazamiento para las CFT ha sido reformulado geoméricamente a la luz del principio holográfico, por Ryu y Takayanagi (2006). Esto es un indicio de que la entropía de entrelazamiento es una valiosa conexión entre la gravedad y la física de la materia condensada.

La correspondencia  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  es el ejemplo mejor entendido de la dualidad gauge/gravedad. Uno de los beneficios de trabajar en tres dimensiones es que se tiene muchísimo control analítico y es posible hacer declaraciones exactas. En particular, resultados en la entropía de entrelazamiento holográfica pueden ser verificados explícitamente al conectarlos a resultados en teorías cuánticas de campo (QFT).

El objetivo general de este trabajo fue calcular la entropía de entrelazamiento en un campo conforme a temperatura finita de manera holográfica. De manera específica, se tiene como objetivo presentar un resumen completo, mas no exhaustivo, correspondiente a los temas de Holografía, Entrelazamiento cuántico y hoyos negros, con un enfoque especial en la entropía de entrelazamiento de sistemas cuánticos en una CFT en 1+1 dimensiones y su reformulación en un espacio AdS en 2+1 dimensiones, a la vez que replico cálculos previamente obtenidos como parte del desarrollo del trabajo.

El presente trabajo de graduación está estructurado de manera que en el capítulo II presento un resumen con la información necesaria sobre relatividad general para el consiguiente desarrollo de los demás capítulos. A partir del capítulo III del presente trabajo, expongo cálculos realizados por mi cuenta pero que replican resultados previamente obtenidos, a la vez que lo complemento con información y descripciones recopiladas a partir de varias fuentes de información presentadas en la bibliografía. El resultado más importante es la obtención de la fórmula de Ryu y Takayanagi para la entropía de entrelazamiento de un sistema en una CFT de dos dimensiones a partir de su reformulación en un espacio AdS de tres dimensiones, el cual es presentado en el capítulo VII. Por último, se encuentra un Apéndice con información básica sobre geometría diferencial, esencial para la comprensión de los aspectos de la relatividad general y otras partes del trabajo.

## II. RELATIVIDAD GENERAL: GRAVEDAD COMO GEOMETRÍA

### A. Principios de Relatividad General

La relatividad general describe una de las características más universales que experimentamos: gravitación. La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales. La relatividad general busca describir la gravedad en términos de una estructura matemática elegante: la geometría diferencial del espacio-tiempo curvado. La importancia de esta teoría radica en que la física gravitacional es una ciencia de dos fronteras: es esencial a grandes escalas, ya que está directamente ligada a la Astrofísica y a la Cosmología; en las escalas más pequeñas, la gravedad juega su papel en la física cuántica y de partículas elementales, y es central en la búsqueda de una teoría unificadora de las interacciones (Hartle, 2003).

Los orígenes de la teoría de la relatividad general clásica se remontan a la revolución conceptual que hubo luego del desarrollo de la relatividad especial de Albert Einstein en 1905. Einstein notó que la ley de fuerza gravitacional de Newton era inconsistente con su teoría de relatividad especial ya que esta describía una interacción instantánea entre dos cuerpos. Dichas interacciones no son posibles en la teoría de Einstein ya que ninguna señal puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Esto daba indicios de que la teoría Newtoniana podría tratarse únicamente de una aproximación a una teoría más fundamental (Hartle, 2003).

En 1915, Einstein introdujo otra revolución conceptual al asegurar que el hecho que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitacional se debe a que la gravedad realmente es la expresión de la curvatura del espacio-tiempo en cuatro dimensiones. La masa de los objetos curva el espacio-tiempo en su vecindad, y todas las trayectorias que siguen los objetos que caen son “trayectorias rectas” (geodésicas) en este espacio-tiempo curvado. En pocas palabras, la gravedad es geometría (Hartle, 2003).

1. **El Principio de Equivalencia.** En el contexto de la relatividad general, lo que hace especial a la gravedad es el hecho que el campo dinámico que la genera es el tensor de métrica (ver Apéndice sobre Geometría Diferencial) que describe la curvatura del espacio-tiempo,

más que algún otro campo adicional que se propaga a través del espacio-tiempo. El principio que llevó a Einstein a considerar esta idea fue la universalidad de la interacción gravitacional, como lo formaliza el Principio de Equivalencia. Este principio viene en una variedad de formas, descritas a continuación (Carroll, 2004).

a. El Principio de Equivalencia Débil. El Principio de Equivalencia Débil (WEP, por sus siglas en inglés) indica que la masa inercial y la masa gravitacional de cualquier objeto son la misma. Pensemos en la mecánica Newtoniana para visualizar esto: la segunda ley de Newton indica que la fuerza ejercida sobre un objeto es proporcional a la aceleración que este experimenta, relación cuya constante de proporcionalidad es la masa inercial  $m_i$ , relacionada a la resistencia que uno siente al tratar de aplicar una fuerza de cualquier tipo:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}. \quad (\text{II.1})$$

Por otro lado, está la ley de gravitación de Newton, que indica que la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto es proporcional al gradiente de un campo escalar  $\Phi$ , conocido como el potencial gravitacional. La constante de proporcionalidad en este caso es lo que se denomina como masa gravitacional  $m_g$ :

$$\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \Phi. \quad (\text{II.2})$$

En vista de lo anterior,  $m_g$  es distinta a  $m_i$  pues es una cantidad específica a la fuerza gravitacional. Sin embargo, hace mucho tiempo Galileo demostró, al rodar bolas en planos inclinados, que la respuesta de la materia a la gravedad es universal; todo objeto cae a la misma razón en un campo gravitacional, sin importar su composición. En mecánica Newtoniana, esto quiere decir que

$$m_i = m_g \quad (\text{II.3})$$

Lo cual tiene como consecuencia de que el comportamiento de partículas de prueba en caída libre es universal, independiente de su masa; así

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi \quad (\text{II.4})$$

Las relaciones (II.3), (II.4) han sido verificadas experimentalmente con gran precisión con experimentos como el de Eötvös, el de Roll, Krotkov y Dicke en 1964, o el de Braginsky y Panov (1971). Esto sugiere una formulación equivalente del WEP: existe una clase de trayectorias preferidas a través del espacio-tiempo, conocidas como trayectorias inerciales, sobre las que las partículas no aceleradas (sujetas únicamente a la gravedad) viajan. Por otra parte, toda partícula tiene una carga gravitacional idéntica (Carroll, 2004).

Es posible formular el WEP al imaginar una situación en la que una persona que está en una caja sellada, sin posibilidad de observar el mundo exterior, hace experimentos que involucran el movimiento de partículas de prueba, como medir el campo gravitacional local. Esta persona obtendría diferentes resultados si la caja estuviera en la luna o en Júpiter a lo que obtendría en la Tierra. Pero los resultados serían distintos también si la caja estuviera acelerando a velocidad constante, pues cambiaría la aceleración de partículas en caída libre respecto a la caja. El WEP implica que no hay forma de diferenciar los efectos de un campo gravitacional de los efectos de estar en un marco uniformemente acelerado si solo se observa el comportamiento de partículas en caída libre (Carroll, 2004).

Siendo cuidadosos, debemos limitar la afirmación anterior sobre la imposibilidad de distinguir la gravedad de la aceleración uniforme al restringir nuestra atención a regiones pequeñas del espacio-tiempo". Si la caja sellada fuera lo suficientemente grande, el campo gravitacional cambiaría de lugar a lugar de una forma observable (como inhomogeneidades en el campo gravitacional que causarían fuerzas de marea), mientras que los efectos de algún otro tipo de aceleración serían siempre en la misma dirección. Es decir, a escalas grandes, sí es posible hacer la diferencia entre un campo gravitacional y un marco acelerado. De esta manera, es posible formular el WEP de la siguiente manera: el movimiento de partículas en caída libre es el mismo en un campo gravitacional y en un marco uniformemente acelerado, en regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas (Carroll, 2004).

b. El Principio de Equivalencia de Einstein. Einstein consideró generalizar el WEP a algo más inclusivo que considerar únicamente experimentos sobre movimiento de partículas de prueba. De esta manera, él extrapola la idea a lo que se conoce como el Principio de Equivalencia de Einstein (EEP, por sus siglas en inglés): en regiones del espacio-tiempo lo suficientemente pequeñas, las leyes de la física se reducen a aquellas de la relatividad especial, por lo que es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional por medio de experimentos locales (Carroll, 2004).

Es el EEP el cual sugiere la atribución de la acción de la gravedad a la curvatura del espacio-tiempo. En relatividad especial, los marcos inerciales juegan un papel prominente: a pesar que no es posible determinar algún marco de referencia como únicamente en reposo, es posible considerar una familia de marcos que no están acelerados (inerciales). Por otro lado, el EEP implica que la gravedad es inescapable; no hay tal cosa como un objeto gravitacionalmente neutro respecto al cual se pueda medir la aceleración debida a la gravedad. En cambio, tiene más sentido definir un

objeto en caída libre como no acelerado. De esta forma, se acepta la idea de que la gravedad no es una fuerza ya que esta no lleva a una aceleración, pues la definición de cero aceleración se refiere a moverse libremente en presencia de algún campo gravitacional (Carroll, 2004).

Debido a la geometría del espacio-tiempo, en esta teoría no es posible construir un marco inercial que se expanda a través de todo el espacio-tiempo, pero sí es posible definir marcos de referencia localmente inerciales, los cuales siguen el movimiento de partículas individuales en caída libre en regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas. Sin embargo, este enfoque limita ciertas cosas, como por ejemplo hablar con confianza sobre la velocidad relativa a un observador de un objeto lejano, ya que los marcos de referencia apropiados al objeto y al observador son completamente diferentes (Carroll, 2004).

Por lo anterior, es necesario invocar estructuras matemáticas distintas en las que las teorías físicas sean consistentes con las afirmaciones anteriores sobre la gravedad. La estructura matemática apropiada para describir la curvatura del espacio-tiempo es la de una variedad diferenciable: esencialmente, es un tipo de conjunto que localmente parece un espacio plano, pero que globalmente puede tener una geometría muy diferente (lo cual concuerda con el hecho que en regiones suficientemente pequeñas, las leyes de la física se reducen al caso de la relatividad especial, que es una teoría en un espacio tiempo plano). A partir de esta propuesta, es posible derivar ecuaciones y consecuencias que realmente se ajustan a la descripción del mundo real (por ejemplo, el caso del corrimiento al rojo -redshift- gravitacional) (Carroll, 2004).

Con lo anterior, nos damos cuenta que la teoría de la relatividad general se vale de las herramientas provistas por la geometría diferencial para la descripción matemática de los fenómenos físicos. De esta forma, los conceptos y notaciones presentados en el Apéndice serán de gran utilidad de ahora en adelante y es importante tenerlos siempre presentes.

**2. Física en el espacio-tiempo curvado.** La física de la gravedad comprende dos piezas: cómo el campo gravitacional influencia el comportamiento de la materia, y como la materia determina el campo gravitacional. En gravedad Newtoniana, estos dos elementos consisten en la expresión de la aceleración de un cuerpo en un potencial gravitacional (II.4) y la ecuación diferencial de Poisson para este potencial en términos de la densidad de materia  $\rho$  y la constante gravitacional de Newton  $G$ :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{II.5}$$

De forma análoga, en relatividad general se describe cómo la curvatura del espacio-tiempo actúa

sobre la materia para manifestarse como gravedad, y cómo la energía y el momentum influencia el espacio-tiempo para crear curvatura. El siguiente enfoque consiste en empezar con principios físicos básicos e intentar argumentar que estos llevan naturalmente a una teoría física casi única.

Recordemos que el EEP surgió de la idea de universalidad de la gravedad; esta afecta a todas las formas de energía-momentum de la misma manera. Lo anterior llevó a Einstein a proponer que lo que experimentamos como gravedad es descrita más adecuadamente como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, que es una característica fundamental del espacio en el que los campos de materia se propagan. A la vez, la identificación del espacio-tiempo como una variedad curvada está apoyada por la similitud entre la indetectabilidad de la gravedad en regiones locales y nuestra habilidad de encontrar coordenadas localmente inerciales ( $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ,  $\partial_{\hat{\rho}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$  en un punto  $p$ ) en una variedad.

Lo mejor de todo es que esta filosofía abstracta se traduce directamente a una receta simple para generalizar las leyes de la física al contexto de los espacio-tiempo curvados, conocida como **el principio de acoplamiento mínimo**. Esta receta se resume de la siguiente forma:

1. Tomar una ley de la Física válida en coordenadas inerciales en un espacio-tiempo plano.
2. Escribir esa ley en una forma invariante ante cambio de coordenadas (es decir, en forma tensorial).
3. Aseverar que la ley resultante se mantiene cierta en el espacio-tiempo curvado.

Operacionalmente, esta receta consiste en tomar una ley aceptada en un espacio plano y reemplazar la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por una métrica más general  $g_{\mu\nu}$ , y reemplazar las derivadas parciales  $\partial_{\mu}$  por derivadas covariantes  $\nabla_{\mu}$ . (Carroll, 2004)

**3. Conos de luz y causalidad.** La distancia en el espacio-tiempo entre un punto  $p$  en  $x^{\alpha}$  y puntos cercanos puede ser calculada en las coordenadas indicadas por  $g_{\mu\nu}$  o en las coordenadas del marco inercial local. El hecho que localmente se tiene un marco inercial en un espacio plano también permite que la relatividad general herede localmente la estructura de los conos de luz de la relatividad especial. Los puntos separados de  $p$  por intervalos infinitesimales  $dx^{\alpha}$  pueden tener una separación temporal (timelike), nula (null) o espacial (spacelike)

$$\begin{aligned}
 ds^2 < 0 & \quad \text{separación timelike} \\
 ds^2 = 0 & \quad \text{separación nula} \\
 ds^2 > 0 & \quad \text{separación spacelike.}
 \end{aligned}
 \tag{II.6}$$

Los rayos de luz se mueven a lo largo de curvas nulas en el espacio-tiempo. La familia de direcciones nulas que emergen de, o convergen a, un punto  $p$  abarcan los conos de luz futuros y pasados locales en ese punto de la misma forma que lo hacían en relatividad especial.

Las partículas con masa se mueven en curvas timelike que pueden ser especificadas paramétricamente por cuatro funciones  $x^\alpha(\tau)$ . En espacio-tiempo curvado, la distancia entre un punto A y un punto B a lo largo de una curva timelike está dada por la generalización

$$\tau_{AB} = \int_A^B [-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \quad (\text{II.7})$$

donde la integral es a lo largo de la línea de universo (*world line*, en inglés). Un reloj que se mueva a lo largo de esta curva medirá la distancia  $\tau$ , por lo que a esta también se le llama *tiempo propio* (similar a relatividad especial). Una línea de universo temporal (*timelike world line*) está situada dentro del cono de luz local en todo punto a lo largo de su trayectoria; esto quiere decir que la partícula se mueve menos que la velocidad de la luz en todo punto.

En resumen, la estructura de los conos de luz *locales* de la relatividad general es la misma que la de los conos de luz del espacio-tiempo plano. Sin embargo, el arreglo global de los conos de luz (denominada la estructura causal del espacio-tiempo) puede tener propiedades interesantes. (Hartle, 2003)

## B. Ecuaciones de Einstein-Hilbert

Así como las ecuaciones de Maxwell gobiernan cómo los campos eléctricos y magnéticos responden a cargas y corrientes, las ecuaciones de campo de Einstein (EFE por sus siglas en inglés), o ecuaciones de Einstein-Hilbert, gobiernan cómo la métrica responde a la energía y momentum.

1. **Acción de Einstein-Hilbert.** Es posible deducir las EFE a partir de la acción de Einstein-Hilbert y el principio de mínima acción. La siguiente deducción es la que presenta Carroll (2004): Consideremos una teoría de campo en la cual las variables dinámicas son un conjunto de campos  $\Phi^i(x)$ . La solución clásica a dicha teoría consiste en los puntos críticos de la acción  $S$ , generalmente expresada como una integral sobre el espacio  $n$ -dimensional de una densidad lagrangiana

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla_\mu \Phi^i) d^n x. \quad (\text{II.8})$$

Nótese que ahora el Lagrangiano es una función de los campos y sus derivadas covariantes, como es apropiado en un espacio curvo; además, ya que  $\mathcal{L}$  es una densidad,  $d^n x$  también lo es ya

que el producto de estos dos debe ser un tensor bien definido. Se suele escribir

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}} \quad (\text{II.9})$$

donde  $\hat{\mathcal{L}}$  es un escalar. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas utilizan el escalar  $\hat{\mathcal{L}}$ , y son las mismas que las ecuaciones en el espacio plano, solo que con derivadas covariantes en vez de parciales:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0 \quad (\text{II.10})$$

La variable dinámica para la acción en relatividad general es la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Ya que la métrica puede ser puesta en su forma canónica y sus primeras derivadas iguales a cero en cualquier punto (marcos inerciales localmente planos), cualquier escalar no trivial que obtengamos de la métrica debe involucrar por lo menos segundas derivadas de esta. El tensor de Riemann cumple con estos requisitos y el único escalar independiente que se puede construir de este tensor es el escalar de Ricci  $R$ . Además, cualquier tensor no trivial hecho a partir de productos de la métrica y sus primeras y segundas derivadas puede ser expresado en términos de la métrica y el tensor de Riemann. Por lo tanto, el *único* escalar independiente construido de la métrica, que no tiene derivadas más allá de segundo orden, es el escalar de Ricci. David Hilbert se dio cuenta que la elección más simple para un Lagrangiano involucraría a este escalar y propuso

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x \quad (\text{II.11})$$

conocida como la acción de Einstein-Hilbert. Las ecuaciones de movimiento deberían ser formuladas a partir de variar la acción con respecto a la métrica. De hecho, es más conveniente variar la acción con respecto a la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ :

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad (\text{II.12})$$

por lo que puntos estacionarios con respecto a variaciones en  $g^{\mu\nu}$  son equivalentes a esos con respecto a variaciones en  $g_{\mu\nu}$ . Recordando que  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ , tenemos

$$\delta S_H = (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3 \quad (\text{II.13})$$

donde

$$\begin{aligned} (\delta S)_1 &= \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ (\delta S)_2 &= \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$(\delta S)_3 = \int d^n x R \delta\sqrt{-g}.$$

A primer orden en la variación

$$\delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda (\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}).$$

Así, la contribución del primér término de (II.13) a  $\delta S$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} (\delta S)_1 &= \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})]. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Ahora,  $\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  en términos de  $\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta})],$$

de manera que (II.14)

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda})]. \quad (\text{II.15})$$

Pero (II.15) es una integral respecto a un elemento de volumen de la divergencia covariante de un vector, por lo que por el teorema de Stokes, esto es igual a la contribución de la frontera en el infinito, la cual puede fijarse igual a cero al hacer que la variación se anule en el infinito. Así, este término no contribuye a la variación total de la acción.

Para  $(\delta S)_3$ , utilizamos el hecho que  $\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$  para  $M$  una matriz cuadrada con determinante distinto de cero. La variación de esta identidad da

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) \quad (\text{II.16})$$

Para  $M = g_{\mu\nu}$ , (II.16) da

$$\begin{aligned} \delta g &= g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \\ &= -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{II.17})$$

Por lo que, al variar la acción

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}$$

De donde se obtiene la ecuación de Einstein en el vacío:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.18})$$

Derivamos la ecuación de Einstein “en el vacío” porque solo incluimos la parte gravitacional de la acción, sin tomar en cuenta términos adicionales para los campos de materia. Para obtener la ecuación de campo que no necesariamente corresponde al vacío, debemos considerar una acción de la forma

$$S = \frac{1}{2k} S_H + S_M$$

donde  $k$  es una constante de normalización y  $S_M$  es la acción para la materia. Siguiendo un procedimiento similar

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2k} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0.$$

Definimos el tensor de energía-momentum como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{II.19})$$

lo cual implica que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}.$$

Al considerar el límite de campo débil ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ), es posible encontrar que  $k = 8\pi G$ , con  $G$  la constante de gravitación Newtoniana. Por lo tanto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{II.20})$$

O, equivalentemente

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{II.21})$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y es igual al lado izquierdo de (II.20).

2. **Propiedades de las EFE.** Las ecuaciones de Einstein-Hilbert pueden pensarse como un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden para el tensor de métrica. Podría pensarse que hay diez ecuaciones independientes ya que ambos lados son tensores simétricos de dos índices, lo cual se ve adecuado para las diez funciones desconocidas de las componentes de la métrica. Sin embargo, la identidad de Bianchi  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$  representa cuatro restricciones sobre  $R_{\mu\nu}(x)$ , por lo que hay solo seis ecuaciones realmente independientes. De hecho, esta identidad implica la conservación covariante del tensor de energía-momentum  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Además de lo anterior, tenemos cuatro transformaciones de coordenadas generales  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x^\mu)$ . Esto quiere decir que hay cuatro grados de libertad no físicos (dependientes de las coordenadas) en  $g_{\mu\nu}$ , y se espera que las ecuaciones de Einstein solo restrinjan los seis grados de libertad independientes de las coordenadas.

Como ecuaciones diferenciales, las EFE son extremadamente complicadas: el escalar y tensor de Ricci son contracciones del tensor de Riemann, que involucra derivadas y productos de los símbolos de Christoffel, los cuales involucran la métrica inversa y derivadas de la métrica. Además, el tensor de energía-momentum en general involucra a la métrica también. Las ecuaciones son no lineales, de forma que dos soluciones conocidas no pueden ser superpuestas para encontrar una tercera. Estos son indicios de las dificultades para la resolución de estas ecuaciones, por lo que se hace necesario hacer suposiciones que simplifiquen el problema. Aparte del hecho que estas ecuaciones son complicadas y no lineales, vale la pena pensar en lo que significan físicamente: relacionan la distribución de energía y momentum a componentes del tensor de curvatura.

Las componentes que no están incluidas en el tensor de Ricci están descritas por el tensor de Weyl

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{3}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R - g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} + g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}. \quad (\text{II.22})$$

El tensor de Ricci es la traza del tensor de Riemann, mientras que el tensor de Weyl describe las partes que no se incluyen en la traza, por lo que juntos estos dos tensores proveen una caracterización completa de la curvatura. Dada alguna distribución específica de energía-momentum, aún hay libertad para elegir la curvatura de Weyl, ya que no hay un análogo de las ecuaciones de Einstein para relacionar algebraicamente  $C_{\sigma\mu\nu}^\rho$  a  $T_{\mu\nu}$ . Pareciera que las componentes del tensor de Weyl no están restringidas. Sin embargo, la identidad de Bianchi  $\nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$  implica una relación diferencial para el tensor de Weyl de la forma

$$\nabla^\rho C_{\rho\sigma\mu\nu} = \nabla_{[\mu}R_{\nu]\sigma} + \frac{1}{6}g_{\sigma[\mu}\nabla_{\nu]}R \quad (\text{II.23})$$

O, por la relación entre el tensor y escalar de Ricci con el tensor de energía-momentum

$$\nabla^\rho C_{\rho\sigma\mu\nu} = 8\pi G \left( \nabla_{[\mu} T_{\nu]\sigma} + \frac{1}{3} g_{\sigma[\mu} \nabla_{\nu]} T \right). \quad (\text{II.24})$$

Lo cual indica que el tensor de Weyl y el tensor de energía-momentum están relacionados por una ecuación diferencial de primer orden. Habrá un número de soluciones posibles para una distribución de energía-momentum dada, cada una especificada por ciertas condiciones de frontera.

