
Modelos de fluctuaciones de precios de activos

Jorge Manuel Domínguez Pérez



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Modelos de fluctuaciones de precios de activos

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Jorge Manuel Domínguez Pérez
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,
2020

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades




Modelos de fluctuaciones de precios de activos


Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Jorge Manuel Domínguez Pérez
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,
2020

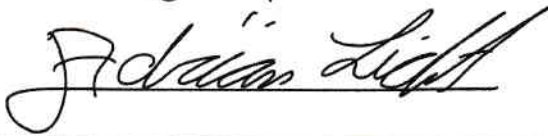
Vo.Bo.:

(f) 
MSc. Pedro Aguilar

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Pedro Aguilar

(f) 
MSc. Zaida Urrutia

(f) 
Lic. Adrián Licht

Fecha de aprobación: Guatemala, 26 de junio de 2020.

La física es fundamental, ya que de sus principios básicos es que se derivan las demás ramas de la ciencia. Ese fue uno de los principales motivos por los que decidí estudiar física. Pensé que me permitiría desenvolverme bien en una amplia gama de problemas. Mi experiencia de estudios ha reforzado en mí esta idea. Además de la física, durante mucho tiempo he estado interesado en temas económicos y financieros. Este estudio junta la física con las finanzas.

El objeto de principal interés en este estudio es una distribución de probabilidad basada en coeficientes de difusión. Los procesos de difusión son estudiados en física y resulta que una posible aplicación de esto es modelar el comportamiento los activos financieros.

Me pareció interesante la idea de comparar este modelo con otros que son empleados en teoría financiera. La distribución normal es probablemente la distribución de probabilidad más común en todas las ciencias y en efecto, es comúnmente usada en teoría financiera. Entre sus varias aplicaciones está modelar retornos de activos financieros. A mediados del siglo XX, la familia de distribuciones estables de Lévy fue propuesta como una alternativa mejor a la distribución normal para modelar retornos. Esta familia de distribuciones es más compleja de computar, por lo que no me sorprende que la distribución normal siga siendo la más común, a pesar de sus limitaciones.

Con estas ideas en mente, decidí comparar las distribuciones contra datos empíricos, con el objetivo de determinar cuál de estos tres modelos resulta ser el mejor. Una parte de mí esperaba que el modelo de coeficientes de difusión resultara ser el mejor. Pero solo había una manera de averiguar si esto era cierto.

Agradecimientos

Agradezco a todos los profesores que he conocido a lo largo de mi vida académica. No solo durante la universidad, los profesores de colegio e incluso los del kinder merecen mi gratitud. De alguna forma, cada uno de ellos ha tenido un impacto en mi vida. Agradezco a mis padres por haber promovido en mí, desde una temprana edad, curiosidad y un deseo de aprender más. Todas estas personas me han ayudado a apreciar el conocimiento por lo que es y la importancia del mismo. En el contexto de este estudio agradezco en particular a mi asesor, por su apoyo y paciencia al orientar y revisar mi trabajo a lo largo del tiempo que me ha tomado realizar este estudio.

Prefacio	v
Agradecimientos	VII
Lista de figuras	XII
Lista de cuadros	XIII
Resumen	XV
1. Introducción	1
2. Objetivos	3
2.1. Objetivo general	3
2.2. Objetivos específicos	3
3. Justificación	4
4. Marco teórico	5
4.1. Conceptos fundamentales	5
4.1.1. Instrumentos financieros	5
4.1.2. Caracterizando fluctuaciones y correlaciones	6
4.1.3. Probabilidad	8
4.1.4. Procesos dependientes del tiempo	12
4.2. Modelo de movimiento browniano	15
4.2.1. Modelo de Langevin para partículas brownianas	15
4.2.2. Modelo browniano para activos	17
4.3. Distribuciones de Lévy estables	21
4.3.1. Distribuciones estables	21
4.3.2. Distribuciones de Lévy	22
4.4. Procesos de difusión generalizados	24
4.4.1. Coeficientes de difusión	24
4.4.2. Evolución de una variable aleatoria	25
4.4.3. La ecuación Fokker-Planck	26
4.4.4. Modelo de coeficientes de difusión para activos independiente del tiempo	26
4.4.5. Modelo de coeficientes de difusión para activos con dependencia temporal	29
4.5. Pruebas estadísticas	31
4.5.1. Calidad de regresiones	31

4.5.2.	Estacionariedad de series de tiempo	32
4.5.3.	Verosimilitud de datos a distribuciones de probabilidad	32
5.	Antecedentes y alcance	35
5.1.	Antecedentes	35
5.2.	Alcance	36
6.	Métodos	42
6.1.	Funciones generales	42
6.2.	Modelo gaussiano	43
6.3.	Modelo estable de Lévy	43
6.4.	Modelo de coeficientes de difusión	43
7.	Resultados y discusión	45
7.1.	Gráficos representativos	45
7.1.1.	Gráficos a escala diaria: Amazon.com, Inc.	46
7.1.2.	Gráficos a escala semanal: Microsoft Corporation	51
7.1.3.	Gráficos a escala bisemanal: JPMorgan Chase & Co.	57
7.1.4.	Gráficos a escala mensual: Apple Inc.	62
7.1.5.	Gráficos a escala trimestral: NASDAQ Composite Index	68
7.1.6.	Gráficos a escala anual: Standard & Poor's 500	73
7.2.	Tablas de resultados	80
7.2.1.	Presencia de raíces unitarias	80
7.2.2.	Clasificación de modelos según criterios de información	80
7.2.3.	Análisis de resultados del modelo de coeficientes de difusión	85
8.	Conclusiones	89
9.	Recomendaciones	91
10.	Bibliografía	93
11.	Anexos	95
A.	Códigos	95
A.1.	Código para análisis completo	95
A.2.	Código para análisis individual	113
B.	Tablas de resultados	129
B.1.	Resultados anuales	130
B.2.	Resultados trimestrales	138
B.3.	Resultados mensuales	146
B.4.	Resultados bisemanales	154
B.5.	Resultados semanales	162
B.6.	Resultados diarios	170

Lista de figuras

4.1. Coeficiente de difusión de primer orden [27]	27
4.2. Coeficiente de difusión de segundo orden [27]	27
7.1. Precio diario AMZN	46
7.2. Retornos logarítmicos diarios AMZN	46
7.3. Volatilidad instantánea diaria AMZN	47
7.4. Función de auto-correlación de retornos AMZN	47
7.5. Función de auto-correlación de volatilidad AMZN	48
7.6. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log AMZN	48
7.7. Distribuciones de densidad de probabilidad AMZN	49
7.8. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica AMZN	49
7.9. Distribuciones de probabilidad acumulativa AMZN	50
7.10. Coeficiente de difusión D_1 AMZN	50
7.11. Coeficiente de difusión D_2 AMZN	51
7.12. Precio semanal MSFT	51
7.13. Retornos logarítmicos semanales MSFT	52
7.14. Volatilidad instantánea semanal MSFT	52
7.15. Función de auto-correlación de retornos MSFT	53
7.16. Función de auto-correlación de volatilidad MSFT	53
7.17. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log MSFT	54
7.18. Distribuciones de densidad de probabilidad MSFT	54
7.19. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica MSFT	55
7.20. Distribuciones de probabilidad acumulativa MSFT	55
7.21. Coeficiente de difusión D_1 MSFT	56
7.22. Coeficiente de difusión D_2 MSFT	56
7.23. Precio bisemanal JPM	57
7.24. Retornos logarítmicos bisemanales JPM	57
7.25. Volatilidad instantánea bisemanal JPM	58
7.26. Función de auto-correlación de retornos JPM	58
7.27. Función de auto-correlación de volatilidad JPM	59
7.28. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log JPM	59
7.29. Distribuciones de densidad de probabilidad JPM	60
7.30. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica JPM	60
7.31. Distribuciones de probabilidad acumulativa JPM	61
7.32. Coeficiente de difusión D_1 JPM	61
7.33. Coeficiente de difusión D_2 JPM	62
7.34. Precio mensual AAPL	62

7.35. Retornos logarítmicos mensuales AAPL	63
7.36. Volatilidad instantánea mensual AAPL	63
7.37. Función de auto-correlación de retornos AAPL	64
7.38. Función de auto-correlación de volatilidad AAPL	64
7.39. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log AAPL	65
7.40. Distribuciones de densidad de probabilidad AAPL	65
7.41. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica AAPL	66
7.42. Distribuciones de probabilidad acumulativa AAPL	66
7.43. Coeficiente de difusión D_1 AAPL	67
7.44. Coeficiente de difusión D_2 AAPL	67
7.45. Precio trimestral CCMP	68
7.46. Retornos logarítmicos trimestrales CCMP	68
7.47. Volatilidad instantánea trimestral CCMP	69
7.48. Función de auto-correlación de retornos CCMP	69
7.49. Función de auto-correlación de volatilidad CCMP	70
7.50. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log CCMP	70
7.51. Distribuciones de densidad de probabilidad CCMP	71
7.52. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica CCMP	71
7.53. Distribuciones de probabilidad acumulativa CCMP	72
7.54. Coeficiente de difusión D_1 CCMP	72
7.55. Coeficiente de difusión D_2 CCMP	73
7.56. Precio anual SPX	73
7.57. Retornos logarítmicos anuales SPX	74
7.58. Volatilidad instantánea anual SPX	74
7.59. Función de auto-correlación de retornos SPX	75
7.60. Función de auto-correlación de volatilidad SPX	75
7.61. Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log SPX	76
7.62. Distribuciones de densidad de probabilidad SPX	76
7.63. Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica SPX	77
7.64. Distribuciones de probabilidad acumulativa SPX	77
7.65. Coeficiente de difusión D_1 SPX	78
7.66. Coeficiente de difusión D_2 SPX	78

5.1. Listado y descripción de índices	37
5.2. Listado y descripción de acciones	38
7.1. Estacionariedad de retornos según prueba Dickey-Fuller Aumentada	80
7.2. Clasificación del modelo gaussiano según el BIC	81
7.3. Clasificación del modelo de Lévy según el BIC	82
7.4. Clasificación del modelo de coeficientes de difusión según el BIC	82
7.5. Clasificación del modelo gaussiano según el AIC	83
7.6. Clasificación del modelo de Lévy según el AIC	83
7.7. Clasificación del modelo de coeficientes de difusión según el AIC	84
7.8. Análisis del coeficiente de determinación para el coeficiente de difusión D_1	85
7.9. Análisis del coeficiente de determinación para el coeficiente de difusión D_2	85
7.10. Análisis de incertidumbre en la constante D	86
7.11. Análisis de incertidumbre en la constante C	86
7.12. Análisis de incertidumbre en la constante κ	86
7.13. Análisis de períodos de decaimiento de correlaciones en retornos	87
7.14. Análisis incertidumbre en períodos de decaimiento de correlaciones en retornos	87
7.15. Análisis de coeficientes de determinación para el decaimiento de correlaciones en retornos	88
7.16. Análisis de coeficientes de determinación para el decaimiento de correlaciones en la volatilidad	88

La ciencia, más que un conjunto de conocimiento, es una manera de pensar. El humano observa una gran cantidad de fenómenos a su alrededor y la ciencia nos permite llegar a respuestas. Tratamos de modelar los fenómenos que observamos utilizando herramientas que nos permiten llegar a respuestas concretas y que son verificables. En muchas ocasiones, se obtiene un realismo dependiente de modelo, es decir, interpretamos la realidad según lo que nos dice nuestro modelo. El científico debe conocer bien las limitaciones de su modelo y debe ser cuidadoso al momento de formar conclusiones sugeridas por un modelo, pero que no han sido observadas en la realidad. Si dicha predicción llega a confirmarse de manera experimental, es un éxito para el modelo y la capacidad humana de comprender su entorno.

Existen fenómenos que de manera superficial parecen distintos entre sí, pero al observar detenidamente, se pueden observar semejanzas entre ellos. Hay patrones que se repiten en la naturaleza. La mecánica estadística es la rama de la física que busca estudiar el comportamiento de conjuntos grandes de objetos, donde no es práctico considerar el comportamiento de cada objeto individual. No se pueden dar resultados de manera determinista, sino de manera probabilista. El sistema que rige el comportamiento de las partículas es complejo, depende del valor exacto de las condiciones iniciales del sistema y la forma en que los objetos interactúan. Además, dado el carácter caótico del sistema, sistemas con condiciones iniciales cercanas divergen exponencialmente con el paso del tiempo. El sistema de mercados financieros también es complejo. El precio de un activo en el presente es el resultado de las acciones realizadas por una gran cantidad de agentes, de manera que es impráctico e imposible tratar de analizar todas las interacciones con precisión. Por estos motivos, los precios de activos financieros han sido modelados como caminatas aleatorias desde que se han estudiado bajo un formalismo matemático [2]. Es de esta conexión que surge el interés de estudiar los precios de activos desde la perspectiva de la física. En la década de los 90, se formalizó el nombre “Econofísica”, un campo de estudio interdisciplinario formado por físicos que buscan estudiar fenómenos económicos y financieros desde esta perspectiva diferente.

En este estudio se busca analizar distintos modelos de fluctuaciones de precios y contrastarlos con la realidad, a fin de determinar qué es lo que hace que un modelo sea exitoso, a fin de formar una interpretación intuitiva sobre el comportamiento de los mercados reales. Según la teoría disponible, herramientas de programación y disponibilidad cada vez mayor de información financiera, además de condiciones cambiantes en el mercado, este estudio puede brindar nuevas percepciones sobre los mercados financieros.

Los mercados financieros son un ejemplo de un sistema complejo, aquellos sistemas que se forman como resultado de la actividad de una gran cantidad de actores; en este caso, personas que incurren en transacciones que a su vez causan que los precios de activos cambien. Analizar el comportamiento de este sistema no es trivial dada la cantidad de actores. Podemos analizar el sistema a distintas escalas según sea nuestro objetivo de estudio y nuestras limitaciones prácticas. El micro estado del sistema está dado por toda la información disponible y relevante sobre cada actor. Las interacciones entre los actores dan lugar a propiedades emergentes del sistema, que permiten analizarlo a una escala mayor. La descripción macroscópica de un sistema utiliza una cantidad reducida de variables para caracterizar al mismo. Desde esta perspectiva no se analizan los componentes microscópicos de manera individual.

En el caso de mercados financieros, se puede escoger los precios de activos o las variaciones de los mismos como descripción macroscópica. Estos precios y sus variaciones son el resultado de una gran cantidad de entidades realizando transacciones según la información disponible, opiniones, reacciones ante eventos, entre otros motivos. Se debe notar que no es siempre posible determinar relaciones entre actores individuales para deducir propiedades macroscópicas.

La evolución temporal de un sistema físico se puede conocer, en principio, utilizando las ecuaciones de la mecánica Newtoniana. Dadas las condiciones iniciales del sistema, se puede conocer la trayectoria completa del sistema. Esta postura ha sido desafiada por avances en mecánica cuántica y limitaciones en mediciones. Este último limitante es relevante en el estudio de sistemas complejos, ya que estos son sistemas caóticos, las relaciones entre actores son no lineales, con múltiples grados de libertad y sensibles a condiciones iniciales.

La termodinámica plantea la relación entre energía, calor y trabajo, a una escala macroscópica. En esta teoría, se describe el sistema con una cantidad reducida de valores que describen al sistema en su completitud. Un gas, por ejemplo, es descrito por su temperatura, volumen y presión. Si el estado de un sistema no varía con el tiempo, se dice que está en equilibrio y el sistema se quedará así y las propiedades macroscópicas también. En este sentido, la termodinámica plantea una noción para la dirección del tiempo, cosa que no existía en mecánica Newtoniana.

La mecánica estadística surge como una manera de explicar o interpretar las leyes de la termodinámica de acuerdo a la mecánica Newtoniana. Un sistema puede ser descrito por un vector en un espacio de fase, que encapsula la información sobre posición y velocidad de todos los agentes del sistema. El estudio en mecánica estadística inicia planteando una distribución de probabilidad

que mide la posibilidad de que el sistema exista en cierta región del espacio de fase. La hipótesis de ergodicidad dice que el tiempo que un sistema pasa en una región particular del espacio de fase es proporcional al volumen de dicha región, esto implica que todas las regiones del espacio de fase tienen la misma posibilidad de ser ocupadas a lo largo del tiempo. Este punto de vista parece contrastar con la termodinámica, ya que implica que un sistema no alcanza un equilibrio estricto, en el sentido de que el cambio ya no ocurre. Esto se debe a la naturaleza de ambas teorías, la termodinámica es macroscópica y la mecánica es microscópica. Un solo macroestado corresponde a un conjunto de varios microestados, por lo que existe una región en el espacio de fase que corresponde al equilibrio.

Es posible extender las herramientas de la mecánica estadística a otros dominios como la economía o la biología, al plantear la distribución de probabilidad pertinente al fenómeno a estudiar. Esta distribución de probabilidad se podría plantear según datos empíricos. Para sistemas simples, como juegos de azar, este es un abordaje válido. Para sistemas complejos se debe utilizar otro enfoque, dado que no se pueden determinar frecuencias según la experimentación, ya que el fenómeno no es estrictamente repetible y tampoco se tiene la información necesaria sobre los resultados posibles. Los sistemas complejos se estudian de acuerdo al grado de creencia que cierto evento ocurrirá. Esta idea se plantea formalmente en el teorema de Bayes.

En el presente estudio, se busca utilizar las herramientas de la mecánica estadística y aplicarlas en el ámbito de las finanzas, más específicamente los precios de activos y sus fluctuaciones. Se considerarán distintos modelos y se contrastarán sus predicciones con datos reales.

2.1. Objetivo general

Estudiar series de tiempo de activos y sus fluctuaciones aplicando métodos de la mecánica estadística.

2.2. Objetivos específicos

- Contrastar datos reales contra distintos modelos.
- Analizar la validez de los supuestos de los modelos según las similitudes y diferencias con la realidad.
- Determinar propiedades sobre los mercados según el grado de validez de los modelos y sus distintos supuestos.

Durante mucho tiempo, la mecánica Newtoniana junto a la termodinámica y mecánica estadística parecían ser suficientes para describir el universo. Varios científicos del siglo XIX e inicios del XX tenían la noción de que era posible conocer completamente el desarrollo del universo, si pudiéramos conocer con precisión las condiciones del universo actual, así como los valores de las constantes físicas que aparecen en las ecuaciones. Esta visión fue desafiada por ambas teorías de relatividad de Einstein, que planteaban restricciones y conceptos que no se habían considerado anteriormente. Además, la teoría cuántica llegó a romper el paradigma determinista que existía en la comunidad científica. Ambas teorías demostraron ser satisfactorias y eran capaces de explicar fenómenos que las anteriores no. Sin embargo, sabemos que la relatividad general es incompatible con la mecánica cuántica, por lo que las tomamos como descripciones incompletas de la realidad. A pesar de esto, son modelos útiles y es el trabajo del científico el conocer cuáles son las limitaciones de cada modelo y utilizarlo adecuadamente.

En el ámbito de finanzas, durante mucho tiempo, se planteó que la distribución de probabilidad de las fluctuaciones de precios de activos era una gaussiana. Estudios más recientes demostraron que un modelo gaussiano no describe adecuadamente los retornos de activos financieros y se propuso un modelo adecuado a los datos recolectados. La frecuencia de medición de los precios también demostró ser relevante al desacreditar el modelo gaussiano, ya que una frecuencia de medición mayor se desviaba más de este modelo. En este caso, un mayor acceso a información de precios fue vital para mejorar nuestro entendimiento de la realidad. Gracias a las herramientas que tenemos hoy en día, como el internet, el acceso a esta información es cada vez más fácil y la información disponible crece. Además, es importante notar los cambios que han ocurrido en los mercados financieros a través del tiempo y cómo estos pueden llegar a cambiar la manera en que estos funcionan. En el año 2010, ocurrió un denominado Flash Crash, un colapso bursátil que duró poco más de media hora. Investigaciones subsecuentes determinaron que dicho colapso fue causado principalmente por transacciones algorítmicas, algo que ha existido solo en tiempos recientes. Puede que haya otros factores relevantes que hayan cambiado con el tiempo. En este estudio se busca comparar distintos modelos para distribuciones de retornos de activos. La validez de estos modelos al contrastarlos con la realidad brinda información sobre la validez de los supuestos. Un supuesto válido tiene implicaciones sobre el comportamiento de los mercados de activos en la realidad.

4.1. Conceptos fundamentales

4.1.1. Instrumentos financieros

Un activo es un recurso que es propiedad de un individuo o una entidad, el cual se espera brindará un beneficio [3]. Este se considera un activo líquido si se puede convertir fácilmente en efectivo en un corto período de tiempo. Instrumentos del mercado monetario, valores negociables y el efectivo en sí son ejemplos de activos líquidos [8].

Un activo financiero representa una inversión en los activos y valores de otra institución. Acciones, bonos soberanos y corporativos, fondos mutuos, depósitos bancarios, efectivo y otros valores híbridos son ejemplos de activos financieros. Los activos financieros generalmente son líquidos. Estos tienen como valor un derecho contractual o un reclamo de propiedad. Los activos financieros no necesariamente tienen una forma o valor físico inherente. Los activos financieros se compran y venden en mercados financieros [7].

Las acciones son reclamaciones de patrimonio que representan la propiedad sobre los ingresos netos y activos de una corporación. Los ingresos que los accionistas reciben por la propiedad de acciones se denominan dividendos. Las acciones preferentes pagan un dividendo fijo y en caso de quiebra de la corporación, los propietarios de las acciones preferentes son los primeros en tener derecho a ser pagados después de los acreedores de la corporación. Las acciones ordinarias pagan un dividendo variable, dependiendo de las ganancias que quedan después de que los accionistas preferentes hayan sido pagados y las ganancias retenidas sean reservadas. [5]

Es importante notar que la junta directiva de una corporación puede optar por no pagar dividendos a los accionistas comunes, incluso si la corporación tiene ganancias sobrantes después de que los accionistas preferentes hayan sido pagados. En este caso, los ingresos que reciben los accionistas serán en forma de ganancias de capital si la acción se aprecia. Los precios de las acciones cambian según la oferta y demanda de las mismas. El valor total de las acciones de una compañía no necesariamente refleja el valor en libros de la misma [5].

El mercado más grande para acciones en circulación es la Bolsa de Valores de Nueva York. Existen varios índices bursátiles que miden el movimiento general de los precios de las acciones comunes. El Dow Jones Industrial Average, quizás el más conocido, se basa en los precios de solo 30 acciones. El

índice Standard & Poor's 500 es una ponderación de los precios de las acciones de las 500 compañías más grandes de los Estados Unidos [5].

Un *Bull Market*, o mercado alcista, es una condición de los mercados financieros donde se espera que los precios suban. El término generalmente es aplicado a mercados accionarios, pero también se puede aplicar a mercados de bonos, bienes raíces, divisas y mercancías. Dado que los precios suben y bajan de manera frecuente durante cada día que los mercados están abiertos, el término se refiere a aumentos de precio en períodos extendidos de tiempo, generalmente meses o años. [9]

Los mercados alcistas están caracterizados por optimismo y confianza en los inversores junto a una expectativa que los buenos resultados se van a mantener. Dado que muchas veces son difíciles de predecir, los mercados alcistas usualmente se identifican después de que han ocurrido. Estos mercados generalmente coinciden con tiempos donde la economía está en expansión o ya es bastante fuerte. Tienden a ocurrir en tiempos donde el Producto Interno Bruto es robusto, el desempleo es bajo y las ganancias corporativas suben [9].

Lo opuesto de un *Bull Market* es un *Bear Market*, o mercado bajista, donde la tendencia de los mercados es a la baja. Estos mercados se caracterizan por pesimismo en los inversores. Tienden a coincidir con períodos de contracción económica como depresiones o recesiones. Al igual que los mercados alcistas, los mercados bajistas pueden durar meses o incluso años [9].

El mercado alcista más prolífico en la historia moderna de Estados Unidos comenzó al final de la era de la estanflación en 1982 y concluyó durante la burbuja de las empresas de internet en 2000. Durante este mercado alcista secular, un término que denota un mercado alcista que dura muchos años, el Dow Jones Industrial Average (DJIA) promedió retornos anuales de 16.8%. El NASDAQ, un mercado de acciones con sesgo a empresas tecnológicas, aumentó su valor cinco veces entre 1995 y 2000, pasando de 1,000 a más de 5,000. Un mercado bajista prolongado siguió al mercado alcista 1982-2000. Entre 2000 y 2009, el mercado tuvo dificultades para establecer una base y entregó retornos anuales promedio de -6.2%. Sin embargo, el 9 de marzo de 2009 se inició un mercado alcista prolongado, el cual fue liderado principalmente por un repunte en las acciones de empresas de tecnología [9].

4.1.2. Caracterizando fluctuaciones y correlaciones

La mayoría de las definiciones de esta sub-sección están basadas en el capítulo 2 del libro *Econophysics and Physical Economics* [27].

Considerando un activo con precio $s(t)$ en un tiempo t , la manera más simple de considerar fluctuaciones de precio es considerar el cambio en un tiempo δt :

$$\delta s(t, dt) = s(t + \delta t) - s(t) \quad (4.1)$$

También podemos definir el retorno sobre el valor del activo, r_0 :

$$r_0(t, dt) = \frac{\delta s(t, dt)}{s(t)} = \frac{s(t + \delta t)}{s(t)} - 1 \quad (4.2)$$

Esta definición tiene la desventaja que los retornos están definidos de manera multiplicativa. En finanzas, se acostumbra utilizar retornos logarítmicos, definidos de la siguiente manera:

$$r(t, \delta t) = \ln s(t + \delta t) - \ln s(t) = \ln \frac{s(t + \delta t)}{s(t)} \quad (4.3)$$

De esta manera, los retornos son aditivos:

$$r(t, \delta t_1 + \delta t_2) = r(t + \delta t_1, \delta t_2) + r(t, \delta t_1) \quad (4.4)$$

Para medir las fluctuaciones de los retornos se usualmente se considera el valor absoluto de los retornos, $|r(t, \delta t)|$ y la volatilidad instantánea, definida de la siguiente manera:

$$\sigma_r(t, \delta t) = \sqrt{r(t, \delta t)^2 - \langle r(t, \delta t) \rangle^2} \quad (4.5)$$

Donde $\langle r(t, \delta t) \rangle$ es el promedio temporal del retorno logarítmico en un tiempo T :

$$\langle r(t, \delta t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r(t, \delta t) dt \quad (4.6)$$

Es importante notar que el valor absoluto de los retornos es un caso especial de la volatilidad instantánea cuando $\langle r(t, \delta t) \rangle = 0$. Para una serie de tiempo de N retornos r_t , el promedio está definido como [6]:

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t \quad (4.7)$$

La desviación estándar o volatilidad, de esta serie de tiempo está dada por [6]:

$$\sigma_{muestra} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_t - \bar{r})^2} \quad (4.8)$$

El error estándar del promedio se define como [6]:

$$\sigma_{\bar{r}} = \frac{\sigma_{muestra}}{\sqrt{N}} \quad (4.9)$$

Una manera de cuantificar cómo el valor de una variable x en un tiempo t influye su valor en un tiempo $t + \tau$ es dada por la función de auto-correlación, $G(\tau)$:

$$G(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (4.10)$$

Dada una desviación estándar $\sigma_t = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2}$, distinta a cero y finita, podemos definir una función de auto-correlación normalizada:

$$R(\tau) = \frac{(G(\tau) - \langle x \rangle^2)}{\sigma_t \sigma_{t+\tau}} \quad (4.11)$$

Los valores de esta función se encuentran en el intervalo $[-1 : 1]$, donde 1 significa correlación perfecta, -1 anti-correlación perfecta y 0 la ausencia de correlaciones.

4.1.3. Probabilidad

Las definiciones de esta sub-sección están basadas en el capítulo 3 del libro *Econophysics and Physical Economics* [27].

Variabes aleatorias

Dada la naturaleza de los mercados financieros, se les analiza como un sistema estocástico o aleatorio. El concepto central de todo sistema de este tipo es la variable aleatoria. No es posible determinar el valor de la variable a priori, pero se puede calcular la probabilidad de que tome cierto valor. En el caso de resultados discretos, cada evento tiene una probabilidad mayor a cero. En el caso de variables continuas, cada intervalo en el dominio de la variable tiene una probabilidad mayor a cero. Al considerar todos los escenarios posibles, tenemos una probabilidad igual a 1. Una distribución de probabilidad $p(x)$ debe cumplir con:

$$\int p(x)dx = 1 \quad (4.12)$$

En el caso continuo, se integra sobre todos los valores posibles del dominio de la distribución. Para casos discretos, se suman las probabilidades $p(x_i)$ para todos los x_i posibles. Es importante notar que para distribuciones discretas, existe una probabilidad distinta a cero para cada evento específico considerado, lo cual cambia para una distribución continua, donde la probabilidad de que la variable tome algún valor específico es 0. En este caso las probabilidades se definen por intervalos, de manera que la probabilidad de que la variable X tome el valor de x es 0 y la probabilidad de que esté en el intervalo $[x, x + dx]$ es $p(x)dx$.

La probabilidad que una variable aleatoria x tome un valor menor o igual a x está dado por la distribución de probabilidad acumulada:

$$C_{<}(x) = \int_{-\infty}^x p(x', t)dx' \quad (4.13)$$

Se define la distribución complementaria, que considera la probabilidad de valores mayores a x :

$$C_{>}(x) = \int_x^{\infty} p(x', t)dx' \quad (4.14)$$

El valor promedio de la distribución de probabilidad corresponde al primer momento de la distribución:

$$m_1 = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx \quad (4.15)$$

El n -ésimo momento de la distribución está dado por:

$$m_n = \langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x, t)dx \quad (4.16)$$

La desviación estándar está relacionada con constantes de difusión en sistemas físicos. En el contexto físico se le refiere como volatilidad. El cuadrado, σ^2 , es conocido como varianza.

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (4.17)$$

La función característica de una distribución $p(x, t)$ es la transformación de Fourier de la distribución. También se puede interpretar como el valor esperado de la función exponencial:

$$\tilde{p}(k, t) = \int e^{ikx} p(x, t) dx = \langle e^{ikx} \rangle_p \quad (4.18)$$

La transformada de Fourier inversa es

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} \tilde{p}(k, t) dk \quad (4.19)$$

Los momentos de la distribución se pueden obtener directamente al diferenciar la función característica. El n -ésimo momento está dado por:

$$m_n = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial k^n} \tilde{p}(k) |_{k=0} \quad (4.20)$$

La función generadora de momentos puede ser usada para encontrar los momentos de la distribución al expandir por serie de Taylor. Está definida como:

$$M(\theta) = \langle e^{\theta x} \rangle = \int e^{\theta x} p(x) dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n \theta^n}{n!} \quad (4.21)$$

Teorema del límite central

Considerando dos variables aleatorias e independientes x e y . Cada una se rige por una distribución de probabilidad p_1 y p_2 respectivamente. Si consideramos la variable z como la suma de x e y , de tal manera que $z = x + y$, la distribución de probabilidad de la variable z está dada por:

$$p(z) = \int \int \delta(z - x - y) p(x, y) dx dy \quad (4.22)$$

Donde $p(x, y)$ es la distribución conjunta de x e y . Dado que las variables son independientes, se cumple con:

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y) \quad (4.23)$$

La función característica $\tilde{p}(k)$ para la distribución $p(z)$ está dada por:

$$\tilde{p}(k) = \langle \exp ik(x + y) \rangle = \int \int e^{ik(x+y)} p(x, y) dx dy \quad (4.24)$$

Dado que las variables x e y son independientes, la integral anterior es separable, por lo que se obtiene:

$$\tilde{p}(k) = \tilde{p}_1(k)\tilde{p}_2(k) \quad (4.25)$$

Generalizando al caso donde la variable z es la suma de N variables independientes:

$$z = \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.26)$$

La distribución para z está dada por:

$$p(z) = \frac{1}{N} \int \int \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_N) \delta(z - \sum_{i=1}^N x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (4.27)$$

Suponiendo que todas las variables son tomadas de la misma distribución, $p(x)$, la distribución conjunta se vuelve:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(x_i) \quad (4.28)$$

La función característica se vuelve:

$$\tilde{p}(k) = \tilde{p}^N(k) \quad (4.29)$$

En el caso donde todos los momentos de la distribución son finitos y considerando el límite $N \rightarrow \infty$, donde se pueden ignorar términos de orden superior en la expansión de Taylor, la función característica se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \langle \exp ikx \rangle^N = [1 + ik\langle x \rangle - \frac{k^2 \langle x^2 \rangle}{2} + O(k^3)]^N \\ &= [\exp(ik\langle x \rangle - [k^2 \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]k^2/2)]^N = \exp(iNk\langle x \rangle - N\sigma^2 k^2/2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Al calcular la transformada de Fourier inversa se obtiene:

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[ikz - iNk\langle x \rangle - N\sigma^2 k^2/2]} dk = \sqrt{\frac{1}{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(z - N\langle x \rangle)^2}{2N\sigma^2}} \quad (4.31)$$

Este resultado demuestra que la distribución de densidad de probabilidad para la suma de N variables independientes converge a una distribución normal, independientemente de la forma precisa de la distribución de las variables individuales. Este resultado es conocido como el teorema del límite central.

En el límite $N \rightarrow \infty$, el ancho de la distribución se escala de acuerdo a la relación:

$$\sigma^2(z) = N\sigma^2 \quad (4.32)$$

También se cumple con:

$$\langle z \rangle \rightarrow N\sigma^2 \quad (4.33)$$

Este resultado es conocido como la ley de los grandes números. La forma final de la distribución puede ser expresada como una distribución normal:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(z)}} \exp \left[\frac{-(z - \langle z \rangle)^2}{2\sigma^2(z)} \right] \quad (4.34)$$

En el caso que la forma de la distribución para las variables individuales, $p(x)$, fuera Gaussiana, de igual forma sería la distribución de la suma. La forma de la distribución se conserva durante la suma. Tales distribuciones son conocidas como distribuciones estables.

Paseos aleatorios

El desarrollo teórico anterior sirve para introducir el concepto de un paseo aleatorio en una dimensión. La variable z se puede interpretar como la distancia del origen $z(t)$, de una partícula que se mueve con velocidad constante, mientras atraviesa en un tiempo t una secuencia de N pasos x_i , escogidos aleatoriamente de una distribución $p(x)$.

La distancia recorrida esperada después de N pasos será:

$$\langle z \rangle = N\langle x \rangle = v_d t \quad (4.35)$$

Donde v_d es la velocidad de deriva. A continuación, se introduce la constante de difusión D , definida por la siguiente relación:

$$2Dt = N\sigma^2 = \sigma^2(z) \quad (4.36)$$

Según estas definiciones, se plantea la siguiente distribución de probabilidad:

$$p(z, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp \left[\frac{-(z - v_d t)^2}{4Dt} \right] \quad (4.37)$$

Esta es la solución para la ecuación de difusión para movimiento Browniano con deriva:

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} [v_d p(z, t)] \quad (4.38)$$

Teorema de Bayes

La probabilidad que un evento A ocurra, dado que un evento B también, es la probabilidad condicional de A dado B . Para que esto ocurra, $A \cap B \neq 0$. La probabilidad condicional es:

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \quad (4.39)$$

Considerando un conjunto de eventos Ω , que se puede construir según un conjunto de N eventos que no se intersectan, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N$, la probabilidad de un conjunto arbitrario X está dada por:

$$P(X) = P(X \cap \Omega) = P(X \cap \cup_i A_i) = P(X \cap A_1) + P(X \cap A_2) + \dots + P(X \cap A_N) \quad (4.40)$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera usando la ecuación 4.39:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A_1)P(X|A_1) + P(A_2)P(X|A_2) + \dots + P(A_N)P(X|A_N) \\ &= \sum_{i=1}^N P(X \cap A_i) = \sum_{i=1}^N P(A_i)P(X|A_i) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Esta expresión para $P(X)$ es conocida como el teorema de probabilidad total. De la ecuación 4.39 tenemos:

$$P(X)P(A_i|X) = P(A_i \cap X) = P(X \cap A_i) = P(A_i)P(X|A_i) \quad (4.42)$$

Sustituyendo en la expresión 4.41:

$$P(A_i|X) = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{P(X)} = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{\sum_{i=1}^N P(X \cap A_i)} \quad (4.43)$$

La expresión 4.43 es el Teorema de Bayes, que brinda la relación entre las probabilidades condicionales $P(A_i|X)$ y $P(X|A_i)$. Considerando solamente 2 eventos, X y $A_i = A$, se obtiene:

$$P(A|X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(X)} \quad (4.44)$$

4.1.4. Procesos dependientes del tiempo

La evolución de una variable aleatoria x a lo largo del tiempo está dada por su distribución de densidad de probabilidad $p(x, t)$. Para describir el proceso en su completitud, es necesario considerar distribuciones de probabilidad conjunta. Por ejemplo, para conocer la probabilidad de encontrar x_i en un tiempo t_i y x_j en un tiempo t_j es necesario conocer la distribución de probabilidad conjunta $p_2(x_i, t_i; x_j, t_j)$.

Una descripción completa del proceso requiere el conocimiento de la distribución de densidad de probabilidad conjunta, para todos los tiempos posibles. Considerando n tiempos, la distribución toma la forma de $p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$. Esta distribución cumple con $p_n \geq 0$.

El orden de la distribución se puede reducir al integrar sobre todos los valores posibles de una variable de la siguiente manera:

$$\int p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) dx_3 = p(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (4.45)$$

$$\int p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_2, t_2) \quad (4.46)$$

Un proceso estocástico estacionario es aquél cuya distribución de probabilidad es independiente del origen en el tiempo. Cumple con la siguiente expresión para todo valor de τ :

$$p(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \quad (4.47)$$

Para procesos estacionarios, al considerar un solo tiempo t , la distribución es independiente del tiempo:

$$p(x, t) = p(x) \quad (4.48)$$

De manera similar, para una distribución conjunta se obtiene:

$$p(x_2, t_2; x_1, t_1) = p(x_2, t_2 - t_1; x_1, 0) \quad (4.49)$$

Procesos de Markov

Se introduce la siguiente notación reducida:

$$p(n; \dots 1) \equiv p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) \quad (4.50)$$

En esta notación se ordenan los índices de manera que correspondan a una secuencia temporal de la forma: $t_n > t_{n-1} > \dots > t_2 > t_1$.

Para un proceso estocástico donde las correlaciones son inexistentes y las fluctuaciones en tiempos distintos son independientes, se cumple con:

$$p(n; \dots; 2; 1) = p(n) \dots p(2)p(1) \quad (4.51)$$

Es importante notar que esto es válido cuando las diferencias temporales son lo suficientemente grandes. Para diferencias de tiempo lo suficientemente cortas, se podría esperar que existan correlaciones debido a la causalidad dentro del proceso. Consideramos esta limitación considerando un proceso donde solamente el valor actual es relevante. Es decir, la probabilidad de obtener un valor, condicionada a todos los pasos anteriores solo depende del paso inmediatamente anterior:

$$p(n|n-1, \dots, 2, 1) = p(n|n-1) \quad (4.52)$$

Utilizando la definición de probabilidad condicional se obtiene:

$$p(n; n-1; \dots; 1) = p(n|n-1)p(n-1|n-2) \dots p(2|1)p(1) \quad (4.53)$$

Es evidente entonces, que un proceso de Markov se caracteriza completamente por su distribución de probabilidad inicial $p(1)$ y la distribución de probabilidad transitoria $p(i+1|i)$.

Al integrar la distribución de probabilidad transitoria sobre los estados iniciales i o los estados finales f se obtiene:

$$\int p(f|i)p(i)di = p(f) \quad (4.54)$$

$$\int p(f|i)df = 1 \quad (4.55)$$

Este resultado se obtiene recordando la definición de la distribución de densidad de probabilidad $p(f|i)p(i) = p(f; i)$.

La ecuación Chapman-Kolmogorov

Considerando una distribución de probabilidad conjunta para tres estados, podemos reducir términos al integrar:

$$p(3; 1) = \int p(3; 2; 1)dx_2 \quad (4.56)$$

Al sustituir $p(3; 2; 1) = p(3|2)p(2|1)p(1)$ y utilizando la definición de la distribución de probabilidad condicional, $p(3; 1) = p(3|1)$, se obtiene:

$$p(3|1) = \int p(3|2)p(2|1)p(1)dx_2 \quad (4.57)$$

Esta es la ecuación Chapman-Kolmogorov, que contiene la noción que la distribución de probabilidad transitoria entre dos puntos depende de todos los caminos posibles entre ambos eventos y sus probabilidades. Definiendo $x = x_1$, $x'' = x_2$ y $x' = x_3$ y regresando a notación convencional, se puede expresar de la siguiente manera:

$$p(x', t'|x, t) = \int p(x', t'|x'', t'')p(x'', t''|x, t)dx'' \quad (4.58)$$

Es posible obtener la distribución de probabilidad para un solo tiempo insertando la definición $p(x', t'|x, t)p(x, t) = p(x', t'; x, t)$ en la ecuación 4.58 e integrando sobre dx , con lo que se obtiene:

$$p(x', t') = \int p(x', t'|x'', t'')p(x'', t'')dx'' \quad (4.59)$$

4.2. Modelo de movimiento browniano

Las definiciones de esta sección están basadas en los capítulos 5 y 6 del libro *Econophysics and Physical Economics* [27].

En 1928, Robert Brown notó el movimiento de partículas de polen dentro de agua, a pesar de que el agua no mostraba movimiento en sí. En 1905, Einstein propuso que el movimiento de las partículas en un fluido era debido al impacto con partículas individuales del fluido cuyas velocidades siguen la distribución de Maxwell-Boltzmann. Cinco años antes que Einstein, Louis Bachelier desarrolló el mismo análisis estadístico y lo aplicó a las fluctuaciones de precios de acciones. Su trabajo fue publicado en 1900 pero no fue notado por casi medio siglo.

4.2.1. Modelo de Langevin para partículas brownianas

Consideramos una partícula Browniana de masa M y radio a , sumergida en un fluido con viscosidad η y compuesto de partículas pequeñas de masa $m \ll M$, podemos formular la siguiente ecuación de movimiento:

$$M \frac{d}{dt} v = \zeta v + F(t) + B(x, t) \quad (4.60)$$

El primer término del lado derecho de la expresión es la fuerza debido a la fricción. Según la hidrodinámica clásica, se puede demostrar que para una partícula esférica de radio a , la constante de fricción está dada por $\zeta = 6\pi\eta a$, conocida como el arrastre de Stokes. El segundo término considera las fuerzas aleatorias dadas las colisiones. El tercer término considera todas las demás fuerzas, podrían ser gravitacionales, electromagnéticas, etc. En el estudio presente este último término no es relevante. Tomando $\lambda = \zeta/M$ y $A(t) = F(t)/M$, la expresión se simplifica a:

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v + A(t) \quad (4.61)$$

Tomando $v_0 = v(t=0)$, se obtiene una expresión para la velocidad en función del tiempo:

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t'} A(t') dt' \quad (4.62)$$

Suponiendo que ocurren muchas colisiones entre la partícula y el fluido, se considera que el promedio de la fuerza aleatoria es 0:

$$\langle A(t) \rangle = 0 \quad (4.63)$$

Suponiendo que la función de autocorrelación para $A(t)$ decae rápidamente, la podemos aproximar por la función Delta de Dirac:

$$G(t-t') = \langle A(t)A(t') \rangle \simeq \alpha \delta(t-t') \quad (4.64)$$

Se puede calcular el promedio de ensemble $\langle v(t) \rangle_{v_0}$ para la velocidad $v(t)$, la velocidad cuadrada y la varianza:

$$\langle v(t) \rangle_{v_0} = v_0 e^{-\lambda t} \quad (4.65)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_{v_0} = v_0^2 e^{-2\lambda t} + \frac{\alpha}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \quad (4.66)$$

$$\langle \Delta v^2(t) \rangle_{v_0} = \frac{\alpha}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \quad (4.67)$$

Según el teorema de equipartición de la energía, $\langle v^2 \rangle$ es proporcional a la temperatura T . Para un sistema de una dimensión se obtiene la siguiente expresión, donde k_B es la constante de Boltzmann:

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (4.68)$$

Según el promedio de ensemble de la velocidad cuadrada y tomando el límite $t \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\alpha = 2\lambda k_B T / M \quad (4.69)$$

Según los resultados anteriores, es posible construir la distribución de densidad de probabilidad para las velocidades de una partícula Browniana, invocando el Teorema del Límite Central:

$$p(v, t | v_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \Delta v^2(t) \rangle_{v_0}}} \exp \left[-\frac{v^2(t) - v_0^2 e^{-2\lambda t}}{2 \langle \Delta v^2(t) \rangle_{v_0}} \right] \quad (4.70)$$

Tomando el límite $t \rightarrow \infty$, se obtiene la solución estacionaria:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha / \lambda}} e^{-\frac{v^2}{\alpha / \lambda}} \quad (4.71)$$

Insertando el valor de α se obtiene la distribución Maxwell-Boltzmann para velocidades en una dimensión:

$$p(v) = \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{Mv^2}{2k_B T} \right] \quad (4.72)$$

Según los resultados anteriores, se puede encontrar la distribución para la posición de la partícula. Se comienza por integrar la expresión 4.62, para obtener la posición de la partícula:

$$x(t) - x_0 = \frac{v_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t [1 - e^{\lambda(t-t')}] A(t') dt' \quad (4.73)$$

El promedio de ensemble resulta ser:

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.74)$$

Considerando una vez más la aproximación de la expresión 4.64, se obtiene que las fluctuaciones son:

$$\langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = \frac{\alpha}{\lambda^2} \int_0^t [1 - e^{-\lambda s}]^2 ds = \frac{\alpha e^{-2\lambda t}}{2\lambda^3} ([2\lambda t - 3]e^{2\lambda t} + 4e^{\lambda t} - 1) \quad (4.75)$$

Para t pequeño, esta expresión se puede aproximar como:

$$\langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle \simeq \alpha t^3 / 3 \quad (4.76)$$

De manera semejante, la posición media se aproxima por:

$$\langle x(t) \rangle \simeq x_0 + v_0 t \quad (4.77)$$

Por otro lado, considerando $t \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\langle x(t) \rangle \simeq x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \quad (4.78)$$

$$\sigma^2(t) = \left\langle \left[x(t) - \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) \right]^2 \right\rangle \simeq \frac{\alpha t}{\lambda^2} \quad (4.79)$$

En el escenario último, la posición esperada permanece fija, mientras que las fluctuaciones incrementan linealmente con el tiempo. Este proceso es equivalente a un proceso de difusión con constante de difusión:

$$D = \frac{\alpha}{2\lambda^2} = \frac{\sigma^2(t)}{2t} = \frac{k_B T}{\zeta} \quad (4.80)$$

La distribución de densidad de probabilidad condicional está dada por:

$$P(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{[x - x_0 - \frac{v_0}{\lambda}(1 - \exp[-\lambda t])]^2}{2\sigma^2(t)} \right] \quad (4.81)$$

Donde el ancho de la distribución aumenta linealmente con el tiempo.

4.2.2. Modelo browniano para activos

En el modelo browniano para activos, se define la variable estocástica $u(t)$ como el logaritmo natural del precio del activo $u(t) = \ln s(t)$. Se supone que la distribución de probabilidad condicional depende solamente de las diferencias entre logaritmos de precio. Se supone que las fluctuaciones en tiempos diferentes son independientes entre sí. Esto implica:

$$p(u, t | u_0, t_0) = p(u - u_0, t - t_0 | u_0, t_0) = p(u - u_0, t - t_0) \quad (4.82)$$

Al sustituir en la ecuación Chapman-Kolmogorov (4.58), se obtiene:

$$p(u - u_0, t - t_0) = \int p(u - u', t - t')p(u' - u_0, t' - t_0)dx' \quad (4.83)$$

Introduciendo retornos logarítmicos, definidos en este contexto como:

$$\begin{aligned} r(t_0, \delta t) &= u - u_0 = \ln s(t_0 + \delta t) - \ln s_0 \\ r'(t_0, \delta t') &= u' - u_0 = \ln s(t_0 + \delta t') - \ln s_0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

La distribución de probabilidad se reescribe como:

$$p(r(t_0, \delta t), t - t_0) = \int p(r - r', t - t')p(r', t' - t_0)dr' \quad (4.85)$$

Utilizando el teorema de convolución de Fourier, se obtiene la función característica de la distribución:

$$\tilde{p}(k, \delta t) = \tilde{p}(k, \delta t - \delta t')\tilde{p}(k, \delta t') \quad (4.86)$$

La solución a esta ecuación puede formularse de la siguiente manera:

$$\tilde{p}(k, \Delta t) = e^{iF(k)\Delta t} \quad (4.87)$$

Donde $F(k)$ es una función arbitraria dependiente de k e independiente del tiempo Δt . Escogiendo $F(0) = 0$, se puede asegurar que la distribución de probabilidad esté normalizada para cualquier valor de Δt . Así la distribución cumple con $\tilde{p}(0, \Delta t) = 1$.

Según la expresión anterior, se puede calcular los momentos de la distribución:

$$m_1 = \langle r(t, \delta t) \rangle = -i \left. \frac{\partial \tilde{p}(k, \delta t)}{\partial k} \right|_{k=0} = F'(0)\delta t = v_d \delta t \quad (4.88)$$

$$m_2 = \langle r^2(t, \delta t) \rangle = (-i)^2 \left. \frac{\partial^2 \tilde{p}(k, \delta t)}{\partial k^2} \right|_{k=0} = -iF'''(0)\delta t + F''(0)\delta t^2 \quad (4.89)$$

Se define $v_d = F'(0)$ como la tasa de incremento del retorno promedio en función del intervalo de tiempo. Se define $\sigma_0^2 = F''(0)$ como la varianza inicial. La varianza en función del intervalo de tiempo está dada por:

$$\sigma^2(\delta t) = m_2 - m_1^2 = -iF''(0)\delta t = \sigma_0^2 \delta t \quad (4.90)$$

En este modelo, el retorno logarítmico tiene tanto un valor esperado como varianza que incrementan linealmente con el intervalo de tiempo. Al realizar una expansión en serie de Taylor para $F(k)$ en la ecuación 4.87, se obtiene:

$$\tilde{p}(k, \delta t) = \exp \left[ik \langle r(t, \delta t) \rangle - \frac{k^2 \sigma_0^2 \delta t}{2} \right] \quad (4.91)$$

Al aplicar la transformada de Fourier inversa se obtiene una distribución normal para los retornos logarítmicos:

$$p(r, \delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2\delta t}} \exp \left[\frac{-(r - v_d\delta t)^2}{2\sigma_0^2\delta t} \right] \quad (4.92)$$

Esta ecuación satisface la ecuación de difusión para movimiento Browniano con deriva (4.38). El coeficiente σ_0^2 es proporcional a la constante de difusión D , $\sigma_0^2 = 2D$ y el coeficiente v_d corresponde a la velocidad de deriva.

Para encontrar la dependencia temporal del precio del activo $s(t)$, primero se considera el valor esperado de los retornos logarítmicos:

$$\frac{d\langle r(t, \delta t) \rangle}{d\delta t} = v_d \quad (4.93)$$

Aplicando la definición de los retornos logarítmicos y $t = t' + \delta t$, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \langle \ln s(t) \rangle = v_d \quad (4.94)$$

Dado que se trabaja con variables aleatorias, se cumple que:

$$\frac{d\langle s(t) \rangle}{dt} \neq v_d \langle s(t) \rangle \quad (4.95)$$

Para proceder, se considera que las probabilidades para fluctuaciones equivalentes en precios $P(s, t)$ y precios logarítmicos deben ser iguales:

$$P(s, t)\delta s = p(r, t)\delta r \quad (4.96)$$

Reescribiendo la ecuación 4.92 en términos de precios logarítmicos y utilizando el resultado anterior, resulta que la distribución de densidad de probabilidad para los precios es log-normal:

$$P(s, t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma_0^2 t}} \exp \left[\frac{-(\ln s - v_d t)^2}{2\sigma_0^2 t} \right] \quad (4.97)$$

Con este resultado, se puede obtener el valor esperado de la distribución:

$$\langle s(t) \rangle = \int_0^\infty s P(s, t) ds = \exp \left[(v_d + \sigma_0^2/2)t \right] \quad (4.98)$$

Según esta expresión, se puede encontrar correctamente el cambio del valor esperado del precio respecto al tiempo:

$$\frac{d\langle s(t) \rangle}{dt} = \left(v_d + \frac{\sigma_0^2}{2} \right) \langle s(t) \rangle \quad (4.99)$$

La varianza está dada por:

$$\langle s(t)^2 \rangle - \langle s(t) \rangle^2 = \exp \left[2t \left(v_d + \frac{\sigma_0^2}{2} \right) \right] (\exp [\sigma_0^2 t] - 1) \quad (4.100)$$

Sintetizando los resultados de este modelo, los retornos logarítmicos incrementan linealmente con el paso del tiempo, mientras que los precios en sí incrementan exponencialmente.

Debilidades del modelo

Entre las posibles debilidades del presente modelo se debe mencionar que la distribución normal tiende a subestimar la probabilidad de retornos grandes observados de manera empírica. Estas discrepancias tienden a hacerse más grandes entre menor es la escala de muestreo para el análisis de datos. Otra debilidad es que el modelo no predice las correlaciones temporales en la volatilidad que son evidentes en los datos empíricos. Por otro lado, las correlaciones empíricas de los retornos logarítmicos en sí tienden a decaer instantáneamente, lo que valida un supuesto del modelo.

4.3. Distribuciones de Lévy estables

Las definiciones de esta sección se basan en el capítulo 9 del libro *Econophysics and Physical Economics* [27] y el capítulo 4 del libro *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* [19].

4.3.1. Distribuciones estables

En la deducción del Teorema del Límite Central, se demostró que es posible calcular la distribución de probabilidad $p(z)$ de la suma de un conjunto de variables aleatorias e independientes, x_i que salen de la misma distribución, al tomar la convolución de las distribuciones de probabilidad elementales, $p(x)$. La función característica de la variable z se forma al multiplicar las funciones características de las variables x_i .

Estas características están capturadas en la ecuación Chapman-Kolmogorov (4.58) al considerar soluciones de la forma $p(x, t + \delta t | x', t) = p(x - x' | \delta t) = p_{\delta t}(x - x')$. En este caso, la ecuación 4.58 puede ser expresada como una convolución:

$$p_{\delta t_1 + \delta t_2}(x' - x) = \int p_{\delta t_2}(x' - x'') p_{\delta t_1}(x'' - x) dx'' \quad (4.101)$$

La transformada de Fourier correspondiente es:

$$\tilde{p}_{\delta t_1 + \delta t_2}(k) = \tilde{p}_{\delta t_1}(k) \tilde{p}_{\delta t_2}(k) \quad (4.102)$$

La distribución respecto al intervalo de tiempo $t = N\delta t$ puede ser escrita como la convolución generalizada de distribuciones correspondientes al intervalo δt :

$$\tilde{p}_{N\delta t}(k) = [\tilde{p}_{\delta t}(k)]^N \quad (4.103)$$

Se dice que la distribución es estable si la forma de la distribución es independiente del número de convoluciones. Tomando $u = \alpha_N x + \beta_N$, donde α_N y β_N son funciones de N solamente e independientes de x , la idea se formaliza en la siguiente expresión:

$$p_{t=N\delta t}(x) dx = f(u) du \quad (4.104)$$

Se puede calcular la transformada de Fourier de la función $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \int f(u) e^{iku} du = \int p_{N\delta t}(x) e^{ik[\alpha_N x + \beta_N]} dx = e^{ik\beta_N} \tilde{p}_{N\delta t}(\alpha_N k) \quad (4.105)$$

Al imponer la condición de estabilidad de forma, se requiere que esta expresión sea válida para todos los valores de N , por lo que se cumple con:

$$\tilde{p}_{N\delta t}(k) = \tilde{f}(\alpha_N^{-1} k) e^{-i\beta_N \alpha_N^{-1} k} \implies \tilde{p}_{\delta t}(k) = \tilde{f}(\alpha_1^{-1} k) e^{-i\beta_1 \alpha_1^{-1} k} \quad (4.106)$$

Escogiendo $\alpha_1 = 1$ y $\beta_1 = 0$ se obtiene:

$$\tilde{f}(\alpha_N^{-1}k)e^{-i\beta_N\alpha_N^{-1}k} = [\tilde{f}(k)]^N \quad (4.107)$$

Introduciendo la función de generación de cumulantes, $\Phi(k) = \ln \tilde{f}(k)$, la expresión anterior se vuelve:

$$\Phi(\alpha_N^{-1}k) - i\beta_N\alpha_N^{-1}k = N\Phi(k) \quad (4.108)$$

Separando el componente lineal de k , tomando $\Phi(k) = \phi(k) + \imath ck$, donde $\phi(k)$ es una función cuyas características están por ser determinadas y c es una constante, se obtiene:

$$\beta_N = \alpha_N c [\alpha_N^{-1} - N] \quad (4.109)$$

$$\phi(\alpha_N^{-1}k) = N\phi(k) \quad (4.110)$$

La expresión β_N representa el cambio en el centro de la distribución de probabilidad como resultado de una convolución de N pasos. Realizando cambios de variables en las distribuciones base, esta constante se puede hacer cero siempre. Por otro lado, el resultado anterior requiere que la función ϕ sea homogénea, $\phi(\lambda k) = \lambda^\mu \phi(k)$, donde μ es el grado de homogeneidad. Suponiendo que α_N es un número real, se obtiene $\alpha_N = N^{-1/\mu}$. Las condiciones de homogeneidad se cumplen con la siguiente solución:

$$\phi(k) = \begin{cases} c_1|k|^\mu + c_2k|k|^{\mu-1} & \text{para } \mu \neq 1 \\ c_1|k| + c_2k \ln |k| & \text{para } \mu = 1 \end{cases} \quad (4.111)$$

Al escoger $\mu = 2$, $c_1 = -\sigma^2/2$ y $c_2 = 0$, se obtiene $\phi = -\sigma^2k^2/2$, que es la función de generación de cumulantes para la distribución normal. Por este motivo, la distribución normal cumple con ser una distribución estable.

4.3.2. Distribuciones de Lévy

Una representación alternativa para la función característica $\tilde{f}(k)$ es dada por:

$$\tilde{f}(k) = \tilde{L}_{\alpha,b,m,\mu}(k) = \begin{cases} \exp \left[\imath mk - \alpha|k|^\mu \left[1 - \imath b \frac{k}{|k|} \tan(\pi\mu/2) \right] \right], & \text{para } \mu \neq 1 \\ \exp \left[\imath mk - \alpha|k| \left[1 + \imath b \frac{2k}{\pi|k|} \ln |k| \right] \right], & \text{para } \mu = 1 \end{cases} \quad (4.112)$$

El parámetro μ representa la estabilidad de la distribución, sus valores posibles están en el intervalo $(0, 2]$. El parámetro b mide la asimetría de la distribución, toma valores en el intervalo $[-1, 1]$. El parámetro α representa la escala de la distribución, toma valores en el intervalo $(0, \infty)$. El parámetro m representa la localización de la distribución, toma valores en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

La media de la distribución es igual a m cuando $\mu > 1$, de lo contrario está indefinida. Es importante notar que el valor más probable de la distribución existe aunque $\mu > 1$. La mediana y la moda son iguales a m cuando $b = 0$, de lo contrario no es expresable de manera analítica. La

varianza es igual a $2\alpha^2$ cuando $\mu = 2$, de lo contrario es infinita. Con la excepción del caso $\mu = 2$ (distribución normal), la varianza y los momentos superiores son infinitos.

La forma analítica de la distribución solo se puede plantear para algunos casos especiales: la distribución normal ($\mu = 2, b = 0$), la de Cauchy/Lorentz ($\mu = 1, b = 0$) y la de Lévi-Smirnov ($\mu = 1/2, b = 1$).

En general, para valores grandes del argumento x , las distribuciones de Lévy siguen una ley potencial. Considerando una distribución simétrica $b = 0$ con su pico en el origen $m = 0$:

$$L_{\alpha,0,0,\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha|k|^\mu) \cos(kx) dk \quad (4.113)$$

La integral se puede expresar como una expansión en series al evaluar las integrales sobre k . Tomando el límite $|x| \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$L_{\alpha,0,0,\mu}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{|x|^{\mu n+1}} \frac{\Gamma(\mu n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sin\left(\frac{\pi \mu n}{2}\right) \quad (4.114)$$

El comportamiento asintótico en x es dado por el primer término en la expansión en series:

$$L_{\alpha,0,0,\mu}(x) \sim \frac{\alpha \mu \Gamma(\mu) \sin(\pi \mu / 2)}{|x|^{1+\mu}} = \frac{C}{|x|^{1+\mu}} \quad (4.115)$$

La constante C es positiva y es frecuentemente llamada la “cola” de la distribución. Para que la distribución de Lévy sea estable, el exponente μ debe estar entre 0 y 2, de otro modo, la distribución se vuelve inestable y converge a una gaussiana bajo convoluciones, como se esperaría por el Teorema del Límite Central.

Distribuciones de Lévy con el mismo exponente μ , y coeficiente de asimetría b están relacionados por la siguiente ley de escala:

$$L_{\alpha,b,0,\mu}(x) = \alpha^{-1/\mu} L_{1,b,0,\mu}(\alpha^{-1/\mu} x) \quad (4.116)$$

Los momentos de la distribución pueden ser escritos como:

$$\langle |x|^\theta \rangle = \int |x|^\theta L_{\alpha,b,0,\mu}(x) dx = \alpha^{\theta/\mu} \int L_{1,b,0,\mu}(x) dx \quad (4.117)$$

Por la manera en la que las distribuciones de Lévy decaen a 0 mientras $|x| \rightarrow \infty$, estas integrales no siempre existen.

La distribución de probabilidad acumulativa respeta una ley de escalamiento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{\alpha,b,0,\mu}(x) &= \int_{-\infty}^x L_{\alpha,b,0,\mu}(x') dx' = \alpha^{-1/\mu} \int_{-\infty}^x L_{1,b,0,\mu}(\alpha^{-1/\mu} x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha^{-1/\mu} x} L_{1,b,0,\mu}(x') dx' = C_{1,b,0,\mu}(\alpha^{-1/\mu} x) \\ &\implies C_{\alpha,b,0,\mu}(\alpha^{1/\mu} x) = C_{1,b,0,\mu}(x) \end{aligned} \quad (4.118)$$

4.4. Procesos de difusión generalizados

Las definiciones de esta sección están basadas en el capítulo 8 del libro *Random Processes in Physics and Finance* [17].

4.4.1. Coeficientes de difusión

Dada una distribución de probabilidad y definiendo $t' = t + \Delta t$, $x' = x(t') = x(t + \Delta t)$ y $x_0 = x(t = t_0)$, se puede reescribir la ecuación Chapman-Kolmogorov (4.58) de la siguiente manera:

$$p(x', t + \Delta t | x_0, t_0) = \int p(x', t + \Delta t | x, t) p(x, t | x_0, t_0) dx \quad (4.119)$$

A continuación se supone que los momentos de la distribución de probabilidad transitoria $p(x', t + \Delta t | x, t)$ existen y pueden ser expresados como series de Taylor en Δt . Para $n \geq 1$ y un Δ infinitesimal, se obtiene el n-ésimo momento de la distribución:

$$\int (x' - x)^n p(x', t + \Delta t | x, t) dx' = n! D_n(x, t) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (4.120)$$

Donde D_n es el coeficiente de difusión de orden n :

$$D_n(x, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \frac{(x' - x)^n p(x', t' | x, t) dx'}{\Delta t} = \frac{1}{n!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle [x(t') - x(t)]^n \rangle_{x(t)=x}}{\Delta t} \quad (4.121)$$

El coeficiente de difusión de primer orden:

$$D_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\Delta x}{\Delta t} \right\rangle_{x(t)=x} \quad (4.122)$$

Es conocido usualmente como la deriva, dado que normalmente cumple con una ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{d\langle x(t) \rangle_{x(t_0)=x_0}}{dt} = \langle D_1(x, t) \rangle = \int D_1(x, t) p(x, t | x_0, t_0) dx \quad (4.123)$$

El segundo coeficiente de difusión, D_2 , es dado por:

$$D_2(x, t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right\rangle_{x(t)=x} \quad (4.124)$$

Está relacionado directamente al coeficiente de difusión del modelo de movimiento Browniano. Utilizando la expresión 4.80, se obtiene:

$$D_2 \simeq \frac{\alpha}{2\lambda^2} = \frac{\sigma^2(t)}{2t} = \frac{k_B T}{\zeta} = D \quad (4.125)$$

En física, generalmente no se consideran coeficientes de orden superior a $n = 2$.

