

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Estados de Espín Anticoherente y la Representación de
Majorana**

Trabajo de graduación presentado por Sergio Penagos Samayoa para
optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



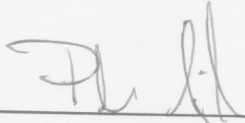
**Estados de Espín Anticoherente y la Representación de
Majorana**

Trabajo de graduación presentado por Sergio Penagos Samayoa para
optar al grado académico de Licenciado en Física


Guatemala,

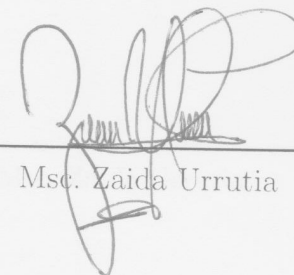
2019

Vo.Bo.:

(f) 
Msc. Pedro Aguilar

Tribunal Examinador:

(f) 
Msc. Pedro Aguilar

(f) 
Msc. Zaida Urrutia

(f) 
PhD. Giovanni Ramirez

Fecha de aprobación: Guatemala, 31 de Mayo de 2019

El siguiente trabajo representa la conclusión de mis estudios en la Licenciatura en física. Luego de cuatro años de experiencias, tanto educativas como personales, que ahora se reflejan en la persona que me he convertido.

Me gustaría empezar por agradecer a las personas que hicieron todo esto posible. En primer lugar, a mis padres quienes han estado ahí desde el principio de mi vida, y quienes sin su apoyo incondicional a lo largo de mi formación, nada de esto estaría sucediendo. A mis hermanos los cuales siempre me han apoyado aún en las situaciones menos favorables. A mi familia extendida, sobre todo a mis abuelitos, por estar ahí cuando más los necesitaba y estar siempre pendientes de mí. Los amo y son la parte más importante de mi vida.

Me gustaría agradecer a mis educadores los cuales me abrieron sus mentes y permitieron que observara de primera mano los conocimientos que poseen, inspirando así la ambición de conocer más acerca de la realidad que nos rodea. En especial quiero agradecer a Zaida Urrutia, persona que has seguido mi formación desde el primer momento en el cual decidí estudiar física y cuyo apoyo me ha hecho considerarla parte de mi familia y Pedro Aguilar quien ha hecho posible la realización de este trabajo. Finalmente agradezco a todas las personas que me permitieron ser parte de sus vidas, y quienes ahora considero mis amigos, han llenado mi vida de una manera que no pude haber imaginado.

A lo largo de estos cuatro años me he dado cuenta de las implicaciones que surgen a partir de la decisión de continuar con mi vida educativa en un ámbito que me apasiona como lo es la física. Pero más allá de esto ha servido como un conjunto de experiencias que me hace ser la persona que soy actualmente, de lo cual me siento extremadamente agradecido y orgulloso. Aunque no todo fue como lo esperaba y algunas situaciones fueron definitivamente menos que placenteras, tal como aquellos momentos durante la lucha por mi salud en segundo año, definitivamente no cambiaría nada de esto pues me hicieron crecer de sobremanera.

Prefacio	v
Lista de figuras	IX
Resumen	XI
1. Introducción	1
2. Estados coherentes	5
2.1. Historia de los estados coherentes	5
2.2. Estados coherentes del oscilador armónico	6
2.3. Rotaciones infinitesimales en mecánica cuántica	11
2.4. Estados coherentes de espín	17
3. Estados de espín anticoherentes	19
3.1. Estado de espín anticoherentes	19
3.1.1. Criterios para uniformidad y anticoherencia	21
3.1.2. La representación de Majorana como estrategia para encontrar estados anticoherentes	21
3.1.3. Estados perfectos y su anticoherencia	22
4. Experimentos numéricos	25
4.1. Producto tensorial simétrico de espín $1/2$	25
4.1.1. Espín 1:	26
4.1.2. Espín $3/2$:	28
4.1.3. Espín 2	29
4.2. Coordenadas proyectivas	31
4.2.1. Espín 2	32
4.2.2. Espín $5/2$	34
4.2.3. Espín 3	36
5. Conclusiones	39

6. Bibliografía	41
7. Anexos	43
7.1. Función de onda para los estados excitados del oscilador armónico cuántico	43
7.2. Función de onda para el estado base del oscilador armónico cuántico	44
7.3. Principio de incertidumbre	45
7.4. La relación de incertidumbre de Heisenberg	46
7.5. Estados perfectos	46
7.6. Coordenadas proyectivas	49
7.7. Descenso gradiente	50
7.8. Producto tensorial simétrico de espín 1/2	51

Lista de figuras

1. Werner Heisenberg formuló el principio de incertidumbre, concepto utilizado para la definición de los estados coherentes.	2
2. Representación de Majorana del Estado 1-Anticoherente de espín 1.	28
3. Representación de Majorana del Estado 1-Anticoherente de espín 3/2.	29
4. Representación de Majorana del estado 1-Anticoherente de espín 2.	31
5. Estado 1-anticoherente de espín 2.	33
6. Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 2.	34
7. Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 5/2 con primera coordenada proyectiva distinta de 0.	35
8. Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 5/2 con segunda coordenada proyectiva distinta de 0.	36
9. Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 3 con primera coordenada proyectiva diferente de 0.	37
10. Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 3 con segundo coordenada proyectiva diferente de 0.	38
11. Estado perfecto $ \psi_{tet}\rangle$	47
12. Estado perfecto $ \psi_{oct}\rangle$	48
13. Estado perfecto $ \psi_{cubo}\rangle$	48
14. Estado perfecto $ \psi_{icos}\rangle$	49
15. Estado perfecto $ \psi_{dodec}\rangle$	49

Los estados coherentes en mecánica cuántica se definen como aquellos que presentan gran similitud a sus contra partes clásicas. Por ejemplo, los estados coherentes del oscilador armónico saturan la relación de incertidumbre de Heisenberg, lo cual nos indica que son los estados más localizados en el espacio-fase. El presente trabajo hace una breve introducción bibliográfica a una definición disponible de estados anticoherentes para sistemas de espín. Estos, en contraste con los estados coherentes, se definen como los estados *más cuánticos* y con menos características en común con el mundo de la mecánica clásica.

Luego de introducir el concepto de estados anticoherentes de espín se procura encontrar algunos ejemplos de estos. Se hace uso de la condición algebraica de 1-anticoherencia, la cual nos indica que para considerar un estado de espín como 1-anticoherente este debe satisfacer que $\langle S \rangle = 0$. Se presentan entonces 2 distintos procedimientos para encontrar estados de espín que cumplan con dicha condición.

Finalmente se puede encontrar la representación de Majorana de los estados definidos como 1-anticoherentes. Esto es una representación del estado sobre la esfera unitaria, donde un estado de espín j se representa como un conjunto de $2j$ puntos sobre la superficie de la 2-esfera.

CAPÍTULO 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es explorar el concepto de estados de espín anticoherentes, su definición, la relación de este concepto con aquel de estados coherentes y finalmente sus condiciones algebraicas, utilizando estas para explorar posibles estados de espín anticoherentes. Además se desea utilizar la representación de Majorana para facilitar de alguna manera esta última tarea.

Los estados coherentes en mecánica cuántica hacen referencia a aquellos que presentan características de estados clásicos, en este sentido se pueden describir como los estados cuánticos *más clásicos*. Estos presentan la menor cantidad de fluctuaciones cuánticas, definidas por la relación de incertidumbre de Heisenberg. Los estados mezcla más clásicos se pueden obtener como una mezcla estadística de estados coherentes. El concepto de estados coherentes de espín entonces se puede entender como aquellos estados los cuales se asemejan lo mas cerca posible a un vector clásico de momento angular, el cual apunta en una dirección determinada \hat{n} . Estos no es más que una mímica de la teoría de momento angular clásica.



Figura 1: Werner Heisenberg formuló el principio de incertidumbre, concepto utilizado para la definición de los estados coherentes.

La definición de estados coherentes nos permite ver la necesidad de los estados anticoherentes en la mecánica cuántica actual, la cual tiene un interés en encontrar las capacidades de un sistema cuántico y las maneras en las cuales este difiere de un estado clásico. Un ejemplo de esto se puede encontrar en la computación cuántica, donde Markam y Vedral en [1] demostraron la resistencia al enredamiento de los estados clásicos. La importancia de esto recae en que cualquier estado puro en computación cuántica que no produce enredamiento en gran escala puede ser simulado eficientemente de manera clásica.

Un ejemplo de las aplicaciones de estados anticoherentes se puede encontrar en el artículo de Barnett, *et al.*, [2]. En este se describe un sistema de muchos bosones con cierto espín j que se encuentran en un condensado de Bose-Einstein. Al momento en el cual todo el sistema se encuentran en su estado base, es posible encontrar factores a este del producto tensorial de estados de espín individuales. Se describió entonces el estado factorizable para átomos de espín dos, el cual resulta en un estado cuyo grupo de simetría es el grupo de simetría de los puntos de un tetraedro. El mismo que Zimba en [3] caracteriza como un estado anticoherente. Otros estados anticoherentes de espín 2 aparecen asociados a fases diferentes del condensado de Bose-Einstein. Al hacer el mismo análisis para átomos de espín tres, los estados factorizables presentan simetrías de varios tipos de poliedros con seis vértices. De manera general se describe un método de clasificación que muestra explícitamente la simetría del espín de estos estados, mediante la representación de Majorana que presentaremos en este trabajo. .

Finalmente, gran parte de este trabajo se centra en encontrar la representación de los estados, que sean definidos como anticoherentes, sobre la esfera unitaria. Esto se explicará con más detalle al momento de introducir la representación de Majorana. Por el momento

es importante que el lector este consciente que, tal como lo explica Bacry en [4], un estado en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_n de dimensión n se puede considerar como un conjunto de $(n - 1)$ puntos sobre S^2 , esto es sobre la esfera 3-dimensional. Por ejemplo un estado de espín j se representa como un conjunto de $2j$ puntos en S^2

Esta tesis explorará, en modo de monografía, la información actual que se tiene de los estados de espín anticoherentes, además de algunos algoritmos que facilitan la obtención de los estados anticoherentes para un espín j dado. En el segundo capítulo se presentan las definiciones para los distintos tipos de estados coherentes, junto con algunas de sus propiedades. El tercer capítulo presenta la información disponible sobre los estados anticoherentes de espín, presentando algunos ejemplos encontrados en las fuentes consultadas. Finalmente, en el cuarto capítulo se presentarán los algoritmos creados para encontrar a los estados anticoherentes, junto con los resultados obtenidos por estos.

En el siguiente capítulo se hará una breve introducción a la matemática que acompaña el concepto de estados coherentes. Esto será útil al momento de introducir la idea de estados anticóherentes y la construcción matemática de estos. El objetivo principal es que el lector pueda entender la base teórica sobre la cual el concepto de coherencia se construye.

Se empezará haciendo una introducción histórica al concepto de coherencia en mecánica cuántica. Luego se hará una breve introducción a los estados coherentes y sus propiedades.

Finalmente se introduce a los operadores rotacionales en mecánica cuántica, los cuales son la base para la teoría de momento angular cuántica. Se utilizará estos como un grupo de simetría dinámica y se definirán los estados coherentes que resultan de saturar las relaciones de Heisenberg asociadas al álgebra propia de los generadores de momento angular.

2.1. Historia de los estados coherentes

En 1926 Schrödinger introdujo un sistema de funciones de onda no ortogonales, las cuales describen paquetes de onda no dispersivos para un oscilador cuántico^[1]. Años después von Neumann consideró un subconjunto de estas funciones de onda, el cual se relacionaba con una partición del espacio de fase plano para un sistema dinámico unidimensional en celdas regulares. Glauber luego llamó a estos estados inventados por Schrödinger los estados coherentes (EC).

Una propiedad importante del sistema de estados coherentes es su sobre completitud. Un sistema se puede llamar de esta forma si al menos un vector dentro del sistema puede

¹Para ahondar más en esto se puede revisar el artículo titulado "An undulatory theory of the Mechanics of Atoms and Molecules "

ser removido, mientras que el sistema sigue siendo completo. Por tanto el sistema contiene más estados de los necesarios para descomponer un vector de estado arbitrario.

A continuación se mostrará la construcción de los estados coherentes a partir de la ecuación de un oscilador armónico. [5](#)

2.2. Estados coherentes del oscilador armónico

En mecánica clásica se puede definir la posición de una partícula como función del tiempo: $x(t)$. Mientras tanto en mecánica cuántica se define esta misma idea para una partícula mediante su función de onda, representada en la notación de Dirac como: $|\psi(x, t)\rangle$. Esta se puede interpretar de manera estadística, donde $|\psi(x, t)\rangle|^2$ nos provee de la probabilidad de encontrar a la partícula en una posición x en un tiempo t . La manera en la cuál se obtiene esta función de onda es mediante la resolución de la ecuación de Schrodinger.

