

BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

**DISERTACION ORAL**

**DEFINICIONES DE ESPACIOS**

**TOPOLOGICOS COMPACTOS**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEFINICIONES DE ESPACIOS TOPOLOGICOS COMPACTOS

DISERTACION ORAL QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO

LICENCIADA EN MATEMATICAS

PRESENTA:

GILDA MARINA CASTELLANOS DE ILLESCAS

Guatemala, Julio de 1972.

"Estudiad para saber engrandecer nuestra patria con algo más que gritos, es tan íntimo el gusto del que sabe bien una cosa que este solo placer paga las fatigas de la obra."

DE: Miguel Angel Asturias

## UNIDAD 1. DEFINICIONES

- 1.I. Introducción
- 1.II Notas Históricas
- 1.III Definiciones Generales: a) bicompatidad  
b) sucesionalmente compactos
- 1.IV Definiciones Equivalentes y sus Demostraciones
- 1.V Sentido de la Definición para Subconjuntos
- 1.VI Clases de Compacidad

## UNIDAD 2. DEFINICIONES MENOS GENERALES

- 2.I Definiciones para: a) La topología de la recta real  
b) La topología del espacio Euclidiano  
c) La topología de espacios métricos
- 2.II Espacios Sucesionalmente Compactos. Definición. Propiedad de Bolzano-Weiertrass
- 2.III Espacios Compactos-contables. Teorema de Linddöff
- 2.IV Definición de Espacios Localmente Compactos
- 2.V Definición de espacios Paracompactos

## UNIDAD 3. EJEMPLOS DE ESPACIOS COMPACTOS

- 3.I Espacios Topológicos Compactos que Ejemplifican algunas Definiciones
- 3.II Ejemplos de Conjuntos Compactos
- 3.III Producto de Espacios Compactos

## UNIDAD 4. APENDICE

- 4.I Conclusiones
- 4.II Algunos Conceptos
- 4.III Bibliografía

PRIMERA PARTE

1. a. INTRODUCCION

1. b. NOTAS HISTORICAS

1. c. DEFINICIONES GENERALES: I. Bicompatidad

II. Sucesionalmente compactos

1. d. DEFINICIONES EQUIVALENTES Y SUS DEMOSTRACIONES

1. e. SENTIDO DE LA DEFINICION PARA SUBCONJUNTOS

1. f. DEFINICIONES DE LAS DIFERENTES CLASES DE COMPACIDAD

1. a. INTRODUCCION:

La noción de un espacio topológico compacto es una abstracción de ciertas propiedades importantes del conjunto de los números reales.

Los clásicos teoremas de Heine-Borel-Lebesgue, afirman que toda cubierta abierta de un subconjunto cerrado y acotado del espacio de los números REALES tiene una subcubierta abierta finita.

Este teorema tiene extraordinarias y profundas consecuencias y así la conclusión se convierte en una DEFINICION. Un espacio topológico es compacto si de toda cubierta abierta se puede extraer una subcubierta abierta finita.

1. b. NOTAS HISTORICAS:

Frechet en su libro "Sur Quel ques Points du Calcul Fonctionnel" fue el primero en usar el término "compacto." El aplicó este término a espacios métricos en los cuales cualquier sucesión de puntos contiene una sub-sucesión convergente o, equivalentemente, en el cual cualquier conjunto infinito tiene un punto límite, Aplicando esto a espacios topológicos generales, se definen así los espacios sucesionalmente compactos y los espacios contablemente compactos respectivamente.

Hausdorff en su libro "Grundzüge der Mengenlehre" da la primer noticia de la definición actual de compacidad, en términos de la condición de Heine-Borel, y esta definición es equivalente en espacios métricos a la definición

anterior. Fueron Alexandroff y Urysohn en su obra "Zurtheorie der Topologischen Räume" quienes aplicaron esta definición a espacios topológicos en general; ellos los llamaron espacios bicompatos. La definición de bicompatidad tuvo mayor importancia que la de contablemente compactos y sucesionalmente compactos cuando Tychonoff en sus obras "Über die topologische Erweiterung von Räumen"; "Über einen Funktionenraum" probó que se preservaba bajo el producto. Este resultado falla para la compacidad sucesional y para la contable.

La compacidad puede ser descrita usando la propiedad de la intersección finita que fue señalada por primera vez por Riesz en "Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre."

Los espacios Maximal-compactos fueron estudiados por Balachandra en "Minimal Bicompat Space" y por Ramanathan en "Minimal-Bicompat Spaces." La compacidad local fue definida en forma independiente por Tietze en "Beiträge zur allgemeinen topologie I" y por Alexandroff en "Über die Metrisation der imkleinen Kompakten topologische Räume." Este concepto es indispensable hoy en teoría de integración y en el estudio de grupos topológicos.

Los espacios paracompactos fueron definidos en 1944 por Dieudonné en "Une Généralisation de Espaces compacts" y elevados a la presente situación por A. H. Stone que probó que todo espacio métrico es paracompacto. Sorgenfrey demostró en 1947 que el producto de espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto.

1. c. DEFINICIONES GENERALES:

Ciertas esferas cerradas en un espacio Euclidiano 3-dimensional, por ejemplo la esfera y el toroide, están contenidas en una porción finita de espacio; otros tales como el paraboloides, se extienden al infinito. El término compacto está propuesto para superficies en las categorías de arriba. La noción topológica de compacidad está basada en esto. Sin embargo se requiere una definición más estricta, esto es, una definición que no dependa del espacio circundante como la idea intuitiva anterior.

Primero consideraremos subconjuntos que sean cerrados y acotados en un espacio Euclidiano. Por un estudio de estos conjuntos nosotros obtenemos una caracterización de la compacidad en términos de conjuntos abiertos y podemos llegar a una definición estricta de compacidad aplicable a espacios topológicos en general.

En cualquier espacio métrico  $M$ , un subespacio  $X$ , con la topología inducida, decimos que es acotado si existe  $k > 0$  tal que  $d(P, Q) \leq k$  para todo  $P, Q$  pertenecientes a  $X$ . Por ejemplo la esfera unidad en  $R^3$  ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) en un espacio Euclidiano 3 dimensional, está acotada, porque la distancia entre dos puntos sobre la superficie es a lo sumo 2.

La propiedad de estar acotado o limitado, no tiene significación en espacios topológicos, en general, no es un invariante topológico, esto es, no lo usamos DIRECTAMENTE para obtener la definición de compacidad.

Sin embargo, usando el teorema de convergencia de Borel, la propiedad

de ser acotado de un conjunto cerrado en un espacio Euclidiano puede ser relacionada a ciertos sistemas de conjuntos abiertos, que conocemos como cubiertas abiertas, y esto nos da un fundamento para nuestra requerida definición.

Un sistema  $\{W_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de un espacio topológico  $X$  es una cubierta de  $X$  si  $X \cup_{i \in I} W_i$ , esto es si para todo  $x \in X$  existe  $W_i \in \{W_i\}_{i \in I}$  tal que  $x \in W_i$ . En particular, si cada conjunto  $W_i$  es abierto, la cubierta es llamada una "cubierta abierta de  $X$ " y si la cubierta consiste en un número finito de conjuntos, es llamada una cubierta finita.

El sistema de todos los conjuntos abiertos en un espacio topológico, es una cubierta abierta; más general, cualquier base es una cubierta abierta.

Recordemos el teorema de Borel: "Si  $X$  es un espacio cerrado y acotado de un espacio Euclidiano  $n$ -dimensional, entonces cualquier cubierta abierta  $\{O_i\}_{i \in I}$  de  $X$  contiene una subcubierta abierta finita; esto es, de los conjuntos abiertos de  $\{O_i\}$  que cubren a  $X$ , podemos extraer un número finito de conjuntos que cubren a  $X$ ."

En virtud del teorema anterior, nosotros definimos que un espacio topológico  $X$  o un subespacio, es compacto si de cualquier cubierta abierta de  $X$  podemos extraer una cubierta abierta finita. Entoncez podemos concluir que subespacios cerrados y acotados de espacios Euclidianos son compactos.

Para mostrar que la idea intuitiva de compacidad concuerda tanto como

es posible con la definición general dada anteriormente, es necesario probar el inverso del teorema de Borel, es decir si  $X$  es un subespacio compacto de un Espacio Euclidiano, entonces es cerrado y acotado. Esto se sigue de los siguientes teoremas:

- a) "Un subespacio compacto  $X$  de un espacio de Hausdorff es cerrado."
- b) "Un subespacio compacto  $X$  de un espacio métrico  $M$  es acotado."

Como un espacio métrico es un espacio de Hausdorff, los teoremas anteriores implican que un subespacio compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Esto es, en particular, un subespacio compacto de un espacio Euclidiano es cerrado y acotado.

De donde un subespacio de un espacio Euclidiano es compacto si es cerrado y acotado. Sin embargo este resultado no es cierto en espacios métricos en general, el teorema de Borel no es necesariamente cierto para espacios no Euclidianos.

Por ejemplo sea  $M$  infinito, con la métrica

$$d \ni \begin{cases} d & (a, b) = 0 & \text{si } a = b \\ d & (a, b) = 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

El espacio total es acotado ya que la distancia entre cualesquiera dos puntos distintos es igual a 1. Es también cerrado, pero el conjunto fundamental es infinito, esto es no es compacto.

a) Definición de Compacidad= (Bicompacidad)

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{C})$  es compacto (bicompacto) ssi, para toda cubierta abierta  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de  $X$  existe una subcubierta abierta finita.

b) Definición de Compacidad (Sucesional)

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ , se dice que es sucesionalmente compacto cuando toda sucesión de puntos contiene una subsucesión convergente a un punto de éste. Dicho de otra forma cuando para todo conjunto infinito de  $A$  se tiene que  $A' \neq \emptyset$ , donde  $A'$  es el conjunto derivado de  $A$ .

Esta es la noción que se debe a M. Frechet, Rendic, di Palermo 22 (1906) p.6. Y debe notarse que el término "conjuntos compactos" es empleado por diferentes autores en un sentido distinto al empleado por Frechet, ya que se entiende por conjunto compacto, un conjunto en el cual cada sucesión de puntos contiene una subsucesión convergente (pero no necesariamente hacia un punto del conjunto considerado).

Esta definición dejó de ser la más aceptada y usada cuando se vió que la de bicompatidad era más apropiada para el producto de espacios compactos, aunque algunas veces sobre todo para analizar si se tiene la propiedad de compacidad sea ésta, de sucesionalmente compactos más útil.

1. d. DEFINICIONES EQUIVALENTES Y SUS DEMOSTRACIONES

Definiciones:

Una familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos tiene la propiedad de la intersección finita si y solo si la intersección de cada subfamilia finita es no vacía.

Teoremas:

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$  una cubierta.

abierta para  $X$ , entonces la colección de los complementos de los miembros de  $\mathcal{G}$  tiene intersección vacía.