4.4.2. Evolución de una variable aleatoria

Al integrar la ecuación Chapman-Kolmogorov (4.58) sobre la variable x_0 se obtiene una ecuación para la distribución de probabilidad $p(x, t)$:

$$p(x', t + \Delta t) = \int p(x', t + \Delta t | x, t) p(x, t) dx \quad (4.126)$$

Considerando una función $M = M(x, t)$ arbitraria de la variable aleatoria x . Se puede encontrar su valor esperado:

$$\langle M(x', t + \Delta t) \rangle = \int M(x', t + \Delta t) p(x', t + \Delta t) dx' \quad (4.127)$$

Una expansión de la función M en series de Taylor resulta en:

$$M(x', t + \Delta t) = M(x, t) + \frac{\partial M}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} (x' - x)^n \frac{\partial^n M}{\partial x^n} \quad (4.128)$$

Utilizando esta expansión de Taylor, la expresión para $p(x', t + \Delta t)$ junto a su condición de normalización y la definición de los coeficientes de difusión (4.121), se obtiene, para un límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\langle M(x, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle D_n(x, t) \frac{\partial^n M(x)}{\partial x^n} \right\rangle \quad (4.129)$$

La expectativa condicional de $M(x)$ cuando $x(t) = x$, se obtiene definiendo $p(x, t) = \delta(x(t) - x)$:

$$\left. \frac{d\langle M(x, t) \rangle}{dt} \right|_{M(t)=M} = \left. \frac{\partial M}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(x, t) \frac{\partial^n M(x)}{\partial x^n} \right|_{x(t)=x} \quad (4.130)$$

Considerando solo los primeros dos coeficientes de difusión, se obtiene:

$$\left. \frac{d\langle M(x, t) \rangle}{dt} \right|_{M(t)=M} = \left. \frac{\partial M}{\partial t} + D_1(x, t) \frac{\partial M(x)}{\partial x} \right|_{x(t)=x} + \left. D_2(x, t) \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} \right|_{x(t)=x} \quad (4.131)$$

La ecuación 4.131 es el Lema de cálculo de Ito, que ha sido ampliamente utilizado en el desarrollo de teorías de precios de activos y áreas de la física donde se encuentran procesos gaussianos estocásticos. Es importante notar que en su deducción, se supone que los momentos de la distribución de probabilidad son finitos, por lo que este lema no necesariamente se cumple para toda distribución.

4.4.3. La ecuación Fokker-Planck

En el caso que M no depende explícitamente del tiempo, la ecuación 4.129 se puede escribir como:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n(x, t) p(x, t) \frac{\partial^n M(x)}{\partial x^n} - M(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right) dx = 0 \quad (4.132)$$

Notando que la densidad de probabilidad desvanece cuando $x \rightarrow \infty$ e integrando por partes n veces, se obtiene:

$$\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right) [D_n(x, t) p(x, t)] - \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right] M(x) dx = 0 \quad (4.133)$$

Dado que $M(x)$ es una función arbitraria, el término entre corchetes debe ser igual a 0. De esta manera, se obtiene la ecuación Fokker-Planck generalizada:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right) [D_n(x, t) p(x, t)] \quad (4.134)$$

En literatura de física, usualmente se encuentra esta ecuación truncando la serie en $n = 2$.

4.4.4. Modelo de coeficientes de difusión para activos independiente del tiempo

Considerando los retornos logarítmicos (4.3) como la variable aleatoria de nuestro interés, es posible deducir la distribución de probabilidad de los retornos utilizando la ecuación Fokker-Planck (4.134) al calcular los coeficientes de difusión según la ecuación 4.121.

Considerando el caso tomado por Bachelier [2] y Einstein [12], D_2 es tomado como constante, $D_2 = D = k_B T / \zeta$, como mencionado en la ecuación 4.125 y $D_1 = v_d$ es una velocidad de deriva constante. Por otro lado, si se escoge que D_1 sea independiente del tiempo, pero se le permite una dependencia temporal, $D_1 = D_1(x)$, se puede definir una función potencial $V(x)$ definida por la siguiente ecuación:

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{k_B T}{D} D_1(x) \quad (4.135)$$

La ecuación Fokker-Planck (4.134) se reduce a la ecuación 4.38 y resulta una solución estacionaria igual a la distribución de Boltzmann:

$$p^*(x) = \frac{1}{Z} \exp \left(\frac{-V(x)}{k_B T} \right) = \frac{1}{Z} \exp \left[\int^x \frac{D_1(x')}{D} dx' \right] \quad (4.136)$$

Con las elecciones de coeficientes de difusión anteriores, se obtienen fluctuaciones que se rigen por una distribución gaussiana. En vista a las potenciales debilidades del modelo gaussiano, se plantea una alternativa, donde tanto D_1 como D_2 tienen dependencia de x .

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{Z D_2} \exp \left[\int^x \frac{D_1(x')}{D_2(x')} dx' \right] = \frac{1}{Z} \exp \left[- \left(\ln(D_2(x)) - \int^x \frac{D_1(x')}{D_2(x')} dx' \right) \right] \\
p(x) &= \exp(-W(x))/Z \\
W(x) &= \ln(D_2(x)) - \int^x \frac{D_1(x')}{D_2(x')} dx'
\end{aligned}
\tag{4.137}$$

Para proceder, es necesario conocer las formas específicas de D_1 y D_2 . Según los resultados empíricos de Queirós [26] y Richmond [27], el coeficiente D_1 tiene forma lineal y el coeficiente D_2 tiene forma cuadrática, como lo muestran las figuras 4.1 y 4.2. Estas fueron calculadas utilizando datos del Dow Jones Industrial Average de 1993 a 2012, en escala de minutos:

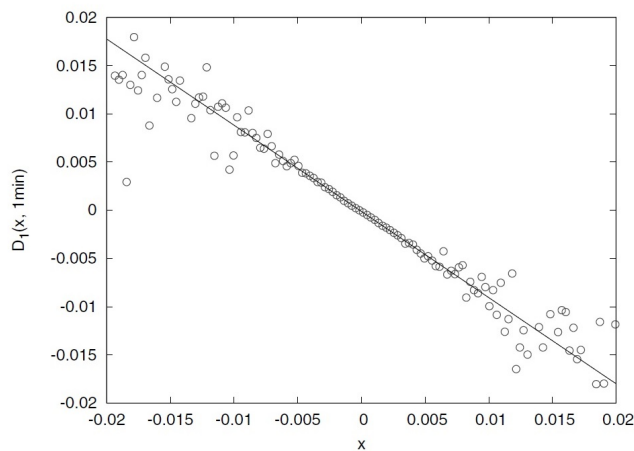


Figura 4.1: Coeficiente de difusión de primer orden [27]

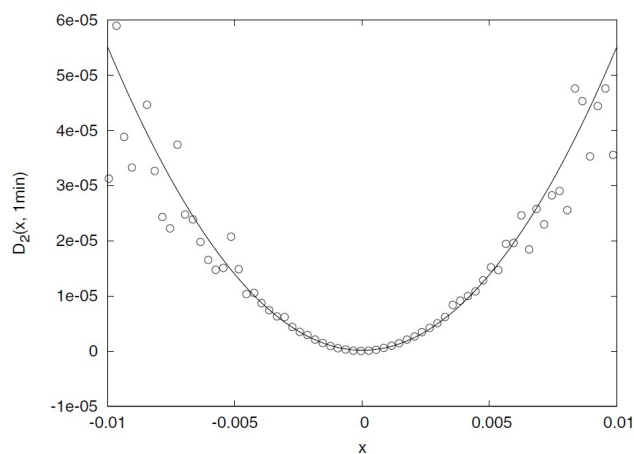


Figura 4.2: Coeficiente de difusión de segundo orden [27]

Según este argumento y tomando κ como constante, se plantea:

$$D_1(x) = -\kappa \frac{dD_2}{dx}
\tag{4.138}$$

La función $W(x)$ y la distribución de probabilidad se vuelven:

$$\begin{aligned} W(x) &= (1 + \kappa) \ln D_2(x) \\ p(x) &= \frac{1}{Z} \exp[-(1 + \kappa) \ln(D_2(x))] = \frac{1}{Z[D_2(x)]^{1+\kappa}} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Suponiendo que el coeficiente D_2 es simétrico verticalmente, que D_1 pasa por el origen y tomando D y C como constantes, se puede definir:

$$\begin{aligned} D_1(x) &= -2\kappa DCx \\ D_2(x) &= D(1 + Cx^2) \end{aligned} \quad (4.140)$$

Usando estas expresiones y ajustando la posición de distribución por su valor promedio μ , la distribución de probabilidad se reduce a:

$$p(x) = \frac{1}{Z[1 + C(x - \mu)^2]^{1+\kappa}} \quad (4.141)$$

Correlaciones temporales

Anteriormente, se había determinado que la evolución temporal del valor esperado de una función arbitraria $M(x, t)$, de la variable aleatoria x , puede ser determinada por los coeficientes de difusión, como se muestra en la ecuación 4.129.

A continuación, por simplicidad, se tomará t como el intervalo de tiempo, al que antes se denotaba como δt . Escogiendo $M = x$ y considerando solamente los primeros 2 coeficientes de difusión, se obtiene de la ecuación 4.129:

$$\frac{d\langle x \rangle_{x(t=0)=x_0}}{dt} = \langle D_1(x, t) \rangle \quad (4.142)$$

Utilizando la forma para D_1 en la expresión 4.140, se obtiene:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = -2\kappa DC \langle x \rangle \implies \langle x(t) \rangle = x_0 e^{-2\kappa DCt} \quad (4.143)$$

Es importante notar que $\langle x(t) \rangle$ representa la función de auto-correlación sin normalizar, como definida en la ecuación 4.10:

$$G(t) = \langle x(0)x(0+t) \rangle = x_0 \langle x(t) \rangle_{x(t=0)=x_0} \quad (4.144)$$

La función de auto-correlación normalizada está dada por $R(t) = \langle x(t) \rangle / x_0$:

$$R(t) = e^{-2\kappa DCt} \quad (4.145)$$

Este resultado implica que el modelo predice que las correlaciones de los retornos logarítmicos decaen exponencialmente con el tiempo. La constante de decaimiento está dada por $2\kappa DC$ y el período de decaimiento por $1/2\kappa DC$.

Escogiendo $M = x^2$, se obtiene de la ecuación 4.129:

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = s\langle xD_1(x, t) \rangle + 2\langle D_2(x, t) \rangle \quad (4.146)$$

Utilizando la forma para D_1 y D_2 en la expresión 4.140, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= -4\kappa DC\langle x^2 \rangle + 2D\langle 1 + Cx^2 \rangle = -2DC(2\kappa - 1)\langle x^2 \rangle + 2D \\ \Rightarrow \langle x^2(t) \rangle &= \left(x_o^2 - \frac{1}{C(2\kappa - 1)} \right) \exp[-2DC(2\kappa - 1)t] + \frac{1}{C(2\kappa - 1)} \end{aligned} \quad (4.147)$$

Este resultado implica que el modelo predice que las correlaciones cuadradas decaen de manera exponencial, aunque más lentamente que las correlaciones lineales. Utilizando las expresiones 4.145 y 4.147 e insertándolas en la ecuación 4.17, se obtiene una expresión para el decaimiento de las correlaciones en la volatilidad:

$$R_\sigma(t) = \sqrt{\left(x_o^2 - \frac{1}{C(2\kappa - 1)} \right) \exp[-2DC(2\kappa - 1)t] + \frac{1}{C(2\kappa - 1)} - \exp[-4\kappa DCt]} \quad (4.148)$$

4.4.5. Modelo de coeficientes de difusión para activos con dependencia temporal

Los resultados empíricos de Richmond [27] indican que, al considerar el intervalo de tiempo de muestreo de los datos t , la siguiente distribución describe los datos correctamente:

$$p(x, t) = \frac{1}{Z(t)} \left[1 + \frac{\beta(t)x^2}{\alpha} \right]^{-\alpha} \quad (4.149)$$

Las funciones $Z(t)$ y $\beta(t)$ capturan la dependencia temporal de $p(x, t)$ y α es un parámetro que debe ser mayor a $3/2$. En el límite $\beta x^2/\alpha \rightarrow 0$, esta distribución tiende a una distribución normal.

La función de partición $Z(t)$, o bien, el factor de normalización y la función $\beta(t)$ están relacionados por la siguiente expresión:

$$Z(t) = \int \left[1 + \frac{\beta(t)x^2}{\alpha} \right]^{-\alpha} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(t)}} B\left(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right) \quad (4.150)$$

$B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ es la función Beta estándar o la integral de Euler de primer tipo.

La varianza de la distribución está dada por:

$$\sigma^2(t) = \begin{cases} \infty, & \text{si } \alpha < 3/2 \\ \alpha/[(2\alpha - 3)\beta(t)], & \text{si } \alpha > 3/2 \end{cases} \quad (4.151)$$

De manera semejante que en el desarrollo del modelo independiente del tiempo, se supone que D_1 es lineal y D_2 tiene forma cuadrática:

$$\begin{aligned}
D_1(x, t) &= -b(t)x \\
D_2(x, t) &= D(t) \left(1 + \frac{\beta(t)x^2}{\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{4.152}$$

Las funciones $b(t)$ y $D(t)$ están por ser determinadas. Luego se supone que:

$$D_1(x, t) = -\kappa \frac{d}{dx} D_2(x, t) \tag{4.153}$$

Lo que resulta en:

$$b(t) = 2\kappa \frac{D(t)\beta(t)}{\alpha} \tag{4.154}$$

Los resultados empíricos resultan en $\kappa = 1$. Al sustituir las expresiones para D_1 y D_2 en la ecuación Fokker-Planck (4.134), se obtiene:

$$\frac{1}{Z(t)} \frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{1}{2\beta(t)} \frac{d\beta(t)}{dt} = -2(\kappa + (1 - \alpha)) \frac{D(t)\beta(t)}{\alpha} \tag{4.155}$$

Para continuar, se supone que $D(t)$ es dependiente solamente de $\beta(t)$ elevado a alguna potencia γ :

$$D(t) = D(\beta(t)) = D_0 \beta^\gamma(t) \tag{4.156}$$

Donde D_0 es una constante, lo que resulta en:

$$b(t) = \frac{2\kappa D_0}{\alpha} \beta^{\gamma+1}(t) \tag{4.157}$$

El supuesto anterior es fundamentado por resultados empíricos. Para la función $\beta(t)$, esto resulta en:

$$\beta(t)^{-(\gamma+1)} = \beta_0^{-(\gamma+1)} + \frac{4D_0(\alpha - 1 - \kappa)}{\alpha} (\gamma + 1)t \tag{4.158}$$

El comportamiento general de las funciones está dado por:

$$\beta(t) \propto t^{-\frac{1}{\gamma+1}}, D(t) \propto t^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}, b(t) \propto t^{-1} \tag{4.159}$$

Para su análisis con datos empíricos, Richmond [27] utilizó varios intervalos de tiempo de 1 a 100 minutos. Para intervalos de tiempo más grandes, las funciones descritas anteriormente no se adecuaban correctamente a los datos, ya que los mismos presentan mucho ruido.

4.5. Pruebas estadísticas

4.5.1. Calidad de regresiones

Coefficiente de determinación

En estadística, el coeficiente de determinación, normalmente denotado como R^2 , es un estadístico que mide qué tan bien los resultados empíricos son representados por un modelo dado [6]. A continuación, se detalla cómo se calcula este coeficiente.

Se considera una serie de n valores empíricos y_i y una serie de valores correspondientes predichos por el modelo f_i .

Se define \bar{y} como la media de los valores empíricos:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.160)$$

La suma total de los cuadrados es la diferencia entre cada y_i con su media, elevada al cuadrado, está dada por:

$$S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.161)$$

Se definen los residuos como la diferencia entre cada valor observado y_i con su valor predicho por el modelo f_i :

$$res_i = y_i - f_i \quad (4.162)$$

Según la definición de los residuos, se plantea la suma residual cuadrada:

$$S_r = \sum_{i=1}^n res_i^2 \quad (4.163)$$

Con las expresiones anteriores, se define el coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = 1 - \frac{S_r}{S_t} \quad (4.164)$$

En el caso que los datos empíricos se ajustan perfectamente al modelo, cada residuo es igual a 0: $res_i = 0$; por lo que la suma residual cuadrada es igual a 0: $S_r = 0$. Esto implica que $R^2 = 1$, este es el mejor escenario posible. Un modelo que predice el valor promedio de los datos empíricos solamente: $f_i = \bar{y}$ para cada y_i , tendrá un $R^2 = 0$. Un ajuste de menor calidad a esto tendrá un R^2 negativo.

4.5.2. Estacionariedad de series de tiempo

Prueba Dickey-Fuller aumentada

La prueba Dickey-Fuller Aumentada sirve para determinar la presencia de una raíz unitaria en una serie de tiempo. La presencia de una raíz unitaria implica que la serie de tiempo no es estacionaria. Un proceso estacionario es aquél para el cual su distribución de probabilidad no cambia con el paso del tiempo. Un proceso puede ser no estacionario pero estacionario con tendencia, lo que significa que el valor del proceso tenderá a un valor promedio determinista que marca la tendencia general del proceso. Un proceso no estacionario no necesariamente tiene tendencia. Los cambios en un proceso no estacionario pueden tener un efecto permanente en el proceso, que no necesariamente decaerán como se espera en un proceso estacionario. La varianza de un proceso no estacionario depende del tiempo y puede divergir al infinito [28].

Considerando una serie de tiempo de la siguiente forma:

$$x_t = c_t + \beta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta x_{t-i} + e_t \quad (4.165)$$

El término c_t es una función arbitraria determinista del índice temporal t . El término e_t representa un error. El estadístico de la prueba está definido de la siguiente manera:

$$ADF = \frac{\hat{\beta} - 1}{\sigma_{\hat{\beta}}} \quad (4.166)$$

El término $\hat{\beta}$ representa el valor estimado de β que minimiza los residuos cuadrados, como son definidos en la ecuación 4.162 y $\sigma_{\hat{\beta}}$ es su desviación estándar. La hipótesis nula de la prueba es que existe una raíz unitaria, definida por $\beta = 1$, la hipótesis alternativa es que no existe dicha raíz, $\beta < 1$. Entre más negativo es el estadístico ADF , más fuerte es el argumento para rechazar la hipótesis nula. El estadístico puede ser comparado a un valor crítico y de acuerdo a un nivel de significancia, se puede aceptar o rechazar la hipótesis nula [28].

4.5.3. Verosimilitud de datos a distribuciones de probabilidad

Los conceptos expuestos en esta sub-sección están basados en la teoría expuesta por Burnham en *Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection* [1] y PennState [24].

Criterio de información bayesiano

El criterio de información bayesiano (BIC), también conocido como criterio de información de Schwarz, es un criterio de selección de modelo. Se basa principalmente en la probabilidad de datos observados dado un modelo, probabilidad que está cuantificada en la función de verosimilitud y la cantidad de parámetros del modelo. Entre mayor es la función de verosimilitud, mayor será la calidad del modelo. Por otro lado, el criterio impone una penalización por la cantidad de parámetros del modelo. Esto se debe a que un modelo con una mayor cantidad de parámetros puede aumentar la verosimilitud del modelo, pero puede resultar en un sobreajuste. Un modelo sobreajustado se adapta bien a un conjunto particular de datos, pero carece de valor predictivo al considerar datos adicionales.

Considerando una distribución de probabilidad f , descrita completamente por un conjunto de k parámetros θ y un conjunto de n observaciones independientes x_i . La posibilidad, o bien verosimilitud de las observaciones en la distribución dada está descrita por la función de verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (4.167)$$

Según esta función, se puede definir la verosimilitud logarítmica:

$$\ell(\theta) = \log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta) \quad (4.168)$$

En este punto es importante notar que tanto el BIC como el AIC (descrito más adelante) están definidos usando el logaritmo de base e en la función de verosimilitud, es decir, un logaritmo natural. De manera que:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta) \quad (4.169)$$

Utilizando las expresiones anteriores, se define el BIC:

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\mathcal{L}) = k \ln(n) - 2\ell \quad (4.170)$$

Al comparar los valores de BIC para distintos modelos, aquel que tenga el BIC más negativo es escogido como el modelo óptimo.

Criterio de información de Akaike

El criterio de información de Akaike (AIC) es similar al BIC en su fórmula matemática. Para un modelo definido por k parámetros y considerando la función de verosimilitud (4.167) o verosimilitud logarítmica (4.169), el AIC se define como:

$$AIC = 2k - 2 \ln(\mathcal{L}) = 2k - 2\ell \quad (4.171)$$

Al igual que con el BIC, al comparar los valores de AIC para distintos modelos, el que tiene el AIC más negativo es escogido como el modelo óptimo.

Para muestras pequeñas, es posible que el AIC indique una preferencia para modelos sobreajustados. Para abordar la posibilidad, se considera el AICc como una corrección para muestras pequeñas. La fórmula exacta depende del modelo estadístico exacto. Suponiendo que el mismo es de una sola variable, es lineal en sus parámetros y tiene residuales distribuidos normalmente, la fórmula es:

$$AICc = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1} \quad (4.172)$$

Se debe notar que en el límite $n \rightarrow \infty$, AICc converge a AIC.

Comparación entre BIC y AIC

En su formulación, el BIC busca encontrar el modelo verdadero de una colección de modelos dada. Por otro lado, el AIC busca encontrar el mejor modelo, suponiendo que el modelo real no existe. El BIC tiene una penalización relativamente mayor por la cantidad de parámetros en el modelo. Esto resulta en que el BIC puede indicar que un modelo subajustado es una mejor alternativa que un modelo sobreajustado. Lo contrario puede pasar para el AIC. El BIC se vuelve más tolerante de parámetros extra para muestras pequeñas, pero menos tolerante para muestras grandes. El AIC no considera directamente el tamaño de la muestra y debe ser ajustado para muestras pequeñas.

5.1. Antecedentes

En 1905, Albert Einstein publicó una posible explicación para el movimiento browniano en su artículo *Sobre el movimiento de partículas suspendidas en líquidos quietos según lo requerido por la teoría cinética molecular del calor* [12]. En esta publicación, Einstein planteó que el movimiento de las partículas se debía al impacto de las mismas con moléculas del fluido cuyas velocidades están descritas por la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Cinco años antes, Louis Bachelier publicó su tesis de doctorado, *Teoría de la especulación* [2], en la que formuló un análisis matemático de las fluctuaciones de los precios de activos financieros. En esta tesis, Bachelier desarrolló el mismo análisis estadístico que fue utilizado por Einstein para explicar el movimiento browniano. Lamentablemente, su trabajo pasó inadvertido en la comunidad académica por varias décadas.

Bachelier argumentó que las fluctuaciones en los precios en intervalos cortos de tiempo son independientes del precio actual de la acción y además el comportamiento es diferente al pasado. Apoyándose en el Teorema del Límite Central, deduce que el proceso se rige por una distribución normal. El modelo original permitía la posibilidad de precios negativos. Este problema se resuelve si se considera que los precios logarítmicos los que son descritos por dicha distribución. El modelo que corrige esto es conocido como el modelo geométrico Browniano de precios de activos.

Aprovechando la “falta de memoria” del proceso, Bachelier formuló la ecuación Chapman-Kolmogorov y dedujo una conexión a la ecuación de calor. La propiedad de “falta de memoria” fue formalizada por Andrey Markov en su estudio de cadenas de variables aleatorias. Tanto la propiedad anterior como las cadenas llevan el nombre Markov en su honor [20].

El modelo de Einstein para el movimiento Browniano tenía problemas para escalas de tiempo pequeñas. Dado el supuesto que los movimientos de las partículas en distintos intervalos de tiempo son independientes, la velocidad de las partículas tiende a infinito a medida que el intervalo tiende a cero [11].

Fue Norbert Wiener quien logró describir el movimiento Browniano de una manera matemáticamente rigurosa. Su modelo es conocido hoy en día como proceso de Wiener [29]. Su enfoque fue construir una medida de probabilidad en el espacio de funciones reales, continuas y

positivas, tal que los incrementos de valor en la variable de interés a tiempos inconexos son gaussianos [11].

El desarrollo de Wiener construyó el formalismo matemático detrás de un proceso Browniano continuo. Hacía falta una transición a un caso discreto. Fue el riguroso desarrollo teórico de Andrey Kolmogorov el que describe un proceso Browniano de manera discreta [15]. La idea central de su modelo es la introducción de características locales para cada tiempo t y la construcción de funciones de transición al resolver ecuaciones diferenciales que involucran dichas características. El caso planteado por Bachelier tiene como funciones de transición la tasa de deriva y los coeficientes de difusión. Bajo ciertas restricciones en las probabilidades de transición, logró demostrar que estas cumplen la ecuación Fokker-Planck [11].

Los trabajos de Mandelbrot en 1963 [18] y el de Fama en 1965 [13] demostraron que las distribuciones para activos se desvían significativamente de los modelos basados en la distribución normal y proponen las distribuciones de Lévy estables como una alternativa más apropiada para describir datos empíricos. En estudios más recientes, tomando datos empíricos de la década de los 90's, Mantegna y Stanley [19] y Richmond [27] encontraron que las distribuciones de Lévy parecen ser apropiadas para escalas de tiempo pequeñas; pero para tiempos mayores los datos empíricos parecen desviarse de la distribución y existe evidencia para pensar que la distribución empírica no es estable.

El modelo de fluctuaciones gaussianas es fundamental en el modelo de precios de opciones desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes [4] en 1973. Dicho modelo fue refinado el mismo año por Merton [21], al generalizar suposiciones sobre tasas de interés, pagos de dividendos, entre otras variables. En la década de los 90's, un grupo de empresarios junto a Scholes y Merton formaron un fondo de inversión llamado "Long Term Capital Management" (LCTM). Utilizaban estrategias altamente apalancadas y se basaban en varios modelos cuantitativos para encontrar posiciones potencialmente beneficiosas. Sus estrategias funcionaron bien inicialmente. Pocos años después, una serie de crisis económicas en Asia y América Latina causaron que el fondo de inversión colapsara y entrara en bancarrota. Esto se debió en gran parte a que sus modelos subestimaban la posibilidad de eventos extremos, lo que también es una de las principales críticas a los modelos financieros que se basan en distribuciones normales [27].

Richmond [27] propone modelos alternativos basados en coeficientes de difusión generalizados y la ecuación Fokker-Planck. Su modelo que no considera dependencias temporales en la distribución de probabilidad muestra ser apropiado para describir datos empíricos a escalas de tiempo pequeñas, aunque este no logra cuantificar correctamente las correlaciones temporales que existen en la volatilidad de los datos. También plantea un modelo que sí considera dependencias temporales y logra describir de mejor manera las correlaciones previamente mencionadas a escalas de tiempo pequeñas.

5.2. Alcance

En este proyecto, se logró construir una herramienta electrónica que toma series de tiempo de precios de activos financieros y contrasta los retornos logarítmicos contra la distribución normal, la distribución de Lévy Estable y la distribución generada por los coeficientes de difusión generalizados junto a la ecuación Fokker-Planck. Para cada uno de estos tres casos se calcula el criterio de información bayesiano (BIC) y el criterio de información de Akaike (AIC) para determinar cuál de los modelos anteriores es el que mejor describe el comportamiento de los retornos logarítmicos. Las tablas 5.1 y 5.2 muestran el nombre, ticker y una descripción de todos los índices y activos que se analizaron, sin ningún orden en particular. La información de las tablas es basada en información de Yahoo Finance [14].

Tabla 5.1: Listado y descripción de índices

Nombre	Ticker	Descripción
Dow Jones Industrial Average	INDU	El Dow Jones Industrial Average es un promedio ponderado del precio de 30 acciones de primera clase que generalmente son líderes en su industria, las ponderaciones no están basadas en la capitalización de mercado de cada componente.
Standard & Poor's 500	SPX	El S&P 500 es ampliamente considerado como el mejor indicador único de renta variable estadounidense de gran capitalización y sirve de base para una amplia gama de productos de inversión. El índice incluye 500 empresas líderes y captura aproximadamente el 80 % de cobertura de capitalización de mercado disponible.
NASDAQ Composite Index	CCMP	El índice compuesto NASDAQ es un índice de acciones ponderado por capitalización de todos los valores transados en la bolsa de valores NASDAQ.
Russell 3000 Index	RAY	El índice Russell 3000 está compuesto por las 3000 compañías estadounidenses más grandes según su capitalización de mercado. Esta cartera de valores representa aproximadamente el 98 % del mercado de valores de EE. UU. invertible.
Russell 2000 Index	RTY	El índice Russell 2000 está compuesto por las 2000 compañías más pequeñas en el índice Russell 3000, que representa aproximadamente el 8 % de la capitalización de mercado total de Russell 3000.
FTSE 100 Index	UKX	El índice FTSE 100 es un índice ponderado por capitalización de las 100 empresas más capitalizadas que cotizan en la Bolsa de Londres. Las acciones utilizan una ponderación de invertibilidad en el cálculo del índice.
FTSE All-Share Index	ASX	El índice FTSE All-Share es un índice ponderado por capitalización que comprende el 98 % de las empresas transadas en el Reino Unido
EURO STOXX 50	SX5E	El índice EURO STOXX 50, el principal índice de referencia de Europa para la zona euro, ofrece una representación de referencia de los líderes por sectores en la región. Cubre 50 acciones de 11 países de la zona euro.
STOXX Europe 600 Index	SXXP	El índice STOXX Europe 600 tiene un número fijo de 600 componentes que representan compañías de capitalización grandes, medianas y pequeñas entre 17 países europeos, que cubren aproximadamente el 90 % de la capitalización bursátil del mercado europeo (no limitado a la Eurozona). Su composición se revisa cuatro veces al año, en marzo, junio, septiembre y diciembre.
S&P Latin America 40	SPLAC	El S&P Latin America 40 incluye valores altamente líquidos de los principales sectores económicos de los mercados de renta variable mexicanos y sudamericanos. Empresas de Brasil, Chile, Colombia, México y Perú están representadas en este índice. Representando aproximadamente el 70 % de la capitalización de mercado de cada país, este índice proporciona cobertura de los componentes líquidos de gran capitalización de varios de países en América Latina.
Nikkei 225	NKY	El Nikkei-225 Stock Average es un promedio ponderado por el precio de 225 compañías japonesas mejor calificadas que figuran en la primera sección de la Bolsa de Tokio.

Nombre	Ticker	Descripción
Shanghai Stock Exchange Composite Index	SHCOMP	El índice compuesto de la Bolsa de Shanghai es un índice ponderado por capitalización que rastrea el rendimiento diario de los precios de todas las acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Shanghai.
Hong Kong Hang Seng Index	HSI	El índice Hang Seng está ponderado por la capitalización de una selección de empresas de la Bolsa de Valores de Hong Kong. Los componentes del índice se dividen en cuatro subíndices: comercio e industria, finanzas, servicios públicos y propiedades.

Tabla 5.2: Listado y descripción de acciones

Nombre	Ticker	Descripción
Amazon.com, Inc.	AMZN	Amazon.com, Inc. se dedica a la venta minorista de productos de consumo y suscripciones en América del norte e internacionalmente. La compañía opera a través de tres segmentos: América del Norte, Internacional y Amazon Web Services (AWS).
Microsoft Corporation	MSFT	Microsoft Corporation desarrolla, otorga licencias y admite software, servicios, dispositivos y soluciones en todo el mundo. Vende sus productos a través de distribuidores y revendedores, directamente a través de mercados digitales, tiendas en línea y tiendas minoristas.
Apple Inc.	AAPL	Apple Inc. diseña, fabrica y comercializa teléfonos inteligentes, computadoras personales, tabletas, dispositivos portátiles y accesorios en todo el mundo. También vende varios servicios relacionados.
Alphabet Inc. Class A	GOOGL	Alphabet Inc. ofrece servicios de publicidad en línea en los Estados Unidos, Europa, Medio Oriente, África, Asia-Pacífico, Canadá y América Latina. Ofrece servicios de publicidad de marca y rendimiento. La compañía opera a través de Google y otros segmentos.
Facebook, Inc. Common Stock	FB	Facebook, Inc. desarrolla productos que permiten a las personas conectarse y compartir con amigos y familiares a través de dispositivos móviles, computadoras personales, auriculares de realidad virtual y dispositivos domésticos en todo el mundo.
Netflix Inc.	NFLX	Netflix, Inc. ofrece un servicio de entretenimiento de transmisión por suscripción. Ofrece series de televisión, documentales y largometrajes en varios géneros e idiomas. La compañía ofrece a los miembros la capacidad de recibir contenido a través de internet a una variedad de dispositivos electrónicos.
Berkshire Hathaway Inc. Class A	BRK.A	Berkshire Hathaway Inc., a través de sus filiales, se dedica a negocios de seguros, transporte de mercancías por ferrocarril y servicios públicos. Brinda seguros de propiedad, accidentes, vida y salud. También opera sistemas ferroviarios en América del Norte. La compañía también genera, transmite, almacena y distribuye electricidad de diversas fuentes. Además, ofrece servicios de corretaje de bienes raíces y alquila equipos de transporte y muebles. También fabrica y comercializa una diversidad de otros bienes de consumo.

Nombre	Ticker	Descripción
Berkshire Hathaway Inc. Class B	BRK.B	Acciones clase B de Berkshire Hathaway Inc., dan considerablemente menos derechos de voto a los tenedores, comparado a los tenedores de las acciones clase A, dado el precio menor. Por este motivo, estas acciones son transadas con mayor frecuencia que las clase A.
Visa Inc.	V	Visa Inc. opera como una compañía de tecnología de pagos en todo el mundo. La compañía facilita el comercio a través de la transferencia de valor e información entre consumidores, comerciantes, instituciones financieras, empresas, socios estratégicos y entidades gubernamentales. Opera VisaNet, una red de procesamiento que permite la autorización, compensación y liquidación de transacciones de pago.
JPMorgan Chase & Co.	JPM	JPMorgan Chase & Co. opera como una compañía de servicios financieros en todo el mundo. Opera en cuatro segmentos: banca de consumo y comunitaria, banca corporativa y de inversión, banca comercial y gestión de activos y patrimonios. La compañía también ofrece servicios bancarios por cajero automático, en línea, móviles y telefónicos.
Exxon Mobil Corporation	XOM	Exxon Mobil Corporation explora y produce petróleo crudo y gas natural en los Estados Unidos, América del Norte, Europa, África, Asia y Oceanía. La compañía también participa en la fabricación, el comercio, el transporte y la venta de petróleo crudo, productos derivados del petróleo y otros productos especializados. También fabrica y comercializa productos petroquímicos.
Johnson & Johnson	JNJ	Johnson & Johnson investiga y desarrolla, fabrica y vende diversos productos en el campo de la atención médica en todo el mundo. Opera en tres segmentos: consumo, farmacéuticos y dispositivos médicos. La compañía comercializa sus productos al público en general, a puntos de venta y distribuidores y también los distribuye directamente a mayoristas, hospitales y profesionales de la salud para el uso de medicamentos recetados.
Wells Fargo & Company	WFC	Wells Fargo & Company, una compañía de servicios financieros diversificada, ofrece productos y servicios bancarios, de inversión, hipotecarios, de financiamiento de consumo y comercial a individuos, empresas e instituciones en los Estados Unidos e internacionalmente. Opera en tres segmentos: Banca Comunitaria, Banca Mayorista y Gestión de Patrimonios e Inversiones. La compañía también ofrece servicios de corretaje y banca por internet.
Alibaba Group Holding Limited	BABA	Alibaba Group Holding Limited, a través de sus filiales, ofrece negocios de comercio en línea y móvil en la República Popular de China e internacionalmente. Opera en cuatro segmentos: comercio central, computación en la nube, medios digitales y entretenimiento, iniciativas de innovación y otros.
General Electric Company	GE	General Electric Company opera como una empresa industrial de alta tecnología en los Estados Unidos, Europa, Asia, América, Medio Oriente y África. Opera a través de los segmentos de Energía, Energía Renovable, Aviación, Salud y Capital.

Nombre	Ticker	Descripción
International Business Machines Corporation	IBM	International Business Machines Corporation opera como una compañía integrada de soluciones y servicios en todo el mundo. Su segmento de Cloud & Cognitive Software ofrece software para soluciones en salud, servicios financieros y áreas de aplicación de Internet de las cosas. También ofrece soluciones en almacenamiento y sistema de control de información del cliente, y software de análisis e integración para soportar las cargas de trabajo locales de misión crítica del cliente en las industrias bancarias, de aerolíneas y minoristas.
The Walt Disney Company	DIS	The Walt Disney Company, junto con sus subsidiarias, opera como una compañía de entretenimiento en todo el mundo. Opera en un sector de redes de medios, un sector de parques y productos, un sector de entretenimiento de estudio y un sector de entretenimiento directo al consumidor.
Walmart Inc.	WMT	Walmart Inc. se dedica a las operaciones minoristas y mayoristas en varios formatos en todo el mundo. La compañía opera a través de tres segmentos: Walmart U.S., Walmart International y Sam's Club. Opera supermercados, supermercados, hipermercados, clubes de almacenes, tiendas de efectivo y carry, tiendas de descuento, farmacias y tiendas de conveniencia, clubes de almacenes solo para miembros, sitios web de comercio electrónico y aplicaciones de comercio móvil.
Royal Dutch Shell plc Class A	RDSA	Royal Dutch Shell plc opera como una compañía energética y petroquímica en todo el mundo. Explora y extrae petróleo crudo, gas natural y líquidos de gas natural; comercializa y transporta petróleo y gas; produce combustibles de gas a líquidos y otros productos; además opera la infraestructura necesaria para entregar gas al mercado.
Royal Dutch Shell plc Class B	RDSB	Acciones clase B de Royal Dutch Shell. Los accionistas de RDSA no tienen voto, pero tienen acceso inmediato a los activos en caso de quiebra de la empresa, mientras que los accionistas de RDSB tienen poder de voto pero tienen que esperar después de los accionistas de RDSB en el escenario de quiebra.
Chevron Corporation	CVX	Chevron Corporation, a través de sus subsidiarias, se dedica a operaciones integradas de energía, productos químicos y petróleo en todo el mundo. La compañía está involucrada en la exploración, desarrollo y producción de petróleo crudo y gas natural, transporte de petróleo crudo a través de tuberías; y transporte, almacenamiento y comercialización de gas natural, así como también opera una planta de gas a líquidos. También están involucrados en la refinación, comercialización y transporte de petróleo crudo en productos derivados del petróleo.
Intel Corporation	INTC	Intel Corporation ofrece soluciones de informática, redes, almacenamiento de datos y comunicación en todo el mundo. Opera a través del Grupo de centros de datos, el Grupo de Internet de las cosas, el Grupo de soluciones de memoria no volátil, el Grupo de soluciones programables, el Grupo de informática del cliente y otros segmentos.

Nombre	Ticker	Descripción
Advances Micro Devi- ces	AMD	Advanced Micro Devices, Inc. opera como una compañía de semiconductores en todo el mundo. La compañía opera en dos segmentos, Computation and Graphics y Enterprise, Embedded and Semi-Custom. Sus productos incluyen microprocesadores como unidad de procesamiento acelerado, conjuntos de chips, unidades de procesamiento de gráficos (GPU) discretas e integradas, centro de datos y GPU profesionales, servicios de desarrollo, servidores y procesadores integrados, productos semi-personalizados de sistema en chip (SoC), servicios de desarrollo y tecnología para consolas de juegos.
NVIDIA Corporation	NVDA	NVIDIA Corporation opera como una empresa de computación visual en todo el mundo. Opera en dos segmentos, GPU y procesador Tegra. El segmento de GPU ofrece procesadores, que incluyen GeForce para juegos de PC y PC convencionales. El segmento de procesadores Tegra proporciona procesadores que comprenden dispositivos y servicios SHIELD diseñados para aprovechar el poder de la nube móvil para revolucionar el entretenimiento doméstico, la inteligencia artificial y los juegos.

El primer paso en este estudio fue obtener series de tiempo de precios financieros para luego analizarlas. Dichas series de tiempo fueron obtenidas por medio de la Terminal Bloomberg [16] ubicada en la biblioteca de la Universidad del Valle de Guatemala. Esta plataforma limita la cantidad de datos que un usuario puede solicitar, dependiendo de la frecuencia de muestreo de la que se tomen los datos. Para datos tomados a una frecuencia menor a un día, el intervalo de tiempo disponible se ve severamente restringido.

Por el motivo anterior, se decidió tomar datos a una frecuencia diaria. Más adelante en el estudio se variaría la frecuencia de muestreo para analizar los datos a frecuencias mayores. Existen otros proveedores de precios financieros que ofrecen datos a altas frecuencias sin restricciones, lamentablemente estos servicios trabajan bajo licencias que están pensadas para instituciones financieras formales y son de elevado costo.

Para lograr cumplir los objetivos de este proyecto es necesario construir una plataforma que permita analizar los precios. Para este fin, se decidió desarrollar un código en el lenguaje de programación Python. Se escogieron tres modelos contra los cuales se contrastarían los datos: el modelo de la distribución normal, el de la distribución estable de Lévy y la distribución generada por los coeficientes de difusión generalizados junto a la ecuación Fokker-Planck.

Los códigos que se utilizaron están incluidos en los anexos.

6.1. Funciones generales

Dada una serie de tiempo de precios de un activo, es posible calcular una serie de tiempo de retornos logarítmicos según la expresión 4.3. La volatilidad de la muestra o bien, la instantánea se pueden calcular según las expresiones 4.8 y 4.5 respectivamente. La función de auto-correlación normalizada, tanto para series de retornos y volatilidad instantánea, se puede calcular según la expresión 4.11, pero por motivos de eficiencia computacional, se utilizó el paquete NumPy [10] para calcularla.

Para evaluar la estacionariedad de los retornos logarítmicos, se utilizó la prueba Dickey Fuller Aumentada del paquete statsmodels [25]. Los retornos se compararon con un modelo estacionario sin tendencia. Se utilizó un nivel de confianza de 95 % para determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula que dice que hay una raíz unitaria y por lo tanto no hay estacionariedad, por lo que si el p-value es menor a 0.05, el proceso se determina estacionario.

Para cada uno de los modelos estudiados, se calculó el criterio de información bayesiano (BIC) y el criterio de información de Akaike (AIC) para determinar cuál de los modelos anteriores es el que mejor describe el comportamiento de los retornos logarítmicos. Estos dos criterios se programaron según las expresiones 4.170 y 4.171 respectivamente.

6.2. Modelo gaussiano

Para definir la distribución teórica, es necesario conocer la media y la desviación estándar de los retornos, los cuales se pueden calcular directamente de los datos utilizando el paquete NumPy [10].

Las referencias bibliográficas indican que las principales debilidades del modelo gaussiano son que se subestima la probabilidad de obtener retornos grandes y que el modelo no considera las correlaciones temporales que son evidentes en los datos empíricos. Para observar estas aseveraciones, se observó la distribución teórica junto a la empírica en una escala logarítmica. En esta escala es posible observar más fácilmente las diferencias para valores extremos.

6.3. Modelo estable de Lévy

Para modelar los datos según esta distribución, se utilizó el paquete pylevy [22]. Este paquete trabaja por medio de interpolaciones de valores de tablas, dado que la computación directa de la distribución involucra integraciones numéricas complejas. La interpolación se basa en el método de máxima verosimilitud. Este método maximiza la probabilidad de que los datos observados provienen de la distribución.

6.4. Modelo de coeficientes de difusión

Este método comienza por calcular los coeficientes de difusión generalizados. En este estudio se consideran solamente los primeros dos coeficientes de difusión y se supone que los mismos tienen una dependencia espacial. Como se observa en la expresión 4.121 para los coeficientes de difusión, se debe calcular la diferencia a pares de retornos a lo largo del tiempo, luego elevar a la potencia correspondiente. Este cálculo luego se agrupa de acuerdo al valor del retorno inicial.

La teoría de Richmond *et al* [27] y Queirós [26] indican que el comportamiento esperado de D_1 es lineal y el de D_2 es cuadrático, como se puede observar en las figuras 4.1 y 4.2. Para realizar la regresión de los coeficientes, se utilizó el paquete lmfit. Este paquete permite realizar la técnica de mínimos cuadrados no lineales para el ajuste de curvas utilizando el algoritmo Levenberg-Marquardt [23].

Para que se cumpla la forma teórica de la distribución, los coeficientes deben ser simétricos respecto al eje vertical. Por este motivo, antes de realizar la regresión, se ajustó la serie de retornos logarítmicos para que tuviera una media igual a 0. Al mismo tiempo, el paquete lmfit permite restringir los valores que pueden tomar los parámetros de la regresión. De este modo se aseguró la simetría de los coeficientes de difusión.

De esta manera se obtienen los parámetros de la función lineal que describe a D_1 y la cuadrática que describe a D_2 , así como la incertidumbre de estos parámetros. Con estas incertidumbres, se puede calcular la propagación del error en todos los parámetros relevantes para esta distribución. Además, se calcula el coeficiente de determinación para evaluar la calidad del ajuste. Según los coeficientes de las regresiones y reajustando los datos a su media original, se puede plantear la distribución de probabilidad tal y cómo se describe en la expresión 4.141.

A continuación, se estudia la forma de la función de auto-correlación tanto para retornos lineales como para la volatilidad. El modelo presente propone que la forma de las mismas está dada por las expresiones 4.145 y 4.148 respectivamente. Para ambos casos, se evalúa la forma teórica con el coeficiente de determinación 4.164.

7.1. Gráficos representativos

En esta sección se muestra una selección de gráficos que representan los objetos más relevantes de este estudio. Para cada activo e índice (37 en total), se generó una gráfica de precio, retorno logarítmico y volatilidad instantánea respecto al tiempo. También se generaron gráficas para las funciones de auto-correlación para los retornos y la volatilidad, para esta última se generaron dos, una en escala normal y otra en escala logarítmica en ambos ejes. Adicionalmente se generaron gráficas de las tres distribuciones de densidad de probabilidad junto a un histograma de datos empíricos, tanto en escala normal como en escala logarítmica; también se agregó una gráfica de la distribución de probabilidad acumulada. Finalmente se incluyen gráficas de ambos coeficientes de difusión, incluyendo los valores empíricos y la regresión correspondiente.

7.1.1. Gráficos a escala diaria: Amazon.com, Inc.

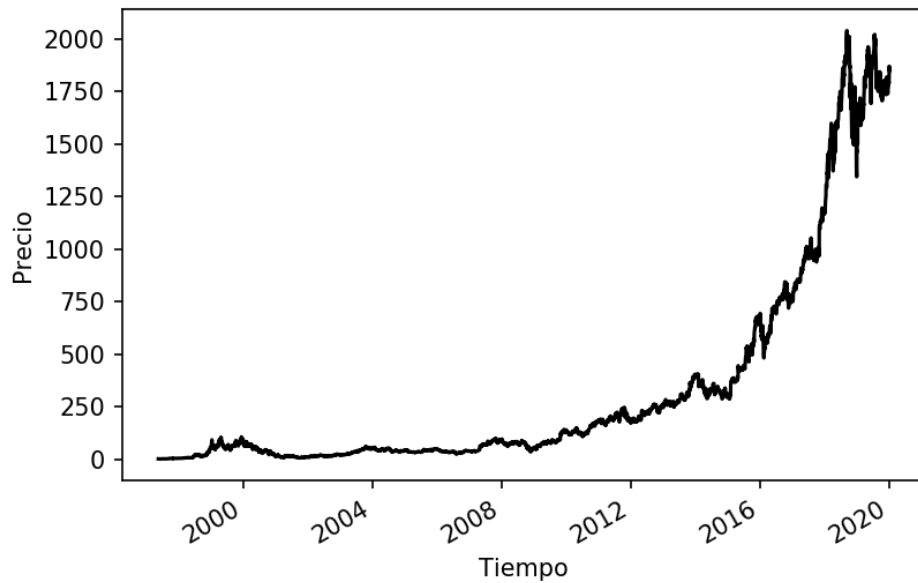


Figura 7.1: Precio diario AMZN

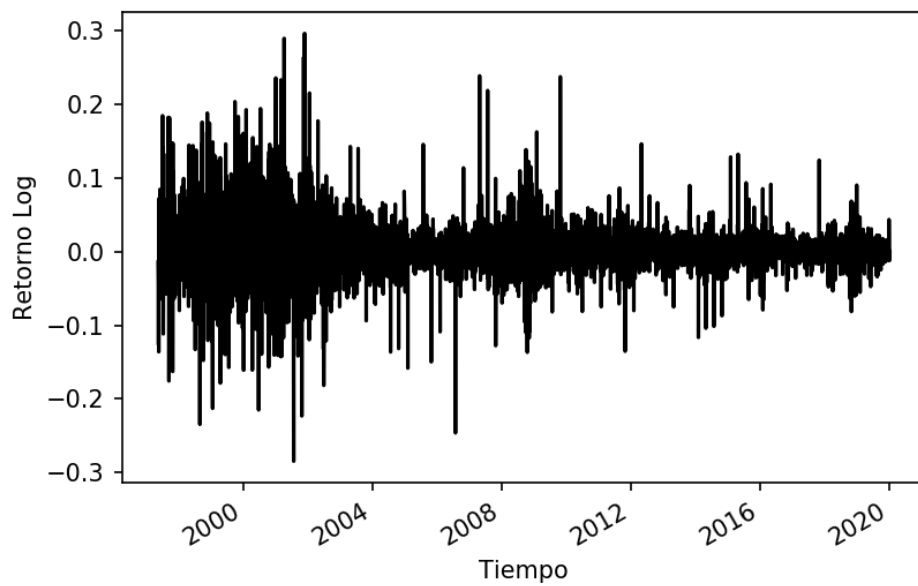


Figura 7.2: Retornos logarítmicos diarios AMZN

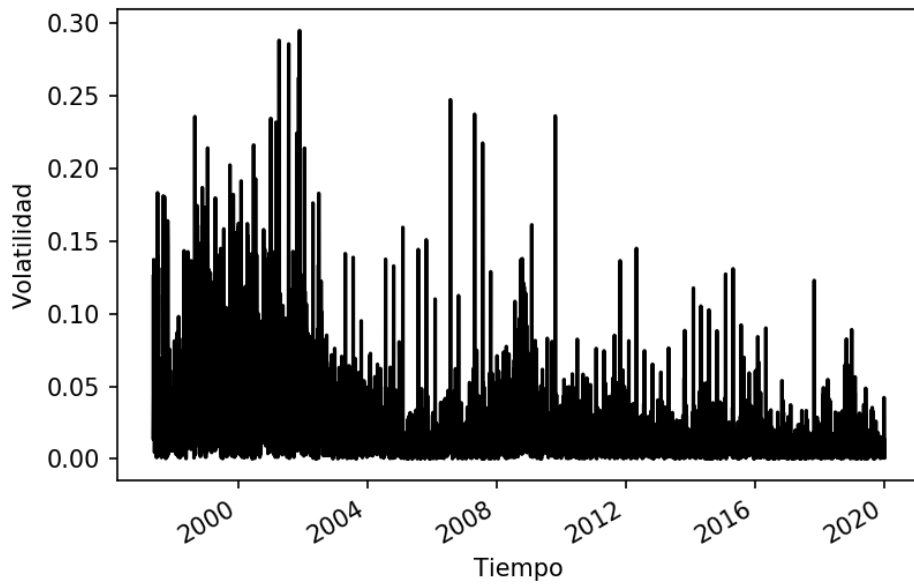


Figura 7.3: Volatilidad instantánea diaria AMZN

En la Figura 7.4 se debe notar que los datos empíricos se adaptan bastante bien a la función de auto-correlación del modelo de coeficientes de difusión.

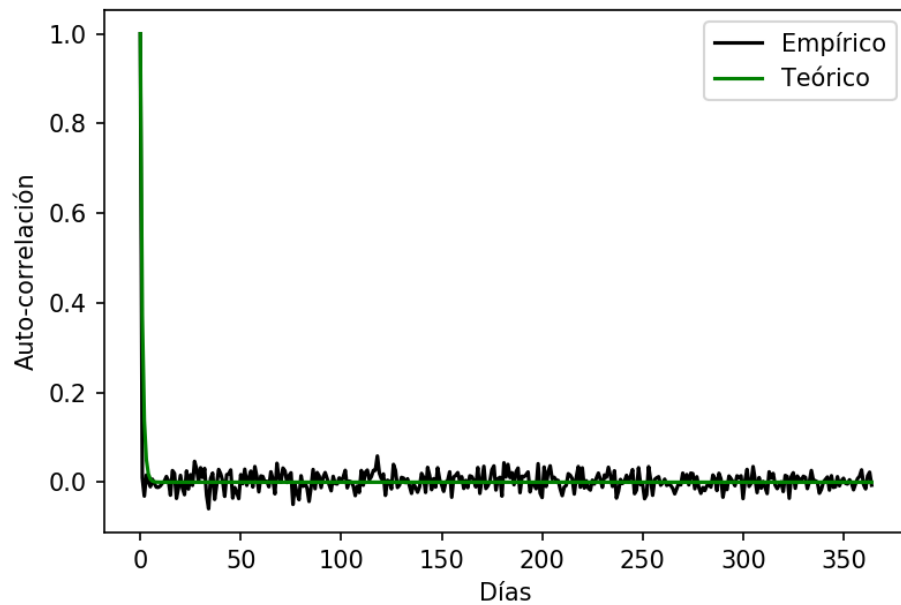


Figura 7.4: Función de auto-correlación de retornos AMZN

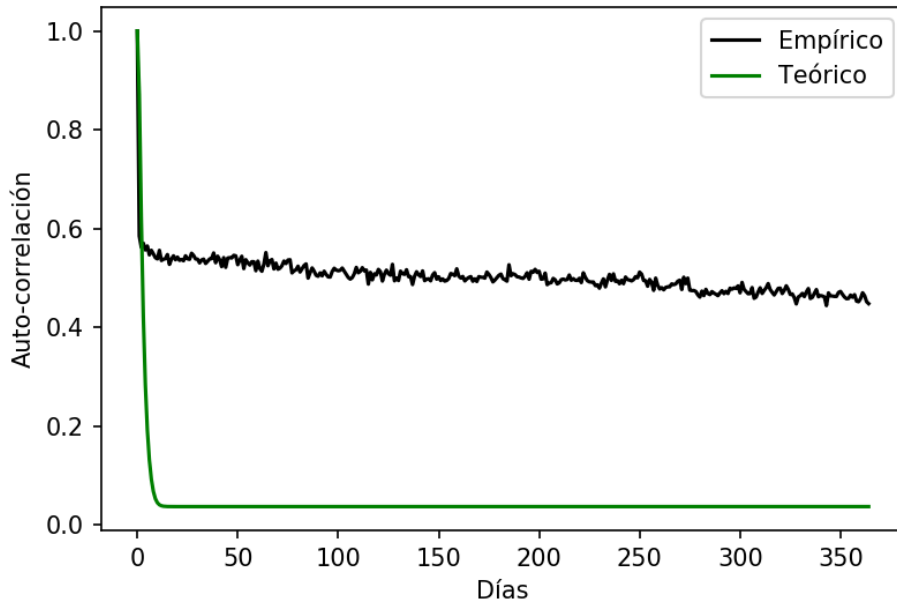


Figura 7.5: Función de auto-correlación de volatilidad AMZN

El decaimiento de las correlaciones en la volatilidad decae de manera distinta a la predicha por el modelo de coeficientes de difusión, como se puede ver en las figuras 7.5 y 7.6. Esta última en particular muestra las diferencias a una mayor escala.

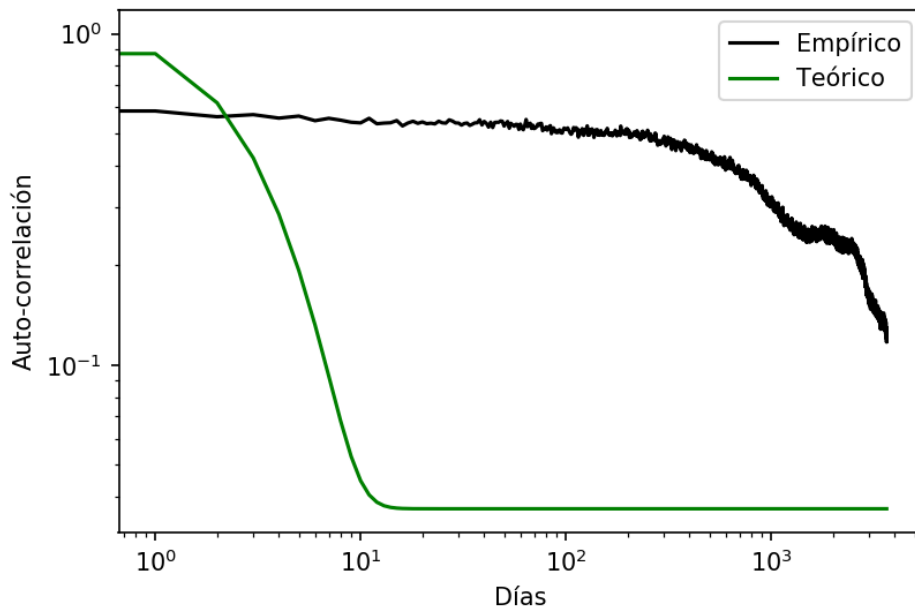


Figura 7.6: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log AMZN

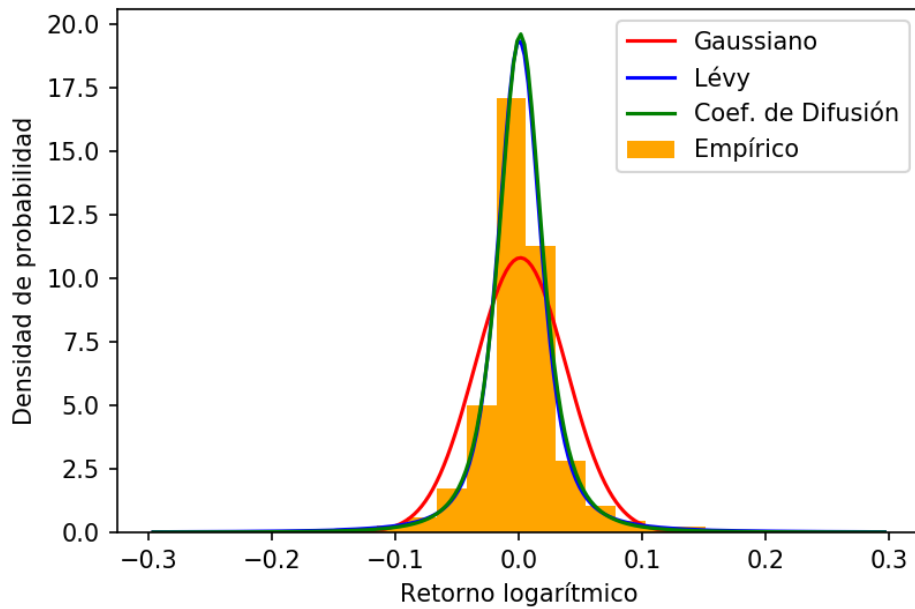


Figura 7.7: Distribuciones de densidad de probabilidad AMZN

En la Figura 7.8 se puede apreciar con mayor facilidad cómo la distribución gaussiana subestima la probabilidad de eventos extremos y cómo es que la distribución de Lévy y el modelo de coeficientes de difusión modelan mejor estos casos.

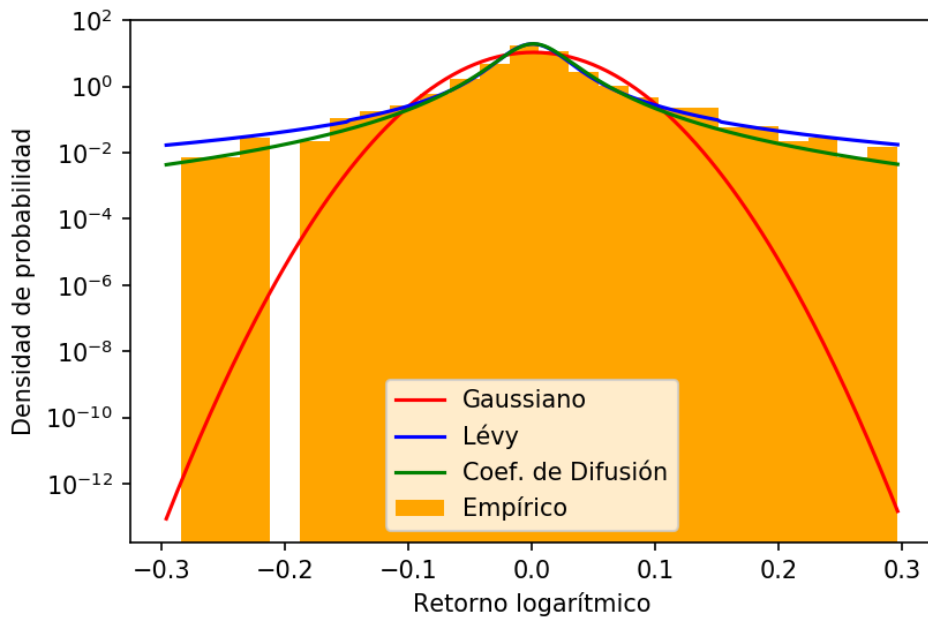


Figura 7.8: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica AMZN

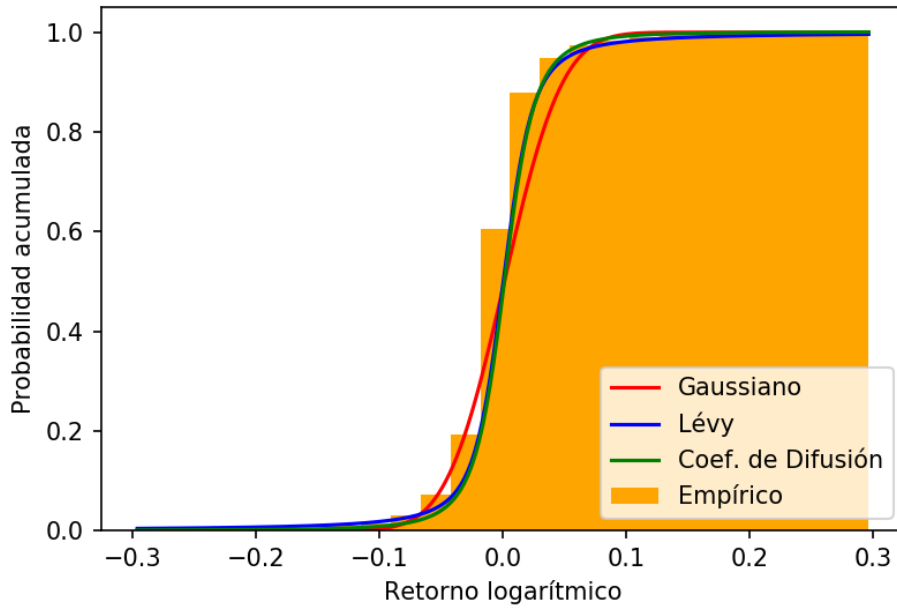


Figura 7.9: Distribuições de probabilidade acumulativa AMZN

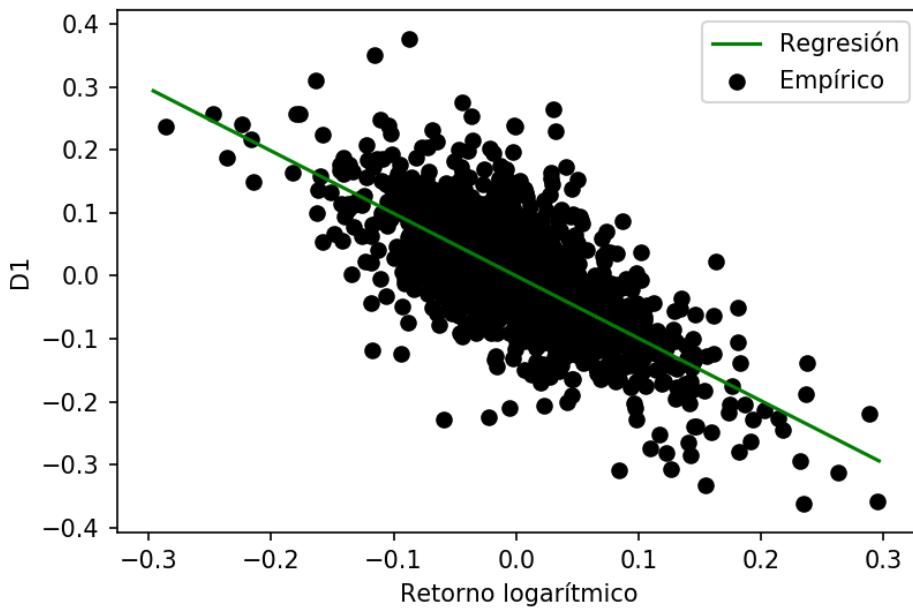


Figura 7.10: Coeficiente de difusão D_1 AMZN

Entre menor es la escala de tiempo, el ajuste de datos empíricos a la forma teórica de los coeficientes de difusión tiende a ser mejor.