Definición 2.1 La siguiente es la ecuación de Schrodinger 1-Dimensional:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 |\psi\rangle}{\partial x^2} + V |\psi\rangle \quad (1)$$

En mecánica clásica un sistema en el cual una masa m unida a un resorte con una constante elástica k es considerado un oscilador armónico. La energía potencial de dicho sistema, ignorando la fricción, se puede describir como una función de la posición: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Se puede además definir la frecuencia de oscilación, denotada con la letra griega ω , dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Reescribiendo el potencial en términos de esta nueva cantidad resulta en: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Debido a que el potencial no depende del tiempo se puede resolver la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 |\psi\rangle}{\partial x^2} + V |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (2)$$

Utilizando la definición del operador momento $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$, se puede obtener el Hamiltoniano para el oscilador armónico:

$$H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2] \quad (3)$$

La ecuación que se debe resolver para encontrar la ecuación de onda del oscilador armónico en 1 dimensión será:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \quad (4)$$

Se encuentra la ecuación de onda para el estado base, el estado con menor energía, siendo este [2](#):

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (5)$$

²El procedimiento para obtener esta función de onda se puede encontrar en el anexo 7.1

Definición 2.2 Las siguientes cantidades son conocidos como los operadores escalera:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x) \quad (6)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x) \quad (7)$$

Donde a es el operador destrucción y a^\dagger es el operador creación.

Se obtiene el conmutador de a y a^\dagger a partir de su definición:

$$[a, a^\dagger] = \frac{i}{\hbar}[p, x] = 1 \quad (8)$$

donde se hace uso de las relaciones de conmutación canónicas:

$$[x, p] = i\hbar \quad (9)$$

Se puede expresar tanto x como p en termino de estos operadores escalera:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad (10)$$

$$p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (11)$$

Además de esto se puede encontrar las funciones de onda de estados excitados $|\psi_n\rangle$ mediante la aplicación del operador a^\dagger al estado base descrito en (5):

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |\psi_0\rangle \quad (12)$$

en donde los operadores a y a^\dagger actúan de la siguiente manera sobre los estado del oscilador armónico:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (13)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (14)$$

Finalmente, una expresión cerrada para los estados excitados $|\psi_n\rangle$ puede escribirse en término de los polinomios de Hermite H_n ³:

$$|n\rangle = (2^n n! \pi^{1/2} x_0)^{-1/2} e^{y^2/2} H_n(y) \quad (15)$$

El concepto de estados coherentes necesita la introducción del principio de incertidumbre.

Teorema 2.1 (Principio de Incertidumbre) Considere un sistema con una ecuación de onda normalizada $|\psi\rangle$, y dos operadores simétricos A y B, entonces:

$$(\sigma_A)(\sigma_B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (16)$$

³Una explicación más detallada se encuentra en el Anexo 7.2

Esto es llamado el principio de incertidumbre. ⁴

Los operadores de incertidumbre se definen como:

$$\sigma_A = \left\langle \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \right\rangle^{1/2} \geq 0 \quad (17)$$

En donde $\langle A|A \rangle$ representa el valor esperado de una cantidad:

$$\langle A \rangle = \langle \psi|A|\psi \rangle \quad (18)$$

El principio de incertidumbre descrito anteriormente fue descubierto por Heisenberg en 1926. El observó que cualquier par de propiedades físicas que no conmutan resultan en una relación de incertidumbre. En el caso de los operadores de posición y momento se puede describir el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Teorema 2.2 (La relación de incertidumbre de Heisenberg) Esta propone que ⁵:

$$(\sigma_x)(\sigma_p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (19)$$

La relación definida con anterioridad tiene una gran importancia al momento de pensar en mediciones en la mecánica cuántica. La relación de incertidumbre de Heisenberg nos indica que el margen de error con el cual podemos conocer la posición de una partícula (σ_x) y el margen de error con el cual podemos conocer el momento de una partícula (σ_p) están relacionados. El producto de estas dos cantidades no puede ser menor que $\frac{\hbar}{2}$ y por tanto nos provee de un límite de la información que podemos obtener sobre un sistema. De manera más específica nos limita que tanto conocemos sobre su posición y su momento, nos indica que mientras sepamos más de una de estas variables, perdemos mas información acerca de la otra.

Definición 2.3: Las funciones de onda que satisfacen el principio de incertidumbre de Heisenberg con la igualdad son llamadas **funciones de onda de mínima incertidumbre**.

Teorema 2.3 La función de onda correspondiente al estado base del oscilador armónico $|0\rangle$ es una función de onda de mínima incertidumbre.

Demostración Se debe encontrar los valores de los operadores de incertidumbre para los operadores x y p sobre el estado $|\psi_0\rangle$, para facilitar este procedimiento se puede utilizar las definiciones de estos operadores en término de los operadores escalera que se encuentra en (9) y (10). Por tanto:

$$\langle x \rangle = \langle 0| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) |0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle 0| a |0\rangle) + (\langle 0| a^\dagger |0\rangle) = 0 \quad (20)$$

Donde se hace uso de la ortogonalidad de los estados del oscilador armónico $\langle 0|n\rangle = 0$ y el echo que el operador destrucción anula al estado base $a|0\rangle = 0$. Se procede de igual manera para encontrar que:

$$\langle p \rangle = 0 \quad (21)$$

⁴La demostración para el principio de incertidumbre se encuentra en el anexo 7.3

⁵Demostración en anexo 7.4

Ahora se debe investigar los valores esperados $\langle x^2 \rangle$ y $\langle p^2 \rangle$, para lo cual nuevamente se hará uso de (9) y (10):

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_0 | (aa |0\rangle + aa^\dagger |0\rangle + a^\dagger a |0\rangle + a^\dagger a^\dagger |0\rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (a |1\rangle + a^\dagger |1\rangle) = \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega}\end{aligned}\quad (22)$$

Procediendo de igual manera para $\langle p \rangle$ se obtiene:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}\quad (23)$$

Por tanto la relación de incertidumbre de Heisenberg para el estado base del oscilador armónico será:

$$(\sigma_x)(\sigma_p) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2} = \frac{\hbar}{2}\quad (24)$$

Por tanto la relación de incertidumbre de Heisenber se satura para el estado $|0\rangle$, lo cual hace de este una función de onda con mínima incertidumbre. \square

Teorema 2.4 Las funciones de onda $|\psi_n\rangle$, no saturan la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Demostración Nuevamente calculamos los valores esperados para los operadores x y p :

$$\langle x \rangle = \langle n | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) |n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n | a |n\rangle) + (\langle n | a^\dagger |n\rangle) = 0\quad (25)$$

Debido a la ortonormalidad de los estados del oscilador armónico. De igual manera:

$$\langle p \rangle = 0\quad (26)$$

Luego se investiga que sucede con $\langle x^2 \rangle$ y $\langle p^2 \rangle$:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a + a^\dagger)^2 |n\rangle\quad (27)$$

Se puede reescribir la expresión $(a + a^\dagger)^2 = aa + aa^\dagger - a^\dagger a + 2a^\dagger + a^\dagger a^\dagger = aa + [a, a^\dagger] + 2a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger$, donde se sabe que los términos que contienen operadores repetidos como aa o $a^\dagger a^\dagger$ resultaran en estados ortonormales a $|n\rangle$ y por tanto se pueden omitir, entonces:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | ([a, a^\dagger] + 2a^\dagger a) = \frac{\hbar}{2m\omega} (1 + 2n)\quad (28)$$

Procediendo de igual manera para p , se obtiene que:

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n | (a - a^\dagger)^2 | \psi_n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_n | ([a, a^\dagger] + 2a^\dagger a) = \frac{\hbar}{2m\omega} (1 + 2n)\quad (29)$$

Por tanto la relación de incertidumbre de Heisenberg resulta:

$$(\sigma_x)^2 (\sigma_p)^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} (1 + 2n)\right) \left(\frac{\hbar}{2m\omega} (1 + 2n)\right) = \frac{\hbar^2}{4} (1 + 2n)^2\quad (30)$$

Lo cual no es un estado con incertidumbre mínima, además esta incrementa con el parámetro n \square

La razón por la cual la función de onda que define el estado $|\psi_n\rangle$ no es de mínima incertidumbre se debe a que $a|n\rangle \neq 0$ y por tanto el valor esperado del operador $\langle a^\dagger a \rangle \neq 0$. Además $|\psi_n\rangle$ no es una eigenfunción del operador, esto se puede observar en la acción del operador sobre este: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Se espera entonces que exista otra función de onda $|\alpha\rangle$ la cual sea de mínima incertidumbre y satisfaga la relación de incertidumbre de Heisenberg, y también satisfaga que $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Definición 2.4 El estado $|\alpha\rangle$ definido por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x) \quad (31)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x) \quad (32)$$

tal que $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ será llamado **estado coherente**.

Teorema 2.5 Los estados coherentes satisfacen el mínimo de la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Demostración Debido a que los estados coherentes satisfacen que $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ se puede observar que $\langle \alpha|a^\dagger = \langle \alpha|\bar{\alpha}$. Por tanto $\langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$. Además:

$$\langle \alpha|a + a^\dagger|\alpha\rangle = \alpha + \bar{\alpha} \quad (33)$$

$$\langle \alpha|a - a^\dagger|\alpha\rangle = \alpha - \bar{\alpha} \quad (34)$$

y

$$\begin{aligned} \langle \alpha|(a + a^\dagger)^2|\alpha\rangle &= \langle \alpha|aa|\alpha\rangle + \langle \alpha|a^\dagger a^\dagger|\alpha\rangle + \langle \alpha|[aa^\dagger]|\alpha\rangle + \langle \alpha|2a^\dagger a|\alpha\rangle \\ &= \alpha^2 + (\bar{\alpha})^2 + 1 + 2\alpha\bar{\alpha} \\ &= (\alpha + \bar{\alpha})^2 + 1 \end{aligned} \quad (35)$$

De igual manera se puede obtener que:

$$\langle \alpha|(a - a^\dagger)^2|\alpha\rangle = (\alpha - \bar{\alpha})^2 - 1 \quad (36)$$

Ahora se puede obtener los valores para los operadores de incertidumbre de x y p con los estados coherentes.

$$\begin{aligned} (\sigma_x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle \alpha|(a + a^\dagger)^2|\alpha\rangle - \langle \alpha|a + a^\dagger|\alpha\rangle^2) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \bar{\alpha})^2 + 1 - (\alpha + \bar{\alpha})^2] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_p)^2 &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \\
&= \frac{\hbar m \omega}{2} (\langle \alpha | (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | a - a^\dagger | \alpha \rangle^2) \\
&= -\frac{\hbar m \omega}{2} [(\alpha - \bar{\alpha})^2 - 1 - (\alpha + \bar{\alpha})^2] \\
&= \frac{\hbar m \omega}{2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Lo cual implica que:

$$(\sigma_x)^2 (\sigma_p)^2 = \frac{\hbar}{4} \tag{39}$$

Por tanto los estados coherentes satisfacen la condición mínima de incertidumbre. \square

Esta última proposición nos indica que aunque no hay manera de violar la relación de incertidumbre de Heisenberg, y por tanto los sistemas cuánticos, tales como el oscilador armónico no tendrán la información que los describe de manera explícita como en la mecánica clásica. Sin embargo existe un conjunto de estados, los estados coherentes, los cuales nos permiten acercarnos a una definición clásica de “medición” en el mundo cuántico.

Se puede continuar el desarrollo de los estados coherentes introduciendo nuevos operadores y estados que cumplan con condiciones similares a la presentada en la definición 2.4, definiendo estados coherentes para dichos operadores. En las siguientes secciones se hará una introducción a los operadores de rotación utilizados en la mecánica cuántica y sus respectivos estados coherentes. [6](#)

2.3. Rotaciones infinitesimales en mecánica cuántica

Consideremos el operador de rotaciones que actúa sobre vectores físicos en \mathbb{R}^3 , se debe notar primero que la coordenada z debe permanecer constante en cualquier rotación sobre el eje z . Por tanto la matriz que se busca deberá tener la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Luego se puede tratar de encontrar los cuatro elementos restantes como un problema en el plano xy .

Suponga que existe un punto sobre el plano xy con coordenadas x_1 y y_1 . El vector r_1 conectará a este punto y el origen. Si este vector es rotado por un ángulo θ se produce un nuevo vector r_2 con coordenadas x_2 y y_2 . Se debe entonces de relacionar estas nuevas coordenadas con las originales, tomando en cuenta el ángulo θ .