Demostración:

Supongamos que existe  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ , donde los  $C_\alpha = X - B_\alpha \forall \alpha \in I$ , entonces  $x \notin X - C_\alpha$  y, como  $\{X - C_\alpha\} = \mathcal{G}$  esto implica que existe  $x \in X$  tal que  $x \notin \bigcup_{i \in I} B_i$ , obteniendo una contradicción.

$$\therefore \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset.$$

Lema:

Las siguientes proposiciones son equivalentes

- i)  $X$  es compacto.
- ii) Para toda colección  $\mathcal{F}$  de conjuntos cerrados con intersección vacía tal que existe una subcolección  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset \mathcal{F}$  tal que  $\bigcap_{i=1}^n f_i = \emptyset$

Demostración:

Mostraremos primero que ii)  $\implies$  i) Sea  $\mathcal{G}$  una cubierta abierta de  $X$ , por el teorema anterior la familia  $\mathcal{F}$  de los complementos de  $\mathcal{G}$  tiene intersección vacía, por hipótesis existe una subcolección  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{F}$  tal que  $\bigcap_{i=1}^n f_i = \emptyset$  aplicando de DeMorgan tenemos

$$\bigcap_{i=1}^n f_i = \emptyset \subset \{f_i\}$$

$$C_X(\bigcap_{i=1}^n f_i) = C_X \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^n X - f_i = X, \text{ o sea } \bigcup_{i=1}^n G_i = X$$

con esto hemos obtenido una subcubierta finita para  $X$

$\therefore X$  es compacto.

Ahora demostraremos que  $i) \Rightarrow ii)$

Sea  $X$  compacto y  $\{F_i\}_{i \in I}$  una colección de conjuntos cerrados con intersección vacía. Como  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$  por de Morgan

$$C_X \bigcap_{i \in I} F_i = C_X \emptyset$$

$$\bigcup_{i \in I} X - F_i = X$$

$\therefore \{X - F_i\}$  es una cubierta

abierta de  $X$ . Por hipótesis  $X$  es compacto, lo que implica que existe

$\{X - F_i\} \supset \{X - F_1, X - F_2, \dots, X - F_n\}$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^n X - F_i = X \quad \text{por de Morgan.}$$

$$C_X \bigcup_{i=1}^n X - F_i = C_X X$$

$$\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset \quad //$$

### Teorema:

Un espacio  $(X, \mathcal{C})$  es compacto ssi para cualquier familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita,  $\mathcal{F}$  tiene intersección no vacía.

### Demostración:

a) Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos cerrados en un espacio compacto  $(X, \mathcal{C})$ . Asuma que la intersección de todos los miembros de  $\mathcal{F}$  es vacía. Queremos concluir que  $\mathcal{F}$  no tiene la propiedad de la intersección finita.

La colección de conjunto  $\mathcal{A} = \{X - A \mid A \in \mathcal{F}\}$  es cubierta del espacio compacto  $(X, \mathcal{C})$ . Entonces existe una subcubierta finita de  $\mathcal{A}$ , o sea que existen  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \ni \{X - A_1, X - A_2, \dots, X - A_n\}$  cubren a  $X$ :  $\bigcup_{k=1}^n X - A_k = X$  entonces.

Por De Morgan  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n = \emptyset$

$\therefore \mathcal{F}$  no tiene la propiedad de la intersección finita.

b) Sea  $\mathcal{b}$  cualquier cubierta abierta de  $X$  y considere la familia

$\mathcal{F} = \{X - \mathcal{O}_i \mid \mathcal{O}_i \in \mathcal{b}\}$  Como  $\mathcal{b}$  es cubierta abierta vemos que la intersección de todos los miembros de  $\mathcal{F}$  es vacía. Usando de Morgan,  $\mathcal{F}$  no tiene la propiedad de intersección finita. O sea que hay un número finito de abiertos

$\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \ni X - \mathcal{O}_1, \dots, X - \mathcal{O}_n$  por de Morgan  $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n\}$

es una subcubierta de  $X$  en  $\mathcal{b} \therefore (X, \mathcal{b})$  es compacto.

Teorema

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{b})$  es compacto ssi cada red en  $X$  tiene un punto de acumulación.

Demostración:

Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{D}}$  una red en un espacio topológico compacto  $X$ , y para toda  $n \in \mathbb{D}$ , sea  $A_n$  el conjunto de todos los puntos  $S_m$  para  $m \geq n$ . Entonces la familia  $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{D}}$  tiene la propiedad de la intersección finita, porque  $\mathbb{D}$  está dirigido por  $\geq$ , y por consecuencia la familia de todos los conjuntos  $A_n$  también tiene la propiedad de la intersección finita.

Como  $X$  es compacto existe un punto  $s \ni s \in \overline{A_n} \forall n$  por teorema: " sea

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{D}}$  una red en un espacio topológico  $X$  y  $\forall n \in \mathbb{D}$  sea  $A_n$  el conjunto de todos los puntos  $S_m \forall m \geq n$ . Entonces  $s$  es un punto de acumulación de  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{D}}$  ssi  $s \in \overline{A_n} \forall n \in \mathbb{D}$

$\therefore s$  es un punto de acumulación

ii) Sea  $(X, \tau)$  un espacio en el cual toda red tiene un punto de acumulación y sea  $\mathcal{A} = \{\bar{A}_n\}$  una familia de subconjuntos cerrados de  $X$  que tiene la propiedad de la intersección finita. Definimos  $\mathcal{B}$  como la familia de todas las finitas intersecciones de los miembros de  $\mathcal{A}$ ; entonces  $\mathcal{B}$  tiene la propiedad de intersección finita y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ; nos basta mostrar que  $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$  es no vacía.

La intersección de dos miembros de  $\mathcal{B}$  es un miembro de  $\mathcal{B}$  y por lo tanto  $\mathcal{B}$  está dirigido por la contención. Si escogemos  $S_\alpha \in \mathcal{B}$ , entonces  $\{S_\alpha\}$  es una red en  $X$  y por consecuencia tiene un punto de acumulación  $s$ . Si  $B_\alpha \in \mathcal{B} \ni B_\gamma \subset B_\alpha$  entonces  $S_\gamma \subset B_\gamma \subset B_\alpha$  y por lo tanto  $\{S_\alpha\}$  está eventualmente en el conjunto cerrado  $B_\alpha$  y por lo tanto el punto de acumulación  $s \in B_\alpha$ .

$$\therefore s \in B_\alpha \quad \forall \alpha \implies \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \neq \emptyset.$$

Consecuencia:

$X$  es compacto así toda red en  $X$  tiene una subred que converge a algún punto de  $X$ .

Definición

Un punto  $x$  es un  $\omega$ -punto de acumulación de un conjunto  $A$  si cada vecindad de  $x$  contiene infinitos puntos de  $A$ .

Lema:

Cada espacio topológico tiene un punto de acumulación así cualquier conjunto infinito tiene un punto de  $\omega$ -acumulación.

Lema:

Si  $X$  es un espacio de Lindelof y cada sucesión en  $X$  tiene un punto de acumulación, entonces  $X$  es compacto.

Demostración:

Es necesario mostrar que cada cubierta abierta de  $X$  tiene una subcubierta abierta finita. Por ser  $X$  espacio de Lindelöf se puede suponer que una cubierta abierta está formada por  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  para  $n \in \omega$

Por un procedimiento inductivo; sea  $B_0 = A_0$  y para todo  $p \in \omega$ , sea  $B_p$  es el primero de la sucesión de  $A_s$  que no es cubierto por  $B_0 \cup B_1, \dots, B_{p-1}$ .

Por otra parte es posible seleccionar un punto  $b_p \in B_p$  para cada  $p \in \omega$ ,  $b_p \notin B_i$  para  $i < p$ . Sea  $x$  un punto de acumulación de la sucesión. Entonces  $x \in B_p$  para algún  $p$  y como  $x$  es un punto de acumulación,  $b_q \in B_p$  para algún  $q > p$ . Pero esto es una contradicción.

$\therefore X$  es compacto

Teorema:

Si  $X$  es un espacio topológico entonces las condiciones de abajo se relacionan como sigue: Para todo espacio (a) es equivalente (b) y (d) implica (a). Si  $X$  satisface el primer axioma de contabilidad, entonces (a), (b) y (c) son equivalentes. Si  $X$  satisface el segundo axioma de contabilidad, entonces las cuatro condiciones son equivalentes. Si  $X$  es pseudométrico, entonces cada una de las cuatro condiciones implica que  $X$  satisface el segundo axioma de contabilidad y las cuatro son equivalentes.

- (a) Cada subconjunto infinito de  $X$  tiene un punto de  $\omega_1$ -acumulación.
- (b) Cada sucesión en  $X$  tiene un punto de acumulación.
- (c) Para cada sucesión en  $X$   $\exists$  una subsucesión convergente a un punto de  $X$ .
- (d) El espacio  $X$  es compacto.

Teorema: (Alexander):

Si  $\mathcal{B}$  es una subbase para la topología  $\tau$  de el espacio topológico  $(X, \tau)$ ,  $\Rightarrow$  cada cubierta de  $X$  formada por los miembros de  $\mathcal{B}$  tiene una subcubierta finita. Entonces  $X$  es compacto.

Demostración:

Para ser breves acordemos que una familia de subconjuntos de  $X$  es inadecuada ssi no cubre a  $X$ , y es finitamente inadecuada si una subfamilia finita no cubre a  $X$ .

Entonces de la definición de compacidad de  $X$  podemos establecer: cada familia finitamente inadecuada de conjuntos abiertos es inadecuada. Observe que la clase de familias finitamente inadecuadas de conjuntos abiertos está contenida en una familia maximal por el lema de Tukey's: "Existe un miembro maximal en cada familia de carácter finito no vacía." Tal que la familia maximal finitamente inadecuada  $\mathcal{A}$  tiene una especial propiedad que es establecida como sigue:

Si  $C \in \mathcal{A}$  y  $C$  es abierto, entonces por la propiedad maximal existe

una subfamilia finita  $A, A_2 \dots A_n \in \mathcal{A}$ ;  $CUA_1, UA_2 \dots UA_n = X$ . Por lo tanto ningún conjunto abierto que contenga a  $C$  pertenece a  $\mathcal{A}$ . Si  $D$  es otro conjunto abierto y  $D \in \mathcal{A}$ , entonces existen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ ;  $DU B_1, \dots, UB_n = X$  & (CND)  $UA_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \dots \cup B_n = X$  por simples cálculos de teoría de conjuntos. De esto se sigue que  $CND \notin \mathcal{A}$ .