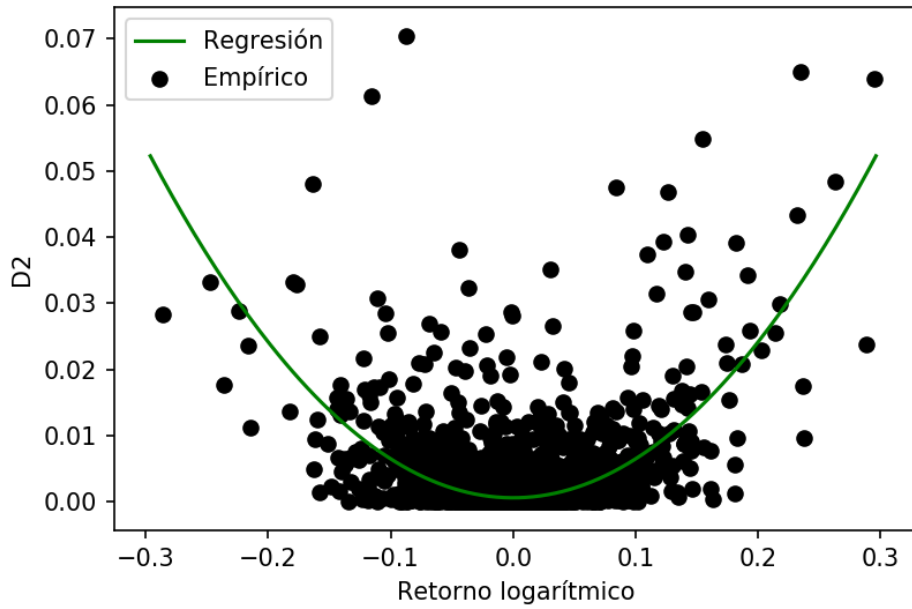


Figura 7.11: Coeficiente de difusión D_2 AMZN

7.1.2. Gráficos a escala semanal: Microsoft Corporation

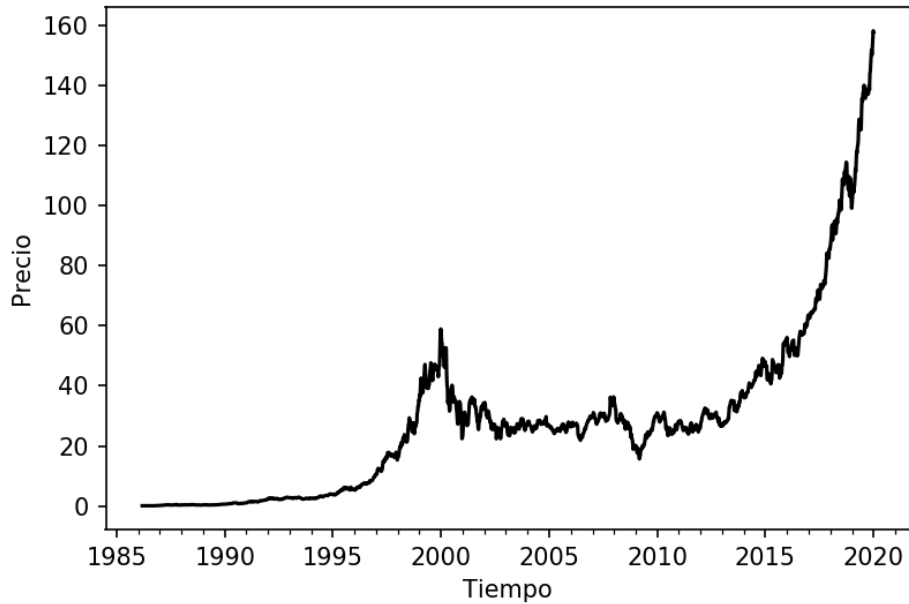


Figura 7.12: Precio semanal MSFT

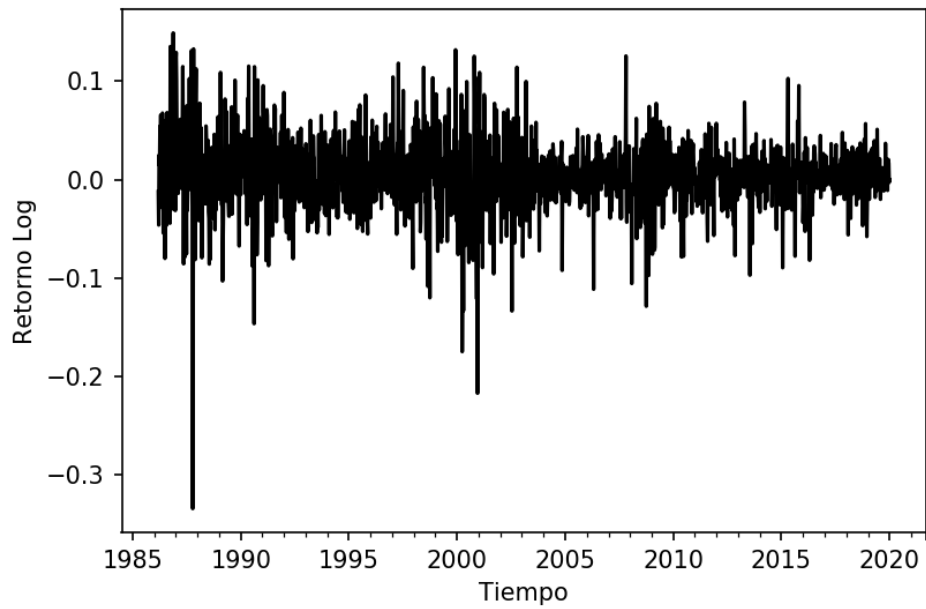


Figura 7.13: Retornos logarítmicos semanales MSFT

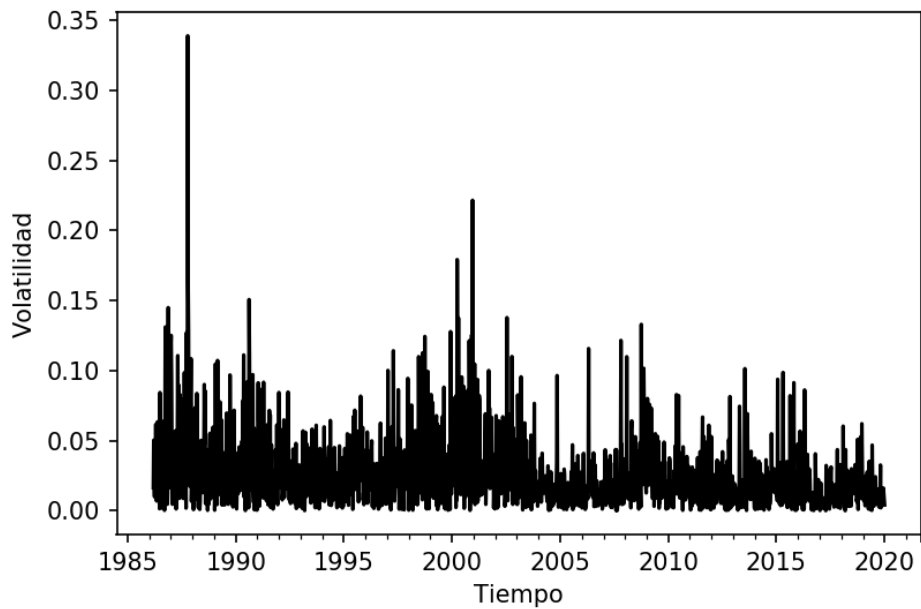


Figura 7.14: Volatilidad instantánea semanal MSFT

Como se observa en la Figura 7.15, al igual que a escala diaria, el modelo se adapta bien a las correlaciones de los retornos empíricas.

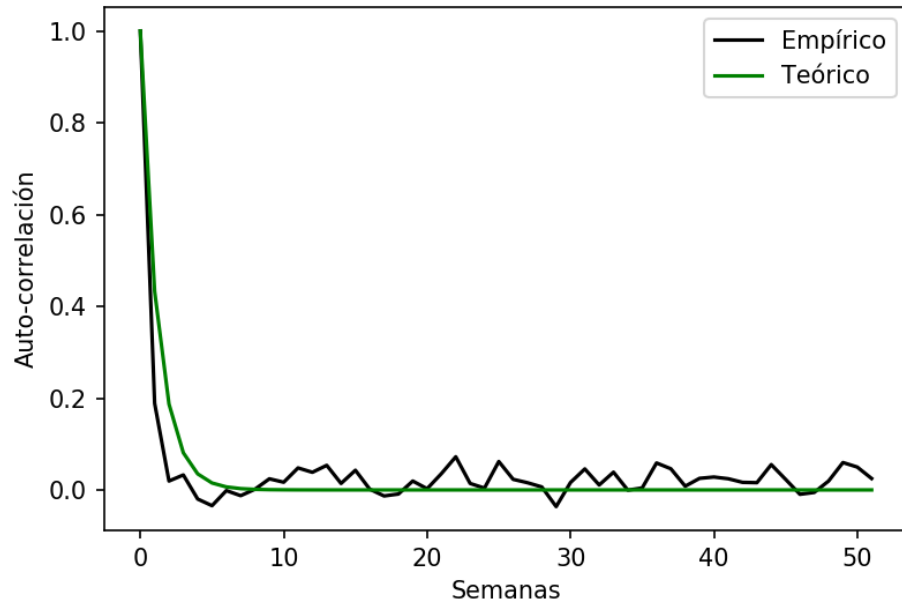


Figura 7.15: Función de auto-correlación de retornos MSFT

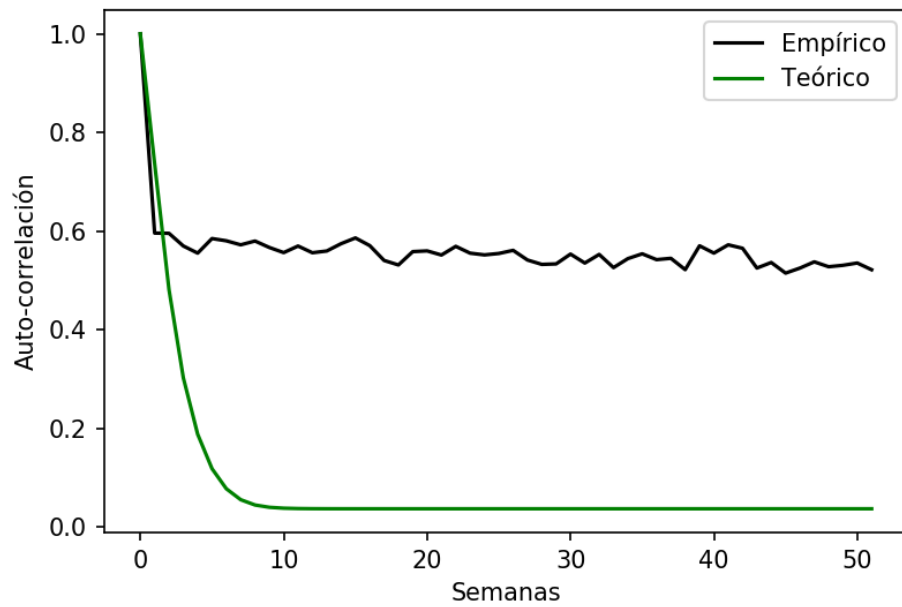


Figura 7.16: Función de auto-correlación de volatilidad MSFT

Al igual que con el caso a escala diaria, las correlaciones en la volatilidad empíricas, ilustradas en las figuras 7.16 y 7.17, difieren considerablemente del comportamiento teórico.

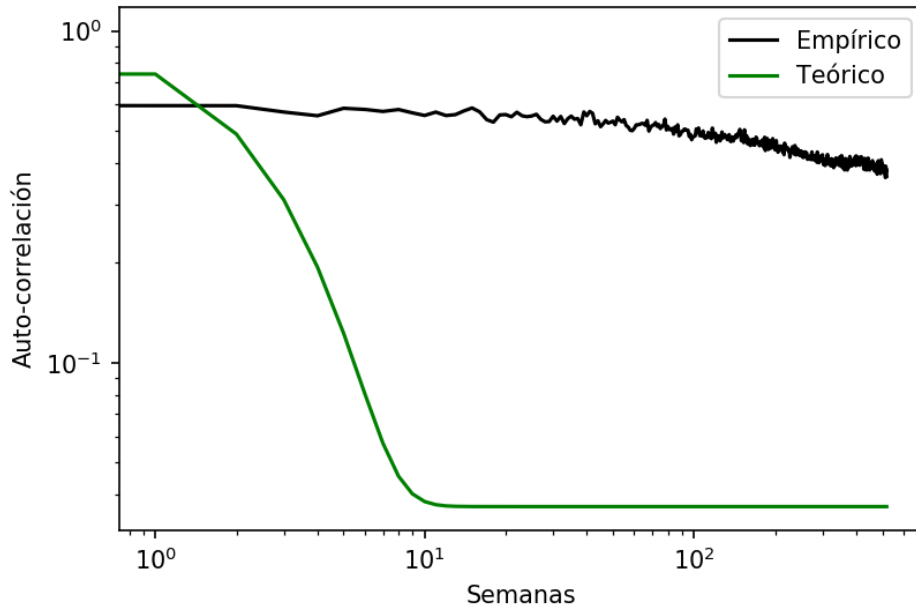


Figura 7.17: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log MSFT

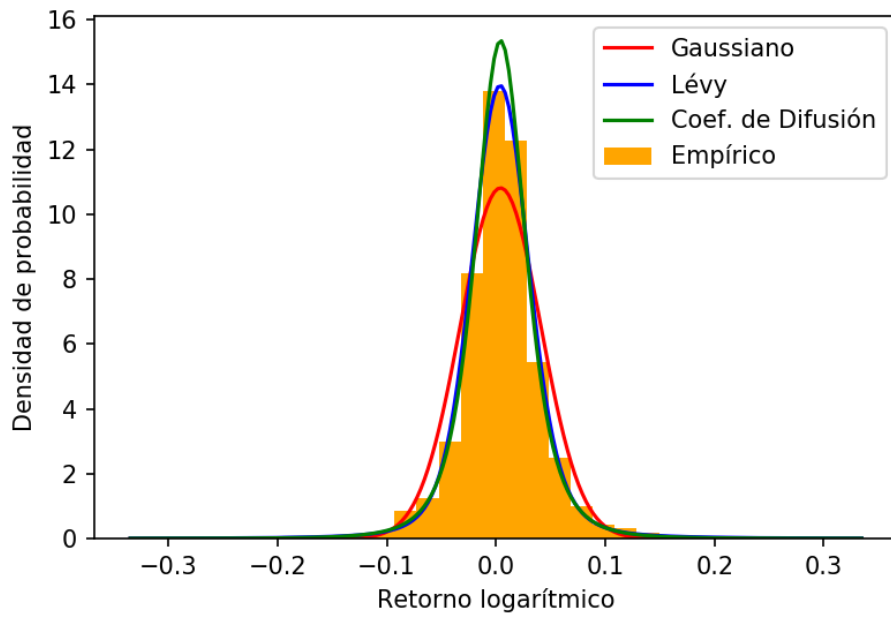


Figura 7.18: Distribuciones de densidad de probabilidad MSFT

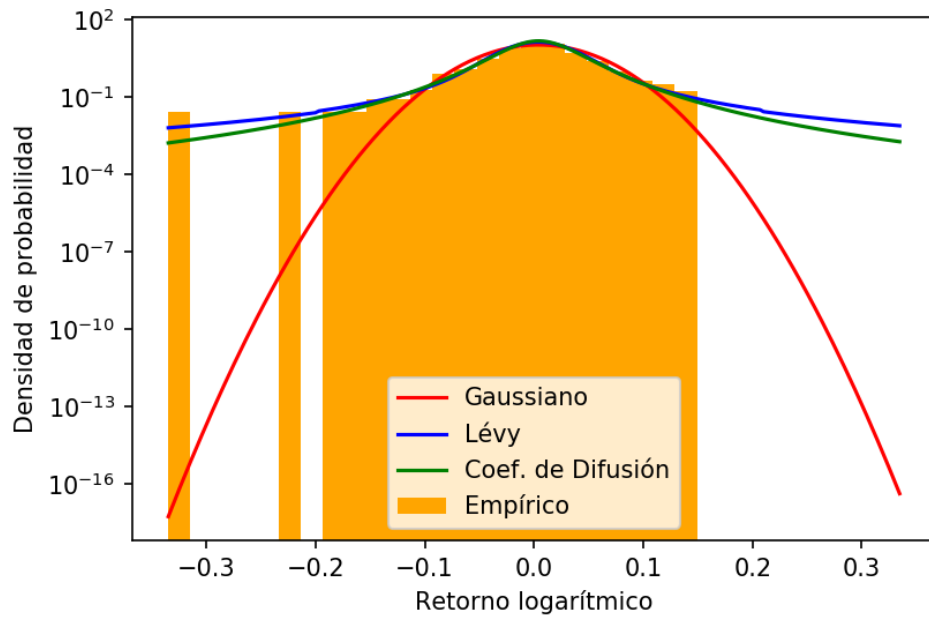


Figura 7.19: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica MSFT

La distribución normal subestima considerablemente la probabilidad de eventos extremos, como se observa en la Figura 7.19.

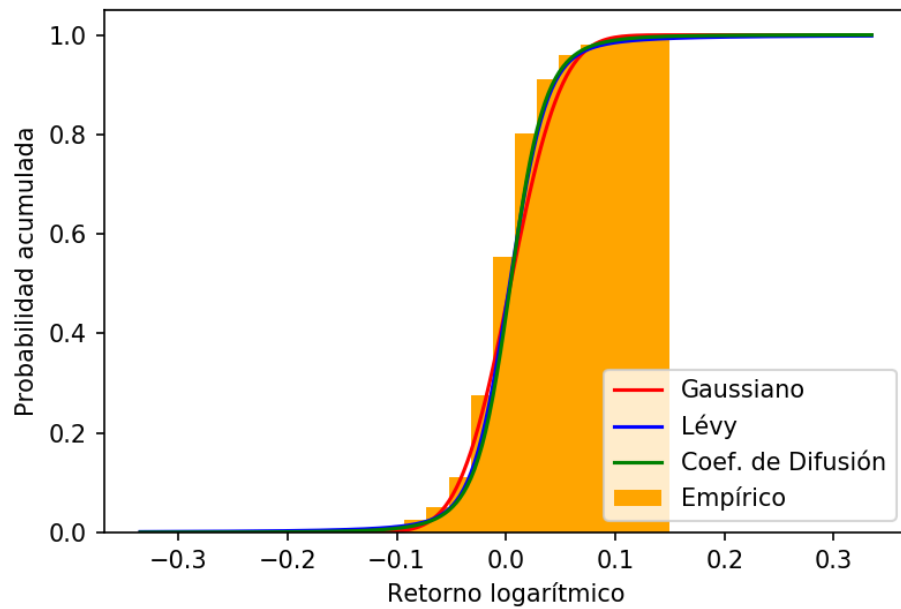


Figura 7.20: Distribuciones de probabilidad acumulativa MSFT

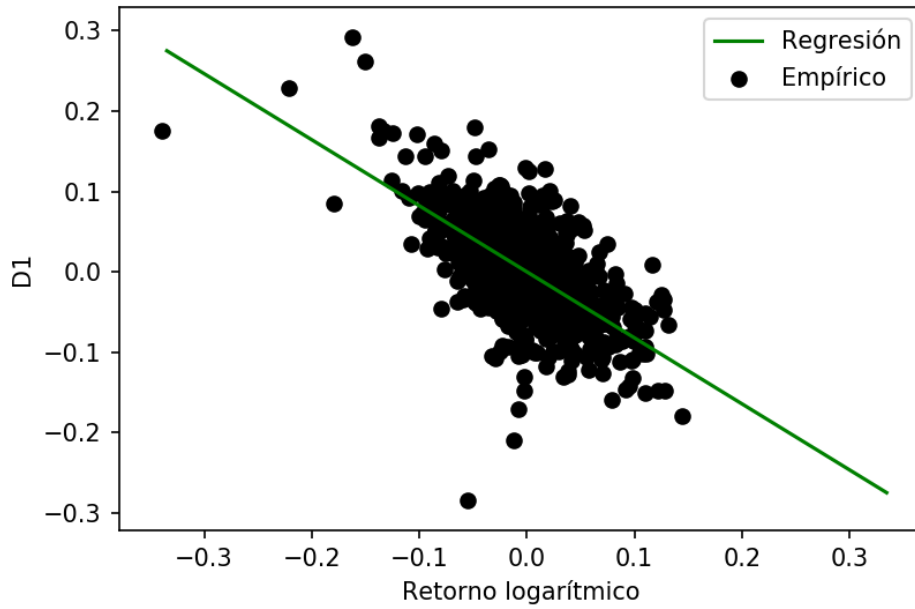


Figura 7.21: Coeficiente de difusión D_1 MSFT

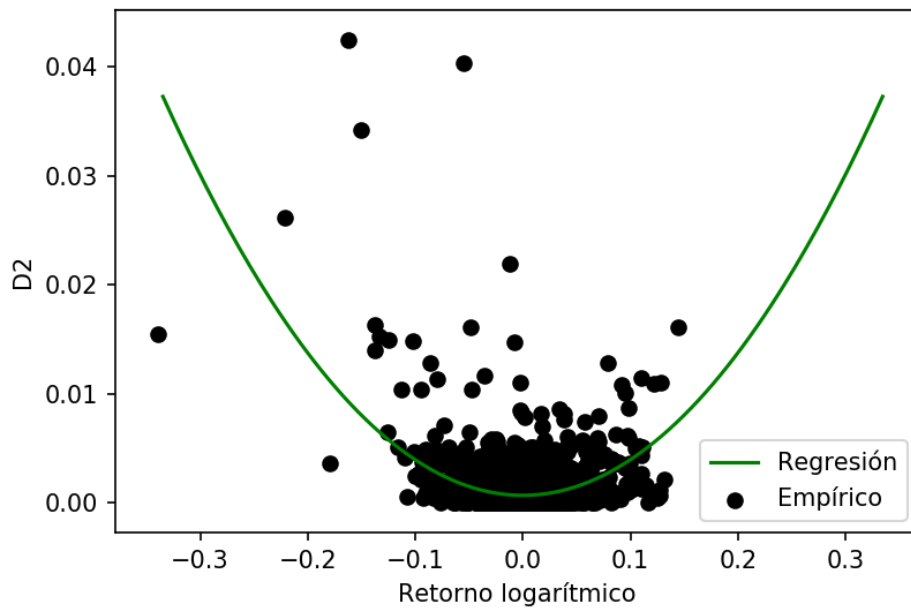


Figura 7.22: Coeficiente de difusión D_2 MSFT

7.1.3. Gráficos a escala bisemanal: JPMorgan Chase & Co.

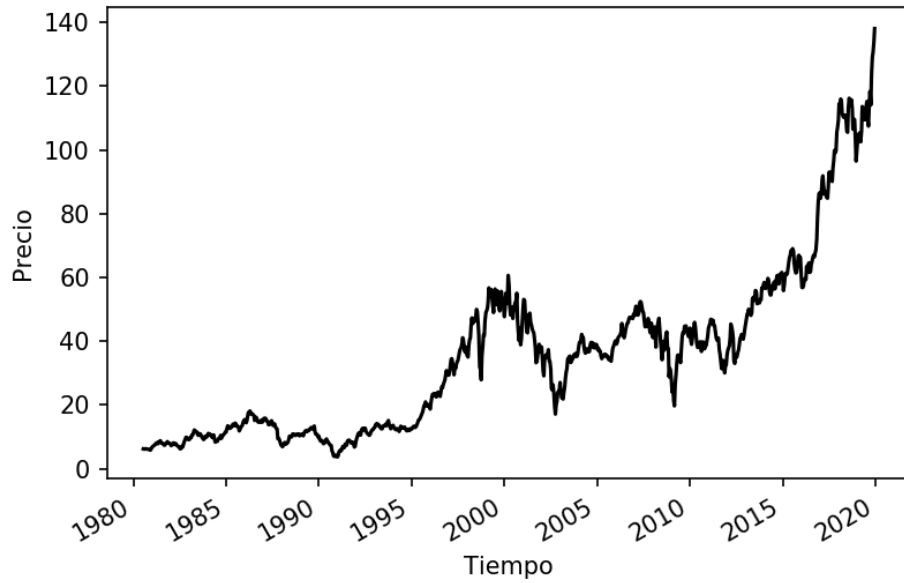


Figura 7.23: Precio bisemanal JPM

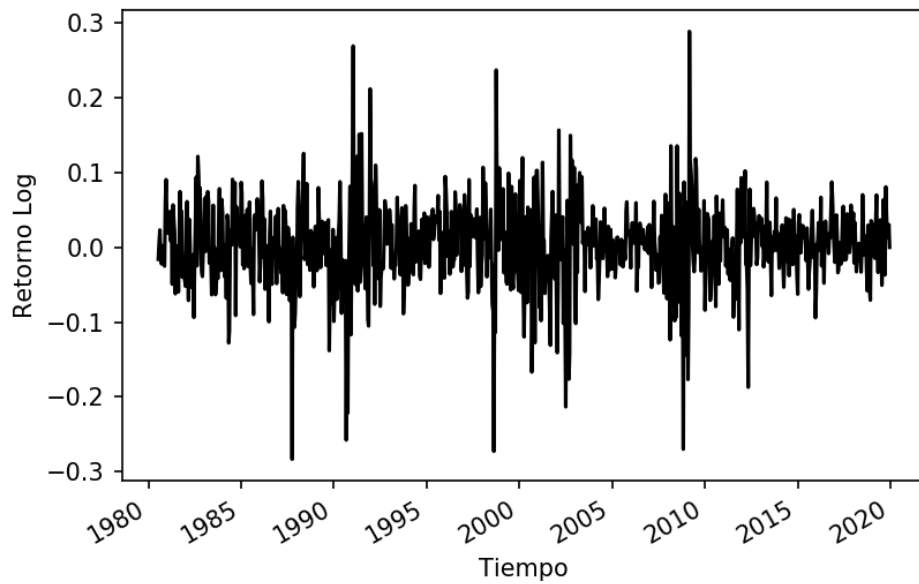


Figura 7.24: Retornos logarítmicos bisemanales JPM

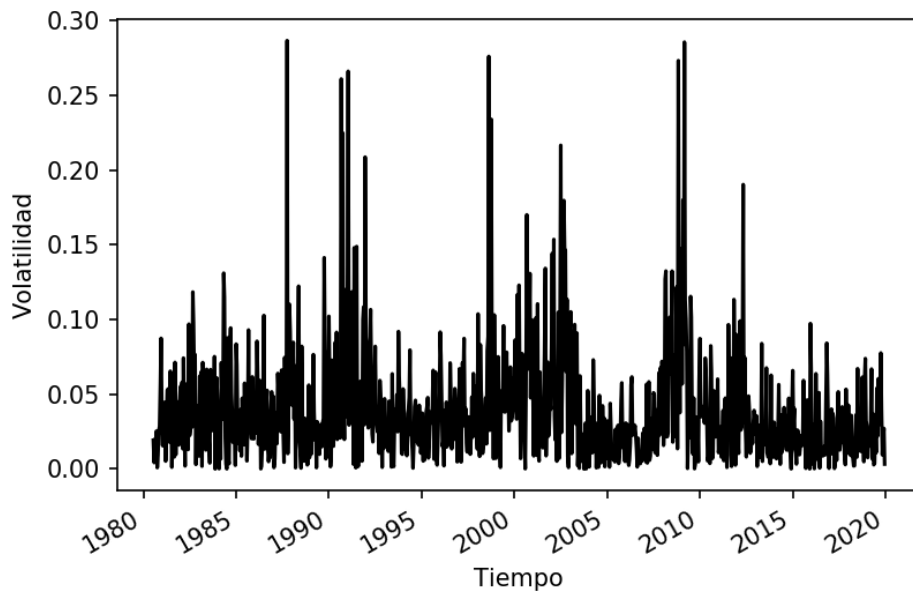


Figura 7.25: Volatilidad instantánea bisemanal JPM

En la Figura 7.25 se puede apreciar bastante bien el comportamiento estacional de la volatilidad. Es importante notar que los máximos de volatilidad tienden a corresponder a periodos de crisis o incertidumbre económica.

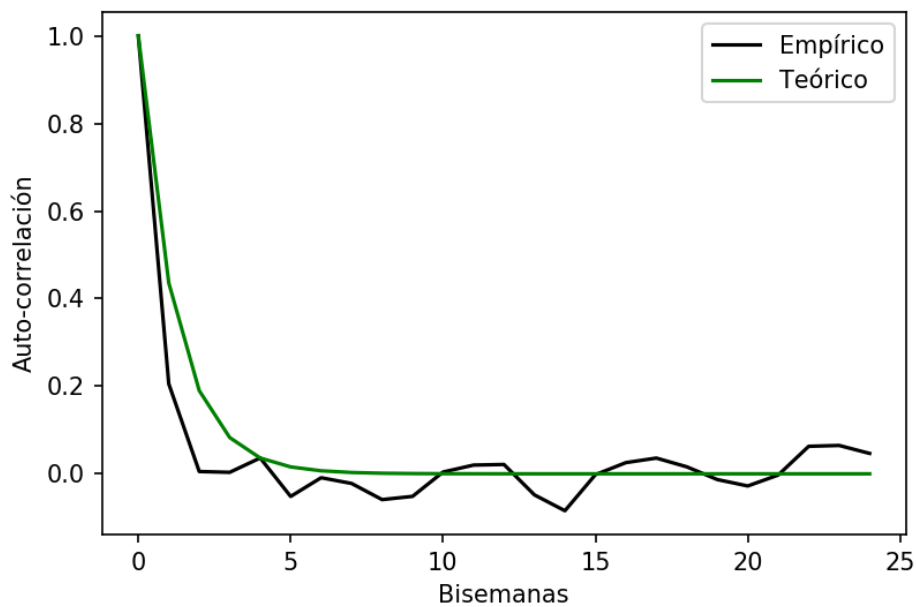


Figura 7.26: Función de auto-correlación de retornos JPM

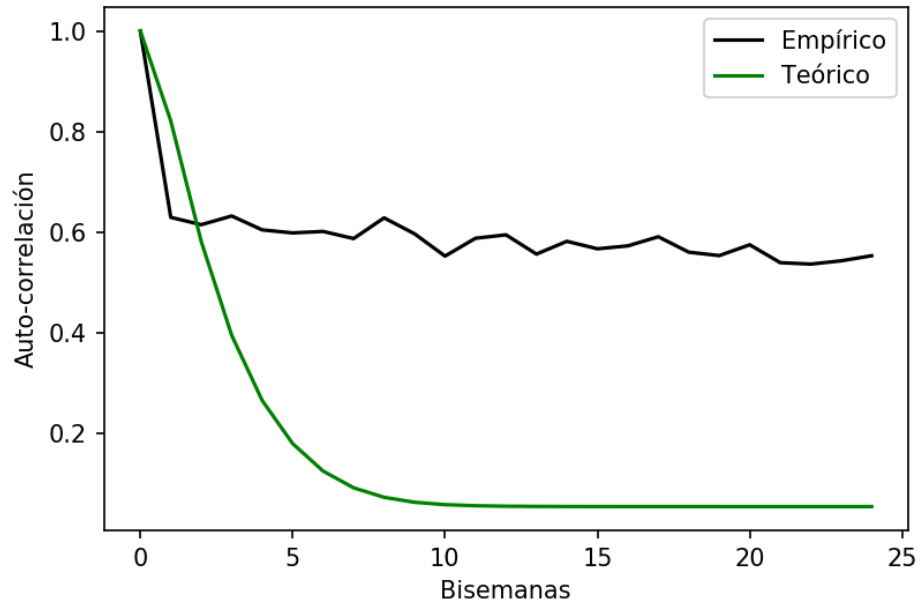


Figura 7.27: Función de auto-correlación de volatilidad JPM

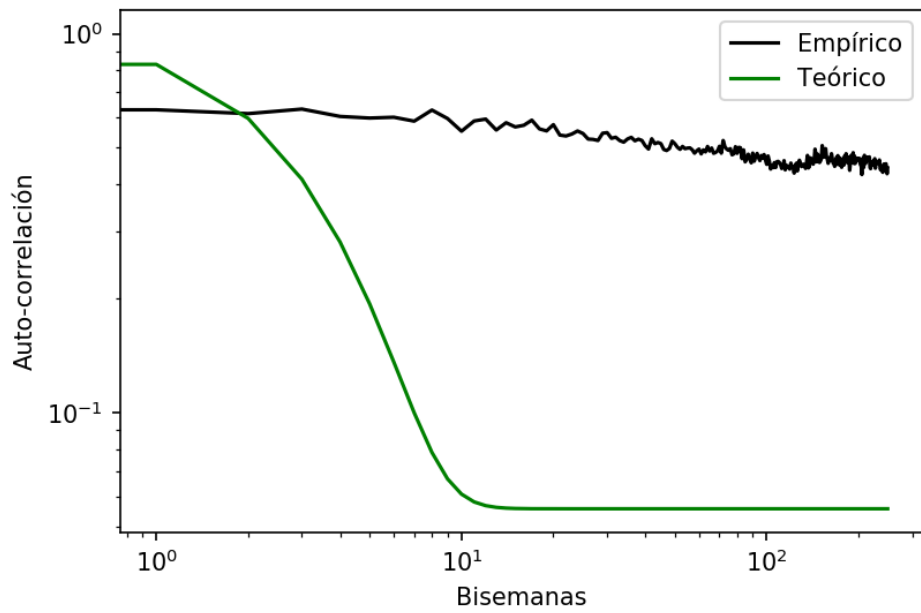


Figura 7.28: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log JPM

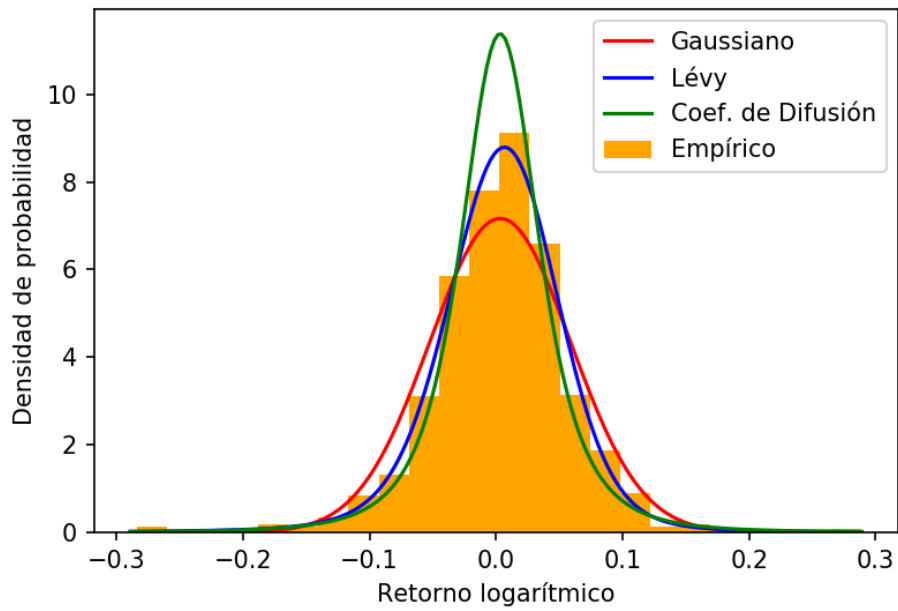


Figura 7.29: Distribuciones de densidad de probabilidad JPM

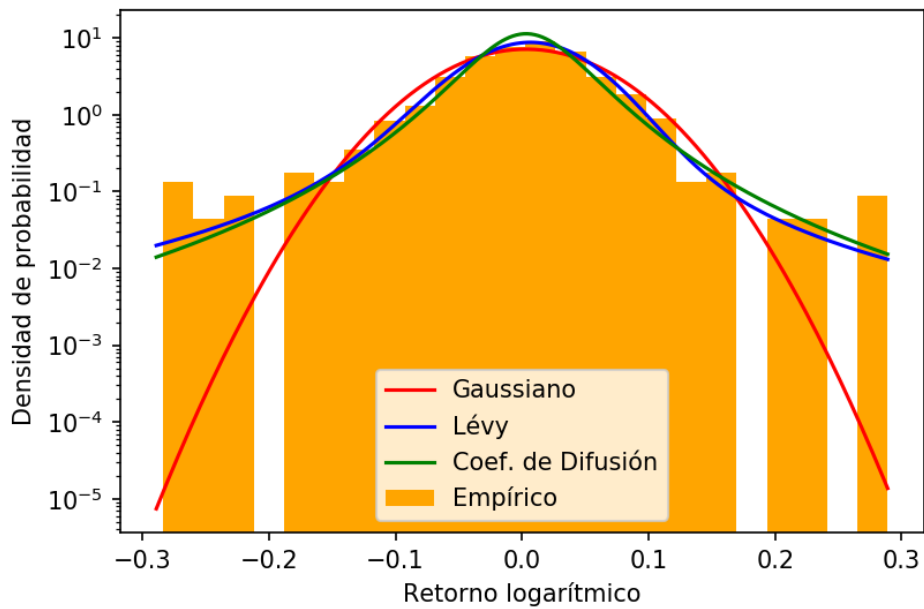


Figura 7.30: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica JPM

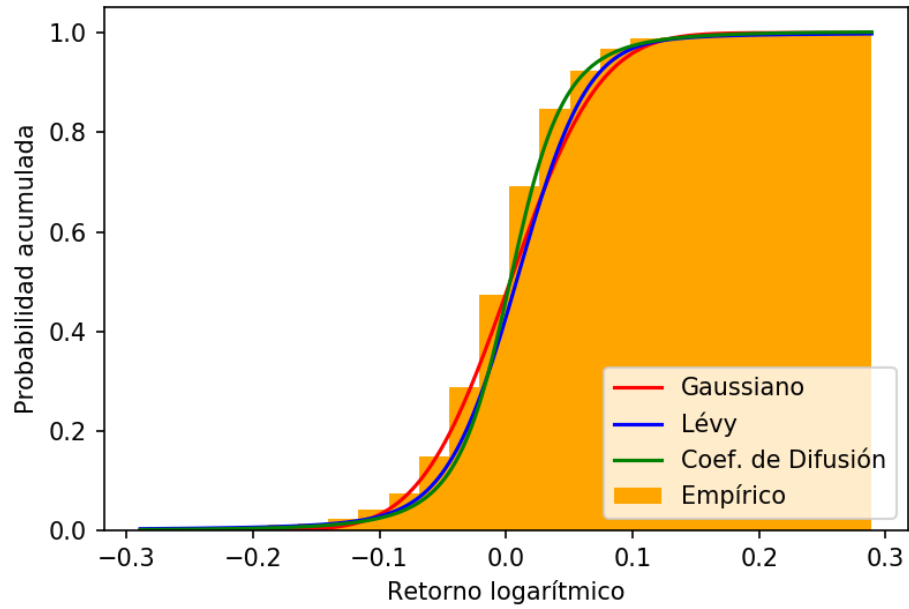


Figura 7.31: Distribuciones de probabilidad acumulativa JPM

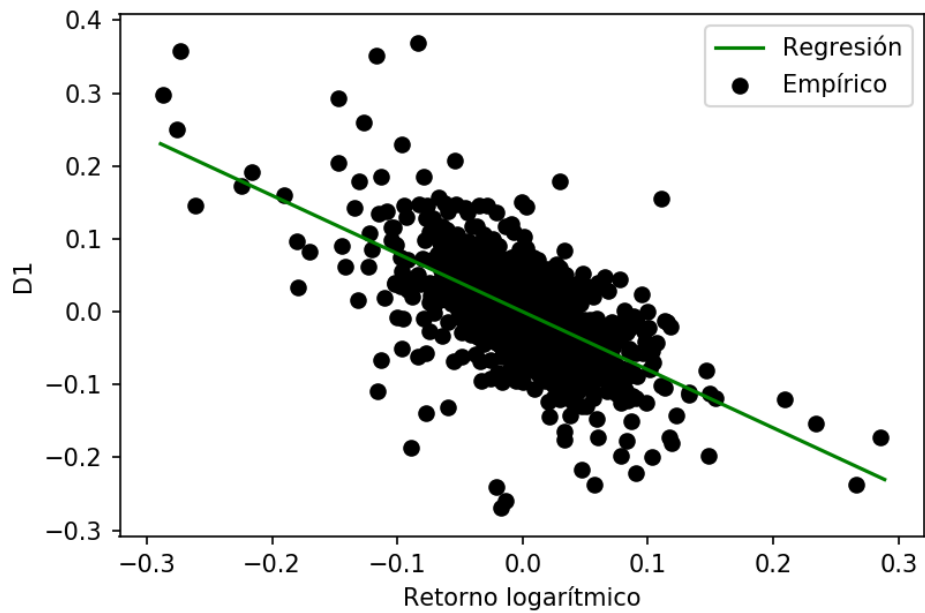


Figura 7.32: Coeficiente de difusión D_1 JPM

La calidad de las regresiones de los coeficientes de difusión tiende a disminuir a medida que se aumenta la escala temporal.

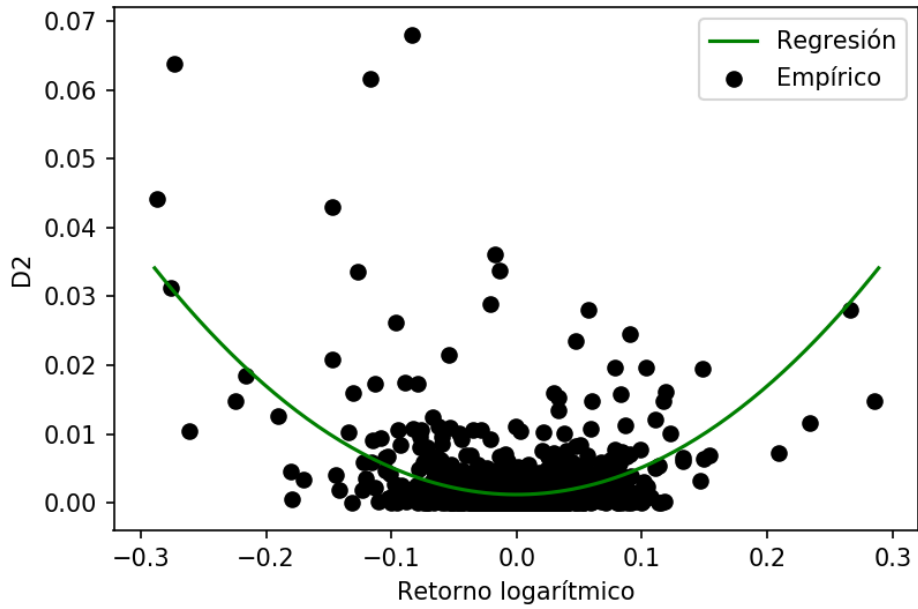


Figura 7.33: Coeficiente de difusión D_2 JPM

7.1.4. Gráficos a escala mensual: Apple Inc.

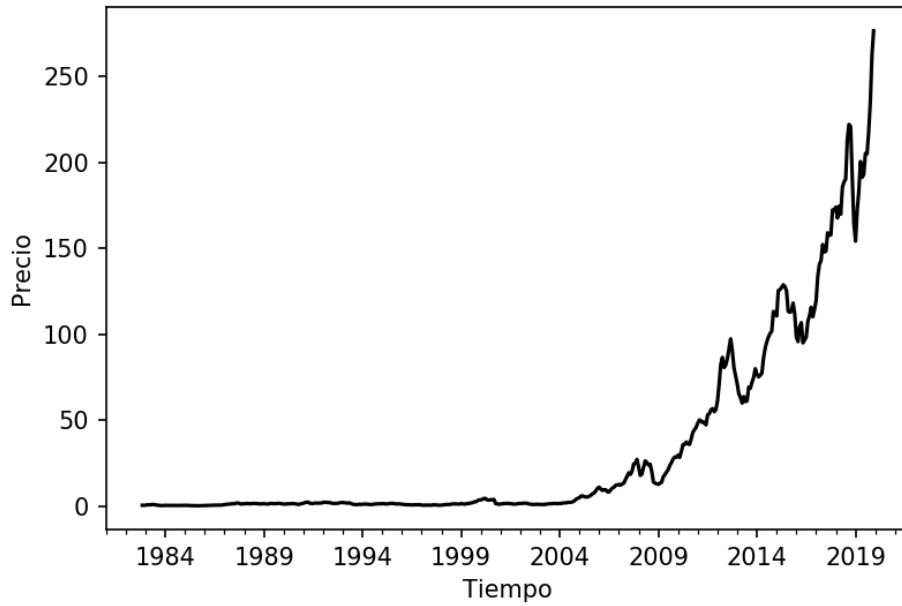


Figura 7.34: Precio mensual AAPL

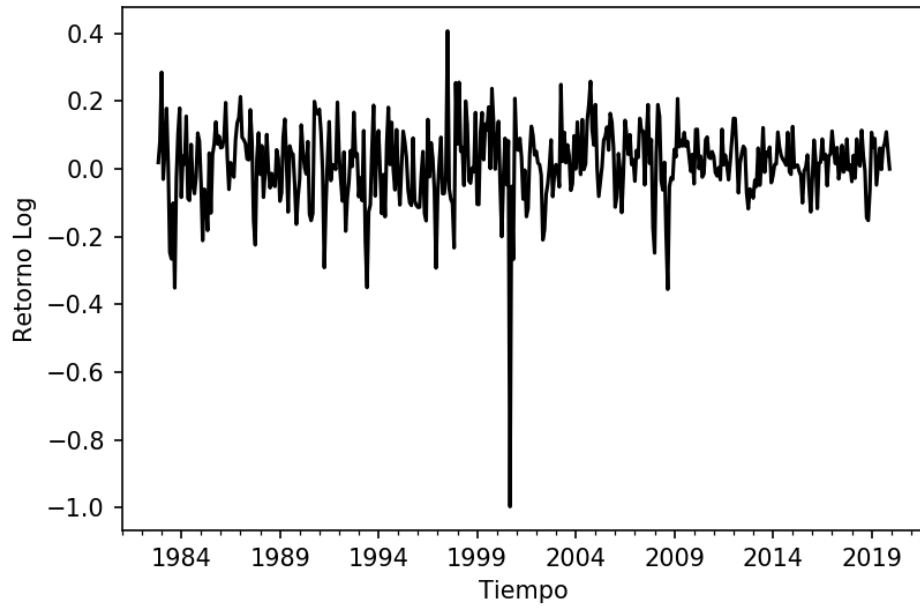


Figura 7.35: Retornos logarítmicos mensuales AAPL

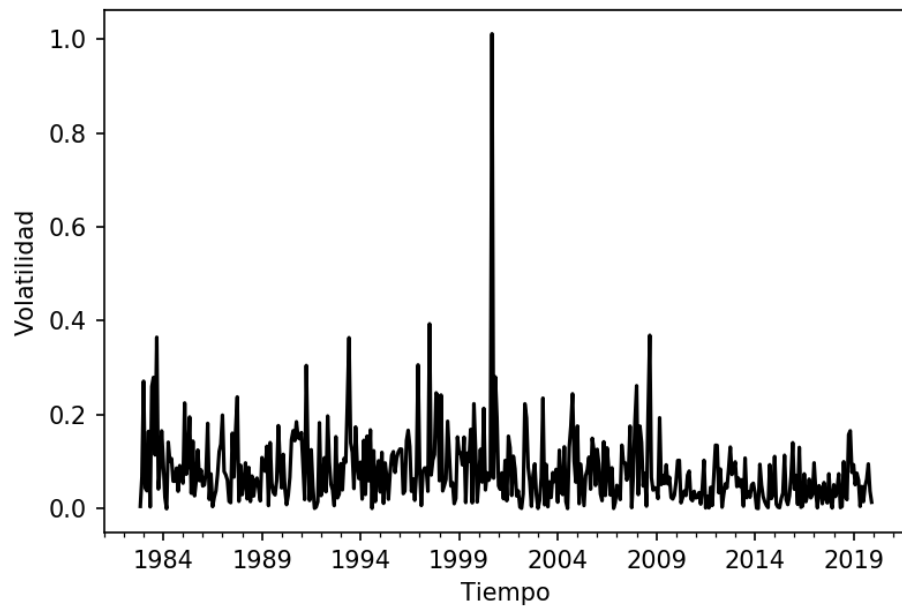


Figura 7.36: Volatilidad instantánea mensual AAPL

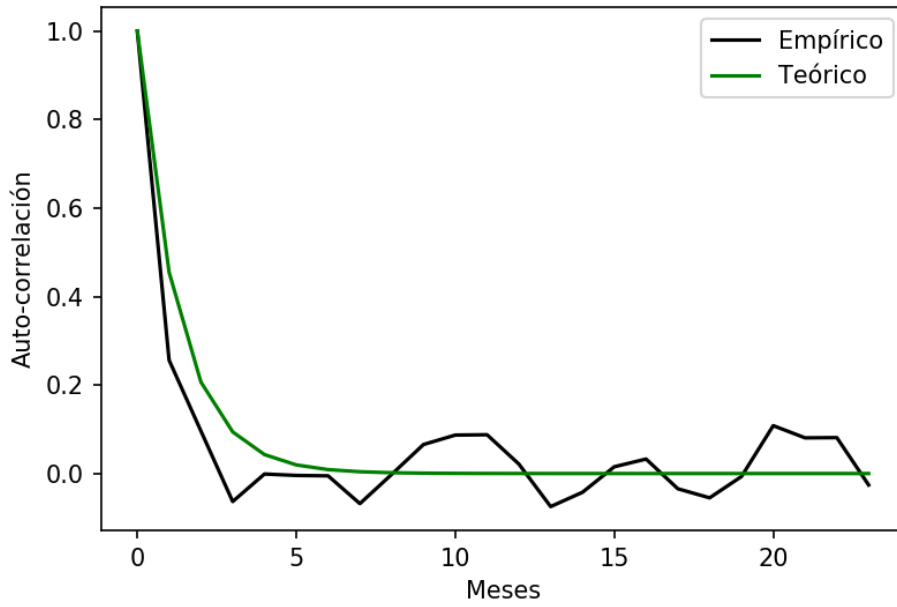


Figura 7.37: Función de auto-correlación de retornos AAPL

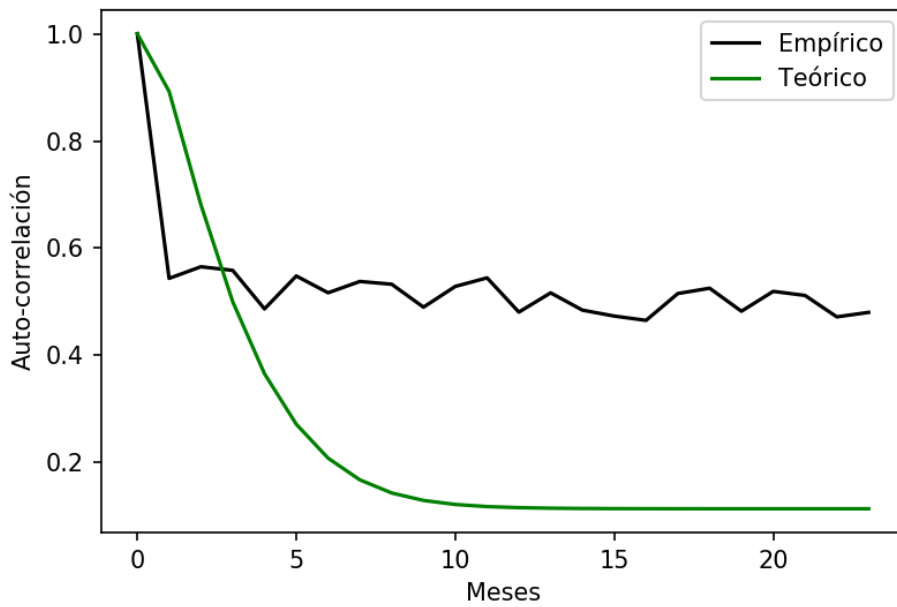


Figura 7.38: Función de auto-correlación de volatilidad AAPL

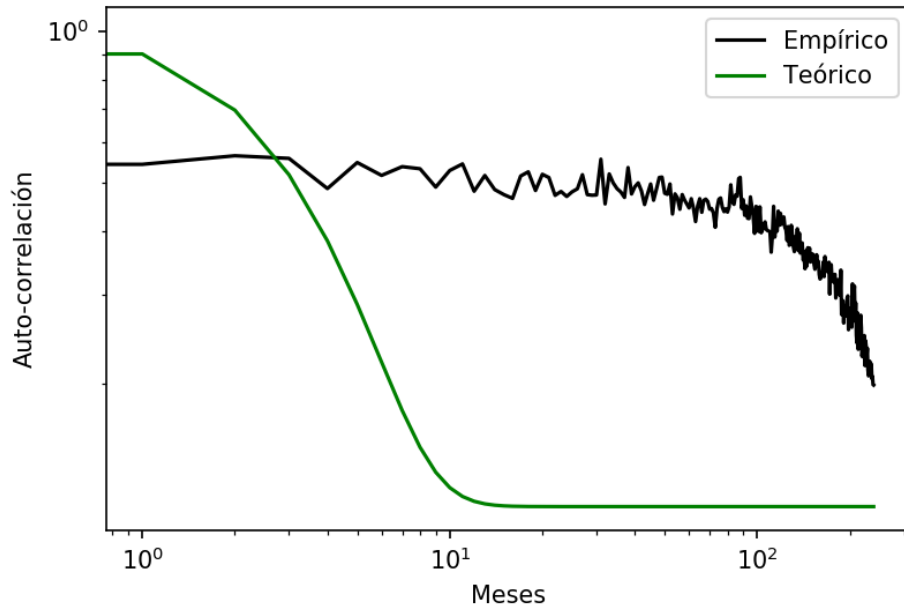


Figura 7.39: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log AAPL

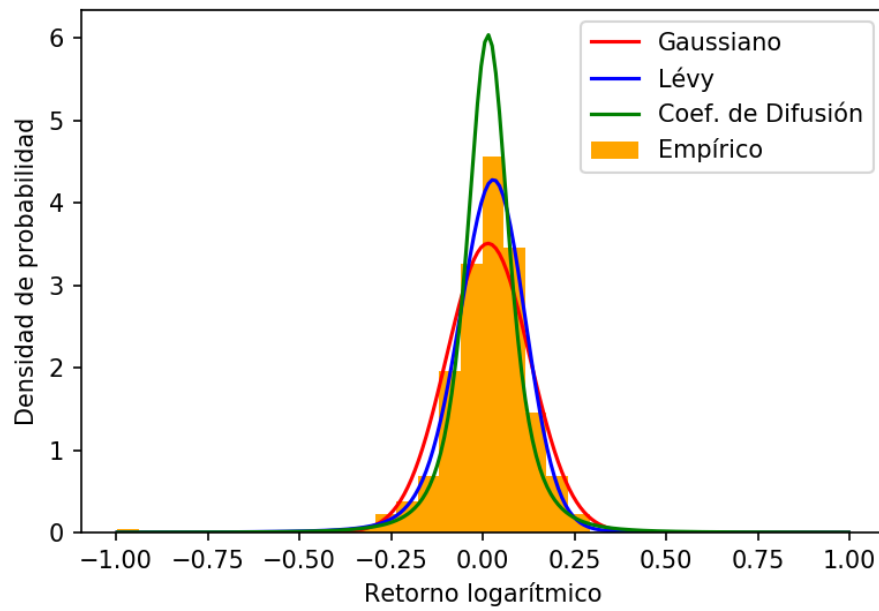


Figura 7.40: Distribuciones de densidad de probabilidad AAPL

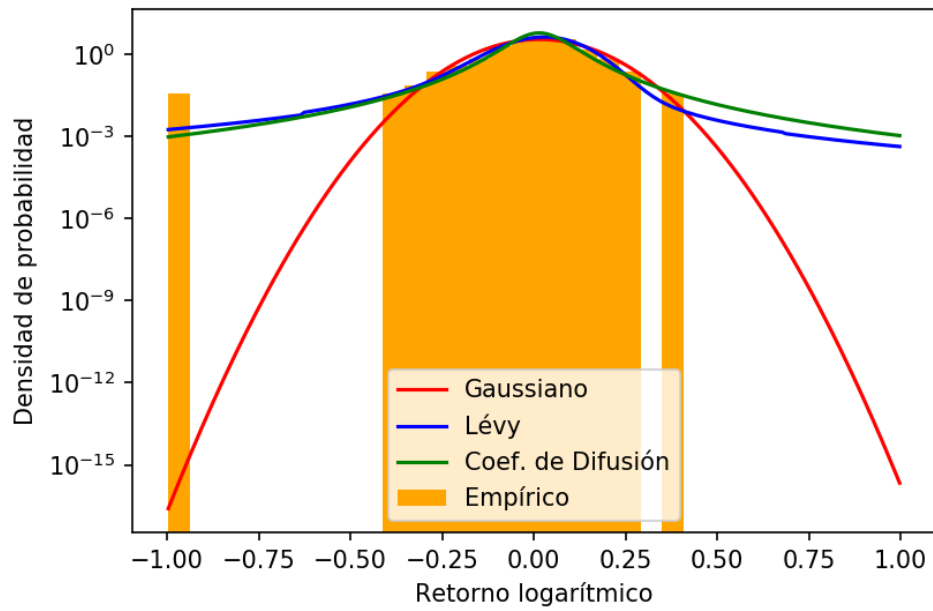


Figura 7.41: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica AAPL

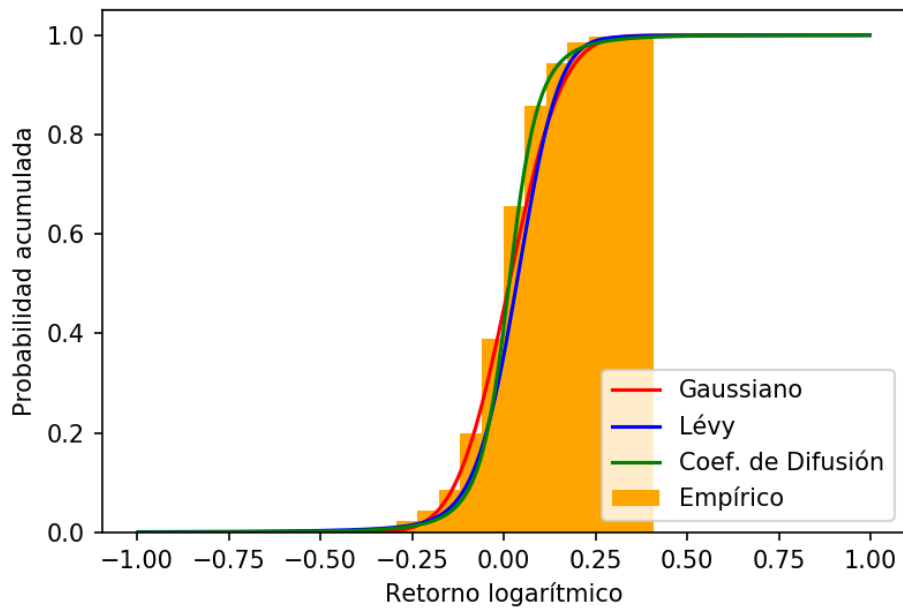


Figura 7.42: Distribuciones de probabilidad acumulativa AAPL

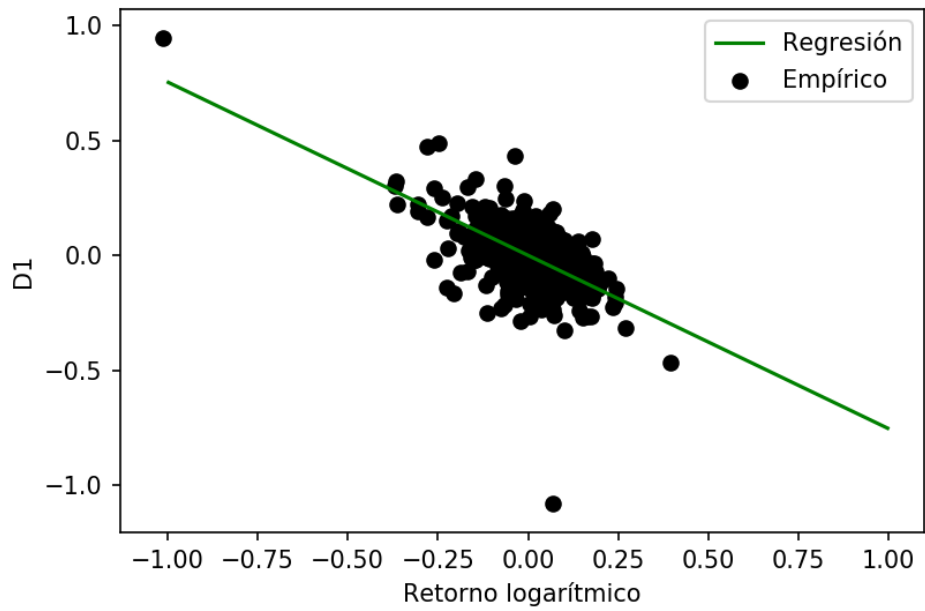


Figura 7.43: Coeficiente de difusión D_1 AAPL

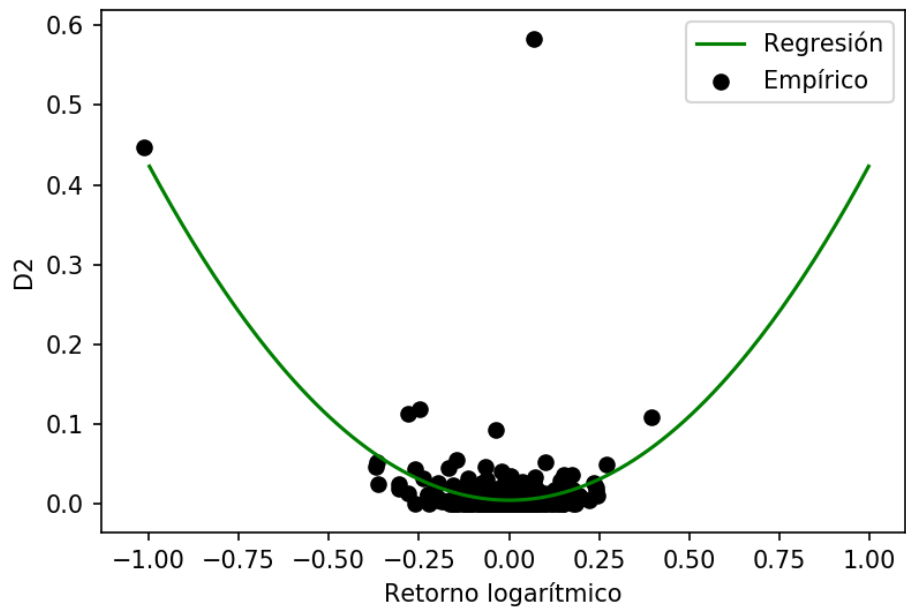


Figura 7.44: Coeficiente de difusión D_2 AAPL

7.1.5. Gráficos a escala trimestral: NASDAQ Composite Index

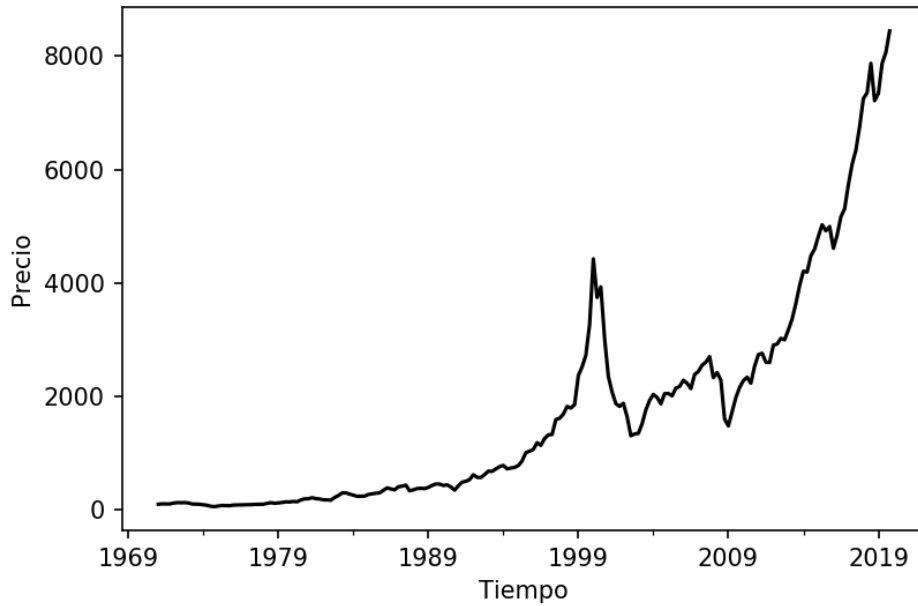


Figura 7.45: Precio trimestral CCMP

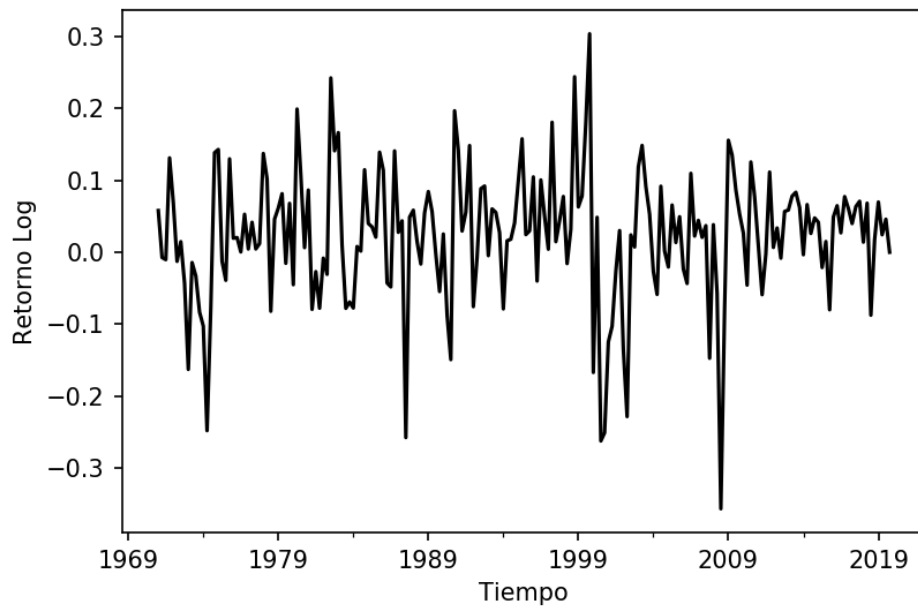


Figura 7.46: Retornos logarítmicos trimestrales CCMP

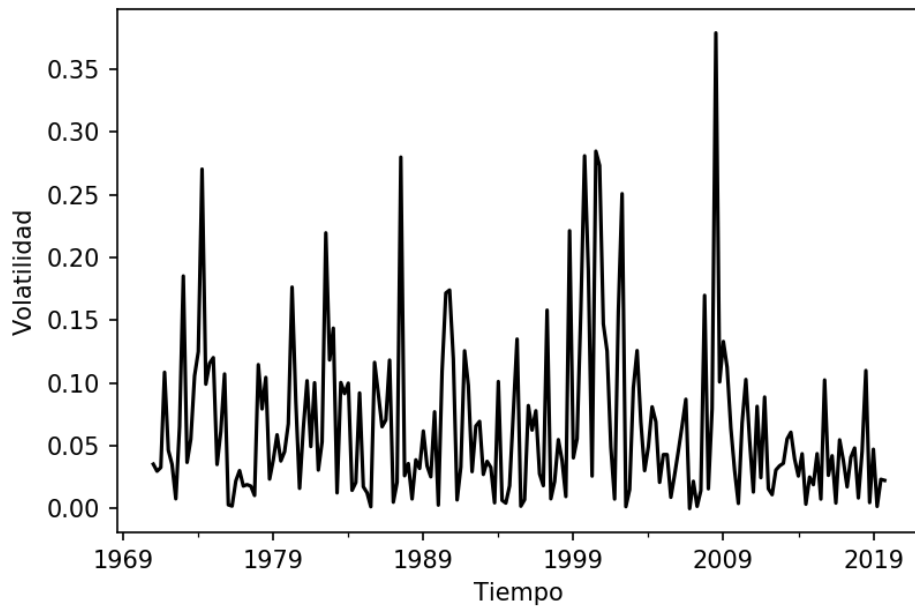


Figura 7.47: Volatilidad instantánea trimestral CCMP

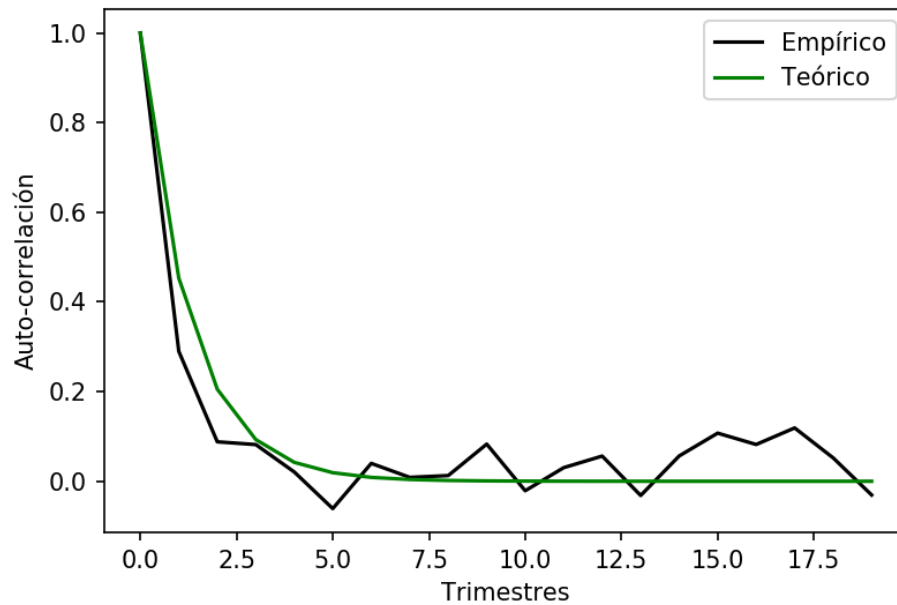


Figura 7.48: Función de auto-correlación de retornos CCMP

A escala trimestral, las correlaciones temporales de los retornos, ilustradas en la Figura 7.48 tienden a presentar más ruido durante más tiempo, a diferencia de los casos a escalas pequeñas, donde las correlaciones tienden a mantenerse cerca de cero luego de pocos periodos.