Al momento de rotar el componente en x de r_1 , x_1 , por un ángulo θ , este se convierte en un vector x' el cual tiene componente en x de $x_1 * \cos(\theta)$ y una componente en y de $x_1 * \sin(\theta)$. De manera similar, el componente en y de r_1 , y_1 , luego de ser rotado en un ángulo θ se convierte en un nuevo vector y' , el cual tiene una componente x dada por $-y_1 * \sin(\theta)$ y una componente en y dada por $y_1 * \cos(\theta)$. Ahora x_2 y y_2 , las componentes de

r_2 , debe ser igual a la suma de las componentes en x y y de los vectores x' y y' , por tanto:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 * \cos(\theta) - y_1 * \sen(\theta) \\y_2 &= x_1 * \sen(\theta) + y_1 * \cos(\theta)\end{aligned}\tag{41}$$

La transformación descrita anteriormente puede ser escrita en notación matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix}x_2 \\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sen(\theta) \\ \sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1 \\y_1\end{bmatrix}\tag{42}$$

Finalmente se puede escribir una matriz de rotación en sentido horario de ángulo ϕ sobre el eje z como:

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sen(\phi) & 0 \\ -\sen(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{43}$$

Se puede proseguir de manera similar para obtener las matrices de rotación sobre el eje x y y , las cuales resultan ser:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sen(\phi) \\ 0 & -\sen(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}\tag{44}$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sen(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sen(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}\tag{45}$$

Existe un interés en la forma infinitesimal de las matrices de rotación, la cual se obtiene desarrollando en series de Taylor las matrices de rotación y donde se considera $\phi \ll 1$.

$$R_z(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{46}$$

$$R_x(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{bmatrix}\tag{47}$$

$$R_y(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{bmatrix}\tag{48}$$

Hasta el momento no se a utilizado ningún concepto de mecánica cuántica. La matriz de rotación definida actúa sobre un vector de R^3 . Ahora se debe entender la caracterización de las rotaciones en mecánica cuántica.

Debido a que la rotación afecta al sistema físico, se espera que el ket asociado al estado rotado sea diferente que el ket asociado al estado original sin rotación. Dado un operador de rotación R se asocia el operador $D(R)$ en el espacio ket, de forma que podamos expresar a un estado rotado $|\alpha\rangle_R$ en término del estado original $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle \quad (49)$$

Definición 2.5 Definimos la forma general para un operador infinitesimal como:

$$U - \epsilon = 1 - iG\epsilon \quad (50)$$

Tomando como ejemplo una traslación infinitesimal por un desplazamiento dx en la dirección x se tiene que:

$$G \rightarrow \frac{p_x}{\hbar} \quad \epsilon \rightarrow dx \quad (51)$$

Debido al conocimiento previo en mecánica clásica se sabe que el momento angular es el generador de rotaciones, tal como el momento es el generador de desplazamiento. Por tanto definimos el operador de momento angular J_k de tal manera que el operador para una rotación infinitesimal alrededor de un k -ésimo eje, por un ángulo $d\phi$ se obtendrá mediante:

$$G \rightarrow \frac{J_k}{\hbar} \quad \epsilon \rightarrow d\phi \quad (52)$$

Tomando el operador J_k como hermítico, el operador de rotación infinitesimal se garantiza como unitario y se reduce a la identidad en el límite $d\phi \rightarrow 0$. De manera general se tiene:

$$D(\hat{\mathbf{n}}, d\phi) = 1 - i\left(\frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right)d\phi \quad (53)$$

Es importante recalcar que no se define el momento angular como $\mathbf{x} \times \mathbf{p}$, se define \mathbf{J} para que el operador de rotaciones infinitesimales tome la forma mostrada en (50).

Se puede entonces obtener una rotación finita, con la composición sucesiva de rotaciones infinitesimales sobre el mismo eje. Por tanto para una rotación finita sobre el eje z por un ángulo ϕ se considera:

$$\begin{aligned} D_z(\phi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - i\left(\frac{J_z}{\hbar}\right)\left(\frac{\phi}{N}\right)\right]^N \\ &= \exp\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right) \\ &= 1 - \frac{iJ_z\phi}{\hbar} - \frac{J_z^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Para obtener las relaciones de conmutación se necesita un concepto extra. Para cada rotación R representada por una matriz ortogonal de 3×3 , existe un operador rotación $D(R)$ en el espacio ket apropiado. $D(R)$ tendrá las propiedades de grupo:

$$\text{Identidad: } D(R) \cdot 1 = D(R) \quad (55a)$$

$$\text{Cerradura: } D(R_1)D(R_2) = D(R_3) \quad (55b)$$

$$\begin{aligned} \text{Inversos: } D(R)D(R)^{-1} &= 1 \\ D(R)^{-1}D(R) &= 1 \end{aligned} \quad (55c)$$

$$\begin{aligned} \text{Asociatividad: } D(R_1)[D(R_2)D(R_3)] &= \\ [D(R_1)D(R_2)]D(R_3) &= \\ D(R_1)D(R_2)D(R_3) & \end{aligned} \quad (55d)$$

La relación fundamental de conmutación para los operadores de rotación escritos en términos de las matrices R. El análogo rotacional sería

$$\begin{aligned} [D_x(\epsilon), D_y(\epsilon)] &= \left(1 - \frac{iJ_x\epsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\epsilon}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_y\epsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\epsilon}{2\hbar^2}\right) - \left(1 - \frac{iJ_y\epsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\epsilon}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_x\epsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\epsilon}{2\hbar^2}\right) = \\ &= 1 - \frac{iJ_z\epsilon^2}{\hbar} - 1 \end{aligned} \quad (56)$$

Tomando los términos de orden ϵ^2 de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad (57)$$

Al repetir este argumento con rotaciones de otro ejes, se obtiene:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (58)$$

Esto se conoce como la relación de conmutación de momento angular.

Utilizando las relaciones de conmutación anteriores, recordamos que J_i es un generador de rotaciones infinitesimales. Se puede obtener nuevas propiedades importantes definiendo el operador J^2 como

$$J^2 = J_x J_x + J_y J_y + J_z J_z \quad (59)$$

este conmuta con cada uno de los J_k , por tanto

$$[J^2, J_k] = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (60)$$

Para demostrar esto comprobemos el caso en que $k = 3$

$$\begin{aligned} [J_x J_x + J_y J_y + J_z J_z, J_z] &= J_x [J_x, J_z] + [J_x, J_z] J_x + J_y [J_y, J_z] + [J_y, J_z] J_y \\ &= J_x (-i\hbar J_y) + (-i\hbar J_y) J_x + J_y (i\hbar J_x) + (i\hbar J_x) J_y \end{aligned} \quad (61)$$

$$= 0 \quad (62)$$

Se puede repetir el procedimiento para el resto de operadores. Ahora denotamos a los eigenvalores de J^2 y J_z por a y b . Es conveniente trabajar con los operadores no hermíticos

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \quad (63)$$

los operadores escalera.

Estos satisfacen con las relaciones de conmutación

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad (64)$$

y

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm} \quad (65)$$

además

$$[J^2, J_{\pm}] = 0 \quad (66)$$

La función física de los operadores J_{\pm} se puede observa con la acción de J_z sobre $J_{\pm} |a, b\rangle$

$$\begin{aligned} J_z(J_{\pm} |a, b\rangle) &= ([J_z, J_{\pm}] + J_{\pm} J_z) |a, b\rangle \\ &= (b \pm \hbar)(J_{\pm} |a, b\rangle) \end{aligned} \quad (67)$$

Por tanto se observa que si se aplica los operadores J_{\pm} sobre un eigenket de J_z , el resultado sigue siendo eigenket de J_z , pero el eigenvalor de este fue aumentado por \hbar . Por esta razón J_{\pm} se conocen como los operadores escalera.

Ahora se puede construir los eigenkets de momento angular y estudiar su espectro de eigenvalores. Suponga que aplicamos J_+ n veces a un eigenket simultáneo de J^2 y J_z . Se obtiene entonces eigenkets de J^2 y J_z con el eigenvalor de J_z aumentado por $n\hbar$, mientras que el eigenvalor de J^2 resulta invariante. Sin embargo este proceso no puede continuar de manera indefinida. Existe un límite superior para b , esto es para el eigenvalor de J_z para un a , eigenvalor de J^2 , dado, entonces

$$a \geq b^2 \quad (68)$$

Esto se comprueba notando que

$$\begin{aligned} J^2 - J_z^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \\ &= \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+) \end{aligned} \quad (69)$$

entonces $J_+J_+^\dagger$ y $J_+^\dagger J_+$ deben tener valores esperados no negativos. Entonces

$$\langle a, b | (J^2 - J_z^2) | a, b \rangle \geq 0 \quad (70)$$

Lo cual implica (66). Por tanto debe existir un b_{max} tal que

$$J_+ |a, b_{max}\rangle = 0 \quad (71)$$

esto nos indica que el eigenvalor b el cual no se puede aumentar más allá de b_{max} . Esto también implica que

$$J_- J_+ |a, b_{max}\rangle = 0 \quad (72)$$

Pero

$$\begin{aligned} J_- J_+ &= J_x^2 + J_y^2 - i(J_y J_x - J_x J_y) \\ &= J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{aligned} \quad (73)$$

por tanto

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |a, b_{max}\rangle = 0 \quad (74)$$

Debido a que $|a, b_{max}\rangle$ no es un ket nulo, esta relación solo es posible si

$$a - b_{max}^2 - b_{max}\hbar = 0 \quad (75)$$

o

$$a = b_{max}(b_{max} + \hbar) \quad (76)$$

De manera similar se puede justificar la existencia de un b_{min} , tal que

$$J_- |a, b_{min}\rangle = 0 \quad (77)$$

escribiendo J_+J_- como

$$J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \quad (78)$$

se puede concluir que

$$a = b_{min}(b_{min} - \hbar) \quad (79)$$

Comparando (74) y (77) se infiere que

$$b_{max} = -b_{min} \quad (80)$$

los valores permitidos para b se encuentran acotados

$$-b_{max} \leq b \leq b_{max} \quad (81)$$

Se podrá alcanzar $|a, b_{max}\rangle$ a partir de $|a, b_{min}\rangle$ por la aplicación sucesiva de J_+ un número finito de veces. Por tanto se tiene que

$$b_{max} = b_{min} + n\hbar \quad (82)$$

donde n es algún número entero. Como resultado se obtiene que

$$b_{max} = \frac{n\hbar}{2} \quad (83)$$

Es convencional trabajar con j , sustituyendo a b_{max}/\hbar , se obtiene entonces

$$j = \frac{n}{2} \quad (84)$$

El máximo eigenvalor para J_z es $j\hbar$ donde j es algún número entero o la mitad de algún número entero. El eigenvalor de J^2 será dado por

$$a = \hbar^2 j(j+1) \quad (85)$$

si ahora definimos m como

$$b = m\hbar \quad (86)$$

Si j es un entero, todo los valores m son números enteros; si j es la mitad de algún número entero, los valores de m serán la mitad de algún número entero. Los valores aceptados de m para un j dado son

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \quad (87)$$

En lugar de $|a, b\rangle$ es más conveniente denotar a los eigenkets simultáneos de J^2 y J_z por $|j, m\rangle$. La ecuación básica de eigenvalores será

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad (88)$$

y

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad (89)$$

Recordando obtuvimos estos resultado a partir de las relaciones de conmutación expresadas entre los operadores de momento angular. La cuantización del momento angular que se manifiesta en (86) y (87) son una consecuencia directa de las relaciones de conmutación de momento angular. 7

2.4. Estados coherentes de espín

Recordando el caso del oscilador armónico cuántico, aunque de manera general no se puede determinar la posición y el momento de manera simultánea para un sistema determinado, se pudo construir estados los cuales minimizaran la relación de incertidumbre de Heisenberg. Esto resultó en estados cuyas dinámicas se asemejan a aquellos del caso clásico, los cuales llamamos estados coherentes. De igual manera para el momento angular de espín también se pueden encontrar ciertos estados, llamados estados coherentes de espín, en los cuales el promedio de su momento angular sigue dinámicas similares a las clásicas, a través de tres componentes no conmutativos del momento angular. [\[8\]](#)

Definición 2.6 Definimos un estado coherente de espín para un sistema con momento angular total j , tomando primero un eigenestado cualquiera de $J \cdot n$ para algún n , esto es

$$(J \cdot \hat{n}) |j, j\rangle = j |j, j\rangle \quad (90)$$

aquí $|n\rangle$ es descrito como un eigenestado de $J \cdot n$. Por tanto los estados coherentes se generarán aplicando el operador $D(R)$, para todo R , y los estados coherentes de espín serán [\[9\]](#)

$$D(R) |j, j\rangle \quad (91)$$

Estados de espín anticoherentes

En el capítulo anterior se presentó una introducción a los estados coherentes estándares y lo estados coherentes de espín.

3.1. Estado de espín anticoherentes

Un estado coherente de espín $|\hat{n}\rangle$ es un estado de espín que corresponde lo más cerca posible a un vector clásico de espín, el cual apunta en una dirección dada \hat{n} . Estos representan una mímica del momento angular clásico. Sin embargo en el estudio actual de la mecánica cuántica, existe un interés en encontrar las capacidades que un sistema cuántico presenta y las cuales difieren de un sistema clásico. Surge la duda sobre la utilidad de los estados coherentes como un recurso que puede ser utilizado para aplicaciones actuales, por ejemplo computación cuántica, y como se demostró por Markham y Vedral [1], los estados coherentes de espín son resistentes a la formación de enredamiento.

Es importante preguntar entonces: ¿Qué tipo de estado de espín podría definirse como el opuesto de un estado coherente? Esto podría permitir encontrar los estados menos clásicos, con lo cual se podrían descubrir nuevas aplicaciones teóricas, y eventualmente, prácticas.

