UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Teoría de Juegos y el Equilibrio de Nash

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por
Carlos Daniel Jashua Martínez López
para optar al grado académico de licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala
2024

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Teoría de Juegos y el Equilibrio de Nash

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por
Carlos Daniel Jashua Martínez López
para optar al grado académico de licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala
2024

Vo.Bo.:

(f) ______________________________

M.Sc. Mario Adolfo Cuevas Méndez

Tribunal Examinador:

(f) ______________________________

M.Sc. Mario Adolfo Cuevas Méndez

(f) ______________________________

Lic. Dorval José Carías Samayoa

(f) ______________________________

Dr. Alan Gerardo Reyes Figueroa

Fecha de aprobación: Guatemala, 10 de junio 2024.

Prefacio

Estoy profundamente agradecido con Dios por haberme permitido culminar mis estudios y darme mucha gracia y favor durante toda mi trayectoria universitaria. Todo el conocimiento que he adquirido y los logros se los debo enteramente a Él. Quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional durante estos años, especialmente a mis padres por el esfuerzo y sacrificio que han hecho por mí. Agradezco a la Universidad del Valle de Guatemala (UVG) por la "Beca por Liderazgo en Ciencias", que sirvió de gran apoyo económico, así como el crédito estudiantil que me fue otorgado.

Debo reconocer a mi asesor de tesis, MsC. Mario Cuevas, por el apoyo brindado en este trabajo. Su gran trayectoria y expertise en economía aportaron conocimientos de gran valor a este trabajo. Agradezco al catedrático Lic. Dorval Carías, quien me impartió los cursos de Análisis de Variable Real en la UVG, es una persona a la que estimo y respeto mucho, quien me enseñó contenido muy valioso para el desarrollo de este trabajo. Y a la directora del departamento de matemáticas, la Lic. Nancy Zurita, quien ha estado al pendiente de mi desarrollo estudiantil durante toda la carrera.

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada, cuyas aplicaciones son de gran importancia en el ámbito económico. Existen diversas fuentes de información sobre teoría de juegos, muchas de estas pensadas para economistas, por lo que es bastante común que apliquen y obtengan las conclusiones más importantes de los teoremas y propiedades, dejando a un lado la parte técnica y teórica matemática que fundamenta la teoría de juegos. También existen libros escritos por matemáticos y otros científicos, donde se demuestran los teoremas, lemas, propiedades, etc., y se le da menor importancia a las aplicaciones y su interpretación en la vida real. Por lo tanto, este texto busca tener un equilibrio, tanto de teoría como de interpretación en aplicaciones de la vida diaria.

Gran parte del texto ahonda en análisis matemático, y se pretende demostrar teoremas, lemas, propiedades y demás de manera formal. Evidentemente, es difícil tener un balance entre teoría matemática y aplicaciones. Al final del desarrollo teórico, con demostraciones matemáticas formales, se muestra alguna aplicación o ejemplo, de esta forma podemos entender un poco de ambas perspectivas, tanto la matemática teórica como la aplicada.

Este texto requiere conocimientos previos en análisis matemático. Sobre todo, para la sección donde se demuestra de manera formal la existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras, se requiere tener amplios conocimientos de análisis. Aunque esta sección presenta las demostraciones con notación y simbología matemática, se busca dar explicaciones verbales que ayuden al lector, y de esta forma pueda seguir el hilo de las demostraciones con mayor facilidad.

Índice

Lista de figuras

Lista de cuadros

Resumen

Se pretende demostrar, de manera formal, el teorema de existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas, y sus aplicaciones. Se utilizará como herramienta el análisis matemático para presentar el desarrollo teórico que nos lleve a los teoremas de existencia de un equilibrio de Nash. Se presentan propiedades, teoremas y lemas técnicos como el lema de Sperner, el teorema de punto fijo de Brouwer, el teorema de Kakutani, y otros. Se analizan las implicaciones del equilibrio de Nash y sus aplicaciones. Se encontró que es más práctico determinar la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas que en estrategias puras. Cuando existe un único equilibrio de Nash, es posible llegar a un acuerdo entre todos los jugadores, donde todos maximizan sus ganancias, siempre que acuerden jugar un equilibrio de Nash.

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada, ampliamente utilizada como herramienta en ciencias económicas. El enfoque más popular está orientado a las aplicaciones de negociaciones, en su gran mayoría en el ámbito económico. Este trabajo pretende presentar las bases matemáticas teóricas que sustentan y formalizan la teoría de juegos. Pero, al mismo tiempo, pretende presentar aplicaciones económicas y ejemplos, de modo que la parte teórica se complemente con la aplicada. Se puede encontrar una gran variedad de literatura en teoría de juegos que se enfoca en las aplicaciones específicas y no aborda con mayor detalle y profundidad los conceptos fundamentales teóricos. La complejidad de las demostraciones matemáticas y la falta de ejemplos prácticos en la literatura existente han sido obstáculos para una comprensión más amplia y aplicable de la teoría de juegos. Este trabajo busca un equilibrio, para que el lector entienda que las aplicaciones tienen un fundamento matemático entendible.

La axiomática de von Neumann representa las bases de la teoría de juegos clásica, permitiendo su desarrollo formal y detallado en el ámbito matemático. En 1944, se introdujeron conceptos como juegos en forma normal y estrategias mixtas. Más adelante, en 1950, se definió el equilibrio de Nash, que fue de gran importancia, tanto que John Nash recibió un premio Nobel en economía en 1994.

El análisis real es una rama de la matemática que fundamenta la teoría de juegos. En la teoría de juegos se trabaja con funciones de utilidad, de un espacio vectorial a otro (espacios métricos o de Hausdorff), y las demostraciones de teoremas tienen un enfoque, en esencia, analítico. La teoría de juegos utiliza, como herramienta, teoría del análisis real para demostrar sus propiedades, teoremas, lemas, ejemplos y otros. La teoría de juegos también puede analizarse por medio de combinatoria y teoría de grafos. Sin embargo, presentamos teoría de juegos con un enfoque puramente analítico.

En un juego, un equilibrio de Nash permite con mayor facilidad que todos los jugadores se pongan de acuerdo. Debido a que las decisiones de todos afectan las ganancias de todos, resulta complicado ponerse de acuerdo. Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias donde se maximizan los beneficios de todos los jugadores, siempre que todos jueguen dicho equilibrio. De esta forma, los jugadores quedarán más conformes con la decisión tomada, sabiendo que la decisión que han seleccionado es la mejor posible, dadas las elecciones de sus contrincantes.

El teorema de existencia de equilibrio de Nash (teorema 7.3.1) para estrategias puras es fundamental para demostrar el equilibrio sobre estrategias mixtas (teorema 7.4.1). El teorema 7.3.1 está restringido por muchas condiciones que se le exigen al conjunto de decisión, mientras que el teorema 7.4.1 solo pide que el juego en forma estratégica sea finito. Esto implica que el teorema 7.4.1 es más general y, por tanto, de mayor utilidad que el teorema 7.3.1. Es más sencillo probar la existencia de un equilibrio de Nash para estrategias mixtas que para estrategias puras.

CAPÍTULO 2

Objetivos

2.1. Objetivo general

Presentar los fundamentos y bases de la teoría de juegos con la axiomática de von Neumann y Morgenstern, para juegos finitos. Demostrar el teorema: "Existencia del equilibrio de Nash" y evidenciar su aplicabilidad.

2.2. Objetivos específicos

- Introducir la axiomática de von Neumann y Morgenstern, como la base de la teoría de juegos clásica
- Presentar las definiciones formales de los tipos de juegos y sus aplicaciones.
- Demostrar los teoremas técnicos de punto fijo que validan la existencia de equilibrio de Nash en estrategias puras, enfocándose en juegos finitos.
- Analizar aplicaciones prácticas de la teoría de juegos y del equilibrio de Nash.

CAPÍTULO 3

Justificación

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada, ampliamente utilizada como herramienta en ciencias económicas. El enfoque más popular está orientado a las aplicaciones de negociaciones, en su gran mayoría en el ámbito económico. El trabajo pretende presentar las bases que sustenta la teoría de juegos, de forma matemáticamente teórica. Pero, al mismo tiempo pretende presentar aplicaciones económicas y ejemplos, a modo que la parte teórica se complemente con la aplicada. Alguna literatura se enfoca en las aplicaciones específicas y se pierde la relevancia de los conceptos fundamentales teóricos. La complejidad de las demostraciones matemáticas y la falta de ejemplos prácticos, en la literatura existente, han sido obstáculos para una comprensión más amplia y aplicable de la teoría de juegos. Este trabajo busca un equilibrio, para que el lector entienda que las aplicaciones tienen un fundamento entendible matemático. Se pretende dar a conocer un texto que, resuma las bases teóricas matemáticas de la teoría de juegos, manteniendo un enfoque formal y matemático, pero que a su vez muestre aplicaciones de la vida real. La teoría es muy importante, pero acompañada de aplicaciones prácticas, ayuda a su mejor comprensión y permite tener un aprendizaje más enriquecedor.

Dentro de la literatura investigada, se han encontrado algunos teoremas que necesitan completar detalles, para facilitar el entendimiento y seguimiento del hilo de las demostraciones. Se desea presentar pruebas más detalladas, cuando se considere necesario y oportuno, esta tarea adicional será provista de forma original como parte del trabajo que se presenta a continuación. De este modo, aunque el lector no domine el análisis, el texto pretende explicar con mayor profundidad algunas estrategias de demostración, recordar o mencionar propiedades, teoremas y definiciones importantes. La idea de este trabajo es facilitar la comprensión de la teoría matemática, la cual respalda algunos hallazgos importantes de la teoría de juegos.

Se busca promover el interés en la teoría de juegos y su importancia en el ámbito económico. Aunque la teoría matemática, que está detrás de la teoría de juegos, es menos popular que la parte práctica y aplicada, es importante conocer y comprender la parte teórica, de esta forma las aplicaciones se llevan cabo comprendiendo los supuestos y limitaciones que tiene la teoría. Con una mayor comprensión de la teoría, las aplicaciones en economía pueden resultar muy interesantes, y de gran utilidad en la práctica. Se pretende atraer al lector con aplicaciones interesantes y teoría explicada con mayor detalle.

CAPÍTULO 4

Teoría de Juegos

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada, con aplicaciones en diversas áreas como la biología, política, economía y otras. Von Neumann y Morgenstern desarrollaron los conceptos básicos de la teoría de Juegos, en el año 1944, con su trabajo titulado *Game Theory and Economic Behaviour*, este desarrollo previo permitió avances en la de la teoría de juegos. Para el año 1950, el matemático John Nash, publicó por primera vez el concepto de equilibrio en juegos de la teoría clásica. Debido a la importancia y relevancia del trabajo del equilibrio de Nash, para el desarrollo posterior de la teoría de juegos, para juegos no cooperativos, en el año 1994, John Nash junto a John Harsanyi y Reinhard Selten recibieron un premio nobel en economía.

Un juego está definido por un conjunto de jugadores, diferentes alternativas o decisiones que pueden tomar y un beneficio para cada jugador, en función de las decisiones de todos los jugadores. Se asume que los jugadores son racionales, esto es, conocen un resultado particular que desean obtener, harán lo posible por conseguir este resultado y son capaces de analizar para tomar decisiones que más les convengan. El objetivo de los jugadores, por lo general, es maximizar sus beneficios, independientemente de las decisiones de los demás jugadores. Los jugadores no necesariamente tienen que ser humanos, pueden ser animales, computadoras, etc. La teoría de juegos analiza las interacciones entre un grupo de jugadores, y busca determinar la respuesta óptima o de mayor preferencia ante un juego, para maximizar los beneficios.

Cada jugador puede ordenar las decisiones o alternativas disponibles, según el beneficio generado por cada una de estas. Los jugadores tomarán decisiones estando conscientes de los posibles resultados que obtendrán, y esto hace que un jugador pueda preferir alguna alternativa sobre otra. El siguiente capítulo muestra las bases de la teoría de juegos, donde se modelan los juegos, a partir de relaciones de preferencia, funciones de utilidad, y algunas condiciones y reglas que deben cumplirse.

CAPÍTULO 5

Funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern

Las funciones de utilidad, las denominaremos como U, tienen como objetivo medir un beneficio o utilidad para los jugadores. Nuestro interés es buscar la maximización de esta función, o buscar un equilibrio, una solución, que asegure que, tomando ciertas decisiones, genere el mejor beneficio para el jugador.

El conjunto de posibles opciones o decisiones que los jugadores poseen, dentro del juego, conforman el dominio X de nuestra función U. Como nuestro objetivo es determinar un óptimo de beneficio, quiere decir que podemos comparar el beneficio de una función según las decisiones que el jugador tome. Las relaciones binarias que nos permitan comparar dos beneficios, las denominaremos **relaciones de preferencia**.

Definición 5.0.1. *Una **relación de preferencia es racional** si es una relación binaria que cumple con:*

- ***Completitud:*** *$\forall x, y \in X$, se tiene que $x \succeq y$ o $y \succeq x$, o se cumplen ambas (en ese caso son equivalentes).*
- ***Transitividad:*** *$\forall x, y, z \in X$, si $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces $x \succeq z$.*

Nótese que la propiedad de completitud nos indica que la relación permite comparar entre dos opciones o decisiones, nos indica si una es mejor que la otra, o si son equivalentes (ambas generan el mismo beneficio). Entonces $x \succeq y$ indica que la alternativa x es mejor o igual que y. Lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5.0.2 (Función de Utilidad)**.** *Sea X el conjunto de posibles decisiones que puede tomar el jugador. La función $U : X \to \mathbb{R}$ es una **función de utilidad que representa la relación de preferencia** $\succeq$, si $\forall x, y \in X$, $x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$.*

La función de utilidad tiene como objetivo asignar un valor o utilidad a cada decisión, dentro del campo de los números reales. Además, representar a la relación $\succeq$, de tal modo que la preferencia entre dos decisiones se ve reflejada en una utilidad diferente. La función de utilidad asignará un valor mayor a la decisión más conveniente, según su caso.

Proposición 5.0.1. *Dada una función de utilidad $U : X \to \mathbb{R}$, esta puede representar una relación de preferencia, siempre que esta sea racional.*

La proposición anterior nos aclara que es estrictamente necesario que la relación de preferencia sea racional, de lo contrario una función de utilidad $U : X \to \mathbb{R}$ no podría representarla.

Ahora bien, ¿qué pasa si ya tenemos una relación racional? ¿Podemos representarla con una función de utilidad? Resulta que el recíproco de la proposición anterior no se cumple, por lo general. Esto quiere decir que dada una relación binaria y racional $\succeq$, no necesariamente existe una función de utilidad U que pueda representar dicha relación. Más adelante abordaremos nuevamente este tema, mostrando un contraejemplo. A pesar de que no es posible, podemos agregar condiciones adicionales para asegurar el recíproco, lo que nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 5.0.1 (Teorema de existencia y unicidad de las funciones de utilidad)**.** *Sea una relación de preferencia racional $\succeq$ sobre un conjunto finito X, entonces existe una función $U : X \to \mathbb{R}$ tal que U representa a la relación $\succeq$, es decir, $\forall x, y \in X$, $x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$. Además, para una función de utilidad V que representa la relación $\succeq$, se tiene que $V = f(U)$, donde f es una función estrictamente creciente.*

Demostración. Sea X finito y $\succeq$ una relación de preferencia racional sobre X. Consideremos los siguientes casos:

1. Como X es finito, podemos listar sus elementos de la siguiente forma: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Supongamos ahora que:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots \succ x_n$$

Esto indica que para cada par de elementos de X, uno es más preferible que el otro en términos de conveniencia o beneficio. Consideremos la función:

$$U : X \to \mathbb{R}, \text{ tal que } U(x_i) = i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Por lo tanto, si para $x_i, x_j \in X$, tenemos que $U(x_i) > U(x_j) \Rightarrow i > j$ y como los elementos de X están listados de 1 a n, entonces $x_i \succ x_j$. Si por el contrario, $x_i \succ x_j$, entonces $U(x_i) = i$ y $U(x_j) = j$, y debido al orden de los elementos de X, se cumple que $i > j \Rightarrow U(x_i) > U(x_j)$. Por lo tanto,

$$U(x_i) \geq U(x_j) \Leftrightarrow x_i \succeq x_j$$

Lo que implica que U es una función de utilidad que representa la relación $\succ$. Además, si $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente y V es una función que representa a $\succeq$, entonces se cumple que:

$$\text{Si } i \neq j \text{ y } V(x_i) > V(x_j) \Leftrightarrow x_i \succ x_j, \text{ para } x_i, x_j \in X$$

Para $x_i \in X$, definimos $V(x_i) = f(U(x_i)) \Rightarrow V(x_i) = f(i)$. Observamos que f es una función estrictamente creciente, ya que

$$\text{si } i > j \Rightarrow f(i) = V(x_i) > V(x_j) = f(j), \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

2. Ahora consideremos el caso más general, donde para cada par de elementos de X, no necesariamente uno es más preferible que el otro. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq X$ un conjunto que cumple:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots \succ x_k \text{ y } \forall x \in X, \exists x_i \in A, \text{ tal que } x \sim x_i$$

En otras palabras, A es un conjunto tal que si un elemento $x \in X$ no pertenece a A, entonces existe un $x_i \in A$ que es equivalente a x, para todo $x \in X$.

Ahora, sea $U : X \to \mathbb{X}$, tal que $U(x) = U(x_i) = i$ cuando $x \sim x_i$. Sean $x, y \in X$ y $x \succeq y \Rightarrow \exists x_i, x_j \in A \ni x \sim x_i$ y $y \sim x_j$, así que $x_i \succeq x_j$. De este modo, $U(x) = U(x_i) = i$ y $U(y) = U(x_j) = j$, y como $i > j \Rightarrow U(x) \geq U(y)$.

Por otro lado, si $U(x) \geq U(y) \Rightarrow U(x_i) \geq U(x_j) \Rightarrow i \geq j$, debido al orden de los elementos de A, $x_i \succeq x_j$. Entonces,

$$U(x_i) \geq U(x_j) \Leftrightarrow x_i \succeq x_j$$

Por lo que, U es una función de utilidad que representa la relación $\succ$.