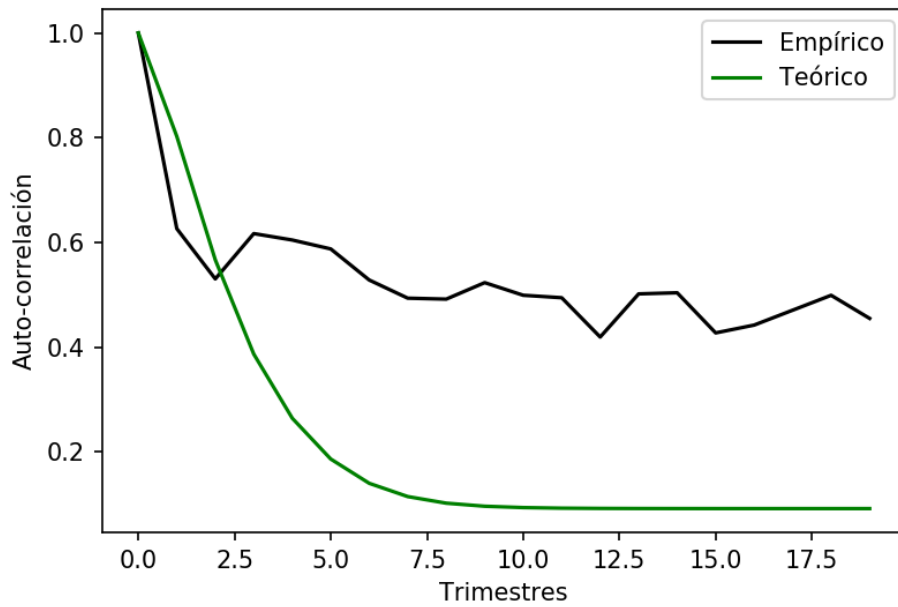


Figura 7.49: Función de auto-correlación de volatilidad CCMP

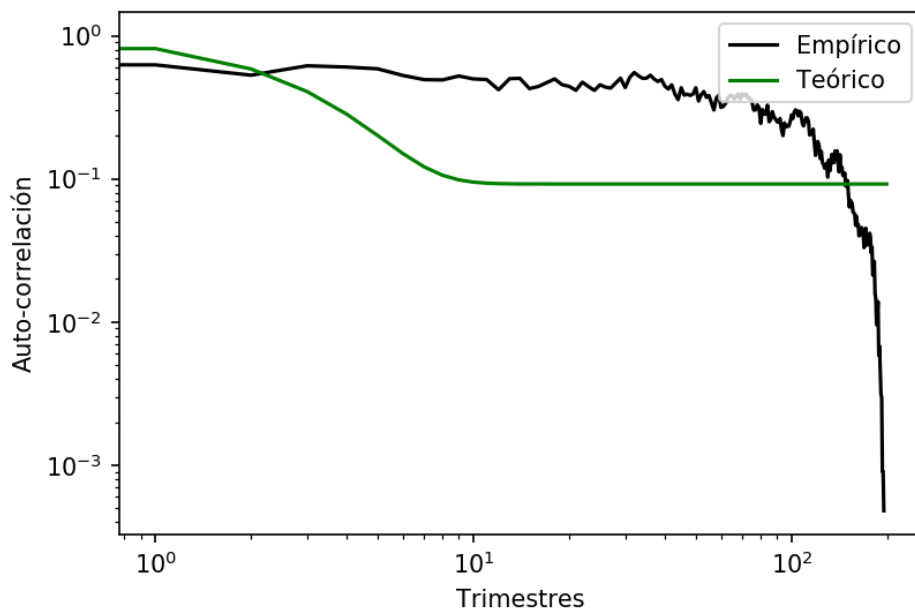


Figura 7.50: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log CCMP

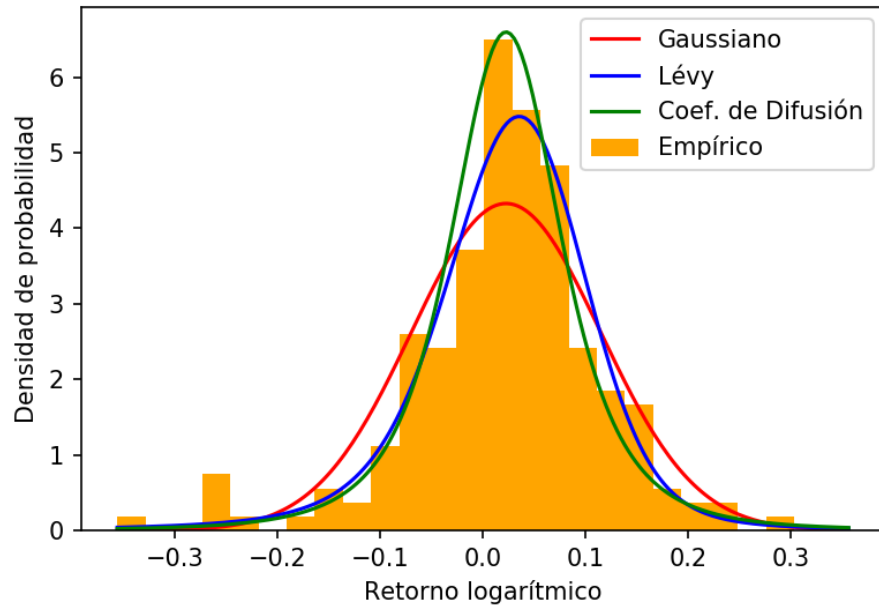


Figura 7.51: Distribuciones de densidad de probabilidad CCMP

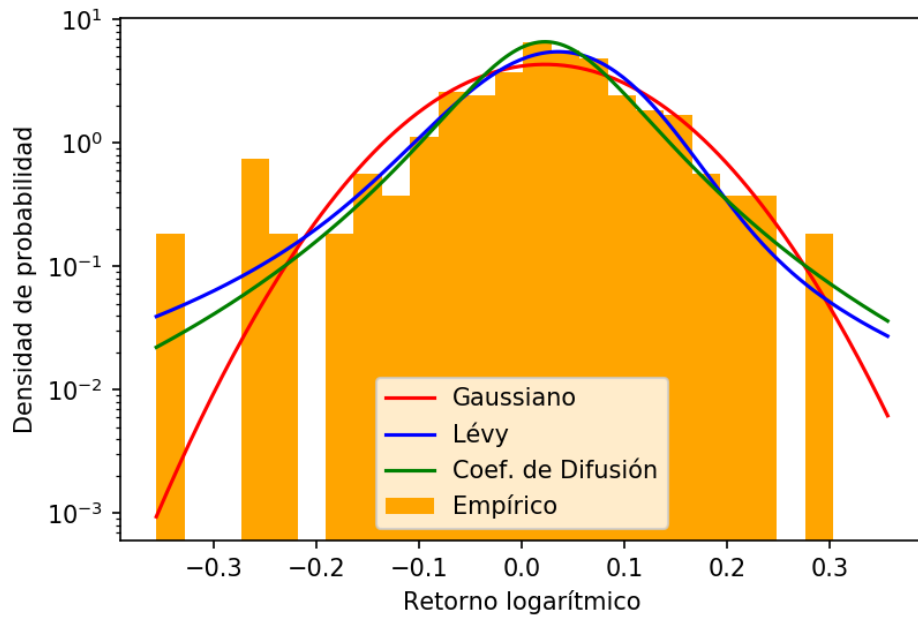


Figura 7.52: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica CCMP

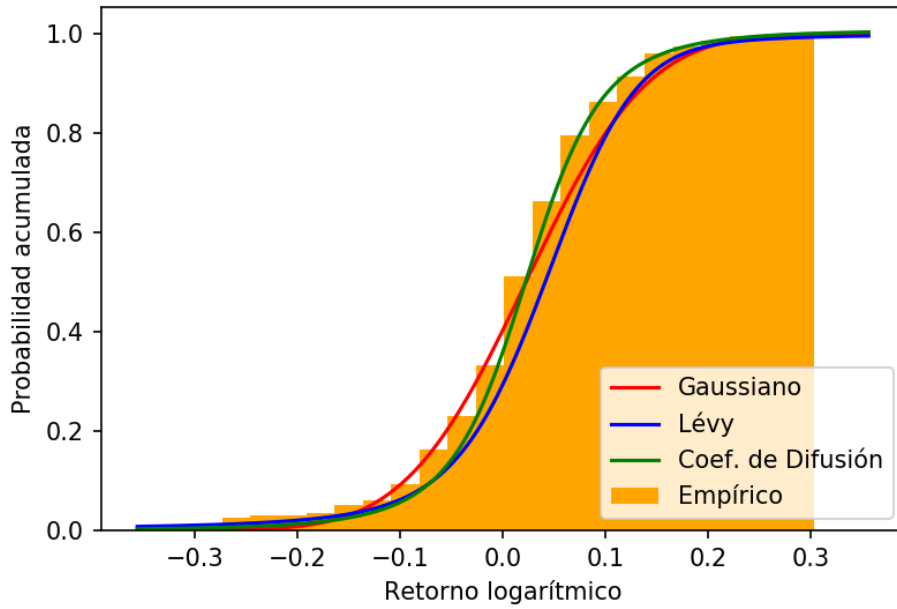


Figura 7.53: Distribuciones de probabilidad acumulativa CCMP

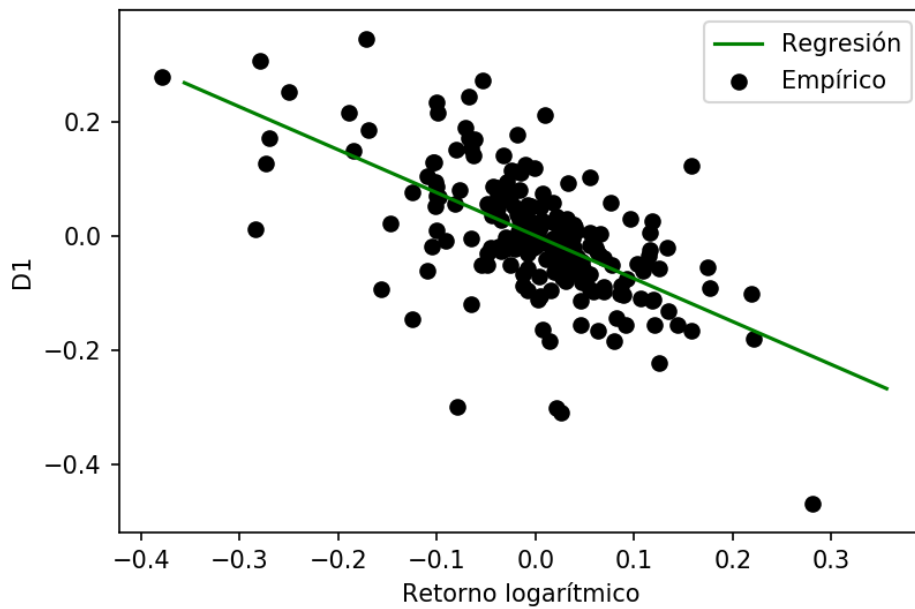


Figura 7.54: Coeficiente de difusión D_1 CCMP

En esta escala de tiempo los coeficientes de difusión tienden a presentar ruido considerable.

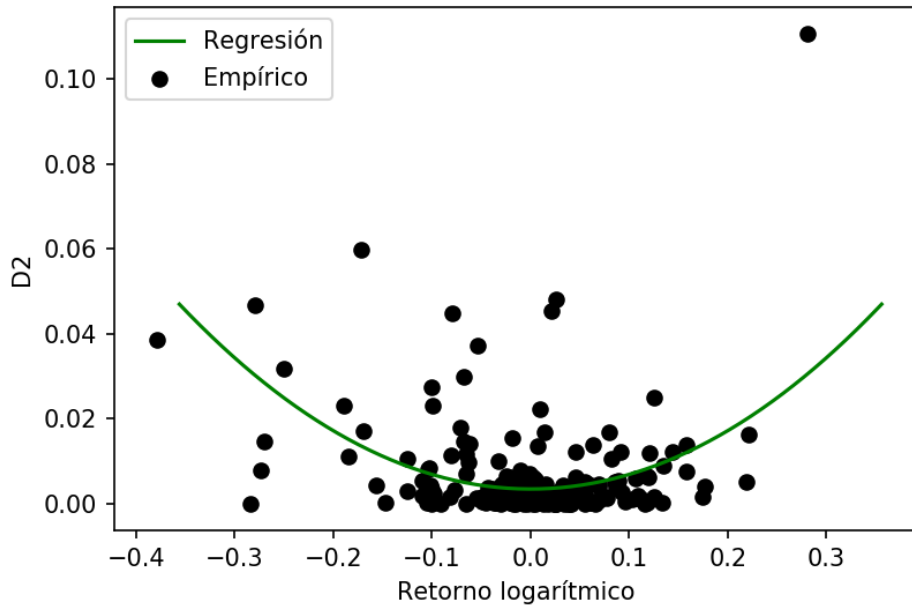


Figura 7.55: Coeficiente de difusión D_2 CCMP

7.1.6. Gráficos a escala anual: Standard & Poor's 500

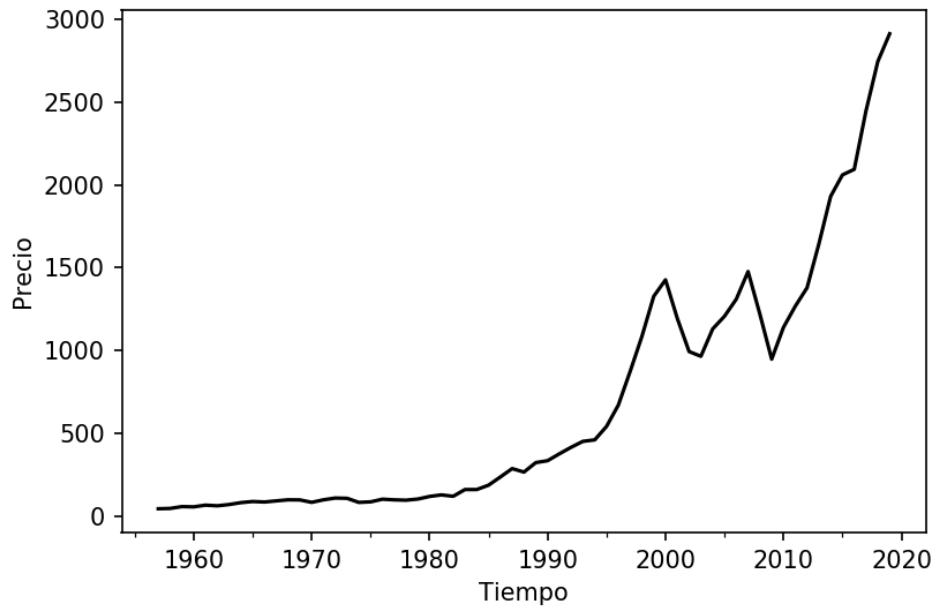


Figura 7.56: Precio anual SPX

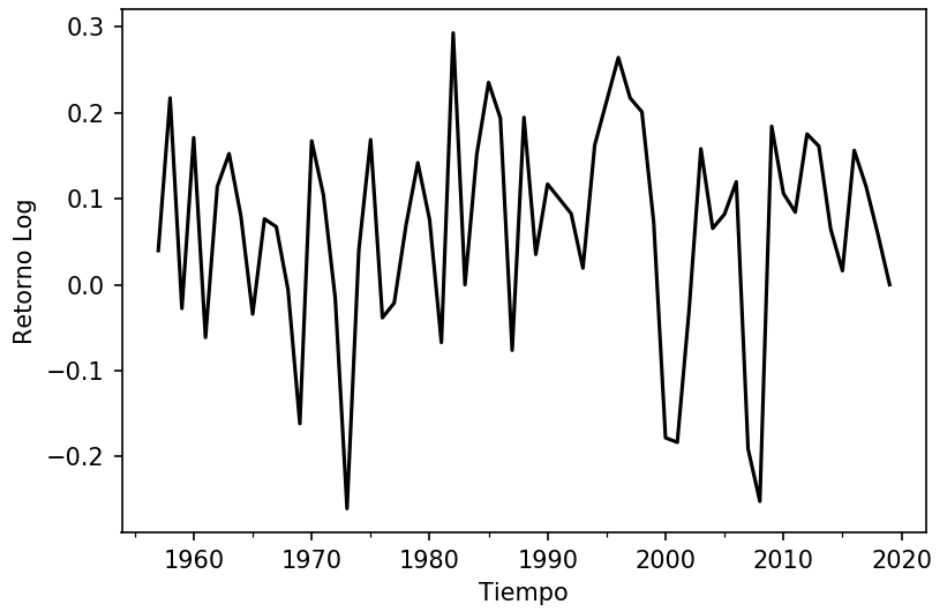


Figura 7.57: Retornos logarítmicos anuales SPX

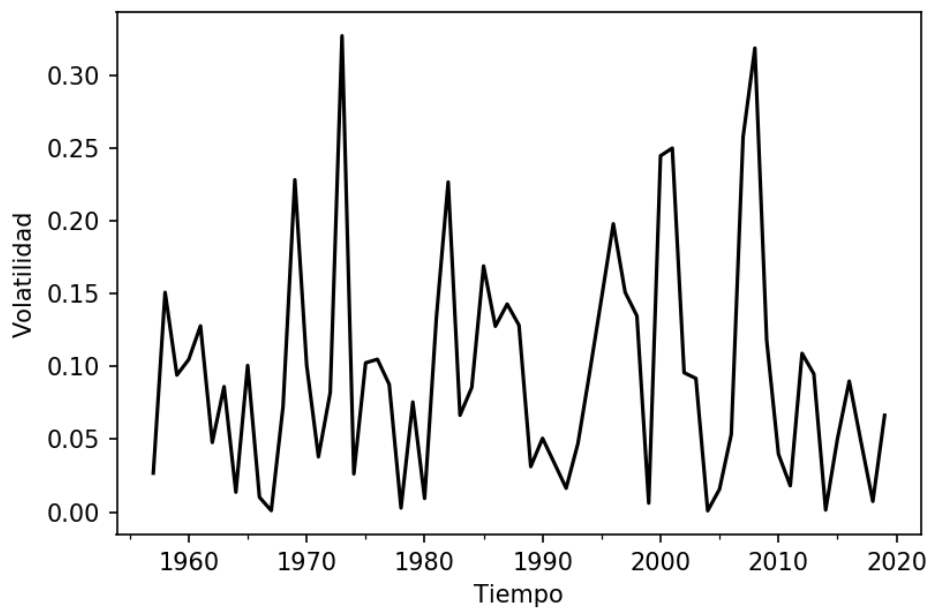


Figura 7.58: Volatilidad instantánea anual SPX

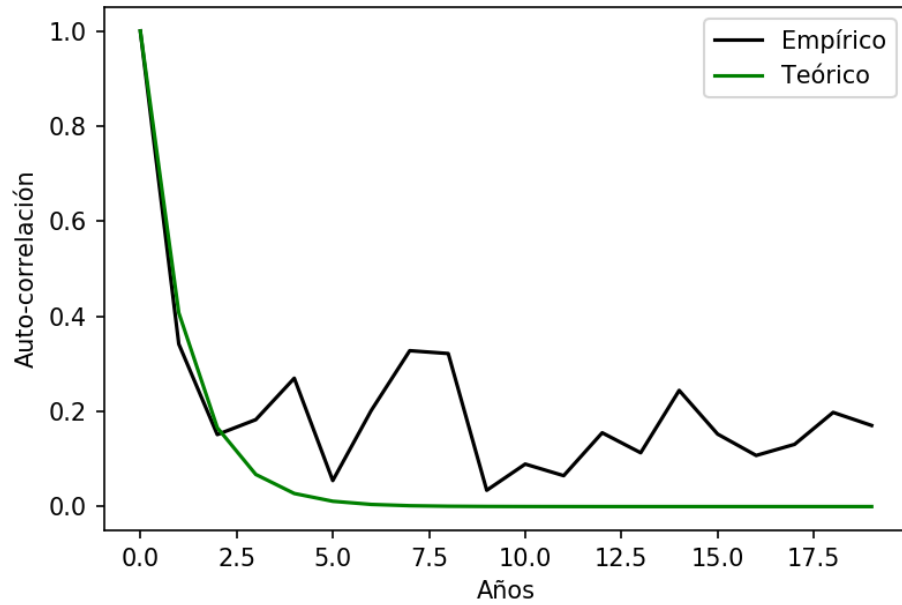


Figura 7.59: Función de auto-correlación de retornos SPX

A escala anual, las correlaciones temporales, ilustradas en la Figura 7.59, presentan mucho más ruido que a otras escalas de tiempo.

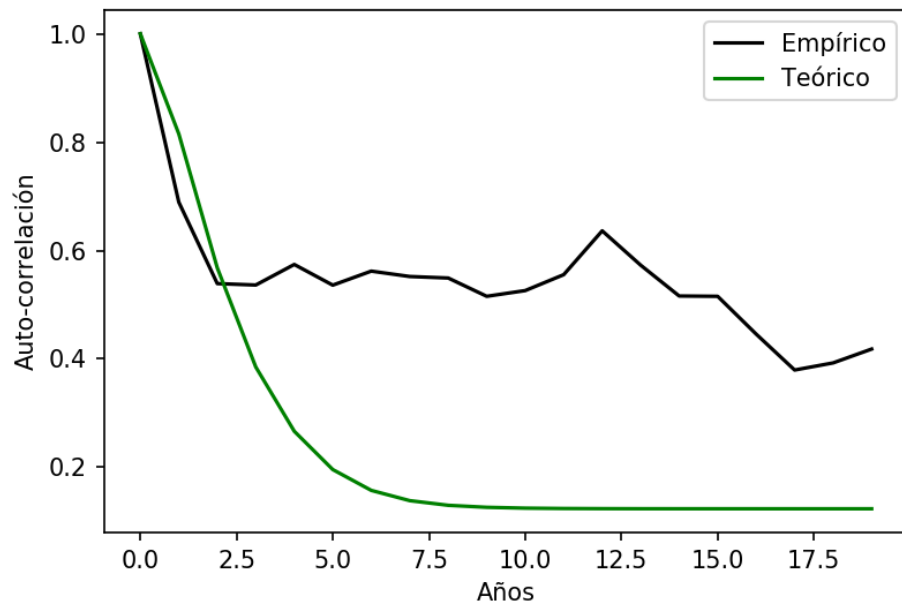


Figura 7.60: Función de auto-correlación de volatilidad SPX

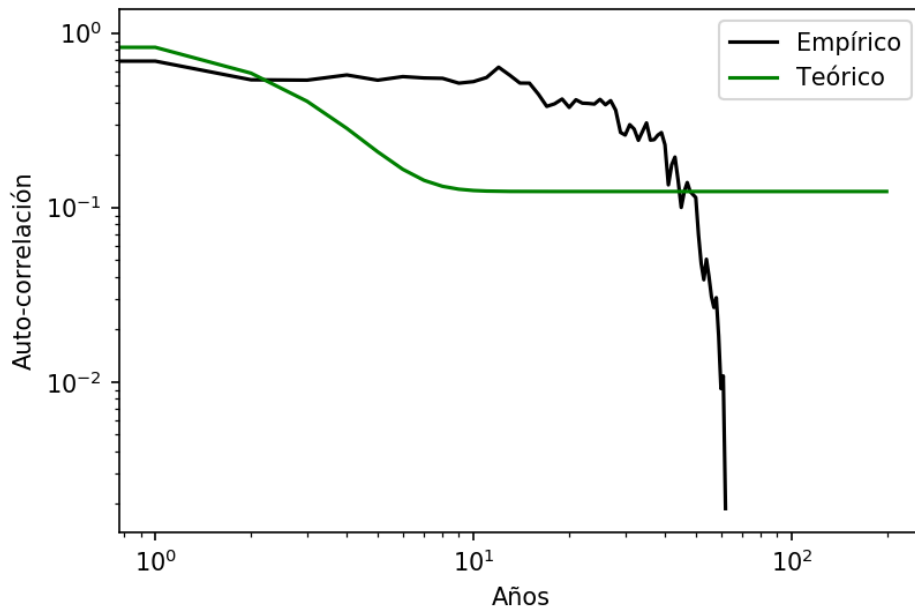


Figura 7.61: Función de auto-correlación de volatilidad en escala log-log SPX

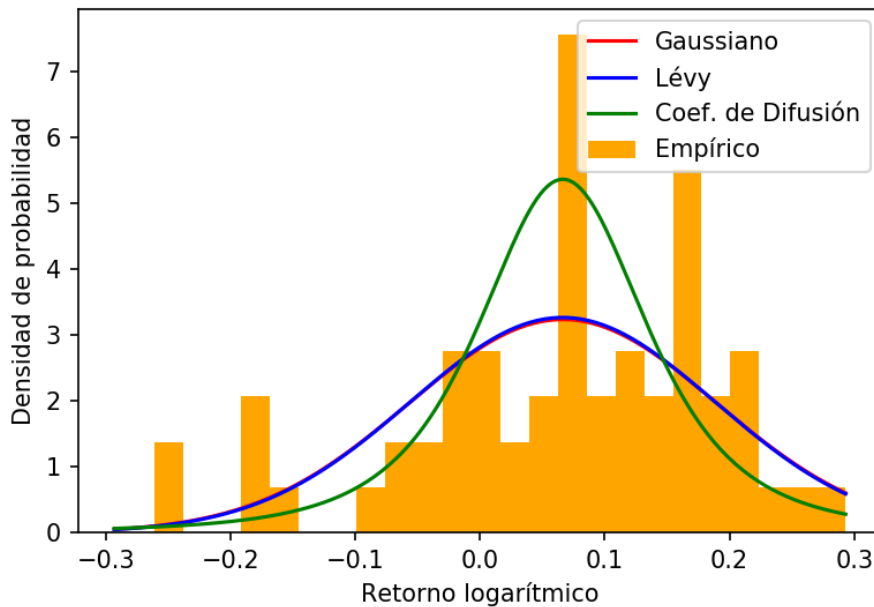


Figura 7.62: Distribuciones de densidad de probabilidad SPX

A escala anual en varios escenarios la distribución de Lévy óptima resultó ser una distribución normal, como se puede apreciar en las figuras 7.62 y 7.63. Además, en esta escala de tiempo, la distribución normal tiende a apegarse mejor a los datos.

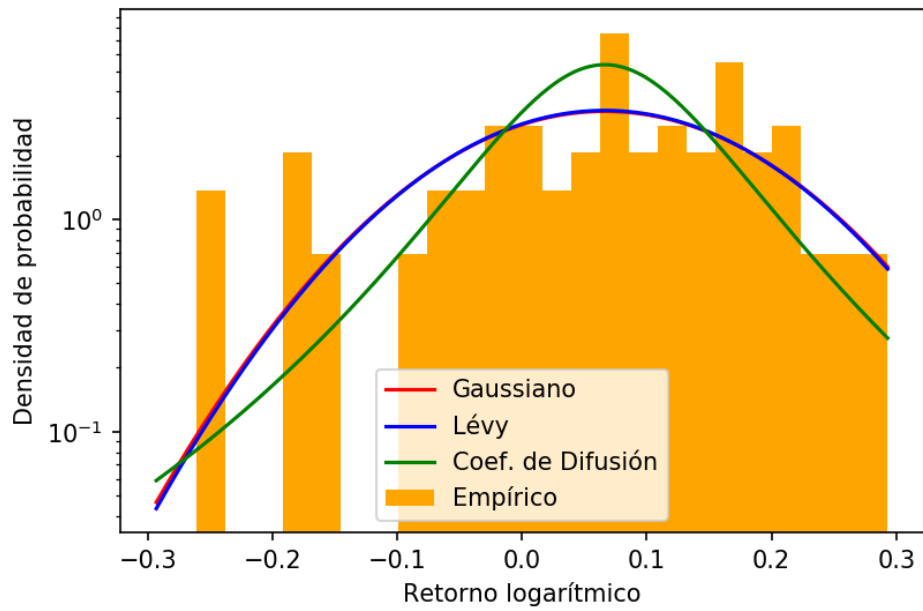


Figura 7.63: Distribuciones de densidad de probabilidad en escala logarítmica SPX

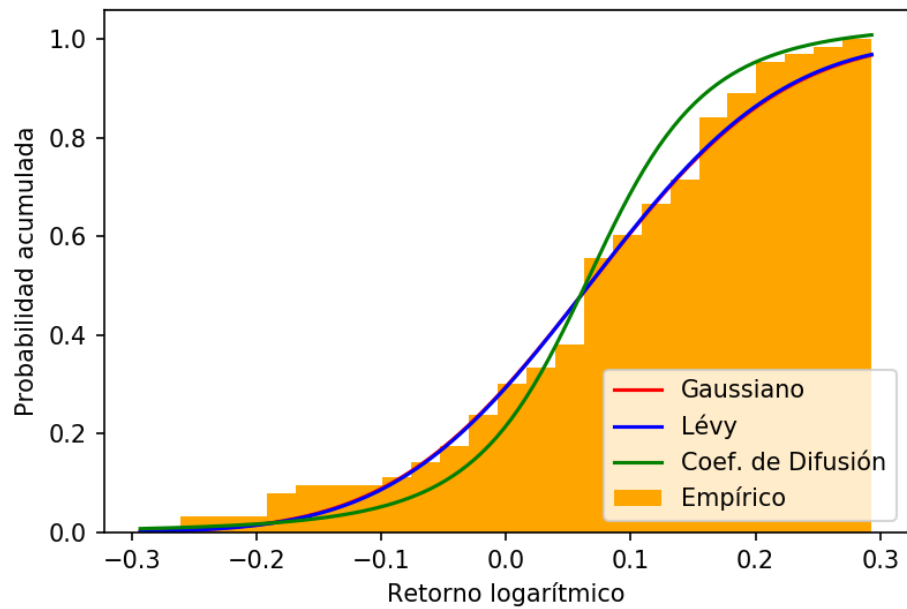


Figura 7.64: Distribuciones de probabilidad acumulativa SPX

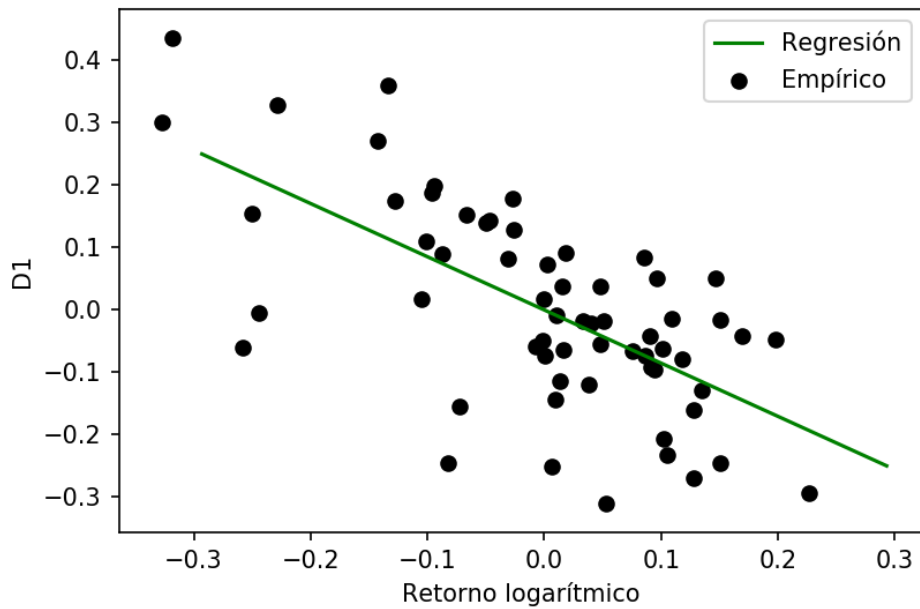


Figura 7.65: Coeficiente de difusión D_1 SPX

Al comparar las gráficas de los coeficientes de difusión a esta escala de tiempo con las gráficas a escalas de tiempo menores, es aparente que el ajuste de los datos es inferior a escalas de tiempo mayores.

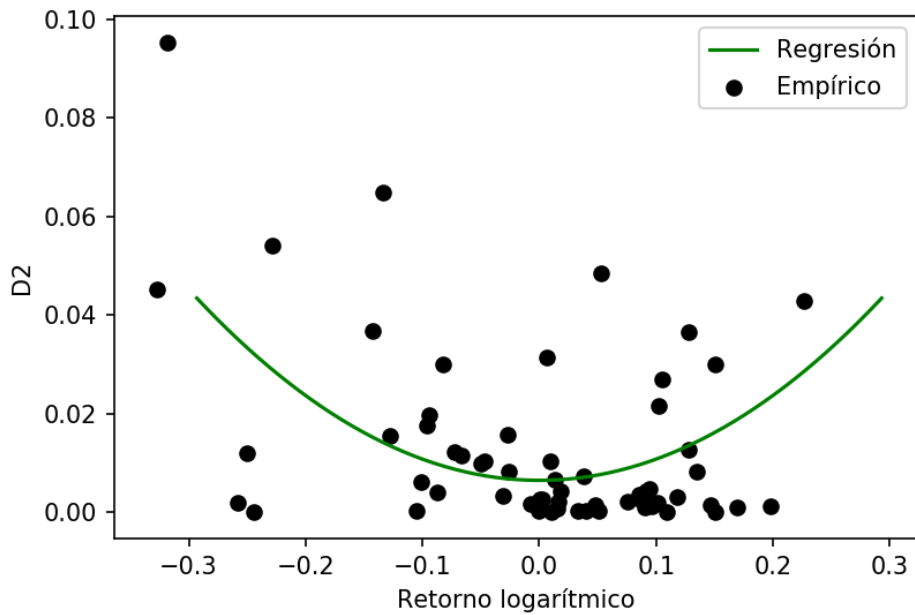


Figura 7.66: Coeficiente de difusión D_2 SPX

El modelo de coeficientes de difusión plantea teóricamente el decaimiento de las correlaciones de los retornos como se describe en la expresión 4.145, la cual indica un decaimiento exponencial. Con datos empíricos se descubrió que estos decaen de forma exponencial, tal como lo predice el modelo. Esto sugiere que cada retorno es independiente del retorno del día anterior. Esto refuerza el supuesto que los retornos se comportan como un paseo aleatorio y que funcionan como un proceso de Markov. Como lo hacen evidentes los gráficos de la función de auto-correlación de retornos en esta sección, a todas las escalas de tiempo el decaimiento en las correlaciones parece tener un decaimiento exponencial. Es importante notar que a escala anual, las correlaciones tienden a decaer más lentamente que como ocurre en las demás escalas. Además, en algunos casos, las correlaciones empíricas decaen ligeramente más despacio de lo que predice el modelo.

Como se hace evidente en las gráficas de volatilidad instantánea de esta la sección, la volatilidad instantánea fluctúa considerablemente a lo largo del tiempo, generalmente los máximos de volatilidad ocurren en tiempos de crisis financieras o recesiones económicas. El comportamiento variable parecería indicar que la volatilidad instantánea en sí funciona como un proceso estocástico. Por otro lado, estas mismas gráficas sugieren que la volatilidad es algo estacional; es decir que esta es dependiente hasta cierto punto de sus valores anteriores, se encuentran temporadas de volatilidad alta y temporadas de baja volatilidad. Esto sugiere que un proceso de Markov no es apropiado para modelar la misma. Los períodos de alta volatilidad están relacionados a períodos de grandes retornos. Este mismo comportamiento se puede observar en el comportamiento del coeficiente de difusión D_2 , que se puede relacionar con la volatilidad, como lo indica la expresión 4.125. Para mayores retornos, tanto positivos como negativos, el coeficiente tiene un valor mayor, lo que podemos relacionar con una volatilidad mayor.

Este modelo plantea teóricamente el decaimiento de las correlaciones de la volatilidad, como se describe en la expresión 4.148, lo que indica un decaimiento exponencial. El comportamiento empírico es considerablemente diferente, las correlaciones parecen decaer más rápido en los primeros períodos, pero luego decaen de una manera considerablemente más lenta de lo que predice el modelo, como se puede observar en las gráficas del decaimiento de las correlaciones de la volatilidad en la sección 7.1; este comportamiento se puede apreciar mejor en las gráficas en escala log-log. Es importante notar que en cierto punto el ritmo de decaimiento empírico parece aumentar considerablemente y estas decaen a cero con mayor rapidez que una exponencial. El período de tiempo en el que este cambio de comportamiento parece ocurrir cambia dependiendo del índice o activo que se analiza. Este resultado indica que el modelo de coeficientes de difusión no modela correctamente el comportamiento del decaimiento de las correlaciones de la volatilidad.

Las distribuciones de Lévy tienen varianza infinita fuera del caso cuando el parámetro de estabilidad $\mu = 2$ en la expresión 4.112, caso que corresponde a una distribución normal. Fuera del caso gaussiano, el hecho que la varianza sea infinita parecería indicar que las distribuciones de Lévy modelan de mejor manera los eventos extremos. Por otro lado, es importante mencionar que los datos financieros reales tienen varianza finita.

7.2. Tablas de resultados

7.2.1. Presencia de raíces unitarias

Escala de tiempo	Casos estacionarios	Porcentaje estacionario (%)	Casos no estacionarios	Porcentaje no estacionario (%)
Diaria	37	100.00	0	0.00
Semanal	37	100.00	0	0.00
Bisemanal	36	97.30	1	2.70
Mensual	35	94.59	2	5.41
Trimestral	25	67.57	12	32.43
Anual	5	13.51	32	86.49
Total	175	78.83	47	21.17

Tabla 7.1: Estacionariedad de retornos según prueba Dickey-Fuller Aumentada

La Tabla 7.1 muestra las frecuencias y porcentajes en las que la prueba Dickey Fuller Aumentada determinó que los retornos logarítmicos son un proceso estacionario y no estacionario a distintas escalas de tiempo. Si el proceso es estacionario, significa que no hay raíz unitaria. La presencia de una raíz unitaria indica que el proceso no es estacionario o de tendencia estacionara. En el presente estudio se solamente se consideró la estacionariedad sin tendencia. La tabla muestra que los retornos logarítmicos no siempre se comportan de manera estacionaria. Es evidente que entre menor es la escala de tiempo de muestreo de datos, es más probable que el proceso sea estacionario. Por otro lado, entre mayor es la escala de tiempo, es más probable que el proceso no sea estacionario.

La presencia de una raíz unitaria en una serie de tiempo no necesariamente significa que esta tenga una tendencia, por lo que los retornos a escalas de tiempo mayores en general no se mantienen apegados a una tendencia y pueden desviarse significativamente de su promedio. Como se puede observar en la gráficas 7.62 y 7.63, los datos no tienen una tendencia a agruparse al rededor del valor promedio, indicado por la posición del pico de las distribuciones, como lo es en los casos de las demás escalas de tiempo. Para escalas de tiempo menores, la mayoría de los casos tienden a ser estacionarios, lo que significa que los retornos estarán cerca de una media a lo largo del tiempo, lo que se puede observar en las gráficas de las distribuciones de densidad de probabilidad en la sección 7.1.

Es importante notar que de los tres escenarios que se excluyeron del análisis de la sub-sección 7.2.3, solo uno de estos, las acciones de Wells Fargo & Company a escala trimestral, resultadon no estacionarios. En este estudio los resultados parecen indicar que la presencia de raíces unitarias no causaron problemas en el procesamiento de datos, en general. Se debe recalcar que la mayoría de los escenarios estudiados son estacionarios.

7.2.2. Clasificación de modelos según criterios de información

Las tablas de esta sub-sección muestran la frecuencia con la que distintos modelos obtuvieron el primero, segundo y tercer lugar entre todos los modelos a distintas escalas de tiempo de análisis, según el Criterio de Información Bayesiano (BIC) y el Criterio de información de Akaike (AIC). Junto a las frecuencias se muestra el rango promedio del modelo a dicha escala temporal, donde el mejor rango posible es 1 y el peor es 3. Junto al rango promedio se muestra su error estándar. En las últimas dos filas se muestra el total de veces que el modelo obtuvo cada rango y el porcentaje

del total de casos correspondiente. De acuerdo a estos criterios, el que tenga el BIC o AIC, definidos en las ecuaciones 4.170 y 4.171, más negativo es el óptimo y por consiguiente se le da el primer lugar en dicho escenario y el modelo con el BIC menos negativo obtiene el tercer lugar.

Resultados según el criterio de información bayesiano

Escala de tiempo	1er lugar	2ndo lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	0	7	30	2.81 ± 0.07
Semanal	1	10	26	2.68 ± 0.09
Bisemanal	2	12	23	2.57 ± 0.10
Mensual	5	8	24	2.51 ± 0.12
Trimestral	12	9	16	2.10 ± 0.14
Anual	30	5	2	1.24 ± 0.09
Total	50	51	121	2.31 ± 0.05
Porcentaje	22.52 %	22.97 %	54.50 %	

Tabla 7.2: Clasificación del modelo gaussiano según el BIC

La Tabla 7.2 muestra que a una escala diaria el modelo gaussiano no logró obtener ningún primer lugar y obtuvo una gran mayoría de terceros lugares. A esta escala obtuvo la peor calificación en promedio de los tres modelos. A escala semanal, bisemanal y mensual, este modelo muestra una ligera mejoría en cuanto a las calificaciones que obtiene, pero se mantiene una clara mayoría de terceros lugares y una minoría de primeros lugares. A escala trimestral se mantiene una mayoría de terceros lugares, pero una minoría de segundos lugares. A escala anual este modelo obtiene una gran mayoría de primeros lugares y una minoría de terceros lugares. Es importante notar que a escala anual el modelo gaussiano obtiene una mejor puntuación en promedio que los otros dos modelos. Considerando todas las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto, este modelo tiene la peor puntuación en promedio. Los resultados anteriores sugieren que entre mayor es la escala de tiempo, el modelo gaussiano se adaptará mejor a los datos.

La Tabla 7.3 muestra los resultados para el modelo de distribuciones de Lévy estables. A escala diaria este modelo obtuvo una gran mayoría de primeros lugares y ningún tercer lugar. A escala semanal y bisemanal este comportamiento se mantiene. A escala mensual este modelo todavía obtiene una mayoría de primeros lugares, pero obtiene una cantidad significativa de segundos lugares. A escala trimestral el modelo obtiene una mayoría de segundos lugares y una minoría de terceros lugares, lo que cambia a escala anual, donde el modelo obtiene más terceros lugares que primeros lugares, pero siempre obtiene una mayoría de segundos lugares. Considerando todos las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto, este modelo obtiene la mejor calificación en promedio. Estos resultados sugieren que este modelo en general, pero es mejor a escalas de tiempo menores.

Escala de tiempo	1er lugar	2ndo lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	29	8	0	1.22 ± 0.07
Semanal	32	4	1	1.16 ± 0.07
Bisemanal	29	8	0	1.22 ± 0.07
Mensual	19	16	2	1.54 ± 0.10
Trimestral	16	17	4	1.68 ± 0.11
Anual	7	19	11	2.11 ± 0.11
Total	132	72	18	1.49 ± 0.04
Porcentaje	59.46 %	32.43 %	8.11 %	

Tabla 7.3: Clasificación del modelo de Lévy según el BIC

Escala de tiempo	1er lugar	2ndo lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	8	22	7	1.97 ± 0.11
Semanal	4	23	10	2.16 ± 0.10
Bisemanal	6	17	14	2.22 ± 0.12
Mensual	13	13	11	1.95 ± 0.13
Trimestral	9	11	17	2.22 ± 0.13
Anual	0	13	24	2.64 ± 0.08
Total	40	99	83	2.19 ± 0.05
Porcentaje	18.02 %	44.59 %	37.39 %	

Tabla 7.4: Clasificación del modelo de coeficientes de difusión según el BIC

La Tabla 7.4 muestra los resultados para el modelo de coeficientes de difusión. A escala diaria el modelo obtuvo una mayoría de segundos lugares con una cantidad similar de primeros y terceros lugares. A escala semanal y bisemanal este modelo obtuvo una mayoría de segundos lugares y una minoría de primeros lugares. A escala mensual se obtuvo igual cantidad de primeros y segundos lugares y una cantidad poco menor de terceros lugares. A escala trimestral se obtuvo una mayoría de terceros lugares y una minoría de primeros lugares. A escala anual, el modelo obtuvo una mayoría de terceros lugares y ningún primer lugar. Considerando todas las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto este modelo obtiene el segundo lugar entre los modelos. Estos resultados sugieren que el modelo de coeficientes de difusión tiende a adaptarse mejor a los datos reales a escalas de tiempo menores, aunque no de una manera tan verosímil como las distribuciones de Lévy.

En resumen, según el BIC, el modelo de distribuciones de Lévy estables se adapta mejor a los datos reales en la mayoría de escalas de tiempo pero tiende a ser el menos verosímil a escalas de tiempo mayores, donde el modelo gaussiano tiende a ser el mejor. Por otro lado, el modelo de coeficientes de difusión no parece ser el mejor a ninguna escala de tiempo en particular, aunque este se desempeña mejor a escalas de tiempo menores.

Resultados según el criterio de información de Akaike

Escala de tiempo	1er lugar	2ndo lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	0	7	30	2.81 ± 0.07
Semanal	1	10	26	2.68 ± 0.09
Bisemanal	1	10	26	2.68 ± 0.09
Mensual	5	6	26	2.57 ± 0.12
Trimestral	6	12	19	2.35 ± 0.12
Anual	27	7	3	1.35 ± 0.10
Total	40	52	130	2.41 ± 0.05
Porcentaje	18.02 %	23.42 %	58.56 %	

Tabla 7.5: Clasificación del modelo gaussiano según el AIC

La Tabla 7.5 muestra los resultados para el modelo gaussiano. A escala diaria el modelo obtuvo una gran mayoría de terceros lugares y ningún primer lugar. A escala semanal, bisemanal, mensual y trimestral, el modelo obtuvo una mayoría de terceros lugares y una minoría de primeros lugares. Por otro lado, a escala anual, el modelo obtuvo una mayoría de primeros lugares y una minoría de terceros lugares. Considerando todas las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto, este modelo tiene la peor puntuación en promedio. Las tendencias observadas en los resultados sugieren que entre mayor es la escala de tiempo, el modelo gaussiano se adaptará mejor a los datos.

Escala de tiempo	1er lugar	2ndo lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	30	7	0	1.19 ± 0.07
Semanal	34	3	0	1.08 ± 0.05
Bisemanal	32	5	0	1.14 ± 0.06
Mensual	23	13	1	1.41 ± 0.09
Trimestral	26	10	1	1.32 ± 0.09
Anual	10	17	10	2.00 ± 0.12
Total	155	55	12	1.35 ± 0.04
Porcentaje	69.82 %	24.77 %	5.41 %	

Tabla 7.6: Clasificación del modelo de Lévy según el AIC

La Tabla 7.6 muestra los resultados para el modelo de distribuciones de Lévy estables. A escala diaria, semanal y bisemanal, este modelo obtiene una gran mayoría de primeros lugares y ningún tercer lugar. A escala mensual y trimestral este modelo obtiene una mayoría de primeros lugares y una minoría de terceros lugares. A escala anual obtiene una mayoría de segundos lugares e igual cantidad de primeros y terceros lugares. Considerando todas las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto, este modelo obtiene la mejor calificación en promedio. Los resultados sugieren que este modelo es más efectivo a escalas de tiempo menores.

La Tabla 7.7 muestra los resultados para el modelo de coeficientes de difusión. A escala diaria el modelo obtiene una mayoría de segundos lugares e igual cantidad de primeros y segundos lugares. A escala semanal, bisemanal y mensual, el modelo obtiene una mayoría de segundos lugares y una minoría de primeros lugares. A escala trimestral el modelo obtiene una mayoría de terceros lugares y una minoría de primeros lugares, mientras que en escala anual se obtiene una mayoría de terceros lugares pero ningún primer lugar. Considerando todas las puntuaciones a todas las escalas de tiempo en conjunto, este modelo obtiene el segundo lugar entre los tres modelos. Los resultados sugieren que el modelo tiende a adaptarse mejor a los datos reales a escalas de tiempo menores, aunque no de una manera tan fuerte como los otros dos modelos.

Escala de tiempo	1er lugar	2do lugar	3er lugar	Rango promedio
Diaria	7	23	7	2.00 ± 0.10
Semanal	2	24	11	2.24 ± 0.09
Bisemanal	4	22	11	2.19 ± 0.10
Mensual	9	18	10	2.03 ± 0.12
Trimestral	5	15	17	2.32 ± 0.12
Anual	0	13	24	2.65 ± 0.08
Total	27	115	80	2.24 ± 0.04
Porcentaje	12.16 %	51.80 %	36.04 %	

Tabla 7.7: Clasificación del modelo de coeficientes de difusión según el AIC

En resumen, según el AIC, el modelo de distribuciones de Lévy estables se adapta mejor a los datos reales en la mayoría de escalas de tiempo pero tiende a ser el menos verosímil a escalas de tiempo mayores, donde el modelo gaussiano tiende a ser el mejor. Por otro lado, el modelo de coeficientes de difusión no parece ser el mejor a ninguna escala de tiempo en particular, aunque este es más verosímil a escalas de tiempo menores.

Comparación de resultados de ambos criterios

Ambos criterios de información sugieren que el modelo de distribuciones de Lévy estables se adapta mejor a los datos reales en la mayoría de escalas de tiempo, pero tiende a ser el menos verosímil a escalas de tiempo mayores, donde el modelo gaussiano tiende a ser el mejor. De igual manera, el modelo de coeficientes de difusión no parece ser el mejor a ninguna escala de tiempo en particular, aunque este se adapta mejor a los datos a escalas de tiempo menores.

El BIC tiene una penalización mayor por la cantidad de parámetros en el modelo, comparada a la penalización del AIC. Notando que el modelo gaussiano tiene 2 parámetros, el modelo de distribuciones de Lévy estables tiene 4 y el modelo de coeficientes de difusión 3, independientemente de la verosimilitud de la distribución, el BIC penalizará más al modelo de Lévy mientras que el modelo gaussiano es el menos penalizado. Esto podría explicar por qué, en promedio, el modelo de Lévy obtuvo mejores puntuaciones según el AIC que las puntuaciones según el BIC. También puede explicar por qué el modelo gaussiano obtuvo una mayor cantidad de primeros lugares según el BIC, a pesar de tener una mayor clasificación promedio según el AIC. El modelo de coeficientes de difusión obtuvo una mejor clasificación media según el AIC, lo que podría ser explicado por lo observado anteriormente.

Es importante notar que el BIC se vuelve más tolerante ante parámetros extra cuando las muestras son más grandes, y se vuelve menos tolerante a parámetros extra con muestras más pequeñas. El AIC no considera directamente el tamaño de la muestra. Dado que los datos empíricos fueron tomados de los mismos períodos de tiempo para todos los casos y solamente se varió la frecuencia de muestreo, para escalas de tiempo mayores se analizan menos datos. Esto podría explicar por qué, según el BIC, el modelo de Lévy obtuvo una menor calificación a escalas grandes, donde la muestra es más pequeña. La calificación promedio según el AIC a escala anual es mayor a la del BIC. Esto también podría explicar por qué el modelo gaussiano obtuvo mejores clasificaciones a escalas mayores según el BIC, dado que el impacto de la muestra más pequeña es compensado parcialmente por tener la menor cantidad de parámetros de los tres modelos. Este efecto también ayudó la calificación del BIC para modelo de coeficientes de difusión, el que obtuvo una mayor cantidad de primeros lugares según el BIC en escalas grandes, comparado a los primeros lugares del AIC.

Es importante notar que la función de verosimilitud logarítmica, definida en la ecuación 4.169, es la misma para ambos criterios. El hecho que ambos criterios mostraran las mismas tendencias en

las clasificaciones sugieren que el aspecto que principalmente determina la calificación es la verosimilitud de la distribución contrastada a los datos reales, a pesar del efecto de la cantidad de parámetros y el tamaño de la muestra. El efecto de la cantidad de parámetros posiblemente se hace más notable cuando los distintos modelos difieren considerablemente en la cantidad de parámetros que los define.

7.2.3. Análisis de resultados del modelo de coeficientes de difusión

En esta sub-sección se muestran resúmenes de distintos objetos de estudio, identificados en el título de cada tabla. Para cada escala de tiempo, se muestra el valor máximo y mínimo que obtuvo este objeto, su valor promedio junto a su error estándar y la desviación estándar. Se debe notar que a escala anual, se excluyeron los resultados de las acciones de Alibaba Group Holding Limited (BABA), dado que los coeficientes de difusión no tenían una forma clara por lo que ocurrían errores en la regresión de los datos. Esto es probablemente causado por la reducida cantidad de datos a escala anual. A escala trimestral, se excluyeron los resultados del índice Hong Kong Hang Seng (HSI) y de las acciones de Wells Fargo & Company ya que ocurrían problemas en las regresiones y resultaban en valores de varios órdenes de magnitud mayores al resto de los casos.

Como se ha mencionado en las secciones anteriores, el modelo de coeficientes de difusión tiende a ser menos apropiado a escalas de tiempo mayores. A continuación, se discutirá en mayor detalle la calidad del ajuste a los datos.

Escala de tiempo	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. estándar
Diaria	0.55	0.46	$0.50 \pm 2.87 \times 10^{-3}$	0.02
Semanal	0.46	0.35	$0.41 \pm 4.43 \times 10^{-3}$	0.03
Bisemanal	0.45	0.33	$0.38 \pm 5.25 \times 10^{-3}$	0.03
Mensual	0.48	0.33	$0.38 \pm 5.02 \times 10^{-3}$	0.03
Trimestral	0.51	0.30	$0.39 \pm 8.60 \times 10^{-3}$	0.05
Anual	0.67	0.16	0.42 ± 0.02	0.09

Tabla 7.8: Análisis del coeficiente de determinación para el coeficiente de difusión D_1

La Tabla 7.8 muestra un resumen de los coeficientes de determinación a distintas escalas de tiempo para el coeficiente de difusión D_1 . Los resultados indican que la calidad de las regresiones tiende a ser más consistente entre menor es la escala de tiempo. A una escala de tiempo mayor, existe una mayor variabilidad en la calidad de las regresiones. Se debe notar que a ninguna escala de tiempo se obtuvieron valores relativamente cercanos a 1, que es el valor óptimo. Comparar las gráficas para el coeficiente D_1 en la sección 7.1 con la Figura 4.1, generada por Richmond utilizando datos a escala de minutos, sugiere que la suposición de que D_1 es lineal se cumple de manera más precisa a escalas de tiempo más pequeñas que las consideradas en este estudio.

Escala de tiempo	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. estándar
Diaria	0.92	0.33	0.51 ± 0.02	0.12
Semanal	0.65	0.12	0.38 ± 0.02	0.12
Bisemanal	0.80	0.10	0.30 ± 0.02	0.13
Mensual	0.61	0.11	0.27 ± 0.02	0.13
Trimestral	0.77	0.05	0.35 ± 0.03	0.19
Anual	0.95	4.60×10^{-3}	0.32 ± 0.04	0.26

Tabla 7.9: Análisis del coeficiente de determinación para el coeficiente de difusión D_2

La Tabla 7.9 contiene un resumen de los coeficientes de determinación para el coeficiente de difusión de segundo orden D_2 . De manera similar a los resultados para el coeficiente de primer orden, entre mayor es la escala de tiempo de análisis, la consistencia de la calidad de las regresiones es menor. Comparado al coeficiente anterior, la consistencia en todas las escalas de tiempo es menor. A escala de tiempo diaria se obtiene la mejor calidad de regresión en promedio. Se debe notar que en general, el coeficiente de difusión D_2 tiene una menor calidad de regresión que el de primer orden. De igual manera que para el coeficiente D_1 , comparar las gráficas para el coeficiente D_2 en la sección 7.1 con la Figura 4.2, generada por Richmond utilizando datos a escala de minutos, sugiere que la suposición de que D_2 es cuadrático se cumple de manera más precisa a escalas de tiempo más pequeñas que las consideradas en este estudio.

Escala de tiempo	Máximo (%)	Mínimo (%)	Promedio (%)	Desv. estándar (%)
Diaria	47.55	4.66	11.43 ± 1.36	8.29
Semanal	61.96	6.82	16.13 ± 2.02	12.30
Bisemanal	54.45	9.25	19.73 ± 1.62	9.85
Mensual	73.11	9.90	21.06 ± 2.06	12.53
Trimestral	170.75	17.37	42.46 ± 5.23	30.92
Anual	3133.53	24.43	181.83 ± 86.40	518.40

Tabla 7.10: Análisis de incertidumbre en la constante D

Escala de tiempo	Máximo (%)	Mínimo (%)	Promedio (%)	Desv. estándar (%)
Diaria	47.69	5.11	11.81 ± 1.35	8.22
Semanal	62.14	8.66	17.87 ± 1.99	12.11
Bisemanal	57.11	13.25	23.06 ± 1.60	9.75
Mensual	88.03	14.23	26.88 ± 2.27	13.81
Trimestral	173.82	26.55	52.81 ± 5.16	30.56
Anual	3142.67	52.17	230.34 ± 85.73	514.40

Tabla 7.11: Análisis de incertidumbre en la constante C

En la tablas 7.10, 7.11 y 7.12 se analiza la incertidumbre de las constantes D , C y κ , las cuales dependen directamente de las regresiones de los coeficientes de difusión. La relación de estas constantes a los coeficientes está planteada en la expresión 4.140. Para estas tres variables, es evidente que entre mayor es la escala de tiempo de análisis, mayor es la incertidumbre promedio y mayor es la dispersión de las incertidumbres, lo que indica que a escalas mayores se tendrán más casos extremos en cuando a la incertidumbre de las constantes.

Escala de tiempo	Máximo (%)	Mínimo (%)	Promedio (%)	Desv. estándar (%)
Diaria	3.37	0.76	$1.69 \pm 9.32 \times 10^{-3}$	0.57
Semanal	15.89	1.88	4.85 ± 0.38	2.31
Bisemanal	18.30	2.94	8.07 ± 0.50	3.04
Mensual	26.52	4.64	12.15 ± 0.69	4.19
Trimestral	58.35	8.28	20.58 ± 1.74	10.29
Anual	408.95	12.79	65.81 ± 13.19	79.14

Tabla 7.12: Análisis de incertidumbre en la constante κ

Todos estos resultados sugieren que el modelo de coeficientes de difusión es menos efectivo modelando datos a escalas de tiempo mayores. La consistencia en la calidad de las regresiones se vuelve menor en estas escalas de tiempo. Lo que indica que la calidad del ajuste es contingente al

conjunto de datos que se elige para analizar. De igual manera, las incertidumbres tienden a ser mayores en estas escalas de tiempo.

Escala de tiempo	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. estándar
Diaria	1.07	0.91	$1.01 \pm 5.27 \times 10^{-3}$	0.03
Semanal	1.44	1.09	1.23 ± 0.01	0.08
Bisemanal	1.52	1.12	1.31 ± 0.02	0.11
Mensual	1.53	1.04	1.34 ± 0.02	0.10
Trimestral	1.73	1.10	1.32 ± 0.03	0.15
Anual	1.98	0.82	1.30 ± 0.05	0.27

Tabla 7.13: Análisis de períodos de decaimiento de correlaciones en retornos

Este modelo permite calcular una constante y un período de tiempo para el decaimiento de las correlaciones, definido en la ecuación 4.145. En la tabla 7.13 se estudian los períodos de decaimiento a distintas escalas de tiempo. Es evidente que entre menor es la escala, el período de decaimiento tiende a ser menor. Una posible explicación para este comportamiento yace en el comportamiento de los mercados financieros. En general, el comportamiento de los activos tiende a estar correlacionado con los ciclos económicos. Durante un *Bull Market* o mercado alcista, se espera observar una serie de retornos positivos consecutivos, lo cual sugiere la existencia de correlaciones en los retornos. De igual manera, en un *Bear Market* o mercado bajista, se espera observar una serie consecutiva de retornos negativos, los cuales aumentarán las correlaciones de los retornos. Es importante notar que los mercados alcistas tienden a ser más prolongados que los mercados bajistas, lo que explica por qué los activos tienden a subir a lo largo del tiempo.

Por lo tanto, se puede esperar encontrar casos donde los retornos anuales consecutivos son positivos. Entre menor es la escala de tiempo, el comportamiento de los precios tiene una menor correlación con los ciclos económicos y parece depender más de las expectativas adaptativas de los agentes de mercados; es decir, los precios se moverán de manera que no parece guiarse por el comportamiento de la economía o el rendimiento de las compañías, sino que se moverán por las decisiones personales de los agentes de mercado.

Escala de tiempo	Máximo (%)	Mínimo (%)	Promedio (%)	Desv. estándar (%)
Diaria	67.35	7.06	16.55 ± 1.92	11.65
Semanal	87.84	11.87	24.76 ± 2.81	17.11
Bisemanal	79.45	17.88	31.63 ± 2.24	13.65
Mensual	117.46	19.34	36.50 ± 3.06	18.61
Trimestral	243.94	36.04	72.11 ± 7.18	42.48
Anual	4438.05	69.28	317.36 ± 121.23	727.35

Tabla 7.14: Análisis incertidumbre en períodos de decaimiento de correlaciones en retornos

La Tabla 7.14 contiene un estudio sobre la incertidumbre de los períodos de tiempo anteriormente mencionados. Como lo hace evidente la ecuación 4.145, este período de tiempo es calculado de acuerdo a las constantes que aparecen en la forma analítica de los coeficientes de difusión, definidos en la expresión 4.140. La tabla muestra que a todas las escalas de tiempo, se obtiene un porcentaje de incertidumbre considerable y este crece en promedio entre mayor es la escala de tiempo de análisis. Esto indica que la incertidumbre en los parámetros del modelo de coeficientes de difusión crece entre mayor es la escala de tiempo.