Una de las maneras de formalizar la idea de un estado opuesto a un estado coherente, descrito por Jason Zimba en [3], podría ser considerar un estado $|\psi\rangle$ tal que su vector de polarización sea nulo, $\mathbf{p} = \langle\psi|\mathbf{S}|\psi\rangle$. Esto nos indica que dicho estado no tiene una dirección media definida. Un ejemplo de esto es el estado $|s = 1; m = 0\rangle \equiv |0\rangle$ tiene polarización nula.

Demostración El estado $|0\rangle$ se representa como un vector:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mientras tanto las matrices que representan los operadores de espín 1 son:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto el vector de polarización para este estado se obtendrá como:

$$\mathbf{p} = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

En el caso que se desee un criterio mas estricto para definir un estado opuesto a coherente se puede considerar el concepto de varianza de la medida experimental. Considere un experimento que mida $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{S}$ repetidas veces sobre un sistema preparado en el estado $|0\rangle$, y otro que mida $\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{S}$ sobre el mismo tipo de sistema preparado en $|0\rangle$. En promedio, ambos experimentos obtendrán el mismo resultado. Pero en general las varianzas de ambos resultados serán diferentes. Por tanto aún existe un conocimiento de la dirección a lo largo de la cual fue medido el sistema, y se encuentra en la varianza experimental. En este sentido el estado $|0\rangle$ aún tiene información direccional.

Eliminar la información sobre la dirección requiere entonces un estado $|\psi\rangle$ para el cual la varianza en la medición del espín en cualquier dirección sea igual a la varianza en la medición del espín en cualquier otra dirección. En otras palabras se desea que la función:

$$\Delta S_{\hat{\mathbf{n}}}^2 = \frac{\langle \psi | (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} | \psi \rangle^2}{\langle \psi | \psi \rangle^2} \quad (92)$$

sea uniforme sobre la esfera unitaria, la cual contiene a todos los estados de espín.

Generalmente la función de varianza sobre la esfera unitaria no es uniforme. En el caso de que la función de varianza $\Delta S_{\hat{\mathbf{n}}}^2$ será uniforme sobre la esfera para un estado $|\psi\rangle$, este estado será llamado un estado uniforme.

En el caso que $|\psi\rangle$ sea un estado uniforme, cuyo vector de polarización sea nulo, $|\psi\rangle$ será un estado anticoherente.

3.1.1. Criterios para uniformidad y anticoherencia

Cuando el vector de polarización es nulo, la expresión para la varianza, $\Delta S_{\hat{\mathbf{n}}}^2$ se reduce a calcular $\langle (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})^2 \rangle$. En el caso de trabajar con un estado anticohrente, tendremos un valor uniforme para la función $\Delta S_{\hat{\mathbf{n}}}^2$, siendo este c , se tendrá que:

$$\begin{aligned} c + c + c &= \Delta S_x^2 + \Delta S_y^2 + \Delta S_z^2 \\ &= \langle S_x^2 | S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 | S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 | S_z^2 \rangle \\ &= s(s+1) \end{aligned} \tag{93}$$

Por tanto cualquier estado anticohrente debe tener $\Delta S_{\hat{\mathbf{n}}}^2 = \frac{s(s+1)}{3}$ independiente del eje de rotación $\hat{\mathbf{n}}$. Se tendrá además que en el caso de que $|\psi\rangle$ sea anticohrente, se cumple que $\langle S_i S_j | S_i S_j \rangle = 0$ para ejes perpendiculares i y j .

Demostración: Considere la siguiente igualdad:

$$S_i S_j + S_j S_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i + \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i - \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2$$

Tomando el valor esperado del lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$\langle \psi | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i + \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i - \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i + \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S_i - \frac{1}{\sqrt{2}} S_j \right)^2 | \psi \rangle$$

Se puede considerar que las expresiones $\frac{1}{\sqrt{2}} S_i - \frac{1}{\sqrt{2}} S_j$ y a $\frac{1}{\sqrt{2}} S_i + \frac{1}{\sqrt{2}} S_j$ son rotaciones de 45° de los ejes i y j . Por tanto:

$$\langle \psi | S_i S_j + S_j S_i | \psi \rangle = \langle \psi | (S_u)^2 | \psi \rangle - \langle \psi | (S_v)^2 | \psi \rangle = c - c = 0$$

De igual manera, si un estado satisface que $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle S_z \rangle = \langle S_x S_y \rangle = \langle S_y S_z \rangle = \langle S_x S_z \rangle = 0$ y además $\langle S_x^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle = \langle S_z^2 \rangle$, este debe ser anticohrente.

3.1.2. La representación de Majorana como estrategia para encontrar estados anticohrentes

Las condiciones algebraicas para detectar anticoherencia en un estado $|\psi\rangle$ involucran cálculos intrincados con números complejos, aún para números cuánticos de espín relativamente bajos. Esto causa un problema para generar ejemplos de estados anticohrentes. La representación de Majorana¹, sin embargo, nos permite realizar esta tarea con facilidad. La representación de Majorana de un espínor de $2s + 1$ componentes de la forma $c_0 | +s \rangle + \dots + c_{2s} | -s \rangle$ es una $2s$ -tupla de puntos sobre la esfera S^2 , esto se logra de la siguiente manera:

$$c_0 | +s \rangle + \dots + c_{2s} | -s \rangle \leftrightarrow \text{Raíces de } M(z) \leftrightarrow \text{Puntos en } S^2$$

¹Consultar *Atomì orientati in campo magnetico variabile* de Majorana, E.

En donde el polinomio de Majorana $M(z)$ se forma a partir de los componentes del espinor siguiendo:

$$M(z) = \sum_{k=0}^{2s} c_k \binom{2s}{k}^{1/2} z^{2s-k} \quad (94)$$

Es importante recalcar que las raíces resultantes del polinomio de Majorana son independientes de factores globales en el estado de espín.

El mapeo de puntos X, Y, Z de S^2 y las raíces de $M(z)$ las cuales pertenecen a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se realiza mediante la proyección estereográfica desde el polo sur $(X, Y, Z) \leftrightarrow (X + iY)/(1 - Z)$. Es importante notar que al momento de crear el polinomio de Majorana de un estado de espín $2s + 1$, este será, a lo más, de grado $2s$, y por tanto tendrá $2s$ raíces complejas. Cada una de estas raíces complejas luego se mapea a un punto de la esfera unitaria, con lo cual se obtienen $2s$ puntos sobre esta.

La representación de Majorana de un estado coherente consiste de un solo punto con multiplicidad $2s$. En el extremo opuesto a esto se puede imaginar un estado cuya representación de Majorana este distribuida uniformemente sobre la esfera.

3.1.3. Estados perfectos y su anticoherencia

Considere los vértices de los sólidos perfectos sobre la esfera unitaria. Si se hace la correspondencia de Majorana descrita en la sección anterior se determinan los llamados estados perfectos; de los cuales existen 5 considerando todos los estados equivalentes por su rotación. Recordando los sólidos perfectos tenemos: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro. Los estados que corresponden a estos sólidos, expresados en la base del operador J_z serán

$$|2, \psi_{tet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|+1\rangle - |-2\rangle) \quad (95a)$$

$$|3, \psi_{oct}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+2\rangle - |-2\rangle) \quad (95b)$$

$$|4, \psi_{cubo}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+4\rangle + \sqrt{14}|0\rangle + \sqrt{5}|-4\rangle) \quad (95c)$$

$$|6, \psi_{icos}\rangle = \frac{1}{5}(-\sqrt{7}|+5\rangle + \sqrt{11}|0\rangle + \sqrt{7}|-7\rangle) \quad (95d)$$

$$|10, \psi_{dodec}\rangle = a|+10\rangle + b|+5\rangle + |0\rangle - b|-5\rangle + a|-10\rangle \quad (95e)$$

Las gráficas para los estados perfectos y el algoritmo utilizado se encuentra en la sección de anexos.

Teniendo estos estados perfectos se les puede aplicar la condición de anticoherencia. Todos los estados listados anteriormente se pueden clasificar como anticoherentes. Debido a que la propiedad de ser anticoherente es invariante bajo la rotación, se puede decir que todos los estados perfectos serán anticoherentes.

Sin embargo, no se puede hacer la generalización que todos los estados anticoherentes

son estados perfectos. Para mostrar esto se puede considerar la siguiente familia de estados:

$$|s \geq 3, \psi_{ac}\rangle = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{s+1}{6s}} | +s \rangle + \sqrt{\frac{2s-1}{3s}} | 0 \rangle + e^{i\alpha} \sqrt{\frac{s+1}{6s}} | -s \rangle \quad (96)$$

Este estado para todo $s \geq 3$ es anticoherente para cualquier α real. Mientras tanto su polinomio de Majorana tiene la forma:

$$z^{2s} + e^{-i\alpha} \binom{2s}{s}^{1/2} \sqrt{\frac{4s-2}{2s+1}} z^s + 1 \quad (97)$$

Este polinomio es cuadrático en z^s . Por tanto la representación de Majorana consiste de dos capas de puntos sobre la esfera, cada una consistente de s puntos equidistantes alrededor de un círculo de latitud. El estado $|\psi_{cubo}\rangle$ es un ejemplo de estos estados, con $s = 4$ y $\alpha = 0$. Para $s > 4$ la representación de Majorana para $|\psi_{ac}\rangle$ no será un estado perfecto. [\[3\]](#)

Las simetrías de los estados de espín, mediante la representación de Majorana pueden expresarse como simetrías de rotacionales de puntos en la esfera. La clasificación de las simetrías de estados de espín ha sido completada por Bacry [\[4\]](#). Estas simetrías agotan las simetrías de cualquier estado anticoherente en particular.

En el siguiente capítulo se presentarán los algoritmos creados para encontrar los estados de espín anticoherentes. Se mostrará la idea sobre la cual se apoya el procedimiento y los resultados obtenidos. Además de esto se compararán estos con los resultados presentados en otros artículos científicos como punto de comparación. Finalmente en la sección de anexos se podrá encontrar la aplicación de estos algoritmos en distintos lenguajes de programación.

4.1. Producto tensorial simétrico de espín 1/2

El primer método que se ideó para encontrar los estados anticoherentes de espín consistió en considerar un estado de espín j como un producto tensorial simétrico de $2j$ estados de espín $1/2$ con un eje $\hat{\mathbf{n}}$ ¹.

$$|\hat{\mathbf{n}}, +\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |-\rangle \quad (98)$$

A partir de los parámetros θ y ϕ , donde θ representa el ángulo polar y ϕ representa el ángulo azimutal que define el eje a través del cual se hace la medición del momento angular. Se consigue conocer la representación del estado sobre la esfera unitaria, se busca entonces encontrar el estado el cual permite una distribución uniforme sobre la esfera. Estos cumplen con la condición algebraica $\langle\psi|\mathbf{S}|\psi\rangle = 0$.

Considerando que las representaciones de Majorana resultantes de algún estado $|\psi\rangle$ tiene una forma y orientación específica, al momento de poner un punto sobre el polo norte y algún otro punto sobre la línea que define un ángulo ϕ_0 fijamos la orientación de un marco adaptado a la esfera, por tanto podemos representar a dicho estado como: $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\rangle$.

¹La derivación de esta expresión se encuentra en la sección de anexos

Definición 3.1: Definimos el producto simétrico de n espines como todas las permutaciones de n espines. Por ejemplo si se tienen 3 estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$, su producto tensorial simétrico será:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (99)$$

es importante observar que se omite la normalización de los estados presentados con anterioridad, esto debido a que la normalización no tiene importancia para encontrar la representación de Majorana del estado resultante.

El método entonces encontrará los estados que cumplen con la condición de 1- anticoherencia mediante los parámetros que los definen sobre la esfera unitaria. Recordando que la condición de 1-anticoherencia es:

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle = 0 \quad (100)$$

Además debemos recordar que la representación de los estados anticoherentes sobre la esfera unitaria, es decir su representación de Majorana, se espera una distribución uniforme con alguna simetría rotacional sobre la superficie de esta.²

Para encontrar los parámetros que cumplen con esta condición se utilizó el método de descenso gradiente. Este algoritmo es un método general de minimización para una función f . El programa de descenso gradiente utilizado será detallado en la parte de anexos.

