

**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

**INTRODUCCION AL ESTUDIO
DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LAS
ONDAS SISMICAS**

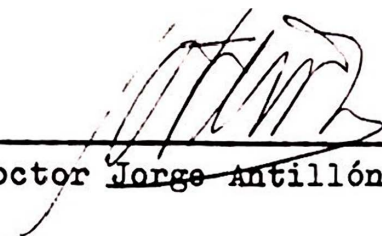
MARCO EUGENIO CABRERA VALVERDE

**INVESTIGACION MONOGRAFICA PARA
OPTAR AL GRADO ACADEMICO DE
LICENCIADO EN FISICA**

**BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

**GUATEMALA
MAYO 1978**

Vo. Bo. del Asesor:

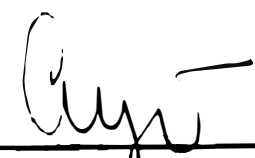
(f) 

Doctor ~~Jorge~~ Antillón M.

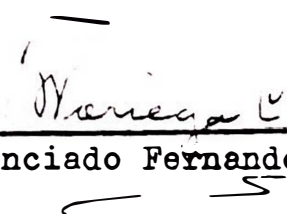
Tribunal:

(f) 

Doctor ~~Jorge~~ Antillón M.

(f) 

Doctor Eduardo Suger C.

(f) 

Licenciado Fernando Noriega

Mes de aprobación: junio de 1978



DEDICO ESTA TESIS

A Dios Todopoderoso

A mis Padres:

Marco Antonio Cabrera Echeverría
Julia Valverde de Cabrera

A mis Hermanos:

Antonio Juan de Dios, Angélica,
Julio Rafael, Jeannette, Jorge Mario,
Raúl, Julia Beatriz, Adela Genoveva,
Héctor Gabriel.

A mi abuelita

Natalia

A mis tías

Concha, Susana y Rosa

A mis sobrinos

A mis demás familiares

A mis compañeros de promoción

A los residentes del Centro Universitario Ciudad vieja

A mis amigos

UN PROFUNDO AGRADECIMIENTO

A la Universidad del Valle de Guatemala

A todos mis profesores, en especial al Dr. Jorge Antillón.

Al Centro Universitario Ciudad Vieja

A la Fundación John W. Hall

A todos los que de una u otra manera hicieron posible la realización de este trabajo.



CONTENIDO CONDENSADO

	Página
I. Introducción	1
II. Conceptos básicos	3
1. Introducción a los vectores y tensores	3
2. Cálculo vectorial y tensorial	15
3. Esfuerzos y deformaciones	19
4. Ecuaciones fundamentales de la Teoría de la Elasticidad	37
5. Constantes elásticas	61
6. Densidad y constantes elásticas de la Tierra	65
7. Ondas	69
III. Ondas elásticas	81
8. Ondas elásticas en un medio infinito	81
9. Ondas elásticas en un medio semi-infinito	97
10. Ondas elásticas en un medio semi-infinito y una capa	115
IV. Ondas sísmicas	133
11. Introducción a la Sismología	133
12. Ondas y rayos sísmicos en la tierra esférica y estratificada	147
V. Conclusiones	
VI. Bibliografía	

CONTENIDO

I.	INTRODUCCION	
II.	CONCEPTOS BASICOS	Página
1.	Introducción a los vectores y tensores	
1.1	Algebra de vectores	3
1.2	Vectores unitarios y convención de suma	3
1.3	Definiciones formales de vectores, escalares e invariantes	4
1.4	El producto punto	4
1.5	El tensor delta de Kronecker	5
1.6	El símbolo de permutación	5
1.7	El producto vectorial	5
1.8	Tensores y transformación de coordenadas	7
1.9	Algebra de tensores cartesianos	13
2.	Cálculo vectorial y tensorial	
2.1	Gradiente, divergencia, rotor y laplaciano	15
2.2	Fórmulas e identidades integrales vectoriales y tensoriales	16
2.3	El tensor métrico	16
2.4	Teoremas fundamentales sobre tensores	18
3.	Esfuerzos y deformaciones	
3.1	Deformación	19
3.2	Transformaciones afines	20
3.3	Deformaciones infinitesimales afines	20
3.4	El tensor de deformación	22
3.5	Interpretación geométrica del tensor de deformación	25
3.6	El tensor de deformación en un sistema de coordenadas cualquiera	26
3.7	Deformación general infinitesimal	28
3.8	Ecuaciones de compatibilidad	29
3.9	Vector de esfuerzos	30
3.10	El tensor de tensiones	30
3.11	Ecuaciones para los casos de equilibrio	33
3.12	Interpretación geométrica del tensor de esfuerzos	35
4.	Ecuaciones fundamentales de la Teoría de la Elasticidad	
4.1	La ecuación de continuidad	37
4.2	Ley de Hooke	38
4.3	Ley de Hooke generalizada	40
4.4	Medio isotrópico homogéneo	42
4.5	Deformaciones homogéneas	42
4.6	Ecuaciones de equilibrio para un sólido elástico isotrópico	46
4.7	Ecuaciones dinámicas de un sólido elástico isotrópico	50
4.8	Solución de la ecuación de Navier	50

4.9	La función de energía de deformación y su conexión con la ley de Hooke	54
4.10	Equilibrio de un medio elástico limitado por un plano	57
5.	Constantes elásticas	
5.1	Constantes elásticas de una sustancia	61
5.2	Constantes elásticas y módulos de elasticidad de sólidos isotrópicos	61
5.3	Módulos de elasticidad	63
6.	Densidad y constantes elásticas de la Tierra	
6.1	Razón de Poisson	65
6.2	Variación de la densidad con la profundidad	65
6.3	Otras constantes elásticas	66
6.4	Presión y gravedad	67
7.	Ondas	
7.1	Nociones	69
7.2	Ecuación de onda. Deducción	73
7.3	Solución de la ecuación de onda	76
III.	ONDAS ELASTICAS	
8.	Ondas elásticas en un medio infinito	
8.1	Ondas elásticas en un medio isótropo	81
8.2	Reflexión y refracción de una onda elástica plana y monocromática	85
8.3	Geometría de las ondas planas P y S	86
8.4	El movimiento de la partícula	87
8.5	Desplazamientos a partir de los potenciales	89
8.6	Velocidad de la partícula	90
8.7	Energía de una onda plana elástica	91
8.8	Propagación de la energía	93
8.9	Ondas esféricas	94
8.10	Ondas cilíndricas	95
9.	Ondas elásticas en un medio semi-infinito	
9.1	Leyes de reflexión y refracción	97
9.2	Reflexión de ondas internas	97
9.3	Movimiento del suelo a la llegada de una onda	103
9.4	Ondas de superficie	106
9.5	La tierra como un medio semi-infinito	111

	Página
10. Ondas elásticas en un medio semi-infinito y una capa	
10.1 Reflexión y refracción de ondas internas	115
10.2 Ondas superficiales en un medio y una capa. Ondas Love	122
10.3 Ondas Rayleigh en un medio semi-infinito y una capa	127
10.4 El fenómeno de dispersión, velocidad de fase y de grupo	129
IV. ONDAS SISMICAS	
11. Introducción a la Sismología	
11.1 Definiciones y conceptos generales. Terremotos	133
11.2 Causas de los terremotos	135
11.3 Características de los terremotos	138
11.4 Tipos de ondas sísmicas	142
11.5 Movimiento de la tierra debido a las ondas sísmicas	143
11.6 Otros tipos de sismos	145
11.7 Registro de ondas sísmicas	146
12. Ondas y rayos sísmicos en la tierra esférica y estratificada	
12.1 Rayos sísmicos	147
12.2 Propagación de rayos en medios estratificados de velocidad constante	147
12.3 Propagación de rayos en un medio de velocidad variable	149
12.4 Propagación de rayos en una tierra esférica	150
12.5 Distribución normal de velocidades	154
12.6 Determinación de las velocidades de las ondas P y S en el interior de la tierra a partir de la relación (T, Δ)	156
V. CONCLUSIONES	159
VI. BIBLIOGRAFIA	160

I INTRODUCCION

Este trabajo monográfico, previo a optar el título de licenciado en Física por la Universidad del Valle de Guatemala, fue motivado por el terremoto que sufrió Guatemala el 4 de febrero de 1976.