Escala de tiempo	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. estándar
Diaria	0.83	0.67	$0.78 \pm 5.45 \times 10^{-3}$	0.03
Semanal	0.91	0.76	$0.85 \pm 6.27 \times 10^{-3}$	0.04
Bisemanal	0.91	0.71	$0.86 \pm 7.01 \times 10^{-3}$	0.04
Mensual	0.91	0.64	0.83 ± 0.01	0.06
Trimestral	0.93	-0.56×10^{-3}	0.74 ± 0.03	0.21
Anual	0.98	-4.07	0.58 ± 0.15	0.87

Tabla 7.15: Análisis de coeficientes de determinación para el decaimiento de correlaciones en retornos

En la Tabla 7.15 se estudia el coeficiente de determinación de la forma teórica del decaimiento de las correlaciones. Es evidente que entre mayor es la escala de tiempo, la calidad del modelo se vuelve más dispersa; es decir, se obtienen casos donde el modelo se adapta bien a los datos reales y casos donde ocurre lo contrario. Notando las propiedades del coeficiente de determinación, con la excepción de las escalas trimestrales y anuales, el modelo predice relativamente bien el decaimiento en las correlaciones. A escalas trimestrales y anuales, la calidad del modelo tiende a degradarse. Aunque es importante notar que hay casos a escala anual donde el modelo logra adaptarse bastante bien. Estas observaciones sustentan el argumento que a escalas de tiempo grande, las correlaciones se vuelven menos despreciables.

Escala de tiempo	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. estándar
Diaria	-29.45	-303.63	-144.13 ± 11.47	69.78
Semanal	-6.13	-78.79	-49.98 ± 2.86	17.37
Bisemanal	-3.74	-51.02	-25.08 ± 1.65	10.05
Mensual	-2.10	-45.42	-19.33 ± 1.50	9.11
Trimestral	0.49	-19.62	-6.72 ± 0.89	5.28
Anual	0.83	-7.45	-1.06 ± 0.33	1.97

Tabla 7.16: Análisis de coeficientes de determinación para el decaimiento de correlaciones en la volatilidad

La Tabla 7.16 contiene un resumen de los coeficientes de determinación para el decaimiento de las correlaciones de la volatilidad. Los resultados sugieren que el modelo se vuelve de menor calidad en escalas de tiempo menores. En la gran mayoría de los casos se obtuvieron valores negativos, lo que indica que este no es un buen modelo en general. Hay algunas excepciones a escalas de tiempo mayores, lo que sugiere que las correlaciones en la volatilidad tienden a ser más relevantes a corto plazo y al considerar datos a escalas de tiempo grandes, las correlaciones en la volatilidad decaerán más rápido.

- Conforme aumenta la escala de tiempo para el análisis de los datos se empiezan a percibir auto-correlaciones en los retornos, dado que estas tienden a decaer más lentamente. Además, en estas escalas de tiempo, los retornos logarítmicos tienden a no revertirse a un valor promedio.
- Lo contrario tiende a ocurrir en escalas de tiempo menores, donde las auto-correlaciones de los retornos decaen casi instantáneamente, lo que da validez a modelar las series de tiempo de retornos logarítmicos como paseos aleatorios.
- El comportamiento de las correlaciones junto al comportamiento de los retornos en sí, indican que a escalas mayores los mercados son impulsados por factores externos como ciclos económicos, mientras que a escalas menores tienden a ser más impredecibles.
- La volatilidad se comporta de manera distinta a los retornos, ya que las correlaciones temporales tienden a decaer lentamente en todas las escalas de tiempo. Además, la volatilidad tiene un comportamiento aparentemente estacional, que se refleja en períodos temporales donde la volatilidad tiende a ser relativamente alta y períodos de tiempo donde tiende a ocurrir lo contrario.
- La volatilidad no se modela correctamente como un paseo puramente aleatorio, ya que esto no considera las correlaciones temporales no despreciables.
- En la mayoría de casos, el decaimiento de las correlaciones de los retornos predicho modelo de coeficientes de difusión se ajusta correctamente al comportamiento de los datos reales. Por otro lado, para las correlaciones de la volatilidad, el comportamiento empírico difiere considerablemente del comportamiento predicho por dicho modelo.
- A pesar que las distribuciones de Lévy tienen varianza infinita, a diferencia de los datos empíricos, estas distribuciones son las que mejor se adaptan a los datos en general. El tener varianza infinita hace que este modelo se adapte mejor a eventos extremos.
- Entre mayor es la escala de tiempo, el modelo gaussiano tiende a adaptarse mejor a los datos.
- El modelo de coeficientes de difusión tiende a ser mejor a escalas de tiempo pequeñas, pero en general, es menos verosímil que el modelo de Lévy. La forma en la que el modelo se comporta a las escalas de tiempo consideradas en este estudio comparado a estudios previos, indica que este modelo está mejor diseñado para modelar retornos en escala menores a un día.

- A escalas de tiempo grandes, los retornos logarítmicos de activos financieros no se modelan bien como un proceso de difusión.
- La muestra de datos específica que se analiza tiene un impacto en la selección de modelo óptimo.

Recomendaciones

La principal recomendación para estudios futuros sería aumentar y diversificar los activos estudiados ya que los resultados pueden depender de los activos analizados. Es importante notar que hubo algunos casos donde el algoritmo del modelo de coeficientes de difusión se encontró con problemas que eran provocados por los datos específicos que se analizaban.

El período de tiempo de análisis también puede influir en los resultados del estudio. Por lo tanto, para estudios futuros se recomienda estudiar los posibles efectos en los resultados al tomar datos de fechas específicas. Por ejemplo, se podrían analizar solamente datos de *Bull Markets* o bien *Bear Markets*; estos usualmente coinciden con períodos de expansión económica y recesiones, respectivamente.

En este estudio solamente se consideraron índices bursátiles y acciones, se recomienda ampliar los tipos de activos que se analizan. Además, los componentes de los índices bursátiles cambian con el paso del tiempo. Es posible que estos cambios hayan impactado los resultados del estudio. Se recomienda hacer un estudio donde se hagan una diferenciación clara en los resultados de acciones e índices bursátiles.

Se observó que el modelo de coeficientes de difusión tiende a adaptarse mejor a los datos empíricos a escalas de tiempo menores. Se recomienda realizar un estudio amplio utilizando datos de frecuencias menores a un día, como podrían ser minutos o incluso segundos. Es posible que a estas escalas de tiempo el modelo de coeficientes de difusión muestre ser mejor que los otros dos. A esta escala de tiempo, también sería posible realizar un estudio del modelo de coeficientes de difusión con dependencia temporal, como se plantea en el Marco Teórico.

Es posible que existan otras distribuciones de probabilidad que puedan servir para modelar distribuciones de retornos financieros. Para estudios futuros, se recomienda contemplar otras distribuciones para comparar resultados de verosimilitud. Una posible alternativa es la distribución t de Student, dado que esta tiene una forma similar a la distribución normal, pero esta tiene colas más gruesas, lo que se traduciría en una mayor probabilidad de eventos extremos. También puede ser posible modelar las series de tiempo con un modelo de heterocedasticidad condicional autoregresiva generalizada (GARCH), dado que estos se adaptan a la posibilidad de cambios en la volatilidad a lo largo del tiempo, tal y cómo se observó en los resultados.

Una de las principales aplicaciones del modelado de retornos de activos financieros es el realizar proyecciones de precios. En estudios futuros, se recomienda realizar proyecciones de precios según

las distintas distribuciones. También se podría evaluar la calidad de dichas proyecciones con datos reales.

-
- [1] Louis Bachelier. «Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection». En: *Sociological Methods & Research*. 2.^a ép. 33 (2004), págs. 261-304.
- [2] Louis Bachelier. «Théorie de la spéculation». En: *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3.^a ép. 17 (1900), págs. 21-86.
- [3] Adam Barone. *Asset*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/a/asset.asp>. (8/3/2020).
- [4] Fischer Black y Myron Scholes. «The Pricing of Options and Corporate Liabilities». En: *Journal of Political Economy*. 3.^a ép. 81 (1973), págs. 637-654.
- [5] Maureen Burton, Reynold Nesiba y Bruce Brown. *An Introduction to Financial Markets and Institutions*. 2.^a ed. Routledge, 2015. ISBN: 9780765622761.
- [6] Steven Chapra y Raymond Canale. *Numerical Methods for Engineers*. 5.^a ed. McGraw-Hill Companies, Inc., 2006. ISBN: 9789701061145.
- [7] James Chen. *Financial Asset*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/f/financialasset.asp>. (9/5/2019).
- [8] James Chen. *Liquid Asset*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/l/liquidasset.asp>. (27/3/2020).
- [9] James Chen y Gordon Scott. *Bull Market*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/b/bullmarket.asp>. (28/2/2020).
- [10] The SciPy community. *NumPy Reference*. URL: <https://numpy.org/doc/1.18/reference/index.html>. (2020).
- [11] Mark Davis y Alison Etheridge. *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*. Princeton University Press, 2006. ISBN: 9780691117522.
- [12] Albert Einstein. «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.» En: *Annalen der Physik* 322 (1905), págs. 549-560.
- [13] Eugene Fama. «The Behavior of Stock Market Prices». En: *The Journal of Business*. 1.^a ép. 38 (1965), págs. 34-105.
- [14] Yahoo! Finance. *Company profile, business summary Database*. URL: <https://finance.yahoo.com/>. (2020).
- [15] A. N. Kolmogorov. «Sobre métodos analíticos en el cálculo de probabilidad.» En: *Anales Matemáticos*. 104.^a ép. (1931), págs. 415-458.

- [16] Bloomberg L.P. *Bloomberg Terminal Database*. (2020).
- [17] Melvin Lax, Wei Cai y Min Xu. *Random Processes in Physics and Finance*. 1.^a ed. Oxford University Press, 2006. ISBN: 9780198567769.
- [18] Benoit Mandelbrot. «The variation of Certain Speculative Prices». En: *The Journal of Business*. 4.^a ép. 36 (1963), págs. 394-419.
- [19] Rosario N. Mantegna y H. Eugene Stanley. *An introduction to econophysics: Correlations and complexity in finance*. 1.^a ed. Oxford University Press, 2004. ISBN: 0511039948.
- [20] Andrey Markov. «La extensión de la ley de grandes números a cantidades que dependen unas de otras.» En: *Actas de la Sociedad de Física y Matemáticas de la Universidad de Kazan*. 2.^a ép. 15 (1906), págs. 135-156.
- [21] Robert Merton. «Theory of Rational Option Pricing». En: *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1.^a ép. 4 (1973), págs. 141-183.
- [22] José María Miotto. *Module Levy*. URL: <https://pylevy.readthedocs.io/en/latest/>. (2018).
- [23] Matthew Newville y Till Stenstizki. *Non-Linear Least-Squares Minimization and Curve-Fitting for Python*. URL: <https://lmfit.github.io/lmfit-py/>. (2020).
- [24] PennState. *Likelihood & Log Likelihood*. URL: <https://online.stat.psu.edu/stat504/node/27/>.
- [25] Josef Perktold, Skipper Seabold y Jonathan Taylor. *Augmented Dickey-Fuller unit root test*. URL: <https://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.stattools.adfuller.html>. (2020).
- [26] S. Queirós y col. «A nonextensive approach to the dynamics of financial observables». En: *European Physical Journal B*. 55.^a ép. (2007), págs. 161-167.
- [27] Peter Richmond, Jürgen Mimkes y Stefan Hutzler. *Econophysics and Physical Economics*. 1.^a ed. Oxford University Press, 2013. ISBN: 9780199674701.
- [28] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. 2.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2005. ISBN: 9780471690740.
- [29] N. Wiener. «Differential space». En: *Journal of Mathematical Physics*. 2.^a ép. (1923), págs. 127-146.

A. Códigos

A.1. Código para análisis completo

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Analisis Completo

@author: Jorge
"""

# Modulos a importar

import numpy as np
import math
import scipy.special as spec
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from lmfit import Model
import scipy.stats as si
import levy
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
from timeit import default_timer as timer

# Funciones Generales

def RetLog(s): # Genera lista de retornos logaritmicos
    RL = []
```

```

    for i in range(len(s)-1):
        RL.append(np.log(s[i + 1]/s[i]))
    RL.append(0.0)
    return RL

def RetornoAPrecio(ret,s0): # Para un t=1, regresa el precio dado un precio
    ↪ inicial y un retorno log
    return s0*np.exp(ret)

def normfactor(x,y):
    return integrate.simps(y,x)

def autocorr(x):
    result = np.correlate(x, x, mode='full')
    return result[result.size // 2:]

def NACR(x,t0,tf): # Funcion de autocorrelacion normalizada
    result = np.correlate(x, x, mode='full')
    acr0 = result[result.size // 2:]
    acr1 = acr0[t0:tf]
    nacr = [x/float(max(acr1)) for x in acr1]
    return nacr

def InstVol(rets): # Volatilidad instantanea ajustando la media a 0
    avg = np.mean(rets)
    retsAdj = [r-avg for r in rets]
    vol = [np.abs(ra) for ra in retsAdj]
    return vol

def runningMeanFast(x, N): # Media movil
    return np.convolve(x, np.ones((N,))/N)[(N-1):]

def RMSE(lemp,lteo): # Root Mean Square Error
    n = len(lteo)
    difsq = []
    for i in range(n-1):
        difsq.append((lemp[i] - lteo[i])**2)
    return np.sqrt(sum(difsq)/n)

def MAE(lemp,lteo): # Mean Absolute Error
    n = len(lteo)
    difabs = []
    for i in range(n-1):
        difabs.append(np.abs(lemp[i] - lteo[i]))
    return sum(difabs)/n

def difflists(List1,List2): # Devuelve una lista con la resta de los elementos
    return [x1 - x2 for (x1, x2) in zip(List1, List2)]

def midpointslist(x): # Regresa los puntos medios de una lista de bordes
    return (x[1:] + x[:-1]) / 2

def ScatterRets(rets,nbins):
    Freq, Bord, Pat = plt.hist(rets,bins=nbins,density=True)

```

```

Midpts = midpointslist(Bord)
return Midpts, Freq

def RetRange(rets,n=50):
    retmax = max(abs(max(rets)),abs(min(rets))) # Determino el retorno absoluto
    ↪ maximo
    rrange = np.linspace(-retmax,retmax,num=n) # Rango de retornos a graficar
    rrange = rrange.tolist()
    return rrange

def RetRange2(MAX,MIN,n=100):
    retmax = max(abs(MAX),abs(MIN))
    rrange = np.linspace(-retmax,retmax,num=n)
    rrange = rrange.tolist()
    return rrange

def truncate(number, digits) -> float: # Trunca floats a cierto numero de
    ↪ decimales
    stepper = 10.0 ** digits
    return math.trunc(stepper * number) / stepper

def CoeffDetermination(yemp,yteo):
    avg = np.mean(yemp)
    sstot = np.sum([(y - avg)**2 for y in yemp])
    ssres = np.sum([(ye - yt)**2 for (ye,yt) in zip(yemp,yteo)])
    r2 = 1 - (ssres/sstot)
    return r2

def adftest(rets):
    adfresult = adfuller(rets,autolag=None)
    adfstat = adfresult[0]
    pval = adfresult[1]
    if adfresult[1] < 0.05:
        stationarity = 'si'
    else:
        stationarity = 'no'
    return adfstat, pval, stationarity

def rankmodels(ICnd,IClv,ICfp):
    array = np.array([ICnd,IClv,ICfp])
    temp = array.argsort()
    ranks = np.empty_like(temp)
    ranks[temp] = np.arange(len(array))
    rankND = ranks[0] + 1
    rankLV = ranks[1] + 1
    rankFP = ranks[2] + 1
    return rankND, rankLV, rankFP

# Funciones Modelo Gaussiano

def NormDistPDF(avg,stdev,retsrage): # Devuelve distribucion de densidad de
    ↪ probabilidad Gaussiana
    return [si.norm.pdf(r,loc=avg,scale=stdev) for r in retsrage]

```

```

def NormDistCDF(avg,stdev,retsrange): # Distribucion Acumulativa
    return [si.norm.cdf(r,loc=avg,scale=stdev) for r in retsrange]

def QTND(P,avg,stdev): # Quantil Dist Normal
    return si.norm.ppf(P,loc=avg,scale=stdev)

def BICnAIC_ND(rets,n,avg,stdev):
    loglik = np.sum([np.log(si.norm.pdf(r,loc=avg,scale=stdev)) for r in rets])
    bic = 2*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 4 - 2*loglik
    return bic, aic

# Funciones Modelo de Levy

def LevyFit(rets,retsrange):
    pmlv = levy.fit_levy(rets)
    pmlist = pmlv[0].get()
    aa = pmlist[0]
    bb = pmlist[1]
    uu = pmlist[2]
    ss = pmlist[3]
    pdist = [levy.levy(x,aa,bb,mu=uu,sigma=ss) for x in retsrange]
    cdist = [si.levy_stable.cdf(x,aa,bb,loc=uu,scale=ss) for x in retsrange]
    return pdist, cdist, aa, bb, uu, ss

def QTLV(P,aa,bb,uu,ss): #Quantil Levy
    return si.levy_stable.ppf(P,aa,bb,loc=uu,scale=ss)

def BICnAIC_LV(rets,n,aa,bb,uu,ss):
    loglik = np.sum([np.log(levy.levy(r,aa,bb,mu=uu,sigma=ss)) for r in rets])
    bic = 4*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 8 - 2*loglik
    return bic, aic

# Funciones Modelo Fokker Planck con coeficientes de difusion generalizados

def D1(seriesX): # Calcula coeficiente de difusion D1 en base a serie de tiempo,
    ↪ como funcion de la serie
    d1 = []
    N = len(seriesX)
    for i in range(N-1):
        diff = seriesX[i+1] - seriesX[i]
        d1.append(diff)
    return d1

def D2(seriesX): # Calcula coeficiente de difusion D2 en base a serie de tiempo,
    ↪ como funcion de la serie
    d2 = []
    N = len(seriesX)
    for i in range(N-1):
        diff = seriesX[i+1] - seriesX[i]
        d2.append((diff**2)/2)
    return d2

```

```

def polyregfree(x,y,n): # Regresion polinomial sin restriccion
    return np.polyfit(x,y,deg=n)

def polyregadj(x,y,n): # Regresion polinomial con coeficientes fijos
    if n == 1:
        pmodel = Model(func1)
        params = pmodel.make_params(a=1, b=0)
        params['b'].vary = False
        result = pmodel.fit(y,params,x=x)
        report = result.fit_report()
        coefd = result.best_values
        coefs = [coefd['a'], coefd['b']]
    if n == 2:
        pmodel = Model(func2)
        params = pmodel.make_params(a=1, b=0, c=1)
        params['b'].vary = False
        params['a'].min = 1e-100
        params['c'].min = 1e-100
        result = pmodel.fit(y,params,x=x)
        report = result.fit_report()
        coefd = result.best_values
        coefs = [coefd['a'], coefd['b'], coefd['c']]
    return result, coefs, report

def func1(x, a, b):
    return a * x + b

def func2(x, a, b, c):
    return a * x ** 2 + b * x + c

def poly1(coefs,x):
    return coefs[0]*x + coefs[1]

def poly2(coefs,x):
    return coefs[0]*x**2 + coefs[1]*x + coefs[2]

def D1pred(rets,coefs): # Regresa lista
    d1pred = []
    for r in rets:
        d1pred.append(poly1(coefs,r))
    return d1pred

def D2pred(rets,coefs): # Regresa lista
    d2pred = []
    for r in rets:
        d2pred.append(poly2(coefs,r))
    return d2pred

def ValsReg(coefsd1,coefsd2): # Calcula los valores de D, C y k segun 10.13, 10.14
    D = coefsd2[2]
    C = coefsd2[0]/D
    k = coefsd1[0]/(-2*D*C)
    return D, C, k

```

```

def nacrfp(D,C,k,t0,tf): # Funcion de autocorrelacion, expr 10.20
    times = np.linspace(t0,tf,num=int(tf-t0)).tolist()
    nacf = []
    for t in times:
        nacf.append(np.exp(-2*k*D*C*t))
    return nacf

def corrsq(D,C,k,t0,tf,xo2=2): # expr 10.23
    times = np.linspace(t0,tf,num=int(tf-t0)).tolist()
    return [(xo2 - 1/(C*(2*k-1)))*np.exp(-2*D*C*(2*k-1)*t) + 1/(C*(2*k-1)) for t in
    ↪ times]

def corrvol(D,C,k,t0,tf):
    espX = nacrfp(D,C,k,t0,tf)
    espX2 = corrsq(D,C,k,t0,tf)
    corrsigma = [np.sqrt(x2 - x1**2) for (x1,x2) in zip(espX,espX2)]
    return corrsigma

def FPfit(rets,retsrange,avg): # Realiza el ajuste a dist FP y regresa los valores
    ↪ pertinentes.
    retsA1 = [r-avg for r in rets]
    dd1 = D1(retsA1)
    dd2 = D2(retsA1)
    retsA2 = retsA1[:]
    retsA2.pop(-1)
    sortD1 = [x for _,x in sorted(zip(retsA2,dd1))]
    sortD2 = [x for _,x in sorted(zip(retsA2,dd2))]
    retsA2.sort()
    resultD1, cfD1, reportD1 = polyregadj(retsA2,sortD1,1)
    resultD2, cfD2, reportD2 = polyregadj(retsA2,sortD2,2)
    D1_pred = D1pred(retsrange,cfD1)
    D2_pred = D2pred(retsrange,cfD2)
    DD, CC, kk = ValsReg(cfD1,cfD2)
    PDIST, ZZ = PDFP(retsrange,avg,CC,kk)
    CDIST = CDFP(retsrange,avg,CC,kk,ZZ)
    return PDIST, CDIST, ZZ, cfD1, cfD2, resultD1, resultD2, reportD1, reportD2,
    ↪ D1_pred, D2_pred, DD, CC, kk, retsA2, sortD1, sortD2

def PDFP(retsrange,avg,C,k): #Forma teorica de la distribucion
    probs = []
    for r in retsrange:
        arg = (1+C*((r-avg)**2))**(1+k)
        probs.append(1/arg)
    normf = normfactor(retsrange,probs)
    normprobs = [float(i)/normf for i in probs]
    return normprobs, normf

def CDFP(retsrange,avg,C,k,Z): # Forma teorica de la distribucion acumulativa
    cprobs = []
    for r in retsrange:
        arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k
        ↪ +1))
        arg2 = (r-avg)*spec.hyp2f1(1/2,1+k,3/2,-C*(r-avg)**2)
        cprobs.append((arg1 + arg2)/Z)

```

```

return cprobs

def CDFPc(cdfp): # Distribucion acumulativa complementaria
    return [1-x for x in cdfp]

def QTFP(P, retsrange, avg, C, k, Z): # Funcion cuantil
    cum = 0
    rlasts = []
    for r in retsrange:
        if cum >= P:
            break
        rlast = r
        arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k
            ↪ +1))
        arg2 = (r-avg)*spec.hyp2f1(1/2, 1+k, 3/2, -C*(r-avg)**2)
        cum = (arg1 + arg2)/Z
        rlasts.append(rlast)
    return rlasts[-1]

def PDFFPi(x, avg, C, k, Z):
    arg = (1+C*((x-avg)**2))**(1+k)
    return 1/(Z*arg)

def CDFPi(x, avg, C, k, Z): # Distribucion de probabilidad acumulativa, para un valor
    ↪ individual
    arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k+1))
    arg2 = (x-avg)*spec.hyp2f1(1/2, 1+k, 3/2, -C*(x-avg)**2)
    return (arg1 + arg2)/Z

def BICnAIC_FP(rets, n, avg, C, k, Z):
    loglik = np.sum([np.log(PDFFPi(r, avg, C, k, Z)) for r in rets])
    bic = 3*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 6 - 2*loglik
    return bic, aic

starttime = timer()

# Creacion de dataframe con todos los datos importantes

data = pd.read_excel(r'C:\Users\Jorge\Documents\Indices_y_Acciones_Diarios.xlsx')
    ↪ # Escribir localizacion actual del archivo excel en computadora

Par = ['Fecha_Inicial', 'Fecha_Final', 'Estadistico_ADF', 'pvalue_ADF', 'Proceso_
    ↪ Estacionario', 'Retorno_Promedio', 'Desviacion_Estandar_de_Returnos', 'BIC_
    ↪ Gaussiano', 'Rango_Gauss_BIC', 'AIC_Gaussiano', 'Rango_Gauss_AIC', 'Alpha_Levy',
    ↪ , 'Beta_Levy', 'Mu_Levy', 'Sigma_Levy', 'BIC_Levy', 'Rango_Levy_BIC', 'AIC_Levy',
    ↪ 'Rango_Levy_AIC', 'Coef_Lineal_1', 'Error_CL1', '%_Error_CL1', 'D1_r^2', 'Coef.
    ↪ Cuad_1', 'Error_CC1', '%_Error_CC1', 'Coef_Cuad_3', 'Error_CC3', '%_Error_
    ↪ CC3', 'D2_r^2', 'D', 'Error_D', '%_Error_D', 'C', 'Error_C', '%_Error_C', 'k',
    ↪ 'Error_k', '%_Error_k', 'Periodo_de_Decaimiento_de_Corr_Returnos', 'Error_PDCR
    ↪ ', '%_Error_PDCR', 'PDCR_r^2', 'PDCVol_r^2', 'BIC_Coef_Difusion', 'Rango_C.D_
    ↪ BIC', 'AIC_Coef_Difusion', 'Rango_C.D_AIC']

dfParY = pd.DataFrame(index=Par)

```

```

dfParQ = pd.DataFrame(index=Par)
dfParM = pd.DataFrame(index=Par)
dfParSMS = pd.DataFrame(index=Par)
dfParW = pd.DataFrame(index=Par)
dfParD = pd.DataFrame(index=Par)

tickers = ['INDU', 'SPX', 'CCMP', 'RAY', 'RTY', 'UKX', 'ASX', 'SX5E', 'SXXP', 'SPLAC', 'NKY'
↪ , 'SHCOMP', 'HSI', 'AMZN', 'MSFT', 'AAPL', 'GOOGL', 'FB', 'NFLX', 'BRK_A', 'BRK_B', 'V
↪ ', 'JPM', 'XOM', 'JNJ', 'WFC', 'BABA', 'GE', 'IBM', 'DIS', 'WMT', 'RDSA', 'RDSB', 'CVX'
↪ , 'INTC', 'AMD', 'NVDA']
temps = ['Y', 'Q', 'M', 'SMS', 'W', 'D']
tickers.reverse()

for temp in temps:
    for ticker in tickers:
        # iteration = 0
        # Importacion de precios de activos
        if ticker == 'INDU':
            datescol = 'INDU_Dates'
            pricescol = 'INDU_LAST'
        if ticker == 'SPX':
            datescol = 'SPX_Dates'
            pricescol = 'SPX_LAST'
        if ticker == 'CCMP':
            datescol = 'CCMP_Dates'
            pricescol = 'CCMP_LAST'
        if ticker == 'RAY':
            datescol = 'RAY_Dates'
            pricescol = 'RAY_LAST'
        if ticker == 'RTY':
            datescol = 'RTY_Dates'
            pricescol = 'RTY_LAST'
        if ticker == 'UKX':
            datescol = 'UKX_Dates'
            pricescol = 'UKX_LAST'
        if ticker == 'ASX':
            datescol = 'ASX_Dates'
            pricescol = 'ASX_LAST'
        if ticker == 'SX5E':
            datescol = 'SX5E_Dates'
            pricescol = 'SX5E_LAST'
        if ticker == 'SXXP':
            datescol = 'SXXP_Dates'
            pricescol = 'SXXP_LAST'
        if ticker == 'SPLAC':
            datescol = 'SPLAC_Dates'
            pricescol = 'SPLAC_LAST'
        if ticker == 'NKY':
            datescol = 'NKY_Dates'
            pricescol = 'NKY_LAST'
        if ticker == 'SHCOMP':
            datescol = 'SHCOMP_Dates'
            pricescol = 'SHCOMP_LAST'
        if ticker == 'HSI':

```

```

        datescol = 'HSI_Dates'
        pricescol = 'HSI_LAST'
    if ticker == 'AMZN':
        datescol = 'AMZN_Dates'
        pricescol = 'AMZN_LAST'
    if ticker == 'MSFT':
        datescol = 'MSFT_Dates'
        pricescol = 'MSFT_LAST'
    if ticker == 'AAPL':
        datescol = 'AAPL_Dates'
        pricescol = 'AAPL_LAST'
    if ticker == 'GOOGL':
        datescol = 'GOOGL_Dates'
        pricescol = 'GOOGL_LAST'
    if ticker == 'FB':
        datescol = 'FB_Dates'
        pricescol = 'FB_LAST'
    if ticker == 'NFLX':
        datescol = 'NFLX_Dates'
        pricescol = 'NFLX_LAST'
    if ticker == 'BRK_A':
        datescol = 'BRK/A_Dates'
        pricescol = 'BRK/A_LAST'
    if ticker == 'BRK_B':
        datescol = 'BRK/B_Dates'
        pricescol = 'BRK/B_LAST'
    if ticker == 'V':
        datescol = 'V_Dates'
        pricescol = 'V_LAST'
    if ticker == 'JPM':
        datescol = 'JPM_Dates'
        pricescol = 'JPM_LAST'
    if ticker == 'XOM':
        datescol = 'XOM_Dates'
        pricescol = 'XOM_LAST'
    if ticker == 'JNJ':
        datescol = 'JNJ_Dates'
        pricescol = 'JNJ_LAST'
    if ticker == 'WFC':
        datescol = 'WFC_Dates'
        pricescol = 'WFC_LAST'
    if ticker == 'BABA':
        datescol = 'BABA_Dates'
        pricescol = 'BABA_LAST'
    if ticker == 'GE':
        datescol = 'GE_Dates'
        pricescol = 'GE_LAST'
    if ticker == 'IBM':
        datescol = 'IBM_Dates'
        pricescol = 'IBM_LAST'
    if ticker == 'DIS':
        datescol = 'DIS_Dates'
        pricescol = 'DIS_LAST'
    if ticker == 'WMT':

```

```

    datescol = 'WMT_Dates'
    pricescol = 'WMT_LAST'
if ticker == 'RDSA':
    datescol = 'RDSA_Dates'
    pricescol = 'RDSA_LAST'
if ticker == 'RDSB':
    datescol = 'RDSB_Dates'
    pricescol = 'RDSB_LAST'
if ticker == 'CVX':
    datescol = 'CVX_Dates'
    pricescol = 'CVX_LAST'
if ticker == 'INTC':
    datescol = 'INTC_Dates'
    pricescol = 'INTC_LAST'
if ticker == 'AMD':
    datescol = 'AMD_Dates'
    pricescol = 'AMD_LAST'
if ticker == 'NVDA':
    datescol = 'NVDA_Dates'
    pricescol = 'NVDA_LAST'

dataframe = pd.DataFrame(data, columns = [datescol,pricescol])
dataframe.dropna(inplace=True)
dataframe[datescol]=pd.to_datetime(dataframe[datescol])
dataframe.set_index(datescol, inplace=True)

fechaini = str(dataframe.index[0])
fechafin = str(dataframe.index[-1])
dataframeadj = dataframe

# escala = temp

if temp == 'YS':
    dfresample = dataframeadj.resample('YS').mean()
    percrr = "Anyos"
    pernacr = 5
if temp == 'Y':
    dfresample = dataframeadj.resample('Y').mean()
    percrr = "Anyos"
    pernacr = 5
if temp == 'QS':
    dfresample = dataframeadj.resample('QS').mean()
    percrr = "Trimestres"
    pernacr = 20
if temp == 'Q':
    dfresample = dataframeadj.resample('Q').mean()
    percrr = "Trimestres"
    pernacr = 20
if temp == 'MS':
    dfresample = dataframeadj.resample('MS').mean()
    percrr = "Meses"
    pernacr = 24
if temp == 'M':
    dfresample = dataframeadj.resample('M').mean()

```

```

    percrr = "Meses"
    pernacr = 24
if temp == 'SMS':
    dfresample = dataframeadj.resample('SMS').mean()
    percrr = "Bisemanas"
    pernacr = 25
if temp == 'W':
    dfresample = dataframeadj.resample('W').mean()
    percrr = "Semanas"
    pernacr = 52
if temp == 'D':
    dfresample = dataframeadj
    percrr = "Dias"
    pernacr = 365
dfresample.dropna(inplace=True)

spr = dfresample[pricescol].tolist() # Extraigo lista de precios para
    ↪ procesarla

rlp = RetLog(spr) # Calculo retornos
lenrets = len(rlp)
ADFstat, ADFpval, Stationarity = adftest(rlp) # Prueba de estacionariedad
    ↪ Dickey Fuller Aumentada
retrange = RetRange(rlp,n=200)

insvol = InstVol(rlp) # Calculo Volatilidad instantanea

if temp == 'D':
    dfresample.insert(1,"Log_Ret", rlp)
    dfresample.insert(2,"Vol_Ins", insvol)

nacrr = NACR(rlp,0,percrr) # Autocorrelacion de retornos
nacrvol = NACR(insvol,0,percrr) # Autocorrelacion de volatilidad
nacrvollog = NACR(insvol,0,percrr*10) # Autocorrelacion de volatilidad
    ↪ para graficar en escala logaritmica

# Ajuste de datos a Modelo Gaussiano

Ravg = np.mean(rlp)
Rstd = np.std(rlp,ddof=1)
PdND = NormDistPDF(Ravg,Rstd,retrange)
CdND = NormDistCDF(Ravg,Rstd,retrange)

BICnd, AICnd = BICnAIC_ND(rlp,lenrets,Ravg,Rstd)

# Ajuste de datos a Modelo de Levy

PdLV, CdLV, AA, BB, UU, SS = LevyFit(rlp,retrange) # Fit de datos a
    ↪ distribucion de Levy estable

BIClv, AIClv = BICnAIC_LV(rlp,lenrets,AA,BB,UU,SS)

```

```

# Ajuste de datos a Modelo Fokker-Planck con coeficientes de difusion
  ↪ generalizados

PdFP, CdFP, ZZ, coefd1, coefd2, resultd1, resultd2, reportd1, reportd2,
  ↪ d1_pred, d2_pred, dd, cc, kk, rlpA, sortd1, sortd2 = FPfit(rlp,
  ↪ retrange,Ravg)

ad1 = resultd1.params['a'].value
ad1error = resultd1.params['a'].stderr
if ad1error == None:
    ad1error = 0
ad1errorPer = np.abs(ad1error/ad1)

ad2 = resultd2.params['a'].value
ad2error = resultd2.params['a'].stderr
if ad2error == None:
    ad2error = 0
ad2errorPer = np.abs(ad2error/ad2)
cd2 = resultd2.params['c'].value
cd2error = resultd2.params['c'].stderr
if cd2error == None:
    cd2error = 0
cd2errorPer = np.abs(cd2error/cd2)

d1test = D1pred(rlpA,coefd1)
d2test = D2pred(rlpA,coefd2)
r2d1 = CoeffDetermination(sortd1,d1test)
r2d2 = CoeffDetermination(sortd2,d2test)

covard1 = resultd1.covar
covard2 = resultd2.covar

if np.any(covard1 == None) == True:
    covard1 = np.array([[0]])
if np.any(covard2 == None) == True:
    covard2 = np.array([[0,0],[0,0]])

dderror = cd2error
dderrorPer = dderror/dd
ccerror = np.abs(cc) * np.sqrt((dderror/dd)**2 + (ad2error/ad2)**2 - ((2*
  ↪ covard2[1,0])/(dd*ad2)))
ccerrorPer = ccerror/cc
kkerror = np.abs(kk) * np.sqrt((ad1error/ad1)**2 + (ad2error/ad2)**2)
kkerrorPer = kkerror/kk

nacrTFPRet = nacrFP(dd,cc,kk,0,pernacr) # Forma teorica de autocorrelacion
  ↪ de retornos
r2nacrFPRet = CoeffDetermination(nacrRet,nacrTFPRet) # Coeficiente de
  ↪ determinacion
nacrTFPVol = corrVol(dd,cc,kk,0,pernacr) # Forma teorica de autocorrelacion
  ↪ de volatilidad
r2nacrFPVol = CoeffDetermination(nacrVol,nacrTFPVol)
nacrTFPVolLog = corrVol(dd,cc,kk,0,pernacr*10) # Forma teorica de
  ↪ autocorrelacion de volatilidad para escala log-log

```

```

lindecaycorr = 2*kk*dd*cc
lindecaycorrerror = np.abs(lindecaycorr)*np.sqrt((kkerror/kk)**2 + (dderror
    ↪ /dd)**2 + (ccerror/cc)**2)
lindecaycorrT = 1/lindecaycorr
lindecaycorrTerror = lindecaycorrerror/(lindecaycorr)**2
lindecaycorrTerrorPer = lindecaycorrTerror/lindecaycorrT

BICfp, AICfp = BICnAIC_FP(rlp,lenrets,Ravg,cc,kk,ZZ)

# Ranking de las modelos

BICrankND, BICrankLV, BICrankFP = rankmodels(BICnd,BIClv,BICfp)
AICrankND, AICrankLV, AICrankFP = rankmodels(AICnd,AIClv,AICfp)

# Creacion de dataframe con todos los datos importantes

ListaPar = [fechaini,fechafin,ADFstat,ADFpval,Stationarity,Ravg,Rstd,BICnd,
    ↪ BICrankND,AICnd,AICrankND,AA,BB,UU,SS,BIClv,BICrankLV,AIClv,
    ↪ AICrankLV,ad1,ad1error,ad1errorPer,r2d1,ad2,ad2error,ad2errorPer,cd2
    ↪ ,cd2error,cd2errorPer,r2d2,dd,dderror,dderrorPer,cc,ccerror,
    ↪ ccerrorPer,kk,kkerror,kkerrorPer,lindecaycorrT,lindecaycorrTerror,
    ↪ lindecaycorrTerrorPer,r2nacrFPret,r2nacrFPVol,BICfp,BICrankFP,AICfp,
    ↪ AICrankFP]
if temp == 'Y':
    dfParY.insert(0,ticker,ListaPar)
if temp == 'Q':
    dfParQ.insert(0,ticker,ListaPar)
if temp == 'M':
    dfParM.insert(0,ticker,ListaPar)
if temp == 'SMS':
    dfParSMS.insert(0,ticker,ListaPar)
if temp == 'W':
    dfParW.insert(0,ticker,ListaPar)
if temp == 'D':
    dfParD.insert(0,ticker,ListaPar)

# Graficas

nbins = 24

dfresample[pricescol].plot(color='black') # Grafica de precios
plt.title("Precio_□" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Precio")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'Precio.png',dpi=150)
plt.show()

dfresample['Log_□Ret'].plot(color='black') # Grafica de retornos
plt.title("Retorno_□logaritmico_□" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Retorno_□Log")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'LogRet.png',dpi=150)

```

```

plt.show()

dfresample['Vol_Ins'].plot(color='black') # Grafica de volatilidad
plt.title("Volatilidad_instantanea_" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Volatilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'Vol.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(nacrRet,'black') # Autocorrelacion de retornos
plt.plot(nacrTFPRet,'green')
plt.title("Auto-correlacion_de_retornos_" + str(ticker))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRret.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(nacrVol,'black') # Autocorrelacion de volatilidad
plt.plot(nacrTFPVol,'green')
plt.title("Auto-correlacion_de_volatilidad_" + str(ticker))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRvol.png',dpi=150)
plt.show()

plt.loglog(nacrVolLog,'black') # Autocorrelacion de volatilidad en escala
↳ log-log
plt.loglog(nacrTFPVolLog,'green')
plt.title("Auto-correlacion_de_volatilidad_en_escala_log-log_" + str(ticker)
↳ ))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRvolLog.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,PdND,'red') # Distribuciones de densidad de probabilidad
plt.plot(retrange,PdLV,'blue')
plt.plot(retrange,PdFP,'green')
plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,color='orange')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef_de_Difusion', 'Empirico'), loc='
↳ upper_right')
plt.title("Distribuciones_de_densidad_de_probabilidad_" + str(ticker))
plt.xlabel("Retorno_logaritmico")
plt.ylabel("Densidad_de_probabilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'PDFs.png',dpi=150)
plt.show()

```

```

plt.plot(retrange,PdND,'red') # Distribuciones de densidad de probabilidad
    ↪ en escala log
plt.plot(retrange,PdLV,'blue')
plt.plot(retrange,PdFP,'green')
plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,color='orange')
plt.yscale('log')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef. de Difusion', 'Empirico'), loc='
    ↪ lower_center')
plt.title("Distribuciones de densidad de probabilidad, escala log" + str(
    ↪ ticker))
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("Densidad de probabilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'PDFsLog.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,CdND,'red') # Distribuciones de probabilidad acumulada
plt.plot(retrange,CdLV,'blue')
plt.plot(retrange,CdFP,'green')
plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,cumulative=True,color='orange')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef. de Difusion', 'Empirico'), loc='
    ↪ lower_right')
plt.title("Distribuciones de probabilidad acumulada" + str(ticker))
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("Probabilidad acumulada")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'CDFs.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,d1_pred,'green') # Grafica D1
plt.scatter(rlpA,sortd1,color='black')
plt.title("Coeficiente de difusion de primer orden" + str(ticker))
plt.legend(('Regresion', 'Empirico'), loc='best')
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("D1")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'D1.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,d2_pred,'green') # Grafica D2
plt.scatter(rlpA,sortd2,color='black')
plt.title("Coeficiente de difusion de segundo orden" + str(ticker))
plt.legend(('Regresion', 'Empirico'), loc='best')
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("D2")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'D2.png',dpi=150)
plt.show()

```

Analisis de resultados de modelos

```

def RankCounterV0(df):
    Ncases = len(df.columns)

```

```

BICRankGS = dfParM.loc['Rango_Gauss_BIC'].tolist()
AICRankGS = dfParM.loc['Rango_Gauss_AIC'].tolist()
BICRankLV = dfParM.loc['Rango_Levy_BIC'].tolist()
AICRankLV = dfParM.loc['Rango_Levy_AIC'].tolist()
BICRankFP = dfParM.loc['Rango_C.D._BIC'].tolist()
AICRankFP = dfParM.loc['Rango_C.D._AIC'].tolist()
Gauss1stN_BIC = BICRankGS.count(1)
Gauss1stN_AIC = AICRankGS.count(1)
Gauss2ndN_BIC = BICRankGS.count(2)
Gauss2ndN_AIC = AICRankGS.count(2)
Gauss3rdN_BIC = BICRankGS.count(3)
Gauss3rdN_AIC = AICRankGS.count(3)
Levy1stN_BIC = BICRankLV.count(1)
Levy1stN_AIC = AICRankLV.count(1)
Levy2ndN_BIC = BICRankLV.count(2)
Levy2ndN_AIC = AICRankLV.count(2)
Levy3rdN_BIC = BICRankLV.count(3)
Levy3rdN_AIC = AICRankLV.count(3)
Fp1stN_BIC = BICRankFP.count(1)
Fp1stN_AIC = AICRankFP.count(1)
Fp2ndN_BIC = BICRankFP.count(2)
Fp2ndN_AIC = AICRankFP.count(2)
Fp3rdN_BIC = BICRankFP.count(3)
Fp3rdN_AIC = AICRankFP.count(3)
GaussBIC_N = [Gauss1stN_BIC, Gauss2ndN_BIC, Gauss3rdN_BIC]
GaussAIC_N = [Gauss1stN_AIC, Gauss2ndN_AIC, Gauss3rdN_AIC]
LevyBIC_N = [Levy1stN_BIC, Levy2ndN_BIC, Levy3rdN_BIC]
LevyAIC_N = [Levy1stN_AIC, Levy2ndN_AIC, Levy3rdN_AIC]
FpBIC_N = [Fp1stN_BIC, Fp2ndN_BIC, Fp3rdN_BIC]
FpAIC_N = [Fp1stN_AIC, Fp2ndN_AIC, Fp3rdN_AIC]
GaussBIC_P = [x/Ncases for x in GaussBIC_N]
GaussAIC_P = [x/Ncases for x in GaussAIC_N]
LevyBIC_P = [x/Ncases for x in LevyBIC_N]
LevyAIC_P = [x/Ncases for x in LevyAIC_N]
FpBIC_P = [x/Ncases for x in FpBIC_N]
FpAIC_P = [x/Ncases for x in FpAIC_N]
return GaussBIC_N, LevyBIC_N, FpBIC_N, GaussBIC_P, LevyBIC_P, FpBIC_P,
    ↪ GaussAIC_N, LevyAIC_N, FpAIC_N, GaussAIC_P, LevyAIC_P, FpAIC_P

YgaussBIC_N, YlevyBIC_N, YfpBIC_N, YgaussBIC_P, YlevyBIC_P, YfpBIC_P, YgaussAIC_N,
    ↪ YlevyAIC_N, YfpAIC_N, YgaussAIC_P, YlevyAIC_P, YfpAIC_P = RankCounterv0(
    ↪ dfParY)
QgaussBIC_N, QlevyBIC_N, QfpBIC_N, QgaussBIC_P, QlevyBIC_P, QfpBIC_P, QgaussAIC_N,
    ↪ QlevyAIC_N, QfpAIC_N, QgaussAIC_P, QlevyAIC_P, QfpAIC_P = RankCounterv0(
    ↪ dfParQ)
MgaussBIC_N, MlevyBIC_N, MfpBIC_N, MgaussBIC_P, MlevyBIC_P, MfpBIC_P, MgaussAIC_N,
    ↪ MlevyAIC_N, MfpAIC_N, MgaussAIC_P, MlevyAIC_P, MfpAIC_P = RankCounterv0(
    ↪ dfParM)
SMSgaussBIC_N, SMSlevyBIC_N, SMSfpBIC_N, SMSgaussBIC_P, SMSlevyBIC_P, SMSfpBIC_P,
    ↪ SMSgaussAIC_N, SMSlevyAIC_N, SMSfpAIC_N, SMSgaussAIC_P, SMSlevyAIC_P,
    ↪ SMSfpAIC_P = RankCounterv0(dfParSMS)
WgaussBIC_N, WlevyBIC_N, WfpBIC_N, WgaussBIC_P, WlevyBIC_P, WfpBIC_P, WgaussAIC_N,
    ↪ WlevyAIC_N, WfpAIC_N, WgaussAIC_P, WlevyAIC_P, WfpAIC_P = RankCounterv0(
    ↪ dfParW)

```

```

DgaussBIC_N, DlevyBIC_N, DfpBIC_N, DgaussBIC_P, DlevyBIC_P, DfpBIC_P, DgaussAIC_N,
    ↪ DlevyAIC_N, DfpAIC_N, DgaussAIC_P, DlevyAIC_P, DfpAIC_P = RankCounterV0(
    ↪ dfParD)

places = ['1er_lugar', '2ndo_lugar', '3er_lugar']

# Gauss

dfScoreGSp = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_ano', YgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_ano', YgaussBIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_trimestral', QgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_trimestral', QgaussBIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_mensual', MgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_mensual', MgaussBIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_bisemanal', SMSgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_bisemanal', SMSgaussBIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_semanal', WgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_semanal', WgaussBIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'AIC_diario', DgaussAIC_P)
dfScoreGSp.insert(0, 'BIC_diario', DgaussBIC_P)

# Levy

dfScoreLVp = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_ano', YlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_ano', YlevyBIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_trimestral', QlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_trimestral', QlevyBIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_mensual', MlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_mensual', MlevyBIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_bisemanal', SMSlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_bisemanal', SMSlevyBIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_semanal', WlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_semanal', WlevyBIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'AIC_diario', DlevyAIC_P)
dfScoreLVp.insert(0, 'BIC_diario', DlevyBIC_P)

# Coeficientes de Difusion

dfScoreFpp = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_ano', YfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_ano', YfpBIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_trimestral', QfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_trimestral', QfpBIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_mensual', MfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_mensual', MfpBIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_bisemanal', SMSfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_bisemanal', SMSfpBIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_semanal', WfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_semanal', WfpBIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'AIC_diario', DfpAIC_P)
dfScoreFpp.insert(0, 'BIC_diario', DfpBIC_P)

```

```

# Gauss

dfScoreGSn = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_anual', YgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_anual', YgaussBIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_trimestral', QgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_trimestral', QgaussBIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_mensual', MgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_mensual', MgaussBIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_biseanal', SMSgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_biseanal', SMSgaussBIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_semanal', WgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_semanal', WgaussBIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'AIC_{}_diario', DgaussAIC_N)
dfScoreGSn.insert(0, 'BIC_{}_diario', DgaussBIC_N)

# Levy

dfScoreLVn = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_anual', YlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_anual', YlevyBIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_trimestral', QlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_trimestral', QlevyBIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_mensual', MlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_mensual', MlevyBIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_biseanal', SMSlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_biseanal', SMSlevyBIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_semanal', WlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_semanal', WlevyBIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'AIC_{}_diario', DlevyAIC_N)
dfScoreLVn.insert(0, 'BIC_{}_diario', DlevyBIC_N)

# Coeficientes de Difusion

dfScoreFPn = pd.DataFrame(index = places)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_anual', YfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_anual', YfpBIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_trimestral', QfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_trimestral', QfpBIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_mensual', MfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_mensual', MfpBIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_biseanal', SMSfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_biseanal', SMSfpBIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_semanal', WfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_semanal', WfpBIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'AIC_{}_diario', DfpAIC_N)
dfScoreFPn.insert(0, 'BIC_{}_diario', DfpBIC_N)

print("Analisis_a_escal_a_anual:")
print(dfParY)
print()
print("Analisis_a_escal_a_trimestral:")
print(dfParQ)

```

```

print()
print("Análisis_a_escal_a_mensual:")
print(dfParM)
print()
print("Análisis_a_escal_a_bisemanal:")
print(dfParSMS)
print()
print("Análisis_a_escal_a_semanal:")
print(dfParW)
print()
print("Análisis_a_escal_a_diara:")
print(dfParD)
print()

writer = pd.ExcelWriter('DatosTiempoCompleto.xlsx', engine='xlsxwriter')
dfParY.to_excel(writer, sheet_name='Anual')
dfParQ.to_excel(writer, sheet_name='Trimestral')
dfParM.to_excel(writer, sheet_name='Mensual')
dfParSMS.to_excel(writer, sheet_name='Bisemanal')
dfParW.to_excel(writer, sheet_name='Semanal')
dfParD.to_excel(writer, sheet_name='Diario')
writer.save()

writer2 = pd.ExcelWriter('ScoresModelos.xlsx', engine='xlsxwriter')
dfScoreGSp.to_excel(writer2, sheet_name='Gauss_P')
dfScoreLVp.to_excel(writer2, sheet_name='Levy_P')
dfScoreFPp.to_excel(writer2, sheet_name='CD_p')
dfScoreGSn.to_excel(writer2, sheet_name='Gauss_N')
dfScoreLVn.to_excel(writer2, sheet_name='Levy_N')
dfScoreFPn.to_excel(writer2, sheet_name='CD_N')
writer2.save()

elapsed_time = timer() - starttime
print("El_código_tardó_ " + str(elapsed_time) + " _segundos")

```

A.2. Código para análisis individual

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Análisis individual

@author: Jorge
"""

# Módulos a importar

import numpy as np
import math
import scipy.special as spec
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

import pandas as pd
from lmfit import Model
import scipy.stats as si
import levym
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
from timeit import default_timer as timer

# Funciones Generales

def RetLog(s): # Genera lista de retornos logaritmicos
    RL = []
    for i in range(len(s)-1):
        RL.append(np.log(s[i + 1]/s[i]))
    RL.append(0.0)
    return RL

def RetornoAPrecio(ret,s0): # Para un t=1, regresa el precio dado un precio
    ↪ inicial y un retorno log
    return s0*np.exp(ret)

def normfactor(x,y):
    return integrate.simps(y,x)

def autocorr(x):
    result = np.correlate(x, x, mode='full')
    return result[result.size // 2:]

def NACR(x,t0,tf): # Funcion de autocorrelacion normalizada
    result = np.correlate(x, x, mode='full')
    acr0 = result[result.size // 2:]
    acr1 = acr0[t0:tf]
    nacr = [x/float(max(acr1)) for x in acr1]
    return nacr

def InstVol(rets): # Volatilidad instantanea ajustando la media a 0
    avg = np.mean(rets)
    retsAdj = [r-avg for r in rets]
    vol = [np.abs(ra) for ra in retsAdj]
    return vol

def runningMeanFast(x, N): # Media movil
    return np.convolve(x, np.ones((N,))/N)[(N-1):]

def RMSE(lemp,lteo): # Root Mean Square Error
    n = len(lteo)
    difsq = []
    for i in range(n-1):
        difsq.append((lemp[i] - lteo[i])**2)
    return np.sqrt(sum(difsq)/n)

def MAE(lemp,lteo): # Mean Absolute Error
    n = len(lteo)
    difabs = []
    for i in range(n-1):

```

```

        difabs.append(np.abs(lemp[i] - lteo[i]))
    return sum(difabs)/n

def difflists(List1,List2): # Devuelve una lista con la resta de los elementos
    return [x1 - x2 for (x1, x2) in zip(List1, List2)]

def midpointslist(x): # Regresa los puntos medios de una lista de bordes
    return (x[1:] + x[:-1]) / 2

def ScatterRets(rets,nbins):
    Freq, Bord, Pat = plt.hist(rets,bins=nbins,density=True)
    Midpts = midpointslist(Bord)
    return Midpts, Freq

def RetRange(rets,n=50):
    retmax = max(abs(max(rets)),abs(min(rets))) # Determino el retorno absoluto
    ↪ maximo
    rrange = np.linspace(-retmax,retmax,num=n) # Rango de retornos a graficar
    rrange = rrange.tolist()
    return rrange

def RetRange2(MAX,MIN,n=100):
    retmax = max(abs(MAX),abs(MIN))
    rrange = np.linspace(-retmax,retmax,num=n)
    rrange = rrange.tolist()
    return rrange

def truncate(number, digits) -> float: # Trunca floats a cierto numero de
    ↪ decimales
    stepper = 10.0 ** digits
    return math.trunc(stepper * number) / stepper

def CoeffDetermination(yemp,yteo):
    avg = np.mean(yemp)
    sstot = np.sum([(y - avg)**2 for y in yemp])
    ssres = np.sum([(ye - yt)**2 for (ye,yt) in zip(yemp,yteo)])
    r2 = 1 - (ssres/sstot)
    return r2

def adftest(rets):
    adfresult = adfuller(rets,autolag=None)
    adfstat = adfresult[0]
    pval = adfresult[1]
    if adfresult[1] < 0.05:
        stationarity = 'si'
    else:
        stationarity = 'no'
    return adfstat, pval, stationarity

def rankmodels(ICnd,IClv,ICfp):
    array = np.array([ICnd,IClv,ICfp])
    temp = array.argsort()
    ranks = np.empty_like(temp)
    ranks[temp] = np.arange(len(array))

```

```

rankND = ranks[0] + 1
rankLV = ranks[1] + 1
rankFP = ranks[2] + 1
return rankND, rankLV, rankFP

# Funciones Modelo Gaussiano

def NormDistPDF(avg,stdev,retsrange): # Devuelve distribucion de densidad de
    ↪ probabilidad Gaussiana
    return [si.norm.pdf(r,loc=avg,scale=stdev) for r in retsrange]

def NormDistCDF(avg,stdev,retsrange): # Distribucion Acumulativa
    return [si.norm.cdf(r,loc=avg,scale=stdev) for r in retsrange]

def QTND(P,avg,stdev): # Quantil Dist Normal
    return si.norm.ppf(P,loc=avg,scale=stdev)

def BICnAIC_ND(rets,n,avg,stdev):
    loglik = np.sum([np.log(si.norm.pdf(r,loc=avg,scale=stdev)) for r in rets])
    bic = 2*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 4 - 2*loglik
    return bic, aic

# Funciones Modelo de Levy

def LevyFit(rets,retsrange):
    pmlv = levy.fit_levy(rets)
    pmlist = pmlv[0].get()
    aa = pmlist[0]
    bb = pmlist[1]
    uu = pmlist[2]
    ss = pmlist[3]
    pdist = [levy.levy(x,aa,bb,mu=uu,sigma=ss) for x in retsrange]
    cdist = [si.levy_stable.cdf(x,aa,bb,loc=uu,scale=ss) for x in retsrange]
    return pdist, cdist, aa, bb, uu, ss

def QTLV(P,aa,bb,uu,ss): #Quantil Levy
    return si.levy_stable.ppf(P,aa,bb,loc=uu,scale=ss)

def BICnAIC_LV(rets,n,aa,bb,uu,ss):
    loglik = np.sum([np.log(levy.levy(r,aa,bb,mu=uu,sigma=ss)) for r in rets])
    bic = 4*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 8 - 2*loglik
    return bic, aic

# Funciones Modelo Fokker Planck con coeficientes de difusion generalizados

def D1(seriesX): # Calcula coeficiente de difusion D1 en base a serie de tiempo,
    ↪ como funcion de la serie
    d1 = []
    N = len(seriesX)
    for i in range(N-1):
        diff = seriesX[i+1] - seriesX[i]
        d1.append(diff)

```

```

    return d1

def D2(seriesX): # Calcula coeficiente de difusion D2 en base a serie de tiempo,
    ↪ como funcion de la serie
    d2 = []
    N = len(seriesX)
    for i in range(N-1):
        diff = seriesX[i+1] - seriesX[i]
        d2.append((diff**2)/2)
    return d2

def polyregfree(x,y,n): # Regresion polinomial sin restriccion
    return np.polyfit(x,y,deg=n)

def polyregadj(x,y,n): # Regresion polinomial con coeficientes fijos
    if n == 1:
        pmodel = Model(func1)
        params = pmodel.make_params(a=1, b=0)
        params['b'].vary = False
        result = pmodel.fit(y,params,x=x)
        report = result.fit_report()
        coefd = result.best_values
        coefs = [coefd['a'], coefd['b']]
    if n == 2:
        pmodel = Model(func2)
        params = pmodel.make_params(a=1, b=0, c=1)
        params['b'].vary = False
        params['a'].min = 1e-100
        params['c'].min = 1e-100
        result = pmodel.fit(y,params,x=x)
        report = result.fit_report()
        coefd = result.best_values
        coefs = [coefd['a'], coefd['b'], coefd['c']]
    return result, coefs, report

def func1(x, a, b):
    return a * x + b

def func2(x, a, b, c):
    return a * x ** 2 + b * x + c

def poly1(coefs,x):
    return coefs[0]*x + coefs[1]

def poly2(coefs,x):
    return coefs[0]*x**2 + coefs[1]*x + coefs[2]

def D1pred(rets,coefs): # Regresa lista
    d1pred = []
    for r in rets:
        d1pred.append(poly1(coefs,r))
    return d1pred

def D2pred(rets,coefs): # Regresa lista

```

```

d2pred = []
for r in rets:
    d2pred.append(poly2(coefs,r))
return d2pred

def ValsReg(coefsd1,coefsd2): # Calcula los valores de D, C y k segun 10.13, 10.14
    D = coefsd2[2]
    C = coefsd2[0]/D
    k = coefsd1[0]/(-2*D*C)
    return D, C, k

def nacrFP(D,C,k,t0,tf): # Funcion de autocorrelacion, expr 10.20
    times = np.linspace(t0,tf,num=int(tf-t0)).tolist()
    nacf = []
    for t in times:
        nacf.append(np.exp(-2*k*D*C*t))
    return nacf

def corrSQ(D,C,k,t0,tf,xo2=2): # expr 10.23
    times = np.linspace(t0,tf,num=int(tf-t0)).tolist()
    return [(xo2 - 1/(C*(2*k-1)))*np.exp(-2*D*C*(2*k-1)*t) + 1/(C*(2*k-1)) for t in
    ↪ times]

def corrVol(D,C,k,t0,tf):
    espX = nacrFP(D,C,k,t0,tf)
    espX2 = corrSQ(D,C,k,t0,tf)
    corrsigma = [np.sqrt(x2 - x1**2) for (x1,x2) in zip(espX,espX2)]
    return corrsigma

def FPfit(rets,retsrange,avg): # Realiza el ajuste a dist FP y regresa los valores
    ↪ pertinentes.
    retsA1 = [r-avg for r in rets]
    dd1 = D1(retsA1)
    dd2 = D2(retsA1)
    retsA2 = retsA1[:]
    retsA2.pop(-1)
    sortD1 = [x for _,x in sorted(zip(retsA2,dd1))]
    sortD2 = [x for _,x in sorted(zip(retsA2,dd2))]
    retsA2.sort()
    resultD1, cfD1, reportD1 = polyregadj(retsA2,sortD1,1)
    resultD2, cfD2, reportD2 = polyregadj(retsA2,sortD2,2)
    D1_pred = D1pred(retsrange,cfD1)
    D2_pred = D2pred(retsrange,cfD2)
    DD, CC, kk = ValsReg(cfD1,cfD2)
    PDIST, ZZ = PDFP(retsrange,avg,CC,kk)
    CDIST = CDFP(retsrange,avg,CC,kk,ZZ)
    return PDIST, CDIST, ZZ, cfD1, cfD2, resultD1, resultD2, reportD1, reportD2,
    ↪ D1_pred, D2_pred, DD, CC, kk, retsA2, sortD1, sortD2

def PDFP(retsrange,avg,C,k): #Forma teorica de la distribucion
    probs = []
    for r in retsrange:
        arg = (1+C*((r-avg)**2))**(1+k)
        probs.append(1/arg)

```

```

    normf = normfactor(retsrange,probs)
    normprobs = [float(i)/normf for i in probs]
    return normprobs, normf

def CDFP(retsrange,avg,C,k,Z): # Forma teorica de la distribucion acumulativa
    cprobs = []
    for r in retsrange:
        arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k
        ↪ +1))
        arg2 = (r-avg)*spec.hyp2f1(1/2,1+k,3/2,-C*(r-avg)**2)
        cprobs.append((arg1 + arg2)/Z)
    return cprobs

def CDFPc(cdfp): # Distribucion acumulativa complementaria
    return [1-x for x in cdfp]

def QTFP(P,retsrange,avg,C,k,Z): # Funcion cuantil
    cum = 0
    rlasts = []
    for r in retsrange:
        if cum >= P:
            break
        rlast = r
        arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k
        ↪ +1))
        arg2 = (r-avg)*spec.hyp2f1(1/2,1+k,3/2,-C*(r-avg)**2)
        cum = (arg1 + arg2)/Z
        rlasts.append(rlast)
    return rlasts[-1]

def PDFFPi(x,avg,C,k,Z):
    arg = (1+C*((x-avg)**2))**(1+k)
    return 1/(Z*arg)

def CDFPi(x,avg,C,k,Z): # Distribucion de probabilidad acumulativa, para un valor
    ↪ individual
    arg1 = (np.sqrt(np.pi)*spec.gamma(k + (1/2))) / (2*np.sqrt(C)*spec.gamma(k+1))
    arg2 = (x-avg)*spec.hyp2f1(1/2,1+k,3/2,-C*(x-avg)**2)
    return (arg1 + arg2)/Z

def BICnAIC_FP(rets,n,avg,C,k,Z):
    loglik = np.sum([np.log(PDFFPi(r,avg,C,k,Z)) for r in rets])
    bic = 3*np.log(n) - 2*loglik
    aic = 6 - 2*loglik
    return bic, aic

starttime = timer()

# Importacion de precios de activos

print("Opciones de analisis:") # Todos los indices disponibles a analizar en esta
    ↪ version del codigo
print("Dow Jones Industrial Average (INDU)")

```

```

print("Standard & Poor's 500 (SPX)")
print("NASDAQ Composite Index (CCMP)")
print("Russell 3000 Index (RAY)")
print("Russell 2000 Index (RTY)")
print("FTSE 100 Index (UKX)")
print("FTSE All-Share Index (ASX)")
print("EURO STOXX 50 (SX5E)")
print("STOXX Europe 600 Index (SXXP)")
print("S&P Latin America 40 (SPLAC)")
print("Nikkei 225 (NKY)")
print("Shanghai Stock Exchange Composite Index (SHCOMP)")
print("Hong Kong Hang Seng Index (HSI)")
print("Amazon.com, Inc. (AMZN)")
print("Microsoft Corporation (MSFT)")
print("Apple Inc. (AAPL)")
print("Alphabet Inc. Class A (GOOGL)")
print("Facebook, Inc. Common Stock (FB)")
print("Netflix Inc. (NFLX)")
print("Berkshire Hathaway Inc. Class A (BRK/A)")
print("Berkshire Hathaway Inc. Class B (BRK/B)")
print("Visa Inc. (V)")
print("JPMorgan Chase & Co. (JPM)")
print("Exxon Mobil Corporation (XOM)")
print("Johnson & Johnson (JNJ)")
print("Wells Fargo & Company (WFC)")
print("Alibaba Group Holding Limited (BABA)")
print("General Electric Company (GE)")
print("International Business Machines Corporation (IBM)")
print("The Walt Disney Company (DIS)")
print("Walmart Inc. (WMT)")
print("Royal Dutch Shell plc Class A (RDSA)")
print("Royal Dutch Shell plc Class B (RDSB)")
print("Chevron Corporation (CVX)")
print("Intel Corporation (INTC)")
print("Advanced Micro Devices, Inc. (AMD)")
print("NVIDIA Corporation (NVDA)")
ticker = str(input("Ingrese ticker"))
print()

if ticker == 'INDU':
    datescol = 'INDU_Dates'
    pricescol = 'INDU_LAST'
if ticker == 'SPX':
    datescol = 'SPX_Dates'
    pricescol = 'SPX_LAST'
if ticker == 'CCMP':
    datescol = 'CCMP_Dates'
    pricescol = 'CCMP_LAST'
if ticker == 'RAY':
    datescol = 'RAY_Dates'
    pricescol = 'RAY_LAST'
if ticker == 'RTY':
    datescol = 'RTY_Dates'
    pricescol = 'RTY_LAST'