Sea V una función de utilidad que representa la relación $\succeq$ y $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Por definición, la función V cumple

$$\text{Si } i \neq j \text{ y } V(x_i) > V(x_j) \Leftrightarrow x_i \succ x_j, \text{ para } x_i, x_j \in X$$

Sean $x, y \in X$, entonces $\exists x_i, x_j \in A \ni x \sim x_i$ y $y \sim x_j$. Para $z \in X$, sea $V(z) = f(U(z))$, entonces $\exists x_l \in A \ni x_l \sim z$, luego $V(x_l) = f(U(x_l)) = f(l) \Rightarrow v(x_l) = f(l)$. Veamos que f es estrictamente creciente,

$$\text{si } i > j \Rightarrow f(i) = V(x_i) > V(x_i) = f(j) \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, k$$

□

Nótese que la prueba anterior se puede reducir al presentar únicamente el caso 2. Sin embargo, en el caso 1, se pretende dar una idea de la estrategia a utilizar en el caso general.

Ya demostrado el teorema anterior, estamos preparados para mostrar el contraejemplo del recíproco de la proposición 5.0.1. Considere $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0\}$, donde la relación binaria es la lexicográfica, la cual sigue la siguiente regla. Si (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in X$:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Rightarrow [x_1 > y_1] \text{ o } [x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \geq y_2]$$

La relación anterior es el mismo orden que siguen las palabras de un diccionario, esta relación es racional. Nótese que el conjunto X anterior no es finito, por lo que no podemos asegurar que exista una función de utilidad que la represente. De hecho, la siguiente proposición demuestra que no existe.

Proposición 5.0.2. *Sea $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0\}$, la relación lexicográfica sobre X es una relación racional.*

Proposición 5.0.3. *Sea $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0\}$ y $\succeq$ la relación lexicográfica sobre X. Entonces, no existe una función de utilidad $U : X \to \mathbb{R}$ que represente dicha relación.*

Demostración. Por contradicción, suponga que sí existe una función de utilidad $U : X \to \mathbb{R}$ que represente la relación lexicográfica, anteriormente descrita, sobre X. Considere los pares ordenados de la forma $(x_1, 2)$ y $(x_1, 1)$ para $x_1 \geq 0$. Sabemos que $(x_1, 2) > (x_1, 1) \Rightarrow U(x_1, 2) > U(x_1, 1)$. Ahora bien, como $U(x_1, 2)$, $U(x_1, 1) \in \mathbb{R}$, existe un número racional que denominaremos como $r(x_1) \in \mathbb{Q}$ tal que

$$U(x_1, 2) > r(x_1) > U(x_1, 1),\ \forall x_1 \geq 0$$

Sea un número real $x_2 \geq 0$, tal que $x_1 > x_2$, entonces $U(x_2, 2) > r(x_2) > U(x_2, 1)$, $\forall x_2 \geq 0$. Además,

$$r(x_1) > U(x_1, 1) > U(x_2, 2) > r(x_2)$$

Concluimos que,

$$x_1 > x_2 \Rightarrow r(x_1) > r(x_2)$$

De esta forma, podemos definir la función:

$$r : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}, \text{ tal que } x \to r(x), \text{ donde } U(x, 2) > r(x) > U(x, 1)$$

Note que r es una función inyectiva. Por contrapuesta de la definición de inyectividad, si $x_1 \neq x_2$, sin pérdida de generalidad sea $x_1 > x_2 \Rightarrow r(x_1) > r(x_2)$, por lo que $r(x_1) \neq r(x_2)$, lo cual es una contradicción ($\rightarrow\leftarrow$), ya que la cardinalidad de $\mathbb{R}^+$ es mayor a la de los racionales $\mathbb{Q}$, es imposible tener una relación uno a uno. Por lo tanto, no existe U, una función de utilidad que represente a la relación lexicográfica. $\square$

Nota 5.0.1. *La conclusión anterior es importante para el desarrollo de la teoría a desarrollar posteriormente y, en general, de la teoría de juegos. Siempre que se desee aplicar cualquier teorema, lema, propiedad, etc., de la teoría de juegos, donde estén presentes las relaciones racionales y funciones de utilidad, si el conjunto de preferencia X no es finito, no necesariamente existirá una función de utilidad que la represente, por lo que se debe verificar que existe al menos una función de utilidad U que represente dicha relación. Si no existe una función de utilidad que represente la relación racional, no podemos hacer uso de esta teoría.*

CAPÍTULO 6

Tipos de Juegos

6.1. Juegos en forma extensiva

En este capítulo se definen los siguientes elementos de los juegos en forma extensiva o árbol de juego. En estos juegos se asume que los jugadores toman sus decisiones de forma simultánea, sin conocer las decisiones de sus contrincantes. El diagrama de árbol nos muestra la combinación de posibles decisiones y las utilidades asociadas a cada jugador. Los juegos en forma extensiva se componen de los siguientes elementos.

- **Jugadores.** Es un conjunto $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ para identificar a los n diferentes jugadores.
- **Nodos.** Sea X el conjunto de nodos que componen el árbol. Existen diferentes tipos de nodos, como se describen a continuación. El **nodo raíz** es el nodo de origen, se denota con la letra O, es la primera acción del juego.
- **Nodo predecesor.** Sea un nodo $x \in X$, se define la función

  $$\sigma : X \to X, \, x \to \sigma(x)$$

  Se dice que $\sigma(x)$ es el nodo predecesor más inmediato al nodo x. Cuando se trata del nodo origen, $\sigma(O) = O$. Además, si deseamos ir hacia atrás y ver el predecesor del predecesor del nodo x, se consigue aplicando dos veces la función, de esta forma $\sigma(\sigma(x)) = \sigma^2(x)$. Podemos aplicar la función las veces que se desee, $\sigma(\sigma(\sigma(x))) = \sigma^3(x)$, y así sucesivamente.

  Note que el nodo predecesor es único para cualquier nodo. Un nodo no puede tener dos nodos predecesores distintos. Sin embargo, dos nodos distintos pueden tener un mismo nodo predecesor.
- **Nodo terminal.** Es un nodo que no precede a ningún otro nodo. Esto es, no existe un nodo que siga después del nodo terminal. Se define el siguiente conjunto de nodos terminales:

  $$T(X) = \{x \in X : \nexists x' \in X \ni \sigma(x') = x\}$$

Los nodos terminales vienen acompañados de una asignación de utilidades o ganancias para cada jugador. Estos nodos determinan el fin del juego para los jugadores y muestran los resultados finales de la partida.

- **Nodo de decisión.** Es un nodo que precede a otro nodo. Se define al conjunto de nodos de decisión:

$$D(X) = \{x \in X : \exists x' \in X \ni \sigma(x') = x\} = X - T(X)$$

Se les llama nodos de decisión, ya que el jugador tomará alguna de las decisiones posibles, lo que llevará a su siguiente nodo.

- Definimos el conjunto A de las posibles acciones (o decisiones) de todos los jugadores. Sea la función

$$\alpha : X - \{O\} \to A,\ x \to \alpha(x)$$

que asigna a un nodo x, la acción $\alpha(x)$ correspondiente a tomar, en su nodo predecesor, para llegar al nodo x. Ahora, sean dos nodos $x, x' \in X \ni x \neq x'$, tal que su nodo predecesor es el mismo nodo, $\sigma(x) = \sigma(x')$, entonces $\alpha(x) \neq \alpha(x')$, en otras palabras, partiendo de un mismo nodo predecesor hacia dos o más nodos próximos, se requieren dos o más acciones diferentes, una misma acción no conducirá a dos o más nodos diferentes.

- Definimos el conjunto de posibles acciones desde un nodo $x \in X$ como

$$A(x) = \{a \in A : \exists x' \ni \sigma(x') = x \text{ y } a = \alpha(x')\}$$

- Sea X_i el conjunto de posibles nodos donde el jugador i debe tomar una decisión. Para cada nodo $x \in X$, solo un jugador puede tomar decisiones en el nodo x. Lo que nos lleva a

$$\bigcup_{i \in J} X_i = D(X)$$

Además, se tiene que $\forall i, j \in J, i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$. Por lo que $\{X_i\}_{i \in J}$ es una partición sobre $D(X)$, el conjunto de nodos de decisión.

- Considere una familia de conjuntos de información H y la función

$$h : X \to H,\, x \to h(x)$$

La función h asigna a un nodo $x \in X$ una información $h(x) \in H$ relacionada al nodo x. Sea H_i la familia de conjuntos de información del jugador i, entonces la familia $\{H_i\}_{i \in J}$ forma una partición sobre $D(X)$. Por lo que,

$$\bigcup_{i \in J} H_i = D(X)$$

Dos nodos pertenecerán al mismo conjunto de información siempre que dispongan de las mismas posibles acciones. Entonces, para $x, x' \in X$

$$\text{si } h(x) = h(x') \Rightarrow A(x) = A(x')$$

De forma similar, si $x \in X$ y su conjunto de información es $h = h(x)$ definimos al conjunto de posibles acciones correspondientes h como

$$A(h) = \{a \in A : a \in A(x) \text{ y } x \in h\}$$

Es posible que más de un nodo pertenezca a h, esto indicaría que todos los nodos que pertenecen a h disponen de las mismas acciones a elegir.

- Considere el conjunto de información H_0, este no está asociado a ningún jugador, sino que considera un nodo donde influye el azar y está fuera del control de los jugadores. Se define una función

$$\rho : H_0 \times A \to [0,1]$$

$$(h,a) \to \rho(h,a)$$

  Algún nodo, por ejemplo, al inicio del juego puede existir un factor del azar, donde pueden ocurrir diversos eventos, pertenecientes al conjunto A, a cada uno se le asigna una probabilidad de ocurrencia. De este modo se cumplen

$$\text{si } a \notin A \Rightarrow \rho(h,a) = 0$$

$$\sum_{a \in A(h)} \rho(h,a) = 1, \, \forall h \in H_0$$

- Por último, definimos una **función de pagos**

$$r : T(X) \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to r(x) = (r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x))$$

  donde $x \in T(X)$ y $r_i(x)$ es el valor o ganancia obtenido del jugador i, al finalizar el juego en el nodo terminal x.

A partir de los elementos descritos anteriormente, podemos definir a los juegos en forma extensiva.

Definición 6.1.1. *Un juego en forma extensiva* Γ *es*

$$\Gamma = \{J, (X,\sigma), (A,\alpha), \{X_i\}_{i\in J}, \{H_i\}_{i\in J}, (A(h))_{h\in H}, \rho, r\}$$

La función ρ es cuando el juego así lo requiera. Algunos juegos de forma extensiva no tendrán un nodo donde las acciones estén al azar.

El siguiente ejemplo está basado en un ejercicio que se encuentra en J. Pérez, J. Jimeno y E. Cerda (2004), ej. 1.8, pág. 57 [?].

Ejemplo 6.1.1. *Considere el siguiente juego entre un (hasta ahora) monopolista y un entrante potencial. Suponga que se está discutiendo la aprobación de una ley de control de la contaminación. El monopolista, de gran influencia política, puede apoyar la propuesta del Grupo Verde o puede apoyar la propuesta de la oposición. Suponga que cada propuesta se aprueba si y sólo si la apoya el monopolista.*

Los controles de contaminación propuestos por los verdes aumentarían en 60,000 dólares los costes fijos de cada empresa, tanto si opera en régimen de monopolio como de duopolio, mientras que la propuesta de la oposición los aumentaría en 24,000 dólares. El entrante potencial puede entrar o no entrar en la industria. Sin costes de control de contaminación, los beneficios del monopolio son 120,000 dólares y los del duopolio 48,000 dólares. Si el entrante potencial decide no entrar, sus beneficios son cero.

a) *Suponga que el entrante tiene que tomar su decisión de entrada antes de conocer la decisión del monopolista.*

b) *Suponga ahora, por el contrario, que el entrante conoce, antes de tomar su decisión, la decisión del monopolista.*

Procedemos a resolver el inciso a). Considere el conjunto de jugadores $J = \{1, 2\}$. El jugador 1 es el monopolista y el jugador 2 es el entrante potencial. El conjunto de posibles acciones $A = \{SA, NA, NE, SE\}$. Donde

$$\begin{aligned} SA: &\quad \text{Sí apoya la propuesta del Grupo Verde} \\ NA: &\quad \text{No apoya la propuesta del Grupo Verde} \\ NE: &\quad \text{No entra al mercado} \\ SE: &\quad \text{Sí entra al mercado} \end{aligned}$$

Ahora, representamos el juego en forma extensiva con el siguiente diagrama de árbol.

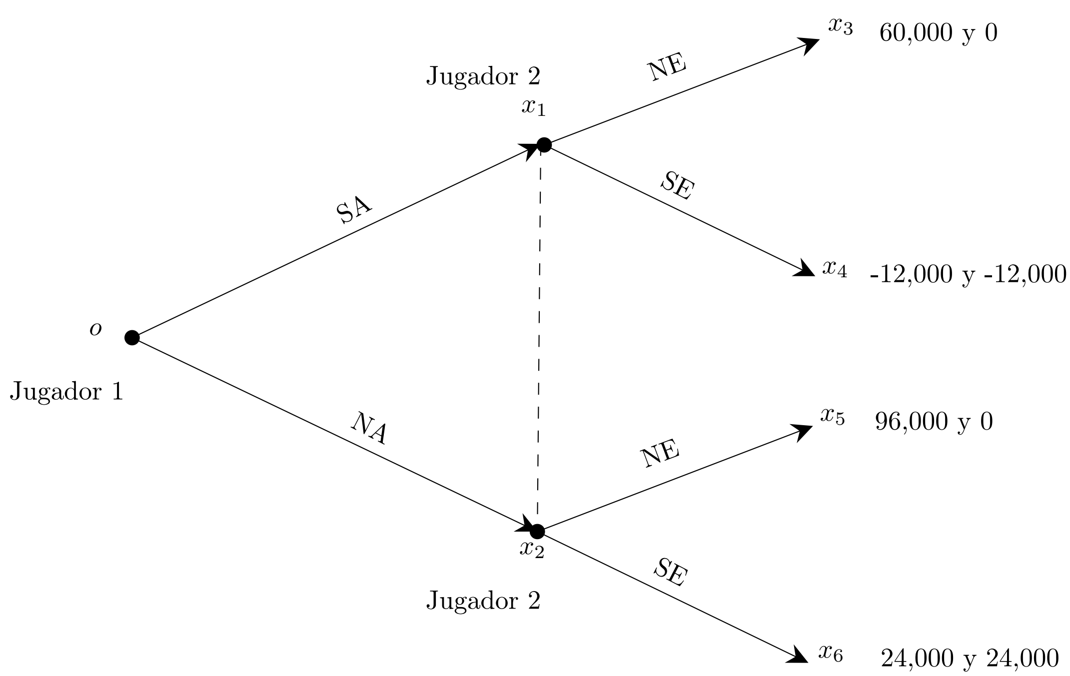

Figura 6.1: Diagrama de árbol, juego en forma extensiva. Inciso a)

Ahora, definimos los demás elementos que componen el juego.

- El conjunto de nodos $X = \{o, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
- La función σ

$$\begin{aligned} \sigma(o) = &\quad o \\ \sigma(x_1) = &\quad \sigma(x_2) = \quad o \\ \sigma(x_3) = &\quad \sigma(x_4) = \quad x_1 \\ \sigma(x_5) = &\quad \sigma(x_6) = \quad x_2 \end{aligned}$$

- El conjunto de acciones $A = \{SA, NA, NE, SE\}$. Donde

$$\begin{array}{rl} SA: & \text{Sí apoya la propuesta del Grupo Verde} \\ NA: & \text{No apoya la propuesta del Grupo Verde} \\ NE: & \text{No entra al mercado} \\ SE: & \text{Sí entra al mercado} \end{array}$$

  Por lo que

$$\begin{array}{rll} \alpha(x_1) = & SA & \\ \alpha(x_2) = & NA & \\ \alpha(x_3) = & \alpha(x_5) = & NE \\ \alpha(x_4) = & \alpha(x_6) = & SE \end{array}$$

  Las acciones SA y NA son las posibles acciones del jugador 1, mientras que NE y SE corresponden al jugador 2. Entonces el conjunto de nodos de decisión

$$X_1 = \{o\} \text{ y } X_2 = \{x_1, x_2\}$$

- Los conjuntos de información de cada jugador son:

$$\begin{array}{rl} H_1 = & \{o\} \\ H_2 = & \{\{x_1, x_2\}\} \\ & \\ \Rightarrow H = & \{\{o\}, \{x_1, x_2\}\} \end{array}$$

  Note que los nodos x_1 y x_2 tienen una línea punteada entre ellos, en el diagrama de árbol, de la Figura 6.1, significa que el jugador 2 no sabe en qué nodo se encuentra, ya que desconoce qué acción tomará el jugador 1, como indica el inciso a), estos dos nodos forman el conjunto de información del jugador 2.

- El conjunto de acciones en cada nodo

$$\begin{array}{rl} A(\{o\}) = & \{SA, NA\} \\ A(\{x_1, x_2\}) = & \{NE, SE\} \end{array}$$

- Los nodos terminales con sus ve ctores de pagos

$$\begin{array}{rl} r(x_3) = & (6000000, 0) \\ r(x_4) = & (-12000, -12000) \\ r(x_5) = & (96000, 0) \\ r(x_6) = & (24000, 24000) \end{array}$$

De esta forma representamos el juego en su forma extensiva

$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_1, X_2\}, \{H_1, H_2\}, (A(h))_{h \in H}, r\}$$

Nótese que el inciso a) nos indica que asumamos que el entrante potencial, jugador 2, aún no conoce la decisión del monopolista, jugador 1. Por lo que el diagrama de árbol contiene todas las posibles combinaciones de decisiones y beneficios posibles. El nodo de origen o es donde comienza el desarrollo del juego, donde el jugador 1 debe tomar una decisión, ya sea apoyar la campaña de ley que exige controles de contaminación (SA) o no hacerlo (NA). Luego, los nodos x_1 y x_2 son nodos de decisión del jugador 2, donde solo tiene dos posibles acciones, entrar (SN) o no (NE) al mercado, en caso de que el jugador 2 decida entrar se tendría un duopolio. En los nodos terminales x_3, x_4, x_5, x_6 tienen una función de pagos r que asigna un beneficio a cada jugador, por medio de un vector, donde la primera componente es el beneficio del jugador 1 y la segunda componente es el beneficio del jugador 2.

Analizando la información provista en el diagrama de árbol, Figura 6.1, observamos que el mejor escenario para el monopolista es no apoyar la campaña de ley (NA), independientemente de lo que haga el jugador 2, sus ganancias son superiores. Si el jugador 2, juega NE, jugador 1 prefiere que el juego termine en el nodo x_5 al nodo x_3, ya que $96,000 > 60,000$, y si jugador 2 juega SE, el jugador 1 prefería que el juego acabe en nodo x_6 al nodo x_4, ya que $24,000 > -12,000$. Los nodos x_5 y x_6 se pueden obtener únicamente si el jugador 1 decide jugar NA, no apoyar la campaña de ley.