Se pretende estudiar en forma breve, —matemática y físicamente—, la naturaleza y forma de propagación de las ondas que acompañan a un sismo. Para ello se parte del estudio de las ondas elásticas en un medio infinito, luego en un medio semi-infinito y una capa, para terminar en la propagación de las ondas elásticas en una tierra esférica y estratificada. Para cada uno de los casos se analizan las ecuaciones de movimiento de estas ondas y las condiciones de frontera que tienen que cumplir dichas ecuaciones.

El trabajo es algo extenso, debido a que se procuró facilitar al lector, los conocimientos necesarios para la comprensión del tema central, que podría restringirse a los capítulos 9, 10 y 12. Por esta razón, la parte operatoria está muy detallada, haciendo su lectura y asimilación mucho más rápida.

Para estudiar —matemática y físicamente— las ondas sísmicas, —objeto propio de la Sismología—, es necesario tener una base sólida de Teoría de la Elasticidad y por ello se le dedicó la mayor parte de este trabajo a ese campo.

La parte fundamental de este trabajo está basada en el libro de los autores Landau & Lifshitz titulado “Teoría de la Elasticidad”; y la parte específica de Sismología se basó en el libro de Bullén titulado “Introduction to the Theory of Seismology”.

Se comenzó con una base de Matemática del Medio Continuo, en la cual, los tensores ocupan un plano primordial. Se continuó con una introducción a las constantes elásticas, especialmente las de la Tierra. Y, por último, se parte del análisis de las ondas en medios elásticos infinitos, para terminar en las ondas en una tierra esférica y estratificada, que presentan una gran analogía con las ondas sísmicas.

II CONCEPTOS BASICOS

1. Introducción a los vectores y tensores

1.1 Algebra de los vectores:

En una forma sencilla se dice en Física que un vector se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido, mientras que un escalar tiene sólo magnitud. Ambos (vectores y escalares) pueden ser abstractos o tener dimensión.

Los vectores obedecen las siguientes leyes:

- a) Cerradura: Si $\vec{a} \in V$ y $\vec{b} \in V$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ y $\vec{c} \in V$
- b) Conmutatividad de la adición: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- c) Asociatividad para la adición: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- d) Existencia del vector cero: $\exists \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- e) Existencia de simétrico: $\forall \vec{a} \in V, \exists (-\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
- f) Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V$ entonces $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{a}$
- g) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{a}, \vec{b} \in V$ entonces $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- h) Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V$ entonces $\alpha_1(\alpha_2\vec{a}) = (\alpha_1\alpha_2)\vec{a}$
- i) $1\vec{a} = \vec{a}, 0\vec{a} = \vec{0}$

1.2 Vectores unitarios y convención de suma:

Un vector unitario \hat{n} tiene la propiedad que $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$.

Cualquier vector \vec{a} puede ser expresado como $\vec{a} = a\hat{n}$, donde \hat{n} es un vector unitario en la dirección y sentido de \vec{a} y a es la magnitud de \vec{a} . Por lo tanto,

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}}{a} \quad (1.2.1)$$

En un espacio Euclídeo de tres dimensiones, un vector se especifica por tres números independientes y se puede representar así:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (1.2.2)$$

donde a_i son las componentes del vector \vec{a} en un sistema de coordenadas, e i toma los valores 1, 2 y 3.

El vector \vec{a} se puede expresar en términos de sus componentes, en un sistema cartesiano cuya base es $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$, $\hat{z} = (0, 0, 1)$, así:

$$\vec{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$$

o bien,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i a_i = \hat{e}_1 a_1 + \hat{e}_2 a_2 + \hat{e}_3 a_3$$

Sistema Cartesiano



Fig. 1.2.1

Introducimos ahora la convención de suma iniciada por Albert Einstein en la cual se sobreentiende que los subíndices repetidos se suman de 1 a 3; podemos expresar \bar{a} como $\bar{a} = \hat{e}_i a_i$, sin importar cual es la letra utilizada para el subíndice repetido.

A los subíndices no repetidos se les llama libres.

1.3 Definiciones formales de vectores, escalares e invariantes:

Vector:

Conjunto de tres funciones de posición en un espacio que se transforma de acuerdo a $\hat{a}'_i = S_{ij} \hat{a}_j$ bajo transformaciones ortogonales y, además, obedece las leyes algebraicas básicas establecidas con anterioridad en 1.1. (S_{ij} = coseno del ángulo comprendido entre i primada y j sin primar). Esta definición está dada para vectores en una clase particular de sistemas de coordenadas. El concepto de vector puede ser extendido a sistemas de coordenadas generalizadas.

Escalar:

Es una simple función de posición en el espacio y, por lo tanto, su valor en un punto dado no depende del sistema de coordenadas en el cual lo estemos calculando.

Un escalar que posee la misma forma algebraica en cualquier sistema de coordenadas se dice que es invariante.

1.4 El producto punto:

Sean \bar{a} y \bar{b} dos vectores. El producto escalar, punto o interno se indica $\bar{a} \cdot \bar{b}$ y está definido por

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.4.1)$$

El producto punto es un invariante, o sea que,

$$a'_i b'_i = S_{ij} S_{ik} a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k = a_k b_k$$

Interpretación geométrica:

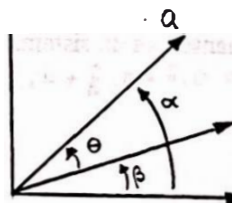


Fig 1.4.1

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= a(\cos \alpha) b \cos \beta + a(\sin \alpha) b \sin \beta \\ &= ab (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= ab \cos (\alpha - \beta) = ab \cos \theta \end{aligned}$$

O sea que el producto punto multiplica la magnitud de un vector por la componente del segundo vector en la dirección del primero, o viceversa.

1.5 El tensor Delta de Kronecker:

Este tensor es de los más útiles en el cálculo vectorial y tensorial. Está definido de la siguiente manera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

y por ello al trabajar en un sistema de dos dimensiones este símbolo es útil para dar la condición de ortogonalidad de funciones.

1.6 El símbolo de permutación:

Es un tensor de tercer rango que se llama algunas veces densidad de Levi-Civita, tensor alternante o indicador; está definido por:

$$\delta_{ijk} = 1 \quad \text{si } i,j,k \text{ son una permutación par de } 1,2,3$$

$$\delta_{ijk} = -1 \quad \text{si } i,j,k \text{ son una permutación impar de } 1,2,3$$

$$\delta_{ijk} = 0 \quad \text{si se repite cualquiera de los subíndices}$$

Los tensores Delta de Kronecker y de permutación (δ_{ij} y δ_{ijk}) están relacionados de la siguiente manera:

$$\delta_{ijk} \delta_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (1.6.1)$$

Además, el tensor de permutación tiene la propiedad de tener el mismo valor cuando sus subíndices sufren permutaciones cíclicas, por ejemplo:

$$\delta_{ijk} = \delta_{jkl} = \delta_{kij}$$

1.7 Producto vectorial:

El producto vectorial de dos vectores \bar{a} y \bar{b} es un vector $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ cuya magnitud es

$$c = |\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \theta = ab \sin \theta \quad (1.7.1)$$

donde θ es el ángulo entre \bar{a} y \bar{b} , medido de \bar{a} a \bar{b} de tal forma que $\theta \leq \pi$

La dirección de \bar{c} es perpendicular al plano formado por \bar{a} y \bar{b} y su sentido es según la regla de la mano derecha aplicada a \bar{a} y \bar{b}

El producto cruz es anticonmutativo, esto es:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \quad (1.7.2)$$

La definición algebraica de el producto cruz es

$$\begin{aligned} \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= a_j \hat{e}_j \times b_k \hat{e}_k = a_j b_k (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) \\ &= a_j b_k \delta_{jki} \hat{e}_i = \delta_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i \end{aligned}$$

La componente i del vector \vec{c} es

$$c_i = \vec{c} \cdot \hat{e}_i = \delta_{ijk} a_j b_k \quad (1.7.3)$$

El producto cruz entre vectores unitarios cartesianos está definido por

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \delta_{ijk} \hat{e}_k \quad (1.7.4)$$

A pesar de que el producto vectorial se transforma como un vector bajo rotaciones, no se comporta en todos los aspectos como un vector ordinario.