```

```

if ticker == 'UKX':
    datescol = 'UKX_Dates'
    pricescol = 'UKX_LAST'
if ticker == 'ASX':
    datescol = 'ASX_Dates'
    pricescol = 'ASX_LAST'
if ticker == 'SX5E':
    datescol = 'SX5E_Dates'
    pricescol = 'SX5E_LAST'
if ticker == 'SXXP':
    datescol = 'SXXP_Dates'
    pricescol = 'SXXP_LAST'
if ticker == 'SPLAC':
    datescol = 'SPLAC_Dates'
    pricescol = 'SPLAC_LAST'
if ticker == 'NKY':
    datescol = 'NKY_Dates'
    pricescol = 'NKY_LAST'
if ticker == 'SHCOMP':
    datescol = 'SHCOMP_Dates'
    pricescol = 'SHCOMP_LAST'
if ticker == 'HSI':
    datescol = 'HSI_Dates'
    pricescol = 'HSI_LAST'
if ticker == 'AMZN':
    datescol = 'AMZN_Dates'
    pricescol = 'AMZN_LAST'
if ticker == 'MSFT':
    datescol = 'MSFT_Dates'
    pricescol = 'MSFT_LAST'
if ticker == 'AAPL':
    datescol = 'AAPL_Dates'
    pricescol = 'AAPL_LAST'
if ticker == 'GOOGL':
    datescol = 'GOOGL_Dates'
    pricescol = 'GOOGL_LAST'
if ticker == 'FB':
    datescol = 'FB_Dates'
    pricescol = 'FB_LAST'
if ticker == 'NFLX':
    datescol = 'NFLX_Dates'
    pricescol = 'NFLX_LAST'
if ticker == 'BRK/A':
    datescol = 'BRK/A_Dates'
    pricescol = 'BRK/A_LAST'
if ticker == 'BRK/B':
    datescol = 'BRK/B_Dates'
    pricescol = 'BRK/B_LAST'
if ticker == 'V':
    datescol = 'V_Dates'
    pricescol = 'V_LAST'
if ticker == 'JPM':
    datescol = 'JPM_Dates'
    pricescol = 'JPM_LAST'

```

```

if ticker == 'XOM':
    datescol = 'XOM_Dates'
    pricescol = 'XOM_LAST'
if ticker == 'JNJ':
    datescol = 'JNJ_Dates'
    pricescol = 'JNJ_LAST'
if ticker == 'WFC':
    datescol = 'WFC_Dates'
    pricescol = 'WFC_LAST'
if ticker == 'BABA':
    datescol = 'BABA_Dates'
    pricescol = 'BABA_LAST'
if ticker == 'GE':
    datescol = 'GE_Dates'
    pricescol = 'GE_LAST'
if ticker == 'IBM':
    datescol = 'IBM_Dates'
    pricescol = 'IBM_LAST'
if ticker == 'DIS':
    datescol = 'DIS_Dates'
    pricescol = 'DIS_LAST'
if ticker == 'WMT':
    datescol = 'WMT_Dates'
    pricescol = 'WMT_LAST'
if ticker == 'RDSA':
    datescol = 'RDSA_Dates'
    pricescol = 'RDSA_LAST'
if ticker == 'RDSB':
    datescol = 'RDSB_Dates'
    pricescol = 'RDSB_LAST'
if ticker == 'CVX':
    datescol = 'CVX_Dates'
    pricescol = 'CVX_LAST'
if ticker == 'INTC':
    datescol = 'INTC_Dates'
    pricescol = 'INTC_LAST'
if ticker == 'AMD':
    datescol = 'AMD_Dates'
    pricescol = 'AMD_LAST'
if ticker == 'NVDA':
    datescol = 'NVDA_Dates'
    pricescol = 'NVDA_LAST'

data = pd.read_excel(r'C:\Users\Jorge\Documents\Indices_y_Acciones_Diarios.xlsx')
    ↪ # Escribir localizacion actual del archivo excel en computadora
dataframe = pd.DataFrame(data, columns = [datescol,pricescol])
dataframe.dropna(inplace=True)
dataframe[datescol]=pd.to_datetime(dataframe[datescol])
dataframe.set_index(datescol, inplace=True)

print("Datos disponibles entre " + str(dataframe.index[0]) + " y " + str(dataframe
    ↪ .index[-1]))
anstime = input("Cambiar el intervalo de tiempo?(y/n)")
print()

```

```

if str(anstime) == 'y':
    fechaini = input("Ingrese fecha de inicio (YYYY-MM-DD)_")
    fechafin = input("Ingrese fecha final (YYYY-MM-DD)_")
    dataframeadj = dataframe.loc[fechaini:fechafin]
if str(anstime) == 'n':
    fechaini = str(dataframe.index[0])
    fechafin = str(dataframe.index[-1])
    dataframeadj = dataframe
print()

print("Escalas de tiempo para analisis:")
print("Inicio de año: YS")
print("Final de año: Y")
print("Inicio de trimestre: QS")
print("Final de trimestre: Q")
print("Inicio de meses: MS")
print("Fin de meses: M")
print("Dos semanas: SMS")
print("Semanal: W")
print("Diario: D")
escala= str(input("Ingrese escala de tiempo para analisis:"))

if escala == 'YS':
    dfresample = dataframeadj.resample('YS').mean()
    percrr = "Anyos"
if escala == 'Y':
    dfresample = dataframeadj.resample('Y').mean()
    percrr = "Anyos"
if escala == 'QS':
    dfresample = dataframeadj.resample('QS').mean()
    percrr = "Trimestres"
if escala == 'Q':
    dfresample = dataframeadj.resample('Q').mean()
    percrr = "Trimestres"
if escala == 'MS':
    dfresample = dataframeadj.resample('MS').mean()
    percrr = "Meses"
if escala == 'M':
    dfresample = dataframeadj.resample('M').mean()
    percrr = "Meses"
if escala == 'SMS':
    dfresample = dataframeadj.resample('SMS').mean()
    percrr = "Bisemanas"
if escala == 'W':
    dfresample = dataframeadj.resample('W').mean()
    percrr = "Semanas"
if escala == 'D':
    dfresample = dataframeadj
    percrr = "Dias"
dfresample.dropna(inplace=True)

pernacrr = int(input("Cuantos_ " + str(percrr) + "_para calcular funciones de_
↪ autocorrelacion?_"))
print()

```

```

spr = dfresample[pricescol].tolist() # Extraigo lista de precios para procesarla

rlp = RetLog(spr) # Calculo retornos
lenrets = len(rlp)
dfresample.insert(1,"Log_Ret", rlp) # Inserto retornos al dataframe
retrange = RetRange(rlp,n=200)
ADFstat, ADFpval, Stationarity = adftest(rlp) # Prueba de estacionariedad Dickey
    ↪ Fuller Aumentada
print("Los retornos logaritmicos" + str(Stationarity) + "son estacionarios")

insvol = InstVol(rlp) # Calculo Volatilidad instantanea
dfresample.insert(2,"Vol_Ins", insvol)

nacreret = NACR(rlp,0,pernacrer) # Autocorrelacion de retornos
nacrerVol = NACR(insvol,0,pernacrer) # Autocorrelacion de volatilidad
nacrerVolLog = NACR(insvol,0,pernacrer*10) # Autocorrelacion de volatilidad para
    ↪ graficar en escala logaritmica

# Ajuste de datos a Modelo Gaussiano

Ravg = np.mean(rlp)
Rstd = np.std(rlp,ddof=1)
PdND = NormDistPDF(Ravg,Rstd,retrange)
CdND = NormDistCDF(Ravg,Rstd,retrange)

print("-----Valores del modelado Gaussiano-----")
print("Media:" + str(Ravg))
print("Desviacion estandar:" + str(Rstd))
print()

BICnd, AICnd = BICnAIC_ND(rlp,lenrets,Ravg,Rstd)
print("BIC gaussiano:" + str(BICnd))
print("AIC gaussiano:" + str(AICnd))
print()

# Ajuste de datos a Modelo de Levy

PdLV, CdLV1, CdLV2, AA, BB, UU, SS = LevyFit(rlp,retrange) # Fit de datos a
    ↪ distribucion de Levy estable

print("-----Valores del modelado por distribucion de Levy estable-----")
print("Alpha:" + str(AA))
print("Beta:" + str(BB))
print("Mu:" + str(UU))
print("Sigma:" + str(SS))
print()

BIClv, AIClv = BICnAIC_LV(rlp,lenrets,AA,BB,UU,SS)
print("BIC Levy:" + str(BIClv))
print("AIC Levy:" + str(AIClv))
print()

```

```

# Ajuste de datos a Modelo Fokker-Planck con coeficientes de difusion
  ↪ generalizados

PdFP, CdFP, ZZ, coefd1, coefd2, resultd1, resultd2, reportd1, reportd2, d1_pred,
  ↪ d2_pred, dd, cc, kk, rlpA, sortd1, sortd2 = FPfit(rlp,retrange,Ravg)

ad1 = resultd1.params['a'].value
ad1error = resultd1.params['a'].stderr
if ad1error == None:
    ad1error = 0
ad1errorPer = np.abs(ad1error/ad1)

ad2 = resultd2.params['a'].value
ad2error = resultd2.params['a'].stderr
if ad2error == None:
    ad2error = 0
ad2errorPer = np.abs(ad2error/ad2)
cd2 = resultd2.params['c'].value
cd2error = resultd2.params['c'].stderr
if cd2error == None:
    cd2error = 0
cd2errorPer = np.abs(cd2error/cd2)

d1test = D1pred(rlpA,coefd1)
d2test = D2pred(rlpA,coefd2)
r2d1 = CoeffDetermination(sortd1,d1test)
r2d2 = CoeffDetermination(sortd2,d2test)

print("-----Valores de modelado por coeficientes de difusion-----")
print()

print("Coeficiente lineal a: " + str(ad1))
print("Error del coeficiente lineal a: " + str(ad1error))
print("Coeficiente de Determinacion: " + str(r2d1))
print()

print("Coeficiente cuadratico a: " + str(ad2))
print("Error del coeficiente cuadratico a: " + str(ad2error))
print("Coeficiente cuadratico c: " + str(cd2))
print("Error del coeficiente cuadratico c: " + str(cd2error))
print("Coeficiente de Determinacion: " + str(r2d2))
print()

covard1 = resultd1.covar
covard2 = resultd2.covar
if np.any(covard1 == None) == True:
    covard1 = np.array([[0]])
if np.any(covard2 == None) == True:
    covard2 = np.array([[0,0],[0,0]])

dderror = cd2error
dderrorPer = dderror/dd
ccerror = np.abs(cc) * np.sqrt((dderror/dd)**2 + (ad2error/ad2)**2 - ((2*covard2
  ↪ [1,0])/(dd*ad2)))

```

```

ccerrorPer = cerror/cc
kkerror = np.abs(kk) * np.sqrt((ad1error/ad1)**2 + (ad2error/ad2)**2)
kkerrorPer = kkerror/kk

print("D:_" + str(dd))
print("Error_D:_" + str(dderror))
print("Error_D_porcentual:_" + str(dderrorPer))
print("C:_" + str(cc))
print("Error_C:_" + str(ccerror))
print("Error_C_porcentual:_" + str(ccerrorPer))
print("k:_" + str(kk))
print("Error_k:_" + str(kkerror))
print("Error_k_porcentual:_" + str(kkerrorPer))
print()

nacrTFPRet = nacrFP(dd,cc,kk,0,pernacr) # Forma teorica de autocorrelacion de
    ↪ retornos
r2nacrTFPRet = CoeffDetermination(nacrRet,nacrTFPRet) # Coeficiente de
    ↪ determinacion
nacrTFPVol = corrVol(dd,cc,kk,0,pernacr) # Forma teorica de autocorrelacion de
    ↪ volatilidad
r2nacrFPVol = CoeffDetermination(nacrVol,nacrTFPVol)
nacrTFPVolLog = corrVol(dd,cc,kk,0,pernacr*10) # Forma teorica de autocorrelacion
    ↪ de volatilidad para escala log-log
lindecaycorr = 2*kk*dd*cc
lindecaycorrerror = np.abs(lindecaycorr)*np.sqrt((kkerror/kk)**2 + (dderror/dd)**2
    ↪ + (ccerror/cc)**2)
lindecaycorrT = 1/lindecaycorr
lindecaycorrTerror = lindecaycorrerror/(lindecaycorr)**2
lindecaycorrTerrorPer = lindecaycorrTerror/lindecaycorrT

print("La_funcion_de_autocorrelacion_teorica_sugiere_que_las_correlaciones_
    ↪ lineales_decaen_en_un_tiempo_de_" + str(lindecaycorrT) + "_" + str(percrr))
print()

BICfp, AICfp = BICnAIC_FP(rlp,lenrets,Ravg,cc,kk,ZZ)
print("BIC_C.D.:_" + str(BICfp))
print("AIC_C.D.:_" + str(AICfp))
print()

# Ranking de las modelos

BICrankND, BICrankLV, BICrankFP = rankmodels(BICnd,BIClv,BICfp)
AICrankND, AICrankLV, AICrankFP = rankmodels(AICnd,AIClv,AICfp)

print("Rank_Gaussiano")
print("Segun_BIC:_" + str(BICrankND) + str("._Segun_AIC:_" + str(AICrankND))
print("Rank_Levy")
print("Segun_BIC:_" + str(BICrankLV) + str("._Segun_AIC:_" + str(AICrankLV))
print("Rank_Coeficientes_de_Difusion")
print("Segun_BIC:_" + str(BICrankFP) + str("._Segun_AIC:_" + str(AICrankFP))

# Creacion de dataframe con todos los datos importantes

```

```

ListaPar = [fechaini, fechafin, ADFstat, ADFpval, Stationarity, Ravg, Rstd, BICnd,
    ↪ BICrankND, AICnd, AICrankND, AA, BB, UU, SS, BIClv, BICrankLV, AIClv, AICrankLV, ad1,
    ↪ ad1error, ad1errorPer, r2d1, ad2, ad2error, ad2errorPer, cd2, cd2error, cd2errorPer,
    ↪ , r2d2, dd, dderror, dderrorPer, cc, ccerror, ccerrorPer, kk, kkerror, kkerrorPer,
    ↪ lindecaycorrT, lindecaycorrTerror, lindecaycorrTerrorPer, r2nacrFPRet,
    ↪ r2nacrFPVol, BICfp, BICrankFP, AICfp, AICrankFP]
Par = ['Fecha_Inicial', 'Fecha_Final', 'Estadistico_ADF', 'pvalue_ADF', 'Proceso_
    ↪ Estacionario', 'Retorno_Promedio', 'Desviacion_Estandar_de_Returnos', 'BIC_
    ↪ Gaussiano', 'Rango_Gauss_BIC', 'AIC_Gaussiano', 'Rango_Gauss_AIC', 'Alpha_Levy'
    ↪ , 'Beta_Levy', 'Mu_Levy', 'Sigma_Levy', 'BIC_Levy', 'Rango_Levy_BIC', 'AIC_Levy',
    ↪ 'Rango_Levy_AIC', 'Coef_Lineal_1', 'Error_CL1', '%_Error_CL1', 'D1_r^2', 'Coef.
    ↪ _Cuad._1', 'Error_CC1', '%_Error_CC1', 'Coef._Cuad._3', 'Error_CC3', '%_Error_
    ↪ CC3', 'D2_r^2', 'D', 'Error_D', '%_Error_D', 'C', 'Error_C', '%_Error_C', 'k',
    ↪ Error_k', '%_Error_k', 'Periodo_de_Decaimiento_de_Corr_Returnos', 'Error_PDCR
    ↪ ', '%_Error_PDCR', 'PDCR_r^2', 'PDCVol_r^2', 'BIC_Coef._Difusion', 'Rango_C.D._
    ↪ BIC', 'AIC_Coef._Difusion', 'Rango_C.D._AIC']
dfPar = pd.DataFrame(index=Par)
dfPar.insert(0, ticker, ListaPar)

# Graficas

nbins = 24

dfresample[pricescol].plot(color='black') # Grafica de precios
plt.title("Precio_" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Precio")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'Precio.png', dpi=150)
plt.show()

dfresample['Log_Ret'].plot(color='black') # Grafica de retornos
plt.title("Retorno_logaritmico_" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Retorno_Log")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'LogRet.png', dpi=150)
plt.show()

dfresample['Vol_Ins'].plot(color='black') # Grafica de volatilidad
plt.title("Volatilidad_instantanea_" + str(ticker))
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Volatilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'Vol.png', dpi=150)
plt.show()

plt.plot(nacrRet, 'black') # Autocorrelacion de retornos
plt.plot(nacrTFPRet, 'green')
plt.title("Auto-correlacion_de_retornos_" + str(ticker))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')

```

```

plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRret.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(nacrVol,'black') # Autocorrelacion de volatilidad
plt.plot(nacrTFPVol,'green')
plt.title("Auto-correlacion de volatilidad" + str(ticker))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRvol.png',dpi=150)
plt.show()

plt.loglog(nacrVolLog,'black') # Autocorrelacion de volatilidad en escala log-log
plt.loglog(nacrTFPVolLog,'green')
plt.title("Auto-correlacion de volatilidad en escala log-log" + str(ticker))
plt.legend(('Empirico', 'Teorico'), loc='upper_right')
plt.xlabel(percrr)
plt.ylabel("Auto-correlacion")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'NACRvolLog.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,PdND,'red') # Distribuciones de densidad de probabilidad
plt.plot(retrange,PdLV,'blue')
plt.plot(retrange,PdFP,'green')
plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,color='orange')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef. de Difusion', 'Empirico'), loc='upper_
↪ right')
plt.title("Distribuciones de densidad de probabilidad" + str(ticker))
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("Densidad de probabilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'PDFs.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,PdND,'red') # Distribuciones de densidad de probabilidad en
↪ escala log
plt.plot(retrange,PdLV,'blue')
plt.plot(retrange,PdFP,'green')
plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,color='orange')
plt.yscale('log')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef. de Difusion', 'Empirico'), loc='lower_
↪ center')
plt.title("Distribuciones de densidad de probabilidad, escala log" + str(ticker))
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("Densidad de probabilidad")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'PDFsLog.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,CdND,'red') # Distribuciones de probabilidad acumulada
plt.plot(retrange,CdLV,'blue')
plt.plot(retrange,CdFP,'green')

```

```

plt.hist(rlp,bins=nbins,density=True,cumulative=True,color='orange')
plt.legend(('Gaussiano', 'Levy', 'Coef. de Difusion', 'Empirico'), loc='lower_
↪ right')
plt.title("Distribuciones de probabilidad acumulada" + str(ticker))
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("Probabilidad acumulada")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'CDFs.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,d1_pred,'green') # Grafica D1
plt.scatter(rlpA,sortd1,color='black')
plt.title("Coeficiente de difusion de primer orden" + str(ticker))
plt.legend(('Regresion', 'Empirico'), loc='best')
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("D1")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'D1.png',dpi=150)
plt.show()

plt.plot(retrange,d2_pred,'green') # Grafica D2
plt.scatter(rlpA,sortd2,color='black')
plt.title("Coeficiente de difusion de segundo orden" + str(ticker))
plt.legend(('Regresion', 'Empirico'), loc='best')
plt.xlabel("Retorno logaritmico")
plt.ylabel("D2")
plt.axis('tight')
plt.savefig(fname=str(ticker)+percrr+'D2.png',dpi=150)
plt.show()

elapsed_time = timer() - starttime

print("El codigo tardó" + str(elapsed_time) + " segundos")

```

B. Tablas de resultados

B.1. Resultados anuales

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-2.648741795	-2.071698399	-2.456636109	-1.359356073	-1.144795871
pvalue ADF	0.083335843	0.256046008	0.126384779	0.601598894	0.696881438
Proceso Estacionario	no	no	no	no	no
Retorno Promedio	0.053002587	0.066409498	0.087811023	0.08031618	0.075347459
Desv. de Rets.	0.165986215	0.123400272	0.189097122	0.124389947	0.117972641
BIC Gaussiano	-84.83361324	-77.56004324	-17.37884661	-41.74142947	-45.55517056
Rango Gauss BIC	2	1	3	2	1
AIC Gaussiano	-90.47417637	-81.84631269	-21.1624872	-44.90846735	-48.72220844
Rango Gauss AIC	2	1	3	2	1
Alpha Lévy	1.83692553	2	1.039571484	1.334905883	2
Beta Lévy	-1	-0.016440402	-0.692906718	-1	-0.207447683
Mu Lévy	0.077130485	0.066294918	0.160145902	0.133486384	0.075373488
Sigma Lévy	0.099205806	0.086455595	0.062965509	0.057014855	0.082227517
BIC Lévy	-95.21760037	-69.28211248	-26.01051984	-44.87249145	-38.40259941
Rango Lévy BIC	1	2	1	1	2
AIC Lévy	-106.4987266	-77.85465139	-33.57780103	-51.2065672	-44.73667516
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	2
Coef. Lineal 1	-0.807385092	-0.853160983	-0.839477344	-0.681733507	-0.912825392
Error CL1	0.088556354	0.12690333	0.143945628	0.162712219	0.171397475
% Error CL1	0.109682919	0.148744882	0.171470534	0.238674229	0.187765894
D1 r ²	0.405197407	0.425590306	0.419697399	0.339878462	0.454531747
Coef. Cuad. 1	0.627716997	0.430571007	0.193949948	0.380854539	0.558929691
Error CC1	0.041247278	0.088923547	0.125492957	0.121155239	0.152740175
% Error CC1	0.065709991	0.206524697	0.647037851	0.318114204	0.27327261
Coef. Cuad. 3	0.004861389	0.006434791	0.022972193	0.004611108	0.004912114
Error CC3	0.003047599	0.002433448	0.010838447	0.003489059	0.003722362
% Error CC3	0.626898842	0.378170455	0.471807256	0.756663743	0.757792388
D2 r ²	0.656834226	0.280966199	0.04936256	0.230441851	0.288652658
D	0.004861389	0.006434791	0.022972193	0.004611108	0.004912114
Error D	0.003047599	0.002433448	0.010838447	0.003489059	0.003722362
% Error D	0.626898842	0.378170455	0.471807256	0.756663743	0.757792388
C	129.1229628	66.91297135	8.442813767	82.59500936	113.7859861
Error C	84.47597793	34.90898769	7.977926505	79.62204145	106.9038132
% Error C	0.654228931	0.521707331	0.944936928	0.964005478	0.939516516
k	0.643112338	0.990732038	2.164159759	0.895005097	0.81658338
Error k	0.082228258	0.252155396	1.448629966	0.355939864	0.270748745
% Error k	0.127859867	0.254514224	0.669372933	0.397695907	0.33156289
T Dec. Corr. Ret.	1.238566342	1.172111735	1.191217377	1.466848834	1.095499763
Error PDCR	1.133383492	0.812036542	1.489530527	1.889907424	1.371290285
% Error PDCR	0.915076935	0.692797895	1.250427131	1.288413216	1.251748592
PDCR r ²	0.949297185	0.82259556	0.930181814	0.955551459	0.862132811
PDCVol r ²	-0.811118497	-0.248290977	0.297710732	0.78215486	-0.16560023
BIC Coef. Difusión	-24.68380135	-68.98136987	-20.24811375	-37.71107747	-33.72831348
Rango C.D. BIC	3	3	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-33.14464605	-75.41077405	-25.92357465	-42.46163428	-38.4788703
Rango C.D. AIC	3	3	2	3	3

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.170394425	-1.178437823	0.00626828	-0.265439855	-3.407803465
pvalue ADF	0.686199903	0.682801769	0.959047409	0.930258462	0.010695711
Proceso Estacionario	no	no	no	no	si
Retorno Promedio	0.052645079	0.056481736	0.003965007	0.015729551	0.061283984
Desv. de Rets.	0.116855435	0.117817878	0.17449328	0.161581714	0.207520997
BIC Gaussiano	-46.2402628	-45.64968612	-9.202857664	-12.5853687	-1.361492316
Rango Gauss BIC	1	1	1	1	1
AIC Gaussiano	-49.40730068	-48.816724	-11.38494257	-14.76745361	-3.450537191
Rango Gauss AIC	1	1	1	1	1
Alpha Lévy	2	2	2	0.620338746	2
Beta Lévy	-0.050361056	-0.243564141	-0.625359507	-0.056519006	0.696450963
Mu Lévy	0.052632347	0.056507844	0.003970779	0.122302618	0.061391363
Sigma Lévy	0.081475794	0.082293068	0.120540547	0.113381045	0.143475428
BIC Lévy	-39.08722574	-38.49637468	-3.044278045	7.085699619	4.703081295
Rango Lévy BIC	2	2	2	3	3
AIC Lévy	-45.4213015	-44.83045043	-7.408447858	2.721529805	0.524991544
Rango Lévy AIC	2	2	2	3	3
Coef. Lineal 1	-0.720802877	-0.744424808	-0.785764202	-0.799763287	-0.57681993
Error CL1	0.162201623	0.163119678	0.212498002	0.216195146	0.20594438
% Error CL1	0.2250291	0.219121765	0.270434822	0.270323919	0.357034092
D1 r ²	0.366559319	0.378964565	0.405065636	0.405666779	0.290910496
Coef. Cuad. 1	0.437815922	0.392153752	0.578875192	0.402601403	0.1259753
Error CC1	0.163509565	0.157857697	0.264971859	0.272197165	0.178890606
% Error CC1	0.373466465	0.40254032	0.457735731	0.676095917	1.42004509
Coef. Cuad. 3	0.003654956	0.004650878	0.005522856	0.010037187	0.019007867
Error CC3	0.003443964	0.003439093	0.010845013	0.010016514	0.010623908
% Error CC3	0.942272567	0.73945022	1.963660375	0.997940332	0.558921632
D2 r ²	0.178483854	0.157547862	0.200766205	0.103252369	0.02681144
D	0.003654956	0.004650878	0.005522856	0.010037187	0.019007867
Error D	0.003443964	0.003439093	0.010845013	0.010016514	0.010623908
% Error D	0.942272567	0.73945022	1.963660375	0.997940332	0.558921632
C	119.7869301	84.31822006	104.8144705	40.11097955	6.627534922
Error C	145.7750004	87.8544858	243.6293541	62.26452743	12.35459
% Error C	1.216952469	1.041939521	2.324386633	1.552306329	1.864130502
k	0.823180291	0.949149159	0.678699151	0.993244535	2.289416781
Error k	0.358924823	0.43500973	0.360833767	0.7232162	3.352257678
% Error k	0.436022128	0.458315456	0.531654956	0.728135091	1.464240896
T Dec. Corr. Ret.	1.387341854	1.343319015	1.272646421	1.250369974	1.733643289
Error PDCR	2.219298722	1.823392972	3.931095879	2.480565298	4.22218753
% Error PDCR	1.599676905	1.357378963	3.088914417	1.983865055	2.435441914
PDCR r ²	0.982647901	0.985166394	0.629117116	0.639662383	0.972225039
PDCVol r ²	0.648407915	0.251666053	0.543061793	-1.2097917	-3.230000998
BIC Coef. Difusión	-30.16876522	-33.53070933	16.36407	-3.293117988	1.634645597
Rango C.D. BIC	3	3	3	2	2
AIC Coef. Difusión	-34.91932203	-38.28126614	13.09094264	-6.566245348	-1.498921716
Rango C.D. AIC	3	3	3	2	2

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.495628779	-1.82776932	-1.55473952	-1.344695745	-4.064686517
pvalue ADF	0.535672601	0.366764731	0.506279896	0.608484159	0.001107209
Proceso Estacionario	no	no	no	no	si
Retorno Promedio	0.045839895	0.09157619	0.101954859	0.276071119	0.206206305
Desv. de Rets.	0.18113538	0.350546258	0.261531273	0.579004874	0.291093901
BIC Gaussiano	-22.13315785	27.23379548	14.79283752	45.40571932	18.62110352
Rango Gauss BIC	1	2	1	3	1
AIC Gaussiano	-25.95720386	24.49920382	10.92918625	43.13473088	15.56838247
Rango Gauss AIC	1	2	3	3	2
Alpha Lévy	2	1.495776689	1.848308672	1.24805314	1.497693625
Beta Lévy	-0.373220217	1	-1	0.252557893	1
Mu Lévy	0.045913904	-0.029261843	0.138599935	0.223663764	0.107491901
Sigma Lévy	0.126690497	0.162888676	0.156923234	0.209215027	0.159479261
BIC Lévy	-14.31906081	23.73409362	15.57287491	43.53294669	21.19350969
Rango Lévy BIC	3	1	3	1	2
AIC Lévy	-21.96715283	18.2649103	7.845572377	38.99096983	15.08806759
Rango Lévy AIC	3	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.667930321	-0.950482526	-0.923310498	-0.757713117	-0.605142954
Error CL1	0.136170278	0.155614796	0.142463372	0.183546827	0.13596363
% Error CL1	0.203868987	0.16372189	0.154296277	0.24223789	0.224680184
D1 r ²	0.333842572	0.576183124	0.461494599	0.440922676	0.37419193
Coef. Cuad. 1	0.068831182	0.456480002	0.413054739	0.486186536	0.473985638
Error CC1	0.088787951	0.098764137	0.13730672	0.098296682	0.081389633
% Error CC1	1.289937904	0.21636027	0.332417732	0.202178948	0.171713289
Coef. Cuad. 3	0.019635728	0.03948944	0.034807535	0.05129924	0.000408149
Error CC3	0.004796459	0.027466817	0.023083774	0.073989396	0.012789514
% Error CC3	0.244272014	0.695548401	0.66318325	1.442309794	31.33537111
D2 r ²	0.01262544	0.451038444	0.158627574	0.550198303	0.522452644
D	0.019635728	0.03948944	0.034807535	0.05129924	0.000408149
Error D	0.004796459	0.027466817	0.023083774	0.073989396	0.012789514
% Error D	0.244272014	0.695548401	0.66318325	1.442309794	31.33537111
C	3.505405221	11.559546	11.86681954	9.477460832	1161.304181
Error C	5.086888255	9.413947018	10.13249154	14.61552786	36495.98957
% Error C	1.451155554	0.814387262	0.853850647	1.5421354	31.42672709
k	4.85194571	1.041099854	1.117661186	0.779241157	0.638355791
Error k	6.336392851	0.282475206	0.409602453	0.245869445	0.180516633
% Error k	1.305948836	0.271323836	0.366481773	0.315524203	0.282783732
T Dec. Corr. Ret.	1.497162157	1.052097195	1.083059276	1.319760708	1.652502096
Error PDCR	2.945654128	1.162379729	1.236387871	2.817617917	73.33879189
% Error PDCR	1.967491708	1.104821621	1.141569901	2.134946055	44.38045318
PDCR r ²	0.970947255	0.808739703	0.917758296	0.659363981	0.040015024
PDCVol r ²	-1.969871422	0.826753227	0.530782561	-0.095896858	-2.90636309
BIC Coef. Difusión	-19.5726883	29.62985471	15.19309411	43.63777321	209.0560577
Rango C.D. BIC	2	3	2	2	3
AIC Coef. Difusión	-25.30875732	25.52796722	9.397617211	40.23129057	204.4769761
Rango C.D. AIC	2	3	2	2	3

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.405895427	-1.488305171	2.034388515	-19.5168399	-2.896538396
pvalue ADF	0.579446536	0.539288467	0.998716003	0	0.045752018
Proceso Estacionario	no	no	no	si	si
Retorno Promedio	0.156236294	0.172021097	0.249538515	0.330997141	0.141221064
Desv. de Rets.	0.383650211	0.181481109	0.210294298	0.472428469	0.168687159
BIC Gaussiano	41.30467297	-4.660108351	0.913942658	28.86724917	-17.81786291
Rango Gauss BIC	1	1	1	1	1
AIC Gaussiano	38.02950065	-6.205285796	0.755059575	27.08650566	-20.81087804
Rango Gauss AIC	1	1	1	1	1
Alpha Lévy	2	2	2	1.780552031	2
Beta Lévy	-0.040719418	-0.025914803	0.324790654	-1	0.108419435
Mu Lévy	0.156838234	0.172004516	0.249629792	0.411004792	0.141180259
Sigma Lévy	0.267676233	0.124274754	0.139168166	0.29208332	0.117429617
BIC Lévy	48.56659268	0.8522329	5.004543049	33.79344443	-10.84041757
Rango Lévy BIC	3	3	2	2	2
AIC Lévy	42.01624804	-2.238121989	4.686776882	30.2319574	-16.82644782
Rango Lévy AIC	3	3	2	2	2
Coef. Lineal 1	-0.764996467	-0.634307248	-0.505051947	-1.213233884	-0.9109539
Error CL1	0.16235914	0.194183511	0.398853722	0.236889203	0.177854651
% Error CL1	0.21223515	0.306134781	0.789728114	0.195254358	0.195240012
D1 r ²	0.381372469	0.39864503	0.157795921	0.619065887	0.457319833
Coef. Cuad. 1	0.197822251	0.029231041	0.42272543	1.016206837	0.651646949
Error CC1	0.129285321	0.119205547	0.134561817	0.223706612	0.076808658
% Error CC1	0.653542869	4.078046549	0.318319664	0.220138857	0.117868515
Coef. Cuad. 3	0.083414792	0.013496382	0.006432043	0.036563274	0.007057444
Error CC3	0.031743643	0.006971498	0.008956491	0.089411883	0.003873134
% Error CC3	0.380551718	0.516545701	1.392479843	2.445401425	0.548801248
D2 r ²	0.062699303	0.004604131	0.663729865	0.579066711	0.705821099
D	0.083414792	0.013496382	0.006432043	0.036563274	0.007057444
Error D	0.031743643	0.006971498	0.008956491	0.089411883	0.003873134
% Error D	0.380551718	0.516545701	1.392479843	2.445401425	0.548801248
C	2.371548801	2.165842744	65.72179427	27.79310273	92.33469757
Error C	2.210484571	9.472336686	104.1406392	71.4670402	57.40234739
% Error C	0.932084792	4.373510826	1.584567803	2.571394813	0.621676887
k	1.93354505	10.84989139	0.597375875	0.596942394	0.69896276
Error k	1.328617075	44.3708589	0.508646493	0.175652651	0.159405885
% Error k	0.687140481	4.089521019	0.851468087	0.294253939	0.228060626
T Dec. Corr. Ret.	1.307195579	1.576523054	1.979994345	0.824243383	1.097750391
Error PDCR	1.593365626	9.474706629	4.504151237	2.934890392	0.94411423
% Error PDCR	1.218919074	6.009875087	2.274830354	3.560708468	0.860044541
PDCR r ²	0.931904721	0.863120024	0.532728315	0.671351823	-0.892380222
PDCVol r ²	-1.236868753	0.027072568	-4.46644145	-1.686122333	-0.498451531
BIC Coef. Difusión	45.2285459	-1.387430783	5.329446402	46.73824551	-1.410469765
Rango C.D. BIC	2	2	3	3	3
AIC Coef. Difusión	40.31578743	-3.70519695	5.091121777	44.06713024	-5.899992449
Rango C.D. AIC	2	2	3	3	3

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-0.665149657	0.660128931	-2.200261358	-0.071538518	-1.020689687
pvalue ADF	0.855571264	0.989007645	0.206150613	0.952200648	0.74564362
Proceso Estacionario	no	no	no	no	no
Retorno Promedio	0.094533882	0.191048749	0.073248512	0.068525376	0.105173831
Desv. de Rets.	0.150438883	0.138539905	0.213466832	0.133147995	0.149352112
BIC Gaussiano	-17.45636446	-9.413986851	-3.649063467	-41.41068037	-34.97346479
Rango Gauss BIC	1	1	1	1	1
AIC Gaussiano	-19.81247212	-10.38380015	-7.026822375	-44.78843928	-38.49586502
Rango Gauss AIC	1	1	1	1	1
Alpha Lévy	1.949236567	2	1.802570605	2	2
Beta Lévy	-1	-0.708784353	-1	-0.020331774	0.002802811
Mu Lévy	0.10107313	0.191125339	0.105944156	0.068429712	0.105133189
Sigma Lévy	0.10186487	0.093655785	0.137249979	0.092932474	0.104373273
BIC Lévy	-11.19438207	-4.488267928	2.655267361	-34.04559323	-27.46335477
Rango Lévy BIC	2	3	3	2	2
AIC Lévy	-15.90659739	-6.427894527	-4.100250456	-40.80111105	-34.50815524
Rango Lévy AIC	2	3	3	2	2
Coef. Lineal 1	-1.084949713	-0.974532208	-0.881370095	-0.628987786	-0.796468632
Error CL1	0.208357666	0.307998694	0.159805816	0.146671597	0.153826436
% Error CL1	0.192043616	0.316047732	0.181315224	0.233186717	0.193135586
D1 r ²	0.550832403	0.500218876	0.444293245	0.325828646	0.395284308
Coef. Cuad. 1	0.843400122	0.122882965	0.255622074	0.465798625	0.503196256
Error CC1	0.084959518	0.350468156	0.114017596	0.110635078	0.120142564
% Error CC1	0.100734534	2.852048335	0.446039713	0.237516969	0.238758858
Coef. Cuad. 3	0.004953582	0.013117477	0.028076269	0.002478373	0.006592253
Error CC3	0.003585956	0.008325966	0.008988186	0.002902841	0.004472194
% Error CC3	0.723911598	0.63472311	0.320134638	1.171268811	0.678401385
D2 r ²	0.824336816	0.013475704	0.11960002	0.323904529	0.304856516
D	0.004953582	0.013117477	0.028076269	0.002478373	0.006592253
Error D	0.003585956	0.008325966	0.008988186	0.002902841	0.004472194
% Error D	0.723911598	0.63472311	0.320134638	1.171268811	0.678401385
C	170.2606416	9.367881316	9.104560022	187.9453018	76.33145442
Error C	133.0927227	31.00784652	6.21528773	252.2629434	64.27561928
% Error C	0.781699877	3.310017011	0.682656571	1.342214681	0.842059408
k	0.643199879	3.965286026	1.723971022	0.675171364	0.791409537
Error k	0.139484233	11.37841287	0.830064094	0.22473204	0.243037664
% Error k	0.216859855	2.869506208	0.481483786	0.332851853	0.307094687
T Dec. Corr. Ret.	0.921701705	1.026133351	1.134597153	1.589855991	1.255542227
Error PDCR	1.00212795	4.542092308	1.015025614	2.881195101	1.411354359
% Error PDCR	1.087258431	4.426415245	0.894613222	1.812236528	1.124099476
PDCR r ²	0.758172662	-4.065132466	0.918398796	0.974356605	0.267279693
PDCVol r ²	-0.287433477	-0.392519644	-4.348545258	-1.019002851	-0.859534788
BIC Coef. Difusión	0.720006822	-6.794366506	-0.90606307	-1.986219099	-17.39822938
Rango C.D. BIC	3	2	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-2.814154669	-8.249086455	-5.972701433	-7.052857461	-22.68182973
Rango C.D. AIC	3	2	2	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.035719154	-3.220868081	-1.164670392	-2.402776085	-1.416686903
pvalue ADF	0.740014717	0.018808087	0.688606066	0.140954412	0.574250581
Proceso Estacionario	no	si	no	no	no
Retorno Promedio	0.095934334	0.092161998	0.042820272	0.041035127	0.112536818
Desv. de Rets.	0.165796798	0.248250462	0.237261345	0.20186927	0.203957858
BIC Gaussiano	-23.8665462	2.890975978	4.85750032	-11.94194199	-9.065825685
Rango Gauss BIC	1	2	1	1	1
AIC Gaussiano	-27.24430511	3.30745704	1.073859724	-15.84442943	-12.72310848
Rango Gauss AIC	1	2	2	1	1
Alpha Lévy	2	0.5	0.982675316	1.252949448	2
Beta Lévy	0.074111396	0.476171156	-0.399662489	0.36015977	-0.164052029
Mu Lévy	0.096661363	0.004288893	0.107834461	0.010263513	0.112497835
Sigma Lévy	0.116131013	0.021117764	0.097732936	0.090538997	0.142610344
BIC Lévy	-16.50000193	1.640845056	8.348175779	-7.656439185	-1.419404749
Rango Lévy BIC	2	1	2	2	3
AIC Lévy	-23.25551975	2.47380718	0.780894586	-15.46141406	-8.733970335
Rango Lévy AIC	2	1	1	2	3
Coef. Lineal 1	-0.923539282	-0.859198242	-0.621485627	-0.643472496	-0.838574424
Error CL1	0.162449386	0.419856071	0.135004887	0.132163806	0.148917593
% Error CL1	0.175898729	0.4886603	0.217229299	0.205391538	0.17758423
D1 r ²	0.459549499	0.501361383	0.310731851	0.321616367	0.418651692
Coef. Cuad. 1	0.610667496	1.21191E-09	0.46662009	0.562678516	0.133813087
Error CC1	0.171988144	0	0.059269639	0.05762637	0.100664048
% Error CC1	0.281639591	0	0.127019046	0.102414377	0.752273567
Coef. Cuad. 3	0.008644558	0.043249284	0.008709397	0.003299463	0.029156527
Error CC3	0.007374963	0	0.007685882	0.004678027	0.007778154
% Error CC3	0.85313368	0	0.88248151	1.417814401	0.266772295
D2 r ²	0.254137888	-3.89737E-10	0.574001224	0.660525314	0.039472068
D	0.008644558	0.043249284	0.008709397	0.003299463	0.029156527
Error D	0.007374963	0	0.007685882	0.004678027	0.007778154
% Error D	0.85313368	0	0.88248151	1.417814401	0.266772295
C	70.64184478	2.80214E-08	53.57662375	170.5363673	4.58947271
Error C	74.50574867	0	50.60377374	251.0037128	4.235529566
% Error C	1.054697098	0	0.944512181	1.471848596	0.922879344
k	0.756171966	354481979.9	0.665943923	0.571794086	3.13337971
Error k	0.251091478	173221270.7	0.167577754	0.131231898	2.421945797
% Error k	0.332056053	0.4886603	0.251639437	0.229509016	0.772949984
T Dec. Corr. Ret.	1.082790975	1.163875752	1.609047669	1.554067978	1.192499999
Error PDCR	1.512223049	0.568739874	2.118938791	3.195947637	1.47037011
% Error PDCR	1.396597388	0.4886603	1.316890004	2.056504402	1.233014768
PDCR r ²	0.359415606	0.816423301	0.961179092	0.943949133	0.775895307
PDCVol r ²	0.675472162	0.70169266	-1.537480027	-6.398117894	-0.540391954
BIC Coef. Difusión	-5.746868168	4.195795478	15.45509476	21.85236202	-6.786292844
Rango C.D. BIC	3	3	3	3	2
AIC Coef. Difusión	-10.81350653	4.82051707	9.779633869	15.99863086	-12.27221703
Rango C.D. AIC	3	3	3	3	2

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.532668654	-1.064023984	-2.604707343	-0.611951297	-2.210961937
pvalue ADF	0.517293204	0.729203502	0.092028253	0.868258591	0.20229099
Proceso Estacionario	no	no	no	no	no
Retorno Promedio	0.155117787	0.019388178	0.026894231	0.059976714	0.128582624
Desv. de Rets.	0.245922478	0.0958057	0.18662094	0.140953911	0.277650433
BIC Gaussiano	8.297564785	-23.37873652	-10.69171172	-36.8529435	16.7286792
Rango Gauss BIC	1	1	2	1	1
AIC Gaussiano	4.555162763	-24.79483692	-13.62318353	-40.2307024	13.45350688
Rango Gauss AIC	1	1	2	1	1
Alpha Lévy	1.875278167	2	1.652843086	2	2
Beta Lévy	1	0.218928292	-1	0.034497749	0.436452894
Mu Lévy	0.130113844	0.019502546	0.07515691	0.0599572	0.128932795
Sigma Lévy	0.162917437	0.065516703	0.085213048	0.098268691	0.193736271
BIC Lévy	15.2209035	-17.99736179	-19.40592121	-29.48768361	23.98980578
Rango Lévy BIC	2	3	1	2	3
AIC Lévy	7.73609946	-20.82956259	-25.26886482	-36.24320143	17.43946114
Rango Lévy AIC	2	3	1	2	3
Coef. Lineal 1	-0.521897392	-0.944998539	-0.947115284	-0.973276919	-0.865192076
Error CL1	0.121779964	0.277301203	0.121262989	0.161590617	0.159956682
% Error CL1	0.233340817	0.29344088	0.128034033	0.16602738	0.184879966
D1 r ²	0.284565182	0.47180328	0.666164755	0.488396042	0.447329598
Coef. Cuad. 1	0.460259614	0.13623688	0.599256998	0.610390133	0.293975575
Error CC1	0.064934596	0.223210949	0.026642858	0.114364024	0.156105342
% Error CC1	0.141082541	1.638403267	0.044459819	0.187362177	0.531014665
Coef. Cuad. 3	0.001021046	0.007413921	0.002430275	0.007106677	0.041452598
Error CC3	0.007097125	0.003523635	0.002946888	0.003774369	0.021603861
% Error CC3	6.950841393	0.475272736	1.212573673	0.531101825	0.52117025
D2 r ²	0.527511637	0.030109249	0.945784251	0.434996391	0.092003258
D	0.001021046	0.007413921	0.002430275	0.007106677	0.041452598
Error D	0.007097125	0.003523635	0.002946888	0.003774369	0.021603861
% Error D	6.950841393	0.475272736	1.212573673	0.531101825	0.52117025
C	450.7728684	18.3758202	246.5798785	85.88966489	7.091849217
Error C	3168.588061	35.88287978	302.6235422	56.74092189	6.576926754
% Error C	7.029234195	1.952722621	1.22728401	0.660625722	0.927392356
k	0.566959794	3.468218517	0.790241321	0.79725807	1.471537346
Error k	0.154596349	5.772758629	0.107104345	0.199584885	0.827413896
% Error k	0.272676035	1.664473735	0.135533719	0.250339122	0.562278558
T Dec. Corr. Ret.	1.916085451	1.058202694	1.055837676	1.027456812	1.155812712
Error PDCR	18.94878523	2.761378383	1.827218644	0.908102792	1.390742032
% Error PDCR	9.889321598	2.609498539	1.730586705	0.883835487	1.203258986
PDCR r ²	0.29187176	0.69814635	0.890807404	0.876891965	0.43608069
PDCVol r ²	-7.454694849	-1.634553472	-0.18508141	-0.138280402	-0.874861385
BIC Coef. Difusión	160.238494	-22.04247205	11.20802483	-22.84982092	19.8388847
Rango C.D. BIC	3	2	3	3	2
AIC Coef. Difusión	154.624891	-24.16662265	6.810817122	-27.91645928	14.92612622
Rango C.D. AIC	3	2	3	3	2

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-1.814600537	-0.30062536
pvalue ADF	0.373237403	0.925415716
Proceso Estacionario	no	no
Retorno Promedio	0.04386679	0.214095982
Desv. de Rets.	0.491046659	0.509924709
BIC Gaussiano	62.99555136	36.39779116
Rango Gauss BIC	1	1
AIC Gaussiano	59.61779246	34.30874628
Rango Gauss AIC	1	1
Alpha Lévy	2	1.749570669
Beta Lévy	0.002407285	1
Mu Lévy	0.04037561	0.117549295
Sigma Lévy	0.344407481	0.313124133
BIC Lévy	70.36446648	41.38427156
Rango Lévy BIC	2	2
AIC Lévy	63.60894866	37.2061818
Rango Lévy AIC	2	2
Coef. Lineal 1	-0.849615959	-0.657357744
Error CL1	0.159171391	0.172860313
% Error CL1	0.187345105	0.262962313
D1 r^2	0.42839781	0.419409333
Coef. Cuad. 1	0.321095864	0.229193294
Error CC1	0.139853669	0.083067585
% Error CC1	0.435551139	0.362434622
Coef. Cuad. 3	0.125650277	0.069776343
Error CC3	0.051802017	0.038190363
% Error CC3	0.412271414	0.547325366
D2 r^2	0.124702623	0.297224565
D	0.125650277	0.069776343
Error D	0.051802017	0.038190363
% Error D	0.412271414	0.547325366
C	2.555472791	3.284684802
Error C	1.968567108	2.654970519
% Error C	0.770333817	0.808287759
k	1.322994244	1.434068448
Error k	0.627276459	0.642148939
% Error k	0.474133929	0.447781234
T Dec. Corr. Ret.	1.177002373	1.521241682
Error PDCR	1.170028506	1.633761293
% Error PDCR	0.994074892	1.073965638
PDCR r^2	0.826497751	0.802670106
PDCVol r^2	0.625499504	0.599040407
BIC Coef. Difusión	71.00930196	42.89715591
Rango C.D. BIC	3	3
AIC Coef. Difusión	65.94266359	39.76358859
Rango C.D. AIC	3	3

B.2. Resultados trimestrales

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-6.276974908	-3.240802162	-3.81211652	-2.974700334	-3.544992442
pvalue ADF	3.87914E-08	0.017741083	0.002785752	0.037325575	0.006904042
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.013323192	0.016858555	0.022479489	0.020391549	0.018742578
Desv. de Rets.	0.078564174	0.060247624	0.092178978	0.06273698	0.081609567
BIC Gaussiano	-1104.488591	-690.6793624	-368.7569501	-379.8216913	-304.0790058
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-1112.901743	-697.7382206	-375.3131794	-385.7613179	-310.0186324
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.702042264	1.800200717	1.660183218	1.726766904	1.774272934
Beta Lévy	-0.479583524	-0.812432466	-0.391420956	-1	-1
Mu Lévy	0.022981025	0.025465542	0.033114409	0.034158049	0.034324378
Sigma Lévy	0.043410677	0.035719041	0.051794917	0.032917914	0.046585919
BIC Lévy	-1179.652132	-716.4866671	-379.4696406	-415.5508399	-322.5632729
Rango Lévy BIC	1	1	2	1	1
AIC Lévy	-1196.478436	-730.6043834	-392.5820992	-427.4300931	-334.4425261
Rango Lévy AIC	1	1	2	1	1
Coef. Lineal 1	-0.709258583	-0.66562537	-0.752104209	-0.727984787	-0.898354963
Error CL1	0.043047957	0.059567256	0.069538089	0.08050815	0.08323349
% Error CL1	0.060694305	0.089490663	0.092458051	0.110590428	0.092651005
D1 r ²	0.354635254	0.333089022	0.376160782	0.365395861	0.450654309
Coef. Cuad. 1	0.449003311	0.24365237	0.342589353	0.261824751	0.331402577
Error CC1	0.025301555	0.030402833	0.044397304	0.036211381	0.051364403
% Error CC1	0.056350487	0.12477955	0.129593357	0.138303887	0.154990959
Coef. Cuad. 3	0.001606211	0.001529141	0.003476653	0.001822354	0.003754877
Error CC3	0.000426491	0.000299188	0.000865225	0.00046657	0.000915931
% Error CC3	0.265526247	0.195657794	0.248867304	0.25602629	0.243931129
D2 r ²	0.389793488	0.205047699	0.235775294	0.270486428	0.227939463
D	0.001606211	0.001529141	0.003476653	0.001822354	0.003754877
Error D	0.000426491	0.000299188	0.000865225	0.00046657	0.000915931
% Error D	0.265526247	0.195657794	0.248867304	0.25602629	0.243931129
C	279.5418911	159.3393576	98.53999052	143.6739464	88.25924711
Error C	81.3253881	42.7126124	32.20953448	46.84184831	29.50476382
% Error C	0.290923796	0.268060654	0.326867643	0.326028828	0.334296573
k	0.789814424	1.365932476	1.097675984	1.390213847	1.355383187
Error k	0.065412543	0.209742989	0.174744119	0.246182528	0.244744849
% Error k	0.082820143	0.15355297	0.159194627	0.177082489	0.18057244
T Dec. Corr. Ret.	1.409923016	1.502346583	1.329602982	1.373655078	1.113145739
Error PDCR	0.567483101	0.549368112	0.585810943	0.619216018	0.502598554
% Error PDCR	0.40249226	0.365673353	0.440590876	0.450779842	0.451511905
PDCR r ²	0.928180444	0.843336278	0.895726935	0.886957808	0.794244885
PDCVol r ²	-11.50327424	-9.047187854	-7.31570019	-4.579854192	-8.432967342
BIC Coef. Difusión	-1126.068876	-715.4712885	-385.1119932	-409.5891934	-321.223539
Rango C.D. BIC	2	2	1	2	2
AIC Coef. Difusión	-1138.688604	-726.0595757	-394.9463372	-418.4986333	-330.1329789
Rango C.D. AIC	2	2	1	2	2

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-3.11563076	-3.259329882	-3.136826076	-3.145375937	-2.270100627
pvalue ADF	0.02541786	0.016797237	0.023945232	0.023372373	0.181792479
Proceso Estacionario	si	si	si	si	no
Retorno Promedio	0.013433445	0.014427685	0.002163968	0.00500725	0.017496688
Desv. de Rets.	0.0601647	0.061973677	0.080639682	0.073934561	0.129363055
BIC Gaussiano	-391.8788861	-383.3471941	-185.4386825	-200.7173249	-94.88236287
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	2
AIC Gaussiano	-397.8185127	-389.2868207	-190.3933561	-205.6719985	-99.69580137
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	2
Alpha Lévy	1.814491918	1.797828339	1.60701008	1.672153575	1.844879735
Beta Lévy	-1	-1	-0.753460494	-1	-1
Mu Lévy	0.02335841	0.025274956	0.019817963	0.023414293	0.035758258
Sigma Lévy	0.035399934	0.036155511	0.044936308	0.041498119	0.076285637
BIC Lévy	-405.5913102	-398.2878039	-186.437675	-207.3624208	-101.1523837
Rango Lévy BIC	2	1	2	1	1
AIC Lévy	-417.4705634	-410.1670571	-196.3470223	-217.2717681	-110.7792607
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.751563416	-0.75371422	-0.658817802	-0.64410971	-0.757906878
Error CL1	0.08129084	0.081326145	0.100560662	0.099057384	0.107565456
% Error CL1	0.108162316	0.107900505	0.152638045	0.153789615	0.141924369
D1 r ²	0.375756862	0.376897966	0.332841157	0.329400674	0.382834371
Coef. Cuad. 1	0.29036753	0.315492588	0.2071293	0.214262061	0.451878175
Error CC1	0.050344498	0.052430361	0.048972739	0.043194946	0.035201192
% Error CC1	0.173381982	0.166185714	0.236435592	0.201598669	0.07789974
Coef. Cuad. 3	0.001669005	0.001682142	0.002891924	0.002268995	0.004988292
Error CC3	0.000464983	0.000515813	0.000677383	0.000547016	0.001661128
% Error CC3	0.278599203	0.306640625	0.234232483	0.241082886	0.333005362
D2 r ²	0.190889064	0.204327894	0.17386308	0.224488455	0.675949159
D	0.001669005	0.001682142	0.002891924	0.002268995	0.004988292
Error D	0.000464983	0.000515813	0.000677383	0.000547016	0.001661128
% Error D	0.278599203	0.306640625	0.234232483	0.241082886	0.333005362
C	173.9764333	187.554076	71.62335166	94.43038399	90.58774716
Error C	66.36883026	75.35372472	28.90154803	35.42317694	33.32786213
% Error C	0.381481727	0.401770659	0.403521301	0.375124779	0.367906954
k	1.294158849	1.194503848	1.59035395	1.503088569	0.838618592
Error k	0.264466034	0.236681256	0.447565732	0.381124902	0.135770501
% Error k	0.204353611	0.198141895	0.281425233	0.253561174	0.161897795
T Dec. Corr. Ret.	1.330559709	1.326762815	1.517870337	1.552530546	1.319423308
Error PDCR	0.684826327	0.720260351	0.827057529	0.796393431	0.688707363
% Error PDCR	0.514690414	0.542870469	0.544880224	0.512964742	0.521976047
PDCR r ²	0.884449235	0.873723063	0.823852216	0.822674423	0.810434707
PDCVol r ²	-7.56881006	-8.163451045	-8.304631807	-6.43594964	-5.090303391
BIC Coef. Difusión	-405.5918586	-395.7436079	-186.9353834	-204.2320869	-85.34625923
Rango C.D. BIC	1	2	1	2	3
AIC Coef. Difusión	-414.5012985	-404.6530478	-194.3673939	-211.6640973	-92.56641697
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	3

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-3.107039293	-3.578612921	-4.314129679	-5.234872594	-2.148500091
pvalue ADF	0.026036616	0.006183315	0.00041984	7.45957E-06	0.22546466
Proceso Estacionario	si	si	si	si	no
Retorno Promedio	0.011356747	0.026930925	0.025744605	0.07733312	0.053898896
Desv. de Rets.	0.082183383	0.17364044	0.137596027	0.22843493	0.123413004
BIC Gaussiano	-422.3488124	-67.83104034	-217.3202562	-2.455174375	-174.3069213
Rango Gauss BIC	2	2	2	1	3
AIC Gaussiano	-428.9454472	-73.3209046	-223.926866	-7.476893388	-180.1322311
Rango Gauss AIC	3	2	2	2	3
Alpha Lévy	1.927423583	1.702116322	1.646414875	1.720885278	1.698273422
Beta Lévy	-1	0.414155379	-0.214199724	0.31384006	0.535979911
Mu Lévy	0.017119687	0.007142517	0.03477626	0.063027555	0.038478108
Sigma Lévy	0.054240594	0.096153862	0.0753558	0.136679889	0.071762243
BIC Lévy	-422.3173376	-78.00908878	-234.578604	2.282648801	-176.6360994
Rango Lévy BIC	3	1	1	2	2
AIC Lévy	-435.5106071	-88.9888173	-247.7918236	-7.760789225	-188.286719
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	2
Coef. Lineal 1	-0.663448013	-0.760689261	-0.828057584	-0.57897713	-0.674150153
Error CL1	0.066721939	0.090829334	0.069768801	0.093660516	0.081648334
% Error CL1	0.100568451	0.119403992	0.084255977	0.161768938	0.12111298
D1 r ²	0.333037292	0.382933985	0.414465052	0.299971183	0.337180262
Coef. Cuad. 1	0.236239262	0.554916589	0.919574766	0.310511287	0.173595706
Error CC1	0.032653682	0.067540482	0.052186615	0.040891061	0.040898516
% Error CC1	0.138222926	0.121712854	0.056750813	0.131689451	0.235596356
Coef. Cuad. 3	0.002867332	0.006044925	6.35321E-10	0.012896797	0.007609122
Error CC3	0.000497913	0.005501488	0.000540682	0.004457332	0.001410215
% Error CC3	0.173650404	0.910100244	851038.1906	0.345615412	0.185332163
D2 r ²	0.2099165	0.376057179	0.618710978	0.39586623	0.119299692
D	0.002867332	0.006044925	6.35321E-10	0.012896797	0.007609122
Error D	0.000497913	0.005501488	0.000540682	0.004457332	0.001410215
% Error D	0.173650404	0.910100244	851038.1906	0.345615412	0.185332163
C	82.38992008	91.79875074	1447417763	24.07661971	22.81415618
Error C	21.87874694	88.29323218	1.23181E+15	10.22360611	8.174125304
% Error C	0.265551258	0.961813004	851038.1683	0.424627968	0.35829181
k	1.404186604	0.685408651	0.450239401	0.932296433	1.941724732
Error k	0.240027991	0.11686435	0.04573804	0.194471094	0.514370164
% Error k	0.170937388	0.170503173	0.101586044	0.208593627	0.264903751
T Dec. Corr. Ret.	1.507277104	1.314597236	1.207645482	1.727183939	1.483349066
Error PDCR	0.543229703	1.755092198	1453461.4	1.011944417	0.715852377
% Error PDCR	0.360404667	1.335079788	1203549.735	0.585892674	0.48259199
PDCR r ²	0.907187627	0.835758484	0.861466528	0.724993976	0.159338358
PDCVol r ²	-14.88570112	-0.459322008	-975.1929774	-1.983415796	-8.043292273
BIC Coef. Difusión	-423.9505866	-54.79776927	1955.662706	3.331558209	-180.9504407
Rango C.D. BIC	1	3	3	3	1
AIC Coef. Difusión	-433.8455387	-63.03256565	1945.752791	-4.201020311	-189.6884053
Rango C.D. AIC	2	3	3	3	1

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-3.401642659	-2.673319216	-1.179627276	-3.332996455	-2.166574554
pvalue ADF	0.010903001	0.078770093	0.682297579	0.013466437	0.218599791
Proceso Estacionario	si	no	no	si	no
Retorno Promedio	0.041265543	0.050751077	0.05990717	0.079339437	0.036452031
Desv. de Rets.	0.20486043	0.121852765	0.126727025	0.264838066	0.079707031
BIC Gaussiano	-40.60548015	-77.81013766	-34.23247131	20.34821843	-277.7787836
Rango Gauss BIC	3	3	2	1	1
AIC Gaussiano	-46.61337277	-82.06440643	-37.10044572	15.82285868	-283.4984084
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	1
Alpha Lévy	1.718854436	1.559223611	1.260213618	1.818573269	1.864013125
Beta Lévy	-0.663132202	0.091887879	0.298927885	-0.914226439	0.411415973
Mu Lévy	0.074022494	0.050965881	0.051031182	0.117162997	0.033015463
Sigma Lévy	0.11392392	0.062804578	0.052874464	0.162034315	0.052664929
BIC Lévy	-59.19306898	-78.72288058	-32.07164005	21.5537851	-268.8067057
Rango Lévy BIC	1	2	3	2	2
AIC Lévy	-71.20885421	-87.23141812	-37.80758887	12.50306559	-280.2459553
Rango Lévy AIC	1	2	2	1	2
Coef. Lineal 1	-0.815833268	-0.863000252	-0.910095236	-0.744460232	-0.64785592
Error CL1	0.080706511	0.117031262	0.163793197	0.115958331	0.083079451
% Error CL1	0.098925252	0.135609766	0.179973689	0.155761619	0.128237543
D1 r ²	0.410045921	0.474275296	0.514157303	0.373945718	0.323760308
Coef. Cuad. 1	0.466702351	0.431934797	0.306968796	0.530891992	0.396883949
Error CC1	0.042227747	0.059089338	0.142824955	0.060751647	0.056817832
% Error CC1	0.090481111	0.136801523	0.465275157	0.114433158	0.143159813
Coef. Cuad. 3	0.014467992	0.005201886	0.007909115	0.014718549	0.001593725
Error CC3	0.00512958	0.002117424	0.004727869	0.009877826	0.000688481
% Error CC3	0.35454676	0.407049348	0.597774786	0.671114122	0.431994636
D2 r ²	0.45552329	0.475247954	0.141613625	0.52897277	0.27914744
D	0.014467992	0.005201886	0.007909115	0.014718549	0.001593725
Error D	0.00512958	0.002117424	0.004727869	0.009877826	0.000688481
% Error D	0.35454676	0.407049348	0.597774786	0.671114122	0.431994636
C	32.25757562	83.03426204	38.81202957	36.06958747	249.0290585
Error C	12.742735	39.85807954	35.60726796	26.25059649	129.8439511
% Error C	0.395030772	0.480019676	0.917428652	0.727776455	0.521400803
k	0.874040238	0.998993665	1.482390469	0.701140951	0.81617803
Error k	0.117176942	0.192431867	0.739520465	0.135515564	0.156866784
% Error k	0.134063555	0.192625713	0.498870224	0.193278632	0.192196773
T Dec. Corr. Ret.	1.22574065	1.158748214	1.098786106	1.343255096	1.54355308
Error PDCR	0.671058866	0.762675298	1.322146783	1.354897252	1.086444023
% Error PDCR	0.547472148	0.658188974	1.203279488	1.008667122	0.703859192
PDCR r ²	0.794182135	0.786737862	0.655268733	0.706953339	0.411695413
PDCVol r ²	-3.673003275	-2.567389448	0.495761963	-0.975216782	-7.535037933
BIC Coef. Difusión	-50.05187749	-82.43986149	-35.54874189	46.1390184	-256.7920001
Rango C.D. BIC	2	1	1	3	3
AIC Coef. Difusión	-59.06371641	-88.82126464	-39.8507035	39.35097877	-265.3714373
Rango C.D. AIC	2	1	1	3	3