∴ Si ningún miembro de una familia finita de conjuntos abiertos pertenece a  $\mathcal{A}$ . Entonces ningún conjunto abierto conteniendo la intersección pertenece a  $\mathcal{A}$ ; en otras palabras, si un miembro de  $\mathcal{A}$  contiene una intersección finita  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \dots \cap C_p$  de conjuntos abiertos, entonces

Demostración:

Supónganse que  $\mathcal{B}$  es una subbase tal que cada cubierta abierta de elementos de la subbase tiene una subcubierta finita (esto es, cada subfamilia finitamente inadecua) y supóngase que  $\mathcal{D}$  es una familia finitamente inadecua de subconjuntos abierto de  $X$ . Entonces existe una familia maximal  $\mathcal{A}$  de suerte que contiene a  $\mathcal{D}$  y esto es suficiente para mostrar que  $\mathcal{A}$  es inadecuada. La familia  $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$  de todos los miembros de  $\mathcal{A}$  que pertenecen a  $\mathcal{D}$  es finitamente inadecuada y por lo tanto  $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$  no es una cubierta para  $X$ . Solamente falta probar que cada punto  $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$  pertenece a  $\bigcup \{A \mid A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}\}$  A causa de que  $\mathcal{D}$  es una subbase en cada punto  $x$  de un miembro  $A$  de  $\mathcal{A}$  pertenece a alguna intersección finita de miembros de  $\mathcal{D}$  que está contenida en  $A$ . El párrafo abajo muestra que alguna de estas familias finitas pertenece a  $\mathcal{A}$

$$\therefore \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}\}$$

1.V. SENTIDO DE LA DEFINICION PARA SUBCONJUNTOS:

Existen dos criterios diferentes para definir la compacidad de subconjuntos, estos criterios son:

a) Definición: Un subconjunto  $K \subset X$  es compacto en  $(X, \tau)$  si el subespacio formado por  $K$  y la topología relativa es compacto.

b) Definición: Un subconjunto  $K \subset X$  es sucesionalmente compacto cuando  $K$  es un conjunto en el cual cada sucesión en  $K$  contiene una subsucesión convergente (pero no necesariamente a un punto del conjunto considerado).

1.VI. DEFINICIONES DE CLASES DIFERENTES DE COMPACIDAD:

a) Espacios contablemente compactos: Un espacio es contablemente compacto ssi cada sucesión de puntos tiene un punto de acumulación (por esto, si cada sucesión tiene una subred convergente).

b) Definición de subconjunto compacto: Sea un subconjunto  $K$  de  $X$ ,  $K$  es compacto ssi de toda cubierta abierta en  $K$  se puede extraer una subcubierta abierta finita.

c) Definición de Espacio Compacto Maximal: Un espacio compacto  $(X, \tau)$  es maximal si toda topología  $\tau'$  estrictamente mayor que  $\tau$ , es decir  $\tau \subset \tau'$  no es compacta.

d) Definición de Espacio Sucesionalmente compacto: Un espacio  $X$  es sucesionalmente compacto si cada sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente.

e) Definición de Espacios Real-compactos: Todo espacio de Hausdorff es Tychonoff. Es decir está inmerso en algún cubo. Esto hace claro que un

espacio  $X$  es compacto y de Hausdorff, si puede ser inmerso en un subconjunto cerrado  $S \subset I^I$  (donde  $I = [0, 1]$ ). Y esto conduce a la definición:  $X$  es real-compacto si puede ser inmerso en un subconjunto cerrado de algún producto de la línea Real,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ .

f) Definición de  $\mathcal{C}$ -compactos: Un espacio se dice que es  $\mathcal{C}$ -compacto si puede ser escrito como la unión contable de muchos subconjuntos compactos.

g) Definición de Espacios hemicompactos: Un espacio  $X$  se dice que es hemicompacto (o denumerable al infinito), si existe una sucesión  $K_1, K_2, \dots$  de subconjuntos compactos de  $X$  tal que si  $K$  es cualquier subconjunto compacto de  $X$  entonces  $K \subset K_n$  para algún  $n$ .

h) Definición de Espacios Pseudocompactos: Un espacio  $X$  es pseudocompacto si toda función continua de valor real en  $X$  es acotada.

i) Definición de espacios numerablemente compactos: Se dice que  $(X, \mathcal{C})$  es numerablemente compacto, si de cualquier cubierta abierta numerable se puede extraer una cubierta abierta finita.

Nota: La compacidad numerable  $\Leftrightarrow 2^o$  axioma de numerabilidad  $\mathcal{C}$  compacidad.

j) Definición de Espacios Localmente compactos: Un espacio  $(X, \mathcal{C})$  es localmente compacto en un punto  $P \in X$  ssi  $P$  tiene por lo menos una vecindad compacta en  $X$ .

Un espacio es localmente compacto ssi es localmente compacto en todos sus puntos.

k) Definición de Espacios Paracompactos: Un espacio  $(X, \mathcal{C})$  se dice que es Paracompacto ssi toda cubierta de  $X$  tiene un refinamiento abierto localmente finito, es decir un refinamiento que es una cubierta abierta localmente finita de  $X$ .

Nota: SE DICE que una familia de subconjuntos es localmente finita si para cada  $x \in X$  cada  $V_x$ ,  $V_x$  intersecciona un número finito de elementos de conjuntos de la colección.

UNIDAD # 2. DEFINICIONES MENOS GENERALES

2. I. DEFINICIONES PARA: a) LA TOPOLOGIA DE LA RECTA REAL

b) LA TOPOLOGIA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

2.II. Espacios Sucesionalmente compactos. Propiedades de Bolzano-Weierstrass

2.III. Espacios Compactos-contables. Teorema de Lindelöf

2. IV. Espacios Localmente Compactos

2. V. Espacios Paracompactos

2. I. a) DEFINICIONES PARA LA RECTA REAL:

DEFINICION:

Un subconjunto  $K$  de la recta real  $\mathbb{R}$  es compacto si para cada cubierta  $\{A_i\}_{i \in I}$  de  $K$  con conjuntos abiertos  $A_i$  existe una familia finita  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$  que cubre a  $K$ .

DEFINICION EQUIVALENTE:

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}$  es compacto si y sólo si, para cada familia

$\{F_i\}_{i \in I}$  de conjuntos cerrados  $F_i$  tales que  $(\bigcap_{i \in I} F_i) \cap K = \emptyset$ ,

existe una subfamilia finita.

$F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_n}$  tal que  $(\bigcap_{k=1}^n F_{i_k}) \cap K = \emptyset$ .

Por la proposición que dice: "Un subconjunto  $F \subset K$  es cerrado

relativo a  $X$  si y sólo si, es la traza sobre  $X$  de un subconjunto cerrado

de  $\mathbb{R}$ . ① Se puede decir que  $K$  es compacto ssi, para cada familia  $\{F_i\}_{i \in I}$

de conjuntos  $F_i \subset K$  cerrados relativos a  $K$  tales que  $\bigcap F_i = \emptyset$ ,

existe una subfamilia.  $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots$  tal que  $(\bigcap_{k=1}^n F_{i_k}) \cap K = \emptyset$

Utilizando la propiedad de los números reales que dice: "que  $\forall a$

existe una sucesión de vecindades particulares  $\{O_n\}$ , a saber, los

intervalos  $[a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}]$  tales que cada vecindad del punto  $a$  contiene

por lo menos una vecindad  $O_n$ ." Se puede dar una forma un poco más sencilla

a las características hasta ahora descritas.

Se llama traza de  $A$  sobre  $X$  al conjunto  $A \cap X$  considerado

① Nota: como subconjunto de  $X$ . Donde  $X$  es un subconjunto fijo de  $\mathbb{R}$ . y  $A$  cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

Proposición:

Sea  $K$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Las siguientes proposiciones son equi-

valentes:

a)  $K$  es compacto

b) Para cualquier sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \ni \{A_n\}$  es una cubierta abierta de subconjuntos de  $K$  abiertos relativos a  $K$ , que verifican  $A_n \subset A_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = K$ , existe un índice  $s \in \mathbb{N} \ni A_s = K$

c) Para cualquier sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $K$  cerrados relativos a  $K$ , que verifican  $F_n \supset F_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset \neq \emptyset$  un índice  $s \in \mathbb{N} \ni F_s = \emptyset$

Demostración:

i) En primer lugar, la condición (a) implica las condiciones (b) y (c). En efecto, si  $K$  es compacto, entonces existe una subfamilia finita

$A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_m}$  de  $\{A_n\} \ni \bigcup_{k=1}^m A_{n_k} = K$  y respectivamente una familia finita  $F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_m}$  de  $\{F_n\} \ni \bigcap_{k=1}^m F_{n_k} = \emptyset$  Tomando para  $s$  el mayor de los enteros  $n_1, \dots, n_m$  se tiene  $A_s \supset A_{n_k}$  y  $F_s \subset F_{n_k}$  para  $1 \leq k \leq m$ ,

es decir,  $A_s = \bigcup_{k=1}^m A_{n_k} \quad \& \quad F_s = \bigcap_{k=1}^m F_{n_k}$

ii) Demostraremos ahora que las condiciones (b) y (c) son equivalentes. En efecto por De Morgan tenemos que si hacemos  $F_n = X - A_n$ , las

condiciones  $A_n \subset A_{n+1} \quad \& \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = K$  se vuelven equivalentes respectivamente a  $F_n \supset F_{n+1} \quad \& \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$  y además los conjuntos  $F_n$  son cerrados relativos a  $K$  ya que  $A_n$  es abierto relativo a  $K$  y finalmente  $A_s = K$  es lo mismo que decir  $F_s = \emptyset$ .

iii) Falta demostrar que b)  $\implies$  a). Supóngase que (b) es cierto y sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una cubierta abierta de  $K$ , o sea que  $A_\alpha$  son abiertos

a  $K$ . Consideremos  $\lambda$  como un índice fijo y  $x$  un punto de  $A_\lambda$ . Puesto que  $A_\lambda$ , es abierto relativo a  $K$ ,  $\exists$  un intervalo  $I = (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}) \Rightarrow I \cap K \subset A_\lambda$  donde  $k$  es un número entero  $\geq 1$ . Además,  $\exists$  un número racional  $r, |x-r| < \frac{1}{2k}$  y por consiguiente  $x \in (r - \frac{1}{2k}, r + \frac{1}{2k}) = I_r; I_r \cap K \subset A_\lambda$ .

Ahora bien los conjuntos  $(r - \frac{1}{2k}, r + \frac{1}{2k}) \cap K$ , donde  $r \in \mathbb{Q}$  y  $k \in \mathbb{N}; k \geq 1$ , que están contenidos en algún conjunto  $A_\lambda$  forman una colección numerable, ya que  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N}$  son conjuntos numerables. Desde luego, es posible ordenarlos en una sucesión que llamaremos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Los conjuntos  $B_n$  son abiertos relativos a  $K$ . Por hipótesis, cada punto  $x \in K$  está contenido en algún  $B_n$ ; por lo tanto  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento de  $K$ . Si para cada  $n \in \mathbb{N}$  escribimos  $C_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$ , entonces  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una cubierta o un recubrimiento para  $K$ , los conjuntos  $C_n$  son abiertos relativos a  $K$  y se cumple que  $C_n \subset C_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

Por hipótesis, existe un índice  $s \in \mathbb{N} \ni C_s = K$  es decir  $\bigcup_{k=0}^s B_k = K$ . Si a cada índice  $k$  con  $0 \leq k \leq s$  se hace corresponder un conjunto  $A_k$  que contiene a  $B_k$ , entonces la familia  $\{A_k\}_{0 \leq k \leq s}$  cubre a  $K$ , lo que muestra que  $K$  es compacto.