El vector \vec{c} es el producto de dos vectores. Cada uno de los vectores que interviene en el producto vectorial cambia signo cuando se reemplazan todos los vectores de la base \hat{e}_i por sus negativos, $-\hat{e}_i$ (Inversión del sistema de coordenadas).

Vectores como el vector de posición \vec{r} y el momentum lineal \vec{p} cambian de signo bajo la inversión. Estos se llaman vectores polares u ordinarios.

Un producto vectorial de dos vectores polares no cambia signo bajo la inversión y por eso nos da por resultado un vector axial o pseudovector.

El producto escalar de un vector polar y un vector axial es un pseudoescalar que se caracteriza por cambiar de signo bajo la inversión.

Su interpretación geométrica es la siguiente:

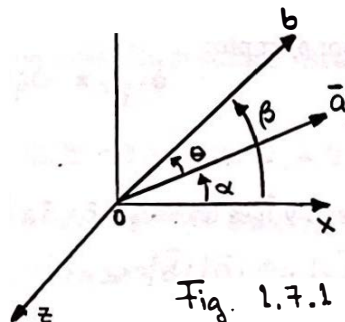


Fig. 1.7.1

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} introduciremos un sistema de coordenadas de tal forma que el plano XY coincida con el plano formado por estos vectores \vec{a} y \vec{b} . Como el producto cruz de \vec{a} con \vec{b} ($\vec{a} \times \vec{b}$) da por resultado un vector perpendicular al plano formado por \vec{a} y \vec{b} , dicho vector resultante no tendrá componentes en los ejes X y Y y tendremos, desarrollando $\delta_{ijk} a_j b_k$, sólo

$$y_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\text{Como } \begin{aligned} a_1 &= a \cos \alpha & a_2 &= a \sin \alpha \\ b_1 &= b \cos \beta & b_2 &= b \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{entonces } y_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) = ab (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)$$

$$y_3 = ab \sin (\beta - \alpha) = ab \sin \theta$$

Por lo tanto, el vector resultante será

$$\vec{f} = \hat{z} y_3$$

El producto cruz para los vectores unitarios está regido por la siguiente relación:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \delta_{ijk} \hat{e}_k$$

1.8 Tensores y transformación de coordenadas:

Los tensores son entes matemáticos independientes de cualquier sistema de coordenadas y por esta propiedad son utilizados para representar cantidades físicas que son independientes de cualquier sistema de coordenadas. La mecánica del medio continuo hace mucho uso de estas cantidades, pues expresa sus leyes físicas por medio de ecuaciones tensoriales.

Un tensor queda especificado mediante un conjunto de funciones conocidas como sus componentes. Si estas componentes las especificamos en cierto sistema de coordenadas, quedarán determinadas las componentes en cualquier otro sistema. En nuestro caso, para la Teoría de Elasticidad, utilizaremos sobre todo los tensores cartesianos, por lo que al referirnos a ellos, lo haremos con la palabra tensor solamente.

De acuerdo a la forma de la ley de transformación que un tensor obedece, podemos clasificarlos por su rango u orden.

El número de componentes de un tensor varía de acuerdo a la dimensión del espacio en el cual estamos trabajando. Como trabajaremos en un espacio Euclídeo tridimensional, el número de componentes de un tensor será 3^n donde n es el rango del tensor.

Los tensores de rango cero se conocen como escalares y tienen una sola componente, con la cual quedan completamente especificados. Los escalares son independientes del sistema de coordenadas.

Los tensores de primer rango tienen $3^1=3$ componentes en el espacio Euclídeo de dimensión tres, pero sus componentes sí dependen del sistema de coordenadas en el cual se expresen. A estos tensores se les llama vectores.

Consideremos un vector \bar{a} definido por sus componentes Ψ_j en el sistema de coordenadas K y por sus componentes φ_i en un sistema de coordenadas K' . Las componentes Ψ_j de este vector \bar{a} son funciones de posición de las coordenadas x_i del sistema K , o sea,

$$\Psi_j = \Psi_j(x_1, x_2, x_3) \quad (1.8.1)$$

y por otro lado, las componentes φ_i de \bar{a} en el sistema K' son funciones de posición de las coordenadas q_j del sistema K' , o sea,

$$\varphi_i = \varphi_i(q_1, q_2, q_3) \quad (1.8.2)$$

Además, las coordenadas q_j del sistema K' están relacionadas con las coordenadas x_i del sistema K , mediante las funciones

$$q_j = q_j(x_1, x_2, x_3) \quad (1.8.3)$$

que constituyen la ley de transformación de las coordenadas.

El Jacobiano de la transformación anterior (1.8.3) está definido por:

$$J = \det \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.8.4)$$

Cuando el Jacobiano de una transformación no es nulo, esto es, $J \neq 0$ para todo punto en cierta región tratada, la transformación de coordenadas se llamará admisible en dicha región del espacio.

Como $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$ entonces,

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.8.5)$$

Vemos pues, que los coeficientes de transformación son derivadas parciales que a su vez son funciones de las coordenadas x_j .

La ley de transformación anterior (1.8.5) es llamada ley de transformación contravariante y a partir de ahora la escribiremos así:

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial x^a} dx^a \quad (1.8.5')$$

donde hemos utilizado los supraíndices para distinguir coordenadas que se transforman de esta manera, de otras que se transforman de acuerdo a la ley de transformación covariante.

Volviendo al vector \bar{a} que estábamos considerando, si sus componentes φ_i y ψ_j , en los sistemas K' y K respectivamente, están relacionados mediante:

$$\varphi_i(q_1, q_2, q_3) = \psi_j(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial q_i}{\partial x^a} \quad (1.9.6)$$

Dicho vector se denominará vector o tensor contravariante de primer rango y el conjunto de las tres funciones φ_i que se transforman de esta manera bajo una transformación de coordenadas generalizada, se llamarán componentes contravariantes del vector \bar{a} .

Pero si las componentes p_i y ψ_j del vector a en los sistemas de coordenadas K' y K están relacionadas por:

$$p_i(q_1, q_2, q_3) = \psi_j(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (1.8.7)$$

el vector se llamará vector covariante y el conjunto de las tres funciones φ_i , componentes covariantes del vector \bar{a} .

Utilizando las abreviaturas

$$P_j^i = \frac{\partial q_i}{\partial x^j}$$

$$P_i^j =$$

tenemos

$$\varphi^i = P_j^i \psi^j \quad (1.8.8)$$

y

$$\varphi_i = P_i^j \psi_j \quad (1.8.9)$$

para expresar en forma abreviada las funciones (1.8.6) y (1.8.7).

Al observar la ecuación (1.8.5), vemos que el Jacobiano definido por la ecuación (1.8.4) es el determinante de los coeficientes de transformación de dicha ecuación (1.8.5) ó (1.8.5').

Para asegurarnos que una transformación tiene inversa y con una correspondencia absoluta de las variables para una región R son suficientes dos condiciones:

a) Que las funciones que relacionan los dos sistemas, K y K' , sean únicas, continuas y que tengan sus primeras derivadas parciales continuas en R ; esto es,

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \in C^1$$

C^n es la clase de funciones que son continuas junto con sus n primeras derivadas parciales.

b) Que el Jacobiano de la transformación definida por (1.8.4) sea distinto de cero para todos los puntos de la región R . O sea,

$$J \neq 0, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in R$$

Si $J > 0$, la transformación es propia; esto quiere decir que un sistema dextrógiro es transformado en otro dextrógiro mediante dicha transformación.

Si $J < 0$, la transformación es impropia y transforma un sistema dextrógiro en uno levógiro.

Como $J \neq 0$, existirá el inverso de (1.8.5'). Cuando una transformación de coordenadas T posee inversa T^{-1} y si J y K son los Jacobianos de ellas respectivamente, entonces $J \cdot K = 1$.