Por último, vale la pena mencionar una situación inquietante: la conocida irreconciliación entre la relatividad general con la mecánica cuántica. La relatividad general es una teoría de campo clásica: la variable dinámica es un campo definido en un espacio-tiempo, y cantidades invariantes ante coordenadas generadas a partir de este campo pueden en principio ser especificadas y medidas hasta una precisión arbitraria. En el caso de otras teorías de campo, como el electromagnetismo, hay procedimientos conocidos para empezar con la teoría clásica y cuantizarla, con el fin de obtener la dinámica de operadores que actúan sobre las funciones de onda en un espacio de Hilbert. Para la relatividad general, el procedimiento usual presenta dificultades técnicas y conceptuales. Una de estas dificultades es que la relatividad general no es renormalizable en la forma en que el modelo estándar de partículas lo es; al considerar efectos cuánticos de mayor orden, aparecen valores infinitos que no pueden ser absorbidos por una cantidad finita de parámetros. La no renormalizabilidad de la teoría no quiere decir que esta esté mal, pero sugiere fuertemente que debe ser tomada seriamente hasta ciertas escalas de energía. (Carroll, 2004)

Afortunadamente, las escalas a las que se espera que los efectos de la gravedad cuántica sean notables están lejos de la experiencia diaria o de las condiciones que se pueden producir en cualquier laboratorio actual. La gravedad cuántica no se vuelve importante hasta que se consideran masas mayores que la masa de Planck, tiempos más cortos que los del tiempo de Planck, longitudes más pequeñas que la longitud de Planck, o energías mayores que la energía de Planck. Estas cantidades están dadas por

$$\begin{aligned} \text{masa de Planck} \quad m_p &= \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.18 * 10^{-5} g \\ \text{longitud de Planck} \quad l_p &= \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.62 * 10^{-33} cm \\ \text{tiempo de Planck} \quad t_p &= \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5.39 * 10^{-44} s \\ \text{energía de Planck} \quad E_p &= \left( \frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} = 1.22 * 10^{19} GeV \end{aligned}$$

## C. Geodésicas

Una geodésica es una generalización en un espacio curvado de la noción de una línea recta en espacio Euclideo, ya que en este espacio la recta es la distancia más corta entre dos puntos. Pero hay otra definición para geodésicas: es un camino que transporta paralelamente su propio vector tangente. (Carroll, 2004)

1. Transporte paralelo y geodésicas. De acuerdo a Carroll (2004), el transporte paralelo debe entenderse como la generalización en un espacio curvado del concepto de “mantener un vector constante conforme lo movemos a lo largo de un camino. Para entender mejor este concepto matemáticamente, se define la derivada direccional covariante

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (\text{II.25})$$

que es un mapeo, definida únicamente a lo largo de la curva  $x^\mu(\lambda)$ , de tensores  $(k, l)$  a tensores  $(k, l)$ . Así, se define el transporte paralelo del tensor  $T$  a lo largo de  $x^\mu(\lambda)$  como el requerimiento de que la derivada covariante de  $T$  a lo largo de esta curva sea cero:

$$\left( \frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0 \quad (\text{II.26})$$

la cual es una ecuación tensorial bien definida, conocida como la ecuación de transporte paralelo. Para un vector, toma la forma

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0. \quad (\text{II.27})$$

Podemos pensar que (II.26) es una ecuación diferencial de primer orden que define un problema de valor inicial: dado un tensor en cierto punto sobre una curva, hay una continuación única del tensor hacia otros puntos a lo largo de la curva tal que esa continuación resuelve (II.26).

La noción de transporte paralelo es dependiente de la conexión, y diferentes conexiones llevan a diferentes respuestas. Si la conexión es compatible con la métrica, la métrica siempre es paralelamente transportada con respecto a ella. De hecho, solo cuando la conexión es la de Christoffel es posible obtener una geodésica acorde a la definición dada.

Considerando la definición de geodésica como una curva a lo largo de la cual el vector tangente es paralelamente transportado, y considerando que el vector tangente a un camino  $x^\mu(\lambda)$  es  $dx^\mu/d\lambda$ , debe cumplirse la condición

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0$$

o alternativamente

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (\text{II.28})$$

conocida como la ecuación de las geodésicas. Es posible deducir (II.28) a partir de la definición de la distancia más corta y mediante el uso del cálculo de variaciones. Consideremos una trayectoria timelike, por lo que consideramos el tiempo propio funcional

$$\tau = \int \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (\text{II.29})$$

Esta integral es de la forma  $\tau = \int \sqrt{-f} d\lambda$ . Así, la variación

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \int \delta\sqrt{-f} d\lambda \\ &= - \int \frac{1}{2} (-f)^{-1/2} \delta f d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Si especificamos que el parámetro  $\lambda$  es el tiempo propio  $\tau$ , el vector tangente es la cuatro velocidad  $U^\mu$ . Así, por la condición (II.6) para caminos timelike

$$f = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1.$$

De manera que (II.30)

$$\delta\tau = -\frac{1}{2} \int \delta f d\tau. \quad (\text{II.31})$$

Los puntos estacionarios de (II.29) son equivalentes a puntos estacionarios (con parametrización fija) de la integral

$$I = \frac{1}{2} \int f d\tau = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau. \quad (\text{II.32})$$

La variación de esta acción hasta términos de primer orden en  $\delta x^\mu$  es

$$\delta I = \frac{1}{2} \int \left[ \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \right] d\tau \quad (\text{II.33})$$

donde los últimos dos términos de la integral pueden ser integrados por partes; por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left[ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \right] d\tau &= -\frac{1}{2} \int \left[ g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int \left[ g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau. \end{aligned}$$

Al considerar que los términos de frontera se hacen cero al considerar que la variación en los puntos

límite del camino se hacen cero. Así, (II.33)

$$\delta I = - \int \left[ g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\sigma d\tau. \quad (\text{II.34})$$

De acuerdo al principio de variación, estamos buscando puntos estacionarios donde  $\delta I$  se anule para cualquier variación  $\delta x^\sigma$ , lo cual implica

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

que, al multiplicar por  $g^{\rho\sigma}$

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{II.35})$$

que concuerda con (II.28). Esto indica que, en una variedad con métrica, los extremos de la longitud funcional son curvas que transportan paralelamente su vector tangente con respecto a la conexión de Christoffel asociada a la métrica. (Carroll, 2004)

**2. Propiedades de las geodésicas.** En relatividad general, las geodésicas son trayectorias seguidas por partículas de prueba (cuerpos que no influyen la geometría a través de la cual se mueven - una idealización) no aceleradas. Esta ecuación puede pensarse como una generalización en espacios curvados de la segunda ley de Newton, para el caso en que  $\mathbf{f} = 0$ . También es posible introducir fuerzas al agregar términos al lado derecho de (II.28). Por ejemplo,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = \frac{q}{m} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

describe la fuerza de Lorentz sobre una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ .

En cuanto a la parametrización de la curva geodésica, para el tiempo propio es posible una transformación de la forma

$$\tau \rightarrow \lambda = a\tau + b \quad (\text{II.36})$$

para  $a, b$  constantes. Esta transformación deja la ecuación de las geodésicas invariante. Cualquier parámetro relacionado al tiempo propio de esta manera se denomina un parámetro afín. Exigir que el vector tangente sea transportado paralelamente de hecho restringe la parametrización de la curva a una parametrización relacionada al tiempo propio por (II.36). Por supuesto, es posible utilizar cualquier otra parametrización, pero la ecuación (II.28) no se cumpliría. De forma más general, se satisfaría

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\alpha} = f(\alpha) \frac{dx^\mu}{d\alpha} \quad (\text{II.37})$$

para algún parámetro  $\alpha(\lambda)$ , donde  $f(\alpha)$  está relacionada al parámetro afín por

$$f(\alpha) = - \left( \frac{d^2 \alpha}{d\lambda^2} \right) \left( \frac{d\alpha}{d\lambda} \right)^{-2}. \quad (\text{II.38})$$

Para caminos timelike, la ecuación de las geodésicas puede ser escrita en términos de la cuatro-velocidad  $U^\mu = dx^\mu/d\tau$  como

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0. \quad (\text{II.39})$$

Así como en términos del cuatro-momentum  $p^\mu = mU^\mu$

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0. \quad (\text{II.40})$$

Para trayectorias nulas, el tiempo propio se anula y  $\tau$  ya no es un parámetro afín apropiado. Sin embargo, aún es perfectamente válido analizar si un parámetro cumple con (II.28). Si una trayectoria nula es una geodésica para un parámetro  $\lambda$ , también lo será para un parámetro afín de la forma  $a\lambda + b$ . No obstante, no hay una elección preferida entre esos parámetros, como sucede con el tiempo propio para curvas timelike. Una vez se elige un parámetro en un punto sobre la curva, hay una única continuación para el resto de la curva si se quiere resolver la ecuación de las geodésicas. Es conveniente elegir la normalización del parámetro afín  $\lambda$  a lo largo de la geodésica nula tal que

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (\text{II.41})$$

A diferencia de curvas timelike donde esta derivada es el momentum por unidad de masa. Así, un observador con cuatro-velocidad  $U^\mu$  mide la energía de la partícula (o equivalentemente, la frecuencia) como

$$E = -p_\mu U^\mu. \quad (\text{II.42})$$

Una propiedad importante de las geodésicas en un espacio-tiempo con métrica Lorentziana es que el carácter de las geodésicas, relativo a la conexión compatible con la métrica, nunca cambia. Esto es simplemente porque el transporte paralelo preserva el producto interno, y el carácter está determinado por el producto interno del vector tangente consigo mismo de acuerdo a (II.6).

En un espacio-tiempo, es posible que dos puntos no estén conectados por alguna geodésica (por ejemplo, en el espacio anti-de Sitter, que será presentado en el siguiente capítulo). Esto indica que la geodésica se encontró con una singularidad, la cual se considera como "el borde de la variedad". Las variedades que tiene tales singularidades son conocidas como incompletas geodésicamente. (Carroll, 2004)

## D. El hoyo negro de Schwarzschild

La aplicación más natural de una teoría de gravedad es para un campo gravitacional con simetría esférica. Esta sería la situación relevante para describir, por ejemplo, el campo generado por la Tierra o el Sol (aproximadamente). Por lo tanto, es importante el enfoque en soluciones externas (espacio vacío que rodea a un cuerpo masivo), ya que la comprensión del movimiento de partículas de prueba afuera de un objeto es más fácil y funcional que considerar el interior relativamente inaccesible. Además, la solución a este problema lleva a describir fenómenos de gran interés para físicos y astrónomos: los hoyos negros.

Empezamos con el caso de hoyos negros estáticos, no cargados y con simetría esférica más simple, descrito por la métrica de Schwarzschild. Esta está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{II.43})$$

donde  $d\Omega^2$  es la métrica de la 2-esfera unitaria  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . La constante  $M$  es interpretada como la masa del objeto que genera el campo gravitacional. (Carroll, 2004)

La coordenada  $t$  es llamada el tiempo de Schwarzschild, y representa el tiempo medido por un reloj estándar en reposo en la infinitud espacial. La coordenada  $r$  es llamada la coordenada radial de Schwarzschild; no representa la distancia propia del origen, pero está definida de tal forma que el área de la 2-esfera en  $r$  sea  $4\pi r^2$ . Las coordenadas  $\theta, \phi$  son los ángulos polar y azimutal usuales. (Susskind y Lindesay, 2005)

**1. Singularidades.** Nótese que ciertos coeficientes de (II.43) se vuelven infinitos en  $r = 0$  y  $r = GM$ . Por supuesto, estos coeficientes son dependientes de las coordenadas, por lo que es importante analizar si estas singularidades resultan de problemas con el sistema de coordenadas o de características inherentes a la variedad. Utilizaremos un criterio simple para indicar que algo de la geometría del problema está mal: cuando la curvatura se vuelve infinita. Esta es medida por el tensor de Riemann, por lo cual es difícil decir cuando este toma valores infinitos ya que sus componentes dependen de las coordenadas. Pero a partir de este tensor, es posible construir cantidades escalares que nos sean de más utilidad, ya que los escalares son independientes de las coordenadas.

Uno de los primeros escalares a tomar en cuenta es el de Ricci  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . También podemos construir escalares de mayor orden como  $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  o  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Si uno de estos escalares (pero

no necesariamente todos) se vuelve infinito conforme tiende a algún punto, ese punto es una singularidad de la curvatura. También es importante revisar que ese punto no está infinitamente alejado, es decir, que puede ser alcanzado al viajar una distancia finita a lo largo de una curva. Para la métrica de Schwarzschild,

$$\begin{aligned} R &= 0 \\ R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= 0 \\ R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{48G^2M^2}{r^6} \end{aligned}$$

de manera que el tercer escalar en  $r = 2GM$  tiene un valor de  $\frac{3}{4G^4M^4}$  (valor finit). Este escalar también indica que hay una verdadera singularidad característica del espacio-tiempo en  $r = 0$ .  $r = 2GM$  se denomina el radio de Schwarzschild. El hecho que los escalares no divergen para este valor indica que simplemente se escogió un mal sistema de coordenadas, por lo que es aconsejable utilizar un sistema más apropiado donde la superficie  $r = 2GM$  tenga un buen comportamiento. A pesar de ello, esta superficie es interesante ya que marca lo que se conoce como el horizonte de eventos de un hoyo negro. (Carroll, 2004)

**2. Horizonte de eventos.** Tentativamente, definiremos el horizonte de eventos como el lugar donde  $g_{00}$  se anula. En el horizonte  $r = 2GM$ , notamos que  $g_{rr}$  se vuelve singular, pero ya notamos que esto es debido a las coordenadas utilizadas. Por lo tanto, un pequeño laboratorio en caída libre cerca del radio de Schwarzschild no mediría nada inusual. Aún así, el horizonte es globalmente especial: para un observador distante del horizonte, este representa la frontera del mundo, o por lo menos esa parte que pueden influenciar sus detectores.

Para analizar esta superficie, consideramos a un explorador enviado hacia el horizonte desde muy lejos. Por simplicidad, consideramos a un observador en caída libre radial arrojado desde un punto  $r = R$ , desde el reposo. La trayectoria del observador en forma paramétrica está dada por

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) \\ \tau &= \frac{R}{2} \left( \frac{R}{2GM} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta) \\ t &= \left( \frac{R}{2} + 2GM \right) \left( \frac{R}{2GM} - 1 \right)^{1/2} \eta + \frac{R}{2} \left( \frac{R}{2GM} - 1 \right)^{1/2} \sin \eta \\ &\quad + 2GM \ln \left[ \frac{\left( \frac{R}{2GM} - 1 \right)^{1/2} + \tan \frac{\eta}{2}}{\left( \frac{R}{2GM} - 1 \right)^{1/2} - \tan \frac{\eta}{2}} \right] \end{aligned} \tag{II.44}$$

para  $0 < \eta < \pi$ , donde  $\tau$  es el tiempo propio medido por el reloj del observador. Puede verse que el observador alcanza  $r = 0$  en un intervalo finito de tiempo

$$\tau = \frac{\pi}{2} R \left( \frac{R}{2GM} \right)^{1/2} \quad (\text{II.45})$$

Por lo que este tiempo propio es finito y menor que (II.45) cuando el observador cruza el horizonte de eventos. El observador no es sensible a las componentes de la métrica, pero sí sentirá las fuerzas de marea o las componentes de la curvatura. Defínase un marco ortonormal en el cual el observador está momentáneamente en reposo: construimos la base unitaria de vectores  $\hat{\tau}, \hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  tal que  $\hat{\tau}$  está orientada a lo largo del eje del tiempo instantáneo del observador, y  $\hat{\rho}$  apunta radialmente hacia afuera. Las componentes no nulas de la curvatura son

$$\begin{aligned} R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = -R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} = \frac{GM}{r^3} \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= -R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} = \frac{2GM}{r^3} \end{aligned}$$

De forma que, las componentes de la curvatura en el radio de Schwarzschild son finitas y del orden de

$$R(\text{horizonte}) \sim \frac{1}{G^2 M^2}$$

Para un valor grande de masa, el observador logrará pasar el horizonte a salvo. Por otro lado, las fuerzas de marea divergen conforme  $r \rightarrow 0$  donde está la verdadera singularidad, y la curvatura incrementa a tal punto que las leyes clásicas de la naturaleza fallan.

Consideremos ahora la historia del observador que cae desde el punto de vista de otro observador distante. Supongamos que el observador cayendo manda señales que son recibidas por el observador distante. La expresión (II.44) para  $t$  indica que atravesar el horizonte no ocurre en un tiempo de Schwarzschild finito, pues este valor en  $r = 2GM$  tiende a infinito. De esta manera, una señal que se origine en el horizonte no puede alcanzar ningún punto  $r > 2GM$ . Suponiendo que el observador que cae envía señales a una frecuencia  $\nu$  dada, el observador distante verá que la frecuencia de esas señales disminuye progresivamente conforme el otro observador se acerca al horizonte de eventos. Sobre el intervalo completo del tiempo de Schwarzschild, el observador distante registrará solo un número finito de pulsos enviados por el otro observador; a menos que el observador que envía las señales incremente la frecuencia de estas hasta infinito conforme se aproxima al horizonte, llegará un punto donde estas ya no llegarán al observador distante y se perderá la comunicación entre ambos. Los límites impuestos sobre la información que puede ser transmitida cerca del horizonte no son tan severos en física clásica como lo son en la teoría cuántica. De acuerdo a las leyes clásicas, el observador que cae puede utilizar una frecuencia portadora

arbitrariamente grande para enviar una cantidad de información arbitrariamente grande usando una energía arbitrariamente pequeña sin disturbar significativamente al agujero negro y su geometría. Por lo tanto, en principio, el observador distante puede obtener información acerca de la vecindad del horizonte y el sistema que cae hasta el punto de cruce del horizonte. Sin embargo, la mecánica cuántica requiere que para enviar un solo bit de información, es necesario un cuanto de energía. Conforme el observador se aproxima al horizonte, este cuanto debe tener mayor y mayor frecuencia, lo cual implica que el observador debe tener una gran cantidad de energía disponible. Esta energía tendrá una reacción sobre la geometría, perturbando a la misma cantidad que se busca medir. Luego de eso, ninguna información puede ser transmitida hacia el observador distante desde algún punto  $r < 2GM$ . (Susskind y Lindesay, 2005)

**3. Coordenada tortuga.** Un cambio en la coordenada radial mapea el horizonte a menos infinito de manera que la coordenada resultante cubre solo la región  $r > 2GM$ . Definimos la coordenada tortura  $r^*$  por

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (dr^*)^2 \quad (\text{II.46})$$

de manera que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) [-dt^2 + (dr^*)^2] + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{II.47})$$

El punto interesante de esto es que la parte radial-temporal de la métrica ahora tiene una forma particularmente simple, llamada *conformemente plana*. Un espacio es llamado conformemente plano si su métrica puede ser expresada de la forma

$$ds^2 = F(x) dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (\text{II.48})$$

con  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica de Minkowski usual. Cualquier espacio de dos dimensiones es conformemente plano, y una parte a través del espacio de Schwarzschild con  $\theta, \phi$  fijos no es excepción. En la ecuación (II.47) la métrica de tal parte es evidentemente conformemente plana. Por lo tanto, también es estática.

La coordenada tortuga  $r^*$  está dada explícitamente por

$$r^* = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right). \quad (\text{II.49})$$

De donde es evidente que  $r^* \rightarrow -\infty$  en el horizonte. (Susskind y Lindesay, 2005)

4. **Hoyos negros.** Como la coordenada tortuga no es viable para valores de  $r$  menores al radio de Schwarzschild (donde tenemos una superficie nula), lo mejor será definir coordenadas que están naturalmente adaptadas a las geodésicas nulas

$$\begin{aligned}v &= t + r^* \\u &= t - r^*\end{aligned}$$

donde las geodésicas nulas incidentes están caracterizadas por  $v$  constante, mientras que las salientes satisfacen  $u$  constante. Ahora, considérese regresar a la coordenada radial original  $r$ , pero reemplazando la coordenada  $t$  con la nueva coordenada  $v$ . Estas son conocidas como las coordenadas de Eddington-Finkelstein. En términos de estas coordenadas, la métrica es

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + (dv dr + dr dv) + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{II.50})$$

A pesar que  $g_{vv}$  se anula en  $r = 2GM$ , no hay una degeneración real; el determinante de la métrica es

$$g = -r^4 \sin^2 \theta$$

que es perfectamente regular en el valor del radio de Schwarzschild. Por lo tanto, la métrica es invertible y es posible ver de una vez por todas que  $r = 2GM$  es simplemente una singularidad de coordenadas en el sistema original  $(t, r, \theta, \phi)$ . En las coordenadas de Eddington-Finkelstein, la condición para curvas radiales nulas se resuelve por

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{(incidente)} \\ 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & \text{(saliente)} \end{cases}$$

En este sistema de coordenadas, los conos de luz se comportan bien en  $r = 2GM$ , y esta superficie es en un valor finito de las coordenadas. No hay ningún problema en seguir las trayectorias nulas o timelike cuando cruzan la superficie. Sin embargo, los conos de luz se inclinan, de tal forma que para  $r < 2GM$  todas las trayectorias orientadas al futuro están en la dirección de  $r$  decreciente. De tal forma que, conforme avanza el tiempo, disminuye el valor de  $r$  para una partícula incidente.

La superficie  $r = 2GM$ , a pesar de que es localmente regular, globalmente funciona como un punto de no retorno: cuando una partícula de prueba atraviesa esta superficie, nunca podrá regresar. Se define el **horizonte de eventos** como la superficie a partir de la cual las partículas no pueden escapar a la infinitud; en la métrica de Schwarzschild, este horizonte está localizado en el radio de Schwarzschild. El horizonte de eventos es una superficie nula, por lo que realmente es

la estructura causal del mismo espacio-tiempo la que hace imposible cruzar el horizonte en una dirección hacia afuera. Ya que nada puede escapar el horizonte de eventos, es imposible ver lo que hay adentro de este; por ello, el nombre **hoyo negro** (término inventado por John Wheeler). Un hoyo negro es una región del espacio-tiempo separada del infinito por un horizonte de eventos. (Carroll, 2004)

## E. Hoyos negros cargados: Reissner-Nordström

Ahora nos referimos a las soluciones exactas que representan hoyos negros eléctricamente cargados. La solución es conocida como la métrica de Reissner-Nordström (RN), dada por

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{II.51})$$

donde

$$\Delta = -\frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2}. \quad (\text{II.52})$$

En esta expresión,  $M$  se interpreta como la masa del hoyo negro,  $Q$  es la carga eléctrica total, y  $P$  es la carga magnética total. Los monopolos magnéticos nunca han sido observados en la naturaleza, pero eso no impide escribir la métrica que producirían si existieran. Los campos electromagnéticos asociados a esta solución están dados por

$$\begin{aligned} E_r &= F_{rt} = \frac{Q}{r^2} \\ B_r &= \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{P}{r^2}. \end{aligned}$$

La métrica RN tiene una singularidad de curvatura en  $r = 0$ . La estructura del horizonte es más complicada que en el caso de Schwarzschild. Bajo la sugerencia de usar  $g^{rr} = 0$  como un diagnóstico para localizar el horizonte de eventos al tener una selección adecuada de coordenadas (como en este caso), tenemos que la condición  $g^{rr} = \Delta = 0$  se cumple para

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - G(Q^2 + P^2)} \quad (\text{II.53})$$

que puede constituir en dos, una o cero soluciones, dependiendo en los valores relativos de  $GM^2$  y  $Q^2 + P^2$ . El caso en que  $GM^2 < Q^2 + P^2$  representa el de una singularidad desnuda, por lo que no se espera encontrar este caso en la naturaleza (por la hipótesis de censura cósmica). El caso  $GM^2 > Q^2 + P^2$  tampoco representa una situación real o de significancia científica, por lo que nos enfocaremos en  $GM^2 = Q^2 + P^2$ . Este caso es conocido como la solución extrema de Reissner-Nordström. Esta solución es frecuentemente examinada en estudios del papel de los ho-

yos negros en la gravedad cuántica. En teorías supersimétricas, estos hoyos negros pueden dejar intactas ciertas simetrías, lo que es una gran ayuda para los cálculos. Por otro lado, parece ser inestable ya que añadir solo un poco más de materia hará que se pierda la relación de igualdad entre los parámetros y se tenga el segundo caso.