Proposición:

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}$  es compacto ssi, para cada sucesión  $\{x_n\}$  de puntos  $x_n \in K$  existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  que converge a un punto de  $K$ .

Demostración:

Obsérvese en primer lugar que  $\{x_n\}$  tiene una subsucesión que

Consideramos un espacio vectorial  $V$  sobre el cuerpo  $K$ .

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Supongamos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes.

Entonces, cualquier vector  $v \in V$  puede escribirse como combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ . Si  $v = 0$ , entonces  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Por otro lado, si  $v \neq 0$ , entonces al menos uno de los  $\alpha_i$  es distinto de cero.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Si  $\alpha_1 \neq 0$ , podemos dividir por  $\alpha_1$  y obtener:

Supongamos, por ejemplo, que  $\alpha_1 \neq 0$ .

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Entonces,  $v - \alpha_1 v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ .

Esto muestra que  $v - \alpha_1 v_1$  pertenece al subespacio generado por  $v_2, \dots, v_n$ .

Por lo tanto,  $v$  pertenece al subespacio generado por  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

$$v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Como  $v$  era un vector arbitrario de  $V$ , concluimos que:

$$V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Es decir,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  forman una base de  $V$ .

Por lo tanto, cualquier vector  $v \in V$  puede escribirse de manera única como combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  son los coeficientes de la combinación lineal.

Esto demuestra que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son una base de  $V$ .

En consecuencia, el número de vectores en una base de  $V$  es  $n$ .

Este número  $n$  se denomina dimensión del espacio vectorial  $V$ .

Demostración:

i) Sea  $K$  un subconjunto acotado y cerrado, entonces por el teorema de Heine-Borel dada una cubierta abierta de  $K$ , siempre se puede extraer una cubierta abierta finita.

ii) Sea  $K \subset \mathbb{R}$  un subconjunto compacto esto implica que  $K$  es cerrado y acotado, ya que:

i') Como  $(K, d)$  es un espacio de Hausdorff por el teorema que dice que todo espacio de Hausdorff y compacto es cerrado  $\therefore K$  es cerrado.

ii') Sea  $\{(-n, n)\}$  es una cubierta abierta para  $K$  como  $K$  es subconjunto compacto, puedo seleccionar una subcubierta abierta finita  $\{(-N, N), (-[N-1], [N-1]) \dots (-1, 1)\}$  donde  $N$  es una cota de  $K \therefore K$  es acotado. //

El hecho de satisfacer cada conjunto cerrado y acotado de la recta real a la condición de: "un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}$  es compacto ssi, para cada sucesión  $\{x_n\}$  de puntos  $x_n \in K \exists$  una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  que converge hacia un punto de  $K$ ." es muy clásico y se llama a veces Teorema de Balzano-Weirestrass.

El hecho de implicar la condición de la proposición anterior, se le llama teorema de Borel-Lebesgue por algunos autores y teorema de Heine-Borel por otros.

Finalmente la proposición que dice: "Un subconjunto  $K$  de es compacto ssi, para cada familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de conjuntos cerrados

$\mathcal{F}_0 \Rightarrow (\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha) \cap K = \emptyset$  existe una subfamilia finita  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$   
 tal que  $(\bigcap_{k=1}^m \mathcal{F}_k) \cap K = \emptyset$  se suele llamar teorema de intersección de Cantor.

2. I. b) DEFINICIONES PARA EL ESPACIO EUCLIDIANO

DEFINICION:

Un subconjunto  $K$  del espacio numérico  $\mathbb{R}^p$  se dice compacto si,  
 para cada recubrimiento  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de  $K$  con conjuntos abiertos  $A_\alpha$ ,  
 existe una subfamilia finita  $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_m}$  que cubre a  $K$ .

En virtud de la proposición: (un subconjunto  $A$  de  $X$  es abierto  
 relativa a  $X$  ssi, es la traza sobre  $X$  de un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^p$ ,"  
 la definición anterior equivale a decir que  $K$  es compacto si para cada  
 recubrimiento  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de  $K$  conjuntos  $A_\alpha \subset K$ , abiertos relativos a  $K$ ,  
 existe una subfamilia finita  $\{A_{\alpha_k}\}_{0 \leq k \leq n}$  que cubre a  $K$ .

Proposición:

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^p$  es compacto si y solo si para cada familia  
 $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de conjuntos cerrados  $\mathcal{F}_\alpha \Rightarrow (\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha) \cap K = \emptyset$  existe una  
 subfamilia finita  $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \mathcal{F}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_m}$  tal que  $(\bigcap_{k=1}^m \mathcal{F}_{\alpha_k}) \cap K = \emptyset$   
 se puede decir: que  $K$  es compacto ssi para cada familia  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$   
 de conjuntos  $\mathcal{F}_\alpha \subset K$  cerrados relativos a  $K$ , tal que  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha = \emptyset$ , existe  
 una subfamilia finita  $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \mathcal{F}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_m}$  tal que  $\bigcap_{k=1}^m \mathcal{F}_{\alpha_k} = \emptyset$

Proposición:

Sea  $K$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^p$ , las siguientes proposiciones son  
 equivalentes.

- a)  $K$  es compacto.
- b) Para cualquier sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $K$  abiertos relativos a  $K$ , que verifican  $A_n \subset A_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = K$ , existe un índice  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $A_s = K$ .
- c) Para cualquier sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $K$ , cerrados relativos a  $K$ , que verifican  $F_n \supset F_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ , existe un índice  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $F_s = \emptyset$ .

Proposición:

Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^p$  es compacto ssi para cada sucesión de puntos  $x_n \in K$  existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  que converge hacia un punto de  $K$ .

Teorema:

Un subconjunto de un  $n$ -espacio Euclidiano  $E^n$ , es compacto ssi es cerrado y acotado.

Demostración:

i) Sea  $A$  un subconjunto compacto de  $E^n$ . Entonces  $A$  es cerrado porque  $E^n$  es de Hausdorff. Por la compacidad de  $A$ ,  $A$  puede ser cubierto con una familia de esferas abiertas de radio 1, y como cada esfera es acotada  $\Rightarrow A$  es acotado.

ii) Por otra parte suponemos  $A \subset E^n$  cerrado y acotado. Sea  $B_i$  la imagen de  $A$  bajo la proyección sobre el  $i$ -avo espacio ordenado. Note que cada  $B_i$  es acotado porque las proyecciones acortan distancias. Entonces  $A \subset \prod_{i=0,1,\dots,n} B_i$  y este conjunto es un subconjunto de un producto de intervalos acotados y cerrados de  $E$ ,  $(E_i)$ .

Entonces la demostración se reduce a demostrar que  $[a, b]$  es compacto (por el teorema de Tychonoff).

Sea  $\mathcal{b}$  una cubierta abierta de  $[a, b]$  y sea  $c$  el supremo de todos los miembros  $x$  de  $[a, b]$  tal que una subfamilia finita de  $\mathcal{b}$  cubre a  $[a, x]$  (este conjunto no es vacío porque  $a \in \mathcal{b}$  todos los miembros). Escoja  $U$  en  $\mathcal{b}$ , tal que,  $c \in U$  y escoja un miembro  $d$  del intervalo  $(a, c) \Rightarrow [d, c] \subset U$ .

Hay una subfamilia de  $\mathcal{b}$  que cubre a  $[a, d]$  y ésta junto con  $U$  cubren a  $[a, c]$ .

A menos que  $c$  sea igual a  $b$  la misma subfamilia finita cubre a un intervalo a la derecha de  $c$ , lo cual contradice la elección de  $c$  (porque  $c$  era el supremo y también es abierto).

$\therefore A$  es compacto.

Comentario: El teorema de Heine-Borel es una aplicación de este teorema (Heine-Borel-Lebesgue).

## 2. I. C. DEFINICION PARA LA TOPOLOGIA DE ESPACIOS METRICOS:

### DEFINICION:

Se dice que un espacio métrico  $E$  es compacto si para cada recubrimiento  $\{A_i\}_{i \in I}$  de  $E$  con conjuntos abiertos  $A_i$  existe una subfamilia finita  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$  que cubre  $E$ . Se dice que un subconjunto  $K$  de un espacio métrico es compacto si, provisto de la métrica inducida es un espacio compacto.

Nota: Métrica Inducida:

Sea E un espacio métrico y X un subconjunto de E. Denotemos por d la métrica sobre E. Hay una manera muy natural de definir una métrica  $d_x$  sobre el conjunto X : para cada pareja de puntos  $x, y \in X$  se pone  $d_x(x, y) = d(x, y)$ . Es evidente que  $d_x$  satisface las condiciones para una métrica. De esta manera X se vuelve un espacio métrico y  $d_x$  se llama la métrica inducida sobre X .

Proposición:

Sea E un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) E es compacto.
- ii) Para cada familia  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de conjuntos cerrados  $F_\alpha$  tal que  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset$ , existe una subfamilia finita  $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_m}$   $\ni \bigcap_{k=1}^m F_{\alpha_k} = \emptyset$
- iii) Para cualquier sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos abiertos de E tal que  $A_n \subset A_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  &  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E$  existe un índice  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $A_s = E$
- iv) Para cualquier sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos cerrados de E tal que  $F_n \supset F_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  &  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$  existe un índice  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $F_s = \emptyset$
- v) Toda sucesión de puntos de E tiene una subsucesión convergente.

Proposición:

Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado y cerrado. Pero la inversa ya no es cierta en espacios métricos, como lo veremos más adelante con un ejemplo.

2. II. ESPACIOS SECUENCIALMENTE COMPACTOS. PROPIEDAD DE BOLZANO WEIRESTRASS

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es secuencialmente compacto si para toda sucesión en  $A$  contiene una subsucesión que converge a un punto de  $A$ .

En general existen conjuntos compactos que no son secuencialmente compactos y vice versa, sin embargo en espacios métricos son equivalentes. Históricamente los espacios métricos fueron investigados antes que los espacios topológicos, de aquí la razón por la cual la compacidad secuencial se usa algunas veces como sinónimo del término compacto.

DEFINICION: PROPIEDAD DE BOLZANO WEIRESTRASS:

Se dice que un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  tiene la propiedad de Bolzano-Weirestrass si para toda familia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $\{x_n\}$  tiene puntos de acumulación.