4.1.1. Espín 1:

Los estados sobre los cuales se realiza el producto tensorial simetrizado para encontrar los estados anticoherentes para espín 1 serán:

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \quad (101)$$

$$|\psi_1\rangle = \cos \frac{\theta_1}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_1}{2} |-\rangle \quad (102)$$

Luego de realizar el producto tensorial simetrizado de los estado de espín 1/2 se puede obtener el estado resultante en la base de espín 1. Esto se logra mediante el uso de las reglas para la adición de momento angular en mecánica cuántica, haciendo uso de los coeficientes de Clebsch-Gordan :

$$|\psi\rangle = 2 * \text{Cos}(\theta_1/2) |+1\rangle + \sqrt{2} * \text{Sin}(\theta_1/2) |0\rangle \quad (103)$$

Por el estado conjugado resultaría siendo:

$$\langle \psi | = 2 * \text{Cos}(\theta_1/2) \langle +1 | + \sqrt{2} * \text{Sin}(\theta_1/2) \langle 0 | \quad (104)$$

Utilizando los operadores de momento angular para la representación de espín correspondiente, los cuales para espín 1 tienen la siguiente forma matricial:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

²Un ejemplo del programa utilizado puede ser encontrado en el anexo 7.8

$$S_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Recordando la condición que se debe cumplir para poder determinar si un estado es 1-anticoherente es:

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle = 0 \quad (105)$$

El estado que cumple con la condición de anticoherencia para este espín se encuentran definidos por los siguientes parámetros:

$$\theta_0 = 0 \quad \phi_0 = 0 \quad (106)$$

$$\theta_1 = \pi \quad \phi_1 = 0 \quad (107)$$

Comprobando que este estado es 1-anticoherente, primero vemos que su representación en la base de espín 1 será:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Por tanto la condición de anticoherencia para este estado resulta en:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [0, \sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ [0, \sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + [0, \sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (109) \end{aligned}$$

Esto corresponde a la siguiente representación de Majorana:

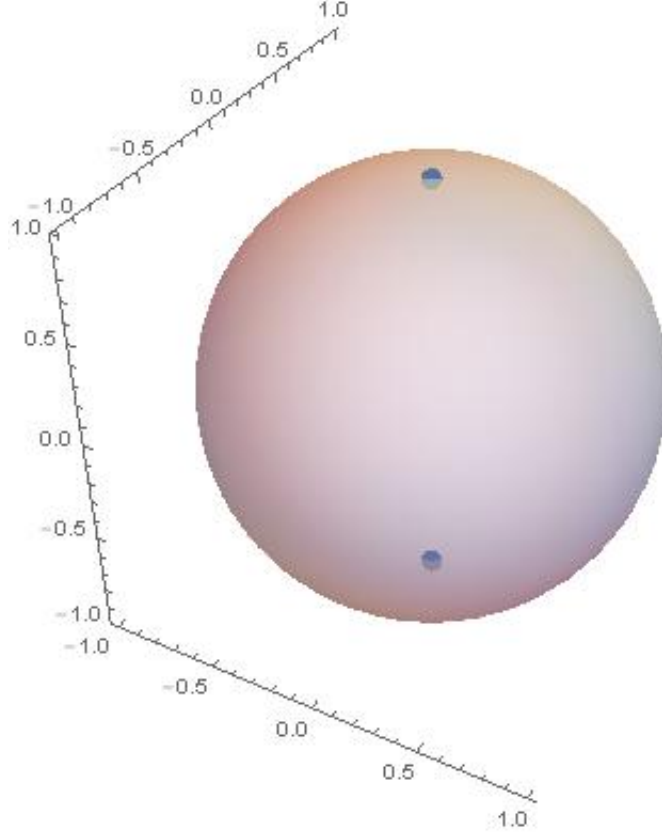


Figura 2: Representación de Majorana del Estado 1-Anticoherente de espín 1.

Se puede observar que se obtuvo la distribución con mayor dispersión posible para 2 puntos sobre la esfera, encontrando ambos en puntos antipodales. Esto es importante al considerar la representación de Majorana como método para encontrar los estados anticoherentes.

4.1.2. Espín 3/2:

El producto tensorial simetrizado para este estado se realiza sobre los siguientes estados:

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \quad (110)$$

$$|\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |-\rangle \quad (111)$$

$$|\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\phi_2} |-\rangle \quad (112)$$

El estado resultante luego de realizar el producto será:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & \sqrt{3}(2e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)) | -1/2 \rangle + \sqrt{3}(2 \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \\ & + 2e^{i\phi_2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)) | +1/2 \rangle + 6 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) | +3/2 \rangle \end{aligned} \quad (113)$$

Los puntos resultantes sobre la esfera, con el conocimiento que se fijo uno de los estados para siempre estar sobre el polo norte de la esfera están parametrizados por:

$$\theta_0 = 0 \quad \phi_0 = 0 \quad (114)$$

$$\theta_1 = 2.094395 \quad \phi_1 = 0 \quad (115)$$

$$\theta_2 = 2.094395 \quad \phi_2 = \pi \quad (116)$$

Sustituyendo estos parámetros para encontrar un estado 1-anticoherente de espín 3/2 resulta en el estado:

$$|\psi\rangle = [1.5, 0, -2.59808, 0] \quad (117)$$

Y probando la condición de 1-anticoherencia sobre este resulta en:

$$\langle\psi|\mathbf{S}|\psi\rangle = 1.5477 * 10^{-12} \quad (118)$$

Con lo cual se obtiene la siguiente representación sobre la esfera:

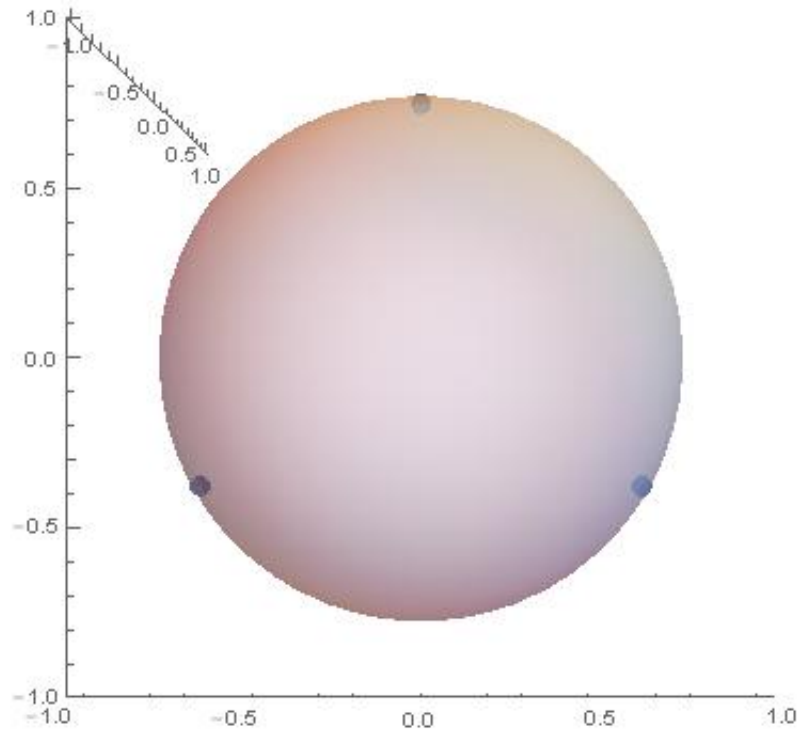


Figura 3: Representación de Majorana del Estado 1-Anticoherente de espín 3/2.

4.1.3. Espín 2

Para el último estado anticoherente encontrado mediante este método se utilizaron los siguientes estados. Tomando en cuenta de nuevo el tener un estado fijo sobre el polo norte

y otro sobre la línea que define $\phi = 0$:

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \quad (119)$$

$$|\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |-\rangle \quad (120)$$

$$|\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\phi_2} |-\rangle \quad (121)$$

$$|\psi_3\rangle = \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) |+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_3} |-\rangle \quad (122)$$

El estado resultante luego del producto tensorial será:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & 24 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) | +2\rangle + \\ & + \frac{12}{3} \sqrt{6} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} | +1\rangle + \\ & + 12 \left(\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_2} + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} + \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_1} \right) |0\rangle + \\ & + 12 \left(\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_2} + \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) e^{i\phi_1} \right) | -1\rangle \end{aligned} \quad (123)$$

Las coordenadas para los puntos que cumplen con la condición de 1-anticoherencia para este espín fueron los siguientes:

$$\theta_0 = 0 \quad \phi_0 = 0 \quad (124)$$

$$\theta_1 = 1.5452 \quad \phi_1 = 0 \quad (125)$$

$$\theta_2 = \pi \quad \phi_2 = 0.103 \quad (126)$$

$$\theta_3 = -1.797 + \pi \quad \phi_3 = \pi \quad (127)$$

El estado resultante será:

$$|\psi\rangle = [0, 5.3233 + 0.5502i, -1.4988 - 0.1549i, -5.322 - 0.550i, 0] \quad (128)$$

Al aplicar la condición de 1-anticoherencia sobre este resulta en:

$$\langle \psi | S | \psi \rangle = 0.00011 \quad (129)$$

La representación sobre la esfera de este estado será:

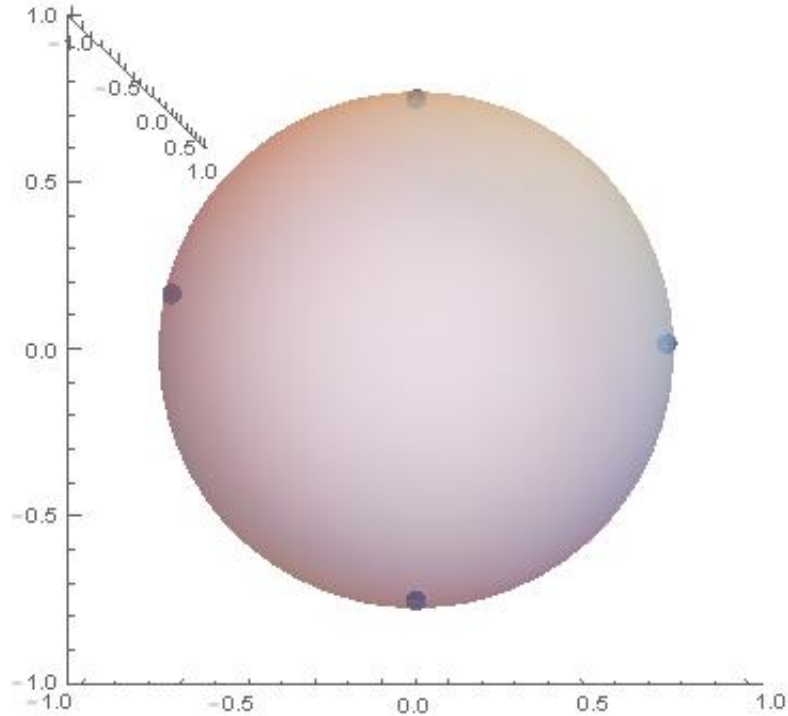


Figura 4: Representación de Majorana del estado 1-Anticoherente de espín 2.

Continuar con el método propuesto con anterioridad resulta tedioso debido a la falta de automatización para la primera parte de proceso. El calcular los productos tensoriales simétricos para números de cuánticos de espín mayores a 2 resulta en calcular $5!$ o más productos tensoriales. Además de esto encontrar mínimos en la función que define la condición de 1- anticoherencia para estos estados requiere de demasiado poder computacional. Cada vez que se aumenta el número de espín con el cual se trabaja, se agregan 2 variables más sobre las cuales optimizar la condición de 1-anticoherencia. Es útil por tanto contar con algún algoritmo que optimice, o incluso elimine, uno o ambos de estos problemas.

4.2. Coordenadas proyectivas

El siguiente algoritmo utilizado resuelve ambas de las complicaciones que surgieron a partir del primer procedimiento propuesto. Este trabaja directamente encontrando los coeficientes de los estados que cumplen con las condiciones de 1-anticoherencia. Por tanto, no es necesario partir de un producto tensorial de los estados particulares que definen el estado final. Aunque que para un estado de espín j aún se necesitara de $4j - 1$ variables, estas formarán una función polinomial, a comparación del método anterior en el cual se debía optimizar una función trigonométrica compleja.

Suponga que tiene un estado de espín j , este se puede representar como una combinación

lineal de los estados de la base de espín correspondiente:

$$|\psi\rangle = A_{(+j)} | +j\rangle + A_{(+j-1)} | j-1\rangle + \dots + A_{(-j+1)} | -j+1\rangle + A_{(-j)} | -j\rangle \quad (130)$$

Estos coeficientes $A_{(n)}$ son conocidos como las coordenadas proyectivas del estado.

Si dividimos todo el estado por A_{+j} resulta en:

$$|\psi\rangle = | +j\rangle + a_{(+j-1)} | +j-1\rangle + \dots + a_{(-j+1)} | -j+1\rangle + a_{(-j)} | -j\rangle \quad (131)$$

Donde $a_n = \frac{A_n}{A_{+j}}$.

Se puede además, fijar algunos de los grados de libertad sobre la esfera. Esto nos evitaría la adición de variables redundantes en la función final que presentemos como condición de 1-anticoherencia. Haciendo uso de esto podemos prescindir de $| -j\rangle$ en nuestro estado de prueba, debido a que esta parte del estado resultará en un término lineal en el polinomio de Majorana del estado y por tanto al momento de descartarlo se esta fijando la raíz $z = 0$ para el polinomio resultante. Esto luego en la representación de Majorana será un punto sobre el polo norte, gracias a la proyección estereográfica tomada desde el polo sur.

Además de eliminar la dependencia de $| -j\rangle$ de nuestro estado de prueba, se puede hacer que el coeficiente a_{+j-1} sea real, por tanto fijando un punto sobre la longitud que define ϕ_0 .