En el caso del jugador 2, el diagrama de árbol nos permite ver los posibles escenarios resultantes del juego. Jugador 2 solo tiene una posibilidad entre cuatro, de obtener beneficios. Los nodos terminales x_1, x_5 no le dan ninguna ganancia al jugador 2, pues decidió no entrar en el mercado. Mientras que, si decide entrar en el mercado, entonces depende del jugador 1 si obtiene o no ganancias. Si el jugador 1 decide no apoyar la campaña (NA), entonces obtiene ganancias, pero si el jugador 1 juega SA, el jugador 1 y 2 tendrían pérdidas de $12,000 mensuales.

Ahora procedemos a resolver el inciso b). Ahora las reglas nos indican que el jugador 2 ya conoce la decisión del jugador 1. ¿En qué afecta que el jugador 1 tenga esta información del jugador 2? Asumiendo que los jugadores tomarán decisiones de forma racional, buscando maximizar sus beneficios, el jugador 1 evitará perder dinero y escogerá las decisiones que le generen mayores utilidades. De esta forma, el diagrama de árbol de la Figura 6.1 nos muestra que el jugador 1 evitará a toda costa los nodos terminales x_4 y x_5. Si el jugador 1 juega SA, el jugador 2 optará por NE para no perder dinero. Si el jugador 1 juega NA, el jugador 2 escogerá entrar al mercado (SE), para obtener ganancias de $24,000 mensuales. De esta forma, tendríamos el siguiente árbol.

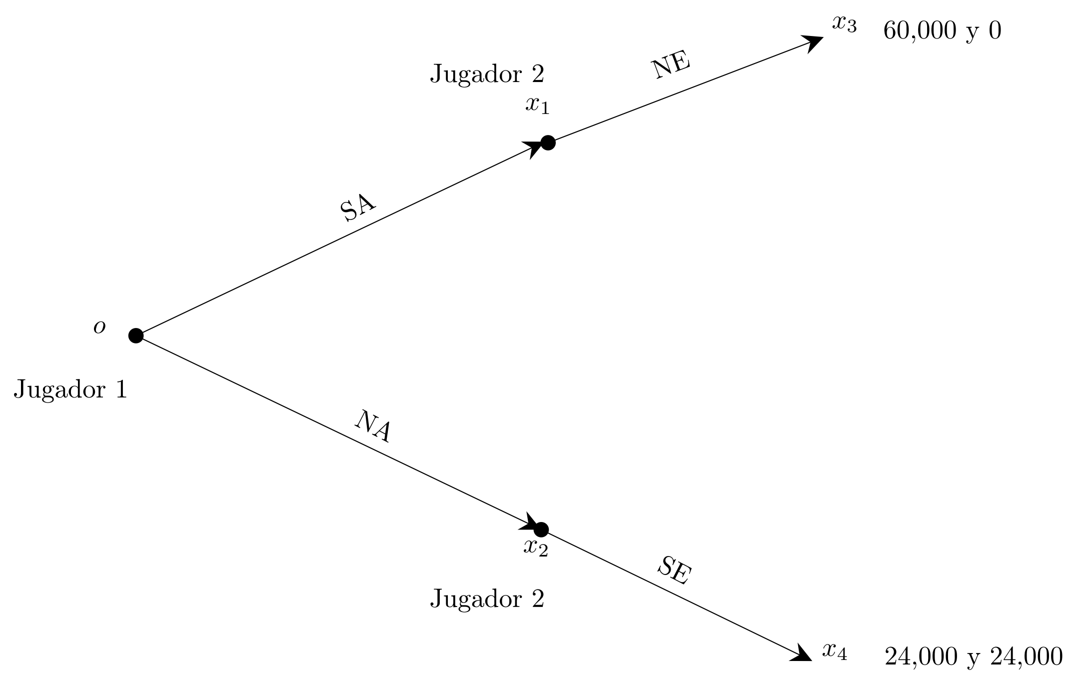

Figura 6.2: Diagrama de árbol. Inciso b)

Ahora, algunos de los elementos del juego han cambiado, como se muestra a continuación.

- El conjunto de nodos $X = \{o, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $X_1 = \{O\}$ y $X_2 = \{x_1, x_2\}$

- La función sigma

$$\begin{aligned} \sigma(o) = &\quad o \\ \sigma(x_1) = &\quad \sigma(x_2) = \quad o \\ \sigma(x_3) = &\quad x_1 \\ \sigma(x_4) = &\quad x_2 \end{aligned}$$

- La función α

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) = &\quad SA \\ \alpha(x_2) = &\quad NA \\ \alpha(x_3) = &\quad NE \\ \alpha(x_4) = &\quad SN \end{aligned}$$

- El conjunto de información de cada jugador:

$$\begin{aligned} H_1 = &\quad \{o\} \\ H_2 = &\quad \{\{x_1\},\{x_2\}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = \quad \{\{o\},\{x_1\},\{x_2\}\}$$

  Nótese que en el diagrama, Figura 6.2, los nodos x_1 y x_2 no están unidos por medio de una línea punteada. Esto nos indica que el jugador 2 conoce la decisión final del jugador 1 previo a tomar una decisión. Esto afecta el conjunto de información del jugador 2, donde ahora se consideran dos elementos diferentes, ya que los nodos x_1 y x_2 tienen diferentes posibles acciones. Mientras que en el inciso a), ambos nodos tenían las mismas acciones posibles, NE y SE, en el inciso b), el nodo x_1 solo tiene la opción NE, y en x_2 solo puede optar por SE.

$$\begin{aligned} A(\{o\}) = &\quad \{SA, NA\} \\ A(\{x_1\}) = &\quad \{NE\} \\ A(\{x_2\}) = &\quad \{SE\} \end{aligned}$$

- Los nodos terminales con sus vectores de pagos

$$\begin{aligned} r(x_3) = &\quad (60000, 0) \\ r(x_4) = &\quad (24000, 24000) \end{aligned}$$

De esta forma, representamos el juego en su forma extensiva

$$\Gamma = \{J, (X,\sigma), (A,\alpha), \{X_1, X_2\}, \{H_1, H_2\}, (A(h))_{h\in H}, r\}$$

Nota 6.1.1. *La información que cada jugador tenga del juego afecta las acciones y rendimientos de todos los jugadores. Note que el hecho de que el jugador 2 supiera la decisión del jugador 1, apoyar a Grupo Verde o no, afectó los rendimientos posibles de ambos jugadores. En el caso del jugador 2, ahora en ningún escenario perderá dinero. Mientras que el jugador 1 pierde la oportunidad de ganar $96,000 y ya no está expuesto a posibles pérdidas. ¿Cómo habría cambiado el juego si ahora el jugador 1 conoce la decisión del jugador 2 de antemano? ¿Qué sucedería si ambos jugadores están enterados del diagrama, Figura 6.1, y además saben que ambos saben de este diagrama? Discutiremos más a profundidad estos temas los próximos capítulos y daremos una solución definitiva a este juego.*

6.2. Juegos en forma estratégica

A continuación, se definen los elementos necesarios para presentar, de manera formal, la definición de juegos en forma estratégica. Estos juegos son otra forma de representar los juegos en forma extensiva; la diferencia es que los representaremos por medio de una matriz de pagos en vez de un diagrama árbol.

Definición 6.2.1. *Una **estrategia pura** para un jugador $i \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$ es una función*

$$s_i : H_i \to A$$

$$h \to s_i(h)$$

para $s_i(h) \in A(h)$.

Una estrategia pura para un jugador i asigna a un conjunto de nodos $h \in H_i$, donde se disponen de las mismas posibles acciones a elegir, una acción en concreto del conjunto de posibles alternativas $A(h)$. Definimos a S_i como el conjunto de todas las estrategias puras del jugador i. El conjunto S_i determina todas las acciones a tomar en cada uno de los nodos $x \in X_i$. Podemos definir **un perfil o combinación** de una estrategia pura como

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = S$$

A los nodos terminales resultantes de la estrategia s se les llamará $n(s)$ y la ganancia del jugador i será $u_i(s) = r_i(n(s))$. Además, podemos enumerar las estrategias de un jugador i como

$$S_i = \{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^n\}$$

Así, el jugador i tiene n diferentes estrategias puras.

Definición 6.2.2. *Un **juego en forma estratégica** G está dado por*

$$G = \{J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$$

En el caso de tener dos jugadores, el juego tiene una representación por medio de una matriz de beneficios, como se muestra a continuación.

Considere los siguientes elementos de un juego:

- El conjunto de jugadores $J = \{1, 2\}$
- El conjunto de m posibles estrategias del jugador 1:

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\}$$

- El conjunto de n posibles estrategias del jugador 2:

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$$

La siguiente matriz muestra todas las posibles combinaciones de estrategias y los vectores con posibles pagos para ambos jugadores.

		Jugador 2			
		s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
Jugador 1	s_1^1	$u_1(s_1^1, s_2^1), u_2(s_1^1, s_2^1)$	$u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^1, s_2^n), u_2(s_1^1, s_2^n)$
	s_1^2	$u_1(s_1^2, s_2^1), u_2(s_1^2, s_2^1)$	$u_1(s_1^2, s_2^2), u_2(s_1^2, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^2, s_2^n), u_2(s_1^2, s_2^n)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	s_1^m	$u_1(s_1^m, s_2^1), u_2(s_1^m, s_2^1)$	$u_1(s_1^m, s_2^2), u_2(s_1^m, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^m, s_2^n), u_2(s_1^m, s_2^n)$

Tabla 6.1: Matriz de pagos para juegos en forma estratégica

Para ejemplificarlo, utilizaremos el ejemplo 6.1.1. Mostraremos tanto el inciso a) como el b), pero ahora de forma estratégica.

En el inciso a), se tiene que los conjuntos de información de cada jugador son:

$$\begin{aligned} H_1 = & \quad \{o\} \\ H_2 = & \quad \{\{x_1, x_2\}\} \\ \\ \Rightarrow H = & \quad \{\{o\}, \{x_1, x_2\}\} \end{aligned}$$

Ahora definimos las posibles estrategias puras para cada jugador, según su conjunto de información.

Para el jugador 1, las estrategias puras son:

$$\begin{aligned} s_1^1 \equiv & \quad (s_1^1(\{o\})) = \quad SA \\ s_1^2 \equiv & \quad (s_1^2(\{o\})) = \quad NA \end{aligned}$$

Para el jugador 2, las estrategias puras son:

$$\begin{aligned} s_2^1 \equiv & \quad s_2^1(\{\{x_1, x_2\}\}) = \quad SE \\ s_2^2 \equiv & \quad s_2^2(\{\{x_1, x_2\}\}) = \quad NE \end{aligned}$$

De este modo, tenemos la siguiente matriz de pagos:

		Jugador 2	
		SE	NE
Jugador 1	SA	-12,000 y -12,000	60,000 y 0
	NA	24,000 y 24,000	96,000 y 0

Tabla 6.2: Matriz de pagos, ejemplo 6.1.1, inciso a)

En el capítulo anterior, vimos que el jugador 1 tendría mejores resultados si decidía NA, que es equivalente a la estrategia s_1^2. La matriz anterior nos muestra con mayor claridad que, al fijar una de las dos estrategias del jugador 2, las ganancias del jugador 1 son mayores con la estrategia NA.

Además, el jugador 2 solo tendrá oportunidad de obtener ganancias con la estrategia SE, sí entrar al mercado, la cual implica un riesgo de pérdida de \$12,000, y la estrategia NE implica no correr riesgos, por lo que tampoco hay posibles beneficios.

Ahora, resolvemos el inciso b). En ese caso, los conjuntos de información son:

$$\begin{aligned} H_1 = &\ \{o\} \\ H_2 = &\ \{\{x_1\}, \{x_2\}\} \\ \Rightarrow H = &\ \{\{o\}, \{x_1\}, \{x_2\}\} \end{aligned}$$

Para el jugador 1, las estrategias puras son:

$$\begin{aligned} s_1^1 \equiv &\ s_1^1(\{o\}) = && SA \\ s_1^2 \equiv &\ s_1^2(\{o\}) = && NA \end{aligned}$$

Para el jugador 2, las estrategias puras son:

$$\begin{aligned} s_2^1 \equiv &\ s_2^1(\{x_1\}) = && NE \\ s_2^2 \equiv &\ s_2^2(\{x_2\}) = && SE \end{aligned}$$

De este modo, se obtiene la siguiente matriz de pagos:

		Jugador 2	
		SE	NE
Jugador 1	SA		60,000 y 0
	NA	24,000 y 24,000	

Tabla 6.3: Matriz de pagos, ejemplo 6.1.1, inciso a)

La matriz anterior tiene espacios en blanco. Como el jugador 2 ya conoce la decisión del jugador 1 al momento de tomar su decisión, entonces la estrategia SE la jugará solo si el jugador 1 jugó NA, y la estrategia NE si el jugador 1 optó por SA.

6.3. Juegos estáticos con información completa

A continuación, se presentará una descripción introductoria de los conceptos y elementos de los juegos estáticos, con información completa. A cada participante se le conoce como jugador. Cada jugador tiene una estrategia, que son las decisiones que tomará durante el juego, una vez tomada la decisión el jugador no podrá cambiar de opinión y deberá actuar según su estrategia le indique, las decisiones son tomadas de forma simultánea entre los jugadores, por lo que ningún jugador sabe qué decisiones toman el resto de los jugadores. La información está disponible y es conocida por todos los jugadores, esto quiere decir que todos conocen las posibles estrategias que cada jugador posee, así como las ganancias de sus respectivas estrategias. Además, **todos saben saben la información, todos saben que todos conocen la información, todos saben que todos saben que conocen la información,** ..., más adelante hablaremos de la relevancia que tiene este enunciado.

Definimos a continuación los siguientes elementos:

- **Jugadores.** Los identificaremos con un número, sea $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de n jugadores. Por ejemplo, el jugador i, el cual pertenece a J.

- **Espacio o conjunto de estrategias.** Es un conjunto con todas las posibles series de decisiones a tomar en el juego. Se denotará como S_i, $i \in J$, donde el subíndice i hace referencia a qué jugador pertenece el espacio de estrategia.

- **Combinación o perfil.** Es un vector que contiene posibles estrategias de todos los jugadores. Sea n-pla $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, donde $s_i \in S_i$. Denotaremos al conjunto de todos los perfiles como $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Nótese que S_i está conformado por todas las posibles estrategias s_i. Si deseamos extraer alguna s_i de nuestra n-pla s, la denotaremos como $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, que representa todas las posibles combinaciones de estrategias de todos los jugadores excepto del jugador i. De forma similar, podemos extraer a un S_i de S y lo denotaremos como sigue

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n.$$

- **Función de pagos o ganancias.** Sea $u_i : S \to \mathbb{R}$ la función que asigna una ganancia al jugador i, dado un perfil, entonces $u_i(s) = u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, donde a cada jugador se le asigna una ganancia conociendo el perfil de estrategias de todos los jugadores.

- **Juego.** Conociendo los elementos anteriores, podemos definir un juego como

$$G = \{J; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

ó

$$G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

Para simplicidad, no incluiremos a J en la definición de juego, ya que los subíndices nos indican que hay n jugadores.

- **Juego finito.** Cuando un juego tiene una cantidad finita de jugadores (J es finito) y las posibles estrategias para cada uno de los jugadores son finitas ($S_1, S_2, \ldots, S_n$ son todos finitos).

Definición 6.3.1 (Información de Dominio Público)**.** *La información I es de dominio público para un grupo de jugadores J si cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Todos los jugadores de J saben o están enterados de I.*
- *Todos los jugadores de J saben que todos los jugadores de J también saben de I.*
- *Todos los jugadores de J saben que todos los jugadores de J saben que todos los jugadores de J también saben de I.*
- *Esto continúa indefinidamente.*

Un juego con información de dominio público permite un mejor análisis para los jugadores. La información es de suma importancia, ya que las decisiones de un jugador afectan a los demás jugadores. Cada decisión que un jugador tome puede ser interpretada como egoísta o cooperativa, según la perspectiva de los demás jugadores, basada en sus beneficios. A continuación, presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.3.1 (Batalla de los sexos). *Considera a una pareja de novios. El jugador 1 es hombre y la jugadora 2 es mujer. Tienen planeada una cita en la noche, al salir del trabajo, que puede ser ir al cine o al estadio para ver un partido de fútbol. Debido al reciente enamoramiento, ambos pasan pendiente uno del otro, comunicándose por medio del celular tanto tiempo que, sin darse cuenta, se les consume toda la batería del celular, y todavía no han llegado a un acuerdo de dónde ir juntos. La función del cine y el partido comienzan a la misma hora, y deben dirigirse de forma inmediata a uno de los dos lugares, ya que el tráfico de la ciudad es muy complicado. El jugador 1 prefiere ir a ver el partido de fútbol, mientras que la jugadora 2 prefiere ir al cine. Sin embargo, el jugador 1 prefiere ir al mismo lugar con su novia, que ir al partido solo. De forma similar, la jugadora 2 prefiere ir al mismo sitio con su novio, que ir al cine sola.*

Asignando una utilidad o beneficio a cada perfil de estrategias, el juego en forma estratégica es el siguiente:

		Jugador 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1,2	0,0
	fútbol	0,0	2,1

Tabla 6.4: Batalla de los sexos en forma estratégica

Es un juego bastante interesante. Observa que cuando ambos ceden y deciden ir al lugar que la otra persona prefiere, ambos pierden. Al igual que si los dos jugadores son egoístas y deciden ir donde ellos desean, también pierden. La única forma de ganar ocurre cuando uno cede y el otro es egoísta, donde el egoísta es el que más beneficio obtiene.

La **solución** de un juego para un jugador i es una estrategia que maximiza las ganancias para el jugador i, sin importar las estrategias que los demás jugadores elijan. En algunas ocasiones, cuando existe la solución, la estrategia no será única; es posible que dos estrategias nos conduzcan a un mismo beneficio. Los juegos, en su gran mayoría, no tendrán una solución debido a la naturaleza y reglas de cada juego. Debido a que no siempre existirá una solución óptima que garantice las máximas ganancias independientemente de las decisiones de los demás jugadores, se plantea definir estrategias que generen menores beneficios que todas las demás estrategias del jugador i, independientemente de las estrategias de los demás jugadores.