Considerando la transformación que estamos utilizando $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$ en forma diferencial

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j} dx^j$$

y asumiendo que $J \neq 0$, para J definido por (1.8.4) concluimos que tiene inversa:

$$x_j = x_j(q_1, q_2, q_3) \quad (1.8.10)$$

que expresada en forma diferencial resulta ser:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial q^k} dq^k \quad (1.8.11)$$

Sustituyendo ahora (1.8.11) en la ecuación (1.8.5') tenemos

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} dq^k \quad (1.8.12)$$

y luego

$$\frac{\partial q^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} = \frac{dq^i}{dq^k} \quad (1.8.13)$$

El último término de la ecuación anterior toma el valor de 1 cuando los subíndices i y k son iguales, y cero cuando son diferentes. Por esta razón podemos escribir (1.8.13) en la forma

$$\frac{\partial q^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \quad (1.8.14)$$

donde δ_k^i es la delta de Kronecker.

Por otro lado, el Jacobiano de la transformación $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$ es

$$\det \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) = J$$

inversa $x_j = x_j(q_1, q_2, q_3)$ es

mientras que el de la transformación

$$\det \left(\frac{\partial x^a}{\partial q^k} \right) = K \quad (1.8.15)$$

Sabemos además, que

$$\det \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial q^k} \right) = \det \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) \det \left(\frac{\partial x^a}{\partial q^k} \right) \quad (1.8.16)$$

y por (1.8.14), (1.8.4) y (1.8.15) tenemos

$$\det \left(\delta_k^i \right) = J \cdot K \quad (1.8.17)$$

pero $\det \left(\delta_k^i \right) = 1$ y por lo tanto, $J \cdot K = 1$.

Los tensores de segundo rango son llamados también diadas. Un tensor cartesiano de segundo rango es un conjunto de nueve funciones de posición que se transforman de acuerdo a:

$$A'_{i\bar{j}} = S_{ik} S_{j\bar{l}} A_{k\bar{l}} \quad (1.8.18)$$

bajo transformaciones ortogonales.

A los tensores los representaremos con letras mayúsculas y una pequeña línea sobre ellas, así \bar{A} . Sus componentes serán las funciones A_{ij} .

Varias cantidades importantes en la mecánica del medio continuo son representadas por tensores de segundo rango.

Un ejemplo de un tensor es la delta de Kronecker que tiene la característica de que sus componentes mantienen el mismo valor numérico en todos los sistemas de coordenadas. Si un tensor tiene esta última propiedad, se le llamará tensor isotrópico.

Algunas veces, el tensor delta de Kronecker es representado por el tensor identidad I dado por:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8.19)$$

Un tensor de segundo rango puede construirse a partir de dos vectores, pero no siempre puede descomponerse en dos vectores.

Al producto de dos vectores \bar{a} y \bar{b} para formar un tensor de segundo rango \bar{A} se le llama producto directo de \bar{a} y \bar{b} ó producto diádico de \bar{a} y \bar{b} , y se representa así:

$$\bar{A} = \bar{a}\bar{b} \quad (1.8.20)$$

donde $A_{ij} = a_i b_j$ son las componentes del tensor \bar{A} . O sea,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Si tomamos el tensor $\bar{B} = \bar{b} \bar{a}$ y comparamos sus componentes con las de \bar{A} veremos que B es la matriz transpuesta de A, o sea

$$B = \bar{A} \quad (1.8.21)$$

o bien $B_{ij} = A_{ji}$ (1.8.22)

a a B le llamamos conjugado diádico de \bar{A} .

Cuando un tensor A es igual a su autoconjugado diádico A_c , $A=A_c$, se dice que es un tensor simétrico y sus componentes cumplen la condición

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (1.8.23)$$

o en notación matricial

$$\bar{A} = A \quad (1.8.24)$$

donde A es la matriz que representa las componentes de \bar{A} .

Pero si un tensor \bar{A} es igual a su antiautoconjugado o negativo de su autoconjugado, $-A_c$, $\bar{A} = -\bar{A}_c$, diremos que \bar{A} es un tensor antisimétrico cuyas componentes cumplen

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (1.8.25)$$

o bien, en notación matricial

$$A = -A \quad (1.8.26)$$

La simetría y la antisimetría son propiedades invariantes. Además, cualquier tensor de segundo rango puede ser expresado como la suma de una parte simétrica y una parte antisimétrica, esto es,

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) \quad (1.8.27)$$

donde las componentes

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) \quad (1.8.28)$$

son simétricas, mientras que las componentes

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) \quad (1.8.29)$$

son antisimétricas.

Por otro lado, un tensor simétrico tiene 6 componentes independientes, mientras que un tensor antisimétrico tiene sólo tres.

Un tensor de segundo rango tiene asociados tres invariantes. El número de invariantes asociadas con un tensor de segundo rango es igual a la dimensión del espacio en el cual está definido.

Una de las tres invariantes es la traza del tensor que no es más que la suma de los elementos de la diagonal, esto es,

$$\text{tr } A = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (1.8.30)$$

Examinando ahora las transformaciones para tensores de segundo rango, vemos que para las contravariantes son

$$\varphi^{ij}(q_1, q_2, q_3) = \psi^{mn}(x_1, x_2, x_3) \frac{dq_j^i}{dx^m} \frac{dq_i^a}{dx^n} \quad (1.8.31)$$

mientras que para las covariantes son

$$\varphi_{ij}(q_1, q_2, q_3) = \psi_{mn}(x_1, x_2, x_3) \frac{dx_m}{dq_i} \frac{dx_n}{dq_j} \quad (1.8.32)$$

donde $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ son las componentes del tensor \bar{A} en el sistema de coordenadas K' y $\psi_{mn} = \psi_{mn}(x_1, x_2, x_3)$ son las componentes del tensor en el sistema K .

Las q_i son las coordenadas en el sistema K' y las x_m , las coordenadas en el sistema K .

La transformación de coordenadas está dada por

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$$

También pueden definirse tensores de rango más alto. Estos tensores se llaman triadas (los de tercer rango), tetradas (los de cuarto rango) y así sucesivamente. Los tensores de orden tres y cuatro aparecen frecuentemente en la matemática de la mecánica del medio continuo.

Un tensor de tercer rango, por ejemplo, es un conjunto de $3^3 = 27$ funciones de posición que se transforman de acuerdo a

$$A_{ijk} = S_{il} S_{jm} S_{kn} A_{lmn} \quad (1.8.33)$$

El rango de una cantidad tensorial particular es igual al número de subíndices libres que ésta posee.

Para los tensores cartesianos no existe la diferenciación entre tensores contravariantes y tensores covariantes.

En general, un tensor cartesiano de rango N en un espacio de dimensión n es un conjunto de n^N funciones $A_{ij\dots m}$ que se transforman de acuerdo a las siguientes transformaciones:

$$\underbrace{A_{ij\dots m}}_{N \text{ índices}} = A_{pq\dots t} \underbrace{S_{ip} S_{jq} \dots S_{mt}}_{N \text{ factores}} \quad (1.8.34)$$

donde S_{ip}, S_{jq}, \dots son los cosenos de los ángulos comprendidos entre los nuevos y los antiguos ejes de coordenadas.

Nota: Para nuestro propósito trabajaremos, como ya hemos dicho anteriormente, en un espacio euclídeo tridimensional y nuestra definición anterior tendría que decir: "en un espacio de dimensión tres es un conjunto de 3^N funciones..."

1.9 Algebra de Tensores Cartesianos:

Para sumar o restar tensores cartesianos del mismo orden deben sumarse o restarse componente por componente de acuerdo a la siguiente regla:

$$A_{ijk\dots} \pm B_{ijk\dots} = T_{ijk\dots} \quad (1.9.1)$$

donde el tensor $T_{ijk\dots}$ es un tensor del mismo orden que los tensores sumandos.

Para multiplicar un tensor por un escalar, se multiplica este último por cada componente del tensor y obtenemos así, un tensor del mismo orden; así:

$$b_i = \psi a_i \quad \bar{b} = \psi \bar{a} \quad (1.9.2)$$

$$B_{ij} = \psi A_{ij} \quad \bar{B} = \psi \bar{A} \quad (1.9.3)$$

El producto externo de dos tensores de cualquier orden es un tensor cuyas componentes se formaron multiplicando cada componente de uno de los tensores por todas las componentes del otro tensor. El tensor resultante de este producto es de un orden que es la suma de los rangos de cada tensor factor. Así, por ejemplo,

$$a_i b_j = A_{ij} \quad (1.9.4)$$

$$a_i A_{ijk} = \epsilon_{ijk} \quad (1.9.5)$$

$$A_{ij} B_{k\ell} = \Phi_{ijkl} \quad (1.9.6)$$

$$\sigma_{ijk} a_\ell = \pi_{ijkl} \quad (1.9.7)$$

Para poder entender bien el producto interno de dos tensores es necesario conocer antes en qué consiste la contracción de un tensor.