El estado de prueba con el cual se trabaja tiene entonces la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & | +j\rangle + a_{(+j-1)} | +j-1\rangle + (a_{(+j-2)} + b_{+j-2}i) | +j-2\rangle + \dots \\ & \dots + (a_{(-j+2)} + b_{(-j+2}i) | -j+2\rangle + (a_{(-j+1)} + b_{(-j+1}i) | -j+1\rangle \end{aligned} \quad (132)$$

Se pueden obtener $(2j)!$ diferentes estados de prueba mediante la elección del coeficiente que se divide en la primera simplificación. Al momento de dividir el estado original por el coeficiente A_k , con $-j \leq k \leq +j$, se obtendrán distintos coeficientes $a_l = \frac{A_l}{A_k}$. Si se utiliza este nuevo estado en la condición de 1-anticoherencia se obtendrán distintos valores de coeficientes. Esto nos permite tener una forma eficiente de obtener varios estados 1-anticoherentes para un número de espín dado³

4.2.1. Espín 2

Empezando con $j = 2$ se contará con un estado de prueba $|\psi\rangle$ con la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = A_{(+2)} | +2\rangle + A_{(+1)} | +1\rangle + A_{(0)} | 0\rangle + A_{(-1)} | -1\rangle + A_{(-2)} | -2\rangle \quad (133)$$

Dividiendo el estado por $A_{(+2)}$ y suponiendo que $a_{(+1)}$ es un coeficiente real, se obtiene el siguiente estado de prueba:

$$|\psi\rangle = | +2\rangle + a_{(+1)} | +1\rangle + (a_{(0)} + ib_{(0)}) | 0\rangle + (a_{(-1)} + ib_{(-1)}) | -1\rangle \quad (134)$$

Los coeficientes que minimizan la condición de 1-anticoherencia en este caso serán:

$$|\psi\rangle = | +2\rangle + (-0.0206) | +1\rangle + (0.0102 + i0.0064) | 0\rangle + (1.1890 + i0.7658) | -1\rangle \quad (135)$$

³Un ejemplo del programa utilizado puede ser encontrado en el anexo 7.6

La condición de 1-anticoherencia para este estado resulta en:

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle = 4.2465 * 10^{-17} \quad (136)$$

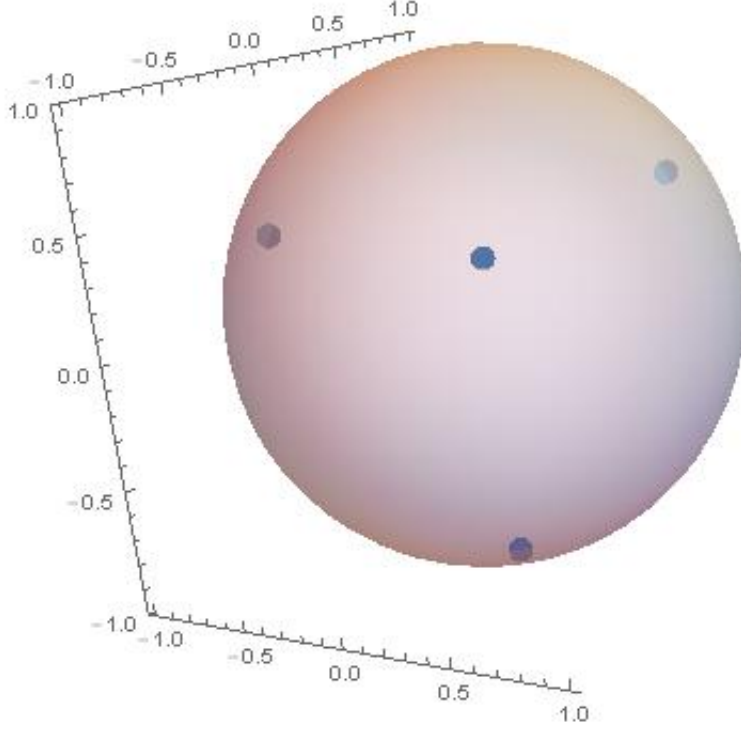


Figura 5: Estado 1-anticoherente de espín 2.

Se puede observar que la representación de Majorana de este estado coincide con el estado perfecto $|2, \psi_{tet}\rangle$, aún cuando el estado de prueba no dependía de $|-2\rangle$ a diferencia de lo observado en la ecuación (63a). Esto se puede deber a la diferentes orientaciones que se observa entre estas dos representaciones.

Continuando con el procedimiento, podemos ahora cambiar el coeficiente por el cual se divide al estado de prueba. Si ahora dividimos a este por $A_{(+1)}$, se obtendrá un estado diferente:

$$|\psi\rangle = a_{(+2)} | +2\rangle + | +1\rangle + (a_{(0)} + ib_{(0)}) | 0\rangle + (a_{(-1)} + ib_{(-1)}) | -1\rangle \quad (137)$$

esta variación causa que el polinomio de Majorana resultante cambie y por tanto tenga raíces diferentes al polinomio creado utilizando el estado descrito por (103). Por tanto estamos encontrando un conjunto distinto de raíces, y puntos sobre la esfera, que satisfagan la condición de 1-anticoherencia.

En este caso el estado resultante que minimiza la condición de 1-anticoherencia resulta:

$$|\psi\rangle = (4.12 * 10^{-9}) | +2\rangle + | +1\rangle + (-0.1265 + i0.5205) | 0\rangle + (0.8884 + i0.4590) | -1\rangle \quad (138)$$

En el cual la condición de 1-anticoherencia resulta en:

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle 7.036 * 10^{-18} \quad (139)$$

Y cuya representación de Majorana será:

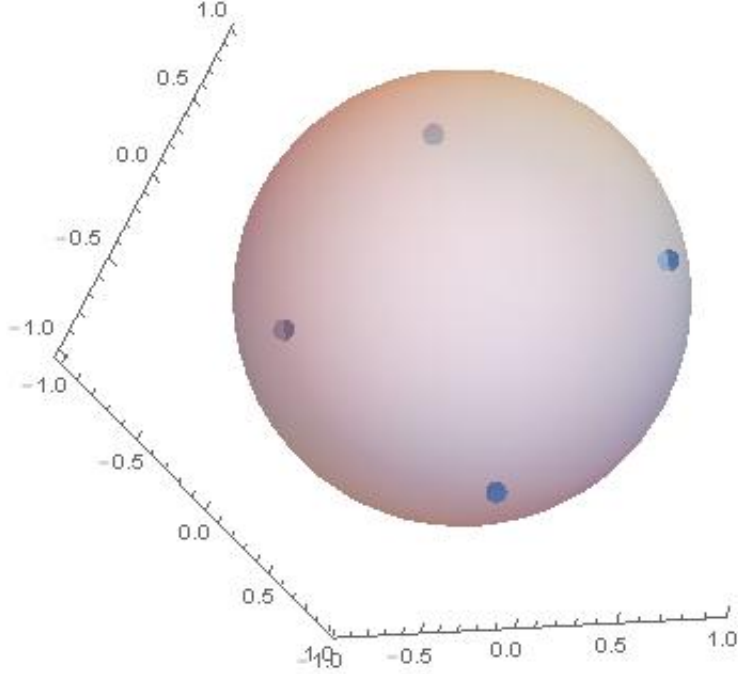


Figura 6: Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 2.

4.2.2. Espín 5/2

Se presentará ahora algunos resultados obtenidos para un sistema de espín $j = 5/2$, junto a su representación sobre la esfera. Se tienen un estado de espín $j = 5/2$

$$|\psi\rangle = A_{(+5/2)} | +5/2\rangle + A_{(+3/2)} | +3/2\rangle + A_{(1/2)} | 1/2\rangle + A_{(-1/2)} | -1/2\rangle \\ + A_{(-3/2)} | -3/2\rangle + A_{(-5/2)} | -5/2\rangle \quad (140)$$

A este estado lo dividimos por $A_{(+5/2)}$, con lo que se obtiene:

$$|\psi\rangle = | +5/2\rangle + (a_{(+3/2)} + ib_{(+3/2)}) | +3/2\rangle + (a_{(+1/2)} + ib_{(+1/2)}) | +1/2\rangle + (a_{(-1/2)} + ib_{(-1/2)}) | -1/2\rangle \\ + (a_{(-3/2)} + ib_{(-3/2)}) | -3/2\rangle + (a_{(-5/2)} + ib_{(-5/2)}) | -5/2\rangle \quad (141)$$

Los coeficientes que satisfacen la condición de 1-anticoherencia en este caso resultan:

$$|\psi\rangle = | +5/2\rangle + (-0.0514) | +3/2\rangle + (0.0796 + i0.4947) | +1/2\rangle + \\ + (0.0521 - i0.0087) | -1/2\rangle + (1.0071 + i0.8589) | -3/2\rangle \quad (142)$$

$$\langle\psi| \mathbf{S} |\psi\rangle = 2.447 * 10^{-20} \quad (143)$$

Cuya representación sobre la esfera será:

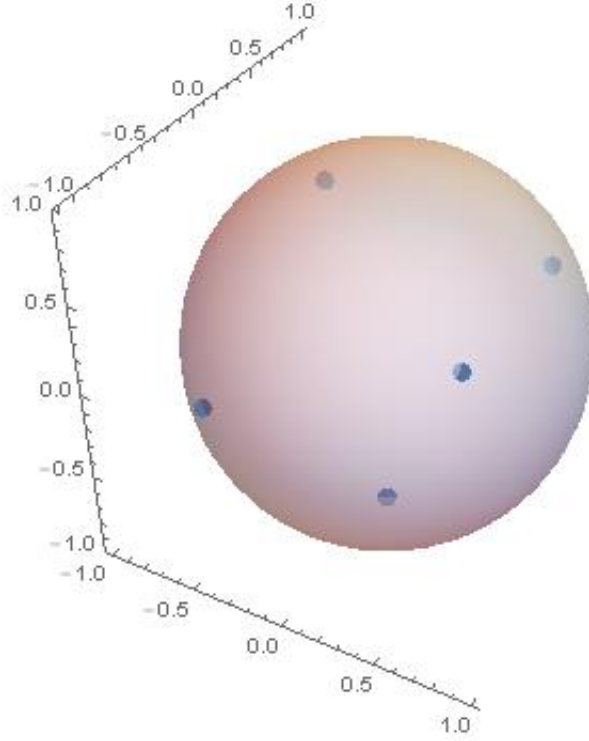


Figura 7: Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 5/2 con primera coordenada proyectiva distinta de 0.

Tomando el estado de prueba original para espín $j = 5/2$, y ahora dividiendo por el coeficiente $A_{(3/2)}$ se obtiene:

$$|\psi\rangle = (a_{(+5/2)} + ib_{(+5/2)}) | +5/2\rangle + | +3/2\rangle + (a_{(+1/2)} + ib_{(+1/2)}) | 1/2\rangle + (a_{(-1/2)} + ib_{(-1/2)}) | -1/2\rangle \\ + (a_{(-3/2)} + ib_{(-3/2)}) | -3/2\rangle + (a_{(-5/2)} + ib_{(-5/2)}) | -5/2\rangle \quad (144)$$

$$|\psi\rangle = (0.2141) | +5/2\rangle + | +3/2\rangle + (-0.2950 + i0.2074) | +1/2\rangle + \\ + (-0.0321 + i0.1678) | -1/2\rangle + (0.8439 + i0.2074) | -3/2\rangle \quad (145)$$

$$\langle\psi|\mathbf{S}|\psi\rangle = 8.3593 * 10^{-22} \quad (146)$$

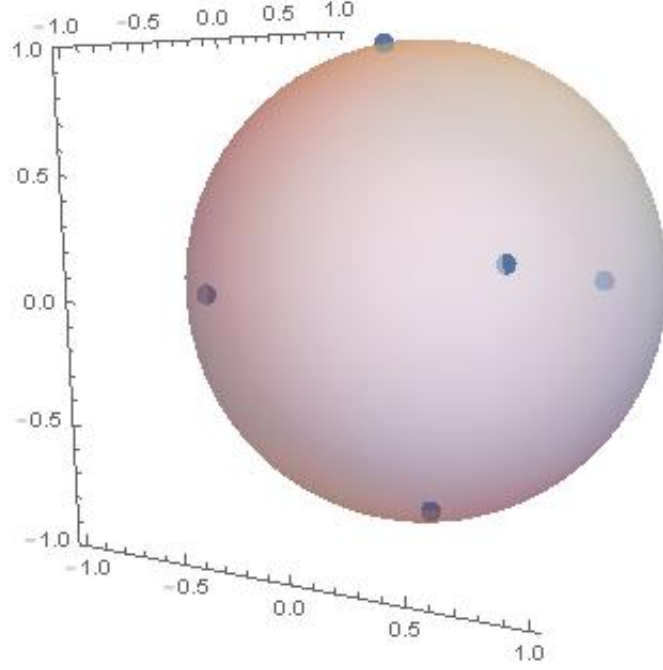


Figura 8: Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 5/2 con segunda coordenada proyectiva distinta de 0.