Definición 6.3.2. *Sea el juego $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y sean dos estrategias s_i' y $s_i'' \in S_i$ del jugador i. Entonces:*

- *La estrategia s_i' está* ***dominada*** *o* ***débilmente dominada*** *por la estrategia s_i'' si se cumple que*

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) \leq u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

  para todas las posibles combinaciones de estrategias $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Esto garantiza que escoger la estrategia s_i'' es mejor o igual que s_i' independientemente de las estrategias de los otros jugadores. s_i'' genera más o igual beneficio que s_i', por lo que la estrategia s_i'' ***domina*** *a s_i'.*

- *Se dice que la estrategia s_i' está* ***estrictamente dominada*** *por s_i'' cuando*

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

*para todas las posibles combinaciones de estrategias s_{-i}. La estrategia s''_i genera más beneficio que s'_i, por lo que s''_i es preferible. Se dice que s''_i **domina estrictamente** a s'_i.*

- *Una estrategia es **no dominada** si no existe una estrategia que asegure un mejor o igual beneficio, sin importar las posibles combinaciones de estrategias de los otros jugadores.*
- *De igual forma, una estrategia es **no dominada estrictamente** si no existe una estrategia que asegure un mejor beneficio, sin importar las posibles combinaciones de estrategias de los otros jugadores.*

Como se mencionaba anteriormente, la solución para un jugador, que se da cuando maximiza sus ganancias con una estrategia, independientemente de las estrategias de otros jugadores, no siempre existe. Por lo tanto, identificar estrategias dominadas o estrictamente dominadas nos ayuda a descartar estrategias con las que no es posible optimizar nuestras ganancias. Es evidente que una estrategia estrictamente dominada es dominada. Las estrategias estrictamente dominadas son útiles para que el jugador pueda descartarlas, ya que implica que existe una estrategia que garantiza mejores resultados, independientemente del perfil de estrategia de los jugadores. Siempre que sea posible, buscaremos la estrategia que produzca el máximo beneficio, sin importar las decisiones de los otros jugadores, lo que nos lleva a nuestra siguiente definición.

Definición 6.3.3. *Sea el juego $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y la estrategia $s'_i \in S_i$, del jugador i .*

- *La estrategia s'_i es **dominante** si se cumple que*

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \leq u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

  para todas las posibles estrategias $s_i \in S_i$ del jugador i y todas las posibles combinaciones de estrategias s_{-i}.

- *De manera similar, una estrategia s'_i es **estrictamente dominante** si se cumple que*

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

  para todas las posibles estrategias $s_i \neq s'_i$ del jugador i y todas las posibles combinaciones de estrategias s_{-i}.

Cualquiera de estos dos tipos de estrategias serán ideales para nuestro propósito de maximizar el beneficio de un jugador i. Una vez encontrada alguna estrategia dominante o estrictamente dominante, el jugador no se preocupará por las estrategias de los demás jugadores, pues ya se ha encontrado una solución que maximiza las ganancias para el jugador i. Recordemos que las funciones de utilidad u_i son las funciones que fueron descritas en el capítulo 5, por lo que respetan y cumplen las propiedades que se presentaron en dicho capítulo.

Veamos el siguiente ejercicio, que se encuentra en Pérez, Jimeno y Cerda (2004), ej. 2.2 pág. 138.

Ejemplo 6.3.2. *Considere el siguiente juego en forma estratégica:*

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3,3	2,6	3,1
	M	2,4	2,4	0,4
	B	1,5	2,3	5,0

Tabla 6.5

Elimine las estrategias débilmente dominadas

Veamos que la estrategia D, del jugador 2, está débilmente dominada por las estrategias I y C, ya que cumple

$$\begin{array}{lll} \text{Como } 1 \leq 6 \Rightarrow & u_2(A,D) \leq & u_2(A,C) \\ \text{Como } 4 \leq 4 \Rightarrow & u_2(M,D) \leq & u_2(M,C) \\ \text{Como } 0 \leq 3 \Rightarrow & u_2(B,D) \leq & u_2(B,C) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lll} \text{Como } 1 \leq 3 \Rightarrow & u_2(A,D) \leq & u_2(A,I) \\ \text{Como } 4 \leq 4 \Rightarrow & u_2(M,D) \leq & u_2(M,I) \\ \text{Como } 0 \leq 5 \Rightarrow & u_2(B,D) \leq & u_2(B,I) \end{array}$$

Por lo que, el jugador 2, nunca decidirá jugar D. Eliminamos esta posibilidad de la matriz. Así, obtenemos:

		Jugador 2	
		I	C
Jugador 1	A	3,3	2,6
	M	2,4	2,4
	B	1,5	2,3

Además, vemos que para el jugador 1, la estrategia B está débilmente dominada por A y M

$$\begin{array}{lll} \text{Como } 1 \leq 3 \Rightarrow & u_1(B,I) \leq & u_2(A,I) \\ \text{Como } 1 \leq 2 \Rightarrow & u_1(B,I) \leq & u_1(M,I) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lll} \text{Como } 2 \leq 2 \Rightarrow & u_1(B,C) \leq & u_2(A,C) \\ \text{Como } 2 \leq 2 \Rightarrow & u_1(B,C) \leq & u_1(M,C) \end{array}$$

Así que, el jugador 1 descartará la posibilidad B, ya que la estrategia A y M le traerán iguales o mejores beneficios. Ahora, se tiene:

		Jugador 2	
		I	C
Jugador 1	A	3,3	2,6
	M	2,4	2,4

La estrategia M está débilmente dominada ya que $u_1(M,I) \leq u_1(A,I)$ y $u_1(M,C) \leq u_1(A,C)$. Eliminamos la fila correspondiente a M.

		Jugador 2	
		I	C
Jugador 1	A	3,3	2,6

Además, la estrategia I está débilmente dominada, porque $u_2(A,I) \leq u_2(A,C)$. Finalmente, se obtiene una solución

		Jugador 2
		C
Jugador 1	A	2,6

Por medio de la eliminación de estrategias débilmente dominadas, hemos encontrado una solución al juego. No todos los juegos tienen estrategias débilmente dominadas, así como el ejemplo 7.1.1, por lo que no siempre se encontrará una solución con este método.

6.4. Estrategias mixtas

Hasta el momento se han descrito las estrategias puras, donde el jugador tiene diferentes alternativas y cada combinación posible de estas decisiones forma una estrategia pura. Ahora añadiremos una probabilidad de optar por cada una de las estrategias puras. Entonces, una estrategia mixta es una estrategia que no juega directamente una estrategia pura, sino que jugará según una distribución probabilística sobre su conjunto de estrategias puras.

Definición 6.4.1. *Una **lotería simple** es una distribución de probabilidad sobre un conjunto* $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. *La denotaremos como:*

$$L = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0 \ y \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

donde p_i es la probabilidad de ocurrencia de la elección $x_i \in X, \forall i = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 6.4.2. *Sea J un conjunto de índices de jugadores, $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^k\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador $i \in J$. Una* ***estrategia mixta*** *del jugador i es una lotería σ_i sobre el conjunto S_i.*

El conjunto que contiene todas las estrategias mixtas para un jugador $i \in J$ se denota como:

$$\Delta(S_i) = \left\{\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^k) : \sigma_i^k \geq 0, \ \forall i \in J, \ donde \ \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j = 1\right\}$$

Definición 6.4.3. *Sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^k\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador i. Un* ***soporte de una estrategia mixta*** *σ_i se denota como:*

$$SOP(\sigma_i) = \{s_i^j \in S_i : \sigma_i^j > 0\} \subset S_i$$

La definición implica que toda estrategia pura también es una estrategia mixta. Una estrategia mixta en la que se asigna una probabilidad de 1 a una estrategia y 0 al resto de estrategias puras, es una estrategia pura. Cuando $SOP(\sigma_i) = S_i$, se dice que la estrategia mixta σ_i es **completa**, es decir, que a cada estrategia pura se le asigna una probabilidad estrictamente mayor a cero. A una estrategia mixta que no es completa se le llama **propia**.

En los juegos presentados anteriormente, la función de utilidad u asigna a cada combinación de estrategias puras un beneficio para cada jugador. En estrategias mixtas, se tiene una nueva función de utilidad, que denotaremos como U. La función U es variable y no determinista (a diferencia de u, que es determinista), ya que es una función de utilidad esperada.

Consideremos un juego entre dos jugadores, donde el conjunto de estrategias para cada jugador son $S_1 = \{s_1^1, \dots, s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, \dots, s_2^n\}$. Supongamos que el jugador 1 juega una estrategia pura s_1^i y el jugador 2 juega una estrategia mixta $\sigma_2 = (\sigma_2^1, \dots, \sigma_2^n)$. Entonces, la función de utilidad esperada U se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
U_1(s_1^i, \sigma_2) = \ & \sigma_2^1 u_1(s_1^i, s_2^1) + \sigma_2^2 u_1(s_1^i, s_2^2) + \cdots + \sigma_2^n u_1(s_1^i, s_2^n) = & \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j) \\
U_2(s_1^i, \sigma_2) = \ & \sigma_2^1 u_2(s_1^i, s_2^1) + \sigma_2^2 u_2(s_1^i, s_2^2) + \cdots + \sigma_2^n u_2(s_1^i, s_2^n) = & \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)
\end{aligned}$$

Las estrategias mixtas nos invitan a pensar en juegos repetitivos, donde un juego se lleva a cabo en varias ocasiones con las mismas condiciones, estrategias y jugadores. De esta forma, la utilidad esperada se alcanzaría a largo plazo, luego de jugar una estrategia mixta, de forma repetida, a lo largo del tiempo. En la utilidad esperada anterior, vemos que el jugador 1 siempre jugará una misma estrategia pura, mientras que el jugador 2 puede jugar diferentes estrategias, según la probabilidad que haya decidido. Los jugadores con estrategias mixtas no deciden qué estrategia jugar, sino que deciden qué probabilidad o en qué porcentaje de las veces utilizarán cada una de las estrategias. Las funciones de utilidad u_i para las estrategias puras se mantienen para todos los jugadores, independientemente de si juegan estrategias puras o mixtas.

Ahora, si el jugador 1 también decide jugar una estrategia mixta $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^n)$ y el jugador 2 sigue jugando σ_2, entonces la utilidad esperada para ambos es:

$$\begin{aligned}
U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \ & \sigma_1 U_1(s_1^1, \sigma_2) + \sigma_1^2 U_1(s_1^2, \sigma_2) + \cdots + \sigma_1^m U_1(s_1^m, \sigma_2) = \\
= \ & \sigma_1^1 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^1, s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^2, s_2^j) + \cdots + \sigma_1^m \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^m, s_2^j) \\
= \ & \sum_{i=1}^{m} \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_1^i \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1,\sigma_2) = & \sigma_1 U_2(s_1^1,\sigma_2) + \sigma_1^2 U_2(s_1^2,\sigma_2) + \cdots + \sigma_1^m U_2(s_1^m,\sigma_2) = \\ = & \sigma_1^1 \sum_{j=1}^n \sigma_2^j u_2(s_1^1,s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^n \sigma_2^j u_2(s_1^2,s_2^j) + \cdots + \sigma_1^m \sum_{j=1}^n \sigma_2^j u_2(s_1^m,s_2^j) \\ = & \sum_{i=1}^m \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^n \sigma_2^j u_2(s_1^i,s_2^j) \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_1^i \sigma_2^j u_2(s_1^i,s_2^j) \end{aligned}$$

Vemos que una utilidad esperada U_i se obtiene a partir de las utilidades de las estrategias puras. Por lo que, si determinamos el beneficio máximo en estrategias puras del jugador i, dado por algún perfil, entonces la utilidad esperada U_i debe estar acotada por este máximo. En otras palabras, sea $s^* = (s_1^i, s_2^j) \in S$ tal que $u_i(s^*) \geq u_i(s)$, $\forall s \in S$, entonces $u_i(s^*) \geq U_i(\sigma_i,\sigma_j)$, $\forall \sigma_i \in \Delta(S_1)$ y $\forall \sigma_j \in \Delta(S_2)$. Entonces, las utilidades esperadas siempre tendrán un máximo y un mínimo dado por las utilidades de las estrategias puras.

Otra forma de representar las utilidades esperadas es con la matriz de pagos, como la de la Tabla 6.1.

		Jugador 2			
		s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
Jugador 1	s_1^1	$u_1(s_1^1,s_2^1),u_2(s_1^1,s_2^1)$	$u_1(s_1^1,s_2^2),u_2(s_1^1,s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^1,s_2^n),u_2(s_1^1,s_2^n)$
	s_1^2	$u_1(s_1^2,s_2^1),u_2(s_1^2,s_2^1)$	$u_1(s_1^2,s_2^2),u_2(s_1^2,s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^2,s_2^n),u_2(s_1^2,s_2^n)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	s_1^m	$u_1(s_1^m,s_2^1),u_2(s_1^m,s_2^1)$	$u_1(s_1^m,s_2^2),u_2(s_1^m,s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^m,s_2^n),u_2(s_1^m,s_2^n)$

Sea $A_1 = [u_1(s_1^i,s_2^j)]_{i,j}$ y $A_2 = [u_2(s_1^i,s_2^j)]_{i,j}$, son las matrices que tienen como entradas las utilidades de los perfiles de estrategias puras de los jugadores 1 y 2, respectivamente. La tabla anterior es una matriz que tiene como entrada vectores $(u_i(s_1^i,s_2^j),u_i(s_1^i,s_2^j))$. La matriz A_1 solo considera la primera componente del vector y A_2 solo la segunda componente. Entonces podemos representar a U como el producto:

$$U_1(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t$$

y

$$U_2(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t$$

donde σ_2^t es el vector σ_2 transpuesto.

De forma más general, en un juego de n jugadores, con estrategias puras $S_i = \{s_1, s_2, \ldots, s^{m_i}\}$, la utilidad esperada para el jugador i es:

$$U_i(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = \sum_{s\in S} \sigma_1^{j(1)} \cdots \sigma_i^{j(i)} \cdots \sigma_n^{j(n)} u_i(s)$$

donde $s = (s_1^{j(1)},\ldots,s_i^{j(i)},\ldots,s_n^{j(n)})$ y $j(i) \in \{1,2,\ldots,m_i\}$, tal que $\sigma_i^{j(i)}$ es la probabilidad de que el jugador i opte por la estrategia pura $s_i^{j(i)}$.

CAPÍTULO 7

Equilibrio de Nash

En los capítulos anteriores se presentaron diferentes formas de juegos: los juegos en forma extensiva, estratégicos y con estrategias mixtas. Ahora se buscará definir lo que es un equilibrio de Nash para estos juegos. Un equilibrio es una combinación de estrategias que busca maximizar los beneficios para todos los jugadores, siempre y cuando jueguen este perfil llamado equilibrio. Es posible que exista más de un equilibrio, pero también puede ocurrir que no se encuentre ningún equilibrio.

7.1. Equilibrio de Nash en estrategias puras

Definición 7.1.1. *Dado un juego $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, la combinación o perfil de estrategias puras $s = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ es un* ***Equilibrio de Nash (EN)*** *siempre que*

$$u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

para todo jugador i y estrategia $s_i \in S_i$. En otras palabras, s_i^* es quien maximiza la función $u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$. Además, podemos decir que s_i^* es la estrategia óptima a s_{-i}^*.

Sea $(s_{-i}^*, s_i) = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$. Entonces, para $s \in S$, un equilibrio de Nash del juego G, para cada jugador i y cada estrategia $s_i \in S_i$

$$u_i(s) \geq u_i(s_{-i}^*, s_i)$$

Note que las dos desigualdades anteriores son idénticas. La segunda desigualdad es una forma de escribirla de manera más resumida y compacta. Ahora, definimos una función que relaciona las estrategias de todos los jugadores, excepto del jugador i, con la respuesta óptima del jugador i ante las estrategias de los oponentes, de tal forma que el jugador i maximice sus utilidades.

Consideremos la siguiente matriz pagos, que se encuentra en Pérez, Jimeno y Cerda (2004), ej. 2.1 pág. 137.

Ejemplo 7.1.1. *Considere el siguiente juego en forma estratégica:*

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	7,6	4,8	3,4
	M	4,1	3,6	4,2
	B	5,4	6,5	3,1

Tabla 7.1

Encuentre los equilibrios de Nash.

Como no existen estrategias que estén dominadas, entonces no podemos reducir la matriz. Para encontrar el equilibrio de Nash en estrategias puras, analizaremos las utilidades del jugador 1 fijando una estrategia para el jugador 2 y viceversa. Por ejemplo, si fijamos la estrategia I, analizamos las estrategias del jugador 1. Vemos que $A \succ B \succ M$, ya que $7 > 5 > 4$. De esta forma, subrayaremos el 7. Hacemos lo mismo para las estrategias C y D. Así, tenemos:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	$\underline{7}$,6	4,8	3,4
	M	4,1	3,6	$\underline{4}$,2
	B	5,4	$\underline{6}$,5	3,1

Tabla 7.2

El subrayado nos indica que el jugador 1 maximiza sus ganancias, dada una estrategia del jugador 2 fija. Volvemos a realizar el mismo procedimiento, solo que ahora fijamos una estrategia del jugador 1 y subrayamos la máxima utilidad posible del jugador 2. Por ejemplo, si fijamos la estrategia pura A, entonces $C \succ I \succ D$, ya que $8 > 7 > 4$, de este modo, subrayamos al 8. Repitiendo la metodología anterior, fijando M y luego B, se tiene:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	$\underline{7}$,6	4,$\underline{8}$	3,4
	M	4,1	3,$\underline{6}$	$\underline{4}$,2
	B	5,4	$\underline{6}$,$\underline{5}$	3,1

Tabla 7.3

Vemos que la única combinación de estrategias que maximiza las ganancias para ambos jugadores de forma simultánea es el perfil (B, C), por lo que este perfil es el único equilibrio de Nash. De esta forma, podemos identificar los equilibrios de Nash.

Veamos el siguiente ejercicio, que se encuentra en Pérez, Jimeno y Cerda (2004), ej. 2.2, pág. 138.

Ejemplo 7.1.2. *Considere el siguiente juego en forma estratégica:*

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3,3	2,6	3,1
	M	2,4	2,4	0,4
	B	1,5	2,3	5,0

Encuentre los equilibrios de Nash

Aplicando la metodología descrita anteriormente, se llega a:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	$\underline{3}$,3	$\underline{2}$,$\underline{6}$	3,1
	M	2,$\underline{4}$	$\underline{2}$,$\underline{4}$	0,$\underline{4}$
	B	1,$\underline{5}$	$\underline{2}$,3	$\underline{5}$,0

Nótese que si el beneficio máximo posible se obtiene por medio de más de una estrategia, se subraya más un beneficio. Por ejemplo, si fijamos la estrategia M para el jugador 1, el jugador 2 genera una utilidad de 4, por lo que el 4 se subraya en los tres casos. Vemos que existen dos perfiles que son equilibrios de Nash, estos son (A, C) y (M, C).

Nota 7.1.1. *Observemos que el juego anterior tiene una solución (ver ejemplo 6.3.2), a partir de la eliminación de estrategias débilmente dominadas. Esta solución es a su vez un equilibrio de Nash. Sin embargo, el juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, por lo que, al eliminar estrategias débilmente dominadas, puede que se eliminen posibles perfiles que sean equilibrios de Nash.*

Recordemos el ejemplo 6.1.1 y su matriz de pagos.