Una propiedad fascinante de los hoyos negros extremos es que la masa está hasta cierto punto balanceada por la carga. Específicamente, dos hoyos negros extremos con carga del mismo signo se atraerán gravitacionalmente, pero se repelerán electromagnéticamente, y resulta que estos efectos precisamente se cancelan. De hecho, se pueden encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein-Maxwell acopladas que representan cualquier número de tales hoyos negros en una configuración estacionaria. Para ver esto, regresamos a la métrica de RN y consideramos únicamente cargas eléctricas más que magnéticas, por simplicidad. En condiciones extremas,  $GM^2 = Q^2$ , y la métrica (II.51) toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{II.54})$$

Al definir una coordenada radial trasladada

$$\rho = r - GM \quad (\text{II.55})$$

la métrica toma una forma isotrópica

$$ds^2 = -H^{-2}(\rho)dt^2 + H^2(\rho)[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2] \quad (\text{II.56})$$

donde

$$H(\rho) = 1 + \frac{GM}{\rho}.$$

Debido a que  $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2$  es la métrica plana en tres dimensiones espaciales, podemos reescribir (II.56) de la forma

$$ds^2 = -H^{-2}(\vec{x})dt^2 + H^2(\vec{x})[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (\text{II.57})$$

con

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{GM}{|\vec{x}|}.$$

En la coordenada  $r$  original, el campo eléctrico de la solución extrema puede expresarse en términos de un potencial vectorial  $A_\mu$  como

$$E_r = F_{rt} = \frac{Q}{r^2} = \partial_r A_0$$

donde la componente temporal del potencial vectorial es

$$A_0 = -\frac{Q}{r}$$

E imaginamos que las componentes espaciales se anulan ya que hicimos cero el campo magnético.

En la nueva coordenada  $\rho$  y con la condición  $Q^2 = GM^2$  esta se vuelve

$$A_0 = -\frac{\sqrt{GM}}{\rho + GM}$$

o equivalentemente

$$\sqrt{G}A_0 = H^{-1} - 1.$$

Para  $H$  independiente del tiempo, esta función satisface tanto las ecuaciones de Einstein como las de Maxwell si

$$\nabla^2 H = 0$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano. La ecuación anterior es simplemente la ecuación de Laplace, por lo que es posible escribir todas sus soluciones que son bien comportadas en el infinito, de la forma

$$H = 1 + \sum_{a=1}^N \frac{GM_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}$$

para algún conjunto de  $N$  puntos espaciales definidos por  $\vec{x}_a$ . Estos puntos describen la ubicación de  $N$  hoyos negros de RN extremos con masas  $M_a$  y cargas  $Q_a = \sqrt{GM_a}$ . Esta métrica multi-hoyos negros extremos es indudablemente una de las soluciones exactas más extraordinarias a las ecuaciones de Einstein. (Carroll, 2004)

### III. ESPACIO ANTI-DE SITTER

El espacio Anti-de Sitter (AdS) es una variedad de Lorentz de máxima simetría con curvatura escalar negativa constante. La siguiente analogía es útil: el espacio de Minkowski es al espacio euclidiano lo que el espacio AdS es al espacio hiperbólico. Las características anteriores y las que se presentan a continuación hacen que el espacio AdS sea ideal como trasfondo en el que se tiene una mejor comprensión del principio holográfico; el espacio AdS es un ejemplo de una clase especial de geometrías que tienen vectores de Killing temporales y que están cubiertas por superficies espaciales que satisfacen el límite holográfico (Susskind y Lindesay, 2005).

#### A. Coordenadas globales

Considérese el hiperboloide  $(d + 1)$ -dimensional

$$(X^0)^2 + (X^{d+1})^2 - \sum_{i=1}^d (X^i)^2 = \mathcal{R}^2 \quad (\text{III.1})$$

en un espacio plano  $(d + 2)$ -dimensional con la métrica

$$ds^2 = -dX^0 dX^0 - dX^{d+1} dX^{d+1} + \sum_{i=1}^d dX^i dX^i. \quad (\text{III.2})$$

Al hacer

$$\begin{aligned} X^0 &= \mathcal{R} \cosh \rho \cos \tau, & X^{d+1} &= \mathcal{R} \cosh \rho \sin \tau, \\ X^i &= \mathcal{R} \sinh \rho \omega_i, & i &= 1, \dots, d \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos \theta_1 \\ \omega_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ \omega_{d-1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{d-1} \\ \omega_d &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-1} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

con  $\theta_i \in [0, \pi)$  para  $i = 1, \dots, d-2$ , y  $\theta_{d-1} \in [0, 2\pi)$ . Nótese que  $\sum_i \omega_i^2 = 1$ :

$$\sum_{i=1}^d \omega_i^2 = \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 (\dots \sin^2 \theta_{d-2} (\cos^2 \theta_{d-1} + \sin^2 \theta_{d-1})) \dots) = 1.$$

Al sustituir (III.3) en (III.1), se tiene

$$\mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho (\cos^2 \tau + \sin^2 \tau) - \mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho \sum_i \omega_i^2 = \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho - \mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho = \mathcal{R}^2. \quad (\text{III.5})$$

Además, sustituyendo (III.3) en (III.2), la métrica inducida en la hiperboloide es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho \cos^2 \tau d\rho^2 + \mathcal{R}^2 \cosh \rho \sinh \rho \cos \tau \sin \tau d\rho d\tau \\ &\quad + \mathcal{R}^2 \cosh \rho \sinh \rho \cos \tau \sin \tau d\tau d\rho - \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho \sin^2 \tau d\tau^2 - \mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho \sin^2 \tau d\rho^2 \\ &\quad - \mathcal{R}^2 \cosh \rho \sinh \rho \cos \tau \sin \tau d\rho d\tau - \mathcal{R}^2 \cosh \rho \sinh \rho \cos \tau \sin \tau d\tau d\rho \\ &\quad - \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho^2 \cos^2 \tau d\tau^2 + \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho \sum_i \omega_i d\rho^2 + \mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho \sum_i d\omega_i^2 \\ &= \mathcal{R}^2 (-\cosh^2 \rho (\sin^2 \tau + \cos^2 \tau)) d\tau^2 + \mathcal{R}^2 (-\sinh^2 \rho (\cos^2 \tau + \sin^2 \tau) + \cosh^2 \rho) d\rho^2 \\ &\quad + \mathcal{R}^2 \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2 \\ &= \mathcal{R}^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

donde  $d\Omega_{d-1}^2$  es la métrica de la  $(d-1)$ -esfera unitaria,  $S^{d-1}$ . Al tomar  $0 \leq \rho$  y  $0 \leq \tau < 2\pi$ , se cubre la hiperboloide completa. Estas son coordenadas *globales* en  $\text{AdS}_{d+1}$ . La condición de los signos de la métrica dada por (III.2) indica la isometría  $SO(2, d)$  del espacio  $\text{AdS}$ .

Al analizar la métrica cerca de  $\rho = 0$ , se tiene

$$ds^2 \approx \mathcal{R}^2 (-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1}^2) \quad (\text{III.7})$$

lo que indica que la hiperboloide tiene topología  $S^1 \times \mathbb{R}^d$  cerca de este valor. La parte  $S^1$  representa curvas timelike cerradas en la dirección  $\tau$ . Al decompactificar el círculo – es decir,  $-\infty < \tau < \infty$  – obtenemos la cubierta universal sin curvas timelike cerradas. La cubierta universal es a lo que generalmente nos referimos por  $\text{AdS}_{d+1}$ .

Definimos  $\tan \theta = \sinh \rho$  de manera que:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \sqrt{\cosh^2 \rho - 1} \\ \tan^2 \theta &= \cosh^2 \rho - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cosh^2 \rho = \sec^2 \theta$$

y

$$d\rho^2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 d\theta^2$$

con  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) = \sec^2 \theta$ . Reescribimos (III.6) como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathcal{R}^2 (-\sec^2 \theta d\tau^2 + \sec^2 \theta d\theta^2 + \tan^2 \theta d\Omega_{d-1}^2) \\ &= \frac{\mathcal{R}^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Ahora, definimos  $r = \mathcal{R} \sinh \rho$ ,  $t = \mathcal{R} \tau$  de manera que podamos reescribir (III.6)

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho \left( \frac{1}{\mathcal{R}} \right)^2 dt^2 \\ &= -\left( 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} \right) dt^2 \\ dr^2 &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \sinh^{-1} \left( \frac{r}{\mathcal{R}} \right) \right)^2 dr^2 \\ &= \left( 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} \right)^{-1} dr^2. \end{aligned}$$

De manera que

$$ds^2 = -H dt^2 + H^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (\text{III.9})$$

donde  $H \equiv 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}$ . Basado en la forma de la función armónica  $H$ , la forma de la métrica del hoyo de Schwarzschild en  $\text{AdS}_5$  es

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \quad (\text{III.10})$$

con  $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}$ . Este ansatz está basado en el hecho que para valores de  $r$  cercanos a cero,  $f(r)$  se reduce a  $1 - 2GM/r$ . Mientras que para valores grandes de  $r$ ,  $f(r)$  es similar a  $H$ .

## B. AdS como solución de las EFE

Carroll (2004) menciona que el tensor de Riemann para una variedad  $n$ -dimensional de máxima simetría y con métrica  $g_{\mu\nu}$  puede ser escrito como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = k(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (\text{III.11})$$

donde  $k$  es una medida normalizada de la curvatura de Ricci

$$k = \frac{R}{n(n-1)} \quad (\text{III.12})$$

y el escalar de Ricci será una constante sobre la variedad.

Siendo AdS un espacio de máxima simetría, con  $n = d + 1$ , tenemos que

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{d(d+1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho}R_{\rho\sigma\mu\nu} &= g^{\mu\rho} \frac{R}{d(d+1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \\ &= \frac{R}{d(d+1)}((d+1)g_{\sigma\nu} - g_{\nu}^{\mu}g_{\sigma\mu}) \\ R_{\sigma\nu} &= \frac{R}{d+1}g_{\sigma\nu}. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

AdS es una solución de las ecuaciones de Einstein del vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{III.15})$$

donde  $\Lambda$  se denomina la constante cosmológica. Carroll (2004) aclara que este valor representa lo que se conoce como la **energía del vacío**. Al sustituir (III.13) y (III.14) en (III.15):

$$\begin{aligned} \frac{R}{d+1}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ \frac{1-d}{2(d+1)}Rg_{\mu\nu} &= -\Lambda g_{\mu\nu} \\ \frac{d-1}{2(d+1)}R &= \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Para encontrar el escalar de curvatura de Ricci para AdS, si se calcula una de las componentes de (III.13), será posible calcular el escalar de Ricci. De esta manera, elegimos  $\rho = \mu = \lambda$  y  $\sigma = \nu = \delta$  (donde  $\lambda, \delta$  son fijos) y por el hecho que el tensor de métrica es diagonal

$$R_{\lambda\delta\lambda\delta} = \frac{R}{d(d+1)}(g_{\lambda\lambda}g_{\delta\delta} - g_{\lambda\delta}g_{\delta\lambda}) \quad (\text{III.17})$$

$$= \frac{R}{d(d+1)}g_{\lambda\lambda}g_{\delta\delta} \quad (\text{III.18})$$

$$= \frac{R}{d(d+1)}(-\mathcal{R}^4 \cosh^2 \rho). \quad (\text{III.19})$$

Ahora, al calcular  $R_{\lambda\delta\lambda\delta}$  a partir de (X.53):

$$\begin{aligned} R_{\lambda\delta\lambda\delta} &= g_{\lambda\alpha} R^{\alpha}{}_{\delta\lambda\delta} \\ &= g_{\lambda\alpha} \partial_{\lambda} \Gamma_{\delta\delta}^{\alpha} - g_{\lambda\alpha} \partial_{\delta} \Gamma_{\lambda\delta}^{\alpha} + g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \Gamma_{\delta\delta}^{\beta} - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\delta}^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

donde se suma solo sobre los índices  $\alpha, \beta$  de acuerdo a la notación de Einstein.

Usando el hecho que, para una métrica diagonal, los símbolos de Christoffel están dados por (Carroll, 2004)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\epsilon\kappa}^{\gamma} &= 0 \\ \Gamma_{\epsilon\epsilon}^{\gamma} &= -\frac{1}{2}(g_{\gamma\gamma})^{-1} \partial_{\gamma} g_{\epsilon\epsilon} \\ \Gamma_{\epsilon\gamma}^{\gamma} &= \partial_{\epsilon} \left( \ln \sqrt{|g_{\gamma\gamma}|} \right) \\ \Gamma_{\gamma\gamma}^{\gamma} &= \partial_{\gamma} \left( \ln \sqrt{|g_{\gamma\gamma}|} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

donde  $\gamma \neq \epsilon \neq \kappa$  y los índices repetidos no cumplen con la notación de suma de Einstein. Por conveniencia, utilizamos la métrica (III.6) y elegimos  $\lambda = \tau$ ,  $\delta = \rho$ . De esta forma, el primer y tercer término de la última línea de (III.20) son cero. Del segundo y cuarto término, solo queda

$$\begin{aligned} R_{\tau\rho\tau\rho} &= -g_{\tau\tau} \partial_{\rho} \Gamma_{\tau\rho}^{\tau} - g_{\tau\tau} \Gamma_{\rho\tau}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\tau} \\ &= -g_{\tau\tau} \left[ \partial_{\rho}^2 \left( \ln \sqrt{|g_{\tau\tau}|} \right) + \left( \partial_{\rho} \sqrt{|g_{\tau\tau}|} \right)^2 \right] \\ &= \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho (\text{sech}^2 \rho + \tanh^2 \rho) \\ &= \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho. \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Por (III.20)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 \cosh^2 \rho &= \frac{R}{d(d+1)} (-\mathcal{R}^4 \cosh^2 \rho) \\ R &= -\frac{d(d+1)}{\mathcal{R}^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

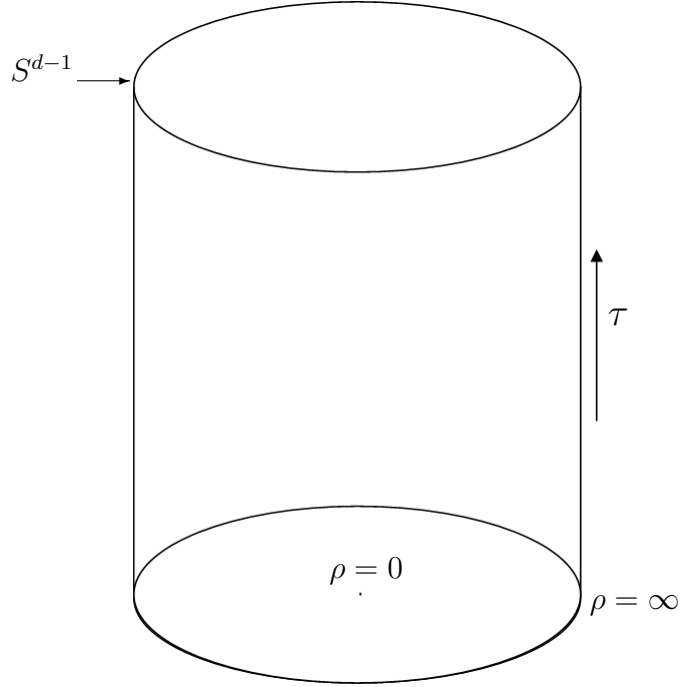
Al sustituir (III.23) en (III.16), obtenemos

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2\mathcal{R}^2} = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\mathcal{R}^2} \quad (\text{III.24})$$

donde  $D$  es la dimensión del espacio-tiempo,  $D = d + 1$ . Bajo esta condición sobre la constante cosmológica, AdS es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein del vacío.

## C. Diagrama de Penrose de AdS

Figura III.1: Diagrama de Penrose del espacio AdS



La figura anterior muestra el diagrama de Penrose de AdS, con  $\rho = 0$  representado por el punto en el centro del cilindro y  $\rho = \infty$  en el borde del cilindro. La coordenada temporal  $\tau$  está representada en el eje vertical. Como se mencionó anteriormente, cerca de  $\rho = 0$  la topología es la de  $S^1 \times \mathbb{R}^d$ . La frontera conforme es  $S^{d-1} \times \mathbb{R}$ , donde la esfera  $S^{d-1}$  está representada como un círculo.

## D. Coordenadas de Poincaré

Defínase las coordenadas  $(u, x^\mu)$  como

$$X^\mu = \frac{ux^\mu}{\mathcal{R}} \quad X^d + X^{d+1} = u \quad X^d - X^{d+1} = v \quad (\text{III.25})$$

donde  $\mu = 0, \dots, d-1$ . Sustituimos (III.25) en (III.1) para obtener

$$\frac{u^2}{\mathcal{R}^2} \left( (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 \right) - uv = \mathcal{R}^2 \quad (\text{III.26})$$

Al despejar para  $v$

$$v = -\frac{\mathcal{R}^2}{u} + \frac{u}{\mathcal{R}^2} \left( (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 \right) \quad (\text{III.27})$$

Ahora, sustituimos (III.25) en (III.2). Para ello,

$$\begin{aligned} dv &= \left[ \frac{\mathcal{R}^2}{u^2} + \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left( (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 \right) \right] du \\ dX^\mu &= \frac{x^\mu}{\mathcal{R}} du + \frac{u}{\mathcal{R}} dx^\mu \\ ds^2 &= -dX^0 dX^0 + \sum_{i=1}^{d-1} dX^i dX^i + du dv \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{\mathcal{R}^2} \left( x^0 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 \right) du^2 + \frac{u^2}{\mathcal{R}^2} \left( -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx^i)^2 \right) + \left[ \frac{\mathcal{R}^2}{u^2} + \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left( (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 \right) \right] du^2 \\ ds^2 &= \mathcal{R}^2 \frac{du^2}{u^2} + \frac{u^2}{\mathcal{R}^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Esta es la métrica de AdS en las *coordenadas de Poincaré*. Definase  $z = \frac{\mathcal{R}^2}{u}$ , de manera que

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\mathcal{R}^2} &= \frac{\mathcal{R}^2}{z^2} \\ du^2 &= \frac{\mathcal{R}^4}{z^4} dz^2 \end{aligned}$$

De forma que la métrica queda expresada como

$$ds^2 = \frac{\mathcal{R}^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (\text{III.29})$$

De (III.28), es notable que  $g_{00}$  se hace cero en  $u = 0$ , lo cual indica que hay un horizonte. En (III.29), el horizonte se encuentra en  $z = \pm\infty$ . Sabiendo que hay coordenadas globales para AdS, esto indica que esta singularidad es debida a la elección de coordenadas. De esta forma, las coordenadas de Poincaré solo cubren la mitad del hiperboloide de AdS:  $0 < u < \infty$  para la primera métrica y  $0 < z < \infty$  para la segunda. También puede imponerse la condición que las coordenadas cubran solo la otra mitad del hiperboloide:  $-\infty < u < 0$  para la primera métrica y  $-\infty < z < 0$ .

## E. Geodésicas en AdS

Consideremos el movimiento sobre geodésicas en AdS. AdS puede ser considerado como una caja covariante; hay un potencial gravitacional atractivo hacia el centro de AdS ( $\rho = 0$ ). Sin embargo, las partículas sin masa, que se mueven sobre geodésicas nulas, pueden alcanzar el borde ( $\rho = \infty$ ) en un tiempo finito. Recordamos que, para partículas sin masa sobre geodésicas nulas  $ds^2 = 0$ , de forma que:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \text{sech}^2 \rho \, d\rho^2 \\ \tau &= \int \text{sech} \rho \, d\rho = \tan^{-1}(\sinh \rho) + C. \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

De manera que, para que una partícula alcance el borde:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \tan^{-1}(\sinh \rho) + C = \frac{\pi}{2} + C \quad (\text{III.31})$$

lo cual indica que la partícula lo hace en un tiempo finito.

En cambio, las partículas masivas cumplen

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1.$$

Considerando que  $g_{\mu\nu}$  es independiente de las coordenadas  $\tau, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}$ , tenemos cantidades que se conservan respectivas a cada una de estas coordenadas. En particular, la conservación de  $\theta_1, \dots, \theta_{d-1}$  indica que es posible ajustar el valor de los ángulos de manera que solo nos interese la parte radial del movimiento de la partícula. Así

$$U^\mu = (\dot{\tau}, \dot{\rho}, 0, \dots, 0)$$

Además, tenemos la constante del movimiento

$$F = -K_\mu U^\mu = \cosh^2 \rho \frac{d\tau}{d\lambda} \quad (\text{III.32})$$

Con  $\lambda$  un parámetro afín que funge como el tiempo propio sobre la geodésica y  $K^\mu = (\partial_t)^\mu$  un vector de Killing. De esta manera,

$$\dot{\rho}^2 - F^2 \text{sech}^2 \rho = -\frac{1}{\mathcal{R}^2} \quad (\text{III.33})$$

Ecuación que reescribimos como

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 + V(\rho) = \mathcal{E} \quad (\text{III.34})$$

donde  $V(\rho) = -\frac{1}{2}F^2 \text{sech}^2 \rho$  tiene una función de potencial efectivo atractivo hacia  $\rho = 0$  y  $\mathcal{E} = -\frac{1}{2\mathcal{R}^2}$  es la “energía” de la partícula; así, tenemos la ecuación de movimiento para una partícula clásica de masa unitaria y “energía”  $\mathcal{E}$  que se mueve en un potencial dado por  $V(\rho)$ . Como  $\mathcal{E} < 0$ , tenemos que la partícula está ligada al potencial y por lo tanto le es imposible alcanzar el borde ( $\rho = \infty$ ). De hecho, la partícula oscila alrededor del mínimo del potencial, en  $\rho = 0$ .

## IV. GRAVEDAD EN 2+1 DIMENSIONES

La tarea de cuantizar la relatividad general es uno de los principales problemas de la física teórica moderna. Los obstáculos que esto representa son en parte técnicos: la relatividad general es una teoría no lineal complicada, además que, vista como una teoría de campo ordinaria, no es renormalizable. Pero el problema va más allá, pues la relatividad general es una teoría geométrica del espacio-tiempo, y cuantizar la gravedad significa cuantizar el mismo espacio-tiempo, lo cual no se sabe qué quiere decir. Por ejemplo:

- la teoría cuántica de campo ordinaria es local, pero los observables físicos fundamentales (invariantes ante difeomorfismos) de la gravedad cuántica son necesariamente no locales.
- La teoría cuántica de campo ordinaria toma la causalidad como un postulado fundamental, pero en gravedad cuántica la geometría del espacio-tiempo, y por ende los conos de luz y la estructura causal, están sujetos a fluctuaciones cuánticas.
- La evolución temporal en la teoría cuántica de campo está determinada por un operador hamiltoniano, pero para universos espacialmente cerrados, el candidato natural para un hamiltoniano en gravedad cuántica es exactamente cero al actuar sobre estados físicos.
- Las probabilidades en mecánica cuántica deben ser iguales a la unidad en un tiempo fijo, pero en relatividad general no hay una división temporal preferida en la cual normalizar las probabilidades.