La contracción de un tensor con respecto a dos subíndices libres es la operación de asignar a ambos subíndices la misma letra cambiándolos de libres a repetidos. La contracción reduce el orden del tensor en dos. Algunas contracciones corrientes son las siguientes:

a) Contracciones de A_{ij} y $a_i b_j$

$$\Delta_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (1.9.8)$$

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.9.9)$$

b) Contracciones de $A_{ij} b_k$

$$A_{ij} b_j = a_i \quad (1.9.10)$$

$$A_{ij} b_i = c_j \quad (1.9.11)$$

$$A_{ii} b_\ell = d_\ell \quad (1.9.12)$$

e) Contracciones de $A_{ij} B_{kl}$

$$A_{ij} B_{ie} = C_{jl} \quad (1.9.13)$$

$$A_{ij} B_{ki} = D_{jk} \quad (1.9.14)$$

$$A_{ii} B_{kl} = E_{kl} \quad (1.9.15)$$

$$A_{ij} B_{kk} = F_{ij} \quad (1.9.16)$$

$$A_{ij} B_{jl} = G_{il} \quad (1.9.17)$$

$$A_{ij} B_{kj} = H_{ik} \quad (1.9.18)$$

Un producto interno de dos tensores es el resultado de una contracción, envolviendo un índice de cada tensor, llevado a cabo sobre el producto externo de dos tensores.

Listaremos varios productos internos que serán de utilidad por ser muy importantes en la mecánica del medio continuo.

PRODUCTO INTERNO

Producto externo	Notación con índices	Notación con símbolos
1. $a_i b_j$	$a_i b_i$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$ (1.9.19)
2. $a_i B_{jk}$	$a_i B_{ik} = c_k$	$\bar{a} \cdot \bar{B} = \bar{c}$ (1.9.20)
	$a_i B_{ji} = d_j$	$\bar{B} \cdot \bar{a} = \bar{d}$ (1.9.21)
3. $A_{ij} B_{kl}$	$A_{ij} B_{jl} = C_{ik}$	$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{C}$ (1.9.22)
4. $A_{ij} A_{kl}$	$A_{ij} A_{jl} = B_{ik}$	$\bar{A} \cdot \bar{A} = (\bar{A})^2$ (1.9.23)

Por último definiremos lo que es el vector dual.

El vector dual de un tensor cartesiano de segundo orden A_{ij} está definido por:

$$b_i = \delta_{ijk} A_{jk} \quad (1.9.24)$$

2. CALCULO VECTORIAL Y TENSORIAL

2.1 Gradiente, Divergencia, Rotor y Laplaciano:

Sea Ψ una simple función escalar de posición, o sea, un campo tensorial de rango cero, $\Psi = \Psi(x_1, x_2, x_3)$; el gradiente de Ψ es un vector dado por

$$\nabla \Psi = \text{grad } \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \hat{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \hat{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \hat{z} \quad (2.1.1)$$

en coordenadas cartesianas. El símbolo ∇ es un operador vectorial llamado del o nabra, que trabaja así:

$$\nabla = \hat{x} \partial_1 + \hat{y} \partial_2 + \hat{z} \partial_3 \quad (2.1.2)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Las componentes del vector $\nabla \Psi$ son $\partial_i \Psi$

Si \bar{a} es un campo vectorial, su divergencia $\text{div } \bar{a}$ ó $\nabla \cdot \bar{a}$ viene dada por

$$\text{div } \bar{a} = \nabla \cdot \bar{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \partial_i a_i \quad (2.1.3)$$

y corresponde a la traza del tensor de segundo rango con componentes $\partial_i a_j$.

Si $\bar{a} = \nabla \Psi$, $\nabla \cdot \bar{a} = \nabla \cdot \nabla \Psi$ y tenemos así un nuevo operador llamado Laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ que trabaja de la siguiente forma:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_i \partial_i \quad (2.1.4)$$

y aplicado a una función escalar Ψ tenemos:

$$\text{div grad } \Psi = \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \quad (2.1.5)$$

Y por último, el rotacional o rotor de un campo vectorial a está dado por:

$$\text{rot } \bar{a} = \nabla \times \bar{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \hat{z} \quad (2.1.6)$$

y en notación tensorial

$$(\nabla \times \bar{a})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k = c_i \quad (2.1.7)$$

donde $\nabla \times \bar{a} = \bar{c}$ (2.1.8)

2.2 Fórmulas e identidades integrales vectoriales y tensoriales:

Los teoremas, identidades y/o fórmulas que más utilizaremos son:

1. El teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \bar{c} \, d\Sigma = \oint_S \bar{c} \cdot \hat{n} \, d\sigma \quad (2.2.1)$$

donde \bar{c} es un campo vectorial y $\bar{c} \cdot \hat{n} \, d\sigma$ es el flujo de \bar{c} a través del diferencial de área $d\sigma$.

Si \bar{A} es un campo tensorial de segundo rango, podemos escribir este teorema así:

$$\int_V \partial_i A_{ji} \, d\Sigma = \oint_S A_{ji} \, n_i \, d\sigma \quad (2.2.2)$$

2. El Teorema de Stokes

$$\oint_C \bar{a} \cdot d\bar{s} = \int_\sigma \nabla \times \bar{a} \cdot \hat{n} \, d\sigma \quad (2.2.3)$$

donde \bar{a} es un campo vectorial y $\oint_C \bar{a} \cdot d\bar{s}$ es la circulación del vector \bar{a} .

3. La primera identidad de Green

$$\int_\sigma \psi \nabla \phi \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_V \nabla \cdot \psi \nabla \phi \, d\Sigma = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) \, d\Sigma \quad (2.2.4)$$

4. La segunda identidad de Green o Teorema de Green

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, d\Sigma = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{n} \, d\sigma = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, d\sigma \quad (2.2.5)$$

2.3 El Tensor Métrico:

Consideremos un desplazamiento infinitesimal arbitrario $d\bar{s}$. El cuadrado de su magnitud en coordenadas rectangulares es:

$$ds^2 = dx^i dx^i \quad (2.3.1)$$

y utilizando las transformaciones

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} dq^k \quad \text{y} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j \quad (2.3.2)$$

podemos expresar ds^2 en la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} dq^j dq^k = g_{jk} dq^j dq^k \quad (2.3.3)$$

donde hemos definido a g_{jk} como

$$g_{jk} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \quad (2.3.4)$$

esto es, un tensor de segundo rango cuyas componentes covariantes son las dadas por la ecuación (2.3.4), y que recibe el nombre de tensor métrico porque todas las propiedades métricas del espacio euclídeo están completamente determinadas por él.

En un sistema de coordenadas cartesianas, el tensor métrico toma la forma de la delta de Kronecker, o sea,

$$g_{jk} = \delta_{jk} \quad (2.3.5)$$

Si θ_i son las coordenadas de otro sistema de coordenadas y las funciones de transformación son las siguientes:

$$q_i = q_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.3.6)$$

los diferenciales totales serán

$$dq^j = \frac{\partial q^j}{\partial \theta^k} d\theta^k \quad (2.3.7)$$

y

$$= \frac{\partial q^i}{\partial \theta^k} d\theta^k \quad (2.3.8)$$

Como ds^2 es:

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad (2.3.9)$$

sustituyendo (2.3.7) y (2.3.8) en (2.3.9) obtenemos

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \theta^k} \frac{\partial q^j}{\partial \theta^l} d\theta^k d\theta^l \quad (2.3.10)$$

y

$$ds^2 = g_{kl} d\theta^k d\theta^l \quad (2.3.11)$$

donde hemos tomado a g_{kl} como

$$g_{kl} = g_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \theta^k} \frac{\partial q^j}{\partial \theta^l} \quad (2.3.12)$$

o bien,

$$g_{ij} P_k^i P_l^j \quad (2.3.13)$$

donde

$$P_k^i = \frac{\partial q^i}{\partial \theta^k} \quad P_l^j = \frac{\partial q^j}{\partial \theta^l} \quad (2.3.14)$$

De la definición del tensor métrico puede observarse que es un tensor simétrico, esto es,

$$g_{jk} = g_{kj} \quad (2.3.15)$$

teniendo, por lo tanto, sólo 6 componentes independientes.