		Jugador 2	
		SE	NE
Jugador 1	SA	-12,000 y -12,000	60,000 y 0
	NA	24,000 y 24,000	96,000 y 0

Vemos que este juego en forma estratégica no tiene ningún equilibrio de Nash. Primero eliminemos las estrategias que estén estrictamente dominadas. La estrategia SA está estrictamente dominada por NA, así que el jugador 1, en su sano juicio, nunca jugaría SA. Entonces, nos queda

		Jugador 2	
		SE	NE
Jugador 1	NA	24,000 y 24,000	96,000 y 0

Veamos que el perfil (NA, SE) no es un equilibrio de Nash, debido a que $u_1(NA, SE) = 24,000 < 96,000 = u_1(NA, NE)$ y el perfil (NA, NE) tampoco es un equilibrio de Nash, ya que $u_2(NA, NE) = 0 < 24,000 = u_1(NA, SE)$.

Siempre que estemos ante un juego de información completa, el jugador 2 no debería correr riesgo de tener pérdidas. Aunque no existe un equilibrio donde ambos maximicen sus ganancias al mismo tiempo, si estamos en un juego de información completa con jugadores racionales, el juego tiene una solución. Se sabe que el jugador 1 no apoyará la campaña del Grupo Verde (jugará la estrategia NA) y el jugador 2 decidirá entrar al mercado (SE).

7.2. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Definición 7.2.1. *Sea $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un juego en estrategias puras. El perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ es un* ***equilibrio de Nash*** *si*

$$U_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

Para todo jugador i y estrategia mixta $\sigma_i \in \Delta(S_i)$.

Debido a que las estrategias mixtas son loterías o distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de estrategias de cada jugador, las utilidades esperadas U_i están acotadas por las utilidades u_i de las estrategias puras. Nótese que para un jugador i, cuando se fijan las estrategias mixtas de los demás contrincantes, U_i es una combinación convexa (ver definición 7.3.5) de beneficios dados por cada estrategia pura del jugador i, y se considera una de las estrategias mixtas del jugador i, en particular. Por lo tanto, la utilidad esperada máxima y mínima U_i posible son la utilidad máxima y mínima generada por las estrategias puras.

Teorema 7.2.1 (Teorema de caracterización)**.** *Sea $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un juego en forma estratégica e I el conjunto de jugadores tal que $|I| = n$. Entonces $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ es un **equilibrio de Nash** si y sólo si para todo jugador i, con estrategia mixta $\sigma_i^* = (\sigma_i^{1*}, \sigma_i^{2*}, \ldots, \sigma_i^{j*}, \ldots, \sigma_i^{m_i*})$ con $m_i = |S_i|$, si $\sigma_i^{j*} > 0$, entonces la estrategia pura s_i^j es una respuesta óptima a $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Debemos probar que se cumple:

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

indicando que σ^* es un equilibrio de Nash.

Supongamos que toda estrategia pura $s_i^j \in SOP(\sigma_i^*)$, que cumple $\sigma_i^j > 0$, es una respuesta óptima a σ_{-i}^* para todo jugador i. En otras palabras, se cumple que:

$$M_i^* = U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) = \max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), \forall i \in I$$

para toda estrategia pura $s_i^j \in SOP(\sigma_i^*)$

Entonces, como

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) = \sum_{\sigma_i^j > 0} \sigma_i^{j*} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) = \sum_{\sigma_i^j > 0} \sigma_i^{j*} M_i^*$$

Además, $\sum_{\sigma_i^j > 0} \sigma_i^{j*} = 1$, entonces

$$\sum_{\sigma_i^j > 0} \sigma_i^{j*} M_i^* = M_i^* \geq U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

$$\therefore U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que el perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash, esto es:

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

y para todo jugador i, con estrategia mixta $\sigma_i^* = (\sigma_i^{1*}, \sigma_i^{2*}, \ldots, \sigma_i^{j*}, \ldots, \sigma_i^{m_i*})$.

Ahora, si $\sigma_i^{j*} \in SOP(\sigma_i^*)$, esto es $\sigma_i^{j*} > 0$, supóngase por contradicción que la estrategia pura s_i^j no es una respuesta óptima a σ_{-i}^*. De esta forma,

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots \sigma_n^*) > U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

Recordemos que las utilidades esperadas U_i de una estrategia mixta, ante estrategias mixtas fijas de los otros jugadores, están acotadas por al menos una de las utilidades generada por una estrategia pura que pertenece al soporte de la estrategia mixta en cuestión, debido a la definición de combinación convexa. De este modo, si s_i^j no es respuesta óptima a σ^*_{-i}, entonces debe existir una estrategia pura $s_i^k \in S_i$ tal que

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) = U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

$$\Rightarrow U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) > U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

Sea σ_i' una estrategia mixta como σ_i^*, solo que σ_i' le asigna una probabilidad de cero a s_i^j y a la estrategia s_i^k le asigna probabilidad de $(\sigma_i^{j*} + \sigma_i^{k*})$. Como s_i^k genera más utilidad esperada que s_i^j, entonces la estrategia mixta σ_i' es una respuesta estrictamente mejor a σ^*_{-i} de lo que es σ_i^*. Por lo que

$$\begin{aligned}
U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i', \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) = & \sum_{h \neq j,k} \sigma_i^{h*} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) + \\
& (\sigma_i^{j*} + \sigma_i^{k*}) U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \\
> & \sum_{h \neq j,k} \sigma_i^{h*} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+*}, \ldots, \sigma_n^*) + \\
& \sigma_i^{j*} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) + \\
& \sigma_i^{k*} U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \\
= & U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i', \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) > U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)(\rightarrow\leftarrow)$$

Es una contradicción, ya que σ^* es un equilibrio de Nash.

$$\therefore s_i^j \in S_i \text{ es una respuesta óptima a } \sigma^*_{-i},\ \forall s_i^j \in SOP(\sigma_i^*)$$

$\square$

El teorema anterior nos indica que, para un jugador i, una estrategia pura s_i es una respuesta óptima a σ_{-i} siempre que la estrategia pura esté en el soporte de la estrategia mixta σ_i. Esto muestra cómo las estrategias puras siempre tienen el potencial de optimizar los beneficios cuando ya se tiene un σ_{-i}, dado por un equilibrio de Nash en estrategias mixtas .

Ahora mostraremos un ejemplo donde calculemos un equilibrio en estrategias mixtas.

Recordemos el ejemplo 6.3.1 y su matriz de pagos:

		Jugador 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1,2	0,0
	Fútbol	0,0	2,1

Tabla 7.4: Batalla de los sexos en forma estratégica

Evidentemente, el perfil (Cine, Cine) y (Fútbol, Fútbol) son equilibrios de Nash para estrategias puras.

Por el teorema 7.2.1, sabemos que una estrategia mixta σ_i es una respuesta óptima a otra estrategia, ya sea pura o mixta, únicamente si las estrategias puras del soporte de la estrategia mixta σ_i son respuestas óptimas.

Para el jugador 1, sea p la probabilidad de que escoja ir al cine y $1-p$ la probabilidad de ir al partido de fútbol, por lo que su estrategia mixta es $(p, 1-p)$. De forma similar, para la jugadora 2, sea q la probabilidad de que escoja ir al cine y $1-q$ la probabilidad de ir al partido de fútbol, por lo que su estrategia mixta es $(q, 1-q)$. Ahora, de forma similar al cálculo de un equilibrio de Nash en estrategias puras, fijemos una estrategia, en este caso mixta de la jugadora 2, y analicemos las utilidades del jugador 1.

- **Jugador 1.** Para conocer una respuesta óptima del jugador 1, fijemos primero la estrategia mixta de la jugadora 2 $(q, 1-q)$ y calculemos su beneficio:

$$\begin{aligned} U_1(\text{Fútbol}, (q, 1-q)) = &\ q \cdot u_1(\text{Fútbol}, \text{Cine}) + (1-q) \cdot u_1(\text{Fútbol}, \text{Fútbol}) \\ = &\ q(0) + (1-q)(2) \\ = &\ 2 - 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1(\text{Cine}, (q, 1-q)) = &\ q \cdot u_1(\text{Cine}, \text{Cine}) + (1-q) \cdot u_1(\text{Cine}, \text{Fútbol}) \\ = &\ q(1) + (1-q)(0) \\ = &\ q \end{aligned}$$

Ahora, determinemos qué ocurre si hacemos que la estrategia pura sea respuesta óptima.

$$\begin{aligned} \text{Si } U_1(\text{Fútbol}, (q, 1-q)) > &\ U_1(\text{Cine}, (q, 1-q)) \\ \Rightarrow 2 - 2q > &\ q \\ \Rightarrow q < &\ 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } U_1(\text{Fútbol}, (q, 1-q)) < &\ U_1(\text{Cine}, (q, 1-q)) \\ \Rightarrow 2 - 2q < &\ q \\ \Rightarrow q > &\ 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } U_1(\text{Fútbol}, (q, 1-q)) = &\ U_1(\text{Cine}, (q, 1-q)) \\ \Rightarrow 2 - 2q = &\ q \\ \Rightarrow q = &\ 2/3 \end{aligned}$$

Cuando se tiene la igualdad $q = 2/3$, significa que no importa la estrategia, siempre obtiene la misma utilidad, el jugador 1 puede escoger cualquier $p \in [0, 1]$. Mientras que si $q > 2/3$, entonces el jugador 1 prefiere ir al cine, por lo que $p = 1$ es una estrategia mixta óptima. Y si $q < 2/3$, entonces el jugador 1 prefiere ir al partido de fútbol, por lo que $p = 0$ es la estrategia mixta óptima. Las respuestas óptimas del jugador 1 son:

$$BR_1(q) = \begin{cases} \text{Cine} & si\ q > 2/3 \\ \text{Fútbol} & si\ q < 2/3 \\ p\ \in [0,1] & si\ q = 2/3 \end{cases}$$

- **Jugadora 2.** De forma similar, fijamos una estrategia mixta $(p, 1-p)$ para el jugador 1 y calculamos el beneficio para la jugadora 2

$$\begin{aligned} U_2((p,1-p),\text{Fútbol}) = &\ p \cdot u_2(\text{Cine},\text{Fútbol}) + (1-p)\cdot u_2(\text{Fútbol},\text{Fútbol}) \\ = &\ p(0) + (1-p)(1) \\ = &\ 1-p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2((p,1-p),\text{Cine}) = &\ p \cdot u_2(\text{Cine},\text{Cine}) + (1-p)\cdot u_2(\text{Fútbol},\text{Cine}) \\ = &\ p(2) + (1-p)(0) \\ = &\ 2p \end{aligned}$$

De igual forma, determinamos qué ocurre si hacemos que la estrategia pura sea respuesta óptima

$$\begin{aligned} \text{Si } U_2((p,1-p),\text{Fútbol}) > &\ \ U_2((p,1-p),\text{Cine}) \\ \Rightarrow 1-p > &\ \ 2p \\ \Rightarrow p < &\ \ 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } U_2((p,1-p),\text{Fútbol}) < &\ \ U_2((p,1-p),\text{Cine}) \\ \Rightarrow 1-p < &\ \ 2p \\ \Rightarrow p > &\ \ 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } U_2((p,1-p),\text{Fútbol}) = &\ \ U_2((p,1-p),\text{Cine}) \\ \Rightarrow 1-p = &\ \ 2p \\ \Rightarrow p = &\ \ 1/3 \end{aligned}$$

De forma similar, cuando se produce la igualdad $p = 1/3$, no importa la estrategia que utilice la jugadora 2, siempre obtendrá la misma ganancia. Mientras que si se cumple $p > 1/3$, entonces la jugadora 2 preferiría ir al cine. Y si $p < 1/3$, entonces preferiría ir al partido de fútbol. La función de respuesta óptima es:

$$BR_2(p) = \begin{cases} \text{Cine} & \text{si } p > 1/3 \\ \text{Fútbol} & \text{si } p < 1/3 \\ q \in [0,1] & \text{si } p = 1/3 \end{cases}$$

Un equilibrio en estrategias mixtas debe cumplir que tanto el jugador 1 como la jugadora 2 tengan respuestas óptimas de forma simultánea. Por lo tanto, buscamos el punto de intersección de las funciones de respuesta óptima. Como se muestra en la siguiente gráfica:

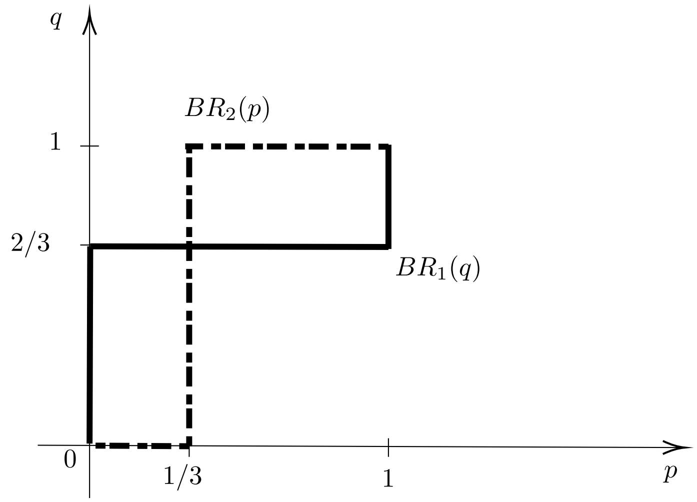

Figura 7.1: Respuesta óptima batalla de los sexos

La línea punteada representa la función $BR_2(p)$ y la continua es para $BR_1(q)$. Ambas funciones se cortan en los puntos $(1/3, 2/3)$, $(1, 1)$ y $(0, 0)$. Por lo que, todos los equilibrios de Nash son

$$(\text{Cine}, \text{Cine}),\ (\text{Fútbol}, \text{Fútbol}) \text{ y } [(1/3, 2/3),\ (2/3, 1/3)]$$

7.3. Existencia del Equilibrio de Nash

Debido a que la existencia de un equilibrio de Nash es incierta, demostraremos el **Teorema de existencia de equilibrio de Nash** (teorema 7.3.1), donde bajo ciertas condiciones podemos asegurar la existencia de al menos un equilibrio de Nash. Para ello, requerimos de la ayuda del análisis matemático, por lo que necesitamos definir ciertos elementos, demostrar algunas propiedades, lemas y teoremas técnicos que nos permitan demostrar el teorema 7.3.1. Este desarrollo teórico previo se encuentra en la sección 7.3.1.

Definición 7.3.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$. Una **correspondencia** de X a Y es un mapeo $F : X \to 2^Y$. A una correspondencia F se dice que es:*

- ***De valor no vacío**, si para todo $x \in X$ se cumple que $F(x)$ no es vacío.*
- ***De valor cerrado**, si para todo $x \in X$ se cumple que $F(x)$ es cerrado.*
- ***De valor convexo**, si para todo $x \in X$, $F(x)$ es un subconjunto convexo de Y.*

Definición 7.3.2. *Si $F : X \to 2^Y$ es una correspondencia, para toda sucesión $\{x^k\} \subset X$ convergente a $\bar{x} \in X$, y para todo abierto $Y^* \subset Y$:*

- *F se dice que es **superiormente hemicontinua** si $F(\bar{x}) \subset Y^*$ implica que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geq k_0$, se cumple que $F(x^k) \subset Y^*$.*
- *F se dice que es **inferiormente hemicontinua** si $F(\bar{x}) \cap Y^* \neq \emptyset$ implica que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geq k_0$, se cumple que $F(x^k) \cap Y^* \neq \emptyset$.*

Nota 7.3.1. *Consideramos una correspondencia $F : X \to 2^Y$, tal que para cada $x \in X$, la función F le asigna un conjunto unitario de 2^Y. Entonces, tanto si F es superior o inferior hemicontinua, se tiene que F cumple con ser una función continua.*

Definición 7.3.3. *Sea $G = \{(S_i)_{i\in J}, (u_i)_{i\in J}\}$ un juego estratégico y J el conjunto de jugadores, tal que $\forall i \in J$ se cumplen las siguientes dos condiciones:*

I) *$\exists m_i \in \mathbb{N}$ tal que $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ es no vacío y compacto.*

II) *u_i es una función continua.*

*Entonces, $\forall i \in J$, la **correspondencia de mejor respuesta** (en inglés **best reply correspondence**) para i, es $BR_i : S_{-i} \to 2^{S_i}$, donde a cada $s_{-i} \in S_{-i}$ se le asigna de la siguiente manera:*

$$BR_i(s_{-i}) := \{s_i \in S_i : u_i(s_{-i}, s_i) = \max_{\tilde{s}_i \in S_i} u_i(s_{-i}, \tilde{s}_i)\}$$

Considere la función $BR : S \to S$, tal que $\forall s \in S$

$$BR(s) := \Pi_{i\in J} BR_i(s_{-i})$$

Nota 7.3.2. *Nótese que BR_i es una correspondencia, ya que asigna a un s_{-i} a un subconjunto de S_i. Esto se debe a que es posible que existan dos o más estrategias que produzcan las mismas utilidades para el jugador i, por lo que dos o más estrategias podrían, de igual forma, maximizar las utilidades para un s_{-i} dado. Además, $BR_i(s_{-i}) \subset S_i$.*

Definición 7.3.4. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $S \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo. Una función $f : S \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava** si, $\forall r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{s \in S : f(s) \geq r\}$ es convexo, y esto es, si $\forall s, \tilde{s} \in S$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$, se tiene que:*

$$f(\lambda s + (1 - \lambda)\tilde{s}) \geq \min\{f(s), f(\tilde{s})\}$$

*Una función $f : S \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si para $s, \tilde{s} \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que:*

$$f(\lambda s + (1 - \lambda)\tilde{s}) \geq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(\tilde{s})$$

Una función cóncava también es una función cuasicóncava.

Proposición 7.3.1. *Sea $G = \{(S_i)_{i\in J}, (u_i)_{i\in J}\}$ un juego estratégico, tal que $\forall i \in J$ se cumple:*

I) *$A_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ es no vacío y compacto.*

II) *u_i es continua.*

III) *Para todo s_{-i}, $u_i(s_{-i}, \cdot)$ es una función cuasicóncava sobre S_i.*

Entonces, $\forall i \in J$, BR_i es una función hemicontinua superior, de valor no vacío, de valor cerrado y de valor convexo.