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-3.42572188	-2.863687515	-2.746240772	-2.790882383	-3.261068259
pvalue ADF	0.01011265	0.049736529	0.066372655	0.059588004	0.016710982
Proceso Estacionario	si	si	no	no	si
Retorno Promedio	0.024251949	0.051112978	0.019200515	0.017421043	0.026341448
Desv. de Rets.	0.072355247	0.087719257	0.128939129	0.059287679	0.070546366
BIC Gaussiano	-221.2657133	-90.66642553	-189.789327	-435.302023	-414.701034
Rango Gauss BIC	1	3	1	1	1
AIC Gaussiano	-226.373467	-94.40882755	-195.914517	-441.4272131	-420.996023
Rango Gauss AIC	2	3	1	1	2
Alpha Lévy	1.693916369	1.087677771	2	2	1.758276454
Beta Lévy	-0.168145834	-0.511760741	-0.123242589	-0.014465621	-0.682081618
Mu Lévy	0.026681544	0.076630308	0.020390515	0.017422505	0.03530709
Sigma Lévy	0.042120296	0.029917636	0.088843035	0.041789468	0.043720848
BIC Lévy	-218.5841317	-99.18875881	-179.554104	-425.1800895	-411.4970874
Rango Lévy BIC	2	1	2	2	2
AIC Lévy	-228.7996393	-106.6735629	-191.8044841	-437.4304696	-424.0870653
Rango Lévy AIC	1	1	2	2	1
Coef. Lineal 1	-0.711732447	-0.795705893	-0.850671828	-0.762388559	-0.83243049
Error CL1	0.099072791	0.137924565	0.079138192	0.076882197	0.075407041
% Error CL1	0.139199487	0.173336111	0.093030225	0.100843849	0.090586592
D1 r ²	0.35687918	0.418576967	0.425509355	0.38655526	0.417530095
Coef. Cuad. 1	0.582484785	0.401470771	0.666452232	0.271392827	0.379505566
Error CC1	0.050541656	0.051002159	0.050450985	0.062158815	0.052666113
% Error CC1	0.086769058	0.127038287	0.075700826	0.229036323	0.138775602
Coef. Cuad. 3	0.000665204	0.002693819	0.003056489	0.001687246	0.002239189
Error CC3	0.000582216	0.001083579	0.002083977	0.000369597	0.000524021
% Error CC3	0.875245483	0.402246452	0.681820681	0.21905356	0.234022876
D2 r ²	0.590787502	0.57929282	0.529592194	0.109517825	0.235033382
D	0.000665204	0.002693819	0.003056489	0.001687246	0.002239189
Error D	0.000582216	0.001083579	0.002083977	0.000369597	0.000524021
% Error D	0.875245483	0.402246452	0.681820681	0.21905356	0.234022876
C	875.648885	149.0340632	218.0450328	160.8495581	169.4834784
Error C	803.7442701	69.05267105	156.0425905	64.28497786	55.30660328
% Error C	0.917884193	0.463334821	0.715643867	0.399659027	0.326324452
k	0.610945097	0.990988573	0.638209153	1.404584945	1.096730277
Error k	0.100212441	0.212968341	0.076545833	0.351503154	0.181755038
% Error k	0.164028554	0.214904941	0.119938476	0.250254109	0.165724465
T Dec. Corr. Ret.	1.405022358	1.256745751	1.175541456	1.311667113	1.201301505
Error PDCR	1.796820582	0.817044715	1.170482103	0.681989858	0.521866934
% Error PDCR	1.278855509	0.650127294	0.99569615	0.519941265	0.434417947
PDCR r ²	0.796203142	-0.0005649	0.786574479	0.847641635	0.578009324
PDCVol r ²	-1.739961909	-0.55416019	-4.469072684	-19.61495092	-17.28075244
BIC Coef. Difusión	-180.3511328	-96.0372069	-138.4468387	-418.3992988	-406.1065716
Rango C.D. BIC	3	2	3	3	3
AIC Coef. Difusión	-188.0127635	-101.6508099	-147.6346238	-427.5870839	-415.549055
Rango C.D. AIC	3	2	3	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-2.541404783	-3.718778924	-2.585466058	-3.18602708	-3.16963385
pvalue ADF	0.105722282	0.003856633	0.096038497	0.020807868	0.02181106
Proceso Estacionario	no	si	no	si	si
Retorno Promedio	0.024782581	0.034733278	0.011149954	0.010636447	0.027368442
Desv. de Rets.	0.097957051	0.118575288	0.102001266	0.099662904	0.124787388
BIC Gaussiano	-276.6296986	-26.20173536	-325.6309151	-359.3265828	-234.2616983
Rango Gauss BIC	2	1	3	1	1
AIC Gaussiano	-282.7548887	-28.38382027	-332.1666314	-366.0016589	-240.6915699
Rango Gauss AIC	2	1	3	2	2
Alpha Lévy	1.829385861	2	1.734891809	1.855328917	1.747800496
Beta Lévy	0.2325392	0.019578898	-1	-1	-0.26242003
Mu Lévy	0.024169167	0.034719769	0.032832473	0.022995236	0.033425871
Sigma Lévy	0.05656658	0.081896726	0.058205427	0.064477271	0.075697412
BIC Lévy	-297.0430614	-20.04305947	-351.2581393	-358.3855655	-232.5937868
Rango Lévy BIC	1	2	1	2	2
AIC Lévy	-309.2934416	-24.40722929	-364.329572	-371.7357178	-245.4535298
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.959335584	-0.81685977	-0.650589642	-0.778843751	-0.845538263
Error CL1	0.08001179	0.214067076	0.067622228	0.067698627	0.073243159
% Error CL1	0.083403338	0.262060985	0.103939909	0.086921962	0.086623116
D1 r ²	0.479580565	0.419780848	0.325279912	0.391156534	0.422716887
Coef. Cuad. 1	0.953224754	0.482975005	0.386519208	0.288116974	0.663789457
Error CC1	0.047217795	0.152013107	0.033872994	0.045062041	0.067817709
% Error CC1	0.049534797	0.314743216	0.087635991	0.156401896	0.1021675
Coef. Cuad. 3	6.02867E-05	0.004325448	0.002747592	0.004839355	0.002831051
Error CC3	0.001531334	0.003256604	0.00090902	0.000899985	0.002244292
% Error CC3	25.40084593	0.752894114	0.330842593	0.185972014	0.792741514
D2 r ²	0.724468167	0.346956873	0.405368244	0.16626159	0.346102931
D	6.02867E-05	0.004325448	0.002747592	0.004839355	0.002831051
Error D	0.001531334	0.003256604	0.00090902	0.000899985	0.002244292
% Error D	25.40084593	0.752894114	0.330842593	0.185972014	0.792741514
C	15811.51366	111.6589571	140.6756227	59.53623355	234.4674727
Error C	401856.016	110.2929	52.56298168	17.65890768	198.2691504
% Error C	25.41540453	0.987765808	0.373646696	0.29660774	0.845614738
k	0.503205346	0.845654289	0.841600661	1.351610322	0.636902451
Error k	0.048813027	0.346346025	0.114419228	0.241847546	0.085311086
% Error k	0.09700419	0.409559827	0.1359543	0.178932894	0.133946863
T Dec. Corr. Ret.	1.042388104	1.22420033	1.5370672	1.283954578	1.182678589
Error PDCR	37.45576451	1.600976078	0.795054969	0.504806009	1.379960991
% Error PDCR	35.93264771	1.307772951	0.517254528	0.393165006	1.16680982
PDCR r ²	0.762042056	0.797742683	0.933318386	0.842801222	0.700011543
PDCVol r ²	-38.99486957	0.268434211	-2.829778287	-17.45032706	-5.930815727
BIC Coef. Difusión	440.6935374	-16.14556838	-325.9243056	-353.624313	-144.2444309
Rango C.D. BIC	3	3	2	3	3
AIC Coef. Difusión	431.5057523	-19.41869574	-335.7278801	-363.6369272	-153.8892382
Rango C.D. AIC	3	3	2	3	3

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-2.558346726	-2.978417515	-3.263491773	-3.307624663	-2.11179085
pvalue ADF	0.10191531	0.036959683	0.01659138	0.014541073	0.239799949
Proceso Estacionario	no	si	si	si	no
Retorno Promedio	0.039857244	0.003988996	0.005453088	0.01605664	0.033366741
Desv. de Rets.	0.111822071	0.062992744	0.102912897	0.078636205	0.155494177
BIC Gaussiano	-283.8309119	-148.9915901	-206.7707476	-346.0539208	-122.7702296
Rango Gauss BIC	2	1	3	2	2
AIC Gaussiano	-290.32496	-153.1124761	-212.4433114	-352.1791109	-128.7781222
Rango Gauss AIC	2	1	3	2	3
Alpha Lévy	1.665554108	2	1.806078664	1.774068172	1.743253998
Beta Lévy	0.401437374	0.03003759	-0.564691431	-0.695218413	0.100761742
Mu Lévy	0.032674166	0.004000355	0.016476023	0.026465563	0.032488558
Sigma Lévy	0.061991448	0.04414882	0.046994917	0.046910044	0.094962284
BIC Lévy	-298.1564266	-140.8793961	-275.2242056	-352.378454	-117.6585718
Rango Lévy BIC	1	3	1	1	3
AIC Lévy	-311.1445229	-149.1211681	-286.5693333	-364.6288341	-129.674357
Rango Lévy AIC	1	3	1	1	2
Coef. Lineal 1	-0.79069673	-0.911428648	-0.869065258	-0.913036928	-0.762350461
Error CL1	0.07134158	0.132975467	0.088230536	0.077429093	0.079900049
% Error CL1	0.090226224	0.145897836	0.101523487	0.084803901	0.104807504
D1 r ²	0.395182458	0.456192028	0.438925363	0.471149763	0.382424736
Coef. Cuad. 1	0.713597718	0.230068877	0.601186569	0.513167653	0.263387884
Error CC1	0.052715726	0.129975147	0.029689767	0.045686966	0.04579463
% Error CC1	0.07387317	0.564940152	0.04938528	0.089029317	0.17386764
Coef. Cuad. 3	0.000967514	0.002699662	0.002744057	0.002295265	0.011999085
Error CC3	0.001651991	0.000792961	0.001869578	0.000662814	0.002289373
% Error CC3	1.707458945	0.293726141	0.681318788	0.288774657	0.190795603
D2 r ²	0.494925805	0.053897732	0.769239393	0.448719454	0.184720871
D	0.000967514	0.002699662	0.002744057	0.002295265	0.011999085
Error D	0.001651991	0.000792961	0.001869578	0.000662814	0.002289373
% Error D	1.707458945	0.293726141	0.681318788	0.288774657	0.190795603
C	737.5579957	85.22136093	219.0867485	223.576664	21.95066476
Error C	1282.049236	67.16936467	151.4632201	75.22837698	6.896371156
% Error C	1.738235153	0.788175217	0.69133903	0.336476874	0.314175959
k	0.554021342	1.98077345	0.722791644	0.889608807	1.447201081
Error k	0.064604725	1.155732601	0.081601622	0.109381811	0.29380167
% Error k	0.116610535	0.58347541	0.112897849	0.122954955	0.203013717
T Dec. Corr. Ret.	1.264707393	1.097178591	1.150661577	1.095245953	1.311732662
Error PDCR	3.085076186	1.123169443	1.124409436	0.503962415	0.550809126
% Error PDCR	2.439359652	1.023688807	0.977185176	0.460136295	0.419909591
PDCR r ²	0.382587101	0.78502685	0.845677029	0.80729318	0.694819442
PDCVol r ²	-5.893954357	-11.75663882	-1.132121317	-8.503930767	-11.33295352
BIC Coef. Difusión	-120.6260234	-143.7352176	-262.0293463	-334.8967263	-126.5043124
Rango C.D. BIC	3	2	2	3	1
AIC Coef. Difusión	-130.3670956	-149.9165467	-270.5381921	-344.0845114	-135.5161513
Rango C.D. AIC	3	2	2	3	1

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-3.294762637	-2.532502856
pvalue ADF	0.015114214	0.107764958
Proceso Estacionario	si	no
Retorno Promedio	0.013322607	0.0571935
Desv. de Rets.	0.271226743	0.262597813
BIC Gaussiano	45.19292939	21.60519099
Rango Gauss BIC	1	3
AIC Gaussiano	39.06773933	16.74355739
Rango Gauss AIC	1	3
Alpha Lévy	2	1.715512717
Beta Lévy	-0.077796733	-0.669072164
Mu Lévy	0.013027918	0.099041177
Sigma Lévy	0.191174103	0.152614681
BIC Lévy	55.31520537	21.14237878
Rango Lévy BIC	2	2
AIC Lévy	43.06482524	11.41911159
Rango Lévy AIC	2	1
Coef. Lineal 1	-0.77614861	-0.668939869
Error CL1	0.077854883	0.103902519
% Error CL1	0.100309248	0.155324153
D1 r^2	0.389143799	0.335746106
Coef. Cuad. 1	0.339461428	0.336493091
Error CC1	0.063066594	0.043794035
% Error CC1	0.18578427	0.130148392
Coef. Cuad. 3	0.031965233	0.022734202
Error CC3	0.00754073	0.006949627
% Error CC3	0.235904116	0.305690397
D2 r^2	0.157481595	0.421580374
D	0.031965233	0.022734202
Error D	0.00754073	0.006949627
% Error D	0.235904116	0.305690397
C	10.61970749	14.80118342
Error C	4.031225961	5.635000702
% Error C	0.379598587	0.380712849
k	1.143205895	0.993987524
Error k	0.241370105	0.201424641
% Error k	0.211134413	0.202643028
T Dec. Corr. Ret.	1.288413053	1.494902676
Error PDCR	0.63685096	0.790255225
% Error PDCR	0.494290987	0.528633227
PDCR r^2	0.792473781	0.775241522
PDCVol r^2	-10.59505325	-0.186211441
BIC Coef. Difusión	65.54020017	19.49540319
Rango C.D. BIC	3	1
AIC Coef. Difusión	56.35241508	12.20295279
Rango C.D. AIC	3	2

B.3. Resultados mensuales

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-8.475648376	-6.76792312	-5.526882465	-4.330690684	-5.562240186
pvalue ADF	1.43789E-13	2.68747E-09	1.82426E-06	0.000392883	1.53251E-06
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.004470289	0.005674258	0.007607008	0.00675735	0.006182968
Desv. de Rets.	0.045121405	0.034847227	0.05093947	0.036393375	0.047534434
BIC Gaussiano	-4971.032309	-2910.016752	-1817.551713	-1625.650661	-1394.904237
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-4981.637302	-2919.267537	-1826.301763	-1633.787512	-1403.041088
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.643841846	1.68932761	1.663627234	1.66708462	1.696155243
Beta Lévy	-0.510606829	-0.639962575	-0.525300738	-0.614196413	-0.659781482
Mu Lévy	0.010473285	0.011094063	0.014746462	0.012612792	0.013745385
Sigma Lévy	0.023159143	0.019782392	0.028635208	0.019593303	0.026246332
BIC Lévy	-5352.820405	-2999.104328	-1877.583832	-1701.423295	-1460.407951
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-5374.030391	-3017.605898	-1895.083931	-1717.696997	-1476.681653
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.753802702	-0.742038773	-0.678915499	-0.740250643	-0.726460152
Error CL1	0.025175375	0.035226873	0.0391466	0.046303556	0.046115069
% Error CL1	0.033397831	0.04747309	0.05766049	0.062551186	0.063479144
D1 r ²	0.376925309	0.37108776	0.339561603	0.37278611	0.365924895
Coef. Cuad. 1	0.421479078	0.254740715	0.277844424	0.21568556	0.201586462
Error CC1	0.013581426	0.018192115	0.023202318	0.021168077	0.025169783
% Error CC1	0.03222325	0.071414242	0.083508308	0.09814323	0.1248585
Coef. Cuad. 3	0.000676489	0.000591553	0.001040129	0.000687699	0.001173786
Error CC3	0.000103842	5.85924E-05	0.000146636	8.57347E-05	0.000158625
% Error CC3	0.15350128	0.099048498	0.140978738	0.12466893	0.135139505
D2 r ²	0.394045445	0.20703524	0.197137386	0.194849417	0.130073556
D	0.000676489	0.000591553	0.001040129	0.000687699	0.001173786
Error D	0.000103842	5.85924E-05	0.000146636	8.57347E-05	0.000158625
% Error D	0.15350128	0.099048498	0.140978738	0.12466893	0.135139505
C	623.0389052	430.6305831	267.1248447	313.6337767	171.7403504
Error C	102.8193826	61.27106445	51.04494862	57.12468959	36.81448586
% Error C	0.165028832	0.142282195	0.191090232	0.182138194	0.214361306
k	0.894235018	1.456458921	1.221754767	1.716041269	1.801857487
Error k	0.041500145	0.124896667	0.123984753	0.199716127	0.252383874
% Error k	0.046408544	0.085753649	0.101480883	0.116381891	0.140068721
T Dec. Corr. Ret.	1.326607079	1.347638475	1.472937355	1.350893794	1.376537993
Error PDCR	0.305266417	0.260650548	0.380374062	0.337078208	0.398561124
% Error PDCR	0.23011065	0.193412813	0.258241846	0.24952236	0.289538775
PDCR r ²	0.888522622	0.905232122	0.897572037	0.890085507	0.854808618
PDCVol r ²	-17.0029415	-23.90071519	-27.24243648	-17.12123586	-17.08335658
BIC Coef. Difusión	-5277.575081	-2983.240212	-1870.802387	-1693.051593	-1452.515092
Rango C.D. BIC	2	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-5293.48257	-2997.116389	-1883.927461	-1705.25687	-1464.720369
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	2

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-4.449870311	-4.541461125	-4.013182451	-3.96894897	-4.130053297
pvalue ADF	0.000241985	0.000165364	0.001343036	0.001582122	0.000863482
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.004534345	0.004896672	0.000972552	0.002037735	0.005977317
Desv. de Rets.	0.037436895	0.038295852	0.047157962	0.041598211	0.069157699
BIC Gaussiano	-1601.225407	-1577.943366	-850.0307975	-919.5291632	-601.190212
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-1609.362258	-1586.075583	-857.1751055	-926.6810614	-608.1845485
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.85658452	1.840318525	1.782654919	1.602039651	1.879112749
Beta Lévy	-1	-1	-0.798488263	-0.692166868	-1
Mu Lévy	0.009405434	0.010338034	0.007740688	0.010440682	0.013399571
Sigma Lévy	0.022800181	0.022816441	0.029095837	0.022890831	0.043555563
BIC Lévy	-1652.798202	-1642.34862	-858.9994145	-942.9710787	-618.2082589
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-1669.071904	-1658.613053	-873.2880307	-957.2748752	-632.1969318
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.824525182	-0.809160941	-0.747953097	-0.732844269	-0.690013047
Error CL1	0.047470902	0.047320492	0.059759514	0.059204102	0.061114546
% Error CL1	0.057573624	0.058480939	0.079897408	0.080786744	0.088570131
D1 r ²	0.412314856	0.40531646	0.375069808	0.368993526	0.345016769
Coef. Cuad. 1	0.472867674	0.471464801	0.29866713	0.283151575	0.288390241
Error CC1	0.019067561	0.018194977	0.039330727	0.036172866	0.021921894
% Error CC1	0.040323248	0.03859244	0.131687498	0.127750892	0.076014689
Coef. Cuad. 3	0.000492692	0.000493073	0.000994273	0.000769248	0.001920719
Error CC3	8.01737E-05	8.71258E-05	0.000191816	0.000149279	0.000300085
% Error CC3	0.162725746	0.176699585	0.192920404	0.194057868	0.156235568
D2 r ²	0.589088188	0.610704514	0.181527241	0.190128681	0.417963372
D	0.000492692	0.000493073	0.000994273	0.000769248	0.001920719
Error D	8.01737E-05	8.71258E-05	0.000191816	0.000149279	0.000300085
% Error D	0.162725746	0.176699585	0.192920404	0.194057868	0.156235568
C	959.7633357	956.1765582	300.3874929	368.0889392	150.1470031
Error C	172.9698279	183.6482964	83.74740771	100.6479309	29.45578871
% Error C	0.180221333	0.192065257	0.278797918	0.273433728	0.196179665
k	0.871835006	0.85813505	1.252151681	1.294084749	1.196318301
Error k	0.061281297	0.060127023	0.192868729	0.195602905	0.139630903
% Error k	0.070290017	0.070067087	0.154029844	0.151151541	0.116717184
T Dec. Corr. Ret.	1.212819235	1.235848086	1.336982231	1.364546387	1.449247958
Error PDCR	0.306582097	0.333956254	0.497874222	0.501869788	0.40089173
% Error PDCR	0.252784659	0.270224357	0.372386566	0.367792398	0.276620524
PDCR r ²	0.850722948	0.857668659	0.859179079	0.880064208	0.885158704
PDCVol r ²	-18.0106839	-15.4721242	-19.20206385	-15.04493796	-16.17652415
BIC Coef. Difusión	-1616.94194	-1610.250189	-851.9724566	-933.585936	-605.0127755
Rango C.D. BIC	2	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-1629.147216	-1622.448513	-862.6889187	-944.3137833	-615.5042802
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	2

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-4.873428116	-5.678661964	-5.581458117	-4.293426339	-4.151143218
pvalue ADF	3.92745E-05	8.58693E-07	1.39355E-06	0.000456001	0.000796251
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.003865452	0.009044432	0.008570509	0.025826846	0.018173837
Desv. de Rets.	0.046699003	0.098544374	0.07861876	0.131636477	0.071504508
BIC Gaussiano	-1962.318864	-605.5650633	-1341.743994	-320.9606823	-978.8609689
Rango Gauss BIC	2	3	3	3	2
AIC Gaussiano	-1971.112723	-613.2405242	-1350.544509	-328.1722865	-986.8736752
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	2
Alpha Lévy	1.840390461	1.505998292	1.646182347	1.536661355	1.759909314
Beta Lévy	-0.859511305	0.079261334	-0.434937715	-0.112668346	0.019726042
Mu Lévy	0.009370663	0.002639114	0.018103776	0.027980349	0.018865161
Sigma Lévy	0.029437423	0.044508955	0.041675207	0.067873436	0.04347798
BIC Lévy	-1999.214146	-709.2174476	-1452.862522	-345.4708115	-988.4434636
Rango Lévy BIC	1	2	2	2	1
AIC Lévy	-2016.801864	-724.5683694	-1470.463551	-359.8940198	-1004.468876
Rango Lévy AIC	1	1	1	2	1
Coef. Lineal 1	-0.754346461	-0.676353663	-0.711595906	-0.742663137	-0.783492219
Error CL1	0.039639915	0.051228118	0.039079219	0.058790148	0.04855203
% Error CL1	0.052548686	0.075741615	0.054917712	0.079161258	0.061968746
D1 r²	0.377174048	0.338265965	0.355925704	0.371476712	0.391938248
Coef. Cuad. 1	0.359389363	0.270756578	0.318964203	0.327145298	0.458700963
Error CC1	0.022321313	0.04180757	0.022175507	0.038772428	0.035673084
% Error CC1	0.062108997	0.154410172	0.069523497	0.118517455	0.077769803
Coef. Cuad. 3	0.000861308	0.003936906	0.002425191	0.007194098	0.001658377
Error CC3	0.000119506	0.001397704	0.000418357	0.001567407	0.000400207
% Error CC3	0.138749663	0.355026006	0.172504588	0.217874022	0.2413246
D2 r²	0.302760212	0.109812267	0.256721192	0.209271646	0.290917438
D	0.000861308	0.003936906	0.002425191	0.007194098	0.001658377
Error D	0.000119506	0.001397704	0.000418357	0.001567407	0.000400207
% Error D	0.138749663	0.355026006	0.172504588	0.217874022	0.2413246
C	417.2600869	68.77394464	131.5212449	45.4741209	276.5963407
Error C	72.42649338	29.31828188	27.09678069	13.15208401	78.90979528
% Error C	0.173576375	0.426299262	0.206025884	0.289221292	0.285288645
k	1.049483566	1.249006891	1.115479261	1.135066197	0.854033763
Error k	0.085382386	0.214812096	0.098828389	0.161773383	0.08492492
% Error k	0.081356573	0.171986317	0.088597245	0.142523303	0.099439769
T Dec. Corr. Ret.	1.325650813	1.478516425	1.405291952	1.346505501	1.276336861
Error PDCR	0.313703771	0.858754389	0.397610637	0.523980876	0.493524066
% Error PDCR	0.23664133	0.580821676	0.282938102	0.389141282	0.386672266
PDCR r²	0.903293785	0.772141042	0.81893	0.753797583	0.786702999
PDCVol r²	-26.04146743	-6.826005822	-20.02804453	-16.84234799	-25.38963932
BIC Coef. Difusión	-1961.804371	-711.5695841	-1453.753811	-358.1099051	-953.9585576
Rango C.D. BIC	3	1	1	1	3
AIC Coef. Difusión	-1974.99516	-723.0827755	-1466.954584	-368.9273113	-965.977617
Rango C.D. AIC	2	2	2	1	3

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.036677099	-5.071299877	-2.449370578	-4.805855778	-5.00890827
pvalue ADF	1.87679E-05	1.60066E-05	0.128283797	5.30004E-05	2.13096E-05
Proceso Estacionario	si	si	no	si	si
Retorno Promedio	0.013975224	0.017496738	0.020069103	0.026528746	0.012247836
Desv. de Rets.	0.113769907	0.070680847	0.080588528	0.135938646	0.045664116
BIC Gaussiano	-661.9370833	-445.8968692	-194.2571435	-234.7707798	-1276.401379
Rango Gauss BIC	3	2	3	2	2
AIC Gaussiano	-670.1377212	-452.3375808	-199.3007206	-241.4839524	-1284.313054
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	2
Alpha Lévy	1.811658965	1.745041547	1.765997831	1.797382422	2
Beta Lévy	-0.656825614	-0.043984433	0.093476057	-0.692649789	-0.917501346
Mu Lévy	0.026291835	0.017844083	0.01982885	0.042485907	0.012207895
Sigma Lévy	0.066000185	0.042692655	0.043921807	0.084533582	0.032259931
BIC Lévy	-738.1251913	-444.8348864	-205.731197	-236.6000411	-1264.481408
Rango Lévy BIC	1	3	2	1	3
AIC Lévy	-754.5264671	-457.7163097	-215.8183513	-250.0263862	-1280.304757
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	3
Coef. Lineal 1	-0.755182943	-0.672038372	-0.717558172	-0.653864171	-0.771271434
Error CL1	0.046014438	0.06971558	0.100294425	0.064619785	0.049668533
% Error CL1	0.060931511	0.103737499	0.139771839	0.098827536	0.064398253
D1 r ²	0.377584098	0.336758617	0.362499911	0.327751483	0.385727984
Coef. Cuad. 1	0.421554323	0.19109999	0.380001284	0.325569821	0.358536817
Error CC1	0.027386934	0.038891054	0.046251532	0.033985581	0.030951355
% Error CC1	0.06496656	0.203511544	0.121714146	0.104387997	0.086326852
Coef. Cuad. 3	0.004318395	0.002394339	0.00214236	0.006035172	0.000860093
Error CC3	0.001454486	0.000422067	0.00089616	0.001331351	0.000132564
% Error CC3	0.336811655	0.176276827	0.418305273	0.220598715	0.154127582
D2 r ²	0.348462443	0.117125033	0.431317877	0.305115952	0.259454479
D	0.004318395	0.002394339	0.00214236	0.006035172	0.000860093
Error D	0.001454486	0.000422067	0.00089616	0.001331351	0.000132564
% Error D	0.336811655	0.176276827	0.418305273	0.220598715	0.154127582
C	97.61827597	79.81324042	177.3751185	53.94541235	416.8581395
Error C	34.96969501	25.92491979	83.93078568	15.37985956	87.59953468
% Error C	0.358228976	0.324819787	0.473182408	0.285100417	0.210142316
k	0.895712488	1.758342245	0.9441523	1.004184247	1.075581917
Error k	0.079780297	0.401651008	0.17498813	0.144350344	0.115841023
% Error k	0.089069091	0.228425956	0.18533888	0.143748864	0.107700791
T Dec. Corr. Ret.	1.32418245	1.48801027	1.393615234	1.529369621	1.296560401
Error PDCR	0.661698346	0.646488374	0.917281943	0.593525034	0.365608342
% Error PDCR	0.499703305	0.434464994	0.658203154	0.388084755	0.28198327
PDCR r ²	0.86322099	0.773464757	0.755274525	0.892260325	0.888788016
PDCVol r ²	-10.38932271	-17.21560524	-2.096812087	-12.59349067	-21.38502639
BIC Coef. Difusión	-705.9568787	-453.141957	-207.2201884	-224.5357799	-1281.821409
Rango C.D. BIC	2	1	1	3	1
AIC Coef. Difusión	-718.2578355	-462.8030245	-214.7855541	-234.6055387	-1293.688921
Rango C.D. AIC	2	1	2	3	1

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-4.66428045	-4.387339543	-5.720564829	-4.465654438	-4.762719084
pvalue ADF	9.81624E-05	0.000312527	6.95708E-07	0.000226732	6.4057E-05
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.008119791	0.017461125	0.006522072	0.005803894	0.00879897
Desv. de Rets.	0.044327326	0.052542386	0.074721555	0.038321978	0.04450435
BIC Gaussiano	-953.7204135	-424.8121641	-1102.623223	-1735.645526	-1735.92096
Rango Gauss BIC	3	3	3	1	1
AIC Gaussiano	-961.0183619	-430.7238183	-1110.945638	-1743.96794	-1744.413174
Rango Gauss AIC	3	3	3	1	1
Alpha Lévy	1.724371589	1.636740996	1.662201704	2	2
Beta Lévy	0.129230023	-0.124462226	-0.298660215	0.018147805	-0.120260783
Mu Lévy	0.007153915	0.019879396	0.011821335	0.005799853	0.008794103
Sigma Lévy	0.026669866	0.027336077	0.041845204	0.027079153	0.031441961
BIC Lévy	-955.5638042	-444.1618103	-1146.200433	-1723.327999	-1723.422522
Rango Lévy BIC	2	2	2	2	2
AIC Lévy	-970.1597011	-455.9851185	-1162.845262	-1739.972828	-1740.406949
Rango Lévy AIC	1	2	2	2	2
Coef. Lineal 1	-0.811528266	-0.859632179	-0.721685129	-0.83681973	-0.798200457
Error CL1	0.058290008	0.08284813	0.044207388	0.045410445	0.043016101
% Error CL1	0.071827452	0.096376255	0.061255783	0.054265504	0.053891351
D1 r ²	0.407344069	0.434643884	0.360871135	0.418424106	0.401150583
Coef. Cuad. 1	0.411369085	0.408594457	0.298201864	0.299201968	0.34213689
Error CC1	0.033752785	0.036143752	0.02600402	0.037488255	0.031692396
% Error CC1	0.082049882	0.088458742	0.08720274	0.125294147	0.092630747
Coef. Cuad. 3	0.000779976	0.001217499	0.002364081	0.000789451	0.000895129
Error CC3	0.000141856	0.000286124	0.000362522	9.68901E-05	0.00011767
% Error CC3	0.18187264	0.235009999	0.153345841	0.122730883	0.131455817
D2 r ²	0.345812141	0.479003386	0.218262759	0.119131984	0.185124377
D	0.000779976	0.001217499	0.002364081	0.000789451	0.000895129
Error D	0.000141856	0.000286124	0.000362522	9.68901E-05	0.00011767
% Error D	0.18187264	0.235009999	0.153345841	0.122730883	0.131455817
C	527.4125271	335.6015718	126.1385737	378.9998927	382.2209325
Error C	122.2867644	93.45326903	25.79692398	83.23679681	75.33812481
% Error C	0.231861699	0.278464932	0.204512571	0.219622217	0.197106224
k	0.986374883	1.05193813	1.210061401	1.398419497	1.166492829
Error k	0.107561755	0.137612372	0.128952973	0.190941204	0.125009359
% Error k	0.10904754	0.130817933	0.106567298	0.13654072	0.107166847
T Dec. Corr. Ret.	1.232242969	1.163288235	1.385645843	1.195000505	1.252818126
Error PDCR	0.387184919	0.450367982	0.383743671	0.342071177	0.32577181
% Error PDCR	0.314211506	0.38715081	0.276942101	0.28625191	0.260031207
PDCR r ²	0.819245776	0.678280131	0.848661765	0.793914926	0.830210023
PDCVol r ²	-22.18381868	-7.377818889	-16.76268414	-45.4229495	-40.56479158
BIC Coef. Difusión	-955.7947379	-448.9532731	-1155.55958	-1695.048844	-1701.359336
Rango C.D. BIC	1	1	1	3	3
AIC Coef. Difusión	-966.7416607	-457.8207543	-1168.043202	-1707.532466	-1714.097656
Rango C.D. AIC	2	1	1	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.348310758	-2.454687368	-4.758964912	-4.828247815	-5.703890992
pvalue ADF	4.34534E-06	0.126892113	6.51175E-05	4.80081E-05	7.5658E-07
Proceso Estacionario	si	no	si	si	si
Retorno Promedio	0.008364077	0.013425845	0.003896904	0.003482432	0.009339752
Desv. de Rets.	0.060175263	0.080751973	0.061595905	0.057589388	0.070450338
BIC Gaussiano	-1307.872102	-133.1538304	-1580.876723	-1779.604772	-1350.608122
Rango Gauss BIC	3	1	3	3	3
AIC Gaussiano	-1316.194517	-137.4715965	-1589.609664	-1788.477073	-1359.235218
Rango Gauss AIC	3	1	3	3	3
Alpha Lévy	1.825918728	2	1.708971351	1.794861419	1.705423474
Beta Lévy	-0.129928461	-0.0179926	-0.241146885	-0.190295532	-0.449317836
Mu Lévy	0.009474927	0.013436035	0.007949457	0.005204067	0.016308817
Sigma Lévy	0.036033152	0.0566529	0.034619654	0.036016077	0.040990427
BIC Lévy	-1359.186749	-124.8440171	-1653.222874	-1790.337035	-1389.258777
Rango Lévy BIC	2	2	2	2	2
AIC Lévy	-1375.831578	-133.4795494	-1670.688755	-1808.081637	-1406.512969
Rango Lévy AIC	2	2	2	2	2
Coef. Lineal 1	-0.743343093	-0.74780761	-0.74176873	-0.754566397	-0.720317916
Error CL1	0.044482802	0.122831283	0.040112729	0.038852649	0.040938893
% Error CL1	0.059841548	0.164255192	0.054077136	0.051490034	0.056834479
D1 r ²	0.37171405	0.374124328	0.37090392	0.377491773	0.360154401
Coef. Cuad. 1	0.256650173	0.518903163	0.243734124	0.288364051	0.234830401
Error CC1	0.029085349	0.1080709	0.025004321	0.024309519	0.028863966
% Error CC1	0.113326825	0.208267955	0.102588512	0.084301491	0.122914092
Coef. Cuad. 3	0.001761963	0.001488834	0.001889409	0.001544783	0.002409565
Error CC3	0.000301208	0.001088451	0.000266537	0.000170598	0.000335381
% Error CC3	0.170950115	0.731075914	0.141068952	0.110435246	0.139187319
D2 r ²	0.141863318	0.274280089	0.140971561	0.18473067	0.107593715
D	0.001761963	0.001488834	0.001889409	0.001544783	0.002409565
Error D	0.000301208	0.001088451	0.000266537	0.000170598	0.000335381
% Error D	0.170950115	0.731075914	0.141068952	0.110435246	0.139187319
C	145.6615206	348.5298196	129.0002103	186.669648	97.45760389
Error C	34.35092289	306.8096222	26.03337658	31.29273197	21.59300172
% Error C	0.235827024	0.88029662	0.201808792	0.167636958	0.221563027
k	1.448164024	0.72056567	1.521675994	1.308357256	1.533698177
Error k	0.18559102	0.191126983	0.176466788	0.129242686	0.207690324
% Error k	0.128156077	0.265245752	0.1159687	0.098782412	0.13541799
T Dec. Corr. Ret.	1.345273816	1.337242342	1.348129085	1.325264422	1.388275895
Error PDCR	0.428089522	1.570761445	0.366918976	0.296504209	0.409014721
% Error PDCR	0.31821739	1.174627363	0.272169023	0.223732113	0.294620632
PDCR r ²	0.822325565	0.643111244	0.790171532	0.858014892	0.828577714
PDCVol r ²	-18.03763022	-7.883047466	-15.75242879	-30.80958845	-18.68599332
BIC Coef. Difusión	-1365.717731	-87.69355166	-1662.363437	-1795.696137	-1395.464192
Rango C.D. BIC	1	3	1	1	1
AIC Coef. Difusión	-1378.201353	-94.17020091	-1675.462848	-1809.004588	-1408.404836
Rango C.D. AIC	1	3	1	1	1

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-4.216831541	-3.59865624	-4.447011962	-5.829006579	-4.820122508
pvalue ADF	0.000616982	0.00578677	0.000244849	4.01604E-07	4.9765E-05
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.013248253	0.001277343	0.001755527	0.005290449	0.011273722
Desv. de Rets.	0.066460657	0.048979004	0.060280091	0.049020216	0.086224261
BIC Gaussiano	-1458.843345	-546.5858	-1034.281593	-1502.239173	-909.2230822
Rango Gauss BIC	2	1	3	2	2
AIC Gaussiano	-1467.531106	-552.9039106	-1042.140771	-1510.561588	-917.4237201
Rango Gauss AIC	2	1	3	2	2
Alpha Lévy	1.789290015	2	1.862511761	1.844980846	1.818916224
Beta Lévy	-0.108682011	-0.206400573	-0.482200454	-0.574574493	-0.345408247
Mu Lévy	0.015019722	0.00129053	0.006547583	0.009043663	0.016196644
Sigma Lévy	0.041174432	0.034540172	0.031878421	0.031661997	0.054524785
BIC Lévy	-1473.722392	-536.2717066	-1174.911235	-1504.306825	-914.3125426
Rango Lévy BIC	1	2	1	1	1
AIC Lévy	-1491.097913	-548.9079278	-1190.629592	-1520.951654	-930.7138184
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.750504282	-0.965775832	-0.763902459	-0.832578951	-0.736901333
Error CL1	0.040637178	0.076174402	0.050246253	0.045346336	0.045782603
% Error CL1	0.054146497	0.078873792	0.065775744	0.054464908	0.062128539
D1 r ²	0.37560663	0.483084568	0.381957571	0.416639282	0.368483891
Coef. Cuad. 1	0.40406684	0.734249682	0.223431219	0.353997625	0.350757664
Error CC1	0.031398288	0.071657887	0.026672435	0.032743033	0.025356104
% Error CC1	0.077705678	0.097593351	0.11937649	0.092495064	0.072289521
Coef. Cuad. 3	0.001526979	0.000554466	0.001963854	0.00114831	0.002870223
Error CC3	0.000304403	0.000297179	0.000535585	0.000159179	0.000397472
% Error CC3	0.199349613	0.535973764	0.272721553	0.138620214	0.138481156
D2 r ²	0.226366975	0.380418631	0.158339881	0.198824402	0.301657465
D	0.001526979	0.000554466	0.001963854	0.00114831	0.002870223
Error D	0.000304403	0.000297179	0.000535585	0.000159179	0.000397472
% Error D	0.199349613	0.535973764	0.272721553	0.138620214	0.138481156
C	264.6183984	1324.246215	113.7718047	308.2769778	122.2057131
Error C	64.75995697	791.5308777	36.05159024	61.99794965	22.49928977
% Error C	0.244729608	0.597721835	0.316876315	0.201111189	0.184109967
k	0.928688286	0.65766173	1.709480131	1.175966859	1.050442241
Error k	0.087956221	0.082524198	0.232999036	0.126227666	0.100127205
% Error k	0.094710166	0.125481223	0.136298183	0.107339476	0.095319096
T Dec. Corr. Ret.	1.332437434	1.035436968	1.309067654	1.201087295	1.357033777
Error PDCR	0.439104074	0.841374447	0.575639842	0.320451885	0.338332336
% Error PDCR	0.329549488	0.812579107	0.439732691	0.266801494	0.24931755
PDCR r ²	0.77325595	0.7473727	0.834605857	0.814652668	0.875465712
PDCVol r ²	-29.61277984	-21.39613399	-4.746465833	-32.6762332	-26.42321777
BIC Coef. Difusión	-1441.910974	-446.0028209	-1162.792335	-1481.871538	-896.3511649
Rango C.D. BIC	3	3	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-1454.942615	-455.4799868	-1174.581102	-1494.35516	-908.6521218
Rango C.D. AIC	3	3	2	3	3

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.457793289	-4.731726533
pvalue ADF	2.55849E-06	7.33321E-05
Proceso Estacionario	si	si
Retorno Promedio	0.005053694	0.019444774
Desv. de Rets.	0.149917723	0.144201259
BIC Gaussiano	-442.5137362	-250.814965
Rango Gauss BIC	1	3
AIC Gaussiano	-450.8361508	-257.8738232
Rango Gauss AIC	1	3
Alpha Lévy	2	1.622428772
Beta Lévy	-0.019900158	-0.367682937
Mu Lévy	0.005087938	0.033617046
Sigma Lévy	0.10587668	0.078849233
BIC Lévy	-430.1898104	-269.355281
Rango Lévy BIC	2	1
AIC Lévy	-446.8346397	-283.4729973
Rango Lévy AIC	2	1
Coef. Lineal 1	-0.67596771	-0.700564534
Error CL1	0.043517446	0.060345218
% Error CL1	0.064377995	0.086137986
D1 r^2	0.338268936	0.35027026
Coef. Cuad. 1	0.388965003	0.401776663
Error CC1	0.028764401	0.030472545
% Error CC1	0.073951128	0.075844487
Coef. Cuad. 3	0.006437601	0.006213044
Error CC3	0.001197308	0.001482649
% Error CC3	0.185986707	0.238634871
D2 r^2	0.279658445	0.41112603
D	0.006437601	0.006213044
Error D	0.001197308	0.001482649
% Error D	0.185986707	0.238634871
C	60.42079765	64.66663659
Error C	14.15868107	18.07985552
% Error C	0.234334561	0.279585525
k	0.868931272	0.871833283
Error k	0.085196465	0.100060252
% Error k	0.098047415	0.114769939
T Dec. Corr. Ret.	1.479360603	1.427420247
Error PDCR	0.465745003	0.549671359
% Error PDCR	0.314828584	0.38508026
PDCR r^2	0.862143073	0.88954868
PDCVol r^2	-19.61476257	-12.11859474
BIC Coef. Difusión	-361.0476014	-260.9476676
Rango C.D. BIC	3	2
AIC Coef. Difusión	-373.5312234	-271.5359548
Rango C.D. AIC	3	2

B.4. Resultados bisemanales

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-10.35926224	-7.649939692	-6.513622235	-6.040270009	-7.157207715
pvalue ADF	2.4205E-18	1.80048E-11	1.08493E-08	1.35122E-07	3.03284E-10
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.002241489	0.002845166	0.003817133	0.003381938	0.0030979
Desv. de Rets.	0.033846725	0.025349912	0.034839824	0.026850609	0.033533488
BIC Gaussiano	-11645.23622	-6790.584025	-4537.418313	-3786.533636	-3402.475163
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-11657.22481	-6801.221104	-4547.554657	-3796.056782	-3411.998308
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.600053711	1.713729325	1.66779446	1.63308843	1.685417998
Beta Lévy	-0.381071232	-0.51031231	-0.51786011	-0.500146497	-0.58887817
Mu Lévy	0.005747325	0.005707877	0.008344576	0.007086783	0.007868562
Sigma Lévy	0.017029318	0.014583408	0.019473164	0.014016495	0.018282317
BIC Lévy	-12383.65952	-6975.118795	-4687.239649	-3972.429617	-3565.388168
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-12407.6367	-6996.392954	-4707.512337	-3991.475908	-3584.434459
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.893786763	-0.780996327	-0.688203267	-0.794590815	-0.73006078
Error CL1	0.018269167	0.025142804	0.027754141	0.033323163	0.032791954
% Error CL1	0.020440185	0.032193242	0.040328407	0.041937514	0.044916745
D1 r ²	0.446921965	0.390499053	0.34410167	0.397448683	0.365083744
Coef. Cuad. 1	0.572156038	0.411919749	0.330108539	0.397229637	0.327321042
Error CC1	0.012113738	0.0150736	0.017712172	0.019077937	0.019169912
% Error CC1	0.021172088	0.036593537	0.0536556	0.048027476	0.058566085
Coef. Cuad. 3	0.000368394	0.000237172	0.000434656	0.000286253	0.000452754
Error CC3	5.06245E-05	3.17302E-05	6.11739E-05	5.22399E-05	7.66715E-05
% Error CC3	0.137419266	0.133785647	0.140740978	0.182495516	0.16934474
D2 r ²	0.429684339	0.331639118	0.228769123	0.33489441	0.252958459
D	0.000368394	0.000237172	0.000434656	0.000286253	0.000452754
Error D	5.06245E-05	3.17302E-05	6.11739E-05	5.22399E-05	7.66715E-05
% Error D	0.137419266	0.133785647	0.140740978	0.182495516	0.16934474
C	1553.107496	1736.79651	759.4714639	1387.686509	722.9553913
Error C	224.677434	258.9319284	127.0720592	278.3219402	140.3435858
% Error C	0.144663157	0.149085933	0.167316437	0.200565429	0.194124821
k	0.781069065	0.94799573	1.042389375	1.000165574	1.115206
Error k	0.022985981	0.04620438	0.069966801	0.063770996	0.082310214
% Error k	0.029428871	0.048739017	0.06712156	0.063760439	0.073807183
T Dec. Corr. Ret.	1.118835098	1.280415754	1.453059072	1.258509387	1.369748969
Error PDCR	0.225654206	0.263966664	0.332328672	0.350572237	0.36705589
% Error PDCR	0.201686742	0.206156995	0.228709678	0.27856148	0.267973109
PDCR r ²	0.863608249	0.888461083	0.916892631	0.886917246	0.895496778
PDCVol r ²	-31.58464002	-27.98614077	-36.21746093	-20.22542782	-20.22257557
BIC Coef. Difusión	-12151.92289	-6884.11181	-4640.679447	-3946.571413	-3536.142012
Rango C.D. BIC	2	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-12169.90577	-6900.067429	-4655.883963	-3960.856132	-3550.42673
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	2

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-6.183915285	-6.232945899	-4.305411167	-4.143207975	-5.553221384
pvalue ADF	6.357E-08	4.90292E-08	0.000434725	0.000820949	1.60228E-06
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.002317566	0.00250737	0.000509949	0.001066597	0.003043589
Desv. de Rets.	0.027222985	0.027392606	0.034044428	0.029533485	0.046424051
BIC Gaussiano	-3762.733623	-3695.388412	-2047.68109	-2209.538188	-1596.696586
Rango Gauss BIC	3	3	2	2	3
AIC Gaussiano	-3772.256769	-3704.881236	-2056.207886	-2218.07638	-1605.073114
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	3
Alpha Lévy	1.770005877	1.733722021	1.705001729	1.675970726	1.874142187
Beta Lévy	-0.465652666	-0.524677683	-0.644143476	-0.721754868	-0.863338859
Mu Lévy	0.005019236	0.005849552	0.005638712	0.00647217	0.007424195
Sigma Lévy	0.016013926	0.015590546	0.020130268	0.016987035	0.029906029
BIC Lévy	-3866.4479	-3821.658794	-2077.299502	-2255.447657	-1618.113714
Rango Lévy BIC	2	1	1	1	1
AIC Lévy	-3885.494191	-3840.644442	-2094.353095	-2272.524042	-1634.86677
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.781095975	-0.746968431	-0.771521282	-0.771352071	-0.671883533
Error CL1	0.033204339	0.033144845	0.042555037	0.042431683	0.042893888
% Error CL1	0.042509934	0.044372485	0.055157308	0.055009489	0.063841255
D1 r ²	0.390973017	0.374304194	0.385930284	0.385846683	0.335940531
Coef. Cuad. 1	0.209186331	0.220864136	0.386093841	0.477776052	0.199062164
Error CC1	0.021259558	0.021452716	0.032425233	0.03278764	0.023830184
% Error CC1	0.101629765	0.097130824	0.083982777	0.068625541	0.119712275
Coef. Cuad. 3	0.000423203	0.00039353	0.000446325	0.000255766	0.001019017
Error CC3	5.1006E-05	5.26019E-05	8.10598E-05	6.33292E-05	0.000124724
% Error CC3	0.120523809	0.133666755	0.181616156	0.247606345	0.122396173
D2 r ²	0.10108226	0.111106555	0.213596629	0.287979519	0.126004602
D	0.000423203	0.00039353	0.000446325	0.000255766	0.001019017
Error D	5.1006E-05	5.26019E-05	8.10598E-05	6.33292E-05	0.000124724
% Error D	0.120523809	0.133666755	0.181616156	0.247606345	0.122396173
C	494.2932289	561.2376866	865.0513301	1868.022675	195.347176
Error C	89.00251735	105.3681134	201.3554067	532.8419862	39.73691019
% Error C	0.180060159	0.187742406	0.232767004	0.285243853	0.203416865
k	1.866986174	1.69101341	0.999136998	0.807231827	1.687622402
Error k	0.205671248	0.18057707	0.100389333	0.070997445	0.22896213
% Error k	0.11016217	0.106786303	0.100476044	0.087951741	0.135671421
T Dec. Corr. Ret.	1.280252405	1.338744663	1.296140525	1.296424859	1.48835319
Error PDCR	0.311191816	0.340044641	0.404222036	0.502786365	0.406965894
% Error PDCR	0.243070675	0.254002612	0.311865904	0.387825304	0.273433683
PDCR r ²	0.859388353	0.865988667	0.855561207	0.87052403	0.906123898
PDCVol r ²	-27.61353011	-24.27366244	-28.10365426	-25.44362979	-35.62368686
BIC Coef. Difusión	-3869.259712	-3817.727977	-2045.409941	-2170.505814	-1604.127434
Rango C.D. BIC	1	2	3	3	2
AIC Coef. Difusión	-3883.54443	-3831.967214	-2058.200136	-2183.313102	-1616.692226
Rango C.D. AIC	2	2	2	3	2

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-6.177839612	-7.593670573	-6.481663283	-3.519828487	-5.28838443
pvalue ADF	6.56439E-08	2.49287E-11	1.29049E-08	0.007492222	5.78731E-06
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.001933498	0.00457048	0.004309206	0.012964627	0.009074472
Desv. de Rets.	0.032898798	0.067750889	0.05299948	0.093566484	0.052527619
BIC Gaussiano	-4775.733319	-1724.293525	-3640.409208	-1020.262709	-2468.224689
Rango Gauss BIC	2	3	3	3	2
AIC Gaussiano	-4785.913472	-1733.343584	-3650.594356	-1028.856928	-2477.62369
Rango Gauss AIC	2	3	3	3	2
Alpha Lévy	1.759522165	1.566748283	1.644729376	1.462198136	1.729695685
Beta Lévy	-0.689378894	0.032494242	-0.341818775	0.013668822	0.072404343
Mu Lévy	0.006159498	0.002555315	0.009470335	0.011123643	0.0084507
Sigma Lévy	0.020003024	0.029963768	0.028126373	0.043845117	0.03058533
BIC Lévy	-4853.396534	-2021.198394	-3861.77978	-1131.209189	-2541.931722
Rango Lévy BIC	1	2	2	2	1
AIC Lévy	-4873.756842	-2039.298513	-3882.150075	-1148.397626	-2560.729723
Rango Lévy AIC	1	2	1	2	1
Coef. Lineal 1	-0.754145501	-0.698029686	-0.662648135	-0.765394383	-0.758060654
Error CL1	0.028002258	0.036547781	0.027154485	0.041789824	0.034078988
% Error CL1	0.037131108	0.05235849	0.040978739	0.054599073	0.04495549
D1 r ²	0.377115727	0.34914209	0.331478197	0.382738035	0.37921758
Coef. Cuad. 1	0.37752074	0.388587119	0.25873789	0.33266779	0.483382467
Error CC1	0.017510526	0.01737642	0.015793638	0.026911298	0.029056536
% Error CC1	0.04638295	0.044716923	0.06104107	0.080895413	0.060110861
Coef. Cuad. 3	0.000407538	0.001419217	0.001133689	0.003787536	0.000756817
Error CC3	4.30526E-05	0.000445362	0.000133167	0.000657234	0.000222859
% Error CC3	0.105640658	0.313808339	0.117463166	0.173525481	0.294468571
D2 r ²	0.279704667	0.424136664	0.182774768	0.220565694	0.254895763
D	0.000407538	0.001419217	0.001133689	0.003787536	0.000756817
Error D	4.30526E-05	0.000445362	0.000133167	0.000657234	0.000222859
% Error D	0.105640658	0.313808339	0.117463166	0.173525481	0.294468571
C	926.3441149	273.8039178	228.226579	87.83225059	638.7049505
Error C	122.9816989	88.93422826	34.08212225	18.98444599	205.0413664
% Error C	0.132760274	0.324809919	0.149334588	0.216144365	0.321026737
k	0.998813338	0.898163697	1.280539418	1.150388474	0.784120966
Error k	0.059344116	0.061843085	0.094145945	0.112274182	0.058857729
% Error k	0.059414621	0.068855027	0.073520537	0.097596755	0.075062053
T Dec. Corr. Ret.	1.326004065	1.432603828	1.509096528	1.30651599	1.319155657
Error PDCR	0.238368682	0.654494856	0.30743998	0.383934802	0.583126812
% Error PDCR	0.179764669	0.456856839	0.20372453	0.293861541	0.442045493
PDCR r ²	0.88338977	0.840786577	0.881680122	0.766838828	0.819652652
PDCVol r ²	-35.00124317	-9.105016471	-25.88750633	-25.36190298	-28.87058534
BIC Coef. Difusión	-4761.603703	-2032.165462	-3865.760839	-1145.806265	-2458.431977
Rango C.D. BIC	3	1	1	1	3
AIC Coef. Difusión	-4776.873934	-2045.740551	-3881.03856	-1158.697593	-2472.530478
Rango C.D. AIC	3	1	2	1	3

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.974385488	-4.654980304	-3.327631223	-4.950226918	-5.664820484
pvalue ADF	1.90275E-07	0.000102161	0.013687641	2.78179E-05	9.20308E-07
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.006950573	0.00879322	0.010154305	0.01337887	0.006133901
Desv. de Rets.	0.078073917	0.048219141	0.056698341	0.098832468	0.033590797
BIC Gaussiano	-2005.403787	-1179.617198	-521.6733073	-746.4056768	-3036.42979
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	2
AIC Gaussiano	-2014.990719	-1187.438791	-528.0922796	-754.5004212	-3045.727759
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	2
Alpha Lévy	1.803819216	1.668396894	1.541108227	1.784970384	1.649693888
Beta Lévy	-0.375302885	0.023357427	-0.049313374	-0.271079422	0.281685708
Mu Lévy	0.012151044	0.008170386	0.010372229	0.020403714	0.003674239
Sigma Lévy	0.044874881	0.027812274	0.028546675	0.057522403	0.018817787
BIC Lévy	-2171.603439	-1192.584454	-544.8285172	-797.6495311	-3106.781261
Rango Lévy BIC	1	2	2	1	1
AIC Lévy	-2190.777303	-1208.227641	-557.6664618	-813.8390199	-3125.3772
Rango Lévy AIC	1	2	2	1	1
Coef. Lineal 1	-0.727142257	-0.659672989	-0.723861342	-0.766235093	-0.817884082
Error CL1	0.032230102	0.049066137	0.069428075	0.047382236	0.035434059
% Error CL1	0.044324342	0.074379484	0.0959135	0.061837727	0.04332406
D1 r ²	0.363829614	0.329993718	0.375109524	0.383161698	0.408952768
Coef. Cuad. 1	0.375261273	0.310848246	0.357746588	0.458213803	0.576113193
Error CC1	0.013455051	0.02579476	0.037674972	0.029460701	0.027488841
% Error CC1	0.035855154	0.082981842	0.105311898	0.064294661	0.047714307
Coef. Cuad. 3	0.002141731	0.000810241	0.001094331	0.003007714	0.000272764
Error CC3	0.000388854	0.000131996	0.000323544	0.000822705	7.65815E-05
% Error CC3	0.181560634	0.16290925	0.29565512	0.27353164	0.28076086
D2 r ²	0.466659224	0.284069036	0.333744147	0.365470703	0.363537514
D	0.002141731	0.000810241	0.001094331	0.003007714	0.000272764
Error D	0.000388854	0.000131996	0.000323544	0.000822705	7.65815E-05
% Error D	0.181560634	0.16290925	0.29565512	0.27353164	0.28076086
C	175.2139969	383.6489029	326.9090579	152.346218	2112.129425
Error C	33.70040691	82.02176283	114.0948105	46.02116689	640.4800249
% Error C	0.192338555	0.213793816	0.349010857	0.302082766	0.303239005
k	0.968847987	1.061085267	1.011695661	0.836110881	0.709829329
Error k	0.055234867	0.118244581	0.144108919	0.074586095	0.045747546
% Error k	0.057010871	0.111437398	0.142442955	0.089205986	0.064448656
T Dec. Corr. Ret.	1.375246714	1.515902602	1.381480046	1.305082487	1.22266715
Error PDCR	0.372101768	0.441087317	0.661829191	0.544441972	0.511382174
% Error PDCR	0.27057092	0.290973389	0.479072566	0.417170545	0.41825134
PDCR r ²	0.885949538	0.868757759	0.802429402	0.89587567	0.868496973
PDCVol r ²	-16.84025969	-20.63467405	-7.695823865	-12.10580907	-20.12693925
BIC Coef. Difusión	-2126.868419	-1201.059549	-552.6221597	-769.110924	-2978.114466
Rango C.D. BIC	2	1	1	2	3
AIC Coef. Difusión	-2141.248818	-1212.791939	-562.2506182	-781.2530405	-2992.06142
Rango C.D. AIC	2	1	1	2	3

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.096766774	-5.082386133	-6.260527759	-5.385535244	-6.046927708
pvalue ADF	1.42304E-05	1.52085E-05	4.23428E-08	3.63239E-06	1.30512E-07
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.003972197	0.008806191	0.003279672	0.002911139	0.004374135
Desv. de Rets.	0.033474354	0.039918775	0.055659262	0.029207635	0.033745678
BIC Gaussiano	-2235.365971	-1009.62411	-2770.655675	-3991.941613	-4053.127996
Rango Gauss BIC	2	3	3	2	2
AIC Gaussiano	-2244.050213	-1016.915003	-2780.362274	-4001.648211	-4063.006504
Rango Gauss AIC	2	3	3	2	2
Alpha Lévy	1.642285415	1.488419888	1.754177929	1.918820297	1.902785347
Beta Lévy	0.063836075	-0.234453706	-0.243567678	-1	-0.712089591
Mu Lévy	0.003357252	0.0118154	0.006177035	0.005127376	0.006502168
Sigma Lévy	0.018190014	0.018312568	0.032212336	0.019406186	0.02215985
BIC Lévy	-2304.61495	-1079.290113	-2884.054501	-4016.683382	-4087.585071
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-2321.983436	-1093.8719	-2903.467698	-4036.096578	-4107.342087
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.853757354	-0.889334319	-0.797491294	-0.858214505	-0.839391951
Error CL1	0.041346209	0.059187158	0.031853951	0.032198763	0.03064811
% Error CL1	0.048428525	0.066552203	0.039942695	0.037518316	0.036512276
D1 r ²	0.429648405	0.445507031	0.398776384	0.429146811	0.421380476
Coef. Cuad. 1	0.596951791	0.662384249	0.393851851	0.417272874	0.504242296
Error CC1	0.033228461	0.043498304	0.021051206	0.022987543	0.020044089
% Error CC1	0.055663559	0.065669291	0.053449555	0.055089952	0.039750908
Coef. Cuad. 3	0.000281572	0.000358895	0.001250261	0.00037609	0.000377827
Error CC3	9.79457E-05	0.000195405	0.000174938	4.15799E-05	5.43754E-05
% Error CC3	0.347853667	0.544462292	0.139921464	0.110558396	0.143916149
D2 r ²	0.363555199	0.453003673	0.270499023	0.258735679	0.380813301
D	0.000281572	0.000358895	0.001250261	0.00037609	0.000377827
Error D	9.79457E-05	0.000195405	0.000174938	4.15799E-05	5.43754E-05
% Error D	0.347853667	0.544462292	0.139921464	0.110558396	0.143916149
C	2120.07054	1845.622651	315.0157168	1109.503832	1334.586276
Error C	789.911302	1053.966971	52.72239321	160.7939982	219.6796169
% Error C	0.372587273	0.571063088	0.167364326	0.144924239	0.164605032
k	0.715097407	0.671313003	1.012425473	1.028361246	0.83232997
Error k	0.052761173	0.062765617	0.067554455	0.068542625	0.044924859
% Error k	0.073781799	0.093496799	0.066725361	0.066652283	0.053974818
T Dec. Corr. Ret.	1.171292985	1.124436535	1.253932184	1.165209856	1.191338563
Error PDCR	0.603263879	0.89340986	0.286053532	0.226148955	0.268302446
% Error PDCR	0.515040973	0.794540049	0.228125202	0.194084314	0.225210914
PDCR r ²	0.838038867	0.808540914	0.873706213	0.842047895	0.861674348
PDCVol r ²	-20.05553388	-8.998384112	-27.56726202	-39.14334443	-38.14696882
BIC Coef. Difusión	-2222.386494	-1048.85176	-2865.683981	-3919.35474	-3907.634037
Rango C.D. BIC	3	2	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-2235.412858	-1059.788101	-2880.243878	-3933.914637	-3922.451799
Rango C.D. AIC	3	2	2	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-6.536272146	-2.580753236	-5.838249579	-6.831785457	-7.468845355
pvalue ADF	9.59138E-09	0.097040785	3.8311E-07	1.8856E-09	5.11829E-11
Proceso Estacionario	si	no	si	si	si
Retorno Promedio	0.004188769	0.006983091	0.001902802	0.001754263	0.004722355
Desv. de Rets.	0.046485604	0.054062988	0.04447537	0.041737869	0.050230043
BIC Gaussiano	-3111.776103	-371.9730254	-3930.2362	-4373.231551	-3458.411768
Rango Gauss BIC	3	1	3	3	3
AIC Gaussiano	-3121.482701	-377.6613996	-3940.355435	-4383.490146	-3468.425159
Rango Gauss AIC	3	1	3	3	3
Alpha Lévy	1.771592965	2	1.699453416	1.791023535	1.740807373
Beta Lévy	-0.046968395	0.050373468	-0.01486717	-0.034774919	-0.111902271
Mu Lévy	0.004735507	0.006966392	0.002745163	0.002133975	0.006246033
Sigma Lévy	0.025948837	0.038057957	0.024790603	0.02519545	0.029204524
BIC Lévy	-3307.176012	-362.2932947	-4090.791184	-4470.536426	-3575.689509
Rango Lévy BIC	1	2	1	1	1
AIC Lévy	-3326.589208	-373.6700431	-4111.029655	-4491.053616	-3595.71629
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.827302628	-0.656528689	-0.768583045	-0.73996827	-0.75621354
Error CL1	0.032038519	0.083991618	0.028485291	0.027352893	0.02916352
% Error CL1	0.03872648	0.127932899	0.037062086	0.036964955	0.038565192
D1 r ²	0.413692371	0.328315028	0.385188859	0.370021638	0.378933501
Coef. Cuad. 1	0.410113493	0.364471691	0.413105682	0.304095122	0.428697812
Error CC1	0.019575599	0.047681013	0.021064151	0.017273591	0.016120667
% Error CC1	0.047732151	0.130822268	0.050989739	0.056803248	0.037603801
Coef. Cuad. 3	0.000901323	0.000853216	0.000699608	0.000759181	0.000822165
Error CC3	0.000164751	0.000256076	0.000117361	7.52514E-05	0.000114325
% Error CC3	0.182788225	0.30013053	0.167752097	0.099121911	0.139053325
D2 r ²	0.317382719	0.32028762	0.248846221	0.199317205	0.39110402
D	0.000901323	0.000853216	0.000699608	0.000759181	0.000822165
Error D	0.000164751	0.000256076	0.000117361	7.52514E-05	0.000114325
% Error D	0.182788225	0.30013053	0.167752097	0.099121911	0.139053325
C	455.012703	427.1740899	590.4820004	400.5569489	521.4256257
Error C	91.19564059	165.399652	113.2939984	53.07049666	81.56613363
% Error C	0.200424384	0.387194954	0.19186698	0.132491764	0.156429085
k	1.008626442	0.900658	0.930249907	1.216672376	0.881989035
Error k	0.061996474	0.164801446	0.058639339	0.082456077	0.04750737
% Error k	0.061466239	0.18297894	0.063036114	0.0677718	0.053863901
T Dec. Corr. Ret.	1.208747521	1.523162684	1.301095577	1.351409298	1.322377804
Error PDCR	0.336196055	0.796542087	0.341589643	0.241642555	0.285790307
% Error PDCR	0.27813588	0.522952732	0.262540008	0.178807823	0.2161185
PDCR r ²	0.860098675	0.712385228	0.832631545	0.863829891	0.876226595
PDCVol r ²	-19.03479403	-17.97848782	-25.28347826	-33.46337064	-22.03946188
BIC Coef. Difusión	-3305.866285	-343.6297825	-4060.768124	-4459.21022	-3523.254373
Rango C.D. BIC	2	3	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-3320.426183	-352.1623438	-4075.946977	-4474.598113	-3538.274459
Rango C.D. AIC	2	3	2	2	2