La información que proporciona el tensor métrico es la distancia entre dos puntos. Este tensor, llamado también tensor fundamental determina la geometría de un sistema de coordenadas.

2.4 Teoremas fundamentales sobre tensores:

Teorema 2.4.1:

Si todas las componentes de un tensor son cero en un sistema de coordenadas, también lo son en todos los demás sistemas en correspondencia con él.

Teorema 2.4.2:

Las combinaciones lineales de tensores del mismo orden dan por resultado un tensor del mismo orden.

Teorema 2.4.3:

Si $A_{ij\dots n}$ y $B_{ijk\dots n}$ son tensores y se cumple que $\bar{A} = \bar{B}$ para cierto sistema de coordenadas, entonces $A = B$ para cualquier otro sistema de coordenadas en correspondencia con él.

3. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

3.1 Deformación:

La teoría de la Elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos considerados como medios continuos.

Antes de estudiar la mecánica de cuerpos deformables, es conveniente considerar un cuerpo ideal llamado rígido. En un cuerpo rígido, un elemento cualquiera de él guarda una distancia constante de cualquier otro elemento del mismo a través del tiempo, siendo su movimiento resultado de la superposición de una traslación rígida y una rotación rígida.

Pero en la realidad, todos los cuerpos son más o menos deformables. Estas deformaciones pueden ser de cualquier magnitud. Consideraremos sólo pequeñas deformaciones.

Decimos que un cuerpo rígido está deformado cuando la posición relativa de sus puntos está alterada. El cambio en la posición relativa de sus puntos es una deformación. Consideremos un cuerpo sólido no deformado que ocupa la región R en un sistema de coordenadas cartesianas fijo K . La posición de cualquier punto P de este cuerpo estará dada mediante el vector \bar{r} con componentes (x_1, x_2, x_3) . Si lo sometemos a la acción de fuerzas, éste se deformará, es decir, cambiará de forma y de volumen. Al deformar el sólido, cada punto se desplazará y el punto P pasará a ser el punto P' cuyo vector de posición será \bar{r}' . El cuerpo deformado ocupará ahora la región R' en el mismo sistema de coordenadas.

El desplazamiento del punto considerado debido a la deformación será $\bar{r}' - \bar{r}$, al cual llamaremos vector de desplazamiento y lo representaremos por \bar{u} .

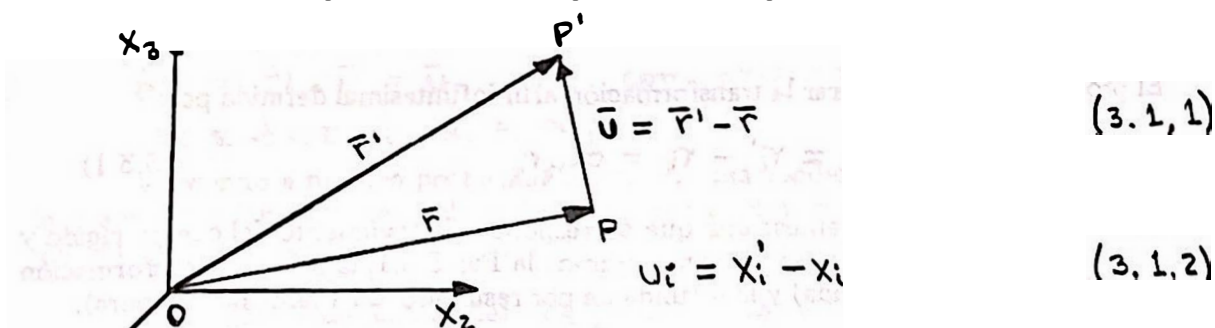


Fig. 3.1.1

$$u = (u_1, u_2, u_3) = u_i \hat{e}_i ; \quad \bar{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3) = x'_i \hat{e}_i$$

$$\bar{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_i \hat{e}_i$$

Como las coordenadas x'_i del punto desplazado son funciones de las coordenadas x_i del mismo punto antes de desplazarse, entonces el vector u_i es también función de las coordenadas x_i .

Trataremos con deformaciones continuas de R en R' con las siguientes ecuaciones que caracterizarán la deformación.

$$r'_i = r'_i(x_1, x_2, x_3) \equiv r'_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.3)$$

Suponiendo que las ecuaciones (3.1.3) son funciones biyectivas, obtenemos la inversa:

$$r_i = r_i(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv r_i(\bar{x}'), \text{ con } i=1, 2, 3 \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.3) representa un movimiento de cuerpo rígido y una deformación pura.

3.2 Transformaciones afines:

Las ecuaciones en las cuales las funciones de transformación son lineales, definen las llamadas transformaciones afines.

Las propiedades de las transformaciones lineales generales de puntos son:

$$x'_i = \alpha_{i0} + (\delta_{ij} + \alpha_{ij}) x_j, \text{ con } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2.1)$$

donde los α_{ij} son constantes conocidas y estudiaremos su interpretación más adelante.

Una deformación que se caracteriza porque las diferentes partes del cuerpo, cuando está sujeto a la transformación (3.2.1), experimentan la misma deformación independientemente de la posición de las partes del cuerpo, es llamada deformación homogénea.

Después de haber visto el tensor de esfuerzos y el tensor de deformación consideraremos algunos casos simples de deformaciones homogéneas.

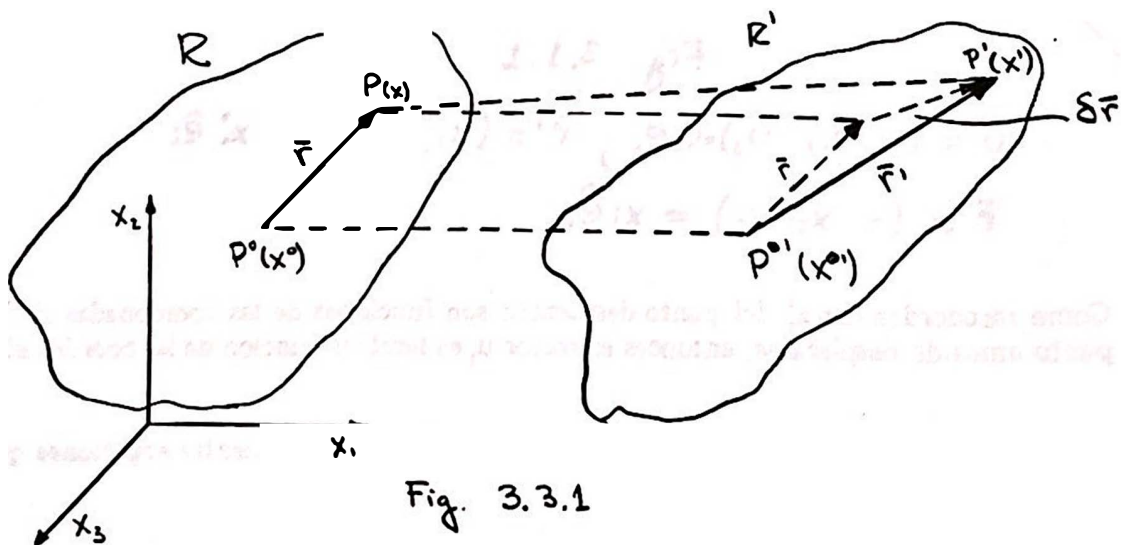
Por otro lado, una transformación del tipo (3.2.1), en la cual, los coeficientes son tan pequeños que sus productos (términos de orden superior) pueden ser despreciados al compararlos con los términos lineales, es llamada transformación afín infinitesimal.

3.3 Deformaciones infinitesimales afines:

El problema ahora es separar la transformación afín infinitesimal definida por:

$$\delta r_i = r'_i - r_i = \alpha_{ij} r_j \quad (3.3.1)$$

en dos transformaciones componentes: una que corresponda al movimiento del cuerpo rígido y la otra que sea una deformación pura. Si consideramos la Fig. 3.3.1, la primera transformación pasa \bar{r} en R a \bar{r} en R' (línea punteada) y la segunda da por resultado $\delta \bar{r}$ (deformación pura).