Demostración. Para cada $i \in J$. Considere los siguientes puntos

- A probar: BR_i es **de valor no vacío.** Por hipótesis $u_i(s_{-i}, s_i) = \max_{\tilde{s}_i \in S_i} u_i(s_{-i}, \tilde{s}_i)\}$ es una función continua. Como u_i es continua, S y S_i son cerrados y acotados (compactos) $\forall i \in J$, entonces BR_i debe alcanzar algún máximo. Por lo que $BR_i(s_{-i}) \neq \emptyset$.

- A probar: BR_i es **de valor cerrado.** Nuevamente, como u_i es continua, preserva límites y los conjuntos A_i son cerrados $\forall i \in J$ ($\lim_{s_i \to k} u_i(s_{-i}, s_i) = u_i(s_{-i}, k)$), por lo que BR_i también preservará los límites y contiene todos sus puntos límite.

- A probar: BR_i es **de valor convexo.** Considere $s_{-i} \in S_{-i}$ y $\tilde{s}_i \in BR_i(s_{-i})$. Ahora, sea $r := u_i(s_{-i}, \tilde{s}_i)$. Luego, $BR_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_{-i}, s_i) \geq r\}$, ya que la solución $\tilde{s}_i$ para el jugador i debe ser al menos igual de buena que las otras soluciones posibles que pertenecen a $BR_i(s_{-i})$. Como $u_i(s_{-i}, \cdot)$ es una función cuasicóncava, por hipótesis, entonces BR_i es de valor convexo.

- A probar: BR_i es **hemicontinua superior.** Supóngase por contradicción que, BR_i no es una función hemicontinua superior. Por lo que, existe una sucesión $\{s^k\} \subset S_{-i}$ convergente a un punto $\bar{s} \in S_{i-1}$ y un abierto $B^* \subset S_i$, tal que $BR_i(\bar{s}) \subset B^*$, a su vez, se satisface que $\nexists k_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq k_0$, entonces $BR_i(s^k) \not\subset B^*$. Entonces, existe una sucesión $\{\tilde{s}^m\} \subset S_i$, tal que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\tilde{s}^m \in BR_i(s^m) - B^*$. Como S_i es compacto, $\{\tilde{s}^m\}$ tiene subsucesión convergente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{\tilde{s}^m\}$ converge a $\hat{s} \in S_i$. Debido a que, B^* es una vecindad (abierto) de $BR_i(\tilde{s})$, $S_i - B^*$ es cerrado. Por lo que $\hat{s} \in S_i - B^*$ (contiene a todos sus puntos límites, por ser un cerrado), por lo que $\hat{s} \notin BR_i(\bar{s})$. Ahora, $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall s \in S_i$, se tiene que $u_i(s^m, \tilde{s}^m) \geq u_i(s^m, s)$. Ya que u_i es continua, preserva límites, hacemos $m \to \infty$, se tiene que $u_i(\bar{s}, \hat{s}) \geq u_i(\bar{s}, s)$, $\forall s \in S_i$. De este modo, llegamos a la contradicción de que, $\hat{s} \in BR_i(\bar{s}) (\to\leftarrow) \therefore BR_i$ es superior hemicontinua.

Por definición BR es el producto de los BR_i, esto es $BR(s) = \Pi_{i \in J} BR_i(s_{-i})$, entonces las propiedades anteriores se heredan a BR. Se concluye que BR es de valor no vacío, valor cerrado, valor convexo y es hemicontinua superior.

$\square$

Teorema 7.3.1 (Teorema existencia de equilibrio de Nash). *Sea $G = \{(S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$ un juego en forma estratégica, tal que $\forall i \in J$ se cumplen:*

1. *$S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ es no vacío, convexo y compacto*
2. *u_i es continua*
3. *$u_i(s_{-i}, \cdot)$ es una función cuasicóncava sobre S_i, $\forall s_{-i}$*

*Entonces, el juego G tiene al menos un **equilibrio de Nash.***

Demostración. A probar: Si s es un punto fijo de la correspondencia $BR : S \to 2^S$, entonces s es un equilibrio de Nash. Por la proposición 7.3.1, BR satisface las condiciones del **Teorema de Kakutani** (teorema 7.3.5). Por lo que BR tiene un punto fijo, esto es $BR(s) = \Pi_{i \in J} BR_i(s_{-i}) = s$, donde $s = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ para $|J| = n$ y $s_i^* \in BR_i(s)$, $\forall i \in J$, esto quiere decir que existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras. $\square$

7.3.1. Teoremas de Punto Fijo

A continuación se presentan una serie de definiciones, propiedades y teoremas técnicos, útiles para la demostración de teoremas de existencia de Equilibrio de Nash (teorema 7.3.1).

Definición 7.3.5 (Convexidad). *Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in C$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Considerando un conjunto de índices $I \ni |I| = k$, los vectores $x^i \in \mathbb{R}^n, \forall i \in I$ y escalares no negativos $\lambda_i \in [0,1], \forall i \in I$ tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, entonces al vector $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ se le conoce como **combinación convexa** de $x^1, x^2, \ldots, x^n$.*

Definición 7.3.6. *Sea C un conjunto convexo. Los* ***puntos extremos*** *de C se definen como:*

$$ext(C) := \{x \in A : \forall y, z \in A \text{ y } \forall \alpha \in (0,1), \text{ si } x = \alpha y + (1-\alpha)z \Rightarrow x = y = z\}$$

Definición 7.3.7. *Sea $k \in \mathbb{N}$ e I un conjunto tal que $|I| = k \in \mathbb{N}$. Un conjunto finito $\{x^i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ es* ***afínmente independiente*** *si para cada $\{r_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ se cumple que $\sum_{i\in I} r_i x^i = 0$ y $\sum_{i \in I} r_i = 0$, entonces se tiene que $r_i = 0$, $\forall i \in I$*

Un conjunto afínmente independiente puede ser entendido, de forma intuitiva, como aquel que, para cada tres elementos del conjunto, estos no están sobre una misma línea, para cada cuatro elementos del conjunto, estos no están sobre un mismo plano, y así sucesivamente. Por ejemplo, si consideramos el origen 0 y los vectores unitarios $e^1, e^2, \ldots, e^n$ son afínmente independientes.

Definición 7.3.8. *Un k-**símplex** es un conjunto con todas las combinaciones convexas de los vectores de un conjunto $\{x^i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^n$ afínmente independiente. Cada uno de los $x^i, i \in I$ se les llama* ***vértices*** *del símplex.*

Nota 7.3.3. *El conjunto $k-$símplex, también se le conoce como símplice, y en plural se le llama símplices.*

Definición 7.3.9. *El* ***envolvente convexo*** *o* ***covertura convexa*** *de un conjunto A es denota como*

$$conv(A) = \{\textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$$

Sea un conjunto I de índices tal que $|I| = k+1$, para $k \in \mathbb{N}$. Sea $\{x^i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito afínmente independiente, entonces definimos

$$S := conv(\{x^i\}_{i\in I}) \text{ es un } k\text{−símplex}$$

Los elementos x^i, $i \in I$ son los vértices del $k-$símplex S, lo que es $ext(S) = \{x^i\}_{i\in I}$

Las definiciones anteriores nos indican que el envolvente convexo o la cobertura convexa de un conjunto A es un símplex. Si consideramos un conjunto A finito de vectores afínmente independiente, entonces para todo $x \in conv(A)$ tiene una representación única.

Proposición 7.3.2. *Considere el conjunto de índices $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, sea $A = \{x^i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto, finito, afínmente independiente. Entonces para todo $x \in A$, su representación como combinación convexa de los vértices de A es única, y esto es, la representación $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x^i$, para $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$ es única.*

Demostración. Sea $x \in A$, considere $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$ y $\sum_{i \in I} \beta_i = 1$, supongamos que

$$\begin{aligned} x =& \quad \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_k x^k \\ x =& \quad \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \ldots \beta_k x^k \end{aligned}$$

Entonces, restando las dos igualdades, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_k x^k - \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \ldots \beta_k x^k =& \quad 0 \\ \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)x^1 + (\alpha_2 - \beta_2)x^2 + \ldots (\alpha_k - \beta_k)x^k =& \quad 0 \end{aligned}$$

Nótese que,

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \ldots (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{i \in I} \alpha_i - \sum_{i \in I} \beta_i = 1 - 1 = 0$$

Y como A es afínmente independiente, entonces $(\alpha_i - \beta_i) = 0$, $\forall i \in I$, entonces $\alpha_i = \beta_i \forall i \in I$. Lo que demuestra que $\forall x \in A$, su representación como combinación convexa de $ext(A)$ es única.

□

Definición 7.3.10. *Sea $\hat{I} \subset I$, el símplex $conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$ es una $(|\hat{I}| - 1)-$* ***cara***

Definición 7.3.11. *Sea S un conjunto, entonces su* ***diámetro*** *es el supremo de las distancias entre cualesquiera dos puntos de S.*

Definición 7.3.12. *Sea S un k-símplice y sea $\mathcal{S}$ una familia de diferentes k-símplices, se llama* ***disección o subdivisión simplicial*** *de S si se cumple:*

I) $\bigcup_{\hat{S}\in\mathcal{S}} \hat{S} = S$

II) $\forall \hat{S}, \tilde{S} \in \mathcal{S}$, *se tiene que* $\hat{S} \cap \tilde{S} = \emptyset$ *o* $\hat{S} \cap \tilde{S}$ *es una cara de* $\tilde{S}$ *y* $\hat{S}$.

Definición 7.3.13. *Para cada colección de símplices $\mathcal{S}$, sea $\mathcal{V}^{\mathcal{S}} := \bigcup_{S\in\mathcal{S}} ext(S)$ el conjunto de vértices de $\mathcal{S}$. Si $S = conv(\{x^i\}_{i\in I})$ es un símplex y $\mathcal{S}$ es una disección de S. Una* ***etiquetación Sperner asociada*** *con S y $\mathcal{S}$ es un mapeo*

$$f_l : \mathcal{V}^{\mathcal{S}} \to ext(S)$$

tal que, $\forall x \in \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ y $\forall \hat{I} \subset I$, si $x \in conv(\{x^i\}_{i\in I})$, entonces $f_l(x) \in \{x^i\}_{i\in\hat{I}}$. Esto es, los vértices de $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ son etiquetados de tal forma que un punto $x \in \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, que a su vez está sobre una cara de S, le corresponde la etiqueta de un punto extremo de esta cara de S. Si $\hat{S} \in \mathcal{S}$ tal que $f_l(ext(\hat{S})) = ext(S)$ entonces se dice que $\hat{S}$ está ***completamente etiquetado****.*

Nótese que el mapeo o función etiquetación Sperner asociada es una función bien definida, matemáticamente hablando. En otras palabras, a cada valor de mi dominio $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ le corresponde uno y sólo un valor de la imagen $\text{ext}(S)$. La función toma un vértice $x \in \mathcal{V}^{\mathcal{S}}$, busca todas las posibles caras de S que contengan a x, luego le asigna un vértice (único) de cualquiera de estas caras de S, siempre el mismo vértice de S para todas las caras de S. Note que para algún $\hat{S} \in \mathcal{S}$, el vértice $x \in \hat{S}$ y como $\bigcup_{\hat{S}\in\mathcal{S}} \hat{S} = S \in S$, entonces $x \in S$

Definición 7.3.14. *Sea S un símplex, $\mathcal{S}$ una disección de S y $\mathcal{V}^{\mathcal{S}}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{S}$. Entonces, el* ***máximo de los diámetros de los símplices en*** *$\mathcal{S}$ se denota $d_{\mathcal{S}}$.*

Lema 7.3.2 (Lema de Sperner)**.** *Sea S un símplex y $\mathcal{S}$ una disección de S. Sea f_l una etiquetación Sperner asociada con S y $\mathcal{S}$. Entonces, existe $\hat{S} \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{S}$ está completamente etiquetado.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea I un conjunto de índices tal que $|I| = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ y sea $\{x^i\}_{i\in I}$ un conjunto afínmente independiente, donde $S = \text{conv}(\{x^i\}_{i\in I})$. Consideremos un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ el cual está comprendido por todos los símplices de $\mathcal{S}$ completamente etiquetados bajo la función f_l de etiquetación Sperner asociada con S y $\mathcal{S}$. A continuación, se procede a demostrar, por inducción matemática sobre k, que $|\mathcal{C}|$ es un número impar.

I) Sea $k = 0$. Entonces $|I| = 0 + 1 = 1$, lo que quiere decir que el símplex solo tiene un vértice, $S = \text{conv}(\{x^1\})$. Como sólo existe un $\hat{S} = \text{conv}(\{x^1\}) = 1$-símplex $\in \mathcal{S}$, entonces $|\mathcal{C}| = 1$, $|\mathcal{C}|$ es impar.

II) Suponga que $|\mathcal{C}|$ es impar, para $|I| = (k - 1) + 1 = k$.

Ahora, procedemos a probar que $|C|$ es impar para $|I| = k+1$. Sea $\hat{I} \subset I$ tal que $|\hat{I}| = k$. Para cada $\hat{S} \in \mathcal{S}$, sea $r_{\hat{S}}$ la cantidad de $(k-1)-$cara de $\hat{S}$ posibles, donde f_l mapea sus k vértices en $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ de forma sobreyectiva, esto quiere decir que todas las etiquetas de $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ fueron asignadas a algún vértice, sin sobrar alguna. Probaremos que la única forma de que $\hat{S}$ sea completamente etiquetado, esto es $ext(\hat{S}) = ext(S)$, ocurre cuando $r_{\hat{S}} = 1$.

- **Caso 1.** Es posible que algunos de los vértices $ext(\hat{S})$ sean mapeados o etiquetados a una mismo vértice de S, haciendo que ninguna $(k-1)-$cara de $\hat{S}$ cumpla la hipótesis de que f_l mapea sus k vértices en $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ de forma sobreyectiva. Concluimos que en este caso que $r_{\hat{S}} = 0$.
- **Caso 2.** Ahora supongamos que $r_{\hat{S}} \geq 1$, quiere decir que sí existe al menos una $(k-1)-$ cara de $\hat{S}$ que mapea sus k vértices a la cara $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ de forma sobreyectiva. Por definición, sabemos que $\hat{S} \in \mathcal{S}$ es un símplex con la misma cantidad de vértices que S, esto es $|ext(\hat{S})| = |ext(S)| = k+1$. Por lo que si los k vértices son mapeados de forma sobreyectiva a la cara $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ de S, el vértice restante de $\hat{S}$ tiene dos opciones, puede ser etiquetado o mapeado dentro de $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ (se está etiquetando a dos vértices de $\hat{S}$ con una misma etiqueta) ó el vértice restante de $\hat{S}$ es etiquetado con el vértice restante de S, el cual no pertenece a la cara $\{x^i\}_{i\in\hat{I}}$ de S, entonces f_l no podría cubrir en su totalidad esta cara, utilizando el vértice restante. En caso de la primera opción, se tienen dos posibles caras, $r_{\hat{S}} = 2$. En la segunda opción $r_{\hat{S}} = 1$.

Nótese que $\mathcal{C} = \{\hat{S} \in \mathcal{S} : r_{\hat{S}} = 1\}$ y como se discutió anteriormente, cada uno de los $\hat{S} \in \mathcal{S}$ tiene únicamente tres posibilidades, $r_{\hat{S}} \in \{0,1,2\}$. El objetivo es probar que $|\mathcal{C}|$ es impar, lo que es equivalente a demostrar que $\sum_{\hat{S}\in\mathcal{S}} r_{\hat{S}}$ es impar. Sea $\mathcal{R} = \{R : R$ es una $(k-1)-$cara de un símplex $\hat{S} \in \mathcal{S}$ tal que f_l mapea sus k vértices de forma sobreyectiva sobre la cara $x^i i \in \hat{I}$. Como $S = \text{conv}(\{x^i\}_{i\in I})$ con $|I| = k+1$, cualquier cara $R \in \mathcal{R}$ tiene dos posibilidades:

1. R está contenida en una $(k-1)$-cara de S, como los k vértices pertenecen a la cara $\text{conv}(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$ de S, entonces $R \subset \text{conv}(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$.
2. En caso de que no se cumpla lo anterior, entonces R es la intersección de dos símplices en $\mathcal{S}$.

Si se cumple la segunda opción, entonces una misma cara R es considerada dos veces en $\sum_{\hat{S}\in\mathcal{S}} r_{\hat{S}}$. Por lo que se busca que exista una cantidad impar de elementos $R \in \mathcal{R}$ tal que $R \subset conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$. El conjunto $\mathcal{R}$ induce a su vez otra disección sobre la cara $conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$ de S, de esta forma cada $R \in \mathcal{R}$ son símplices completamente etiquetados de la disección sobre la cara $conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$, aplicando la hipótesis inductiva sobre $conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$, se tiene que existe una cantidad impar de elementos $R \in \mathcal{R}$, tal que $R \subset conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$. Por lo tanto $\sum_{\hat{S}\in\mathcal{S}} r_{\hat{S}}$ es impar $\Rightarrow |\mathcal{C}|$ es impar. De esta forma aseguramos que existe al menos un $\hat{S} \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{S}$ está completamente etiquetado

$\square$

Definición 7.3.15. *Una función $f : X \to Y$ es **continua** si, para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente a un punto $\bar{x} \in X$, implica que la sucesión $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_k)$.*

A continuación, definimos otra caracterización de funciones continuas:

Definición 7.3.16. *Una función $f : X \to Y$ es **continua** si para toda sucesión $\{x^k\} \subset X$ convergente a $\bar{x} \in X$, y para todo abierto $Y^* \subset Y$ tal que $f(\bar{x}) \in Y^*$, entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geq k_0$, se cumple que $f(x^k) \in Y^*$.*

Teorema 7.3.3 (Teorema de Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz)**.** *Sea $S = conv(\{x_i\}_{i\in I})$ un símplex en $\mathbb{R}^n$. Sea $\{A^i\}_{i\in I}$. Si se cumple que*

I) *$\forall i \in I$, A^i es un subconjunto cerrado de S.*

II) *$\forall \hat{I} \subset I$, $conv(\{x_i\}_{i\in\hat{I}}) \subset \bigcup_{i\in\hat{I}} A^i$.*

Entonces, $\bigcap_{i\in I} A^i \neq \emptyset$.