Teorema:

Sea  $E$  un subespacio topológico del espacio  $(X, \mathcal{T})$  con la propiedad de que cada colección infinita de subconjuntos de  $E$  tiene un punto de acumulación en  $E$ . Entonces toda cubierta abierta contable de  $E$  tiene una subcubierta finita.

Demostración:

Asumamos que una subcubierta abierta contable de  $E$  está dada en la forma de una sucesión  $\{O_1, O_2, O_3 \dots O_n \dots\}$  de subconjuntos abiertos de  $X$  tales que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n.$$

Supóngase que  $E$  no está cubierto por ninguna subcolección finita.

Entonces para cada entero  $K$ , el conjunto  $O_K^* = \bigcup_{n=1}^K O_n$  no cubre a  $E$ .

De donde para cada entero  $K$  existe un punto  $x_K \in E$  tal que  $x_K \notin O_K^*$ .

Entonces el subconjunto  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  de  $E$  debe ser infinito. Sea  $x \in E$  un punto de acumulación de  $A$ .

Como  $x \in E$ ,  $x \in O_p$  para algún índice  $p$ .  $O_p$  es una

vecindad de  $x$  y también muchos de los infinitos puntos de  $A$  pertenecen a  $O_p$ .

En particular para algún  $k > p$ . Tendremos que  $x_k \in O_p \subset O_p^* \subset O_k^*$

contradiciendo la forma en que escogemos  $x_k$ .

De donde debe existir una subcolección finita de abiertos de

$\{O_1, \dots, O_n, \dots\}$  que cubra a  $E$ .

$\therefore E$  es compacto.

Teorema:

Un espacio topológico satisface la propiedad de Bolzano-Weierstrass si y solo si es numerablemente compacto.

2. III. ESPACIOS CONTABLEMENTE COMPACTOS:

DEFINICION:

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es contablemente compacto si todo conjunto infinito  $B$  de  $A$  contiene un punto de acumulación en  $A$ .

La relación entre compacto, secuencialmente compacto y contablemente compacto está dada por el siguiente diagrama:

compacto  $\longrightarrow$  contablemente compacto  $\longleftarrow$  secuencialmente compacto.

y por el teorema que dice: Sea  $A$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$ .

Si  $A$  es compacto o secuencialmente compacto, entonces también es contablemente compacto.

Definición:

Se dice que  $(X, \mathcal{C})$  es numerablemente compacto si de cualquier cubierta abierta numerable se puede extraer una cubierta abierta finita.

Nota: La compacidad numerable  $\iff$   $2_0$  axioma de numerabilidad y compacto.

Teorema:

Un espacio topológico es numerablemente compacto si para toda colección  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  numerable de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Las demostraciones de estos teoremas se hacen en la misma forma que para el caso general.

Teorema de Lindelöf:

En todo espacio segundo contable toda cubierta abierta posee una subcubierta abierta contable.

Demostración:

Supongamos  $A$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  es una cubierta de  $A$ , sea  $\mathcal{B}$  una base contable para la topología. Debido a que cada miembro de  $\mathcal{A}$  es la unión de miembros de  $\mathcal{B}$  existe una subfamilia  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{B}$  la

cual también cubre a  $A$ , tal que cada miembro de  $\mathcal{b}$  es un subconjunto de algún miembro de  $\mathcal{A}$ . Para cada miembro de  $\mathcal{b}$  nosotros podemos seleccionar un miembro de  $\mathcal{A}$  que lo contenga así obtenemos una subfamilia contable  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{A}$ . Entonces  $\mathcal{D}$  es también una cubierta de  $A$  porque  $\mathcal{b}$  cubre a  $A$ . De donde  $\mathcal{A}$  tiene una subcubierta contable.

## 2. IV. ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS:

### DEFINICION:

Un espacio es localmente compacto en un punto  $p \in X$  ssi  $p$  tiene por lo menos una vecindad compacta en  $X$ .

Un espacio  $(X, \mathcal{C})$  es localmente compacto ssi es localmente compacto en todos sus puntos.

Es conveniente notar que la compacidad local no implica la compacidad, por ejemplo los  $\mathbb{R}'$ . En otras palabras, podemos decir que el inverso sí es verdadero, esto es, que todo espacio compacto si es localmente compacto.

### Teorema:

Todo subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.

### Demostración:

Sea  $E$  un subespacio cerrado de un espacio localmente compacto sea  $p$  un punto arbitrario de  $E$ . Como  $X$  es localmente compacto en  $p$  existe una vecindad compacta de  $p$ ,  $V_p$  en  $X$ . Sea  $H_p = V_p \cap E$ . Como  $H_p$  es

un subconjunto cerrado de  $X$ ,  $H_p$  es compacto.

$\therefore \forall p \in E \exists H_p \ni H_p$  es compacta

$\therefore E$  es localmente compacto.

## 2. V. DEFINICION DE ESPACIOS PARACOMPACTOS:

Los espacios paracompactos fueron introducidos por primera vez por Dieudonné en 1944 como una generalización natural de los espacios compactos, reteniendo todavía suficiente estructura para poseer muchas de las propiedades de los espacios compactos, y ser suficientemente general para incluir una más vasta clase de espacios. La noción de paracompacidad tomó importancia con la demostración de A. H. Stone, de que cada espacio métrico es paracompacto y la utilización de este resultado en la solución de problemas de metrización por Bing, Nagata y Smirnov.

### DEFINICION:

Un espacio  $(X, \mathcal{C})$  se dice que es Paracompacto ssi toda cubierta abierta de  $X$  tiene un refinamiento abierto localmente finito, es decir un refinamiento que es una cubierta abierta localmente finita de  $X$ .

### Nota:

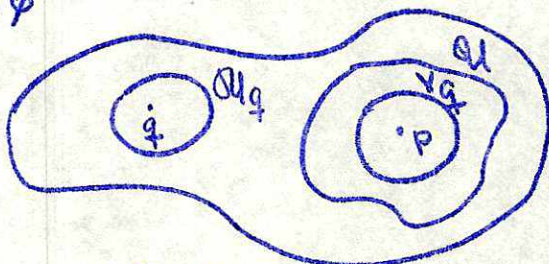
Todo espacio  $(X, \mathcal{C})$  compacto es también paracompacto.

### Teoremas:

Todo espacio paracompacto de Hausdorff es regular.

Demostración:

Sea  $X$  un espacio paracompacto de Hausdorff y sea  $U$  una vecindad abierta de un punto  $p$  en  $X$ . Para cada  $q$  de  $U^c$ , escoja abiertos  $\mathcal{O}_q$  y  $V_q$  de  $X$  con las propiedades de que  $q \in \mathcal{O}_q$  &  $p \in V_q$  tales que  $\mathcal{O}_q \cap V_q = \emptyset$



Los abiertos  $\{\mathcal{O}_q \mid q \in U^c\}$  junto con  $U$  forman una cubierta abierta  $\mathcal{L}$  de  $X$ . Por definición, como  $X$  es paracompacto,  $\mathcal{L}$  tiene un refinamiento abierto  $\mathcal{D}$  que es localmente finito.

Como  $\mathcal{D}$  es localmente finito  $\exists$  una vecindad  $M$  del punto  $p$  que corta solo a los miembros de una subfamilia finita  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{D}$ .

Sean  $W_1, \dots, W_n$  los miembros de  $\mathcal{F}$  que no están contenidos en  $U$ . Entonces existen  $n$  puntos  $q_1, \dots, q_n$  tales que:  $q_i \in U^c$ .

$$W_i \subset \mathcal{O}_{q_i} \text{ para cada } i = 1 \dots n$$

$$\text{Sea } N = M \cap V_{q_1} \cap V_{q_2} \dots \cap V_{q_n}, \quad V = (\bar{N})$$

Falta mostrar que  $V \subset U$ , para ello sea  $W$  la unión de todos los miembros de  $\mathcal{D}$  que no están contenidos en  $U$ . Entonces  $N \cap W \subset [M \cap V_{q_1} \cap \dots \cap V_{q_n}] \cap [\mathcal{O}_{q_1} \cup \mathcal{O}_{q_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{q_n}] = \emptyset$  porque  $V_{q_i} \cap \mathcal{O}_{q_i} = \emptyset$  para toda  $i = 1 \dots n$ .

$\Rightarrow N$ . está contenido en el conjunto cerrado  $X-W$   $\subset U$

$$\therefore \sqrt{N} = (N) \subset X-W \subset U.$$

$X$  es regular.;

Teorema:

Todo espacio paracompacto y regular es normal.

Demostración:

Sea  $X$  un espacio paracompacto y regular y sea  $A$  &  $B$  dos conjuntos ajenos y cerrados de  $X$ . Para cada punto de  $p$  de  $A$  escoja una vecindad cerrada  $M_p$  de  $p$ , en el espacio  $X$  contenida en el conjunto abierto  $E^c$ .

$$\text{Sea } U_p = \text{Int } (M_p)$$

Las abiertas  $\{U_p \mid p \in A\}$  con el conjunto abierto  $A^c$  forman una cubierta abierta  $\mathcal{b}$  del espacio paracompacto  $X$ . De donde, por definición,  $\mathcal{b}$  tiene un refinamiento abierto, del cual es localmente finito.

Sea  $U$  la unión de los miembros de  $\mathcal{b}$  que no están contenidos en  $A^c$ .

Entonces  $U$  es un conjunto abierto de  $X$  conteniendo a  $A$ .

Sea  $q$  un punto arbitrario de  $B$ , como  $\mathcal{b}$  es localmente finito existe una vecindad  $N_q$  de  $q$  en  $X$  que corta solo a los miembros de una subfamilia finita de  $\mathcal{b}$  que es  $\mathcal{D}_q$ . Sea  $D_1, D_2, \dots, D_n$  los miembros de  $\mathcal{D}_q$  que no están contenidos en  $A^c$ .

Entonces existen  $n$  puntos  $p_1, \dots, p_n$  de  $A$  tales que  $D_i \subset U \cup p_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$

Sea  $V_q = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \dots \cap U_{p_n}^c)$  entonces  $V_q$   
es una vecindad abierta de  $q$ , tal que  $q \in V_q = \emptyset$

Sea  $V$  la unión de todos los conjuntos abiertos de  $X$  conteniendo  
 $AB$  y tal que  $q \in V = \emptyset$

### UNIDAD: 3. EJEMPLOS DE ESPACIOS COMPACTOS. PRODUCTO

#### 3.I. EJEMPLOS DE CONJUNTOS COMPACTOS:

- a) Ejemplo de Conjuntos compactos.
- b) Ejemplo de subconjuntos compactos de los reales.
- c) Ejemplo de conjunto compacto de espacios Euclidianos.
- d) Ejemplo de conjuntos secuencialmente compactos.