4.2.3. Espín 3

Finalmente al aplicar este mismo procedimiento para un estado de espín $j = 3$, empezando por definir un estado general:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle = & A_{(+3)} | +3\rangle + A_{(+2)} | +2\rangle + A_{(+1)} | +1\rangle + A_{(0)} | 0\rangle \\
 & + A_{(-1)} | -1\rangle + A_{(-2)} | -2\rangle + A_{(-3)} | -3\rangle
 \end{aligned} \tag{147}$$

Dividiendo este por $A_{(+3)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle = & | +3\rangle + (a_{(+2)} + ib_{(+2)}) | +2\rangle + (a_{(+1)} + ib_{(+1)}) | +1\rangle + (a_{(0)} + ib_{(0)}) | 0\rangle + \\
 & (a_{(-1)} + ib_{(-1)}) | -1\rangle + (a_{(-2)} + ib_{(-2)}) | -2\rangle + (a_{(-3)} + ib_{(-3)}) | -3\rangle
 \end{aligned} \tag{148}$$

Los coeficientes que satisfacen la condición de 1-anticoherencia serán:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle = & | +3\rangle + (0.1438) | +2\rangle + (-0.2362 + i0.0.1555) | +1\rangle + \\
 & +(0.5263 - i0.0.2478) | 0\rangle + (0.0412 + i0.2151) | -1\rangle + (1.2396 + i3.710 * 10^{-12}) | -2\rangle +
 \end{aligned} \tag{149}$$

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle = 2.977 * 10^{-18} \tag{150}$$

La representación de Majorana para este estado será:

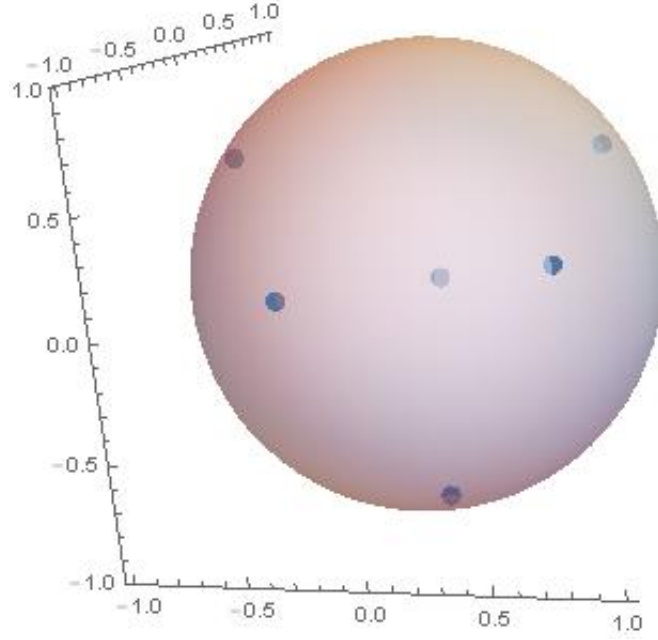


Figura 9: Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 3 con primera coordenada proyectiva diferente de 0.

Tomando nuevamente el estado de prueba para espín $j = 3$ y dividiendo ahora por el coeficiente $A_{(+2)}$, se obtiene:

$$|\psi\rangle = (a_{(+3)} + ib_{(+3)}) | +3\rangle + | +2\rangle + (a_{(+1)} + ib_{(+1)}) | +1\rangle + (a_{(0)} + ib_{(0)}) | 0\rangle + (a_{(-1)} + ib_{(-1)}) | -1\rangle + (a_{(-2)} + ib_{(-2)}) | -2\rangle + (a_{(-3)} + ib_{(-3)}) | -3\rangle \quad (151)$$

Esto resulta en los siguientes coeficientes para satisfacer la condición de 1-anticoherencia:

$$|\psi\rangle = (0.1454) | +3\rangle + | +2\rangle + (0.2371 + i0.2335) | +1\rangle + (0.1509 - i0.3980) | 0\rangle + (-0.3398 + i0.9461) | -1\rangle + (-2.9957 * 10^{-10} + i0.2936) | -2\rangle + \quad (152)$$

$$\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle = 6.663 * 10^{-18} \quad (153)$$

Cuya representación de Majorana será:

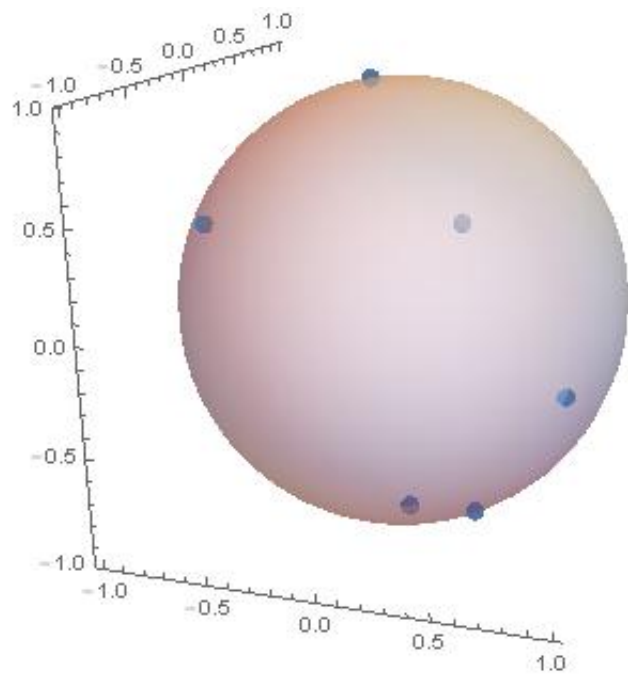


Figura 10: Representación de Majorana de un estado 1-anticoherente de espín 3 con segundo coordenada proyectiva diferente de 0.

Luego de observar los resultados obtenidos en la sección anterior, se puede concluir que existen diversos procedimientos que se pueden seguir para encontrar estados 1-anticoherentes. Estos métodos surgen a partir de la condición algebraica para determinar si un estado es 1-anticoherente.

En el caso de utilizar la representación de estados de espín $1/2$ rotando a través de un eje definido por θ , se encontraron estados para sistemas de espín $j = 1$, $j = 3/2$, $j = 2$. Sin embargo no fue posible continuar utilizando este método debido principalmente a la dificultad que conlleva el encontrar el estado simétrico que resulta del producto tensorial de varios estados de espín $1/2$. Se pudo observar que, por ejemplo, para encontrar un estado con espín $5/2$ se deben calcular $5!$ productos tensoriales.

Finalmente utilizando las coordenadas proyectivas de un estado de espín j , estos son los coeficientes del estado al momento de ser escrito en su base de espín correspondiente, fue posible encontrar un proceso que facilitaba el descubrimiento de estados de espín que satisficieran la condición de 1-anticoherencia. Con este se pudieron encontrar estados 1-anticoherente para sistemas de espín $j = 2$, $j = 5/2$ y $j = 3$.

- [1] V. Markham D.; Vedral, “Classicality of spin-coherent states via entanglement and distinguishability”, *Phys.Rev.A*, vol. 67, 2003. DOI: [10.1103/PhysRevA.67.042113](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.042113).
- [2] R. Barnett, “Classifying Novel Phases of Spinor Atoms”, *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, vol. 97, 2006. DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.180412](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.180412).
- [3] J. Zimba, “Spin States via the Majorana Representation”, *Electronic Journal of Theoretical Physics*, vol. 3, n.º 10, 2006.
- [4] H. Bacry, “Orbits of the rotation group on spin states”, *AIP Journal of Mathematical Physics*, vol. 15, 1974. DOI: [10.1063/1.1666525](https://doi.org/10.1063/1.1666525).
- [5] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, 1ra. Edición. Springer-Verlag, 1968.
- [6] M. Verschuren, “Coherent States In Quantum Mechanics”, Tesis doct., Radboud University Nijmegen, 2011.
- [7] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, 1ra Edición. Addison-Wesley, 1994.
- [8] T. Ahmed, “Spin Coherent State through Path Integral Semi-Classical Physics”, Tesis doct., Harish Chandra Research Institute, 2011.
- [9] G. Shastri, “The Heisenberg ferromagnet in spin coherent state representation”, *Pramana*, vol. 11, n.º 1, 1978. DOI: [10.1007/BF02846311](https://doi.org/10.1007/BF02846311).

7.1. Función de onda para los estados excitados del oscilador armónico cuántico

Recordamos la definición para los operadores escalera:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{x} + \frac{i}{m\omega} \mathbf{p} \right) \quad (154)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{x} - \frac{i}{m\omega} \mathbf{p} \right) \quad (155)$$

Por tanto podemos representar los operadores \mathbf{x} y \mathbf{p}

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \quad (156)$$

$$\mathbf{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad (157)$$

Luego recordamos los eigen estados de energía del oscilador armónico $|n\rangle$, los cuales cumplen con

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (158)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (159)$$

Luego de esto se puede definir el operador de N de manera que

$$N = aa^\dagger \quad (160)$$

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (161)$$

Los siguientes conmutadores pueden ser calculados a partir de la relación de conmutación canónica

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} [\mathbf{x} + \frac{i}{m\omega} \mathbf{p}, \mathbf{x} + \frac{i}{m\omega} \mathbf{p}] = \frac{m\omega}{2\hbar} ([\mathbf{x}, \mathbf{x}] + \frac{i}{m\omega} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] + \frac{i}{m\omega} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] + [\mathbf{p}, \mathbf{p}]) = \frac{m\omega}{2\hbar} * (-2i^2 m\omega \hbar) = 1 \quad (162)$$

$$[N, a^\dagger] = [aa^\dagger, a^\dagger] = [a, a^\dagger]a^\dagger = a^\dagger \quad (163)$$

$$[N, a] = [aa^\dagger, a] = a[a^\dagger, a] = -a \quad (164)$$

Recordando la definición del Hamiltoniano para el oscilador armónico cuántico se tenía que

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{x}^2 \quad (165)$$

Esto se puede expresar en termino del operador N

$$\hat{H} = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \quad (166)$$

Por tanto los eigenvalores del operador N serán también los eigenvalores para la energía del oscilador armónico.

Luego podemos aplicar el operador escalera a los eigenestados del operador N

$$Na^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + [N, a^\dagger]) |n\rangle = \quad (167)$$

$$= (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n+1)a^\dagger |n\rangle \quad (168)$$

De manera similar se puede demostrar que

$$Na |n\rangle = (n-1)a |n\rangle \quad (169)$$

7.2. Función de onda para el estado base del oscilador armónico cuántico

Debido a que el eigenvalor menor será 0, se cumple que

$$a |0\rangle = 0 \quad (170)$$

Escribiendo el operador a en base de la posición se tendrá una ecuación diferencial, cuya respuesta será la función de onda del estado base

$$\begin{aligned} (x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx})\psi_0 &= 0 \\ x\psi_0 &= -\frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\psi_0}{dx} \end{aligned} \quad (171)$$

De manera que se obtiene

$$\psi_0(x) = Ce^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (172)$$

Donde C es una constante de normalización, la cual se puede encontrar mediante

$$\langle 0|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_0|^2 = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}})^2 = 1 \quad (173)$$

Donde se hace el cambio de variable $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x = x'$ y por tanto $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}dx = dx'$ por tanto la integral anterior se convierte en

$$|C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} e^{-(2x')^2} = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-(y)^2} = 1 \quad (174)$$

Se realizó la sustitución $2x' = y$. Se obtiene así

$$\begin{aligned} |C|^2 &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \\ |C| &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \end{aligned} \quad (175)$$

Y por tanto la función de onda del estado base será

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (176)$$

7.3. Principio de incertidumbre

Se tiene dos operadores simétricos A y B . Definimos sus operadores de incertidumbre como

$$\sigma_A = (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)^{1/2} \geq 0 \quad (177)$$

$$\sigma_B = (\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2)^{1/2} \geq 0 \quad (178)$$

$$(179)$$

Donde $\langle A \rangle$ es el valor esperado del operador A

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (180)$$

El principio de incertidumbre nos indica que para una función de onda normalizada $|\psi\rangle$ y dos operadores cualquiera A y B se cumple que

$$(\sigma_A)(\sigma_B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (181)$$

Para demostrar esto, se necesita crear un tercer operador C , el cual definimos como

$$C := A - \langle A \rangle + i\lambda(B - \langle B \rangle) \quad (182)$$

Donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando la definición de este nuevo operador y el hecho que A y B son simétricos y la función de onda $|\psi\rangle$ está normalizada, se puede obtener que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle C\psi | C\psi \rangle &= \langle \psi | C^\dagger C | \psi \rangle = \langle \psi | (A - \langle A \rangle + i\lambda(B - \langle B \rangle)) * (A - \langle A \rangle + i\lambda(B - \langle B \rangle)) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 + \lambda^2(B^2 - 2\langle B \rangle^2 + B\langle B \rangle) + \lambda i[A, B] | \psi \rangle = \\ &= (\sigma_A)^2 + \lambda^2 + \lambda \langle i[A, B] \rangle \end{aligned} \quad (183)$$

Minimizando esta última ecuación, se obtiene que

$$\lambda = \frac{-1}{2} \langle i[A, B] \rangle / \sigma_B \quad (184)$$

Substituyendo esto en ecuación original, nos permite obtener que

$$(\sigma_A)^2 - \frac{\langle i[A, B] \rangle^2}{4\sigma_B^2} \geq 0 \quad (185)$$

Reordenando términos se obtiene el principio de incertidumbre

$$(\sigma_A)(\sigma_B) \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle | \quad (186)$$

□

7.4. La relación de incertidumbre de Heisenberg

La relación de incertidumbre de Heisenberg indica que

$$(\sigma_x)(\sigma_p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (187)$$

Esto se debe a la hermiticidad de x y p . Por tanto podemos utilizar el principio de incertidumbre con estos dos operadores, recordando además que $[x, p] = i\hbar$. Por tanto se obtiene que

$$(\sigma_x)(\sigma_p) \geq \frac{1}{2} | \langle [x, p] \rangle | = \frac{1}{2} | i\hbar | = \frac{\hbar}{2} \quad (188)$$

□

7.5. Estados perfectos

A continuación se utilizará el programa Wolfram Mathematica 10 para realizar las gráficas de los estados perfectos descritos en la sección 3.1.3. Se utilizó el siguiente programa.