Demostración. Consideremos $\{\mathcal{S}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de disecciones del símplex S, tal que $\{d_{\mathcal{S}^m}\} \to 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea f_l^m una etiquetación Sperner asociada con S y $\mathcal{S}^m$, que definimos a continuación. Para cada $x \in \mathcal{V}^{\mathcal{S}^m}$, sea $\hat{I}$ el subconjunto más pequeño de I tal que $x \in \mathrm{conv}(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$. Note que $\hat{I}$ es finito y único, ya que si x pertenece a dos caras una de estas caras debe contener a la otra. Por hipótesis, se cumple el inciso II: para cada $\hat{I} \subset I$, $\mathrm{conv}(\{x_i\}_{i\in\hat{I}}) \subset \bigcup_{i\in\hat{I}} A^i$, entonces $\exists i \in \hat{I}$ tal que $x \in A^i$. Si consideramos este índice i tal que $x \in A^i$, definimos $f_l^m(x) := x^i$. Estamos tomando un vértice de un símplex que pertenece a una disección en la sucesión de disecciones de S y le estamos asignando una etiqueta x^i en concreto, de la cara $\mathrm{conv}(\{x_i\}_{i\in\hat{I}})$ de S. Por el lema de Sperner anterior, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un símplex $S^m \in \mathcal{S}^m$ que está completamente etiquetado bajo f_l^m. Sea el conjunto de vértices $ext(S^m) = \{x^{i,m}\}_{i\in I}$, supongamos que, sin pérdida de generalidad, $f_l^m(x^{i,m}) = x^i$, para cada $i \in I$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $x^{i,m} \in A^i$. Estamos indicando qué etiqueta x^i le corresponde a cada vértice $x^{i,m}$ del símplex S^m, por medio del índice i. Ahora, como I es finito, el símplex S es un subconjunto acotado, y por el **Teorema de Bolzano-Weierstrass** la sucesión $\{x^{i,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset S$ tiene una subsucesión convergente. Sea $\bar{x}^i$ el límite alguna de estas subsucesiones para un $i \in I$. Por inciso I $\forall i \in I$, A^i es un subconjunto cerrado de S, por lo que toda sucesión convergente en A^i contiene sus puntos límites, como $\{x^{i,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset S$, ya que $x^{i,m} \in A^i$, entonces $\bar{x}^i \in A^i \forall i \in I$. Finalmente, como $\{d_{\mathcal{S}^m}\} \to 0$, entonces como el máximo de los diámetros de los símplices que pertenecen a $\mathcal{S}^m$ tiende a cero cuando $m \to \infty$, quiere decir que el diámetro de cada símplex en $\mathcal{S}^m$ tiende a cero, esto ocurre cuando el símplex solo tiene un punto, pues la distancia entre dos puntos es cero únicamente cuando se considera la distancia entre un punto y él mismo. Esto comprueba que $\bar{x}^i \in \bigcap_{i\in I} A^i$, por lo tanto $\bigcap_{i\in I} A^i \neq \emptyset$.

□

Teorema 7.3.4 (Teorema Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto. Sea $f : A \to A$ una función continua. Entonces, $\exists \bar{x} \in A \ni f(\bar{x}) = \bar{x}$, en otras palabras, f tiene un punto fijo.*

Demostración. La prueba se divide en dos casos:

- **Caso 1.** Sea $k \in \mathbb{N}$, un conjunto de índices I tal que $|I| = k+1$ y $\{x^i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto afínmente independiente tal que $A = \mathrm{conv}(\{x^i\}_{i\in I})$. Como A es un conjunto afínmente independiente, entonces para todo $x \in A$, existe una representación única como combinación convexa de los vértices $ext(A)$, donde $x = \sum_{i\in I} \alpha_i(x) x^i$ y $\sum_{i\in I} \alpha_i(x) = 1$, $\alpha_i(x) \geq 0, \forall i \in I$. Ahora, para cada $i \in I$, sea $A^i := \{x \in A : \alpha_i(f(x)) \leq \alpha_i(x)\}$. Como A es un conjunto cerrado, considere una sucesión convergente $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos en $A^i \subset A$, con límite $\hat{x} \in A$, entonces como f es continua

$$\begin{aligned} \alpha_i(f(x)) \leq & \ \alpha_i(x) \\ \Rightarrow \lim_{k\to\infty}[\alpha_i(f(x^k)) \leq & \ \alpha_i(x^k)] \\ \Rightarrow \alpha_i(f(\lim_{k\to\infty} x^k)) \leq & \ \alpha_i(\lim_{k\to\infty} x^k) \\ \Rightarrow \alpha_i(f(\bar{x})) \leq & \ \alpha_i(\bar{x}) \end{aligned}$$

  Por lo que $\bar{x} \in A^i$, entonces A^i es un conjunto cerrado. Nótese que, para $\hat{I} \subset I$, se tiene que $conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}}) \subset \bigcup_{i\in\hat{I}} A^i$, ya que si $x \in conv(\{x^i\}_{i\in\hat{I}})$ tal que $\alpha_i(f(x)) > \alpha_i(x)$ para todo $i \in I$, entonces $\sum_{i\in\hat{I}} \alpha_i(x) = 1 > \sum_{i\in\hat{I}} \alpha_i(f(x))$, pero la suma anterior debe ser igual a 1, por lo tanto debe existir al menos un $j \in \hat{I}$ tal que $\alpha_j(f(x)) \leq \alpha_j(x)$. Por el teorema anterior, se tiene que $\exists \bar{x} \in \bigcap_{i \in \hat{I}} A^i$, entonces $\alpha_i(f(\bar{x})) \leq \alpha_i(\bar{x})$ para todo $i \in I$, y como se debe cumplir que $\sum_{i \in I} \alpha_i(f(\bar{x})) = 1$, entonces $\alpha_i(\bar{x}) = \alpha_i(f(\bar{x}))$, lo que implica que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

- **Caso 2.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto. Consideremos todos los conjuntos afínmente independientes $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \subset \text{conv}(\{x_i\}_{i \in I})$, con $|I| = k+1$ y $k \in \mathbb{N}$. Dentro de todos estos símplices, considere el símplex $S = \text{conv}(\{x_i\}_{i \in I})$ con el valor de k más pequeño posible. Sea $\tilde{x} \in S$, fijo, tal que $\tilde{x}$ esté en el interior de A, por lo que también está en el símplex S. Luego, considere la función $\tilde{f}$, una extensión de la función f, que abarque a todo el símplex S. Para ello, definimos:

$$\begin{aligned} \forall x \in S \text{ se define } \lambda(x) := &\quad max\{\lambda \in [0,1] : (1-\lambda)\bar{x} + \lambda x \in A\} \\ \tilde{f}(x) := &\quad f([1-\lambda(x)]\tilde{x} + \lambda(x)x) \end{aligned}$$

La recta $l = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda x$ conecta los puntos x y $\bar{x}$. Debido a que $A \subset S$, es posible que exista algún $x \in S$ tal que la recta l no esté completamente contenida en A. De este modo, la función λ toma $x \in S$ y le asigna el $\lambda \in [0,1]$ correspondiente, que hace que el punto $(1-\lambda(x))\tilde{x}+\lambda(x)x$ sobre l sea el más cercano a $x \in S$ y que aún esté dentro de A, tal como se muestra en la Figura 7.2.

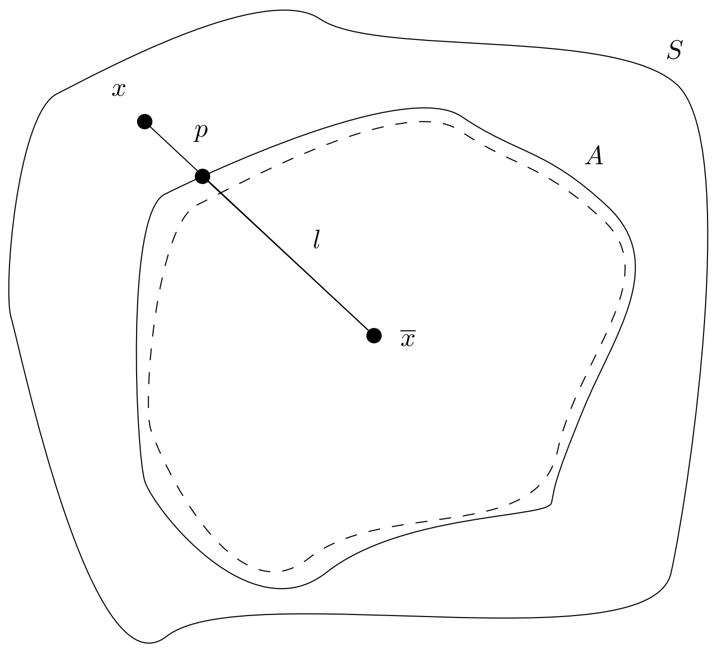

Figura 7.2: Visualización de la función λ

La función λ es continua, ya que preserva límites, entonces $\tilde{f}$ es continua. Ahora, como $\tilde{f} : S \to S$ y S es no vacío, convexo y compacto, por el caso 1, $\tilde{f}$ tiene un punto fijo. Como el rango de f está contenido en A y $\tilde{f}$ es una extensión de f, entonces f tiene el mismo punto fijo que $\tilde{f}$.

□

Teorema 7.3.5 (Teorema del punto fijo de Kakutani)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto. Sea $F : X \to 2^X$ una correspondencia superior hemicontinua, de valor no vacío, cerrado y convexo. Entonces, existe $\bar{x} \in X$ tal que $\bar{x} \in F(\bar{x})$, es decir, F tiene un punto fijo.*

Demostración. Consideremos los siguientes dos casos:

- **Caso 1.** Sea I un conjunto de índices tal que $|I| = k+1$, para $k \in \mathbb{N}$ y $\{x^i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto afínmente independiente tal que $A = \text{conv}(\{x^i\}_{i\in I})$. Ahora sea $\{\mathcal{S}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de disecciones de A, tales que $\{d_{\mathcal{S}^m}\} \to 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos la función $g^m(x) : A \to A$ de la siguiente forma. Si $x \in \mathcal{V}(\mathcal{S}^m)$, sea $y \in F(x)$ donde $g^m(x) := y$. Entonces, $\forall x \in A$, existe un símplex $S = \text{conv}(\{x^i_S\}_{i\in I}) \in \mathcal{S}^m$ donde $x \in S$. De esta forma, podemos representar a $x := \sum_{i\in I} \alpha_i x^i_S$, para $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$, con $\alpha_i \geq 0, \forall i \in I$, donde x^i_S es un vértice del símplex $S \in \mathcal{S}^m$.

  $$\text{Sea } g^m(x) := \textstyle\sum_{i\in I} \alpha_i g^m(x^i_S)$$
  $$\text{Si } x \in \mathcal{V}(\mathcal{S}^m), \text{ entonces } g^m(x) = y \in F(x)$$

  Como la correspondencia $F(x)$ es hemicontinua superior, entonces $g^m(x)$ es continua. Como $g^m(x) : A \to A$ es continua, entonces por el teorema de punto fijo de Brouwer (teorema 7.3.4), $\forall m \in \mathbb{N}$, existe un $x^m \in \mathcal{S}^m$ tal que $g^m(x^m) = x^m$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, sea $\{x^i_m\}_{i\in I}$ el conjunto de puntos extremos de un símplex $S \in \mathcal{S}^m$, tal que $x_m \in S$. Por lo que, $x^m = \sum_{i\in I} \alpha^m_i x^i_m$, donde $\sum_{i\in I} \alpha^m_i = 1$ y $\alpha^m_i \geq 0$. Sin pérdida de generalidad, considere la sucesión convergente $\{\alpha^m_i\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{\alpha}_i$ y la sucesión $\{g^m(x^i_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{y}^i$. Además, $\sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i = 1$ y $\bar{\alpha}_i \geq 0$. Como $\{d_{\mathcal{S}^m}\} \to 0$, las sucesiones $\{x^i_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ son convergentes a un mismo punto $\bar{x} \in A$.

  Ahora, vamos a probar que $\forall i \in I$, $\bar{y}^i \in F(\bar{x})$. Supongamos que $\exists i \in I$ tal que $\bar{y}^i \notin F(\bar{x})$. Recordemos que un espacio métrico es un espacio de Hausdorff, cada par de puntos está separado por vecindades (abiertos) disjuntos, como F es de valor cerrado, entonces $F(\bar{x})$ es cerrado, por lo que existen abiertos $B_1, B_2 \in A$ tal que $\bar{y}^i \in B_1$, $F(x) \subset B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Sabemos que F es superior hemicontinua y $\{x^i_m\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{x}$, entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$, $g^k(x^i_k) \in B_2$. De igual forma $\{g^m(x^i_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{y}^i$, entonces $\exists \hat{k}_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geq \hat{k}_0$, $g^k(x^i_k) \in B_1$, lo cual es una contradicción, ya que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Por lo que, $\forall i \in I$, $\bar{y}^i \in F(\bar{x})$.

  De esta forma, $\forall m \in \mathbb{N}$, $x^m = g^m(x^m) = \sum_{i\in I} \alpha^m_i g^m(x^i_m)$, entonces cuando $m \to \infty$, se tiene que $\bar{x} = \sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i \bar{y}^i$. Así que, $\bar{x} \in conv(F(\bar{x}))$. Por hipótesis, F es de valor convexo, por lo tanto $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

- **Caso 2.** Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, convexo y compacto. Procedemos de forma similar al caso 2, en la prueba al teorema 7.3.4 (teorema punto fijo de Brouwer). Consideremos todos los conjuntos afínmente independientes $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \subset conv(\{x_i\}_{i\in I})$, con $|I| = k+1$ y $k \in \mathbb{N}$. Dentro de todos estos símplices, considere el símplex $S = conv(\{x_i\}_{i\in I})$ con el valor de k más pequeño posible. Sea $\tilde{x} \in S$, fijo, tal que $\tilde{x}$ esté en el interior de A, por lo que también está en el símplex S. De esta forma, definimos una función λ y una extensión $\tilde{F}$ a todo el símplex S como sigue:

  $$\begin{aligned} \forall x \in S \text{ se define } \lambda(x) :=\ & max\{\lambda \in [0,1] : (1-\lambda)\bar{x} + \lambda x \in A\} \\ \tilde{F}(x) :=\ & F([1-\lambda(x)]\tilde{x} + \lambda(x)x) \end{aligned}$$

  Como F es de valor no vacío, de valor cerrado, y de valor convexo, entonces $\tilde{F}$ también comparte estas propiedades. Como F es hemicontinua superior, y λ es continua, las cuales componen a $\tilde{F}$, entonces $\tilde{F}$ es superior hemicontinua. Por lo tanto, por caso 1, $\tilde{F}$ tiene un punto fijo, y como $\tilde{F}$ es una extensión de F, donde el dominio de $\tilde{F}$ está contenido en A, entonces F tiene el mismo punto fijo que $\tilde{F}$.

□

7.4. Aplicaciones del equilibrio de Nash

En esta sección se pretende mostrar aplicaciones del teorema 7.3.1 y ciertas consideraciones que se deben tomar al utilizar este teorema. Antes de proceder con el cálculo de un equilibrio de Nash, es importante verificar las condiciones del teorema 7.3.1, de esta forma podemos ahorrar tiempo, en caso de que no exista ningún equilibrio.

7.4.1. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

El equilibrio de Nash para estrategias mixtas es un corolario del teorema 7.3.1. El siguiente teorema tiene menos restricciones que el teorema 7.3.1, ya que solo se requiere de un juego finito en forma estratégica.

Teorema 7.4.1 (Corolario del Teorema 7.3.1)**.** *Sea $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un juego estratégico finito. Entonces, existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Demostración. Sea S_i el conjunto de estrategias puras para el jugador i y $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_i \times \cdots \times S_n$, donde $|S_i| = m_i$. Sea $\Delta(G)$ un nuevo juego, donde interactúan todos los jugadores i. Sabemos que $\Delta(S_i)$ son las estrategias mixtas del juego estratégico G, pero en este caso consideramos a $\Delta(S_i)$ como si fuera el conjunto de estrategias puras para cada jugador i del juego $\Delta(G)$. Entonces, las utilidades esperadas para el jugador i son

$$U_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sum_{s \in S} \sigma_1^{j(1)} \cdots \sigma_i^{j(i)} \cdots \sigma_n^{j(n)} u_i(s)$$

donde $s = (s_1^{j(1)}, \ldots, s_i^{j(i)}, \ldots, s_n^{j(n)})$ y $j(i) \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$, tal que $\sigma_i^{j(i)}$ es la probabilidad de que el jugador i opte por la estrategia pura $s_i^{j(i)}$. Entonces, se tiene que $\Delta(G) = \{\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n); U_1, \ldots, U_n\}$. Además, $\Delta(S_i)$ es:

- **No vacío.**
- **Acotado y convexo:** ya que para $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{m_i}) \in \Delta(S_i)$ se debe cumplir que $\sum_{i=1}^{m_i} \sigma_i = 1$

La utilidad U_i es continua, y como es una función afín es cuasicóncava.

Entonces, por el teorema 7.3.1 $\Delta(G)$ tiene un equilibrio de Nash, que es equivalente a un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego G. □

Debido a las condiciones presentes en el teorema de existencia de equilibrio de Nash para estrategias puras (teorema 7.3.1), se observa que este teorema tiene más restricciones que el teorema de existencia para estrategias mixtas (teorema 7.4.1). Nótese que, en el teorema 7.3.1, al conjunto de estrategias S_i de cada jugador, se le pide que sea no vacío, convexo y compacto. Además, la función de utilidad $u_i(s_{-i}, \cdot)$ debe ser continua y cuasicóncava para toda variable $s_i \in S_i$. Por otro lado, note que el corolario a este teorema, el teorema 7.4.1, únicamente pide un juego estratégico finito, para poder asegurar la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Se concluye que es más fácil determinar la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, que para estrategias puras. El teorema 7.3.1 es de utilidad para la existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

7.4.2. Duopolio de Cournot

Dado que estamos en un duopolio, considere las dos empresas E_1 y E_2. Sea q_1 y q_2 las cantidades de un producto a fabricar por las empresas E_1 y E_2, respectivamente. Se supone que todo el producto fabricado por las dos empresas es totalmente vendido. Sea la función de demanda inversa o función del precio:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si } bQ < a \\ 0 & \text{si } bQ \geq a \end{cases}$$

Donde $b > 0$ y $Q = q_1 + q_2$ y los costos marginales (costos de producción de una unidad adicional) de ambas empresas son iguales, y acotados por a. Los costos marginales siempre serán los mismos, sin importar la cantidad de productos fabricados, para las dos empresas. Este duopolio asume que la función P es lineal y decreciente en $[0, a/b]$. Las funciones de costos:

$$C_1(q_1) = cq_1 \text{ y } C_2(q_2) = cq_2$$

para $c < a$, donde c es el costo unitario de fabricar el producto.