Bajo las transformaciones (3.2.1) el vector \bar{r} que une los puntos $P(x)$ y $P^0(x^0)$, lo pasamos al vector \bar{r}' que une ahora los puntos $P'(x')$ y $P^0(x^0)$.

$$\text{El vector } \bar{r} \text{ tiene componentes } r_i = x_i - x_i^0 \quad (3.3.2)$$

$$\text{y el vector } \bar{r}' \text{ tiene componentes } r_i' = x_i' - x_i^0 \quad (3.3.3)$$

Tenemos entonces utilizando (3.3.3) que $r_i' = x_i' - x_i^0$ y haciendo uso de la ecuación (3.2.1),

$$r_i' = x_i' - x_i^0 = (\alpha_{i0} + x_i + \alpha_{ij} x_j) - (\alpha_{i0} + x_i^0 + \alpha_{ij} x_j^0) \quad (3.3.4)$$

$$= (x_i - x_i^0) + \alpha_{ij} (x_j - x_j^0) \\ = r_i + \alpha_{ij} r_j \quad (3.3.5)$$

y por lo tanto, como $\bar{r}' = \bar{r} + \delta \bar{r}$

$$\delta r_i = r_i' - r_i = \alpha_{ij} r_j \quad (3.3.6)$$

Para el caso que acabamos de analizar tomamos $\bar{r}' = (r_1', r_2', r_3')$, es decir, con componentes $r_i' = x_i' - x_i^0$, $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$, es decir, con componentes $r_i = x_i - x_i^0$ y $\delta \bar{r} = \bar{r}' - \bar{r}$ con componentes δr_i o sea,

$$\delta \bar{r} = (r_1' - r_1, r_2' - r_2, r_3' - r_3)$$

Cuando por facilidad tomamos el origen de los vectores \bar{r} y \bar{r}' en el origen del sistema de coordenadas tenemos que

$$r = (x_1, x_2, x_3), \text{ es decir, con componentes } x_i \\ \bar{r}' = (x_1', x_2', x_3'), \text{ es decir, con componentes } x_i' \\ \delta \bar{r} = \bar{r}' - \bar{r} = \bar{u} \text{ con componentes } \delta x_i \text{ así} \\ u_i \equiv \delta x_i \equiv x_i' - x_i = \alpha_{ij} x_j$$

Volviendo a nuestro problema, vemos que una condición necesaria y suficiente para que la transformación infinitesimal (3.3.1) represente el movimiento de un cuerpo rígido es que $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$), o sea que α_{ij} sea un tensor antisimétrico.

El conjunto de cantidades α_{ij} pueden ser descompuestas según las ecuaciones (1.8.27), (1.8.28) y (1.8.29) en:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \quad (3.3.8)$$

y las ecuaciones (3.3.1) pueden escribirse como

$$\delta r_i = \alpha_{ij} r_j = \left[\frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \right] r_j \quad (3.3.9)$$

o bien,

$$\delta r_i = u_{ij} r_j + \omega_{ij} r_j \quad (3.3.10)$$

donde

$$u_{ij} = u_{ji} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \quad (3.3.11)$$

$$\text{y} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \equiv \frac{1}{2} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \quad (3.3.12)$$

Los coeficientes antisimétricos ω_{ij} corresponden al movimiento del cuerpo rígido

$$\delta r_i = \omega_{ij} r_j \quad (3.3.13)$$

Los coeficientes simétricos U_{ij} corresponden a la deformación pura

$$\delta r_i = U_{ij} r_j \quad (3.3.14)$$

Los coeficientes simétricos U_{ij} son llamados componentes del tensor de deformación y caracterizan a la deformación pura.

3.4 El tensor de deformación:

Al deformar un cuerpo, las distancias entre sus puntos no se mantendrán constantes como en el caso de un cuerpo rígido.

Tomaremos ahora en consideración dos puntos muy cercanos entre sí, a los cuales los une el vector con componentes dx_i antes de la deformación y el vector con componentes dx'_i después de la misma. Este último vector está dado en sus componentes por:

$$dx'_i = dx_i + du_i \quad (3.4.1)$$

La distancia entre los puntos antes de la deformación era

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad (3.4.2)$$

y después

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \quad (3.4.3)$$

que podemos escribir, según la convención de suma que hemos estado utilizando, como:

$$dl^2 = dx_i^2 \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 \quad (3.4.4) \text{ y } (3.4.5)$$

$$\text{Como } u_i = u_i(x_i) = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.4.6)$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (3.4.7)$$

y podemos expresar dl'^2 de la siguiente forma

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = dx_i^2 + 2 dx_i du_i + du_i^2$$

$$dl'^2 = dx_i^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \quad (3.4.8)$$

Podemos escribir, además,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j \quad (3.4.9)$$

debido a que la sumatoria del segundo término de la derecha se extiende sobre los subíndices i y j .

En el tercer término de la ecuación (3.4.8) haremos un intercambio en los subíndices i y k para obtener

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{o sea,} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (3.4.10)$$

Ahora

$$d\ell'^2 = dx_i^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j \quad (3.4.11)$$

Como

$$dx_i^2 = d\ell^2 \quad d\ell'^2 = d\ell^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j \quad (3.4.12)$$

donde

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.4.13)$$

es la definición del tensor de deformación u_{ij}

Estas últimas expresiones dan la variación de una longitud infinitesimal cuando el sólido se deforma.

El tensor de deformación es un tensor simétrico y por lo tanto puede ser diagonalizado en cualquier punto, esto es, que en cualquier punto del sólido puede elegirse un sistema de ejes de coordenadas —los ejes principales del tensor— tal que sólo las componentes diagonales u_{11} , u_{22} y u_{33} del tensor sean diferentes de cero. A estas componentes se les llama valores principales del tensor de deformación y las representaremos por $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ y $u^{(3)}$. El tensor sólo puede diagonalizarse en un punto del cuerpo.

Si el tensor de deformación está diagonalizado en un punto, en sus proximidades el elemento de longitud $d\ell'^2$ será:

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j = dx_i^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j = (\delta_{ij} + 2u_{ij}) dx_i dx_j \quad (3.4.14)$$

$$\begin{aligned} d\ell'^2 = & \delta_{11} dx_1 dx_1 + 2u_{11} dx_1 dx_1 + 2u_{12} dx_1 dx_2 + 2u_{13} dx_1 dx_3 \\ & + 2u_{21} dx_2 dx_1 + \delta_{22} dx_2 dx_2 + 2u_{22} dx_2 dx_2 + 2u_{23} dx_2 dx_3 \\ & + 2u_{31} dx_3 dx_1 + 2u_{32} dx_3 dx_2 + \delta_{33} dx_3 dx_3 + 2u_{33} dx_3 dx_3 \end{aligned}$$

Considerando que $dx_i dx_j = dx_j dx_i$ y $u_{ij} = u_{ji}$

$$d\ell'^2 = dx_1^2 + 2u_{11} dx_1^2 + 4u_{12} dx_1 dx_2 + 4u_{13} dx_1 dx_3 + dx_2^2 \quad (3.4.15)$$

$$+ 2u_{22} dx_2^2 + 4u_{23} dx_2 dx_3 + dx_3^2 + 2u_{33} dx_3^2$$

$$d\ell'^2 = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2 \quad (3.4.16)$$

donde al diagonalizarlo hemos hecho $u_{ij} = \delta_{ij} u_{ij}$ y por ello se ha vuelto cero para u_{12} , u_{23} y u_{13} .

Como los tres términos son independientes, la deformación de un elemento de volumen puede considerarse compuesta por deformaciones a lo largo de 3 ejes mutuamente perpendiculares, los ejes principales del tensor u_{ij} o ejes principales de deformación.

Vemos además, que $dx_i'^2 = (1 + 2u^{(i)}) dx_i^2$ y por lo tanto,

$$dx_i' = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} dx_i \quad (3.4.17)$$

El alargamiento relativo a lo largo del i -ésimo eje principal sería

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = \frac{\sqrt{1 + 2u^{(i)}} dx_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \quad (3.4.18)$$

Generalmente, alargamientos relativos son pequeños comparados con la unidad y también u_{ij} en todas sus componentes será pequeño, por lo que para pequeñas deformaciones despreciaremos el término de segundo orden del tensor de deformación, quedándonos así:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4.19)$$

y las dilataciones relativas de los elementos de longitud a lo largo de los ejes principales del tensor (en un punto dado) serán $\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$, o sea, aproximadamente los valores de la diagonal del tensor u_{ij} , que son las únicas componentes que quedan cuando el tensor u_{ij} está referido a los ejes principales de la deformación.