El polinomio de Majorana y sus raíces. Las variables s y j cambian dependiendo del sistema de espín que se analiza (ej: Para el estado perfecto del tetrahedro $j=2$ y s es el estado de espín asociado a este sólido perfecto, de la misma forma ocurre para el resto de estados perfectos)

```

j:=j5
s:=s5
x:={}
y:={}
M(z_) = Sum[l=0, 2j] Sqrt[Binomial[2j, l]] z^{2j-l} s[[l+1]];
r:=Simplify[Flatten[z/. {ToRules[Roots[M(z) = 0, z]]}]];
For[i = 1, i <= Length[r], i++, AppendTo[x, Re(r[[i]])]; AppendTo[y, Im(r[[i]])];

```

Esta parte realiza la proyección estereográfica de las raíces del polinomio de Majorana asociado al estado. Luego grafica el conjunto de puntos sobre la esfera unitaria

```

xs:={}
ys:={}
zs:={}
For[i = 1, i ≤ Length[r], i++, AppendTo[xs,  $\frac{2x[[i]]}{x[[i]]^2 + y[[i]]^2 + 1}$ ];
AppendTo[ys,  $\frac{2y[[i]]}{x[[i]]^2 + y[[i]]^2 + 1}$ ];
AppendTo[zs,  $\frac{x[[i]]^2 + y[[i]]^2 - 1}{x[[i]]^2 + y[[i]]^2 + 1}$ ]]
While[Length[xs] ≤ 2j, AppendTo[xs, 0]; AppendTo[ys, 0]; AppendTo[zs, 1]]
Length[xs]
data = {xs, ys, zs}T
g1:=ListPointPlot3D[data, PlotStyle → PointSize[0.03]]

```

Las gráficas para los estados perfectos se observan a continuación

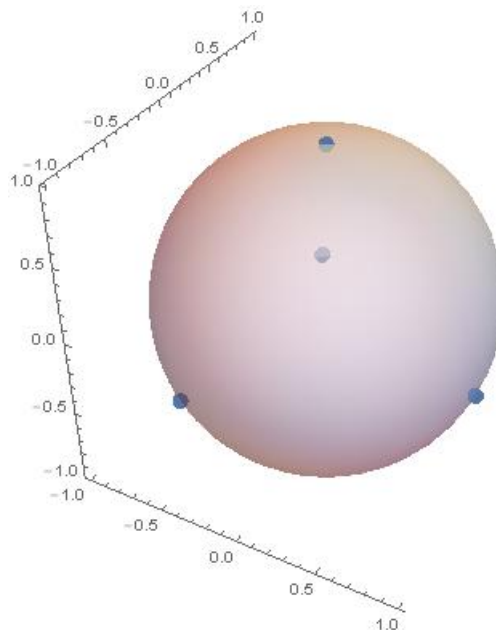


Figura 11: Estado perfecto $|\psi_{tet}\rangle$

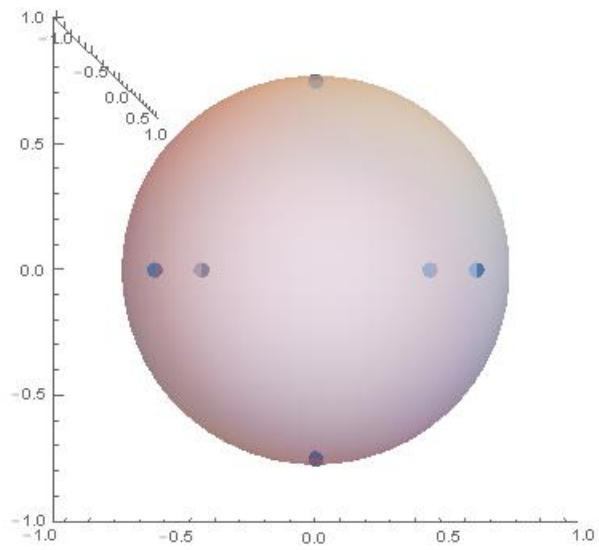


Figura 12: Estado perfecto $|\psi_{oct}\rangle$

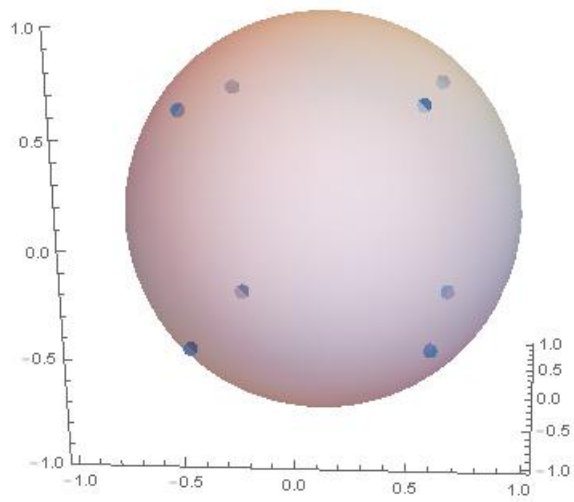


Figura 13: Estado perfecto $|\psi_{cubo}\rangle$

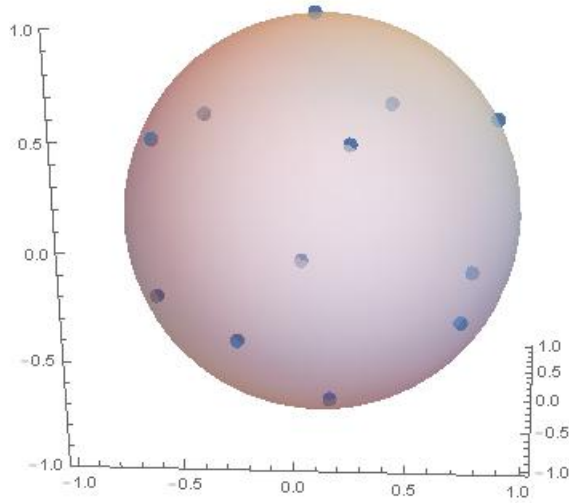


Figura 14: Estado perfecto $|\psi_{icos}\rangle$

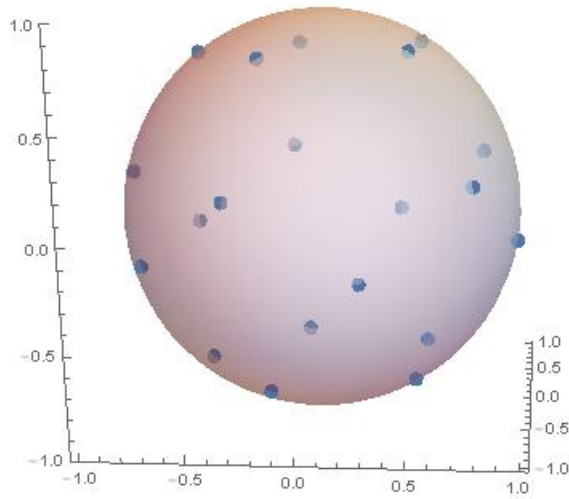


Figura 15: Estado perfecto $|\psi_{dodec}\rangle$

7.6. Coordenadas proyectivas

A continuación se presentará un ejemplo del programa utilizado para encontrar los coeficientes que definen los estado anticoherentes de espín siguiendo el segundo procedimiento

presentado en la sección 4.2.

```

ClearAll[a, b, c, sx, sxc, sy, syc, sz, szc, tx, ty, tz, S2]
p1:=a{0, 1, 0, 0, 0} + (b + ib2){0, 0, 1, 0, 0} + (c + ic2){0, 0, 0, 1, 0} + {1, 0, 0, 0, 0};
p1c = a{0, 1, 0, 0, 0} + (b - ib2){0, 0, 1, 0, 0} + (c - ic2){0, 0, 0, 1, 0} + {1, 0, 0, 0, 0};
sx = ComplexExpand[Simplify[p1c.rmatx.p1]];
sy = ComplexExpand[Simplify[p1c.rmaty.p1]];
sz = ComplexExpand[Simplify[p1c.rmatz.p1]];
sxc = ComplexExpand [sx*];
syc = ComplexExpand [sy*];
szc = ComplexExpand [sz*];
tz = Simplify[szszc];
tx = Simplify[sxsxc];
ty = Simplify[sysyc];
S2 = tx + ty + tz;
FindMinimum[S2, {a, b, b2, c, c2}]

```

7.7. Descenso gradiente

A continuación se presenta el algoritmo utilizado para optimizar las funciones que representaban la condición de 1-anticoherencia resultantes en el procedimiento propuesto en 4.1.

```

ClearAll[x, y, z, p, t1, t2, d]
R = {};
S2G =  $\nabla_{\{x,y,z\}}$ S2;
For[c = 0, c <= 30, c++, t1 = RandomReal[0, Pi];
t2 = RandomReal[0, Pi]; p = RandomReal[0, 2 * Pi];
For[r = 0, r < 1000, r++, d = -S2G/. {x → t1, y → t2, z → p};
v = 0.001;
t1 = vd[[1]] + t1;
t2 = vd[[2]] + t2;
p = vd[[3]] + p];
AppendTo[R, {S2/. {x → t1, y → t2, z → p}, t1, t2, p}]]
Chop  $\left[ R, \frac{1}{10^6} \right]$ 

```

7.8. Producto tensorial simétrico de espín 1/2

A continuación se presentará un ejemplo del programa utilizado para encontrar los parámetros que definen los estado antioherentes de espín siguiendo el primer procedimiento presentado en la sección 4.1. Además se podrá observar también el programa utilizado para crear las representaciones de los estados sobre la esfera unitaria.

Se crea la representación matricial correspondiente a cada componente del espín dado el número cuántico, j , del sistema. Esta se construye a partir de la base de Zeeman.

```
lineax = {};  
rmatx = {};  
For[i = j, i ≥ -j, i-,  
For[a = j, a ≥ -j, a-,  
AppendTo [lineax,  $\frac{1}{2}\sqrt{j(j+1) - ai}(\delta_{i+1,a} + \delta_{i,a+1})$ ]];  
rmatx = Append[rmatx, lineax];  
lineax = {}]
```

```
lineay = {};  
rmaty = {};  
For[i = j, i ≥ -j, i-,  
For[a = j, a ≥ -j, a-,  
AppendTo [lineay,  $\frac{\sqrt{j(j+1) - ai}(\delta_{i,a+1} - \delta_{i+1,a})}{2i}$ ]];  
rmaty = Append[rmaty, lineay];  
lineay = {}]
```

```
lineaz = {};  
rmatz = {};  
For[i = j, i ≥ -j, i-,  
For[a = j, a ≥ -j, a-,  
AppendTo[lineaz,  $a\delta_{i,a}$ ]];  
rmatz = Append[rmatz, lineaz];  
lineaz = {}]
```

A continuación el ejemplo del código utilizado para encontrar un estado de espín $j = 3/2$

```

ClearAll[sx, sy, sz, sxc, syc, szc, S2]
p =  $\sqrt{3}\{0, 0, 1, 0\} (2 \exp(iz) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)) +$ 
+  $\sqrt{3}\{0, 1, 0, 0\} \left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) + 2 \exp(iz) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right) +$ 
+  $6 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \{1, 0, 0, 0\};$ 
pc =  $\sqrt{3}\{0, 0, 1, 0\} \left(2 \exp(-iz) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right)$ 
+  $\sqrt{3}\{0, 1, 0, 0\} \left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) + 2 \exp(-iz) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right) +$ 
+  $6 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \{1, 0, 0, 0\};$ 
sx = ComplexExpand[Simplify[pc.rmatx.p]];
sy = ComplexExpand[Simplify[pc.rmaty.p]];
sz = ComplexExpand[Simplify[pc.rmatz.p]];
sxc = ComplexExpand[sx*];
syc = ComplexExpand[sy*];
szc = ComplexExpand[sz*];
S2 = FullSimplify[Expand[sxsxc + sysyc + szszc]]

```

Luego se utiliza el algoritmo de descenso gradiente, expuesto en el anexo 7.7.