Las funciones de utilidades se construyen a partir de restar los costos a los ingresos o ventas de la empresa, para la empresa E_1 se tiene que:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) = &\ \overbrace{q_1 P(Q)}^{\text{Ingresos}} - \overbrace{C_1(q_1)}^{\text{Costos}} \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_1(a - bQ) - cq_1 \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_1(a - bq_1 - bq_2 - c) \end{aligned}$$

De igual forma, para la empresa E_2:

$$\begin{aligned} u_2(q_1, q_2) = &\ q_2 P(Q) - C_2(q_2) \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_2(a - bQ) - cq_2 \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 \\ u_1(q_1, q_2) = &\ q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \end{aligned}$$

Por lo que los conjuntos de estrategias para E_1 y E_2 son $S_1 = S_2 = [0, a/b]$

Equilibrio de Nash

El objetivo es maximizar las utilidades de la empresa. Para ello considere que la empresa E_2 ha tomado una decisión, y se tiene una cantidad de producción q_2 fija. Entonces, para maximizar los beneficios de E_1 debemos:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

donde $q_1 \in [0, a/b]$. Suponemos que la solución existe en el abierto $(0, a/b)$, lo que es equivalente a que $(q_1^* + q_2) \in (0, a/b)$, donde q_1^* maximiza el beneficio a la empresa E_1. En búsqueda de encontrar el máximo en la función u_1, derivamos parcialmente, respecto a q_1

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = (a - bq_1 - bq_2 - c) - bq_1 = 0$$

$$\Rightarrow a - bq_2 - c = 2bq_1$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

Luego se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -2b < 0$$

lo que indica que hemos encontrado un máximo para u_1. Entonces la función correspondencia de mejor respuesta, para E_1 es:

$$q_1^* = BR_1(q_2) = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

De igual forma, para la empresa E_2, si fijamos una cantidad q_1, se debe optimizar la función u_2

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

para $q_2 \in [0, a/b]$. De forma análoga se obtiene la función

$$q_2^* = BR_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

Si (q_1^*, q_1^*) hacen un equilibrio de Nash, entonces se debe cumplir que:

$$q_1^* = \frac{a - bq_2^* - c}{2b} \text{ y que } q_2^* = \frac{a - bq_1^* - c}{2b}$$

De esta forma, q_2^* es la respuesta óptima de q_1^* y viceversa. Ahora, procedemos a resolver el sistema de ecuaciones anterior

$$q_2^* = \frac{a - c - b\left(\dfrac{a - c - bq_2^*}{2b}\right)}{2b} = \frac{2a - 2c - 2b - a + c + bq_2^*}{4b} = \frac{a - c + bq_2^*}{4b}$$

$$\Rightarrow 4bq_2^* = a - c + bq_2^* \Rightarrow 3bq_2^* = a - c$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

De forma similar se llega a:

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a - c}{3b}$$

Entonces, de esta forma, se obtiene una combinación de estrategias

$$S^{\text{EN}} = \left\{ \left(q_1^* = \frac{a-c}{3b}, q_2^* = \frac{a-c}{3b} \right) \right\}$$

que hacen un equilibrio de Nash. Note que $q_1^* = q_2^*$. Además, siguiendo este equilibrio se obtiene

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{3b} = 2\frac{a-c}{3b} \text{ (es el total de unidades producidas)}$$

$$P(q_1^*, q_2^*) = a - b(q_1^* + q_2^*) = a - 2\frac{a-c}{3} = \frac{a+2c}{3} \text{ (es el precio del producto)}$$

Las utilidades para ambas empresas, según el equilibrio, son:

$$u_1^* = u_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(a - bQ^* - c) = \left(\frac{a-c}{3b}\right)\left(\frac{a+2c}{3} - c\right) = \left(\frac{a-c}{3b}\right)\left(\frac{a-c}{3}\right) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

e igualmente, para la empresa E_2 los beneficios son:

$$u_2^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

7.4.3. Oligopolio de Cournot

En la sección anterior presentamos un duopolio. Ahora, se busca mostrar un oligopolio, un modelo más general, donde interactúen n diferentes empresas. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ empresas, donde la empresa E_i produce q_i unidades de cierto producto, para todo $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nuevamente, se asumen las mismas consideraciones del duopolio. La función de demanda inversa es decreciente y lineal en $[0, a/b]$, los costos marginales son constantes, y acotados por a, no hay costos fijos, toda la cantidad producida por todas las empresas es vendida. Sea la función de demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si } bQ < a \\ 0 & \text{si } bQ \geq a \end{cases}$$

para $b > 0$ y $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Las funciones de costos para la empresa E_i son

$$C_i(q_i) = cq_i, \text{ donde } c < a, \forall i \in I$$

De esta forma, las utilidades son:

$$\begin{aligned} u_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) &= q_i P(Q) - C_i(q_i) \\ &= q_i P(q_i + Q_{-i}) - C_i(q_i) \\ &= q_i(a - b(q_i + Q_{-i})) - c) \end{aligned}$$

para $Q_{-i} = q_1 + q_2 + \cdots + q_{i-1} + q_{i+1} + \cdots + q_n \forall i \in I$

Equilibrio de Nash.

El oligopolio de Cournot cumple con las suposiciones del teorema 7.3.1. Ya que la función de demanda inversa P está sobre el intervalo $[0, a/b]$, que es compacto (cerrado y acotado) y convexo, y las funciones de utilidad $u_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ son continuas, y como son afín también son cuasicóncavas para todo q_{-i} (q_{-i}, q_i). Entonces, por el teorema 7.3.1 sí existe por lo menos un equilibrio de Nash. Ahora, procedemos a determinar este perfil de estrategias.

De manera parecida, asumiendo un $q_{-i} = (q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n)$ fijo, se pretende encontrar el valor de q_i que maximice los beneficios de la empresa E_i, para ello debemos resolver:

$$\max_{q_i} u_i(q_1, q_2 \ldots, q_i, \ldots q_n) = q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c)$$

para $q_i \in [0, a/b]$. Asumimos que la solución al problema es q_i^* y que $(q_i^* + Q_{-i}) \in (0, a/b)$. Ahora derivamos parcialmente u_i respecto de q_i

$$\frac{\partial u_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i} = (a - b(q_i + Q_{-i}) - c) - bq_i = 0$$

$$\Rightarrow 2bq_i = a - c - bQ_{-i} \Rightarrow q_i = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}, \forall i \in I$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 u_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i^2} = -2b < 0, \forall i \in I$$

lo que nos indica que hemos encontrado un máximo. Ahora deseamos resolver el sistema de ecuaciones dado por las correspondencias de mejor respuesta

$$q_i^* = BR_i(Q_{-i}) = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}, \forall i \in I$$

Para encontrar el equilibrio de Nash, se necesita que q_i^* sea la mejor respuesta a $q_{-i}^* \forall i \in I$. Sean $i, j \in I$, tal que $i \neq j$ considere

$$q_i^* = \frac{a - c - bQ_{-i}^*}{2b}$$

$$q_j^* = \frac{a - c - bQ_{-j}^*}{2b}$$

Si restamos las igualdades anteriores, se obtiene

$$q_i^* - q_j^* = \frac{a - c - bQ_{-i}^*}{2b} - \frac{a - c - bQ_{-j}^*}{2b} = \frac{b(-Q_{-i}^* + Q_{-j}^*)}{2b} = \frac{-q_j^* + q_i^*}{2}$$

$$\Rightarrow q_i^* - q_j^* = \frac{-q_j^* + q_i^*}{2} \Rightarrow 2q_i^* - 2q_j^* = -q_j^* + q_i^* \Rightarrow q_i^* - q_j^* = 0$$

$$\Rightarrow q_i^* = q_j^*, \forall i, j \in I, \text{ tal que } i \neq j$$

Como $q_i^* = q_j^* \forall i \in I$, entonces $Q_{-i}^* = (n-1)q_i^*$. Ahora,

$$q_i^* = \frac{a-c-bQ_{-i}^*}{2b} = \frac{a-c-b(n-1)q_i^*}{2b} \Rightarrow 2bq_i^* = a-c-b(n-1)q_i^* \Rightarrow bq_i^*(2+(n-1)) = a-c$$

$$\Rightarrow q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)} \forall i \in I$$

Por lo tanto, el único equilibrio de Nash es:

$$S^{EN} = \left(q_1^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, q_2^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, \ldots, q_n^* = \frac{a-c}{(n+1)b}\right)$$

En este equilibrio, el total de unidades producidas es $Q^* = q_1^* + q_2^* + \cdots + q_n^* = n\frac{a-c}{b(n+1)}$ y el precio unitario es $P(Q^*) = a - bQ^* = a - b\frac{n(a-c)}{b(n+1)} = \frac{(n+1)a - n(a-c)}{n+1} = \frac{a+nc}{n+1}$. Entonces,

$$Q^* = n\frac{a-c}{b(n+1)} \text{ y } P(Q^*) = \frac{a+nc}{n+1}$$

Las utilidades son:

$$u_i^* = q_i^*(a - bQ^* - c) = q_i^*\left(a - n\frac{a-c}{n+1} - c\right) = \left(\frac{a-c}{b(n+1)}\right)(a-c)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{a-c}{b(n+1)}\right)(a-c)\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow u_i^* = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2} \forall i \in I$$

El beneficio de todo el equilibrio, es $U^* = u_1^* + u_2^* + \cdots + u_n^* = \frac{n(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

7.4.4. Juego de la mayor diferencia

Consideremos un juego con dos participantes. Donde ambos jugadores escogen un número entre 0 y 1, por lo que sus conjuntos de estrategias puras son $S_1 = S_2 = [0,1]$. Las ganancias para ambos jugadores vienen dadas por:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^2$$

El juego de la mayor diferencia cumple con las suposiciones del teorema 7.3.1. Ya que las funciones u_i son cuadráticas, por lo que son continuas y cuasicóncavas para toda variable, y $[0,1]$ es compacto (cerrado y acotado) y convexo. Entonces, por el teorema 7.3.1 existe al menos un equilibrio de Nash.

Entonces, si fijamos un valor $s_2 \in S_2$, el jugador 1 buscará:

$$\max_{s_1 \in [0,1]} (s_1 - s_2)^2$$

En caso del jugador 1, intentará escoger un $s_1 \in [0,1]$ lo más alejado posible de s_2, entonces siempre recurrirá a alguno de los dos extremos del intervalo. Las correspondencias a la mejor respuesta óptima para ambos jugadores son:

$$BR_1(s_2) = \begin{cases} 0 & si\ s_2 > 1/2 \\ 1 & si\ s_2 \leq 1/2 \end{cases}$$

$$BR_2(s_1) = \begin{cases} 0 & si\ s_1 > 1/2 \\ 1 & si\ s_1 \ \leq 1/2 \end{cases}$$

De este modo, se tiene dos posibles equilibrios de Nash, que son los perfiles $(1,0)$ y $(0,1)$. Es importante notar que el equilibrio de Nash no necesariamente es único y el teorema 7.3.1 solo nos afirma que debe existir por lo menos un equilibrio de Nash, y tampoco nos indica cuál perfil hace posible dicho equilibrio.

7.4.5. Juego de peticiones de Nash

Las condiciones del teorema de existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras (teorema 7.3.1) son suficientes para asegurar un equilibrio de Nash, pero no son necesarias. Esto significa que si encontramos un equilibrio de Nash, no es obligatorio que se cumplan todas las condiciones del teorema 7.3.1. Es por ello que el teorema 7.3.1 nos ayuda a determinar la existencia de un equilibrio de Nash en algunos juegos, pero no en todos los juegos. Como se ejemplifica a continuación:

Ejemplo 7.4.1 (**Juego de Peticiones de Nash (mediante peticiones simultáneas)**). *Supongamos que dos jugadores desean una porción de un pastel. Entonces, cada jugador debe escoger un número entre 0 y 1, que representa la proporción de pastel que desee. Si la suma de las dos proporciones que escogieron ambos jugadores es menor o igual a 1, entonces ambos jugadores reciben la proporción de pastel que solicitaron. De lo contrario, ninguno de los jugadores recibe nada de pastel.*

Entonces, los conjuntos de estrategias puras son $S_1 = S_2 = [0,1]$ y las funciones de utilidad son:

$$u_1(s_1,, s_2) = \begin{cases} s_1 & si\ s_1 + s_2 \leq 1 \\ 0 & si\ s_1 + s_2 > 1 \end{cases} \quad y \quad u_2(s_1,, s_2) = \begin{cases} s_2 & si\ s_1 + s_2 \leq 1 \\ 0 & si\ s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

Entonces, las funciones de mejor respuesta óptima son:

$$BR_1(s_2) = \begin{cases} 1 - s_2 & si\ s_2 < 1 \\ [0,1] & si\ s_2 = 1 \end{cases} \quad y \quad BR_1(s_1) = \begin{cases} 1 - s_1 & si\ s_1 < 1 \\ [0,1] & si\ s_1 = 1 \end{cases}$$

La única forma de aprovechar mejor las ganancias es cuando la suma de ambas estrategias es igual a 1. Si la suma fuera menor, entonces cualquiera de los dos jugadores habría preferido elegir un número mayor para obtener mayores ganancias. Por lo tanto, si $s_1 + s_2 = 1$, el perfil (s_1, s_2) es un equilibrio de Nash. Además, asumiendo sin pérdida de generalidad que el jugador 1 elige 1 y el jugador 2 elige $a < 1$, entonces el perfil $(1, a)$ no sería un equilibrio de Nash, ya que el jugador 1 habría preferido elegir $1 - a$ para obtener mayores ganancias. Del mismo modo, $(a, 1)$ tampoco sería un equilibrio de Nash para $a < 1$. Por otro lado, si ambos jugadores eligen 1, ninguno tendría motivos para cambiar de número, ya que no obtendría ganancias adicionales. Por lo tanto, $(1,1)$ es un equilibrio de Nash.

Dado que las funciones u_1 y u_2 no son continuas, el teorema 7.3.1 no es aplicable. Sin embargo, existen equilibrios de Nash en este juego. Este ejemplo muestra que las condiciones del teorema 7.3.1 son suficientes pero no necesarias para que exista un equilibrio de Nash.

CAPÍTULO 8

Conclusiones

La axiomática de von Neumann y Morgenstern, que son la base de la teoría de juegos, afirman que no siempre existe una función de utilidad U que represente la relación de preferencia $\succeq$. El teorema 5.0.1 afirma la existencia de U cuando el conjunto de preferencia es finito. De lo contrario, se requiere encontrar la función U que representa a la relación $\succeq$. Si no existe U que represente a $\succeq$, entonces no se puede hacer uso de la teoría de juegos clásica.

El equilibrio de Nash se interpreta como un acuerdo entre los jugadores, donde todos maximizan sus ganancias a la vez. Supongamos un juego donde existe al menos un equilibrio de Nash, en el que todos los jugadores acuerdan jugar un perfil de estrategias que sea un equilibrio de Nash. Si solo un jugador i decide cambiar de opinión y no jugar la estrategia según el equilibrio acordado, entonces el jugador i recibirá un beneficio menor. Y como es un jugador considerado racional, que toma sus decisiones en base a los beneficios, buscando optimizar sus utilidades, la alternativa más conveniente es jugar la estrategia acordada del equilibrio.

Los equilibrios de Nash son una herramienta para negociar con otros jugadores e intentar convencerlos de jugar algún equilibrio de Nash. Si consideramos un juego que tenga al menos un equilibrio de Nash, por ejemplo, con tres jugadores, basta con convencer a dos de ellos de que jueguen un equilibrio de Nash. En general, en un juego de n jugadores, bastará convencer a $n-1$ jugadores para que se lleve a cabo un equilibrio de Nash. De esta forma, el último jugador no podrá negarse al equilibrio de Nash. Así, los equilibrios de Nash ayudan a crear alianzas y que todos los jugadores estén conformes con el juego, sus decisiones y beneficios obtenidos.

Un equilibrio de Nash no necesariamente maximiza las posibles ganancias para todos los jugadores. En un juego donde se acuerde jugar algún equilibrio de Nash, aparentemente todos los jugadores i están obteniendo el máximo beneficio posible, pero es posible que algún jugador, por medio de otro perfil que no sea este equilibrio, obtenga mayores ganancias. En otras palabras, jugar un equilibrio de Nash no maximiza las ganancias para todos los jugadores, pero cuando se conoce de antemano que todos los jugadores van a jugar un equilibrio de Nash, entonces la mejor alternativa será participar en ese equilibrio.

En un juego de información completa, donde sólo existe una única solución, es posible pronosticar el perfil que se jugará. Como el acceso a la información está disponible para todos los jugadores, cada jugador sería capaz de encontrar la solución existente. Así, la reducción de estrategias dominadas, en un juego con una única solución, predice las estrategias y utilidades asociadas a cada jugador.

Debido a que el teorema 7.3.1 tiene más condiciones que el teorema 7.4.1 para afirmar que existe un equilibrio de Nash, aumenta la dificultad para determinar la existencia de un equilibrio de Nash para estrategias puras que para mixtas. Si comparamos ambos teoremas, vemos que determinar la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas requiere menos condiciones, únicamente que sea un juego finito, por lo que es más factible determinar un equilibrio de Nash en estrategias mixtas que en puras.

Los teoremas de existencia de equilibrio de Nash para estrategias puras y mixtas tienen condiciones suficientes para asegurar la existencia, pero no son necesarias para que exista un equilibrio de Nash. Si un juego no cumple las condiciones del teorema 7.3.1 o 7.4.1, no implica que no exista un equilibrio de Nash. Los teoremas de existencia de equilibrio de Nash, en estrategias puras y mixtas, son de utilidad para determinar la existencia de un equilibrio de Nash y no pueden afirmar la no existencia de un equilibrio de Nash.

Cuando se busca determinar un equilibrio de Nash, los teoremas de existencia (teorema 7.3.1 y 7.4.1) podrían afirmar la existencia de uno de estos equilibrios, pero no nos indican qué perfil hace un equilibrio. Los teoremas de existencia no proporcionan la herramienta para el cálculo de un equilibrio; únicamente nos indican que es posible encontrarlo.

CAPÍTULO 9

Bibliografía

Bonanno, G. 2018. *Game theory 1, basic concepts*. 2ª ed. Createspace Independent Publishing Platform. 592 págs.

González, Julio; I. Garcıa, y M. Fiestras. 2023. *An introductory course on mathematical game theory and applications*. 2ª ed. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society. 415 págs.

Ichiishi, Tatsuro. 1983. *Game theory for economic analysis*. New York. Academic Press. 164 págs

Kim, Border C. 1985. *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press. 129 págs.

Mas-Collel, Andreu; M. Whinston y J. Green. 1995. *Microeconomic theory*. New York. Oxford University Press. 981 págs.

Osborne, Martin; A. Rubinstein 1994. *A course in game theory*. Cambridge, Massachusetts. MIT Press. 352 págs.

Pérez, Joaquín; J. Jimeno y E. Cerdá. 2004. *Teoría de Juegos*. Madrid. Pearson Educación.

Shoham, Yoav; K. Leyton-Brown. 2008. *Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge University Press.