#### 3.II. EJEMPLOS DE ESPACIOS COMPACTOS Y DE OTRAS CLASES DE COMPACTIDAD

- a) Ejemplos de Espacios que no son sucesionalmente compactos.
- b) Ejemplos de Espacios compactos de
- c) Ejemplos de Espacios localmente compactos.
- d) Ejemplo de Espacios y conjuntos contablemente compactos.
- e) Ejemplo de Espacio que es localmente compacto pero que no es compacto.
- f) Ejemplo que ilustra que un espacio métrico cerrado y acotado no implica que sea compacto.

#### 3.III. PRODUCTO DE ESPACIOS COMPACTOS

3. I. EJEMPLOS DE CONJUNTOS COMPACTOS

3. I. a) Ejemplo de Conjuntos Compactos.

1. Por el Teorema de Heine-Borel, todo intervalo cerrado y acotado de la recta real es compacto.

2. Sea A un subconjunto finito de un espacio topológico K, es decir  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Entonces A es necesariamente compacto.

Ya que sea  $G = \{G_i\}$  una cubierta abierta de A, entonces cada punto de A pertenece a un miembro de G, digamos  $a_1 \in G_{i_1}, a_2 \in G_{i_2}, \dots,$

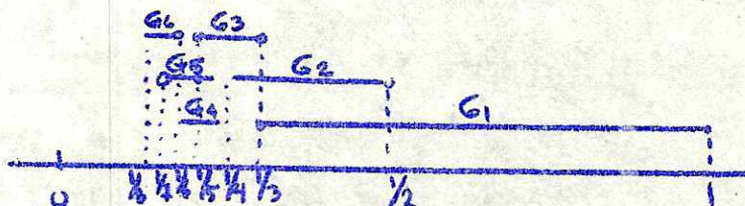
$$a_m \in G_{i_m} \Rightarrow A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

3. El intervalo  $A = (0, 1)$ , de la linea real con la topología usual no es compacto. Consideremos, por ejemplo, la clase de intervalos abiertos.

$$G = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right), \dots \right\}$$

Observamos que  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  donde  $G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$

entonces G es una cubierta abierta de A.



Pero G no contiene una subcubierta finita.

Sea  $G^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$  una subclase

finita cualquiera de G. Se  $\epsilon = \min(a_1, \dots, a_m)$  entonces  $\epsilon > 0$  y  $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_m, b_m) \subset (\epsilon, 1)$

pero  $(0, \varepsilon]$  y  $[\varepsilon, 1]$  son ajenos,  $\therefore G^*$  no es una cubierta para  $A$ .  
 $\therefore A$  no es compacto.

b) Ejemplo de Subconjunto compacto de los Reales

Todo intervalo cerrado y acotado de los números reales es un conjunto compacto.

c) Ejemplo de conjunto compacto de Espacios Euclidianos:

Podemos decir que toda bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$ , es compacta.

d) Ejemplo de conjuntos secuencialmente compactos

1) Sea  $A$  un subconjunto finito de un espacio topológico

Entonces  $A$  es necesariamente sucesionalmente compacto, ya que para

$\{s_1, s_2, \dots\}$  una sucesión en  $A$ , existe por lo menos un elemento en  $A$ , digamos  $a_0$ , que aparece un número infinito de veces en la sucesión, entonces  $\{a_0, a_0, \dots\}$  es una subsucesión de  $\{s_n\}$  y converge a su punto  $a_0 \in A$

2. El conjunto de los puntos  $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset \mathbb{R}$  es sucesionalmente compacto, para cualquier sucesión inyectiva o sea que  $x_n \neq x_m$  para  $n \neq m$  formada con estos puntos contiene una subsucesión que converge a cero.

3.II. EJEMPLOS DE ESPACIOS COMPACTOS Y OTRAS CLASES DE COMPACIDAD

a) Ejemplos de Espacios que no son sucesionalmente compactos.

1. El intervalo  $A = (0, 1)$ , de la línea Real  $\mathbb{R}$  con la topología usual no es sucesionalmente compacto. Consideremos por ejemplo, la sucesión

$\{s_n\} = \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$  en  $A$ . Observemos que  $\{s_n\}$  converge a 0 y por consiguiente cualquier subsucesión también converge a cero. Pero cero no pertenece a  $A$ . En otras palabras; la sucesión  $\{s_n\}$  en  $A$  no contiene una subsucesión que converja a un punto de  $A$ , es decir no es sucesionalmente compacto.

2. Los espacios  $\mathbb{R}^p$  &  $H^\infty$  no son sucesionalmente compactos, para cualquier subsucesión que no es la sucesión de puntos  $x_n = (0, 0, 0, \dots)$  que es acotada, no hay en consecuencia subsucesiones convergentes.

b) Ejemplo de Espacios Compactos de  $\mathbb{R}^p$ :

1. La esfera unidad en  $\mathbb{R}^p$  es compacta.

2. El cubo de Hilbert  $I^\omega = I^1 \times I^2 \times I^3 \times \dots \times I^\omega$  donde

$I^1 = [0, \xi_1]$  &  $\xi_1 = 1/1$ ,  $I^2 = [0, \xi_2]$  &  $\xi_2 = 1/2$  ..... etc. o sea

$I^\omega = [0, 1] \times [0, 1/2] \times [0, 1/3] \times \dots \times [0, 1/\omega]$  es compacto,

ya que  $I^r$  son cerrados en  $H^\infty$ . Sea  $x_1, x_2, \dots$  cualquier sucesión de puntos de  $I^\omega$ . Si  $x_n$  es  $(\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots)$  entonces para cada  $q$  fijo las coordenadas  $(\xi_{n_q})$  son un conjunto acotado del eje  $\xi_q$ .

Por consiguiente podemos construir una primera subsucesión  $x_{1_1}, x_{1_2}, \dots$  cuyas  $\xi_1$  coordenadas convergen a  $\alpha_1$ , entonces una subsucesión  $x_{2_1}, x_{2_2}, \dots$  de esta subsucesión de coordenadas  $\xi_2$  también converge a  $\alpha_2$  y así se sigue. Es fácil ver que la sucesión  $x_{1_1}, x_{2_2}, x_{3_3}, \dots$  es una subsucesión de  $\{x_n\}$  y por la propiedad de que para cada  $q$  fijo de  $\xi_q$  - coordenada converge a  $\alpha_q \implies x_{n/n} \rightarrow \alpha$ .

c) Ejemplo de Espacios localmente compactos:

1. Consideremos la línea real  $\mathbb{R}$  con su topología usual. Obsérvese que el punto  $p \in \mathbb{R}$  es interior del intervalo cerrado; por ejemplo  $[p-\delta, p+\delta]$  y el intervalo cerrado es compacto por el teorema de Heine-Borel. Entonces  $\mathbb{R}$  es localmente compacto. Por otra parte,  $\mathbb{R}$  no es un espacio compacto, por ejemplo, la clase.

$$A = \{ \dots, (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3) \dots \}$$

es una cubierta abierta de  $\mathbb{R}$ , pero no tiene una subcubierta abierta finita.

d) Ejemplo de Espacios y conjuntos contablemente compactos:

1. Cualquier intervalo cerrado y acotado  $A = [a, b]$  es contablemente compacto, si  $B$  es un subconjunto infinito de  $A$ , entonces  $B$  es también acotado y por el teorema de Bolzano-Weierstrass,  $B$  contiene un punto de acumulación  $p$ . Y como  $A$  es cerrado, el punto de acumulación  $p$  pertenece a  $A$ , es decir  $A$  es contablemente compacto.

2. El intervalo abierto  $A = (0, 1)$  no es contablemente compacto. consideremos el subconjunto infinito  $B = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \}$  de  $A = (0, 1)$  Obsérvese que  $B$  contiene un punto límite que es 0, pero 0 no pertenece a  $A$ .  
∴  $A$  no es contablemente compacto.

d) Ejemplo de espacio que es localmente compacto pero que no es compacto

El espacio Euclidiano es un espacio que es localmente compacto pero que no es compacto.

e) Ejemplo que ilustra que un espacio métrico cerrado y acotado  
que sea compacto.

En el espacio  $\mathcal{R}^2$  que es el conjunto de todas las sucesiones

$\xi = \{ \xi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales tales que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2$  con los términos positivos converge. Definamos una norma como  $\| \xi \|^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \right)^{1/2}$

Denotaremos por  $\mathcal{E}_n$  el elemento  $\xi = \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\xi_n = 1$  y  $\xi_k = 0$  para  $n \neq k$ . El conjunto  $\{ \mathcal{E}_n \}_{n \in \mathbb{N}}$  no es compacto, ya que

se tiene que  $d(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m) = \sqrt{2}$  para  $n \neq m$ . También el conjunto es

cerrado. En efecto sea  $\xi$  un punto de  $\mathcal{R}^2$  tal que cada bola  $B_\rho(\xi)$

contiene un elemento  $\mathcal{E}_n$ . Entonces, para  $\rho < \frac{1}{2}\sqrt{2}$  cada bola  $B_\rho(\xi)$

contiene el mismo elemento  $\mathcal{E}_n$ , ya que si  $B_\rho(\xi)$  contiene a  $\mathcal{E}_m$

y  $B_\rho(\xi)$  contiene  $\mathcal{E}_k$ , se tendría  $d(\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_k) \leq d(\mathcal{E}_m, \xi) + d(\mathcal{E}_k, \xi)$

$$\leq \rho + \rho < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad \text{que es imposible si } m \neq k$$

De esta manera,  $d(\xi, \mathcal{E}_m) \leq \rho$  para todo  $\rho > 0$  de donde

$d(\xi, \mathcal{E}_m) = 0$  es decir,  $\xi = \mathcal{E}_m$  pertenece al conjunto  $\{ \mathcal{E}_n | n \in \mathbb{N} \}$

### 3. III. PRODUCTO DE ESPACIOS COMPACTOS:

El clásico teorema de Tychonoff sobre el producto de espacios compactos es sin duda el teorema más útil en compacidad. Este teorema es probablemente el teorema más importante de la topología general. Por esta razón lo consideraremos en este trabajo.

Teorema de Tychonoff:

El producto topológico de una familia de espacios compactos es compacto.

Para la prueba del teorema usaremos las siguientes nociones de teoría de conjuntos:

Postulado de Zermelo:

Si  $\mathcal{G}$  es una familia de conjuntos ajenos y no vacíos, entonces, existe un conjunto  $A$  tal que  $A \cap G$  consiste exactamente en un punto para cualquier  $G$  perteneciente a  $\mathcal{G}$ .

Equivalente al postulado anterior es el principio de buena ordenación:

Principio de la buena Ordenación:

Todo conjunto puede ser bien ordenado (ordenado por la relación  $<$ ).

Un conjunto está totalmente ordenado ssi para todo  $x, y \in C$ ,  $x > y$  o  $x < y$

Un conjunto está bien ordenado cuando todo subconjunto no vacío posee un elemento menor.

El principio de la buena ordenación es equivalente al principio maximal.