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-5.671247521	-4.247348141	-6.469713909	-6.084466534	-7.248804974
pvalue ADF	8.91179E-07	0.000547307	1.37683E-08	1.07264E-07	1.80262E-10
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.006631876	0.000686861	0.0008972	0.002658335	0.00554233
Desv. de Rets.	0.048010073	0.036427134	0.048581823	0.037278344	0.06147733
BIC Gaussiano	-3664.90871	-1303.392292	-2402.527756	-3529.838893	-2431.757563
Rango Gauss BIC	3	1	3	2	3
AIC Gaussiano	-3674.981007	-1311.090942	-2411.773229	-3539.545491	-2441.344495
Rango Gauss AIC	3	2	3	3	3
Alpha Lévy	1.73435035	1.891928369	1.812974342	1.85157625	1.867843935
Beta Lévy	0.139701478	-0.296651836	-0.33277096	-0.442221289	-0.448382379
Mu Lévy	0.005796	0.001701468	0.003980124	0.004770735	0.009117766
Sigma Lévy	0.027989467	0.024194085	0.02331775	0.024008471	0.039161839
BIC Lévy	-3777.007734	-1296.347179	-2814.394694	-3552.812761	-2479.005008
Rango Lévy BIC	1	2	1	1	1
AIC Lévy	-3797.152328	-1311.744478	-2832.88564	-3572.225957	-2498.178872
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.766273682	-0.838163701	-0.822526922	-0.851823013	-0.72662219
Error CL1	0.028858375	0.053084606	0.035934543	0.032143623	0.032173716
% Error CL1	0.037660663	0.063334413	0.043687984	0.037735096	0.044278467
D1 r ²	0.38317118	0.419482419	0.411272141	0.426325822	0.36430776
Coef. Cuad. 1	0.396266529	0.347995821	0.508832633	0.323897626	0.333836272
Error CC1	0.016747335	0.03928519	0.009235274	0.022582304	0.020574909
% Error CC1	0.042262804	0.112889832	0.018149925	0.069720498	0.061631736
Coef. Cuad. 3	0.000852682	0.000649354	0.000740338	0.000732489	0.00147698
Error CC3	0.000103851	0.000101995	0.000247102	6.77851E-05	0.000200114
% Error CC3	0.121793486	0.157071526	0.333769627	0.092540763	0.135488698
D2 r ²	0.330525186	0.18573636	0.802094801	0.178931378	0.228475298
D	0.000852682	0.000649354	0.000740338	0.000732489	0.00147698
Error D	0.000103851	0.000101995	0.000247102	6.77851E-05	0.000200114
% Error D	0.121793486	0.157071526	0.333769627	0.092540763	0.135488698
C	464.7297631	535.9105218	687.29785	442.1877531	226.0263386
Error C	66.45149494	126.2924118	230.8340258	61.58604918	38.2547773
% Error C	0.14298954	0.235659511	0.335857337	0.139275791	0.169249201
k	0.966866524	1.204272655	0.80824899	1.314957174	1.088291253
Error k	0.054732418	0.155884069	0.038236753	0.104246213	0.082588712
% Error k	0.05660804	0.129442505	0.047308136	0.079277268	0.075888428
T Dec. Corr. Ret.	1.305016763	1.193084356	1.215765676	1.173952787	1.376231024
Error PDCR	0.256010004	0.371511663	0.578531234	0.21724923	0.316118598
% Error PDCR	0.196173729	0.311387591	0.475857515	0.185057894	0.229698788
PDCR r ²	0.855879263	0.765454897	0.838054634	0.837816215	0.863833481
PDCVol r ²	-27.82076058	-51.0222814	-3.738069913	-38.47732486	-35.20743261
BIC Coef. Difusión	-3748.017342	-1279.24032	-2782.75063	-3529.760664	-2428.744032
Rango C.D. BIC	2	3	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-3763.125787	-1290.788294	-2796.618839	-3544.320561	-2443.12443
Rango C.D. AIC	2	3	2	2	2

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-6.036230949	-5.27251439
pvalue ADF	1.37997E-07	6.24106E-06
Proceso Estacionario	si	si
Retorno Promedio	0.002584881	0.009826549
Desv. de Rets.	0.102264644	0.099439979
BIC Gaussiano	-1618.506091	-883.1569013
Rango Gauss BIC	2	2
AIC Gaussiano	-1628.21269	-891.5980817
Rango Gauss AIC	2	2
Alpha Lévy	1.867697523	1.593917128
Beta Lévy	-0.188236151	-0.00331487
Mu Lévy	0.005352098	0.010713481
Sigma Lévy	0.066164506	0.0535029
BIC Lévy	-1642.234651	-934.4732929
Rango Lévy BIC	1	1
AIC Lévy	-1661.647848	-951.3556536
Rango Lévy AIC	1	1
Coef. Lineal 1	-0.686203686	-0.721316942
Error CL1	0.03086659	0.042890241
% Error CL1	0.044981673	0.05946102
D1 r^2	0.343398111	0.360835557
Coef. Cuad. 1	0.351644825	0.536383416
Error CC1	0.021068416	0.025579847
% Error CC1	0.05991391	0.047689482
Coef. Cuad. 3	0.003492629	0.001825138
Error CC3	0.000488987	0.000682752
% Error CC3	0.140005497	0.374082439
D2 r^2	0.227860264	0.467914326
D	0.003492629	0.001825138
Error D	0.000488987	0.000682752
% Error D	0.140005497	0.374082439
C	100.6819895	293.8865261
Error C	17.65530086	115.8576304
% Error C	0.175357092	0.39422573
k	0.975705652	0.672389303
Error k	0.073100004	0.051251326
% Error k	0.07492014	0.076222697
T Dec. Corr. Ret.	1.457293251	1.386353129
Error PDCR	0.344749743	0.760805407
% Error PDCR	0.236568544	0.54878183
PDCR r^2	0.909022016	0.90277197
PDCVol r^2	-25.56260191	-15.54140214
BIC Coef. Difusión	-1566.614895	-854.0010948
Rango C.D. BIC	3	3
AIC Coef. Difusión	-1581.174792	-866.6628653
Rango C.D. AIC	3	3

B.5. Resultados semanales

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-11.79898453	-10.35814028	-9.420980047	-8.239375875	-9.270253993
pvalue ADF	9.4294E-22	2.43599E-18	5.50432E-16	5.77242E-13	1.33276E-15
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.001032257	0.001308564	0.001760782	0.00155846	0.00142954
Desv. de Rets.	0.024975714	0.017665104	0.023217398	0.018887527	0.022695249
BIC Gaussiano	-29223.73364	-17148.57493	-11953.33902	-9570.006691	-8879.835645
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-29237.27359	-17160.76552	-11965.02907	-9581.083681	-8890.912635
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.586154075	1.770568469	1.68431087	1.699580332	1.67907062
Beta Lévy	-0.333031326	-0.424116072	-0.43853851	-0.450301101	-0.397466413
Mu Lévy	0.003074129	0.002654447	0.004304353	0.003578115	0.003779248
Sigma Lévy	0.011471204	0.01040049	0.012964561	0.010370559	0.012384149
BIC Lévy	-31783.18402	-17563.7442	-12329.86346	-9928.48444	-9221.395306
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-31810.26392	-17588.12538	-12353.24356	-9950.63842	-9243.549286
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.921132978	-0.821984318	-0.760961685	-0.848252445	-0.769350869
Error CL1	0.012425158	0.01718935	0.019224415	0.022813975	0.022455979
% Error CL1	0.013488995	0.020912017	0.025263315	0.026895265	0.029188216
D1 r ²	0.460606733	0.411002893	0.38049755	0.424135341	0.384746449
Coef. Cuad. 1	0.743889311	0.472338523	0.395011961	0.431886145	0.339365979
Error CC1	0.009742111	0.008287624	0.011614607	0.010152198	0.011572299
% Error CC1	0.013096184	0.017545942	0.029403178	0.023506655	0.034099763
Coef. Cuad. 3	0.000110512	0.000109102	0.000197246	0.000148527	0.0002214
Error CC3	2.71378E-05	9.45124E-06	1.94881E-05	1.47818E-05	2.2367E-05
% Error CC3	0.245564147	0.086627457	0.098801116	0.099522506	0.101024887
D2 r ²	0.475360384	0.497871682	0.312051961	0.491012541	0.314326904
D	0.000110512	0.000109102	0.000197246	0.000148527	0.0002214
Error D	2.71378E-05	9.45124E-06	1.94881E-05	1.47818E-05	2.2367E-05
% Error D	0.245564147	0.086627457	0.098801116	0.099522506	0.101024887
C	6731.290531	4329.323933	2002.637659	2907.796683	1532.814955
Error C	1674.882221	402.510451	223.8348882	313.2218607	176.1387306
% Error C	0.248820373	0.09297305	0.111770038	0.107717937	0.114911934
k	0.619133091	0.87012204	0.963213473	0.982032482	1.133512072
Error k	0.011640081	0.02375246	0.037339675	0.035078196	0.050878732
% Error k	0.018800612	0.027297849	0.038765732	0.035719996	0.04488592
T Dec. Corr. Ret.	1.085619584	1.216568222	1.31412661	1.178894332	1.299797063
Error PDCR	0.380070426	0.158123343	0.202550286	0.177945894	0.207257629
% Error PDCR	0.350095403	0.129974909	0.154133007	0.15094304	0.159453837
PDCR r ²	0.77215113	0.872595393	0.904663885	0.8623374	0.885691344
PDCVol r ²	-46.94956789	-65.75955649	-75.88693867	-49.13959176	-44.76545106
BIC Coef. Difusión	-30188.5022	-17225.87949	-12207.13812	-9859.697559	-9197.819895
Rango C.D. BIC	2	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-30208.81212	-17244.16538	-12224.67319	-9876.313044	-9214.43538
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	2

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-8.374200733	-8.423329806	-6.174802566	-6.020044183	-6.464268633
pvalue ADF	2.61282E-13	1.95671E-13	6.67053E-08	1.5013E-07	1.41804E-08
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.001071488	0.001161332	0.000231567	0.000484805	0.001408291
Desv. de Rets.	0.018950766	0.018684316	0.024513809	0.021014124	0.032465273
BIC Gaussiano	-9557.445179	-9395.568264	-5211.742623	-5602.350007	-4237.36612
Rango Gauss BIC	3	3	2	2	2
AIC Gaussiano	-9568.522169	-9406.600042	-5221.821944	-5612.443302	-4247.294391
Rango Gauss AIC	3	3	2	2	2
Alpha Lévy	1.783022324	1.746700128	1.71344442	1.714251548	1.797001416
Beta Lévy	-0.405324327	-0.399093703	-0.466415224	-0.120541083	-0.536638038
Mu Lévy	0.002524544	0.002766671	0.002745971	0.002028786	0.004302516
Sigma Lévy	0.011175597	0.010622596	0.014414012	0.01225715	0.019749915
BIC Lévy	-9799.054754	-9691.115266	-5296.12171	-5693.077783	-4333.405299
Rango Lévy BIC	2	1	1	1	1
AIC Lévy	-9821.208734	-9713.178823	-5316.280352	-5713.264372	-4353.261841
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.818442056	-0.784708294	-0.880721497	-0.869916612	-0.82372121
Error CL1	0.022690086	0.022755456	0.029417334	0.029274694	0.030289617
% Error CL1	0.027723509	0.028998618	0.033401404	0.033652299	0.036771686
D1 r ²	0.409391463	0.393221973	0.440387052	0.434980895	0.411882331
Coef. Cuad. 1	0.235331072	0.206047529	0.518747987	0.550722268	0.608426037
Error CC1	0.012400951	0.012911398	0.022909423	0.022609615	0.013594883
% Error CC1	0.052695767	0.062662232	0.044162915	0.041054447	0.022344348
Coef. Cuad. 3	0.000209291	0.000201407	0.000217488	0.000140934	0.000226874
Error CC3	1.61688E-05	1.66861E-05	3.18745E-05	2.39211E-05	4.69947E-05
% Error CC3	0.077255113	0.082847695	0.146557356	0.16973269	0.207140444
D2 r ²	0.161047207	0.121931848	0.310605965	0.341116954	0.654994759
D	0.000209291	0.000201407	0.000217488	0.000140934	0.000226874
Error D	1.61688E-05	1.66861E-05	3.18745E-05	2.39211E-05	4.69947E-05
% Error D	0.077255113	0.082847695	0.146557356	0.16973269	0.207140444
C	1124.421881	1023.040291	2385.180663	3907.665562	2681.78501
Error C	117.8640213	119.2829895	406.3214829	744.5963458	576.6067517
% Error C	0.104821885	0.116596571	0.170352497	0.190547613	0.215008567
k	1.738916263	1.904192445	0.848891484	0.789795521	0.676927975
Error k	0.103541284	0.131478596	0.0470045	0.041925757	0.029126998
% Error k	0.059543571	0.069046906	0.055371624	0.053084318	0.043028209
T Dec. Corr. Ret.	1.221833595	1.274358902	1.135432714	1.149535469	1.214002976
Error PDCR	0.174945994	0.202402441	0.262785959	0.299620028	0.366193034
% Error PDCR	0.143183159	0.158826874	0.231441243	0.260644439	0.301640969
PDCR r ²	0.878536737	0.89265669	0.841926497	0.845958842	0.856381504
PDCVol r ²	-59.71020658	-50.8893956	-59.91637163	-58.64344347	-46.14387649
BIC Coef. Difusión	-9799.091502	-9684.637846	-5192.464777	-5534.126589	-3955.454438
Rango C.D. BIC	1	2	3	3	3
AIC Coef. Difusión	-9815.706987	-9701.185514	-5207.583758	-5549.26653	-3970.346845
Rango C.D. AIC	2	2	3	3	3

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-9.657460121	-9.271886168	-10.02299256	-5.948212743	-7.330840789
pvalue ADF	1.38185E-16	1.32005E-15	1.66E-17	2.1785E-07	1.12898E-10
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000883992	0.002169009	0.001986663	0.005845896	0.004177613
Desv. de Rets.	0.022801639	0.045124521	0.035064831	0.066722046	0.036901508
BIC Gaussiano	-12281.76164	-4833.173293	-10087.6246	-3032.347123	-6624.440241
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-12293.49048	-4843.722252	-10099.36264	-3042.497049	-6635.392053
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.725919196	1.581368819	1.65158326	1.453541535	1.653215486
Beta Lévy	-0.456302705	-0.109784961	-0.291071024	0.035330567	0.061712453
Mu Lévy	0.00312726	0.002330806	0.004629983	0.004597211	0.003951421
Sigma Lévy	0.013294621	0.020007882	0.018734645	0.030228153	0.020371803
BIC Lévy	-12552.5573	-5482.993946	-10572.40322	-3340.597031	-6846.033193
Rango Lévy BIC	1	1	1	2	2
AIC Lévy	-12576.01498	-5504.091864	-10595.8793	-3360.896883	-6867.936817
Rango Lévy AIC	1	1	1	2	2
Coef. Lineal 1	-0.818577671	-0.692079124	-0.727514685	-0.816103607	-0.821841284
Error CL1	0.019275395	0.025061461	0.018816649	0.028512726	0.023433976
% Error CL1	0.023547423	0.036211843	0.025864288	0.03493763	0.028513993
D1 r ²	0.409465872	0.346071026	0.363901453	0.409774821	0.410947087
Coef. Cuad. 1	0.414305887	0.265437159	0.380702556	0.424810702	0.326734658
Error CC1	0.012144606	0.013015151	0.009290056	0.020213352	0.013587822
% Error CC1	0.02931314	0.04903289	0.024402399	0.047582022	0.041586717
Coef. Cuad. 3	0.000210003	0.000868608	0.000426065	0.001726665	0.00067412
Error CC3	1.68245E-05	0.000141334	4.04672E-05	0.000262882	5.64468E-05
% Error CC3	0.080115765	0.162713315	0.094978997	0.152248675	0.08373398
D2 r ²	0.309207281	0.224110576	0.391330301	0.272530528	0.24707831
D	0.000210003	0.000868608	0.000426065	0.001726665	0.00067412
Error D	1.68245E-05	0.000141334	4.04672E-05	0.000262882	5.64468E-05
% Error D	0.080115765	0.162713315	0.094978997	0.152248675	0.08373398
C	1972.860466	305.5890525	893.531173	246.0296558	484.6829811
Error C	187.5812283	54.55571161	93.39396128	42.89900236	50.88740414
% Error C	0.095080839	0.178526394	0.104522331	0.174365168	0.10499111
k	0.987890466	1.303659077	0.955489626	0.960549726	1.257658568
Error k	0.037144436	0.079464644	0.033976201	0.056702438	0.063415215
% Error k	0.037599751	0.06095508	0.035558943	0.059031236	0.050423237
T Dec. Corr. Ret.	1.221631173	1.444921491	1.3745427	1.225334617	1.216779954
Error PDCR	0.158683462	0.359964768	0.200185362	0.292717944	0.174543322
% Error PDCR	0.129894738	0.249124102	0.145637791	0.23888817	0.143446908
PDCR r ²	0.876106217	0.828040446	0.911166091	0.784529194	0.857704118
PDCVol r ²	-64.84365605	-23.29869583	-54.69627361	-48.72544122	-56.83386191
BIC Coef. Difusión	-12445.05627	-5452.648181	-10513.92065	-3364.072323	-6879.031033
Rango C.D. BIC	2	2	2	1	1
AIC Coef. Difusión	-12462.64953	-5468.471619	-10531.52771	-3379.297213	-6895.458751
Rango C.D. AIC	2	2	2	1	1

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-8.526159239	-6.433673053	-5.846433763	-6.151214756	-7.972069902
pvalue ADF	1.0678E-13	1.67321E-08	3.67432E-07	7.55436E-08	2.76418E-12
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.003211417	0.00404083	0.004206786	0.006080647	0.00282088
Desv. de Rets.	0.052076602	0.033766543	0.040592996	0.066430926	0.024251266
BIC Gaussiano	-5942.859841	-3150.393426	-1413.628597	-2365.834698	-7710.716418
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	2
AIC Gaussiano	-5953.999696	-3159.770135	-1421.60652	-2375.483445	-7721.568325
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	2
Alpha Lévy	1.782741496	1.634573884	1.647631758	1.694049474	1.57790529
Beta Lévy	-0.107673748	-0.231010677	-0.033853582	0.004770979	0.153250049
Mu Lévy	0.004813828	0.005398661	0.004923947	0.007176573	0.001820855
Sigma Lévy	0.029691449	0.018700314	0.021366103	0.036410064	0.01265926
BIC Lévy	-6309.110822	-3225.55051	-1483.569748	-2513.464764	-7963.263929
Rango Lévy BIC	1	1	2	1	1
AIC Lévy	-6331.390533	-3244.303929	-1499.525594	-2532.762258	-7984.967744
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.760724137	-0.778310552	-0.769557536	-0.752101988	-0.879798734
Error CL1	0.02205692	0.034446434	0.047689795	0.031937908	0.024242263
% Error CL1	0.028994637	0.044257956	0.061970408	0.042464863	0.027554329
D1 r ²	0.38045742	0.38926044	0.396058038	0.376590683	0.439899367
Coef. Cuad. 1	0.392254397	0.429559053	0.40074012	0.423604602	0.649909999
Error CC1	0.006834726	0.017718759	0.021189649	0.016019484	0.016804525
% Error CC1	0.017424217	0.041248716	0.052876285	0.037817069	0.025856695
Coef. Cuad. 3	0.00099876	0.000397392	0.000571474	0.001444904	0.000135202
Error CC3	9.17435E-05	5.11633E-05	0.000109635	0.000218316	2.67456E-05
% Error CC3	0.091857351	0.128747664	0.191846381	0.151093703	0.197819158
D2 r ²	0.629811729	0.4235197	0.474568579	0.432632642	0.47158219
D	0.00099876	0.000397392	0.000571474	0.001444904	0.000135202
Error D	9.17435E-05	5.11633E-05	0.000109635	0.000218316	2.67456E-05
% Error D	0.091857351	0.128747664	0.191846381	0.151093703	0.197819158
C	392.7412517	1080.946119	701.2400145	293.171443	4806.954455
Error C	38.0535467	162.038484	150.4952047	49.02186097	1003.475789
% Error C	0.096892156	0.149904312	0.214612974	0.167212265	0.208755003
k	0.969682102	0.905941274	0.960170316	0.887740578	0.676861977
Error k	0.032801815	0.054809247	0.078218429	0.05047955	0.025576157
% Error k	0.03382739	0.060499779	0.081463078	0.056862952	0.03778637
T Dec. Corr. Ret.	1.314536968	1.28483418	1.299447999	1.329606909	1.136623595
Error PDCR	0.18105405	0.265521131	0.388750008	0.309037499	0.329697027
% Error PDCR	0.137732186	0.206657898	0.299165498	0.232427717	0.290067027
PDCR r ²	0.87676665	0.84938742	0.790890492	0.835679951	0.839294953
PDCVol r ²	-42.97707061	-40.96064894	-17.01964015	-28.48490392	-46.04088598
BIC Coef. Difusión	-6249.930202	-3204.258079	-1485.15711	-2483.090699	-7674.580089
Rango C.D. BIC	2	2	1	2	3
AIC Coef. Difusión	-6266.639985	-3218.323143	-1497.123994	-2497.56382	-7690.857949
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	3

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-7.542305944	-5.211442893	-9.148970601	-8.397200374	-9.195651111
pvalue ADF	3.35307E-11	8.33126E-06	2.71905E-15	2.28205E-13	2.0662E-15
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.001829849	0.004091908	0.001512938	0.001338783	0.002007957
Desv. de Rets.	0.02459856	0.028018877	0.038290209	0.021610159	0.023948104
BIC Gaussiano	-5633.500595	-2644.269458	-7574.091295	-9928.56962	-10365.98694
Rango Gauss BIC	3	3	3	2	2
AIC Gaussiano	-5643.738247	-2653.115952	-7585.350274	-9939.8286	-10377.41897
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	2
Alpha Lévy	1.586796713	1.586040801	1.728530838	1.851470918	1.823526471
Beta Lévy	0.017829989	-0.073236062	-0.071101258	-0.503306324	-0.188694195
Mu Lévy	0.001708966	0.005104177	0.002352454	0.002767625	0.002861487
Sigma Lévy	0.012477347	0.01440796	0.021829242	0.013809795	0.014966568
BIC Lévy	-5880.564062	-2747.809883	-7847.856983	-10018.71681	-10495.89442
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-5901.039367	-2765.502871	-7870.374943	-10041.23477	-10518.75848
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.898511998	-0.853849456	-0.806802506	-0.889938845	-0.839898577
Error CL1	0.028325356	0.039885986	0.021637534	0.021918626	0.020841138
% Error CL1	0.031524739	0.046713136	0.026818873	0.024629362	0.024813875
D1 r ²	0.449364052	0.427382008	0.403423927	0.445001999	0.420086261
Coef. Cuad. 1	0.678846177	0.532689801	0.50724979	0.528773387	0.569106881
Error CC1	0.02096254	0.022431436	0.012605014	0.014631808	0.012455248
% Error CC1	0.030879662	0.042109753	0.024849718	0.027671226	0.021885604
Coef. Cuad. 3	0.000132786	0.000251401	0.000439119	0.000168633	0.000155145
Error CC3	3.69826E-05	4.86253E-05	5.51947E-05	1.5555E-05	1.79969E-05
% Error CC3	0.278512674	0.193417509	0.125693989	0.092241568	0.116000703
D2 r ²	0.459817063	0.479158785	0.440726682	0.388574844	0.482301134
D	0.000132786	0.000251401	0.000439119	0.000168633	0.000155145
Error D	3.69826E-05	4.86253E-05	5.51947E-05	1.5555E-05	1.79969E-05
% Error D	0.278512674	0.193417509	0.125693989	0.092241568	0.116000703
C	5112.331069	2118.886648	1155.152323	3135.643018	3668.235349
Error C	1485.377614	449.8952208	157.1521787	336.4958879	463.2707044
% Error C	0.290548009	0.212326233	0.136044551	0.107313201	0.126292525
k	0.661793517	0.801450915	0.795271404	0.841512515	0.737909351
Error k	0.029204241	0.050404499	0.029076502	0.031173492	0.024414744
% Error k	0.044128932	0.062891561	0.036561734	0.037044597	0.033086372
T Dec. Corr. Ret.	1.112951193	1.171166642	1.239460702	1.123672717	1.190619947
Error PDCR	0.450621305	0.344347114	0.234004991	0.164367364	0.207935129
% Error PDCR	0.404888649	0.294020596	0.188795813	0.146276902	0.174644419
PDCR r ²	0.806000117	0.787898288	0.85916186	0.841005501	0.852297715
PDCVol r ²	-40.12304754	-25.03780425	-55.53996653	-76.03118997	-75.14624075
BIC Coef. Difusión	-5663.49534	-2734.769359	-7637.747913	-9702.196955	-10024.66908
Rango C.D. BIC	2	2	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-5678.851818	-2748.0391	-7654.636383	-9719.085425	-10041.81712
Rango C.D. AIC	2	2	2	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-9.79857105	-4.581116091	-8.765056837	-10.41361101	-10.70964327
pvalue ADF	6.08077E-17	0.000139927	2.61117E-14	1.77775E-18	3.3575E-19
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.001926057	0.003484461	0.000871596	0.000805073	0.002129912
Desv. de Rets.	0.034068111	0.036802945	0.030844622	0.027976267	0.034539645
BIC Gaussiano	-8054.973604	-1033.066304	-10412.30997	-11695.88164	-9333.529075
Rango Gauss BIC	2	1	2	3	3
AIC Gaussiano	-8066.232584	-1040.314339	-10423.98271	-11707.69399	-9345.096356
Rango Gauss AIC	2	1	2	3	3
Alpha Lévy	1.677085424	2	1.694936107	1.767861929	1.722380971
Beta Lévy	-0.030626578	0.219564012	0.06801061	-0.021428181	-0.043582138
Mu Lévy	0.00221796	0.00348393	0.000833339	0.000999389	0.002624294
Sigma Lévy	0.017565032	0.025976521	0.01704563	0.016736072	0.019685361
BIC Lévy	-8618.589657	-1021.823319	-10810.61809	-11928.97364	-9650.789262
Rango Lévy BIC	1	3	1	1	1
AIC Lévy	-8641.107617	-1036.319389	-10833.96357	-11952.59836	-9673.923824
Rango Lévy AIC	1	2	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.894505505	-0.755916792	-0.831265637	-0.760301329	-0.805411811
Error CL1	0.021929915	0.057709596	0.019593686	0.01864236	0.019970567
% Error CL1	0.024516243	0.076343847	0.023570909	0.0245197	0.024795473
D1 r ²	0.447276986	0.384161213	0.415786265	0.380156307	0.404049024
Coef. Cuad. 1	0.794440156	0.290095856	0.670297524	0.397648312	0.419155107
Error CC1	0.013584024	0.04041206	0.015902068	0.010323106	0.010289705
% Error CC1	0.017098863	0.139305884	0.023723895	0.025960393	0.024548682
Coef. Cuad. 3	0.000116083	0.000614279	0.000152852	0.000283829	0.000457603
Error CC3	6.89903E-05	0.00010178	4.58465E-05	2.12486E-05	3.85818E-05
% Error CC3	0.59431756	0.165689924	0.299941206	0.074863993	0.084312867
D2 r ²	0.624678812	0.158295994	0.41274269	0.353724762	0.408976974
D	0.000116083	0.000614279	0.000152852	0.000283829	0.000457603
Error D	6.89903E-05	0.00010178	4.58465E-05	2.12486E-05	3.85818E-05
% Error D	0.59431756	0.165689924	0.299941206	0.074863993	0.084312867
C	6843.716153	472.2542705	4385.285386	1401.012407	915.980515
Error C	4095.636186	126.4412649	1353.214012	123.3884515	87.03429984
% Error C	0.598452083	0.267739802	0.308580604	0.08807092	0.095017632
k	0.562978532	1.302874165	0.620072138	0.955997178	0.96075629
Error k	0.016827477	0.20696644	0.020736856	0.034138038	0.03352273
% Error k	0.029890087	0.158853745	0.033442651	0.03570935	0.034892023
T Dec. Corr. Ret.	1.117936105	1.322896925	1.202984888	1.315267989	1.241600863
Error PDCR	0.943482223	0.466538811	0.519245301	0.159121674	0.163563953
% Error PDCR	0.843950043	0.352664522	0.431630776	0.12098042	0.13173634
PDCR r ²	0.83299299	0.760652249	0.859062921	0.887243503	0.87137805
PDCVol r ²	-22.06029789	-33.6180557	-45.30516732	-68.20847801	-51.81147978
BIC Coef. Difusión	-7315.572835	-1023.245621	-9811.024195	-11796.85824	-9590.602782
Rango C.D. BIC	3	2	3	2	2
AIC Coef. Difusión	-7332.461305	-1034.117673	-9828.533304	-11814.57677	-9607.953703
Rango C.D. AIC	3	3	3	2	2

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-9.577066437	-6.892648949	-9.35689772	-9.259528922	-7.866386466
pvalue ADF	2.20881E-16	1.34335E-09	8.01428E-16	1.41944E-15	5.12139E-12
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.003042565	0.000263798	0.000406823	0.001230061	0.002557549
Desv. de Rets.	0.033945878	0.026317672	0.037354819	0.026718274	0.042965084
BIC Gaussiano	-9695.634243	-3342.230984	-6091.986004	-9055.219382	-6688.707624
Rango Gauss BIC	3	2	3	2	3
AIC Gaussiano	-9707.259808	-3351.487066	-6102.783577	-9066.478362	-6699.847479
Rango Gauss AIC	3	2	3	2	3
Alpha Lévy	1.681377317	1.710926	1.752332844	1.819214238	1.864200173
Beta Lévy	0.115335509	-0.197699944	-0.138257701	-0.299954382	-0.243774701
Mu Lévy	0.002199648	0.001347422	0.001828848	0.00243713	0.004013749
Sigma Lévy	0.018985992	0.015458916	0.016080143	0.016840586	0.027275472
BIC Lévy	-10019.90331	-3384.332291	-7278.411292	-9142.164996	-6816.751353
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-10043.15444	-3402.844457	-7300.006437	-9164.682955	-6839.031064
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.831027634	-0.796455146	-0.906032042	-0.82821104	-0.836745072
Error CL1	0.019830189	0.03562701	0.024642044	0.021712581	0.02239378
% Error CL1	0.02386225	0.044731973	0.027197763	0.026216242	0.026762966
D1 r ²	0.415552418	0.398609559	0.453058516	0.414409491	0.418867376
Coef. Cuad. 1	0.446555285	0.468429208	0.493428575	0.444229553	0.33815919
Error CC1	0.011650563	0.025908243	0.012573174	0.01499771	0.011761334
% Error CC1	0.026089856	0.05530877	0.025481244	0.033761172	0.034780464
Coef. Cuad. 3	0.000442946	0.000226668	0.000575621	0.000273677	0.000918561
Error CC3	3.93181E-05	4.07739E-05	0.000356681	2.43191E-05	6.26502E-05
% Error CC3	0.088765148	0.179884242	0.619644694	0.088860622	0.06820469
D2 r ²	0.373050753	0.302711794	0.485673089	0.299193072	0.299227225
D	0.000442946	0.000226668	0.000575621	0.000273677	0.000918561
Error D	3.93181E-05	4.07739E-05	0.000356681	2.43191E-05	6.26502E-05
% Error D	0.088765148	0.179884242	0.619644694	0.088860622	0.06820469
C	1008.148914	2066.591199	857.2107407	1623.188257	368.140125
Error C	101.5253486	434.348721	532.6868944	175.4054466	31.89384418
% Error C	0.100704715	0.210176411	0.621418829	0.108062294	0.086635066
k	0.930486843	0.85013395	0.918098472	0.932188138	1.237205873
Error k	0.03289883	0.06047321	0.034217027	0.039846088	0.054295397
% Error k	0.035356577	0.071133743	0.037269452	0.042744685	0.043885499
T Dec. Corr. Ret.	1.203329419	1.255563487	1.103713725	1.207421722	1.195107128
Error PDCR	0.167045263	0.35864413	0.969453986	0.176633779	0.141827807
% Error PDCR	0.13881923	0.285643963	0.878356374	0.146290046	0.118673719
PDCR r ²	0.859142218	0.774889804	0.84496082	0.833433867	0.870352294
PDCVol r ²	-61.49517155	-55.63808751	-6.130142738	-73.03111319	-78.78646688
BIC Coef. Difusión	-9974.691358	-3332.435109	-7263.292228	-8973.32655	-6777.082534
Rango C.D. BIC	2	3	2	3	2
AIC Coef. Difusión	-9992.129707	-3346.319233	-7279.488587	-8990.21502	-6793.792317
Rango C.D. AIC	2	3	2	3	2

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-9.710393705	-7.093996992
pvalue ADF	1.01524E-16	4.33663E-10
Proceso Estacionario	si	si
Retorno Promedio	0.001191124	0.004533315
Desv. de Rets.	0.068781291	0.068809414
BIC Gaussiano	-5163.195555	-2738.362687
Rango Gauss BIC	3	3
AIC Gaussiano	-5174.454535	-2748.357879
Rango Gauss AIC	3	3
Alpha Lévy	1.755279217	1.62290022
Beta Lévy	-0.025830975	-0.114376621
Mu Lévy	0.002135848	0.006772546
Sigma Lévy	0.041549662	0.036908432
BIC Lévy	-5285.581119	-2891.156741
Rango Lévy BIC	1	1
AIC Lévy	-5308.099078	-2911.147125
Rango Lévy AIC	1	1
Coef. Lineal 1	-0.741739674	-0.772697865
Error CL1	0.021297894	0.029468274
% Error CL1	0.028713435	0.038136865
D1 r^2	0.371044631	0.386364813
Coef. Cuad. 1	0.371391104	0.479201397
Error CC1	0.011697658	0.019015366
% Error CC1	0.031496872	0.039681366
Coef. Cuad. 3	0.001750415	0.001389472
Error CC3	0.00013406	0.000238584
% Error CC3	0.076587386	0.171708156
D2 r^2	0.329091483	0.367931073
D	0.001750415	0.001389472
Error D	0.00013406	0.000238584
% Error D	0.076587386	0.171708156
C	212.1732053	344.8802458
Error C	19.959229	65.61855686
% Error C	0.09407045	0.190264759
k	0.998596448	0.806234987
Error k	0.042560765	0.044372461
% Error k	0.042620585	0.055036636
T Dec. Corr. Ret.	1.348181896	1.2941669
Error PDCR	0.173341759	0.339243089
% Error PDCR	0.12857446	0.26213241
PDCR r^2	0.896665956	0.830412263
PDCVol r^2	-52.5944057	-46.9170122
BIC Coef. Difusión	-5224.696978	-2842.815156
Rango C.D. BIC	2	2
AIC Coef. Difusión	-5241.585447	-2857.807944
Rango C.D. AIC	2	2

B.6. Resultados diarios

	INDU	SPX	CCMP	RAY	RTY
Fecha Inicial	26-05-1896	04-03-57	05-02-71	03-01-84	03-01-84
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-24.04659194	-19.01641868	-16.63747794	-15.13454526	-14.72857494
pvalue ADF	0	0	1.64565E-29	7.15288E-28	2.6819E-27
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000210871	0.000271521	0.000364642	0.000324607	0.000294544
Desv. de Rets.	0.011393314	0.009843719	0.012226418	0.010920891	0.012244595
BIC Gaussiano	-189726.5406	-101279.6024	-73609.57091	-56263.56749	-54781.97373
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-189743.2271	-101294.9402	-73624.41081	-56277.79581	-54796.22394
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.581176235	1.607708474	1.466993603	1.557060471	1.507155425
Beta Lévy	-0.124814233	-0.106797669	-0.227739641	-0.154912491	-0.194687243
Mu Lévy	0.000662891	0.00056878	0.001309548	0.000878237	0.001075752
Sigma Lévy	0.005509207	0.00499961	0.005527013	0.00527762	0.005831815
BIC Lévy	-199075.5728	-105120.2594	-77347.70329	-58826.12587	-57132.77329
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-199108.9459	-105150.935	-77377.3831	-58854.58251	-57161.27373
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.989469133	-0.977541662	-0.950890008	-1.01489227	-0.994370168
Error CL1	0.005675128	0.007949513	0.008994698	0.01049163	0.010435876
% Error CL1	0.005735528	0.008132148	0.009459241	0.010337678	0.010494961
D1 r ²	0.494739637	0.488772652	0.475453666	0.507494535	0.497207198
Coef. Cuad. 1	0.660232935	0.766812373	0.733747328	0.6683555	0.762657845
Error CC1	0.003310603	0.00379705	0.006857887	0.005556775	0.0080152
% Error CC1	0.005014296	0.004951733	0.009346387	0.008314101	0.010509562
Coef. Cuad. 3	4.2736E-05	2.04191E-05	3.24571E-05	4.13185E-05	3.4734E-05
Error CC3	2.2618E-06	2.01799E-06	3.64364E-06	3.23426E-06	4.23732E-06
% Error CC3	0.052924895	0.098828856	0.112260199	0.078276356	0.121993467
D2 r ²	0.561626029	0.720576161	0.481463827	0.614383307	0.496539298
D	4.2736E-05	2.04191E-05	3.24571E-05	4.13185E-05	3.4734E-05
Error D	2.2618E-06	2.01799E-06	3.64364E-06	3.23426E-06	4.23732E-06
% Error D	0.052924895	0.098828856	0.112260199	0.078276356	0.121993467
C	15449.08655	37553.75405	22606.70678	16175.71169	21957.07868
Error C	835.8227439	3749.766464	2605.13715	1300.408463	2752.938163
% Error C	0.054101758	0.099850642	0.115237357	0.080392658	0.125378162
k	0.749333365	0.637406031	0.647968293	0.759245843	0.65191106
Error k	0.005708693	0.006068811	0.00861657	0.010072301	0.009682473
% Error k	0.007618362	0.009521107	0.013297827	0.013266192	0.014852444
T Dec. Corr. Ret.	1.010642947	1.022974303	1.051646344	0.985326255	1.005661706
Error PDCR	0.076875884	0.144046787	0.169764625	0.111329481	0.176557895
% Error PDCR	0.076066315	0.140811736	0.161427486	0.11298743	0.175563904
PDCR r ²	0.825407992	0.810211022	0.803447636	0.778780031	0.792462898
PDCVol r ²	-206.0048781	-149.9779263	-194.9444318	-113.8289757	-141.117134
BIC Coef. Difusión	-197618.8793	-101597.1648	-75503.69618	-58502.39094	-55692.64584
Rango C.D. BIC	2	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-197643.909	-101620.1715	-75525.95604	-58523.73342	-55714.02117
Rango C.D. AIC	2	2	2	2	2

	UKX	ASX	SX5E	SXXP	SPLAC
Fecha Inicial	03-01-84	28-02-84	26-02-98	02-01-98	30-09-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-16.26636488	-16.08813821	-12.76353086	-12.46190618	-11.74377233
pvalue ADF	3.5239E-29	5.28896E-29	8.04799E-24	3.39132E-23	1.25555E-21
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000221996	0.000239834	4.71696E-05	9.87658E-05	0.000282602
Desv. de Rets.	0.010767066	0.010287158	0.014331634	0.011980198	0.018501236
BIC Gaussiano	-56707.99454	-55979.0657	-31644.48295	-33862.41633	-26943.15877
Rango Gauss BIC	2	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-56722.22945	-55993.24566	-31657.74436	-33875.69019	-26956.28807
Rango Gauss AIC	2	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.695177933	1.645247742	1.619970492	1.607080775	1.67203384
Beta Lévy	-0.168579028	-0.176638515	-0.131190144	-0.150026702	-0.191802474
Mu Lévy	0.000650509	0.000710698	0.000564097	0.000652278	0.001100745
Sigma Lévy	0.005920344	0.005350874	0.007696538	0.00634228	0.00989906
BIC Lévy	-58314.29908	-58003.37467	-32475.81575	-34780.04481	-28011.23131
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-58342.76891	-58031.73459	-32502.33855	-34806.59253	-28037.4899
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.996096152	-0.985333975	-1.013963585	-0.989734403	-0.979358629
Error CL1	0.010476435	0.010619864	0.013362949	0.013319238	0.013809112
% Error CL1	0.010517494	0.010777934	0.013178924	0.013457386	0.014100159
D1 r ²	0.498048247	0.492689382	0.506981931	0.494969996	0.489719153
Coef. Cuad. 1	0.721165044	0.649283484	0.63332232	0.628981955	0.660283448
Error CC1	0.008016515	0.007994221	0.011095508	0.011020134	0.009337104
% Error CC1	0.011116062	0.012312374	0.017519528	0.017520589	0.014141054
Coef. Cuad. 3	3.18727E-05	3.5558E-05	7.8182E-05	5.17475E-05	0.000109191
Error CC3	3.27589E-06	3.15326E-06	6.28251E-06	4.54383E-06	1.18457E-05
% Error CC3	0.10278051	0.088679359	0.080357413	0.087807733	0.10848622
D2 r ²	0.470434637	0.426697131	0.367888383	0.366412059	0.488319483
D	3.18727E-05	3.5558E-05	7.8182E-05	5.17475E-05	0.000109191
Error D	3.27589E-06	3.15326E-06	6.28251E-06	4.54383E-06	1.18457E-05
% Error D	0.10278051	0.088679359	0.080357413	0.087807733	0.10848622
C	22626.44892	18259.83203	8100.611626	12154.81722	6047.061837
Error C	2408.97183	1693.457208	714.7673371	1158.733353	684.0691022
% Error C	0.106467075	0.092742212	0.088236218	0.095331203	0.113124211
k	0.690615941	0.758785645	0.800511488	0.786774879	0.741619854
Error k	0.010568556	0.012416256	0.017549613	0.017381712	0.014809832
% Error k	0.015303088	0.016363325	0.021922999	0.022092358	0.019969574
T Dec. Corr. Ret.	1.003919148	1.014884319	0.986228711	1.010372072	1.021076417
Error PDCR	0.149355558	0.131281103	0.119669668	0.132841101	0.161333728
% Error PDCR	0.148772497	0.129355731	0.121340685	0.131477407	0.158003579
PDCR r ²	0.789050815	0.796402068	0.761291399	0.766012901	0.760118315
PDCVol r ²	-174.1951201	-153.2863874	-122.3697622	-114.2014132	-105.8489006
BIC Coef. Difusión	-56483.08231	-57262.12556	-32190.28425	-34455.8982	-27446.98302
Rango C.D. BIC	3	2	2	2	2
AIC Coef. Difusión	-56504.43468	-57283.39549	-32210.17635	-34475.80899	-27466.67697
Rango C.D. AIC	3	2	2	2	2

	NKY	SHCOMP	HSI	AMZN	MSFT
Fecha Inicial	05-01-70	15-01-91	24-11-69	15-05-97	13-03-86
Fecha Final	30-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-16.58763643	-13.03355034	-16.89760658	-12.81633989	-15.62942776
pvalue ADF	1.81074E-29	2.31822E-24	1.03359E-29	6.28858E-24	1.69269E-28
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000185647	0.000450322	0.000419171	0.001202783	0.000867466
Desv. de Rets.	0.012920202	0.022809657	0.017885788	0.036918604	0.021410969
BIC Gaussiano	-72172.10948	-32828.89407	-64373.06674	-21398.05738	-41308.27299
Rango Gauss BIC	2	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-72186.94728	-32842.58822	-64387.91118	-21411.35206	-41322.37357
Rango Gauss AIC	2	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.57066871	1.424956611	1.573811076	1.387181504	1.636542476
Beta Lévy	-0.120565387	-0.064038147	-0.0740313	0.014159864	0.080727376
Mu Lévy	0.000709108	0.000751317	0.00087558	0.000490636	0.000529109
Sigma Lévy	0.0065434	0.008590227	0.008638445	0.015003597	0.011326464
BIC Lévy	-74761.34093	-36969.34716	-68034.8905	-23619.44483	-42975.85427
Rango Lévy BIC	1	1	1	2	1
AIC Lévy	-74791.01652	-36996.73545	-68064.57938	-23646.03421	-43004.05543
Rango Lévy AIC	1	1	1	2	1
Coef. Lineal 1	-1.008619636	-0.955466665	-0.933415013	-0.991396395	-0.996492967
Error CL1	0.009010134	0.011981429	0.008975403	0.013239501	0.010832703
% Error CL1	0.008933133	0.012539872	0.009615662	0.013354397	0.010870828
D1 r²	0.504309993	0.47773954	0.466715613	0.496206619	0.498322656
Coef. Cuad. 1	0.798590594	0.437336057	0.699405081	0.589767993	0.651338771
Error CC1	0.006619116	0.005769751	0.00402009	0.009234077	0.005288569
% Error CC1	0.008288498	0.013192947	0.005747871	0.015657135	0.008119537
Coef. Cuad. 3	3.50604E-05	0.000269567	7.48549E-05	0.000546028	0.000158159
Error CC3	3.89101E-06	3.7894E-05	7.52506E-06	4.32941E-05	1.04001E-05
% Error CC3	0.110980185	0.140573852	0.10052862	0.079289169	0.065757081
D2 r²	0.541682674	0.452519764	0.710100786	0.417471992	0.64038313
D	3.50604E-05	0.000269567	7.48549E-05	0.000546028	0.000158159
Error D	3.89101E-06	3.7894E-05	7.52506E-06	4.32941E-05	1.04001E-05
% Error D	0.110980185	0.140573852	0.10052862	0.079289169	0.065757081
C	22777.54695	1622.366462	9343.475459	1080.105457	4118.251588
Error C	2587.787306	230.7463873	949.9394582	91.98837277	280.4880303
% Error C	0.113611326	0.142228277	0.101668749	0.085166103	0.068108522
k	0.631499822	1.092371244	0.66729213	0.840496948	0.764957509
Error k	0.007695495	0.019883024	0.007475428	0.017296394	0.010379258
% Error k	0.01218606	0.018201709	0.011202632	0.02057877	0.013568411
T Dec. Corr. Ret.	0.991454027	1.046608989	1.071334815	1.008678269	1.003519375
Error PDCR	0.157926629	0.210160526	0.153646135	0.119192841	0.095975841
% Error PDCR	0.159287899	0.200801377	0.143415609	0.118167353	0.095639251
PDCR r²	0.801889693	0.793082704	0.82942181	0.741159015	0.785410929
PDCVol r²	-177.6174494	-49.04799977	-137.4966186	-157.4975822	-185.4066661
BIC Coef. Difusión	-71854.17653	-36734.83315	-66486.97271	-23665.18549	-42419.04309
Rango C.D. BIC	3	2	2	1	2
AIC Coef. Difusión	-71876.43322	-36755.37436	-66509.23938	-23685.12752	-42440.19396
Rango C.D. AIC	3	2	2	1	2

	AAPL	GOOGL	FB	NFLX	BRK_A
Fecha Inicial	12-11-82	19-08-04	18-05-12	23-05-02	05-11-87
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-15.20727587	-10.83405845	-7.854389903	-10.96089324	-15.34442472
pvalue ADF	5.71935E-28	1.67952E-19	5.49215E-12	8.33188E-20	3.79289E-28
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000665446	0.000848704	0.000876659	0.001263351	0.000588682
Desv. de Rets.	0.028807539	0.018722257	0.022552383	0.036721701	0.014303968
BIC Gaussiano	-39835.0024	-19786.8229	-9083.872909	-16700.59584	-45750.22608
Rango Gauss BIC	3	3	3	3	3
AIC Gaussiano	-39849.29144	-19799.34441	-9094.989942	-16713.3895	-45764.2231
Rango Gauss AIC	3	3	3	3	3
Alpha Lévy	1.655298819	1.587864535	1.586545101	1.56932977	1.497543348
Beta Lévy	0.043149638	-0.070757483	-0.074540317	0.131906797	0.12968998
Mu Lévy	0.000512759	0.001104562	0.001304588	0.000225577	-7.00518E-05
Sigma Lévy	0.01508653	0.009247404	0.010908212	0.016891358	0.006628212
BIC Lévy	-42056.91338	-20797.05399	-9665.327963	-18378.4716	-48093.08025
Rango Lévy BIC	2	2	2	2	1
AIC Lévy	-42085.49147	-20822.097	-9687.56203	-18404.05893	-48121.07428
Rango Lévy AIC	2	1	2	2	1
Coef. Lineal 1	-0.990678941	-0.99092962	-0.99228984	-0.960783252	-0.997843466
Error CL1	0.010334862	0.016046382	0.022688954	0.015011049	0.011110292
% Error CL1	0.010432101	0.016193261	0.022865249	0.015623762	0.011134303
D1 r ²	0.495357096	0.496521269	0.499698447	0.480396061	0.499297124
Coef. Cuad. 1	0.442988542	0.552434782	0.501068766	0.459985386	0.773662101
Error CC1	0.006452156	0.010376111	0.01240034	0.008652983	0.009253543
% Error CC1	0.014565063	0.018782509	0.024747781	0.01881143	0.011960703
Coef. Cuad. 3	0.000454486	0.000152963	0.000246249	0.000675305	4.57148E-05
Error CC3	3.96055E-05	1.29972E-05	2.89922E-05	6.01575E-05	7.09001E-06
% Error CC3	0.087143534	0.084969535	0.117735468	0.089081884	0.155092231
D2 r ²	0.334936544	0.4230373	0.460355473	0.38946215	0.463594716
D	0.000454486	0.000152963	0.000246249	0.000675305	4.57148E-05
Error D	3.96055E-05	1.29972E-05	2.89922E-05	6.01575E-05	7.09001E-06
% Error D	0.087143534	0.084969535	0.117735468	0.089081884	0.155092231
C	974.7030427	3611.553808	2034.806154	681.1515608	16923.67969
Error C	87.98765095	332.2912409	255.2991974	64.40164965	2685.866533
% Error C	0.090271239	0.092007833	0.125466102	0.094548194	0.158704642
k	1.11817671	0.896874756	0.990173312	1.044362802	0.644883254
Error k	0.020032839	0.022241849	0.033362703	0.025538287	0.010538094
% Error k	0.017915629	0.024799281	0.033693802	0.024453463	0.016341087
T Dec. Corr. Ret.	1.009408758	1.009153404	1.007770069	1.040817476	1.002161195
Error PDCR	0.127935788	0.128841139	0.176686713	0.137580618	0.222984345
% Error PDCR	0.126743291	0.127672501	0.17532443	0.132185154	0.222503472
PDCR r ²	0.796621113	0.758152227	0.723939611	0.786346492	0.785133077
PDCVol r ²	-211.6270337	-77.38243168	-36.85899431	-73.73524906	-111.1686189
BIC Coef. Difusión	-42195.55863	-20800.96703	-9695.55988	-18411.04297	-46876.55308
Rango C.D. BIC	1	1	1	1	2
AIC Coef. Difusión	-42216.9922	-20819.74929	-9712.23543	-18430.23346	-46897.5486
Rango C.D. AIC	1	2	1	1	2

	BRK_B	V	JPM	XOM	JNJ
Fecha Inicial	09-05-96	19-03-08	28-07-80	28-07-80	03-01-77
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-13.92742698	-11.60646176	-15.85059898	-16.7574534	-17.06578583
pvalue ADF	5.16251E-26	2.57401E-21	9.45879E-29	1.31857E-29	7.88838E-30
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000382828	0.000871955	0.00031391	0.00027637	0.000414577
Desv. de Rets.	0.014075876	0.018370467	0.022461941	0.01468401	0.014156474
BIC Gaussiano	-33842.81067	-15288.44674	-47251.50065	-55709.91243	-61546.94404
Rango Gauss BIC	3	3	3	2	2
AIC Gaussiano	-33856.19363	-15300.43802	-47265.9099	-55724.32187	-61561.52678
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	2
Alpha Lévy	1.532339905	1.55332561	1.572996568	1.765005717	1.705869176
Beta Lévy	0.078479967	-0.098742453	0.023266409	-0.076468621	0.0741884
Mu Lévy	-6.45478E-05	0.001276347	8.10231E-05	0.000499771	0.000222282
Sigma Lévy	0.006689473	0.008940301	0.01092066	0.008421861	0.008081226
BIC Lévy	-35483.86674	-16036.1156	-50079.70232	-57373.42435	-62909.40982
Rango Lévy BIC	2	1	1	1	1
AIC Lévy	-35510.63267	-16060.09817	-50108.52081	-57402.24325	-62938.57529
Rango Lévy AIC	2	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-0.97172817	-1.093973705	-1.023477742	-1.084820673	-0.980671351
Error CL1	0.012952713	0.018126068	0.010026834	0.009992818	0.009601568
% Error CL1	0.013329564	0.016569016	0.009796827	0.009211493	0.009790811
D1 r ²	0.486102345	0.551186883	0.511740486	0.542418581	0.490360973
Coef. Cuad. 1	0.536817058	0.789571012	0.73025638	1.018813936	0.776772239
Error CC1	0.00949624	0.01156958	0.007323202	0.006672846	0.005888604
% Error CC1	0.017689899	0.014652995	0.010028262	0.006549622	0.007580863
Coef. Cuad. 3	8.60747E-05	9.99139E-05	0.00014794	1.42288E-05	4.08524E-05
Error CC3	6.94732E-06	1.33387E-05	1.58401E-05	6.76517E-06	4.15474E-06
% Error CC3	0.080712669	0.133501854	0.107071025	0.47545491	0.101701112
D2 r ²	0.349450492	0.611016898	0.500093423	0.701043743	0.61613279
D	8.60747E-05	9.99139E-05	0.00014794	1.42288E-05	4.08524E-05
Error D	6.94732E-06	1.33387E-05	1.58401E-05	6.76517E-06	4.15474E-06
% Error D	0.080712669	0.133501854	0.107071025	0.47545491	0.101701112
C	6236.643547	7902.510392	4936.167521	71602.10645	19014.1068
Error C	543.7283702	1094.51116	542.2031887	34146.37956	1979.511335
% Error C	0.087182852	0.138501705	0.109842947	0.476890713	0.104107511
k	0.905083172	0.692764608	0.700766039	0.532393911	0.631247682
Error k	0.020047333	0.015323141	0.009824326	0.006017444	0.007816505
% Error k	0.022149714	0.022118828	0.01401941	0.011302617	0.012382628
T Dec. Corr. Ret.	1.029094381	0.914098754	0.977060819	0.921811342	1.019709609
Error PDCR	0.124371471	0.177001976	0.150499787	0.620845155	0.148943309
% Error PDCR	0.120855262	0.193635508	0.154033182	0.673505659	0.146064437
PDCR r ²	0.778040409	0.676222803	0.786665566	0.746219157	0.789960058
PDCVol r ²	-113.3885113	-29.44938599	-96.92671711	-175.2711735	-293.6473735
BIC Coef. Difusión	-35523.13814	-15708.84936	-49275.07309	-43242.49503	-59222.27887
Rango C.D. BIC	1	2	2	3	3
AIC Coef. Difusión	-35543.21259	-15726.83629	-49296.68696	-43264.1092	-59244.15297
Rango C.D. AIC	1	2	2	3	3

	WFC	BABA	GE	IBM	DIS
Fecha Inicial	28-07-80	18-09-14	06-07-71	02-01-68	03-01-74
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-15.92752244	-6.523135833	-17.69150167	-18.10864511	-16.26321848
pvalue ADF	7.79673E-29	1.03022E-08	3.57047E-30	2.54125E-30	3.54845E-29
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000398742	0.000854658	0.000181264	0.000165636	0.000437701
Desv. de Rets.	0.02101003	0.021911094	0.017183624	0.016033512	0.019381589
BIC Gaussiano	-48580.33212	-6380.267234	-64596.10631	-71027.25762	-58560.62143
Rango Gauss BIC	3	2	2	3	3
AIC Gaussiano	-48594.74136	-6390.654605	-64610.92715	-71042.21652	-58575.3393
Rango Gauss AIC	3	2	2	3	3
Alpha Lévy	1.597262832	1.830778288	1.656002956	1.677917806	1.662876956
Beta Lévy	-0.014543476	-0.100530177	0.064841767	0.055464346	0.067963321
Mu Lévy	0.000443614	0.000859148	4.18445E-06	-2.15211E-05	0.000197523
Sigma Lévy	0.009893029	0.012770703	0.009178168	0.008706558	0.010365698
BIC Lévy	-52247.1565	-6639.679992	-66920.55008	-73428.58481	-60871.69558
Rango Lévy BIC	1	1	1	1	1
AIC Lévy	-52275.97499	-6660.454735	-66950.19176	-73458.50262	-60901.13132
Rango Lévy AIC	1	1	1	1	1
Coef. Lineal 1	-1.06125296	-0.973050382	-0.992827036	-1.016842624	-0.977824698
Error CL1	0.010010513	0.025097782	0.009048518	0.008740271	0.009275769
% Error CL1	0.00943273	0.02579289	0.009113892	0.0085955	0.009486127
D1 r ²	0.530640689	0.530711609	0.496413737	0.508432857	0.489273978
Coef. Cuad. 1	0.784823573	0.640852475	0.772473194	0.7299541	0.682314367
Error CC1	0.00685127	0.005096942	0.006252454	0.005336024	0.004829619
% Error CC1	0.008729694	0.007953377	0.008094072	0.007310082	0.00707829
Coef. Cuad. 3	0.000122009	0.000120566	6.50653E-05	7.37455E-05	0.000110736
Error CC3	1.56274E-05	1.5198E-05	6.114E-06	5.32104E-06	7.999E-06
% Error CC3	0.128083708	0.12605554	0.093967213	0.072154083	0.072234988
D2 r ²	0.568989015	0.922505609	0.555537943	0.588502868	0.632456942
D	0.000122009	0.000120566	6.50653E-05	7.37455E-05	0.000110736
Error D	1.56274E-05	1.5198E-05	6.114E-06	5.32104E-06	7.999E-06
% Error D	0.128083708	0.12605554	0.093967213	0.072154083	0.072234988
C	6432.485057	5315.376992	11872.27969	9898.286447	6161.644741
Error C	836.5695976	678.1242678	1148.281936	736.1837362	456.9567601
% Error C	0.130053873	0.127577831	0.096719583	0.074374867	0.074161491
k	0.676109254	0.759184384	0.642628795	0.696511345	0.716549984
Error k	0.008689621	0.020491361	0.007833142	0.007859165	0.008481022
% Error k	0.012852391	0.026991284	0.012189218	0.011283613	0.011835911
T Dec. Corr. Ret.	0.942282413	1.027696015	1.007224787	0.983436351	1.022678198
Error PDCR	0.172426431	0.186391965	0.136377982	0.102509513	0.106564388
% Error PDCR	0.18298806	0.181368772	0.135399748	0.104236042	0.104201291
PDCR r ²	0.746188574	0.705852042	0.803155957	0.805606854	0.806649727
PDCVol r ²	-69.311385	-39.89533462	-136.0410924	-266.0266325	-158.7626868
BIC Coef. Difusión	-51307.66335	-6326.690492	-63656.96381	-71202.42467	-59413.26888
Rango C.D. BIC	2	3	3	2	2
AIC Coef. Difusión	-51329.27723	-6342.271549	-63679.19507	-71224.86302	-59435.34568
Rango C.D. AIC	2	3	3	2	2

	WMT	RDSA	RDSB	CVX	INTC
Fecha Inicial	25-08-72	15-07-05	12-09-88	28-07-80	12-11-82
Fecha Final	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-17.66893338	-12.24410441	-15.95160594	-16.44330806	-15.78281071
pvalue ADF	3.65251E-30	9.87307E-23	7.3462E-29	2.41637E-29	1.1259E-28
Proceso Estacionario	si	si	si	si	si
Retorno Promedio	0.000629615	5.39378E-05	8.60852E-05	0.000251263	0.000529853
Desv. de Rets.	0.018811589	0.015086462	0.019800071	0.016188909	0.024860069
BIC Gaussiano	-60990.16819	-20275.53022	inf	-53769.49534	-42594.73288
Rango Gauss BIC	3	3	3	2	3
AIC Gaussiano	-61004.94382	-20287.93847	inf	-53783.90479	-42609.02192
Rango Gauss AIC	3	3	3	2	3
Alpha Lévy	1.622518815	1.680570792	1.677643144	1.752311048	1.688921346
Beta Lévy	0.079390643	-0.098887928	-0.040771755	-0.052913995	0.02230706
Mu Lévy	0.000227056	0.000388001	0.000363541	0.000402886	0.000562259
Sigma Lévy	0.00997511	0.008334539	0.008665399	0.009448231	0.013939834
BIC Lévy	-63070.48274	-20825.291	-44461.72386	-55000.88699	-43868.91816
Rango Lévy BIC	1	1	2	1	1
AIC Lévy	-63100.03401	-20850.1075	-44489.6279	-55029.70589	-43897.49625
Rango Lévy AIC	1	1	2	1	1
Coef. Lineal 1	-0.944418017	-1.003769203	-0.998278989	-1.018415913	-0.993489036
Error CL1	0.00913744	0.016542845	0.011244341	0.010027423	0.010333636
% Error CL1	0.009675207	0.016480726	0.011263726	0.009846098	0.010401358
D1 r ²	0.472210641	0.501887406	0.499144733	0.509208118	0.496832613
Coef. Cuad. 1	0.561246157	0.693592359	0.509667373	0.787931428	0.539013975
Error CC1	0.00593535	0.013390244	0.005673392	0.007728234	0.00696232
% Error CC1	0.010575306	0.01930564	0.011131558	0.009808257	0.012916771
Coef. Cuad. 3	0.000135594	7.05954E-05	0.000191553	6.04055E-05	0.000280767
Error CC3	6.31595E-06	9.07079E-06	7.65244E-05	6.70116E-06	1.31401E-05
% Error CC3	0.046579778	0.128489778	0.399495428	0.110936397	0.046800556
D2 r ²	0.428224616	0.423459425	0.505077822	0.511157762	0.390373362
D	0.000135594	7.05954E-05	0.000191553	6.04055E-05	0.000280767
Error D	6.31595E-06	9.07079E-06	7.65244E-05	6.70116E-06	1.31401E-05
% Error D	0.046579778	0.128489778	0.399495428	0.110936397	0.046800556
C	4139.161777	9824.895957	2660.718139	13044.04227	1919.789944
Error C	211.4189015	1338.106023	1064.217361	1490.723636	100.7302261
% Error C	0.051077709	0.136195439	0.399973731	0.11428387	0.0524694
k	0.841358114	0.723601687	0.979343629	0.646259228	0.921580035
Error k	0.012059533	0.018367543	0.015509016	0.008981551	0.015283544
% Error k	0.014333413	0.0253835	0.015836133	0.013897753	0.016584065
T Dec. Corr. Ret.	1.058853158	0.99624495	1.001723978	0.9819171	1.006553635
Error PDCR	0.074752744	0.188243226	0.566506896	0.156986512	0.072711648
% Error PDCR	0.070597839	0.188952753	0.565531931	0.159877562	0.072238226
PDCR r ²	0.820450112	0.73942694	0.803259992	0.785087424	0.793455224
PDCVol r ²	-261.0347465	-105.0589475	-67.10212257	-204.2410367	-303.6327938
BIC Coef. Difusión	-62734.61492	-20320.84652	-44478.31529	-51594.26275	-43619.26713
Rango C.D. BIC	2	2	1	3	2
AIC Coef. Difusión	-62756.77837	-20339.4589	-44499.24331	-51615.87693	-43640.70069
Rango C.D. AIC	2	2	1	3	2

	AMD	NVDA
Fecha Inicial	28-07-80	22-01-99
Fecha Final	31-12-19	31-12-19
Estadístico ADF	-15.41881025	-12.14068126
pvalue ADF	3.05395E-28	1.65376E-22
Proceso Estacionario	si	si
Retorno Promedio	0.000258162	0.000942277
Desv. de Rets.	0.037841954	0.038485082
BIC Gaussiano	-36879.04253	-19362.13594
Rango Gauss BIC	3	3
AIC Gaussiano	-36893.45178	-19375.27551
Rango Gauss AIC	3	3
Alpha Lévy	1.68341599	1.530786233
Beta Lévy	0.098373724	0.011972845
Mu Lévy	-0.000330415	0.000587482
Sigma Lévy	0.020511933	0.01828711
BIC Lévy	-38774.66412	-20847.49503
Rango Lévy BIC	1	2
AIC Lévy	-38803.48262	-20873.77418
Rango Lévy AIC	1	2
Coef. Lineal 1	-0.987530441	-0.985021545
Error CL1	0.010027582	0.013767564
% Error CL1	0.0101542	0.013976917
D1 r^2	0.493828504	0.492822974
Coef. Cuad. 1	0.620903404	0.529727961
Error CC1	0.006026302	0.009116671
% Error CC1	0.0097057	0.017210101
Coef. Cuad. 3	0.000524834	0.000673412
Error CC3	3.28183E-05	5.44235E-05
% Error CC3	0.062530813	0.080817569
D2 r^2	0.516434473	0.390621966
D	0.000524834	0.000673412
Error D	3.28183E-05	5.44235E-05
% Error D	0.062530813	0.080817569
C	1183.047443	786.6332762
Error C	77.78703972	68.20459468
% Error C	0.065751412	0.086704436
k	0.795236774	0.929742828
Error k	0.011170413	0.020613088
% Error k	0.014046651	0.022170741
T Dec. Corr. Ret.	1.012627012	1.015206221
Error PDCR	0.092978016	0.122418382
% Error PDCR	0.091818621	0.120584744
PDCR r^2	0.812730896	0.761451663
PDCVol r^2	-201.761711	-117.5684399
BIC Coef. Difusión	-38059.98799	-20927.24494
Rango C.D. BIC	2	1
AIC Coef. Difusión	-38081.60186	-20946.95429
Rango C.D. AIC	2	1