De esta manera, es natural buscar modelos simples que compartan características conceptuales importantes de la relatividad general a la vez que evitan algunas de las dificultades anteriores. La relatividad general en 2+1 dimensiones (dos dimensiones espaciales y una temporal) es un modelo que cumple con esto, ya que tiene los mismos fundamentos conceptuales de la relatividad general en 3+1 dimensiones (más realista), y muchos de los problemas fundamentales de la gravedad cuántica son llevados a una configuración de menos dimensiones. El modelo (2+1)-dimensional es más simple, física y matemáticamente, y es posible proponer candidatos viables para una teoría cuántica. Con unas cuantas excepciones, las soluciones en 2+1 dimensiones son físicamente muy distintas a aquellas en 3+1 dimensiones, y el modelo (2+1)-dimensional no es muy útil para entender la dinámica de la gravedad cuántica realista. En particular, la teoría no tiene un límite Newtoniano adecuado. Pero para entender problemas conceptuales (tales como la naturaleza del tiempo, la construcción de estados y observables, el rol de la topología, las relaciones entre distintos enfoques

a la cuantización) el modelo es altamente instructivo.

El desarrollo de la gravedad (2+1)-dimensional data desde 1963, cuando Staruszkiewicz describió por primera vez el comportamiento de soluciones estáticas con fuentes puntuales. El renacimiento moderno del tema se dio gracias al trabajo de Deser, Jackiw, 't Hooft y Witten a mediados de los 80. Durante los últimos veinte años, la gravedad tridimensional se ha vuelto un campo de investigación activo que ha involucrado cuestiones de relatividad general, geometría diferencial y topología, teoría de partículas altamente energéticas, teoría topológica de campo y teoría de cuerdas. (Carlip, 2005)

## A. Lo simple de la gravedad (2+1)-dimensional.

Como se vio anteriormente, el tensor de curvatura puede descomponerse en el escalar de curvatura  $R$ , el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el tensor de Weyl  $C_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$ . Sin embargo, en 2+1 dimensiones, el tensor de Weyl es cero, y el tensor de curvatura está determinado algebraicamente por las partes restantes:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (\text{IV.1})$$

Esto significa que cualquier solución de las ecuaciones de campo con constante cosmológica  $\Lambda$ ,

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{IV.2})$$

tiene curvatura constante. Localmente, el espacio-tiempo es plano ( $\Lambda = 0$ ), de Sitter ( $\Lambda > 0$ ) o anti-de Sitter ( $\Lambda < 0$ ). Físicamente, un espacio-tiempo (2+1)-dimensional no tiene grados de libertad locales: no hay ondas gravitacionales en la teoría clásica, ni gravitones que se propagan en el interior en la teoría cuántica.

La ausencia de grados de libertad locales puede verificarse por un simple argumento de conteo: en  $n$  dimensiones, el espacio de fase de relatividad general está parametrizado por una métrica espacial en tiempo constante, que tiene  $n(n-1)/2$  componentes, y su momentum conjugado, que agrega otras  $n(n-1)/2$  componentes. Pero  $n$  de las ecuaciones de campo de Einstein son restricciones y no ecuaciones dinámicas, además que es posible eliminar otros  $n$  grados de libertad mediante elección de coordenadas. Así, quedan  $n(n-1) - 2n = n(n-3)$  grados de libertad físicos por cada punto del espacio-tiempo. En cuatro dimensiones, esto da los usuales cuatro grados de libertad del espacio de fase, dos polarizaciones de onda gravitacional y sus momenta conjugados. Si  $n = 3$ , no hay grados de libertad locales.

También es posible analizar esto mediante la aproximación de campo débil. En cualquier dimensión, las ecuaciones de campo del vacío en un gauge armónico para una métrica casi plana  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  toman la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{O}(h^2), \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{IV.3})$$

donde  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$  y los índices son subidos y bajados con la métrica plana  $\eta$ . Las soluciones de ondas planas de la ecuación (IV.3) son, a primer orden,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik \cdot x} \quad (\text{IV.4})$$

con  $k^2 = 0$  y  $k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$ . Al elegir un segundo vector nulo  $n^\mu$  con  $n \cdot k = -1$  y un vector unitario spacelike  $m^\mu$  con  $k \cdot m = n \cdot m = 0$ , es posible construir en 2+1 dimensiones un análogo al formalismo de Newman-Penrose; el tensor de polarización  $\epsilon_{\mu\nu}$  se escribe como

$$\epsilon_{\mu\nu} = Ak_\mu k_\nu + B(k_\mu m_\nu + k_\nu m_\mu) + Cm_\mu m_\nu, \quad (\text{IV.5})$$

que aparentemente da tres polarizaciones de propagación. Sin embargo, hay una simetría residual. Un difeomorfismo generado por un campo vectorial infinitesimal  $\xi^\mu$  con  $\square \xi^\mu = 0$  preserva la condición de gauge armónico de la ecuación (IV.3) a la vez que da la transformación gauge  $\delta \bar{h}_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho$ . Escribimos

$$\xi_\mu = (\alpha k_\mu + \beta n_\mu + \gamma m_\mu) e^{ik \cdot x}, \quad (\text{IV.6})$$

de manera que

$$\delta \epsilon_{\mu\nu} = 2i\alpha k_\mu k_\nu + i\gamma(k_\mu m_\nu + k_\nu m_\mu) + i\beta m_\mu m_\nu. \quad (\text{IV.7})$$

Lo cual indica que las excitaciones de (IV.5) son “pure gauge”. Esto confirma la ausencia de grados de libertad que se propaguen. (Carlip, 2005)

## B. El hoyo negro de BTZ.

El hoyo negro de BTZ recibió este nombre debido al trabajo de Bañados, Teitelboim y Zanelli (1992), quienes demostraron la existencia de una solución de hoyo negro para la gravedad (2+1)-dimensional con constante cosmológica negativa. Esta solución fue una sorpresa ya que se creía que en estas condiciones no existiría una solución de hoyos negros, además que el hoyo negro de BTZ tiene propiedades similares a los hoyos negros en 3+1 dimensiones, incluidas propiedades

termodinámicas.

Considérese la siguiente acción de Einstein-Hilbert

$$I = \frac{1}{16G\pi} \int \sqrt{-g}(R + 2\ell^{-2}) d^2x dt + B \quad (\text{IV.8})$$

donde  $B$  es un término de superficie y  $\ell^{-2} = -\Lambda$ . Al variar esta acción con respecto a la métrica, se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + 2\ell^{-2}) = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Una solución a las ecuaciones (IV.9) es AdS<sub>3</sub> (Kraus, 2006) –con  $\mathcal{R} = \ell$  de acuerdo a la notación del capítulo anterior– :

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{IV.10})$$

Esto se compueba a continuación, calculando primero los símbolos de Christoffel distintos de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{r}{\ell^2 + r^2} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{r(\ell^2 + r^2)}{\ell^4} \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r}{\ell^2 + r^2} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \\ \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Ahora, las componentes del tensor de Riemann distintas de cero:

$$\begin{aligned} R_{rrt}^t &= \frac{1}{r^2 + \ell^2} & R_{\phi\phi t}^t &= \frac{r^2}{\ell^2} \\ R_{trt}^r &= \frac{r^2 + \ell^2}{\ell^4} & R_{\phi\phi r}^r &= \frac{r^2}{\ell^2} \\ R_{t\phi t}^\phi &= \frac{r^2 + \ell^2}{\ell^4} & R_{r\phi r}^\phi &= -\frac{1}{r^2 + \ell^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Y las componentes distintas de cero del tensor de Ricci

$$R_{tt} = \frac{2(r^2 + \ell^2)}{\ell^4} \quad R_{rr} = -\frac{2}{r^2 + \ell^2} \quad R_{\phi\phi} = -\frac{2r^2}{\ell^2}. \quad (\text{IV.12})$$

Por último, el escalar de curvatura es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{6}{\ell^2} \quad (\text{IV.13})$$

lo cual confirma que la curvatura es negativa y constante, además que (IV.12) cumple con (IV.2) y (IV.13) cumple con (III.23).

Es sencillo comprobar que (IV.12) y (IV.13) satisfacen (IV.9):

$$\begin{aligned} \mu = \nu = t : \quad & \frac{2(r^2 + \ell^2)}{\ell^4} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{2}{\ell^2}\right) = \frac{2(r^2 + \ell^2)}{\ell^4} - \frac{2}{\ell^2} \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) = 0 \\ \mu = \nu = r : \quad & -\frac{2}{r^2 + \ell^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} \left(-\frac{4}{\ell^2}\right) = -\frac{2}{r^2 + \ell^2} + \frac{2}{\ell^2} \left(\frac{\ell^2}{r^2 + \ell^2}\right) = 0 \\ \mu = \nu = \phi : \quad & -\frac{2r^2}{\ell^2} - \frac{1}{2} r^2 \left(-\frac{4}{\ell^2}\right) = -\frac{2r^2}{\ell^2} + \frac{2r^2}{\ell^2} = 0. \end{aligned}$$

A pesar que la gravedad en 2+1 dimensiones no tiene grados de libertad locales y parece ser sencilla, presenta características interesantes. Una de ellas fue analizada por Bañados, Teitelboim y Zanelli (1992) cuando demostraron la existencia de una solución de hoyo negro para (IV.9) dada por

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (\text{IV.14})$$

donde el lapso al cuadrado  $N^2(r)$  y el desplazamiento angular  $N^\phi(r)$  están dados por

$$\begin{aligned} N^2(r) &= -8GM + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{16G^2 J^2}{r^2} \\ N^\phi(r) &= -\frac{4GJ}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

con  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 < r < \infty$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . A esta solución se le llama hoyo negro BTZ. Las constantes de integración  $M$  y  $J$  son las cargas conservadas con invarianza asintótica bajo desplazamientos temporales (masa) e invarianza rotacional (momentum angular), respectivamente.

El lapso  $N(r)$  se hace cero para dos valores de  $r$  dados por

$$r_{\pm} = 2\ell \left[ GM \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{J}{M\ell} \right)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (\text{IV.16})$$

De estos valores,  $r_+$  es el horizonte externo del hoyo negro y  $r_-$  es el horizonte interno. Para que exista el horizonte, debe cumplirse

$$M > 0, \quad |J| \leq M\ell. \quad (\text{IV.17})$$

Cuando la desigualdad se satura, es decir  $|J| = M\ell$ , ambas raíces coinciden y el hoyo negro tiene temperatura 0. El estado del vacío, concretamente el que se considera como espacio vacío, se obtiene

al hacer que el hoyo negro desaparezca. Eso es, al permitir que el tamaño del horizonte sea cero: esto equivale a hacer  $M \rightarrow 0$ , lo que requiere que  $J \rightarrow 0$  debido a (IV.17). De esta manera, se obtiene el elemento de línea

$$ds_{vac}^2 = -\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{IV.18})$$

Conforme  $M$  toma valores negativos, se obtienen soluciones en las que se presenta una singularidad cónica desnuda, como el caso de la singularidad de curvatura de un hoyo negro de masa negativa en 3+1 dimensiones. En el contexto presente, estas soluciones deben ser excluidas del espectro físico. Sin embargo, hay un caso excepcional importante: cuando  $M = -1/8G$  y  $J = 0$ , la singularidad desaparece. No hay horizonte, pero tampoco hay singularidad a esconder. Este es el caso correspondiente al espacio  $\text{AdS}_3$  presentado anteriormente. De esta forma, uno ve que el espacio anti-de Sitter surge como un “estado ligado”, separado del espectro continuo de hoyos negros por un valor de masa. El punto clave es que el espectro de existencia de hoyos negros existe para valores mayores al caso  $M = 0$ . (Bañados, Teitelboim y Zanelli, 1992)

Para el caso del hoyo negro de BTZ sin rotación ( $J = 0$ ), uno obtiene la familia de soluciones de un parámetro (Kraus, 2006)

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{IV.19})$$

Se comprobará que también cumple con (IV.9). Los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{r}{r^2 - r_+^2} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{r(r^2 - r_+^2)}{\ell^4} \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r}{r^2 - r_+^2} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r(r^2 - r_+^2)}{\ell^2} \\ \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Las componentes del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^t{}_{rrt} &= \frac{1}{r^2 - r_+^2} & R^t{}_{\phi\phi t} &= \frac{r^2}{\ell^2} \\ R^r{}_{trt} &= \frac{r^2 - r_+^2}{\ell^4} & R^r{}_{\phi\phi r} &= \frac{r^2}{\ell^2} \\ R^\phi{}_{t\phi t} &= \frac{r^2 - r_+^2}{\ell^4} & R^\phi{}_{r\phi r} &= -\frac{1}{r^2 - r_+^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Con lo cual se obtienen las componentes del tensor de Ricci

$$R_{tt} = \frac{2(r^2 - r_+^2)}{\ell^4} \quad R_{rr} = -\frac{2}{r^2 - r_+^2} \quad R_{\phi\phi} = -\frac{2r^2}{\ell^2}. \quad (\text{IV.21})$$

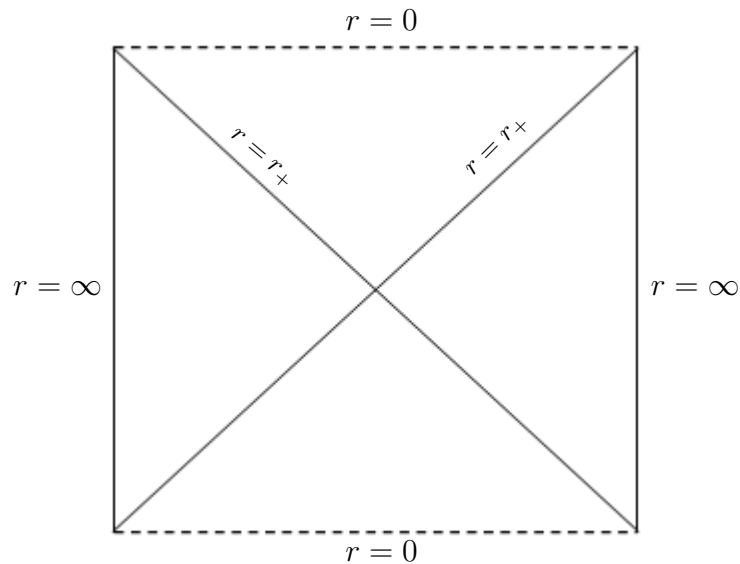
Y el escalar de Ricci es el mismo que (IV.13). De nuevo, es fácil verificar que estos valores satisfacen las EFE indicadas para el espacio-tiempo de 2+1 dimensiones. Nótese que si hacemos  $r_+^2 = -\ell^2$  en (IV.19), obtenemos de nuevo (IV.10).

Este hoyo negro tiene una entropía de Bekenstein-Hawking dada por

$$S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G} \quad (\text{IV.22})$$

donde  $A$  es el “área” del horizonte del hoyo negro (en este caso el horizonte es un círculo,  $S^1$ ), dada por  $A = 2\pi r_+$ .

Figura IV.1: Diagrama de Penrose del hoyo negro de BTZ sin rotación



# V. ENTRELAZAMIENTO DE SISTEMAS CUÁNTICOS

El mundo cuántico es un lugar extraño, ya que en él suceden cosas que van en contra del sentido común, como el efecto túnel o la incertidumbre. Sin embargo, de todas las cosas extrañas en este mundo cuántico, la mayor diferencia que hay respecto a nociones clásicas es el concepto de entrelazamiento. Schrödinger elegantemente capturó la clave del asunto cuando dijo: «*El mejor conocimiento de un todo no necesariamente incluye el mejor conocimiento posible de las partes*». Esto significa que incluso si tuviéramos un conocimiento completo de todo un sistema, aún seríamos incapaces de predecir el comportamiento de pequeñas porciones del mismo. La entropía de entrelazamiento es una cantidad que da información importante sobre sistemas cuánticos entrelazados, para lo cual se hace uso de matrices de densidad reducidas.

Cada vez es más claro que la noción de entrelazamiento es relevante en varias ramas de la Física. En años recientes, han habido avances que indican que el entrelazamiento es el marco de trabajo natural para entender varios problemas que abarcan desde la física de los hoyos negros a la pregunta de cómo las partículas microscópicas se agrupan para crear fenómenos macroscópicos.

## A. Matrices de densidad

Las matrices de densidad se utilizan para describir ensambles estadísticos de varios estados cuánticos. Por ejemplo, un ensamble de  $N$  sistemas, de los cuales  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) están en el estado  $|i\rangle$  (suponiendo que  $|i\rangle$  es un elemento de una base ortonormal). De esta manera, el ensamble está descrito por  $k$  kets  $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |k\rangle$ , y  $k$  números de ocupación  $n_1, \dots, n_k$ . Una forma conveniente de juntar toda esta información es mediante una matriz de densidad, que realmente es un operador que puede representarse como una matriz en cierta base:

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \tag{V.1}$$

donde  $p_i = n_i/N$  es la probabilidad que un sistema escogido aleatoriamente del ensamble esté en el estado  $|i\rangle$ . Los ensambles se dicen *puros* si corresponden al caso en que  $p_i = 0$  para todos los estados excepto uno. Un ensamble con dos o más estados con probabilidad distinta de cero es *mixto*.

Considérese ahora el promedio en el ensamble de un operador  $\Omega$ , correspondiente a una variable dinámica. Este promedio es

$$\langle \bar{\Omega} \rangle = \sum_i p_i \langle i | \Omega | i \rangle. \quad (\text{V.2})$$

La barra sobre  $\langle \bar{\Omega} \rangle$  nos recuerda que se están tomando en cuenta dos tipos de promedio: un promedio cuántico  $\langle i | \Omega | i \rangle$  para cada sistema en  $|i\rangle$  y un promedio clásico sobre los sistemas en diferentes estados  $|i\rangle$ . Nótese que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Omega\rho) &= \sum_j \langle j | \Omega \rho | j \rangle \\ &= \sum_j \sum_i \langle j | \Omega | i \rangle \langle i | j \rangle p_i \\ &= \sum_i \sum_j \langle i | j \rangle \langle j | \Omega | i \rangle p_i \\ &= \sum_i \langle i | \Omega | i \rangle p_i \\ &= \langle \bar{\Omega} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

La matriz de densidad contiene toda la información estadística sobre el ensamble. Supóngase que queremos, no  $\langle \bar{\Omega} \rangle$ , sino  $\overline{P(\omega)}$ , la probabilidad de obtener un valor  $\omega$  en particular. Notamos que, para un ensamble puro,

$$P(\omega) = |\langle \omega | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \omega \rangle \langle \omega | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{P}_\omega | \psi \rangle = \langle \mathbb{P}_\omega \rangle$$

donde  $\mathbb{P}_\omega$  es el operador proyección. Lo anterior combinado con (V.3) nos dice que

$$\overline{P(\omega)} = \text{Tr}(\mathbb{P}_\omega \rho).$$

Es importante mencionar las siguientes propiedades de las matrices de densidad: (Shankar, 1994)

1.  $\rho^\dagger = \rho$ .
2.  $\text{Tr}\rho = 1$ .
3.  $\rho^2 = \rho$  para un ensamble puro. No se cumple para un estado mixto.
4.  $\rho = (1/k)I$  para un ensamble uniformemente distribuido sobre  $k$  estados.
5.  $\text{Tr}\rho^2 \leq 1$ , donde la igualdad se da solo para ensambles puros.

Por último, es importante señalar que la entropía de Von Neumann para sistemas cuánticos

indica si un sistema está en un estado puro o mixto, ya que

$$\begin{aligned} S &= -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = 0 && \text{para estados puros} \\ S &= -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \neq 0 && \text{para estados mixtos} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

## B. Entrelazamiento cuántico

Tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica, hay formas de superponer estados de sistemas independientes de tal forma que, por ejemplo para dos sistemas, la medición en un sistema (digamos, el sistema A) no afecta ninguna medición en el otro sistema (sistema B). El tipo de estado más simple para sistemas compuestos se llama producto de estados. Por ejemplo, un producto de estados sería el resultado de sistemas preparados completamente independientes por dos experimentadores, en el que cada experimentador utiliza su propio aparato para preparar su estado. Consideremos dos sistemas A y B de espín. El sistema A está preparado en el estado

$$\alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

y el sistema B

$$\beta_u |u\rangle + \beta_d |d\rangle$$

donde la notación de los vectores ket del sistema A (en el espacio  $\mathcal{H}_A$ ) se utiliza con  $\}$  para diferenciarlos de los vectores del sistema B (en el espacio  $\mathcal{H}_B$ ). Suponiendo que cada estado está normalizado

$$\begin{aligned} \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d &= 1 \\ \beta_u^* \beta_u + \beta_d^* \beta_d &= 1. \end{aligned}$$

De hecho, estas ecuaciones de normalización separadas para cada subsistema juegan un papel crucial en la definición de producto de estados. Si no se tuvieran estas relaciones, no se lograría tener el producto de estados. Este producto de estados que describe al sistema combinado es

$$|\text{producto de estados}\rangle = [\alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle] \otimes [\beta_u |u\rangle + \beta_d |d\rangle].$$

Al expandir el producto y cambiarlo a notación compuesta, se obtiene

$$\alpha_u \beta_u |uu\rangle + \alpha_u \beta_d |ud\rangle + \alpha_d \beta_u |du\rangle + \alpha_d \beta_d |dd\rangle.$$

La característica principal de un producto de estados es que cada subsistema se comporta inde-

pendientemente del otro. Por otro lado, los principios de mecánica cuántica permiten superponer vectores base en formas más generales que solo el producto de estados. El vector más general en el espacio compuesto de estados es

$$\psi_{uu} |uu\rangle + \psi_{ud} |ud\rangle + \psi_{du} |du\rangle + \psi_{dd} |dd\rangle$$

donde se ha utilizado el símbolo  $\psi$  con subíndices en vez de  $\alpha, \beta$  para representar los coeficientes complejos. De nuevo, se tienen cuatro números complejos, pero esta vez solo una condición de normalización

$$\psi_{uu}^* \psi_{uu} + \psi_{ud}^* \psi_{ud} + \psi_{du}^* \psi_{du} + \psi_{dd}^* \psi_{dd} = 1.$$

El resultado es que el estado más general para el sistema de dos espín tiene seis parámetros reales. Evidentemente, el espacio de estados es más variado que solo los productos de estados que pueden ser preparados independientemente. Algo distinto sucede en este caso, y eso se denomina *entrelazamiento*.