Principio Maximal:

Existe un miembro maximal de una familia  $\mathcal{G}$  de conjunto, proveniente de que para cada nido en  $\mathcal{G}$  existe un miembro de  $\mathcal{G}$  que contiene a cada miembro del nido.

Nota: Una familia  $\mathcal{H}$  es un nido si para cualesquiera  $A \& B$  miembros de  $\mathcal{H}$ ,  $A \subset B$  o  $B \subset A$ .

Lema:

Sea  $S$  un espacio y sea  $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , una familia de subconjuntos cerrados de  $S$ , que satisfacen la propiedad de la intersección finita. Entonces existe una familia maximal de subconjuntos  $\mathcal{F}'$  de  $S$  que contiene a  $\mathcal{F}$  y satisface la propiedad de la intersección finita.

Demostración:

Sea  $\Omega = \{ \mathcal{F}_\alpha \}_{\alpha \in I}$  o sea la colección de todas las colecciones de subconjuntos cerrados de  $S$  que satisfacen la propiedad de la intersección finita.

Definamos un orden parcial en  $\Omega$  anotando  $\mathcal{F}_\alpha < \mathcal{F}_\beta$  si todo conjunto de  $\mathcal{F}_\alpha$  pertenece a  $\mathcal{F}_\beta$  pero no reciprocamente.

La familia  $\mathcal{F}$  es una subfamilia totalmente ordenada de  $\Omega$ , por el principio maximal se nos asegura que existe una subfamilia totalmente ordenada  $\Omega'$  de  $\Omega$  que contiene a  $\mathcal{F}$ , es decir  $\mathcal{F} \subset \Omega'$ , entonces la familia que buscamos  $\mathcal{F}'$  resultará ser el elemento máximo de  $\Omega'$  cuya existencia hay que establecer de la siguiente forma:

Sea  $\mathcal{H}$  la unión de todos los elementos de  $\Omega'$  queremos demostrar que

- a) Si esto ocurre entonces  $\mathcal{H}$  es un efecto elemento máximo de  $\Omega'$  pues todo elemento de  $\Omega' \in \mathcal{H}$  por la definición de  $\mathcal{H}$ , además si  $\mathcal{H} \in \Omega'$ , no es subconjunto propio de ningún otro elemento de  $\Omega'$  ya que otro elemento conteniendo a  $\mathcal{H} \in \Omega'$ .

b) Supongamos que  $C_1, \dots, C_n$  son conjuntos de  $\mathcal{A}$ . Para cada  $j, 1 \leq j \leq n, C_j$  es un conjunto de cierta familia  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$ .

Como  $\Omega$  está totalmente ordenado alguna de ellas, por ejemplo:

$\mathcal{F}_k$  contiene a todos los demás, por tanto  $\mathcal{F}_k$  contiene los conjuntos  $C_1 \dots C_n$ . Entonces por satisfacer  $\mathcal{F}_k$  la propiedad de intersección

finita resulta que  $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ . De aquí vemos que  $\mathcal{A}$  satisface la propiedad de la intersección finita y está en la familia  $\Omega$ .

Además  $\mathcal{A}$  es comparable con todo elemento de  $\Omega$ , luego pertenece a  $\Omega$ .

$\therefore \mathcal{A}$  es la familia  $\mathcal{F}'$  exigida en el lema.

Corolario:

Si  $\mathcal{A} = \{C_i\}$  una familia de conjuntos de un espacio  $S$ .

$\mathcal{A}$  es maximal entre los que satisfacen la hipótesis de intersección finita, entonces:

- a) toda intersección de un número finito de elementos de  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{A}$
- b) todo conjunto que intersecciona cada uno de los  $C_i$  pertenece a  $\mathcal{A}$

Demostración:

a) Sean  $c_1, c_2, \dots$  en elementos de  $\mathcal{A}$  y sea  $\bigcap_{i=1}^n C_i = C$  si  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathcal{A}$  tenemos que  $C_1 \cap C_2 \dots \cap C_n \cap C_1' \cap C_2' \dots \cap C_k' \neq \emptyset$

Pero este es precisamente el conjunto (reordenado).

$C_1 \cap C_1' \cap C_2 \cap C_2' \dots \cap C_k \cap C_k'$  lo cual prueba a) porque  $\mathcal{A}$  es maximal entre los que satisfacen la hipótesis.

b) Por otra parte si un conjunto  $K$  intersecciona a todo elemento de  $\mathcal{A}$  entonces  $K \cap C_1 \cap \dots \cap C_n = K \cap (\bigcap_{i=1}^n C_i)$  y este no es vacío

porque  $\bigcap_{j=1}^n C_j$  está en  $\mathcal{F}$  por a).

Teorema de Tychonoff:

El producto de una familia arbitraria de espacios compactos es compacta. (con respecto a la topología del producto).

Demostración:

Supongamos que  $\mathcal{F} = \{C_\alpha\}$  es una familia de conjuntos cerrados de  $\ast \{X_\alpha | \alpha \in A\}$  satisfaciendo la hipótesis de intersección finita, por el lema anterior existe una familia  $\mathcal{D} = \{D_\beta\}$  de subconjuntos de  $\ast \{X_\alpha | \alpha \in A\}$  y tal que  $\mathcal{D}$  contiene a  $\mathcal{F}$  y es maximal con respecto a la hipótesis de la intersección finita. Para cada  $\alpha$ , la familia  $\{P_\alpha(D_\beta)\}$  es la familia de las proyecciones de  $D_\beta$  satisface la hipótesis de intersección finita.

La familia  $\{P_\alpha(D_\beta)\}$  también satisface la hipótesis de intersección finita luego existe un punto que es común a todas las proyecciones  $P_\alpha(D_\beta)$  por la compacidad de  $X_\alpha$ .

Sea  $U_\alpha$  un abierto de  $X_\alpha$  conteniendo a  $x_\alpha$ . Puesto que para todo  $\beta$   $U_\alpha \cap P_\alpha(D_\beta) \neq \emptyset$  entonces se deduce que  $P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$  corta a todo  $D_\beta$ . Ahora por el corolario anterior  $P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$  es elemento de  $\mathcal{D}$ .

Sea  $p$  el punto de  $\ast \{X_\alpha | \alpha \in A\}$  cuyos coordenadas son los puntos  $x_\alpha$  y sea  $\ast \{V_\alpha | \alpha \in A\} = \mathcal{V}$  un elemento de la base conteniendo dicho punto.

Únicamente un número finito de  $V_\alpha, \dots, V_{\alpha_n}$  de subconjuntos de  $V_\alpha$  son subconjuntos propios de sus correspondientes espacios y para ellas

tenemos que  $\bigcap_{j=1}^n P_{a_j}^{-1}(V_{a_j}) = \mathbb{V}$

Todo  $P_{a_j}^{-1}(V_{a_j})$  aparece en  $\mathcal{H}$  y por lo tanto pertenece a  $\mathcal{H}$  (por corolario anterior). Pero esto significa que  $\mathbb{V}$  pertenece a  $\mathcal{H}$  luego  $\mathbb{V}$  corta todos los  $C_{a_i}$ . Como  $\mathbb{V}$  es arbitrario,  $p$  tiene que ser un punto límite de todos los  $C_{a_i}$ , todo  $C_{a_i}$  es cerrado luego  $p \in$  a todos ellos.

$\therefore \bigcap_a C_{a_i} \neq \emptyset$ , que el producto de espacios posee la propiedad de intersección finita. Se concluye

• el producto de espacios compactos es compacto.

#### UNIDAD # 4. APENDICE

##### 4. I. CONCLUSIONES

##### 4. II. ALGUNOS CONCEPTOS

##### 4. III. BIBLIOGRAFIA

##### 4.I. Conclusiones:

A través del estudio de las diferentes clases de compacidad y en especial de la bicompatidad y la compacidad sucesional podemos llegar a concluir lo siguiente:

1. La propiedad de bicompatidad es un invariante topológico para el producto de espacios.
2. La definición de sucesionalmente compacto es útil para ver si un espacio tiene la propiedad de compacidad, sobre todo en espacios métricos.

3. En espacios métricos la definición de secuencialmente compacto es equivalente a la de bicompacidad.
4. La compacidad local no implica la compacidad.
5. La compacidad sí implica la compacidad local.
6. La compacidad sucesional y la contable no se preservan con el producto topológico.
7. La definición de compacidad numerable es equivalente al segundo axioma de numerabilidad y compacidad.
8. Un espacio es localmente compacto si y solo si es localmente compacto en todos sus puntos.
9. La propiedad de ser compacto en los espacios Euclidianos es equivalente a ser cerrados y acotado, esto no se cumple en general para todo espacio topológico.
10. Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado y cerrado. Pero el inverso no es cierto.
11. En general existen conjuntos compactos que no son sucesionalmente compactos.
12. Un espacio topológico que satisface la propiedad de Bolzano-Weierstrass es enumerablemente compacto.
13. Todo subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.
14. Todo espacio métrico es paracompacto.

Por último quiero hacer notar que, el estudio de la compacidad tiene grandes consecuencias, entre ellas podemos mencionar la compactificación. En el estudio de un espacio topológico no compacto  $X$  es a menudo muy conveniente construir un espacio que contenga a  $X$  como un subespacio y que sea además compacto, por ejemplo: frecuentemente es útil adjuntar dos puntos,  $+\infty$ ,  $-\infty$ , al espacio de los números reales, el resultado es un espacio que algunas veces es llamado los reales extendidos, es decir que agregando  $-\infty$  al final de los números negativos y  $+\infty$  como el supremo de los números positivos, se logra que todos los subconjuntos no vacíos queden acotados con respecto a la topología de orden. Los reales extendidos son una compactificación de un espacio de los números reales.

Una forma simple de compactificación de un espacio topológico está hecha por la simple adjunción de un punto, este procedimiento es familiar en análisis, útil para la teoría de funciones, etc.

Entonces, podemos definir la compactificación por un punto de un espacio topológico  $X$ , es el conjunto  $X^* = X \cup \{\infty\}$  con la topología cuyos miembros son los conjuntos abiertos de  $X$  y todos los subconjuntos  $\mathcal{O}$  de  $X^*$  tales que  $X^* - \mathcal{O}$  es un subconjunto compacto de  $X$ .

Otra de las consecuencias directas de la definición de compacidad es la invariancia topológica de esta noción, por lo cual esta noción es una de las más importantes en topología.

UNIDAD      APENDICE

4.II. Algunos Conceptos:

Definición:

Si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$  diremos que  $A$  es abierto en  $X$  ssi es la traza sobre  $X$  de un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ .

Proposición:

Un conjunto  $M \subset X$  es cerrado relativo a  $X$  ssi  $X - M$  es abierto.

Proposición:

Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de conjuntos abiertos relativos a  $X$  entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es abierto relativo a  $X$ .

Espacio Topológico:

Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $\mathcal{T}$  una colección de subconjuntos de  $X$   $\Rightarrow$

- i)  $X \in \mathcal{T}$
- ii)  $\emptyset \in \mathcal{T}$
- iii)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$
- iv)  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$

El par  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, Los miembros de  $\mathcal{T}$  se llaman  $\mathcal{T}$ -abiertos. La clase  $\mathcal{T}$  se llama topología.

Definición

Sea  $A$  un elemento de  $\mathcal{T}$ , entonces  $X - A$  se llama un cerrado.

Definición de Cubierta Abierta:

$\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de  $X$  si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  y si  $\forall x \in X \exists B_i \in \mathcal{B}_x$   
 para alguna  $i, x \in B_i ; X \subset \bigcup_{i \in I} B_i$   
 si  $\mathcal{B}$  es numerable, es decir  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  se dice que  $\mathcal{B}$  es una  
 cubierta abierta numerable para  $X$ .

Definición de Primer Axioma de Contabilidad:

"Para cada punto  $p \in X$  existe una clase  $\mathcal{B}_p$  contable de conjuntos abiertos contables conteniendo a  $p$   $\ni$  todo conjunto abierto conteniendo a  $p$ , también contiene un miembro de  $\mathcal{B}_p$ .

Definición de Segundo Axioma de Contabilidad:

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  que tiene una base contable se dice que satisface el segundo axioma de contabilidad.

Definición de Espacio de Fechet:

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es espacio de Fechet o espacio  $T_1$  si satisface: que para todo  $a, b \in X$  tal que  $a \neq b$  existe  $\mathcal{O}_a \in \mathcal{T}$  tal que  $a \in \mathcal{O}_a$ .

Definición

Un espacio  $(X, \mathcal{T})$  es de Hausdorff o  $T_2$  si y solo si, para toda  $a, b \in X$  tal que  $a \neq b$  existe  $\mathcal{O}_a$  y  $\mathcal{V}_b \in \mathcal{T}$  tales que,  $a \in \mathcal{O}_a$  y  $b \in \mathcal{V}_b$  &  $\mathcal{O}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$

Definición

Un espacio  $(X, \tau)$  es un espacio regular si y solo si, para todo conjunto  $F$  cerrado  $\emptyset$  un punto  $p \in X$  tales que  $p \notin F$  o sea  $p \in X - F$  existe  $G \& H \in \tau$  tales que  $G \cap H = \emptyset$ ,  $F \subset G$  &  $p \in H$ .

Definición

Un espacio  $(X, \tau)$  es  $T_2$  si es regular y  $T_1$ .

Definición

Un espacio  $(X, \tau)$  se dice que es completamente regular en el punto  $p \in X$  si para toda vecindad  $N(p) \in \tau$  existe una función con-

tinua  $\chi$  tal que  $\chi: X \rightarrow [0, 1] \ni$

$$\begin{cases} \chi(p) = 0 \\ \chi(X - N(p)) = 1 \end{cases}$$

Definición

Un espacio que es completamente regular en todo  $p \in X$  es completamente regular.

Definición

Un espacio que es completamente regular y  $T_1$  se le llama espacio de Tychonoff.

Definición

Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es normal si y solo si satisface

que para conjuntos  $F_1, F_2$  pertenecientes a los cerrados tales que  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  entonces existen  $G, H$  abiertos tales que  $G \cap H = \emptyset$  y  $F_1 \subset G$  y  $F_2 \subset H$ .

Definición

Un espacio topológico que es normal y  $T_1$  se llama espacio  $T_4$ .

Definición

$(X, \tau)$  es de Lindelöf si para cada cubierta abierta de  $X$  existe una subcubierta numerable abierta.

Criterio de Investigación de Bases:

La condición necesaria y suficiente para que  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  sea una base de  $X$  es que  $\forall x \in X$  y para toda  $\mathcal{O}(x)$  perteneciente a los abiertos exista  $B_\alpha$  tal que  $x \in B_\alpha \subset \mathcal{O}(x)$

Definición de Base:

Una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos es base para una topología  $\tau$  ssi es una subfamilia de  $\tau$  y para cada punto del espacio y cada vecindad  $\mathcal{O}(x)$  existe  $B_i \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_i \subset \mathcal{O}(x)$

Teorema:

Una familia  $\{B_\alpha\}$  de conjuntos es una base en  $X$  si  $X = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$  y ssi  $\forall \mathcal{O} \in \tau \forall x \in \mathcal{O}$  y para todo  $x \in \mathcal{O} \cap Y$  existe  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in W \subset \mathcal{O} \cap Y$ .

Definición:

Una red en un espacio  $X$  es una función  $\varphi: D \rightarrow X$  (del conjunto dirigido  $D$  a  $X$ ). En particular  $D = \mathbb{N}$  dirigido por  $\geq$  en el sentido usual.  $\varphi$  es una sucesión en  $X$ . Una red  $\varphi$  se dice que está eventualmente en  $\mathcal{O}_U$  así  $\exists$  un conjunto residual  $E$  en  $D \Rightarrow \varphi(E) \subset \mathcal{O}_U$

Definición:

Una red  $\varphi: D \rightarrow X$  donde  $X$  es un espacio, converge a un punto  $p$  de  $X$  ssi  $\varphi$  está eventualmente en toda  $U(p)$ .

Definición:

La función  $\lambda: E \rightarrow D$  de un conjunto dirigido  $E$  a otro dirigido  $D$  se dice que es cofinal ssi para todo subconjunto residual  $\mathcal{O}$  de  $D \exists$  un subconjunto residual  $R$  de  $E \exists \lambda(R) \subset \mathcal{O}$ . En otras palabras  $\forall d \in D \exists c \in E \exists \lambda(x) \geq d \forall x \geq c \text{ en } E$

Definición:

Una subred  $\varphi: D \rightarrow X$ , es una red  $\psi: E \rightarrow X \exists$  una función cofinal  $\lambda: E \rightarrow D$  con  $\psi = \varphi \circ \lambda$ . En particular si  $E$  es un subconjunto cofinal de  $D$  y está dirigida por la misma ordenación de  $D$ , entonces la función contención:  $\lambda: E \subset D$  y la restricción  $\varphi \setminus E = \varphi \circ \lambda$  es una subred de  $\varphi$ .

Definición de Subbase:

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Sea  $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$  tales que para toda  $\alpha, S_\alpha \in \tau$ , es decir  $\mathcal{S} \subset \tau$ , es una subbase para una topología  $\tau$  en  $X$  ssi la intersección de los miembros de  $\mathcal{S}$  son una base para  $\tau$ .

Definición:

Una relación binaria  $\geq$  en un conjunto  $D$  dirige a  $D$  ssi,  $D$  no es vacío y las siguientes condiciones se cumplen.

- i) si  $a \in D$  enteros  $a \geq a$
- ii) si  $a, b, c \in D \Rightarrow a \geq b \text{ y } b \geq c \Rightarrow a \geq c$
- iii) si  $a, b \in D$  entonces existe un miembro  $c$  de  $D \Rightarrow c \geq a \text{ y } c \geq b$

Definición de Conjunto Dirigido:

Un conjunto dirigido por  $\geq$  es un conjunto  $D$  con esta relación que lo dirige. Así  $(\mathbb{N}, \geq)$  es un conjunto dirigido.

Definición:

Sea  $D$  un conjunto dirigido considere un subconjunto arbitrario  $E$  de  $D$ . si  $\exists d_0 \in D \Rightarrow \forall d \in D, d \geq d_0 \Rightarrow d \in E$  entonces  $E$  se llama subconjuntos residual de  $D$ .

si  $\forall d \in D, \exists c \in E \Rightarrow c \geq d$  entonces  $E$  se llama subconjunto cofinal de  $D$ .

Definición:

Sea  $\varphi: D \rightarrow X$  una red. Un punto  $p$  de  $X$  es punto de acumulación de  $\varphi$  ssi  $\varphi$  está frecuentemente en toda vecindad de  $p$ .

"Se dice que la red  $\varphi$  está frecuentemente en  $U$  ssi  $\exists$  un conjunto cofinal  $b$  de  $D$   $\exists \varphi(b) \subset U$ ."

DEFINICION DE ESPACIO EUCLIDIANO O ESPACIO NUMERICO P-DIMENSIONAL:

Sea  $p$  un número  $\in \mathbb{Z}^+$ . Los elementos del espacio numérico  $p$ -dimensional  $\mathbb{R}^p$  son las eneadas ordenadas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  de números reales  $x_j$  ( $1 \leq j \leq p$ ). Los elementos  $x \in \mathbb{R}^p$  se llaman también vectores o puntos y el número  $x_j$  se llama la  $j$ -ésima coordenada o componente del vector  $x$ .

4. II. OBRAS CONSULTADAS

1. Bushaw, D. "Fundamentos de Topología General" = Primera edición. Editorial Limuss-Wiley, S.A., México, 1970.
2. Chinn, W.G. and Pateenrod, "First Concepts of Topology". Tercera edición, Random House The E. W. Singer Company, Estados Unidos de América.
3. Garnir, H.G., "Teoría de Funciones I", Ediciones Técnicas, Maecambo Barcelona, 1966.
4. Horváth, Juan, "Introducción a la Topología General", Editorial Eva y Chesneau, Estados Unidos de América, 1969.
5. Kelley, John L., "General Topology", Décimo primera edición, American Book-Van Nostrand Reinhold, Estados Unidos de América, 1969.
6. Kolmogurov and Foming, S.V., "Introduction Real Análisis", primera edición, Prentice Hall, Inc. Estados Unidos de América, traducida por Richard H. Silverman, 1970.
7. Kuratowski, Casimir, "Topologie", Troisieme Edición, Volum II, Państwowe Wkdawnict. Ko Naukowe Warszawa, 1961.
8. Lefschetz, Solomon, "Topology", segunda edición, Chelsea Company, New York, 1965.
9. Lipschutz, Seymour, "Theory and Problems of General Topology", Schaum Publishing Company, Estados Unidos de América, 1965.
10. Mendelson, Bert. "Introduction to Topology", segunda edición, Ally and Bacon, Inc., Estados Unidos de América, 1968.

11. Newman, M.H.A.; "Elements of the Topology of Plane Sets of Points",
12. Patterson, E.M., "Topology", quinta edición, - Interscience Publishers, Inc., Estados Unidos de América, 1956.
13. Sze-Tsen, Ho, "Elements of General Topology", segunda edición, Holden Day, Los Angeles California, E.E.U.U., 1965.
14. Throw, Wolfgang, S. "Topological Structures", Holt Rinehart, Winston, 1966.
15. Wilanskk, Albert, "Topology for analysis", Ginn, A Xerox Company, Estados Unidos, Massachuse- - tts, 1970

  
~~Gilda Magina Castellanos de Pilesca~~  
SUSTENTANTE

Vo. Bo. Doctor Antonio E. Gillot  
DIRECTOR DE ESTUDIO