El entrelazamiento no es una proposición de todo o nada. Hay estados que están más entrelazados que otros. Un ejemplo de un estado de entrelazamiento máximo, denominado estado singlete, puede ser escrito como

$$|sing\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle).$$

El estado singlete no puede ser escrito como un producto de estados. Lo mismo puede decirse de los estados triplete

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle + |dd\rangle) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle - |dd\rangle). \end{aligned}$$

¿Que tienen los estados de entrelazamiento máximo que los hace tan fascinantes? Que un estado entrelazado es una descripción completa de un sistema, ya que nada más puede saberse de este; además, en un estado de entrelazamiento máximo, nada puede saberse acerca de los subsistemas individuales. ¿Cómo puede ser esto de saber lo más que se puede de un sistema y aún así no saber nada de los sistemas individuales que lo componen? Esta noción no tiene equivalente en la física clásica e incluso es algo contraintuitivo. (Susskind y Friedman, 2014)

## C. Matrices de densidad reducida y entropía de entrelazamiento

Una medida del grado de entrelazamiento de un sistema cuántico es la entropía de von Neumann. Considérese una partición de un sistema físico  $\Sigma$  en dos subsistemas disjuntos, denotados por  $A$  y  $B$ . Sean  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  los espacios de Hilbert de los estados en los sistemas  $A$  y  $B$  de tal manera que el espacio de Hilbert de los estados en  $\Sigma$  es  $\mathcal{H}_\Sigma = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Sea  $|\Psi\rangle$  un estado cuántico puro del sistema  $\Sigma$ . Como tal, puede descomponerse como

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} M_{m,n} |\psi_n^A\rangle |\psi_m^B\rangle \quad (\text{V.5})$$

donde  $\{|\psi_n^A\rangle\}$  y  $\{|\psi_m^B\rangle\}$  son bases de estados ortonormales de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, y  $M_{m,n}$  son los elementos de (en general) una matriz rectangular  $\mathbf{M}$ . Sin embargo, por el teorema de descomposición de valores singulares, una matriz rectangular siempre puede ser escrita como el producto de una matriz unitaria  $\mathbf{U}$ , una matriz diagonal  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ , y una matriz rectangular  $\mathbf{V}$  (cuyas filas son vectores ortonormales). Así, al ir a las nuevas bases  $|\psi_n^A\rangle \rightarrow \mathbf{U} |\psi_n^A\rangle$  y  $|\psi_m^B\rangle \rightarrow \mathbf{V} |\psi_m^B\rangle$ , encontramos la descomposición de Schmidt del vector de estado  $|\Psi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_n^D \lambda_n |\psi_n^A\rangle |\psi_n^B\rangle \quad (\text{V.6})$$

donde  $D = \min d_A, d_B$ , con  $d_A, d_B$  las dimensiones de los espacios de Hilbert de los sistemas  $A$  y  $B$ . Además, el vector de estado está normalizado a la unidad,  $|\Psi| = 1$ . Así, también debe cumplirse que el conjunto de números  $\{\lambda_n\}$  debe satisfacer

$$\sum_n^D |\lambda_n|^2 = 1. \quad (\text{V.7})$$

Dado el estado puro  $|\Psi\rangle$  del sistema total  $\Sigma$ , su matriz de densidad (trivial) es

$$\rho_\Sigma = |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (\text{V.8})$$

Ahora definimos la *matriz de densidad reducida* para el subsistema  $A$  como la traza parcial de  $\rho_\Sigma$  sobre los grados de libertad en  $B$ ,

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_\Sigma \quad (\text{V.9})$$

y similarmente para la matriz de densidad reducida  $\rho_B$ . De esta manera, si observamos solo el subsistema  $A$ , este estará en un estado mixto definido por la matriz de densidad reducida corres-

pondiente; de forma similar para  $B$ .

La entropía de entrelazamiento de von Neumann  $S_A$  para el subsistema  $A$ , cuando el sistema total está en el estado  $|\Psi\rangle$ , está definida como la entropía de la matriz de densidad reducida,

$$S_A \equiv -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A). \quad (\text{V.10})$$

Usando la descomposición de Schmidt, ecuación (V.6), podemos escribir la matriz de densidad reducida  $\rho_A$  como

$$\rho_A = \sum_n^D |\lambda_n|^2 |\psi_n^A\rangle \langle \psi_n^A| \quad (\text{V.11})$$

y de manera parecida para  $B$ . Lo anterior indica que las cantidades  $p_n \equiv |\lambda_n|^2$  representan la probabilidad de observar el subsistema  $A$  en el estado  $|\psi_n^A\rangle$ . De estas expresiones se tiene que las matrices de densidad reducida  $\rho_A, \rho_B$  tienen los mismos eigenvalores no nulos, dados por  $p_n = |\lambda_n|^2$  y que ambas matrices tienen traza unitaria  $\text{Tr}_A \rho_A = \text{Tr}_B \rho_B = 1$ .

Con lo anterior, se tiene que la entropía de entrelazamiento de von Neumann puede escribirse como

$$S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_n^D |\lambda_n|^2 \ln |\lambda_n|^2 = -\text{Tr}_B(\rho_B \ln \rho_B) = S_B. \quad (\text{V.12})$$

En otras palabras, la entropía de entrelazamiento es simétrica en los dos subsistemas. Esta propiedad de simetría es una consecuencia de haber supuesto que el sistema total  $\Sigma$  está en un estado puro. La propiedad de simetría de la entropía de entrelazamiento no se cumple si el sistema total está en un estado mixto. La expresión de la entropía de entrelazamiento de von Neumann en términos de las probabilidades  $\{|\lambda_n|^2\}$  también nos dice que la entropía se anula solo si la matriz de densidad reducida  $\rho_A$  (y por lo tanto también  $\rho_B$ ) representa un estado puro. Esto se cumple solo si el estado  $\Psi$  del sistema  $\Sigma$  es un producto de estados, pues en ese caso la matriz de densidad reducida es diagonal e igual a  $\rho_A = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ , cuya entropía se anula. En otras palabras,  $S_A = 0$  para subsistemas no entrelazados y  $S_A \neq 0$  para subsistemas entrelazados. Así, la entropía de von Neumann es una medida del entrelazamiento de dos (o más) subsistemas. El espectro de eigenvalores de la matriz de densidad reducida se conoce como el espectro de entrelazamiento. (Fradkin, 2013)

Finalmente, la entropía de entrelazamiento satisface las siguientes propiedades: (Fradkin, 2013)

- Para un sistemas  $\Sigma$  compuesto por dos subsistemas,  $A$  y  $B$ , la entropía de entrelazamiento

es subaditiva:  $S_\Sigma \leq S_A + S_B$ .

- Para un subsistema  $\Sigma$  compuesto por tres subsistemas  $A, B$  o  $C$ , la entropía satisface la condición de subaditividad fuerte:  $S_\Sigma \leq S_{\Sigma_1} + S_{\Sigma_2} - S_B$ , con  $\Sigma_1$  el sistema compuesto por  $A, B$  y  $\Sigma_2$  el sistema compuesto por  $B, C$ .

## D. Un ejemplo simple: osciladores armónicos acoplados

El siguiente ejemplo fue desarrollado por Srednicki (1993). Considérese un sistema de dos osciladores armónicos acoplados. El Hamiltoniano correspondiente es

$$H = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2 + k_0(x_1^2 + x_2^2) + k_1(x_1 - x_2)^2]. \quad (\text{V.13})$$

Para resolver la ecuación de eigenvalores

$$H\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2) \quad (\text{V.14})$$

hacemos el cambio de variables

$$x_\pm = \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}} \quad (\text{V.15})$$

de manera que reescribimos (V.14) como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[ p_1^2 + p_2^2 + 2\left(\frac{k_0}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) + k_1(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ p_1^2 + p_2^2 + \frac{k_0}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{k_0}{2}(x_1^2 + x_2^2) - k_0x_1x_2 + k_1(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ p_1^2 + p_2^2 + \frac{k_0}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{k_0 + 2k_1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} [p_+^2 + p_-^2 + \omega_+x_+^2 + \omega_-x_-^2] \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

con  $\omega_+ = \sqrt{k_0}$  y  $\omega_- = \sqrt{k_0 + 2k_1}$ . Esta sustitución permite tratar el sistema como dos osciladores armónicos independientes para encontrar las soluciones  $\psi_n(x_+), \psi_n(x_-)$  y obtener la función de onda  $\psi_n(x_1, x_2)$  como producto de estas dos. De esta forma, la función de onda normalizada del estado fundamental es

$$\psi_0(x_1, x_2) = \left(\frac{\omega_+\omega_-}{\pi^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\omega_+x_+^2 + \omega_-x_-^2}{2}\right]. \quad (\text{V.17})$$

Ahora es posible encontrar la matriz de densidad reducida para el subsistema 2. Las entradas

de la matriz están dadas por:

$$\rho_2(x_2, \tilde{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \psi_0(x_1, x_2) \psi_0^*(x_1, \tilde{x}_2) = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\pi}} \exp \left[ -\frac{\gamma(x_2^2 + \tilde{x}_2^2)}{2} + \beta x_2 \tilde{x}_2 \right] \quad (\text{V.18})$$

donde

$$\beta = \frac{(\omega_+ - \omega_-)^2}{4(\omega_+ + \omega_-)} \quad \gamma - \beta = \frac{2\omega_+\omega_-}{\omega_+ + \omega_-}.$$

Ahora, queremos las probabilidades  $p_n$  de  $\rho_2$  para calcular la entropía de entrelazamiento. De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \rho_2(x, \tilde{x}) f_n(\tilde{x}) = p_n f_n(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{V.19})$$

cuya solución es

$$p_n = (1 - \xi) \xi^n$$

$$f_n(x) = H_n(\alpha^{1/2} x) \exp \left[ -\frac{\alpha x^2}{2} \right] \quad (\text{V.20})$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite y

$$\alpha = (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} = (\omega_+\omega_-)^{1/2} \quad \xi = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}.$$

Ahora, es posible calcular la entropía de entrelazamiento de von Neumann:

$$\begin{aligned} S_2 &= - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n \\ &= - \sum_n (1 - \xi) \xi^n \ln[(1 - \xi) \xi^n] \\ &= -(1 - \xi) \sum_n \xi^n \ln[(1 - \xi) \xi^n] \\ &= -(1 - \xi) \ln(1 - \xi) \sum_n \xi^n - (1 - \xi) \ln(\xi) \sum_n n \xi^n \\ &= -\ln(1 - \xi) \frac{1}{1 - \xi} - (1 - \xi) \ln(\xi) \frac{\xi}{(\xi - 1)^2} \\ &= -\ln(1 - \xi) - \frac{\xi}{1 - \xi} \ln(\xi). \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Este resultado indica que la entropía de entrelazamiento es igual a la entropía térmica para un solo oscilador

$$S_2 = S_{th}(T) = \ln Z(T) + \frac{\langle E \rangle}{T} \quad (\text{V.22})$$

con temperatura  $T$  dada por

$$T = T(k_0, k_1) = -\frac{\alpha}{\ln \xi}. \quad (\text{V.23})$$

Por (V.23), notamos que  $\xi \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$ . En este caso, (V.21) indica que  $S_2 \rightarrow 0$ . Así, notamos que esta temperatura es producto de tener una entropía de entrelazamiento cuando se tiene acceso únicamente a una parte del sistema, como en este ejemplo. Si la entropía es cero (es decir, cuando no hay entrelazamiento), la temperatura es cero.

## VI. TEORÍAS CONFORMES

La teoría de campo conforme juega un papel central en la descripción de fases de transición de segundo o mayor orden en sistemas de dos dimensiones, así como en la teoría de cuerdas. Las teorías de campo conformes (o CFT, por sus siglas en inglés) en dos dimensiones son ejemplos perfectos de sistemas en los cuales las simetrías son tan poderosas que permiten una solución exacta del problema. Esta característica, así como la gran variedad de conceptos matemáticos necesarios en su solución y definición, ha hecho a las CFT una de las áreas de investigación más activas en la física matemática.

En el contexto de un sistema físico con interacciones locales, la invarianza conforme es una extensión inmediata de la invarianza de escala, una simetría bajo dilataciones del espacio. Este hecho importante fue notado por primera vez por Alexander Polyakov en 1970. Las transformaciones conformes no son más que dilataciones por un factor de escala que es función de la posición (dilataciones locales). Es completamente natural que una teoría local (es decir, sin acción a distancia) que es simétrica bajo dilataciones rígidas (o globales) sea también simétrica bajo dilataciones locales. (Di Francesco, Mathieu y Senechal, 1997)

### A. El grupo de Poincaré

Consideramos las transformaciones infinitesimales de Poincaré

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (\text{VI.1})$$

bajo la restricción

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{VI.2})$$

A primer orden, la métrica se transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu), \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

pero la restricción (VI.2) implica que

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Para caracterizar  $\epsilon_\mu$ , podemos hacer una expansión en serie

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\mu x^\rho + \dots \quad (\text{VI.5})$$

donde  $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}, \dots$  son constantes. Para que  $\epsilon$  cumpla con (VI.4), deben cumplirse dos cosas: primero, que  $\epsilon$  es de la forma

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu. \quad (\text{VI.6})$$

Segundo,  $b_{\mu\nu}$  es antisimétrico

$$\begin{aligned} \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu &= 0 \\ b_{\nu\sigma} \partial_\mu x^\sigma + b_{\mu\sigma} \partial_\nu x^\sigma &= 0 \\ b_{\nu\sigma} \delta_\mu^\sigma + b_{\mu\sigma} \delta_\nu^\sigma &= 0 \\ b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} &= 0 \\ \Rightarrow b_{\nu\mu} &= -b_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Ahora, consideremos una función escalar  $\Phi(x)$ . Para la transformación  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ , se tiene la expansión

$$\Phi(x^\mu + a^\mu) = \Phi(x^\mu) + a^\mu \partial_\mu \Phi + \frac{1}{2} a^\mu a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \Phi + \dots$$

que puede ser escrita como

$$\Phi(x^\mu + a^\mu) = \exp(a^\mu \partial_\mu) \Phi(x).$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$\Phi(x^\mu + a^\mu) = \exp(ia^\mu (-i\partial_\mu)) \Phi(x) \quad (\text{VI.8})$$

de donde se identifica a  $-i\partial_\mu$  como el generador del álgebra de Lie y a  $\exp(ia^\mu (-i\partial_\mu))$  como un elemento del grupo de Lie. Este es el generador de traslaciones infinitesimales, identificado con el operador momentum:

$$P_\mu = -i\partial_\mu. \quad (\text{VI.9})$$

Si siguiendo el procedimiento anterior para la transformación  $x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu_\nu x^\nu$ , tenemos que

$$\Phi(x^\mu + b^\mu_\nu x^\nu) = \Phi(x^\mu) + b^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \Phi + \frac{1}{2} b^\mu_\nu x^\nu b^\rho_\sigma x^\sigma \partial_\mu \partial_\rho \Phi + \dots$$

que puede expresarse como

$$\Phi(x^\mu + b^\mu{}_\nu x^\nu) = \exp(b^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu) \Phi(x).$$

Pero, por la antisimetría de  $b^{\mu\nu}$

$$b^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu = -\frac{1}{2} b^{\mu\nu} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu).$$

De manera que

$$\Phi(x^\mu + b^\mu{}_\nu x^\nu) = \exp\left(\frac{i}{2} b^{\mu\nu} i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\right) \Phi(x), \quad (\text{VI.10})$$

de donde obtenemos el generador de rotaciones

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (\text{VI.11})$$

Al considerar  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  y la relación

$$[x_\mu, P_\nu] = -i\eta_{\mu\nu} \quad (\text{VI.12})$$

es posible calcular los conmutadores de los generadores

$$\begin{aligned} [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i[P_\rho, x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu] \\ &= i[P_\rho, x_\mu] \partial_\nu - i[P_\rho, x_\nu] \partial_\mu \\ &= i(i\eta_{\rho\mu} \partial_\nu - i\eta_{\rho\nu} \partial_\mu) \\ &= -i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu) \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

$$\begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= [x_\nu P_\mu - x_\mu P_\nu, x_\sigma P_\rho - x_\rho P_\sigma] \\ &= [x_\nu P_\mu, x_\sigma P_\rho] - [x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma] - [x_\mu P_\nu, x_\sigma P_\rho] + [x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma]. \end{aligned}$$

Podemos desarrollar cada conmutador de la expresión anterior gracias a las propiedades de los conmutadores, de manera que

$$\begin{aligned} [x_\nu P_\mu, x_\sigma P_\rho] &= x_\nu [P_\mu, x_\sigma P_\rho] + [x_\nu, x_\sigma P_\rho] P_\mu \\ &= x_\nu [P_\mu, x_\sigma] P_\rho + x_\nu x_\sigma [P_\mu, P_\rho] + [x_\nu, x_\sigma] P_\rho P_\mu + x_\sigma [x_\nu, P_\rho] P_\mu \\ &= x_\nu [P_\mu, x_\sigma] P_\rho + x_\sigma [x_\nu, P_\rho] P_\mu. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= x_\nu[P_\mu, x_\sigma]P_\rho + x_\sigma[x_\nu, P_\rho]P_\mu - x_\nu[P_\mu, x_\rho]P_\sigma - x_\rho[x_\nu, P_\sigma]P_\mu \\
&\quad - x_\mu[P_\nu, x_\sigma]P_\rho - x_\sigma[x_\mu, P_\rho]P_\nu + x_\mu[P_\nu, x_\rho]P_\sigma + x_\rho[x_\mu, P_\sigma]P_\nu \\
&= i(\eta_{\mu\sigma}x_\nu P_\rho - \eta_{\nu\rho}x_\sigma P_\mu - \eta_{\mu\rho}x_\nu P_\sigma + \eta_{\nu\sigma}x_\rho P_\mu \\
&\quad - \eta_{\nu\sigma}x_\mu P_\rho + \eta_{\mu\rho}x_\sigma P_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\mu P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}x_\rho P_\nu) \\
&= -i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{VI.14}$$

Lo que indica que los generadores obedecen el álgebra dado por (VI.13), (VI.14).

## B. El grupo conforme

Las transformaciones conformes son aquellas que localmente preservan ángulos entre vectores. En otras palabras, son transformaciones de que localmente rescalan la métrica

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda(x)g_{\mu\nu} \tag{VI.15}$$

donde  $\Lambda(x)$  se conoce como el factor de escala y es positivo. Esta transformación puede ser escrita como

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma} \tag{VI.16}$$

de manera que es posible identificar

$$\Lambda(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}. \tag{VI.17}$$

Para lo que viene a continuación, consideramos el espacio de Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Nótese que el grupo de Poincaré correspondiente a traslaciones y rotaciones se obtiene cuando  $\Lambda(x) = 1$ .

Como se hizo en la sección anterior para el grupo de Poincaré, analizaremos transformaciones infinitesimales de coordenadas hasta primer orden en un parámetro tal que  $\epsilon(x) \ll 1$ ,

$$x'^\rho = x^\rho + \epsilon^\rho(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{VI.18}$$

Así, al considerar (VI.16), se obtiene

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{VI.19}$$

similar a (VI.3). Sin embargo, en este caso, tenemos la condición

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = K(x) \eta_{\mu\nu} \quad (\text{VI.20})$$

para satisfacer (VI.16). Para determinar  $K(x)$ , podemos obtener la traza de (VI.20) con  $\eta^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) &= K(x) \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \\ 2\partial^\mu \epsilon_\mu &= K(x) d \\ \Rightarrow K(x) &= \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

donde  $\partial^\mu \epsilon_\mu = \partial \cdot \epsilon$ . De esta forma, se obtiene el factor de escala

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{VI.22})$$

Que al resolver para  $K(x)$ , encontramos la siguiente restricción sobre la transformación (VI.20) para que sea conforme:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu} \quad (\text{VI.23})$$

Podemos obtener relaciones útiles al calcular la derivada  $\partial^\nu$  de (VI.23) y sumar sobre  $\nu$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} \partial^\nu(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) &= \frac{2}{d} \partial^\nu(\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu} \\ \partial_\mu(\partial \cdot \epsilon) +_{\mu} &= \frac{2}{d} \partial_\mu(\partial \cdot \epsilon) \end{aligned}$$

donde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ . De nuevo, calculamos la derivada  $\partial_\nu$  para encontrar que

$$\partial_\mu \partial_\nu(\partial \cdot \epsilon) + \square \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\mu \partial_\nu(\partial \cdot \epsilon). \quad (\text{VI.24})$$

Al intercambiar  $\mu \leftrightarrow \nu$ , añadir la expresión resultante a (VI.24) y usar (VI.23) obtenemos

$$\begin{aligned} 2\partial_\mu \partial_\nu(\partial \cdot \epsilon) + \square \left( \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu} \right) &= \frac{4}{d} \partial_\mu \partial_\nu(\partial \cdot \epsilon) \\ \Rightarrow (\eta_{\mu\nu} \square + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu)(\partial \cdot \epsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Al contraer la expresión anterior

$$(d-1)\square(\partial \cdot \epsilon) = 0 \quad (\text{VI.25})$$

lo cual da información valiosa para caracterizar  $\epsilon$ . (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

1. El grupo conforme en  $d \geq 3$ . Ahora nos enfocamos en  $d \geq 3$ . De (VI.25), tenemos que

$$\partial \cdot \epsilon = A + B_\mu x^\mu \quad (\text{VI.26})$$

con  $A, B_\mu$  constantes. De esta forma,  $\epsilon_\mu$  es a lo sumo cuadrática en  $x^\nu$  y podemos hacer el ansatz:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad (\text{VI.27})$$

siempre teniendo en mente que las constantes  $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$ .

Nótese que (VI.27) es similar a (VI.6) a excepción del término cuadrático. Analizamos los términos de (VI.27) por separado ya que las restricciones para la invarianza conforme deben ser independientes de la posición  $x^\mu$ .

Como en el caso del grupo de Poincaré, podemos relacionar  $a_\mu$  con traslaciones infinitesimales de las coordenadas, de las cuales el generador es el operador de momentum

$$P_\mu = -i\partial_\mu. \quad (\text{VI.28})$$

Para  $b_{\mu\nu}$ , de (VI.24) encontramos que

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma} b_{\sigma\rho})\eta_{\nu\mu}. \quad (\text{VI.29})$$

Esto nos dice que la parte simétrica de  $b_{\mu\nu}$  es proporcional a  $\eta_{\mu\nu}$ , de manera que podemos separar a  $b_{\mu\nu}$  en sus partes simétrica y antisimétrica como

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}. \quad (\text{VI.30})$$

El término antisimétrico  $m_{\mu\nu}$  describe rotaciones y boosts infinitesimales, cuyo generador es el operador de momentum angular

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \quad (\text{VI.31})$$

La parte simétrica  $\alpha\eta_{\mu\nu}$  corresponde a transformaciones infinitesimales de escala, cuyo generador es

$$D = -ix^\mu\partial_\mu. \quad (\text{VI.32})$$

Por último, al considerar el término cuadrático de (VI.27) y reemplazarlo en (VI.24), obtenemos

las transformaciones

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + 2(x \cdot \beta)x^{\mu} - (x \cdot x)\beta^{\mu}, \quad (\text{VI.33})$$

que son las transformaciones conformes especiales (SCT, por sus siglas en inglés), donde  $\beta$  es una constante determinada por  $\beta_{\mu} = (1/d) c^{\rho}_{\rho\mu}$ . El generador correspondiente es

$$K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x \cdot x)\partial_{\mu}). \quad (\text{VI.34})$$

Con lo anterior, podemos expresar el álgebra conforme como

$$\begin{aligned} \text{Traslaciones} & \quad P_{\mu} = -i\partial_{\mu} \\ \text{Dilataciones} & \quad D = -ix^{\mu}\partial_{\mu} \\ \text{Rotaciones y boosts} & \quad L_{\mu\nu} = i(x^{\mu}\partial_{\nu} - x^{\nu}\partial_{\mu}) \\ \text{SCT} & \quad -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x \cdot x)\partial_{\mu}). \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Es posible demostrar que el álgebra conforme es el álgebra de Lie  $SO(d, 2)$ . Para ello, definimos

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} & = L_{\mu\nu} \\ J_{-1,\mu} & = \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) \\ J_{0,\mu} & = \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) \\ J_{-1,0} & = D \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

con  $m, n = -1, 0, 1, \dots, (d-1)$ . Por medio de (VI.14), (VI.13) y de los conmutadores (Di Francesco, Mathieu y Senechal, 1997)

$$\begin{aligned} [D, P_{\mu}] & = iP_{\mu} \\ [D, K_{\mu}] & = -iK_{\mu} \\ [K_{\mu}, P_{\nu}] & = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\ [K_{\rho}, L_{\mu\nu}] & = i(\eta_{\rho\mu}K_{\nu} - \eta_{\rho\nu}K_{\mu}) \end{aligned} \quad (\text{VI.37})$$

obtenemos que  $J_{m,n}$  satisface

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}). \quad (\text{VI.38})$$

En el caso de  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , la métrica es  $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$  para la cual (VI.38) son las relaciones de conmutación del álgebra de Lie  $SO(d, 2)$  (Blumenhagen y Plauschinn, 2009). De hecho, el grupo  $SO(d, r)$  es el grupo de isometrías de AdS (una de las primeras indicaciones de la corres-

pondencia AdS/CFT).

2. El grupo conforme en  $d = 2$ . Para el caso en dos dimensiones, la condición (VI.23) para la invarianza bajo transformaciones conformes infinitesimales da las ecuaciones

$$\begin{aligned}\partial_0\epsilon_0 &= \partial_1\epsilon_1 \\ \partial_0\epsilon_1 &= -\partial_1\epsilon_0\end{aligned}\tag{VI.39}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las cuales indican que  $\epsilon_0, \epsilon_1$  son funciones holomorfa en el plano complejo. Considerando que son funciones complejas, definimos

$$\begin{aligned}z &= x^0 + ix^1 \\ \bar{z} &= x^0 - ix^1\end{aligned}\tag{VI.40}$$

de manera que (VI.39) es equivalente a

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}\epsilon &= 0 \\ \partial_z\bar{\epsilon} &= 0,\end{aligned}\tag{VI.41}$$

donde  $\epsilon = \epsilon^0 + i\epsilon^1$ ,  $\bar{\epsilon} = \epsilon^0 - i\epsilon^1$ . (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

a. El álgebra de Witt. Belavin, Polyakov y Zamolodchikov (1984) encontraron que el grupo de transformaciones en dos dimensiones puede ser aumentado en un grupo de dimensión infinita, el cual es un grupo de simetrías que impone tantas restricciones sobre el sistema que a veces es posible resolver una teoría cuántica de campo completa. ¿Cuál es el truco para obtener este grupo de dimensión infinita? Consideramos la transformación

$$z \mapsto z + \epsilon(z)\tag{VI.42}$$

que nos permite pasar de  $z, \bar{z}$  funciones holomorfas a funciones meromorfas. Una función meromorfa es aquella que es holomorfa en un conjunto abierto del plano complejo, excepto en ciertos puntos llamados polos (divergencias aisladas). Esto quiere decir que podemos expandir  $\epsilon$  en una serie de Laurent

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1})\tag{VI.43}$$

y similar para  $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ . En estas expansiones,  $\epsilon_n$  y  $\bar{\epsilon}_n$  son parámetros infinitesimales constantes. Los

generadores correspondientes a una transformación para un  $n$  particular son

$$\begin{aligned} l_n &= -z^{n+1} \partial_z \\ \bar{l}_n &= -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

De esta manera, ya tenemos una cantidad infinita de transformaciones conformes infinitesimales independientes.

Ahora, calculamos los conmutadores de los generadores para determinar que forman un álgebra de Witt:

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= z^{m+1} \partial_z (z^{n+1} \partial_z) - z^{n+1} \partial_z (z^{m+1} \partial_z) \\ &= (n+1) z^{m+n+1} \partial_z - (m+1) z^{m+n+1} \partial_z \\ &= -(m-n) z^{m+n+1} \partial_z \\ &= (m-n) l_{m+n} \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

$$\begin{aligned} [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m-n) \bar{l}_{m+n}. \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.46})$$

La primera relación de conmutación define una copia del álgebra de Witt, mientras que las otras dos relaciones definen una segunda copia que conmuta con la primera. Así, el álgebra de transformaciones conformes infinitesimales en un espacio euclideo de dos dimensiones es de dimensión infinita. (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

b. Transformaciones conformes globales. Enfoquémonos en la copia del álgebra de Witt generada por  $l_n$  y notemos que en el plano euclideo  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ , los generadores no están definidos en todo punto; en particular, hay una ambigüedad en  $z = 0$  y resulta que no es necesario trabajar en  $\mathbb{C}$ , sino en la esfera de Riemann  $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , que es la compactificación conforme de  $\mathbb{R}^2$ .

En la esfera de Riemann  $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , los generadores importantes son  $\{l_{-1}, l_0, l_{+1}\}$ , ya que estos generan el álgebra conforme global

$$\begin{aligned} l_{-1} &= -\partial_z && \text{Traslaciones conformes} \\ l_0 &= -z \partial_z && \text{Transformaciones de escala, rotaciones} \\ l_{+1} &= -z^2 \partial_z && \text{SCT.} \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

Todas las posibles transformaciones que pueden generarse con estos tres operadores corresponden a transformaciones de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc = 1 \quad (\text{VI.48})$$

de manera que podemos concluir que el grupo conforme en la esfera de Riemann es el grupo de Möbius  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ . (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

c. El álgebra de Virasoro. El álgebra de Virasoro no es más que algo llamado la extensión central del álgebra de Witt. Una extensión central básicamente quiere decir que se puede tomar el álgebra de Witt y añadir unos generadores extra ( $g \oplus \mathbb{C}$ , suma directa con  $g$  un álgebra de Lie por  $\mathbb{C}$ ). Denotemos los elementos de la extensión central del álgebra de Witt por  $L_n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y escribamos sus relaciones de conmutación como

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + cp(m, n). \quad (\text{VI.49})$$

La forma precisa de  $p(m, n)$  puede determinarse al considerar:

- $p(m, n) = -p(n, m)$  para ser compatible con la antisimetría del bracket de Lie.
- La identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} 0 &= [[L_m, L_n], L_0] + [[L_n, L_0], L_m] + [[L_0, L_m], L_n] \\ 0 &= (m - n)cp(m + n, 0) + ncp(n, m) - mcp(m, n) \\ 0 &= (m + n)p(n, m), \end{aligned}$$

por lo que en el caso  $n \neq -m$ , tenemos  $p(n, m) = 0$ . Por lo tanto, las extensiones centrales distintas de cero son  $p(n, -n)$  para  $|n| \geq 2$ .

- La siguiente identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} 0 &= [[L_{-n+1}, L_n], L_{-1}] + [[L_n, L_{-1}], L_{-n+1}] + [[L_{-1}, L_{-n+1}], L_n] \\ 0 &= (-2n + 1)cp(1, -1) + (n + 1)cp(n - 1, -n + 1) + (n - 2)cp(-n, n) \end{aligned}$$

que lleva a una relación de recursión de la forma

$$p(n, -n) = \frac{n + 1}{n - 2}p(n - 1, -n + 1).$$

La extensión central del álgebra de Witt se llama álgebra de Virasoro y la constante  $c$  se

denomina carga central. En resumen, este álgebra tiene las relaciones de conmutación

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \quad (\text{VI.50})$$

Es importante mencionar el hecho que  $L_{-1}, L_0, L_{+1}$  no se ven afectados por (VI.50) y que estos siguen siendo los generadores de traslaciones, dilataciones y rotaciones, y SCT, respectivamente. (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

## C. Campos primarios

Recordemos el hecho que pudimos identificar dos copias del álgebra de Witt que conmutaban y que naturalmente se podían extender al álgebra de Virasoro. Ya que los generadores del álgebra de Witt están expresados en términos de  $z, \bar{z}$ , resultado que es conveniente considerarlas como dos variables complejas independientes. Para los campos  $\phi$ , la complexificación  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  significa

$$\phi(x^0, x^1) \rightarrow \phi(z, \bar{z}).$$

Un campo es

$$\begin{aligned} \text{quiral si } \quad & \phi(z, \bar{z}) = \phi(z) \\ \text{antiquiral si } \quad & \phi(z, \bar{z}) = \phi(\bar{z}). \end{aligned} \quad (\text{VI.51})$$

Un campo que se transforma de la siguiente manera es llamado primario o cuasi-primario:

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}). \quad (\text{VI.52})$$

Consideremos un campo bajo la transformación conforme  $z \mapsto f(z)$ , de manera que

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (\text{VI.53})$$

donde  $(h, \bar{h})$  son llamados los pesos conformes. Si se satisface (VI.53) únicamente para  $f \in SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ , es decir, solo para transformaciones conformes globales, entonces se dice que  $\phi$  es un campo cuasi-primario. Si se cumple para cualquier transformación del álgebra de Virasoro, entonces el campo es primario.

Consideramos un mapeo

$$f(z) = z + \epsilon(z)$$

con  $\epsilon(z) \ll 1$ . Hasta primer orden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h = 1 + h\partial_z\epsilon(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\phi(z + \epsilon(z), \bar{z}) = \phi(z) + \epsilon(z)\partial_z\phi(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Al usar estas dos expresiones en la definición de campo primario (VI.53), obtenemos

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi(z, \bar{z}) + (h\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}})\phi(z, \bar{z}),$$

de manera que la transformación de un campo primario bajo una transformación conforme infinitesimal es

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}\phi(z, \bar{z}) = (h\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}})\phi(z, \bar{z}). \quad (\text{VI.54})$$

Lo cual nos da otra característica sobre los campos primarios. (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

## D. El tensor Energía-Momentum

Este tensor representa la respuesta que la acción tiene bajo un cambio de la métrica; nos dice cómo la teoría responde a cambios en el espacio-tiempo. De hecho, el tensor energía-momentum puede obtenerse de la variación de la acción Lagrangiana con respecto a la métrica, por lo que contiene información del comportamiento de la teoría bajo transformaciones infinitesimales  $g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ .

Recordarnos que el teorema de Noether nos indica que para cualquier simetría continua, hay una respectiva cantidad conservada. Consideremos la corriente

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu. \quad (\text{VI.55})$$

Donde  $T_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico que se identifica con el tensor de energía-momentum. Para que la cantidad (VI.55) sea conservada,

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (\text{VI.56})$$

Esto se cumple de forma trivial para  $\epsilon = \text{const}$ . Sin embargo, si  $\epsilon$  es una función que es parte de una transformación conforme infinitesimal, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= (\partial^\mu T_{\mu\nu})\epsilon^\nu + T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu) \\ &= T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu) \\ &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \left[ \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \eta^{\mu\nu} \right]$$

donde la última línea se debe a la ecuación de Killing conforme, (VI.23). Esto implica que

$$T^\mu{}_\mu = 0, \quad (\text{VI.57})$$

es decir, el tensor energía momentum no tiene traza en el caso de las CFTs. Ahora, al considerar dos dimensiones

$$T_{\mu\nu}(z, \bar{z}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} T_{\alpha\beta}(x^0, x^1).$$

Usamos

$$\begin{aligned} \text{Parte real} \quad x^0 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \text{Parte imaginaria} \quad x^1 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

Encontramos

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}) \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}) \\ T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} &= \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = 0 \end{aligned}$$

Donde la última línea es resultado de que el tensor tenga traza igual a cero. Usando el hecho que  $T_{00} = -T_{11}$ , reescribimos

$$T_{zz} = \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}) \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10}). \quad (\text{VI.59})$$

Y por (VI.56), tenemos que las componentes no nulas del tensor cumplen

$$\begin{aligned} \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} &= 0 \\ \partial_{\bar{z}} T_{zz} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

de manera que

$$T_{zz}(z, \bar{z}) = T(z) \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}) \quad (\text{VI.61})$$

lo cual quiere decir que las componentes no nulas del tensor de energía-momentum son un campo quirial y uno anti-quirial. (Blumenhagen y Plauschinn, 2009)

## VII. FÓRMULA DE RYU Y TAKAYANAGI

La correspondencia AdS/CFT es una relación entre teorías de gravedad cuántica en espacio-tiempos  $\text{AdS}_{d+1}$  y una  $\text{CFT}_d$  ordinaria, sin gravedad. Esta relación es llamada una dualidad, y a su vez es holográfica ya que la teoría gravitatoria “vive” en (por lo menos) una dimensión extra. Se cree que las dos teorías son completamente equivalentes: cualquier cantidad física (gauge-invariante) que pueda ser calculada en una teoría también podrá ser calculada en la teoría dual. Sin embargo, este mapeo entre las dos teorías puede ser no trivial, haciendo que ciertas cantidades en una teoría sean mapeadas a cantidades altamente acopladas y difícilmente calculables en la otra teoría. (Hartman, 2015)

Las dos teorías son comunmente referidas como “el volumen” (*the bulk*, refiriéndose a la teoría de gravedad) y “la frontera” (*the boundary*, en referencia a la CFT). Esta correspondencia fue propuesta por Maldacena (1997), y de momento sigue siendo una conjetura aunque el desarrollo de la misma a lo largo de los últimos años y los resultados obtenidos dan cada vez mayor evidencia de su validez. (Hartman, 2015)

La correspondencia AdS/CFT fue utilizada por Ryu y Takayanagi (2006) para la derivación holográfica de la entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas conformes, argumentando que la entropía de entrelazamiento de teorías de campo conformes en  $d + 1$  dimensiones puede obtenerse del área de superficies mínimas en  $\text{AdS}_{d+2}$ , análogo a la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de los hoyos negros.

### A. Entropía de entrelazamiento en $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$

A continuación se sigue un procedimiento similar al de Ryu y Takayanagi (2006), con cálculos realizados por cuenta propia y de forma distinta a los presentados en el artículo, para computar la entropía de entrelazamiento en  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ . Una de las primeras observaciones que hacen Ryu y Takayanagi se da al considerar la entropía de entrelazamiento  $S_A$  del subsistema  $A$  de un sistema  $A \cup B$  como la entropía de un observador que tiene acceso solo al subsistema  $A$  y no recibe señales del subsistema  $B$ . De esta forma, el subsistema  $B$  es análogo al interior del horizonte de un hoyo negro para un observador que se encuentra en  $A$ , es decir, afuera del horizonte. De hecho, una de las motivaciones originales de la entropía de entrelazamiento fue su similitud a la entropía de

Bekenstein-Hawking.

Ahora, para sistemas cuánticos unidimensionales de varios cuerpos en puntos críticos (es decir, una CFT en 2 dimensiones), se sabe que la entropía de entrelazamiento está dada por (Calabrese y Cardy, 2004)

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left( \frac{L}{\pi a} \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right), \quad (\text{VII.1})$$

donde  $l$  y  $L$  son el largo del subsistema  $A$  y el largo del sistema total  $A \cup B$  (cuyos bordes están periódicamente identificados), respectivamente;  $a$  es un *cutoff* o límite ultravioleta (UV);  $c$  es la carga central de la CFT. Cuando no se está cerca de puntos críticos, la ecuación (VII.1) es reemplazada por (Calabrese y Cardy, 2004)

$$S_A = \frac{c}{6} \mathcal{A} \log \frac{\xi}{a}, \quad (\text{VII.2})$$

donde  $\xi$  es el largo de correlación y  $\mathcal{A}$  es el número de puntos de frontera de  $A$  (por ejemplo,  $\mathcal{A} = 2$  en la configuración de (VII.1)).

A la luz de la dualidad AdS/CFT, Ryu y Takayanagi (2006) proponen definir la entropía de entrelazamiento  $S_A$  en una CFT en  $\mathbb{R}^{1,d}$  (o  $\mathbb{R} \times S^d$ ) para un subsistema  $A$  que tiene una frontera  $d - 1$ -dimensional arbitraria  $\partial A \in \mathbb{R}^d$  (o  $S^d$ ) mediante la fórmula (conocida como la fórmula de Ryu y Takayanagi):

$$S_A = \frac{\text{área de } \gamma_A}{4G_N^{d+2}}, \quad (\text{VII.3})$$

donde  $\gamma_A$  es la superficie mínima estática  $d$ -dimensional en  $\text{AdS}_{d+2}$  cuya frontera está dada por  $\partial A$ , y  $G_N^{(d+2)}$  es la constante de Newton en  $d + 2$  dimensiones. Intuitivamente, esto sugiere que la superficie  $\gamma_A$  juega el papel de una pantalla holográfica para un observador que solo tiene acceso al subsistema  $A$ . En el caso a desarrollar se tendrá que  $d = 1$  y  $\gamma_A$  está dada por una línea geodésica en  $\text{AdS}_3$ . De (VII.3) es notable que las propiedades básicas de la entropía de entrelazamiento se cumplen:  $S_A = S_B$  y la subaditividad  $S_{A_1} + S_{A_2} \geq S_{A_1 \cup A_2}$ .

También es posible definir la entropía de entrelazamiento a temperatura finita  $T = \beta^{-1}$ . Por ejemplo, en una CFT de dos dimensiones sobre una línea infinitamente larga, la entropía está dada al reemplazar  $L$  en (VII.1) con  $i\beta$ , de acuerdo a lo obtenido por Calabrese y Cardy (2004). Es notable que  $S_A = S_B$  ya no se cumple cuando  $T > 0$  ya que  $\rho$  está en un estado mixto.

1. Entropía de entrelazamiento en coordenadas globales. Empecemos considerando la entropía de entrelazamiento en una CFT (1+1)-dimensional. De acuerdo a

la correspondencia AdS/CFT, las teorías gravitacionales en el espacio AdS<sub>3</sub> de radio  $R$  son duales a las CFTs en dos dimensiones con la carga central

$$c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}}. \quad (\text{VII.4})$$

La métrica de AdS<sub>3</sub> en coordenadas globales  $(t, \rho, \theta)$  es

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2). \quad (\text{VII.5})$$

En la frontera  $\rho = \infty$  de AdS<sub>3</sub>, la métrica es divergente. Para regular cantidades físicas, consideramos un límite (*cutoff*)  $\rho_0$  y restringimos el espacio a la región limitada  $\rho \leq \rho_0$ . Este procedimiento corresponde a un límite UV en la CFT dual. Si  $L$  es el largo total del sistema con ambos extremos identificados, y  $a$  es el espaciado reticular (o cutoff UV) en las CFTs, se tiene la relación (hasta un factor numérico)

$$e^{\rho_0} \sim L/a. \quad (\text{VII.6})$$

El espacio-tiempo (1+1)-dimensional para la CFT<sub>2</sub> está identificado con el cilindro  $(t, \theta)$  en la frontera  $\rho = \rho_0$ . El subsistema  $A$  es la región  $0 \leq \theta \leq 2\pi l/L$ . Entonces, el área  $\gamma_A$  en (VII.3) se identifica con la geodésica estática que conecta el punto de frontera  $\theta = 0$  y  $2\pi l/L$  con  $t$  fijo, viajando adentro del espacio AdS<sub>3</sub>. Con el cutoff  $\rho_0$  introducido, es posible calcular la distancia de la geodésica para la métrica (VII.5):

$$L_{\gamma_A} = \int_{\rho_i}^{\rho_0} d\rho R \sqrt{1 + \sinh^2 \rho \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}. \quad (\text{VII.7})$$

Nótese que (VII.5) es independiente de  $\theta$ , por lo que tenemos una cantidad conservada  $C$ . Por las ecuaciones de Euler-Lagrange, es posible obtener la relación

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sinh^2 \rho \theta'}{\sqrt{1 + \sinh^2 \rho \theta'^2}} \\ \Rightarrow \theta'(\rho) &= \frac{C}{\sinh \rho \sqrt{\sinh^2 \rho - C^2}}. \end{aligned}$$

Para determinar  $C$ , debemos pensar que hay un punto para la coordenada  $\rho$  en la geodésica donde la variable es mínima ya que, para un tiempo fijo en AdS<sub>3</sub>, estamos trabajando sobre una circunferencia de radio  $\rho_0$  en un plano hiperbólico. Esto quiere decir que las geodésicas en este espacio serán curvas cerradas cuyo punto de retorno se da en  $\rho_*$ . Ya que este es un punto mínimo,

la condición sobre la constante será  $C = \sinh \rho_*$ , de manera que  $\theta'(\rho_*) \rightarrow \infty$ . De esta manera

$$\theta'(\rho) = \frac{\sinh \rho_*}{\sinh \rho \sqrt{\sinh^2 \rho - \sinh^2 \rho_*}}. \quad (\text{VII.8})$$

Al sustituir (VII.8) en (VII.7), se tiene que

$$L_{\gamma_A} = R \int_{\rho_i}^{\rho_0} d\rho \frac{\sinh \rho}{\sqrt{\sinh^2 \rho - \sinh^2 \rho_*}}. \quad (\text{VII.9})$$

Antes de resolver esta integral, será valioso obtener una relación entre los puntos final e inicial de la coordenada angular  $\theta$  con el punto radial mínimo  $\rho_*$  y  $\rho_0$ . Esta se obtiene mediante la integral (valiéndonos de la simetría de la curva geodésica)

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 2 \int_{\rho_*}^{\rho_0} d\rho \frac{\sinh \rho_*}{\sinh \rho \sqrt{\sinh^2 \rho - \sinh^2 \rho_*}} \\ \frac{\Delta\theta}{2} &= -\arctan \left( \frac{\sqrt{2} \sinh \rho_* \cosh \rho_0}{\sqrt{\cosh(2\rho_0) - \cosh(2\rho_*)}} \right) + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

Considerando que  $\rho_0 \gg 1$ , tenemos que  $\cosh \rho_0 \sim \frac{e^{\rho_0}}{2}$ . De manera que

$$\frac{\sqrt{2} \sinh \rho_* \cosh \rho_0}{\sqrt{\cosh(2\rho_0) - \cosh(2\rho_*)}} \approx \frac{\sqrt{2} \sinh \rho_* e^{\rho_0}/2}{\sqrt{e^{2\rho_0}/2}} = \sinh \rho_*$$

por lo que tenemos la relación

$$\cot \left( \frac{\Delta\theta}{2} \right) = \cot \left( \frac{\pi l}{L} \right) \approx \sinh \rho_*. \quad (\text{VII.11})$$

Ahora ya tenemos lo necesario para resolver (VII.9). Por cuestiones de simetría de la curva, consideraremos esta integral igual a dos veces la integral con el límite inferior  $\rho_i = \rho_*$ . De esta forma, obtenemos el resultado

$$L_{\gamma_A} = 2R \log \left( \frac{\sqrt{\cosh(2\rho_0) - \cosh(2\rho_*)} + \sqrt{2} \cosh \rho_0}{\sqrt{2} \cosh \rho_*} \right). \quad (\text{VII.12})$$

De nuevo, considerando que  $\rho_0 \gg 1$  y tomando en cuenta (VII.11), tenemos que

$$\frac{\sqrt{\cosh(2\rho_0) - \cosh(2\rho_*)} + \sqrt{2} \cosh \rho_0}{\sqrt{2} \cosh \rho_*} \approx \frac{\sqrt{e^{2\rho_0}/2} + e^{\rho_0}/\sqrt{2}}{\sqrt{2} \csc \left( \frac{\Delta\theta}{2} \right)} = e^{\rho_0} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right).$$

Por lo cual

$$L_{\gamma_A} \approx 2R \log \left( e^{\rho_0} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right). \quad (\text{VII.13})$$

Al utilizar (VII.13), sustituir este valor en (VII.3) y tomando en cuenta (VII.6) (en este caso,

$e^{\rho_0} = L/\pi a$ ), obtenemos

$$S_A \approx \frac{2R}{4G_N^{(3)}} \log \left( e^{\rho_0} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{L}{\pi a} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right), \quad (\text{VII.14})$$

que coincide precisamente con el resultado (VII.1) obtenido a partir de la CFT.

La relación (VII.3) sugiere que la geodésica (o superficie mínima en el caso de más dimensiones)  $\gamma_A$  es análoga a un horizonte de eventos considerando al subsistema  $B$  como un hoyo negro, a pesar que la división entre  $A$  y  $B$  es artificial. En otras palabras, el observador, quien no necesariamente tiene acceso a  $B$ , considerará  $\gamma_A$  como una pantalla holográfica. La superficie mínima provee el límite de entropía más preciso al fijar las condiciones de frontera.

**2. Entropía de entrelazamiento a temperatura finita.** Ahora nos enfocamos en la entropía a temperatura finita. Suponemos que la distancia espacial del sistema total  $L$  es infinitamente larga, es decir,  $\beta/L \ll 1$ . A alta temperatura, el dual gravitatorio de la CFT es el hoyo negro de BTZ euclidiano con la métrica dada por

$$ds^2 = (r^2 - r_+^2)d\tau^2 + \frac{R^2}{r^2 - r_+^2}dr^2 + r^2d\varphi^2. \quad (\text{VII.15})$$

El tiempo euclidiano está compactificado como  $\tau \sim \tau + \frac{2\pi R}{r_+}$  para obtener una geometría suave, además de la periodicidad  $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ . Es posible encontrar la relación  $\frac{\beta}{L} = \frac{R}{r_+} \ll 1$  entre la CFT y el hoyo negro.

El subsistema  $A$  está definido por  $0 \leq \varphi \leq 2\pi l/L$  en la frontera. Entonces esperamos que la entropía pueda ser computada de la distancia geodésica entre los puntos de frontera  $\varphi = 0, 2\pi l/L$  en un tiempo fijo. En este caso, el largo de la geodésica estática está dado por

$$L_{\gamma_A} = \int_{r_i}^{r_f} dr \sqrt{\frac{R^2}{r^2 - r_+^2} + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2}. \quad (\text{VII.16})$$

En este caso, de nuevo tenemos un límite (cutoff) en el radio. También podemos considerar de nuevo un valor mínimo para el radio,  $r_*$ , e imponer la condición de frontera  $\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_*} = 0$ . De forma similar a como trabajamos en las coordenadas globales, podemos llegar a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi}{2} &= R \int_{r_*}^{r_0} dr \frac{r_*}{r \sqrt{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_*^2)}} \\ &= \frac{Rr_*}{2r^2} F_1 \left( 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{r_+^2}{r^2}, \frac{r_*^2}{r^2} \right) \Big|_{r_*}^{r_0} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{R}{r_+} \tanh^{-1} \left( \frac{r_+}{r_*} \right) \quad (\text{VII.17})$$

donde  $F_1$  es una función hipergeométrica de Appell de dos variables. Además, en la última línea se hizo una aproximación a partir del hecho que consideramos  $r_0 \gg 1$ . De esto, se tiene que

$$r_* = r_+ \coth \left( \frac{\pi l}{\beta} \right), \quad (\text{VII.18})$$

con temperatura inversa  $\beta = RL/r_+$ . Ahora, la integral de longitud de la geodésica

$$\begin{aligned} L_{\gamma_A} &= 2R \int_{r_*}^{r_0} dr \frac{r}{\sqrt{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_*^2)}} \\ &= 2R \log \left( \sqrt{r^2 - r_+^2} + \sqrt{r^2 - r_*^2} \right) \Big|_{r_*}^{r_0} \\ &= 2R \log \left( \frac{\sqrt{r_0^2 - r_+^2} + \sqrt{r_0^2 - r_*^2}}{\sqrt{r_*^2 - r_+^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Al utilizar la relación (VII.18) y el hecho que  $r_0 \gg 1$ , tenemos

$$\frac{\sqrt{r_0^2 - r_+^2} + \sqrt{r_0^2 - r_*^2}}{\sqrt{r_*^2 - r_+^2}} \approx \frac{\sqrt{r_0^2} + \sqrt{r_0^2}}{\sqrt{r_+^2 \coth^2 \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) - r_+^2}} = \frac{2r_0}{r_+} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right). \quad (\text{VII.20})$$

De esta forma, tenemos que

$$L_{\gamma_A} \approx 2R \log \left( \frac{2r_0}{r_+} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) \right). \quad (\text{VII.21})$$

Al hacer la relación  $r_0 = \frac{r_+ \beta}{2\pi a}$ , es posible utilizar (VII.3) para calcular la entropía de entrelazamiento y así obtener

$$S_A \approx \frac{2R}{G_N^{(3)}} \log \left( \frac{2r_0}{r_+} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) \right) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{\beta}{\pi a} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) \right), \quad (\text{VII.22})$$

acorde a lo desarrollado en Ryu y Takayanagi (2006).

**3. Entropía de entrelazamiento a temperatura cero.** En este caso, nos interesa la entropía de entrelazamiento  $S_A$  en un sistema infinitamente largo cuando  $A$  es un intervalo de largo  $l/2$  (Nishioka, Ryu y Takayanagi, 2009). Estos cálculos y análisis son posibles en la métrica de Poincaré

$$ds^2 = R^2 z^{-2} (dz^2 - dx_0^2 + dr^2). \quad (\text{VII.23})$$

Definimos el subsistema  $A$  por la región  $-l/2 \leq r \leq l/2$  en la frontera  $z = 0$ . La curva de la geodésica  $\gamma_A$  está dada por la parametrización

$$(r, z) = \frac{l}{2}(\cos s, \sin s), \quad (\epsilon \leq s \leq \pi - \epsilon), \quad (\text{VII.24})$$

donde el infinitesimal  $\epsilon$  es el cutoff UV  $\epsilon \sim 2a/l$  (o equivalentemente  $z_{UV} \sim a$ ). Obtenemos la entropía de forma sencilla

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{L_{\gamma_A}}{4G_N^{(3)}} \\ &= \frac{R}{2G_N^{(3)}} \int_{\epsilon}^{\pi/2} \frac{ds}{\sin s} \\ &= \frac{c}{3} \log \frac{l}{a}. \end{aligned} \quad (\text{VII.25})$$

Este resultado concuerda con (VII.1) en el límite de  $l$  pequeña. De hecho, al considerar (VII.14) con  $L \gg l$  (que es el caso actual en que el sistema es infinitamente largo y a temperatura cero), se obtiene (VII.25) al hacer la expansión

$$\frac{L}{\pi a} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right) = \frac{L}{\pi a} \left[ \frac{\pi l}{L} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi l}{L}\right)^3 + \dots \right]$$

donde solo el primer término de la expansión se mantiene y es igual a  $l/a$ .

Al considerar (VII.22), ya estamos tomando en cuenta un sistema infinitamente largo. Al hacer  $T \rightarrow 0$  (es decir,  $\beta \rightarrow \infty$ ), tenemos que de la expansión

$$\frac{\beta}{\pi a} \sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right) = \frac{\beta}{\pi a} \left[ \frac{\pi l}{\beta} + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi l}{\beta}\right)^3 + \dots \right]$$

sobrevive únicamente el primer término igual a  $l/a$ , de forma que se obtiene de nuevo el resultado (VII.25).

Al perturbar una CFT mediante una perturbación relevante, el flujo del grupo de renormalización lleva a la teoría a un punto fijo IR (infrarrojo) trivial. Denotamos el largo de correlación como  $\xi$ . En el dual de AdS, esta deformación masiva corresponde a no tomar en cuenta la región IR, restringiendo los valores permitidos de  $z$  a  $z \leq \xi$ . En el límite de  $l$  grande, encontramos

$$S_A = \frac{1}{4G_N^{(3)}} \int_{\epsilon}^{2\xi/l} \frac{ds}{\sin s} = \frac{c}{6} \log \frac{\xi}{a}. \quad (\text{VII.26})$$

Este resultado concuerda con el resultado obtenido de la CFT con  $\mathcal{A} = 1$ . (Ryu y Takayanagi, 2006)

Así, vemos que los resultados aquí obtenidos y replicados de Ryu y Takayanagi (2006) son satisfactorios: (VII.14), (VII.22), (VII.25) y (VII.26) concuerdan con (VII.1) y (VII.2) en sus respectivos casos al utilizar la fórmula de Ryu y Takayanagi (VII.3).

## VIII. CONCLUSIONES

Ryu y Takayanagi (2006) propusieron una fórmula a partir de la correspondencia AdS/CFT para calcular la entropía de entrelazamiento de un sistema en una teoría de campo conforme en 1+1 dimensiones al traducir el problema a un espacio anti de-Sitter de 2+1 dimensiones. En el caso de un sistema a temperatura finita, la superficie mínima envuelve una fracción del horizonte del hoyo negro y esta parte es responsable por la contribución térmica. Este logro da evidencia de la validez de la conjetura de Maldacena, la correspondencia AdS/CFT, y dio paso a que resurgiera el interés en el principio holográfico para cálculos de entropía de entrelazamiento, una cantidad cada vez más importante en varias ramas de la Física, especialmente en la física de la materia condensada.

En este trabajo, se logró hacer el desarrollo de los cálculos correspondientes a este tema para replicar los resultados obtenidos por estos dos científicos: los cálculos realizados por cuenta propia llevaron a los resultados (VII.14), (VII.22), (VII.25) y (VII.26) haciendo uso de la fórmula de Ryu y Takayanagi (VII.3); estos concuerdan con (VII.1) y (VII.2) en sus casos respectivos.

Lo anterior permitió que se cumpliera el objetivo de calcular de forma holográfica la entropía de entrelazamiento en teorías conformes (1+1)-dimensionales mediante su reformulación en gravedad (2+1)-dimensional a temperatura finita. El otro objetivo también se logró y fue esencial para llegar al resultado del primer objetivo: se realizó un resumen no exhaustivo de información necesaria para comprender los diversos temas que están relacionados en el marco de la correspondencia AdS/CFT: la relatividad general y sus soluciones de hoyos negros, especialmente en tres dimensiones donde se tiene el caso especial del espacio  $\text{AdS}_3$  y que también posee la solución del hoyo negro de BTZ; el entrelazamiento cuántico, un fenómeno común en los sistemas cuánticos y que se cuantifica mediante la entropía de entrelazamiento. Esta entropía en general no es sencillo calcularla, pero en una teoría conforme, las simetrías y propiedades del tensor de energía-momentum permiten computar este valor, como lo obtuvieron Calabrese y Cardy (2004). Por último, junto a los resultados principales en el último capítulo, se logró dar detalles y una descripción de cuestiones importantes sobre  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ .

## IX. BIBLIOGRAFÍA

- Bañados, M.; C. Teitelboim y J. Zanelli. 1992. «The Black Hole in Three Dimensional Spacetime». *Phys. Rev. Lett.* **69**: 1849-1851.
- Belavin, A.A.; A.M. Polyakov y A.B. Zamolodchikov. 1984. «Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory». *Nuclear Physics B* **241** (2): 333-380.
- Blumenhagen, R. y E. Plauschinn. 2009. *Introduction to Conformal Field Theory with Applications to String Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 276 págs.
- Calabrese, P. y J. L. Cardy. 2004. «Entanglement entropy and quantum field theory». *Journal of Statistical Mechanics* **0406**, P06002
- Carlip, Steven. 2005. «Quantum Gravity in 2+1 Dimensions: The Case of a Closed Universe». *Living Reviews in Relativity*, **8**, 1.
- Carroll, Sean M. 2004. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley. 513 págs.
- Di Francesco, P.; P. Mathieu y D. Senechal. 1997. *Conformal Field Theory*. Nueva York: Springer-Verlag New York, Inc. 890 págs.
- Fradkin, Eduardo. 2013. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. 2<sup>a</sup> ed. Nueva York: Cambridge University Press.
- Hartle, James B. 2003. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley. 582 págs.
- Hartman, Tom. 2015. «Preview of the AdS/CFT correspondence». *Lecture Notes, Course: Quantum Gravity and Black Holes*. <http://www.hartmanhep.net/topics2015/10-interlude.pdf>
- Kraus, Per. 2006. «Lectures on black holes and the AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> correspondence». *Lect. Notes Phys.* **755**: 193-247.
- Maldacena, Juan. 1997. «The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity». *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**: 231-252.
- Nishioka, T.; S. Ryu y T. Takayanagi. 2009. «Holographic Entanglement Entropy: An Overview». *Journal of Physics A* **42** (50), 504008.

- Ryu, S. y T. Takayanagi. 2006. «Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT». *Physical Review Letters* **96**, 181602
- Shankar, R. 1994. *Principles of Quantum Mechanics*. 2<sup>a</sup> ed. Nueva York: Plenum Press. 694 págs.
- Srednicki, Mark. 1993. «Entropy and Area». *Phys. Rev. Letter.* **71**: 666-669.
- Susskind, Leonard; A. Friedman. 2014. *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum*. Nueva York: Basic Books. 364 págs.
- Susskind, Leonard; J. Lindesay. 2005. *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*. Singapur: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 200 págs.

# X. APÉNDICE

## A. Geometría diferencial

1. ¿Qué es una variedad? Una variedad (o variedad diferenciable) es uno de los conceptos fundamentales en matemática y física. Esta surge ya que, claramente, existen otros espacios además de  $\mathbb{R}^n$  (tales como esferas) que intuitivamente consideramos como “curvados” o que quizás son topológicamente complicados, sobre los quisiéramos realizar operaciones que son posibles en un espacio euclidiano  $n$ -dimensional, como la diferenciación, integración, propiedades de funciones, etc. Por ello, es necesaria la noción de variedad, que corresponde a un espacio que puede ser curvo y tener una topología complicada, pero que en regiones locales se parece a  $\mathbb{R}^n$ . Aquí, “se parece a” no quiere decir que la métrica es la misma, sino que más nociones primitivas como funciones y coordenadas funcionan de forma similar. La variedad entera se construye al pegar topológicamente estos “parches” que son las regiones locales. La dimensionalidad  $n$  del espacio euclidiano que se utiliza debe ser la misma para cada parche de la variedad; así, decimos que la variedad es de dimensión  $n$ . De esta forma, es posible analizar funciones en tal espacio al convertirlas (localmente) en funciones en un espacio euclidiano.

Algunos ejemplos de variedades:  $\mathbb{R}^n$ , como la recta ( $\mathbb{R}$ ), el plano ( $\mathbb{R}^2$ ), etc; la  $n$ -esfera  $S^n$ , como el círculo  $S^1$ , y la 2-esfera  $S^2$ ; el  $n$ -toro  $T^n$ , que resulta de tomar un cubo  $n$ -dimensional e identificar sus lados opuestos; una superficie de Riemann de género  $g$  que es esencialmente un 2-toro con  $g$  agujeros en vez de solo uno; un conjunto de transformaciones continuas tales como rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ ; el producto directo de dos variedades es una variedad. Espacios como una recta unidimensional que atravesada un plano bidimensional, dos conos pegados en sus vértices, o incluso un cono bidimensional son ejemplos de espacios que no son variedades ya que localmente no se parecen a  $\mathbb{R}^n$ .

A partir de la noción de variedad, es necesario formalizar a qué nos referimos con “se parece localmente a  $\mathbb{R}^n$ ” y “parches pegados”. Uno de los conceptos más importantes es el de mapeo continuamente diferenciable, que consiste en un mapeo  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es **infinitamente diferenciable** (es decir, puede derivarse cuantas veces se quiera y sus derivadas son continuas. La notación para estos mapeos es  $C^\infty$ ).

Dos conjuntos  $M$  y  $N$  son difeomorfos si existe un mapeo  $C^\infty$ ,  $\phi : M \rightarrow N$  con un  $C^\infty$  mapeo

inverso  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ ;  $\phi$  se denomina **difeomorfismo**. Esta es la mejor noción que tenemos para afirmar que dos espacios son “lo mismo” como variedades.

Una **carta** o **sistema de coordenadas** consiste en un subconjunto  $U \subseteq M$  junto a un mapeo uno-a-uno  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que la imagen  $\phi(U)$  es abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Podemos afirmar que  $U$  es un conjunto abierto en  $M$ . Un **atlas**  $C^\infty$  es una colección indexada de cartas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  que satisface dos condiciones:

1.  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$ .
2. Si dos cartas se traslapan  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces el mapeo  $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$  manda los puntos en  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  sobre un conjunto abierto  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ , y todos los mapeos deben ser  $C^\infty$  donde están definidos.

Por lo que una carta es lo que normalmente consideramos un sistema de coordenadas sobre un conjunto abierto, mientras que un atlas es un sistema de cartas que están relacionadas de forma continuamente diferenciable en sus traslapes.

Por lo tanto, una **variedad**  $C^\infty$   $n$ -dimensional es simplemente un conjunto  $M$  junto a un atlas maximal, que es aquel que contiene todas las posibles cartas compatibles. Es posible reemplazar  $C^\infty$  por  $C^p$ , con  $p \in \mathbb{N}$  en la definición anterior, suponiendo que la variedad es diferenciable tantas veces como sea necesaria para la aplicación considerada. El requisito de que el atlas sea maximal es tal que dos espacios equivalentes equipados con distintos atlas no cuentan como variedades diferentes. Esta definición captura en términos formales la noción de un conjunto que localmente se parece a  $\mathbb{R}^n$ . Otra característica importante es que, en general, las variedades no pueden ser cubiertas con un solo sistema de coordenadas, y por ello se hace importante el concepto de cambio de coordenadas. Sin embargo, es conveniente trabajar con una sola carta y solo mantener cuidado del conjunto de puntos que no están incluidos en este.

La **regla de la cadena** es una parte del cálculo convencional esencial para trabajar con variedades. Sean  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  mapeos, y la composición  $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Es posible etiquetar los puntos en cada espacio en términos de componentes:  $x^a$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $y^b$  en  $\mathbb{R}^n$ , y  $z^c$  en  $\mathbb{R}^l$ , donde los índices abarcan un rango de valores apropiado. La regla de la cadena relaciona las derivadas parciales de la composición a las derivadas parciales de los mapeos individuales:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \frac{\partial g^c}{\partial y^b} \quad (\text{X.1})$$

Usualmente abreviado como

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b} \quad (\text{X.2})$$

Recordemos que cuando  $m = n$ , el determinante de la matriz  $\partial y^b / \partial x^a$  es llamado el **Jacobiano** del mapeo, y el mapeo es invertible cuando el Jacobiano es distinto de cero. (Carroll, 2004)

**2. Vectores y vectores duales.** Un vector es un objeto geométrico bien definido, así como un **campo vectorial**, definido como el conjunto de vectores con exactamente uno en cada punto de una variedad (en este caso, del espacio-tiempo). En la estructura de espacio-tiempo (que es una variedad), los vectores son de cuatro dimensiones, por lo que se denominan **4-vectores**. Cada vector está localizado en un punto dado del espacio-tiempo. De hecho, a cada punto  $p$  en el espacio-tiempo, asociamos el conjunto de todos los vectores posibles localizados en ese punto; este conjunto es conocido como el **espacio tangente** a  $p$ , o  $T_p$ . El conjunto de todos los espacios tangentes de una variedad  $n$ -dimensional  $M$  forman una variedad  $2n$ -dimensional llamada el **fibrado tangente**,  $T(M)$ .

¿Cómo se construye el espacio tangente a un punto  $p$  en una variedad  $M$ , usando propiedades intrínsecas a la variedad? Considérese el conjunto de todas las curvas parametrizadas a través de  $p$ , es decir, el espacio de todos los mapeos (no degenerados)  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $p$  está en la imagen de  $\gamma$ . Defínase  $\mathcal{F}$  como el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables en  $M$  (eso es, mapeos  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Notamos que cada curva (con  $\lambda$  un parámetro a lo largo de la curva) a través de  $p$  define un operador en este espacio, la derivada direccional, que mapea  $f \rightarrow df/d\lambda$  en  $p$ . Así, el espacio tangente  $T_p$  puede identificarse como el espacio de operadores de derivadas direccionales a lo largo de las curvas que pasan por  $p$ . La base de coordenadas para  $T_p$  es  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$  y formaliza la noción de hacer que los vectores base “apunten” hacia uno de los ejes coordenados. Así, cualquier elemento  $d/d\lambda \in T_p$  puede escribirse como

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{\partial_\mu} \quad (\text{X.3})$$

gracias a la regla de la cadena. La regla de la cadena también nos permite escribir la regla de transformación bajo cambios de coordenadas, para pasar de un sistema  $x^\mu$  a un nuevo sistema  $x^{\mu'}$ :

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \quad (\text{X.4})$$

Lo cual permite la transformación de vectores  $V = V^\mu \partial_\mu$  bajo cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} V^\mu \partial_\mu &= V^{\mu'} \partial_{\mu'} \\ &= V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \end{aligned}$$

y, como la matriz  $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$  es invertible

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (\text{X.5})$$

Es importante recalcar que los 4-vectores (y tensores) no necesariamente cambian sus componentes al cambiar de coordenadas, sino cambian sus componentes frente a un cambio de base en el espacio tangente; pero hemos decidido usar las coordenadas para definir nuestras bases. Por lo tanto, un cambio de coordenadas induce un cambio de base.

Dado un espacio vectorial, podemos definir otro espacio vectorial asociado (de igual dimensión) conocido como el **espacio vectorial dual**, usualmente denotado por un asterisco; por ejemplo, el dual de  $T_p$  es denotado por  $T_p^*$  y se denomina el **espacio cotangente**. El espacio dual es el espacio de todos los mapeos lineales del espacio vectorial original a los números reales; es decir, si  $\omega \in T_p^*$  es un vector dual, este actúa como un mapeo tal que

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R} \quad (\text{X.6})$$

donde  $V, W \in T_p$  y  $a, b$  son escalares (por ejemplo, números reales). Estos mapeos por sí mismos forman un espacio vectorial, por lo que si  $\omega, \eta$  son vectores duales

$$(a\omega + n\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(W) \quad (\text{X.7})$$

Así, introducimos el conjunto de vectores duales base  $\hat{\theta}^{(\nu)}$  que cumplan

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta_\mu^\nu \quad (\text{X.8})$$

Por lo que todo vector dual puede ser escrito en términos de sus componentes, que están etiquetadas con subíndices:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (\text{X.9})$$

Usualmente, solo se escribe  $\omega_\mu$  en analogía a los vectores, para referirse a un vector dual completo. De hecho, los elementos de  $T_p$  son denominados **vectores contravariantes**, mientras que los de  $T_p^*$  son los **vectores covariantes**. Otro nombre para los vectores duales es **1-forma**.

De hecho, es posible pensar en los vectores como mapeos lineales sobre los vectores duales,

$$V(\omega) = \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R} \quad (\text{X.10})$$

Por lo que el espacio dual del espacio vectorial dual es el espacio vectorial original. Además, en analogía al fibrado tangente, definimos el **fibrado cotangente**  $T^*(M)$  como el conjunto de todos los espacios cotangentes en  $M$ . La acción de un campo vectorial dual sobre un campo vectorial no es un solo número, sino un **escalar** (función) en el espacio-tiempo. Un escalar es una cantidad sin índices que no cambia bajo cambio de coordenadas; es un mapeo independiente de coordenadas del espacio-tiempo a los números reales.

En el espacio-tiempo, el ejemplo más simple de un vector dual es el **gradiente** de una función escalar, que es el conjunto de derivadas parciales con respecto a las coordenadas del espacio-tiempo, denotado por

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (\text{X.11})$$

La regla de la cadena para derivadas parciales facilita la regla de transformación de las componentes de los vectores duales:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \quad (\text{X.12})$$

que se cumple en general para cualquier vector dual bajo cambio de coordenadas. También se tiene la notación para derivadas parciales

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu} \quad (\text{X.13})$$

Aunque  $x^\mu$  tenga superíndice, cuando está en el denominador de una derivada esto implica un subíndice en el objeto resultante, por lo cual se utiliza  $\partial_\mu$ . Nótese que el gradiente de hecho actúa en forma natural sobre un vector, por ejemplo el vector tangente a una curva. El resultado es una derivada ordinaria de la función a lo largo de la curva:

$$\partial_\mu \phi \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (\text{X.14})$$

**3. Tensores y densidades tensoriales.** Un **tensor**  $T$  de rango  $(k, l)$  es un mapeo multilinear de una colección de vectores duales y vectores a  $\mathbb{R}$ :

$$T : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{X.15})$$

Así, un escalar es un tensor de tipo  $(0,0)$ , un vector es un tensor de tipo  $(1,0)$  y un vector dual

es un tensor de tipo  $(0,1)$ . El espacio de todos los tensores de un rango fijo  $(k, l)$  forma un espacio vectorial. Para construir una base para este espacio, es necesario definir una operación conocida como **producto tensorial**, denotada por  $\otimes$ . Si  $T$  es un tensor  $(k, l)$  y  $S$  es un tensor  $(m, n)$ , definimos el tensor  $T \otimes S$  de rango  $(k + m, l + n)$  por

$$\begin{aligned} T \otimes S (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) \\ = T (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \times S (\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}) \end{aligned} \quad (\text{X.16})$$

con  $\omega^{(i)}, V^{(i)}$  distintos vectores duales y vectores. En otras palabras, primero se opera  $T$  sobre el apropiado conjunto de vectores y vectores duales, y luego se opera  $S$  sobre el resto, y luego se multiplican las respuestas. En general, el producto tensorial no conmuta. La base para el espacio de todos los tensores  $(k, l)$  consiste en todos los tensores de la forma

$$\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} \quad (\text{X.17})$$

En notación de componentes, escribimos un tensor arbitrario como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} \quad (\text{X.18})$$

O, alternativamente, podemos definir los componentes al operar el tensor sobre los vectores y vectores duales base:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T \left( \hat{\theta}^{(\mu_1)}, \dots, \hat{\theta}^{(\mu_k)}, \hat{e}_{(\nu_1)}, \dots, \hat{e}_{(\nu_l)} \right) \quad (\text{X.19})$$

Generalmente denotaremos el tensor  $T$  por sus componentes. Un tensor  $(k, l)$  tiene  $k$  superíndices y  $l$  subíndices. El orden de los índices es importante, ya que el tensor no necesariamente actúa de la misma manera sobre sus varios argumentos. Las componentes de un tensor cumplen con la regla de transformación bajo cambio de coordenadas:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (\text{X.20})$$

Ahora, consideramos la operación de **contracción**, que vuelve un tensor  $(k, l)$  en uno  $(k - 1, l - 1)$ . La contracción procede al sumar sobre un superíndice y un subíndice (notación de Einstein: suma sobre índices repetidos)

$$S^{\mu\rho}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu} \quad (\text{X.21})$$

Solo está permitido contraer un superíndice con un subíndice, de lo contrario no se obtendría un tensor bien definido. El orden de los índices importa, por lo que se pueden obtener diferentes

tensores al hacer la contracción de distinta manera

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu} \quad (\text{X.22})$$

Decimos que un tensor es **simétrico** en cualquiera de sus índices si no cambio bajo el intercambio de esos índices. Así, por ejemplo, si

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho}$$

decimos que  $S_{\mu\nu\rho}$  es simétrico en sus primeros dos índices. De forma similar, un tensor es **antisimétrico** en cualquiera de sus índices si su signo cambio al intercambiar tales índices, como en el caso de

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\rho\nu\mu}$$

que es antisimétrico en su primer y tercer índice. Si un tensor es (anti-)simétrico en todos sus índices, simplemente decimos que es (anti-)simétrico. Dado cualquier tensor, es posible **simetrizar** (o antisimetrizar) cualquier cantidad de sus índices. Para simetrizarlo, se toma la suma de todas las permutaciones de los índices relevantes y se divide por el número de términos

$$T_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{suma sobre las permutaciones de los índices } \mu_1 \cdots \mu_n) \quad (\text{X.23})$$

Mientras que la antisimetrización se hace mediante la suma alternante, es decir, que las permutaciones que son el resultado de una cantidad impar de intercambios de índices tienen un signo menos:

$$T_{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n]\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{suma alternante sobre las permutaciones de los índices } \mu_1 \cdots \mu_n) \quad (\text{X.24})$$

Nótese que los paréntesis denotan simetrización, mientras los corchetes denotan antisimetrización. Si queremos (anti-)simetrizar índices que no están a la par uno de otro, se utilizan barras verticales para denotar a los índices que no están incluidos en la suma:

$$T_{(\mu|\nu|\rho)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu}) \quad (\text{X.25})$$

Si contraemos sobre un par de superíndices simétricos en un tensor, solo la parte simétrica de los subíndices contribuirán

$$X^{(\mu\nu)}Y_{\mu\nu} = X^{(\mu\nu)}Y_{(\mu\nu)} \quad (\text{X.26})$$

sin importar las propiedades de simetría de  $Y_{\mu\nu}$  (y se cumple de forma análoga para índi-

ces antisimétricos, o si son subíndices los simétricos). Para cualesquiera *dos* índices, es posible descomponer un tensor en sus partes simétrica y antisimétrica

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{(\mu\nu)\rho\sigma} + T_{[\mu\nu]\rho\sigma} \quad (\text{X.27})$$

pero esto en general no será cierto para tres o más índices.

Ahora, consideremos el símbolo de Levi-Civita, completamente antisimétrico, definido por

$$\bar{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu_1\mu_2\cdots\mu_n \text{ es una permutación par de } 01\cdots(n-1) \\ -1 & \text{si } \mu_1\mu_2\cdots\mu_n \text{ es una permutación impar de } 01\cdots(n-1) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por definición, el símbolo de Levi-Civita tiene las componentes especificadas anteriormente en *cualquier sistema de coordenadas*. Se llama “símbolo”, por supuesto, porque no es un tensor; está definido de tal forma que no cambie por transformaciones bajo cambio de coordenadas. Sin embargo, notemos que, dada cualquier matriz  $M^{\mu}_{\mu'}$ , el determinante  $|M|$  obedece

$$\bar{\epsilon}_{\mu'_1\cdots\mu'_n} |M| = \bar{\epsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} \cdots M^{\mu_n}_{\mu'_n} \quad (\text{X.28})$$

que es una expresión para el determinante de cualquier matriz. Al hacer  $M^{\mu}_{\mu'} = \partial x^{\mu} / \partial x^{\mu'}$ , tenemos

$$\bar{\epsilon}_{\mu'_1\cdots\mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| \bar{\epsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \quad (\text{X.29})$$

donde se utilizó el hecho que el determinante de una matriz inversa es el inverso del determinante. Nótese que el símbolo de Levi-Civita se transforma de una manera similar a la ley de transformación tensorial, excepto por el determinante al frente. Los objetos que se transforman en esta manera son conocidos como **densidades tensoriales**. Otro ejemplo es el determinante de la métrica,  $g = |g_{\mu\nu}|$ , que bajo transformación de coordenadas

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g(x^{\mu})$$

Por lo que  $g$  tampoco es un tensor y se transforma de manera similar al símbolo de Levi-Civita, excepto que el Jacobiano está elevado a la potencia -2. La potencia a la cual está elevado el Jacobiano es conocida como el peso de la densidad tensorial. El símbolo de Levi-Civita tiene una densidad de peso 1, mientras que  $g$  es una densidad escalar de peso -2.

Hay una forma simple de convertir una densidad en un tensor: multiplicarla por  $|g|^{w/2}$ , donde

$w$  es el peso de la densidad. El resultado se transformará de acuerdo a la ley de transformación tensorial. Así, por ejemplo, podemos definir el **tensor de Levi-Civita** mediante

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \hat{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (\text{X.30})$$

Por último, es necesario mencionar a un tensor muy importante que se reconoce como en tensor identidad. Este es el tensor delta de Kronecker de tipo (1,1). (Carroll, 2004)

4. **La métrica.** El tensor de métrica es un objeto esencial en un espacio curvo y se denota por  $g_{\mu\nu}$ . Este es un tensor (0,2) simétrico, usualmente no degenerado (aunque no siempre), es decir, su determinante  $g = |g_{\mu\nu}|$  no se anula. Esto permite definir la métrica inversa (también simétrica) mediante

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu} \quad (\text{X.31})$$

La métrica y la métrica inversa permiten **subir y bajar índices** sobre otros tensores. Es decir, dado un tensor  $T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ , se puede utilizar la métrica para definir nuevos tensores:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu}_{\delta} &= g^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \\ T_{\mu}^{\beta}_{\gamma\delta} &= g_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \\ T_{\mu\nu}^{\rho\sigma} &= g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (\text{X.32})$$

También sirven para calcular la traza de un tensor (1,1), (0,2) o (2,0)

$$X = X^{\lambda}_{\lambda} = g_{\lambda\alpha} X^{\lambda\alpha} = g^{\lambda\beta} X_{\lambda\beta} \quad (\text{X.33})$$

La acción de la métrica sobre dos vectores es el **producto interno** (o producto escalar, o producto punto):

$$g(V, W) = g_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} = V \cdot W \quad (\text{X.34})$$

La **norma** de un vector está definida como el producto interno del vector consigo mismo  $g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$ ; a diferencia de un espacio euclidiano, este número no necesariamente es positivo definido y cumple con los criterios de clasificación de (II.6).

Sabiendo que  $dx^{\mu}$  es un vector dual base, se vuelve natural utilizar los términos “métrica” y “elemento de línea” como sinónimos, donde el **elemento de línea** está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (\text{X.35})$$

En esta notación,  $ds^2$  no se refiere al diferencial o cuadrado de algo, sino es una convención notacional para el tensor de métrica, que es un mapeo multilineal de dos vectores a los números reales. Mientras que  $(dx)^2$  se refiere al  $(0,2)$  tensor  $dx \otimes dx$ . Una caracterización útil de la métrica se obtiene al llevar  $g_{\mu\nu}$  a su **forma canónica**. En esta forma, las componentes de la métrica se vuelven

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0) \quad (\text{X.36})$$

La **firma** de la métrica es el número tanto de eigenvalores positivos como negativos. Si uno de los eigenvalores es cero, la métrica es degenerada y no existe la métrica inversa. Si la métrica es continua y no degenerada, su firma será la misma en todo punto. En relatividad general, es común lidiar con métricas continuas no degeneradas. Si todos los signos son positivos, la métrica es **euclideana** o **de Riemann** (o positiva definida), mientras que si hay un solo signo menos, se llama **de Lorentz** o **pseudo-Riemanniana**, y cualquier métrica con algunos +1's y algunos -1's es llamada indefinida.

Por último, es importante el hecho que siempre es posible llevar a la métrica a su forma canónica. De hecho, siempre es posible hacerlo en algún punto  $p \in M$ , pero en general solo será posible en ese punto, no en alguna vecindad de  $p$ . Aunque se puede lograr algo mejor que esto, pues resulta que en cualquier punto  $p$  existe un sistema de coordenadas  $x^{\hat{\mu}}$  en el cual  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  toma su forma canónica y la primera derivada  $\partial_{\hat{\sigma}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  se anula (mientras que las segundas derivadas  $\partial_{\hat{\rho}}\partial_{\hat{\sigma}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  no pueden fijarse todas como cero):

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad \partial_{\hat{\sigma}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) = 0 \quad (\text{X.37})$$

Tales coordenadas son conocidas como **coordenadas localmente inerciales**, y sus vectores base asociados constituyen un **marco de Lorentz local**; es común colocar sombreros sobre los índices al utilizar estas coordenadas especiales. Nótese que en las coordenadas localmente inerciales, la métrica en  $p$  luce localmente como la del espacio plano hasta primer orden. Esta es la noción rigurosa de que regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas lucen como espacio plano (de Minkowski). Tampoco hay dificultad en construir simultáneamente conjuntos de vectores base en cada punto en  $M$  tal que la métrica tome su forma canónica; el problema es que en general no habrá un sistema de coordenadas del cual esta base pueda obtenerse. (Carroll, 2004)

**5. Formas diferenciales.** Las **formas diferenciales** son una clase especial de tensores. Una  $p$ -forma diferencial es simplemente un tensor  $(0,p)$  que es completamente antisimétrico. Por ejemplo, los escalares son 0-formas, los vectores duales son 1-formas, y el tensor de Levi-Civita es una 4-forma. El espacio de todas las  $p$ -formas se denota  $\Lambda^p$ , y el espacio de todos los campos de  $p$ -formas sobre una variedad  $M$  se denota  $\Lambda^p(M)$ . El número de  $p$ -formas linealmente

independientes en un espacio vectorial  $n$ -dimensional es  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ . Así, en un punto sobre un espacio-tiempo de cuatro dimensionaes solo hay una 0-forma linealmente independiente, cuatro 1-formas, seis 2-formas, cuatro 3-formas y una 4-forma. No hay  $p$ -formas para  $p > n$ , ya que todas las componentes serán automáticamente cero por antisimetría. Una ventaja de las formas es que pueden ser diferenciadas e integradas sin la ayuda de alguna estructura geométrica adicional.

Dada una  $p$ -forma  $A$  y una  $q$ -forma  $B$ , podemos formar una  $(p+q)$ -forma conocida como el **producto exterior**  $A \wedge B$  al tomar el producto tensorial antisimetrizado:

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} \quad (\text{X.38})$$

Por ejemplo, el producto exterior de dos 1-formas es

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$$

Nótese que

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \quad (\text{X.39})$$

La **derivada exterior**  $d$  permite diferenciar campos de  $p$ -formas para obtener campos de  $(p+1)$ -formas. Esta está definida como una derivada parcial apropiadamente normalizada y antisimetrizada

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (\text{X.40})$$

El ejemplo más simple es el **gradiente**, que es la derivada exterior de una 0-forma:

$$(d\phi)_\mu = \partial_\mu \phi \quad (\text{X.41})$$

Las derivadas exteriores obedecen una versión modificada de la regla de Leibniz al ser aplicadas a un producto de una  $p$ -forma  $\omega$  y una  $q$ -forma  $\eta$ :

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \quad (\text{X.42})$$

La derivada exterior es un tensor bien definido, aún en espacio-tiempo curvos. La diferenciación exterior cumple, para cualquier forma  $A$ ,

$$d(dA) = 0 \quad (\text{X.43})$$

que se escribe como  $d^2 = 0$ . Esta identidad es consecuencia de la definición de  $d$  y el hecho de que las derivadas parciales conmutan. Definimos una  $p$ -forma  $A$  como cerrada si  $dA = 0$ , y exacta

si  $A = dB$  para alguna  $(p-1)$ -forma  $B$ .

Otra operación sobre formas diferenciales es la **dualidad de Hodge**. Se define el *operador estrella de Hodge* sobre una variedad  $n$ -dimensional como un mapeo de  $p$ -formas a  $(n-p)$ -formas,

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p} \quad (\text{X.44})$$

que mapea  $A$  a “ $A$  dual”. A diferencia de otros operadores sobre formas, el dual de Hodge depende de la métrica de la variedad. Aplicar dos veces la estrella de Hodge retorna la forma original ya sea positiva o negativa:

$$**A = (-1)^{s+p(n-p)} A \quad (\text{X.45})$$

donde  $s$  es el número de signos menos en los eigenvalores de la métrica. La dualidad en el sentido de Hodge es distinta de la relación entre vectores y vectores duales. La idea de dualidad es la de una transformación de un espacio a otro con la propiedad de que al hacer la transformación dos veces se obtiene de regreso el espacio original. Un requerimiento de las dualidades entre espacios vectoriales es que los espacios original y transformado tengan la misma dimensión, lo cual sucede también para los espacios de  $p$ - y  $(n-p)$ -formas.

En espacios euclidianos tridimensionales, el dual de Hodge del producto exterior de dos 1-formas da otra 1-forma:

$$*(U \wedge V)_i = \epsilon_i{}^{jk} U_j V_k \quad (\text{X.46})$$

Que representa el producto cruz convencional entre vectores de tres dimensiones. (Carroll, 2004)

**6. Conexiones de Christoffel y derivada covariante.** En el espacio plano de coordenadas inerciales, el operador de derivada parcial  $\partial_\mu$  es un mapeo de campos tensoriales  $(k, l)$  a campos tensoriales  $(k, l+1)$ , que actúa linealmente sobre sus argumentos y obedece la regla de Leibniz sobre productos tensoriales. Todo esto sigue siendo cierto en situaciones más generales, pero el mapeo provisto por la derivada parcial depende del sistema de coordenadas utilizado. Se busca definir un operador de **derivada covariante**  $\nabla$  para que cumpla las funciones de la derivada parcial, pero en una manera independiente de las coordenadas. Así, se requiere que  $\nabla$  sea un mapeo de campos tensoriales  $(k, l)$  a campos tensoriales  $(k, l+1)$  que cumpla con las propiedades:

1. Linealidad:  $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
2. La regla del producto de Leibniz:  $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$ .

Para que  $\nabla$  obedezca la regla de Leibniz, esta puede ser escrita como la derivada parcial más alguna transformación lineal que funja como corrección para hacer el resultado covariante. Lo que esto quiere decir es que para cada dirección  $\mu$ , la derivada covariante  $\nabla_\mu$  estará dada por la derivada parcial  $\partial_\mu$  más una corrección especificada por un conjunto de  $n$  matrices  $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ , que son los **coeficientes de conexión**. Así, para un vector se cumple

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (\text{X.47})$$

Cabe resaltar que los coeficientes de conexión no son componentes de un tensor, por lo cual no importa el orden de colocación de los índices y no vale la regla para subir y bajar índices.

Buscamos que (X.47) cumpla con la ley de transformación tensorial (X.20), y que además  $\nabla$ :

$$3. \text{ conmute con contracciones: } \nabla_\mu (T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu^\lambda{}_{\lambda\rho}$$

$$4. \text{ se reduzca a la derivada parcial en escalares: } \nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$$

Bajo las dos condiciones anteriores, es posible expresar la derivada covariante de una 1-forma usando los mismos coeficientes de conexión que para los vectores, solo que con un signo menos:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (\text{X.48})$$

Lo cual indica que los coeficientes de conexión contienen toda la información necesaria para tomar la derivada covariante de un tensor de rango arbitrario:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \dots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned} \quad (\text{X.49})$$

Una notación alternativa es la de punto y coma para derivadas covariantes (similar a la notación de coma para derivadas parciales):

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \equiv T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l; \sigma} \quad (\text{X.50})$$

Buscamos definir una conexión única en una variedad con métrica  $g_{\mu\nu}$  al introducir las propiedades:

- libre de torsión:  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda$
- Compatible con la métrica:  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$

Una conexión es **compatible con la métrica** si la derivada covariante de la métrica con respecto a esa conexión es cero en todas partes. Esto permite que la derivada covariante conmute con subir y bajar índices. Así, para un campo vectorial  $V^\lambda$

$$g_{\mu\lambda}\nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho(g_{\mu\lambda}V^\lambda) = \nabla_\rho V_\mu \quad (\text{X.51})$$

La conexión que cumple con las condiciones anteriores está dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (\text{X.52})$$

Esta conexión es conocida por diferentes nombres: conexión de **Christoffel**, conexión de **Levi-Civita**, conexión de **Riemann**. Los coeficientes de conexión asociados son llamados **símbolos de Christoffel**. El estudio de variedades con métrica y sus conexiones asociadas se denomina geometría de Riemann, o a veces pseudo-Riemanniana cuando la métrica tiene firma de Lorentz. (Carroll, 2004)

7. **Tensor de curvatura de Riemann.** El **tensor de Riemann** cuantifica la curvatura de una variedad y está derivado de la conexión. Este tensor, también llamado **tensor de curvatura**, está dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (\text{X.53})$$

El tensor de Riemann es antisimétrico en sus últimos dos índices

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\nu\mu\sigma} \quad (\text{X.54})$$

Nótese que el vector de Riemann está construido a partir de las conexiones de Christoffel, que a su vez están construidas a partir de la métrica. Esta relación permite saber que, si existe un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica son constantes, el tensor de Riemann es cero; y si el tensor de Riemann se anula, siempre es posible construir un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica son constantes. Estas afirmaciones se restringen a regiones de la variedad que están simplemente conectadas. Así, el tensor de Riemann nos da una respuesta a la pregunta de si una métrica complicada es secretamente la métrica del espacio plano en un sistema de coordenadas perverso: si calculamos el tensor de Riemann para tal métrica y este se anula, entonces sabremos que la métrica es plana; de lo contrario, hay curvatura.

Otras propiedades del tensor de Riemann incluyen: es antisimétrico en sus primeros dos índices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (\text{X.55})$$

Es invariante ante el intercambio del primer par de índices con el segundo par:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{X.56})$$

Además,

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (\text{X.57})$$

La parte totalmente antisimétrica del tensor se anula

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0 \quad (\text{X.58})$$

Utilizando técnicas de conteo y estas simetrías, es posible saber que hay  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$  componentes independientes del tensor de Riemann. El tensor de Riemann también cumple con la **identidad de Bianchi**

$$\nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (\text{X.59})$$

La siguiente contracción del tensor de Riemann nos da el **tensor de Ricci**

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad (\text{X.60})$$

que es la única contracción independiente, pues todas las demás contracciones del tensor de Riemann se hacen cero o están relacionadas a esta. Este tensor es simétrico como consecuencia de las simetrías del tensor de Riemann. La traza del tensor de Ricci se conoce como el **escalar de Ricci** o **escalar de curvatura**:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (\text{X.61})$$

El tensor y el escalar de Ricci contienen toda la información acerca de trazas del tensor de Riemann, dejando las partes libres de la traza. Estas partes están comprendidas en el **tensor de Weyl**, que es básicamente el tensor de Riemann con todas sus contracciones removida. En  $n$  dimensiones está dado por

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2}(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R \quad (\text{X.62})$$

Esta fórmula está diseñada para que todas las posibles contracciones del tensor de Weyl se anulen, mientras que mantiene las simetrías del tensor de Riemann. El tensor de Weyl está de-

finido solo en tres o más dimensiones, y en tres dimensiones se anula idénticamente. Una de las propiedades más importantes de este tensor es que es invariante ante transformaciones conformes. Esto quiere decir que si calculamos  $C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  para alguna métrica  $g_{\mu\nu}$ , y luego lo calculamos para una métrica dada por  $\omega^2(x)g_{\mu\nu}$ , donde  $\omega(x)$  es una función no nula arbitraria del espacio-tiempo. Por esta razón, el tensor de Weyl también es conocido como el tensor conforme. (Carroll, 2004)