Consideremos ahora un elemento infinitesimal de volumen dV y calculemos cuál será el volumen después de la deformación.

Si coinciden los ejes de coordenadas con los ejes principales del tensor en cierto punto considerado, los elementos de longitud después de la deformación serán:

$$dx_i' = dx_i + u^{(i)} dx_i \quad (3.4.20)$$

El elemento de volumen está dado por $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ antes de la deformación y por $dV' = dx_1' dx_2' dx_3'$ después.

Tenemos que $dV' = dx_1' dx_2' dx_3'$ y que

$$dx_i' = dx_i + du_i \Rightarrow dV' = (dx_1 + du_1)(dx_2 + du_2)(dx_3 + du_3) \quad (3.4.21)$$

Pero $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$

$$dV' = \left(dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_j} dx_j \right) \left(dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} dx_j \right) \left(dx_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} dx_j \right) \quad (3.4.22)$$

Por otro lado,

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u^{(1)}$$

$$u_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u^{(2)}$$

$$u_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u^{(3)}$$

Como trabajamos sólo con los elementos de la diagonal

$$dV' = (1 + u^{(1)}) dx_1 (1 + u^{(2)}) dx_2 (1 + u^{(3)}) dx_3$$

$$dV' = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}) = dV (1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}) \quad (3.4.23)$$

y despreciando los términos de orden superior queda

$$dV' = dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})$$

Como la suma de los valores principales de un tensor es un invariante, $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$ es entonces igual en cualquier sistema de coordenadas y por lo tanto,

$$dV' = dV (1 + u_{ii}) \quad (3.4.24)$$

$$dV' = dV + dV u_{ii} \Rightarrow u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV} \quad (3.4.25)$$

y por consiguiente, u_{ii} es el cambio relativo del volumen.

3.5 Interpretación geométrica del tensor de deformación:

Para ver la interpretación geométrica del tensor de deformación, sustituiremos $dr_i = u_{ij} r_j$ en $r dr = r_i \delta r_i$ dándonos como resultado,

$$r dr = r_i u_{ij} r_j = u_{ij} r_i r_j \quad \text{o bien} \quad (3.5.1)$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{u_{ij} r_i r_j}{r^2} \quad (3.5.2)$$

Considerando como primer caso que \bar{r} es paralelo al eje-X, o sea, al eje- X_1 , tenemos que $r_1 = r, r_2 = r_3 = 0$, o sea $\bar{r} = (r_1, 0, 0)$ y utilizando (3.5.2) tenemos:

$$\frac{dr}{r} = \frac{u_{11} r_1^2}{r^2} = u_{11} \quad (3.5.3)$$

La componente u_{11} del tensor de deformación representa la extensión o cambio en longitud por unidad de longitud de un vector que está originalmente paralelo al eje- X_1 . Cuando $u_{11} = \partial u / \partial x_1$ es mayor que cero, $u_{11} > 0$, el cuerpo sufre una extensión y si $u_{11} < 0$, sufre una compresión.

Como segundo caso tomaremos un vector $\bar{a} = a_2 \hat{e}_2$ y un vector $\bar{b} = b_3 \hat{e}_3$ para observar la interpretación geométrica de la componente u_{23} del tensor de deformación.

Después de una deformación $\delta \bar{a}$ y $\delta \bar{b}$, los vectores \bar{a} y \bar{b} pasan a

$$\bar{a}' = \hat{e}_1 \delta a_1 + \hat{e}_2 (a_2 + \delta a_2) + \hat{e}_3 \delta a_3 \quad (3.5.4)$$

$$\bar{b}' = \hat{e}_1 \delta b_1 + \hat{e}_2 \delta b_2 + \hat{e}_3 (b_3 + \delta b_3) \quad (3.5.5)$$

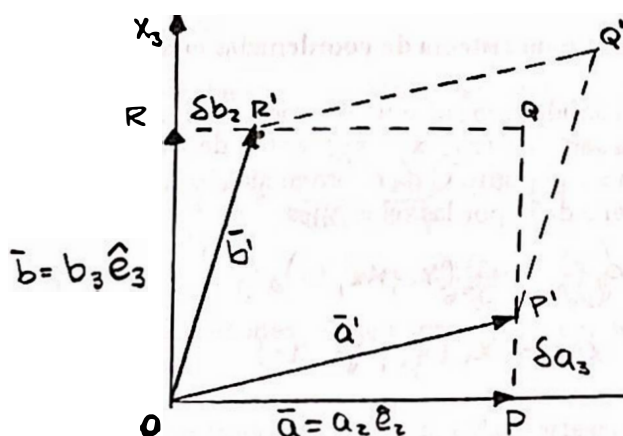


Fig. 3.5.1

Sea Θ el ángulo entre \bar{a}' y \bar{b}' y consideremos $\alpha_{23} = (\pi/2) - \Theta$ como el cambio sufrido en el ángulo recto que había entre \bar{a} y \bar{b} . Además, utilizando (3.5.4) y (3.5.5),

$$\bar{a}' \cdot \bar{b}' = a_1' b_1' \cos \Theta = \delta a_1 \delta b_1 + (a_2 + \delta a_2) \delta b_2 + (b_3 + \delta b_3) \delta a_3 \quad (3.5.6)$$

Eliminando los términos de orden superior en las deformaciones -por pequeños- tenemos:

$$\bar{a}' \cdot \bar{b}' \approx a_2 \delta b_2 + b_3 \delta a_3 \quad (3.5.7)$$

$$\cos \Theta = \frac{\bar{a}' \cdot \bar{b}'}{|\bar{a}'| |\bar{b}'|} = \frac{a_2 \delta b_2 + b_3 \delta a_3}{[(\delta a_1)^2 + (a_1 + \delta a_1)^2 + (\delta a_3)^2]^{1/2} [(\delta b_1)^2 + (\delta b_2)^2 + (b_3 + \delta b_3)^2]^{1/2}} \quad (3.5.8)$$

Despreciando de nuevo los términos de orden superior de las deformaciones

$$\begin{aligned} \cos \Theta &\approx \frac{a_2 \delta b_2 + b_3 \delta a_3}{(a_2 + \delta a_2)(b_3 + \delta b_3)} \approx \frac{a_2 \delta b_2 + b_3 \delta a_3}{a_2 b_3 + a_2 \delta b_3 + b_3 \delta a_2 + \delta a_2 \delta b_3} \\ \cos \Theta &\approx \frac{a_2 \delta b_2 + b_3 \delta a_3}{a_2 b_3} \approx \frac{\delta b_2}{b_3} + \frac{\delta a_3}{a_2} \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

donde despreciamos todas las deformaciones excepto δb_2 y δa_3 , ver Fig. 3.5.1

De las ecuaciones $\delta a_i = u_{ij} a_j$ y $\delta b_i = u_{ij} b_j$ y tomando $a_1 = a_3 = b_1 = b_2 = 0$ tenemos:

$$\delta a_i = u_{i2} a_2 \qquad \delta b_i = u_{i3} b_3$$

Como nos interesan δa_3 y δb_2 tenemos $\delta a_3 = u_{32} a_2$ y $\delta b_2 = u_{23} b_3$
De (3.5.9) teníamos

$$\cos \Theta = \cos(\pi/2 - \alpha_{23}) = \sin \alpha_{23} \approx \alpha_{23} \approx \frac{\delta b_2}{b_3} + \frac{\delta a_3}{a_2} = \frac{u_{23} b_3}{b_3} + \frac{u_{32} a_2}{a_2} = u_{23} + u_{32}$$

Como u_{ij} es un tensor simétrico, $u_{23} = u_{32} \implies \alpha_{23} \approx 2u_{23}$

En la figura 3.5.1 vemos que

$$\angle POP' \approx \tan \angle POP' = \frac{\delta a_3}{a_2} = u_{32} \quad \text{y} \quad \angle ROR' \approx \tan \angle ROR' = \frac{\delta b_2}{b_3} = u_{23}$$

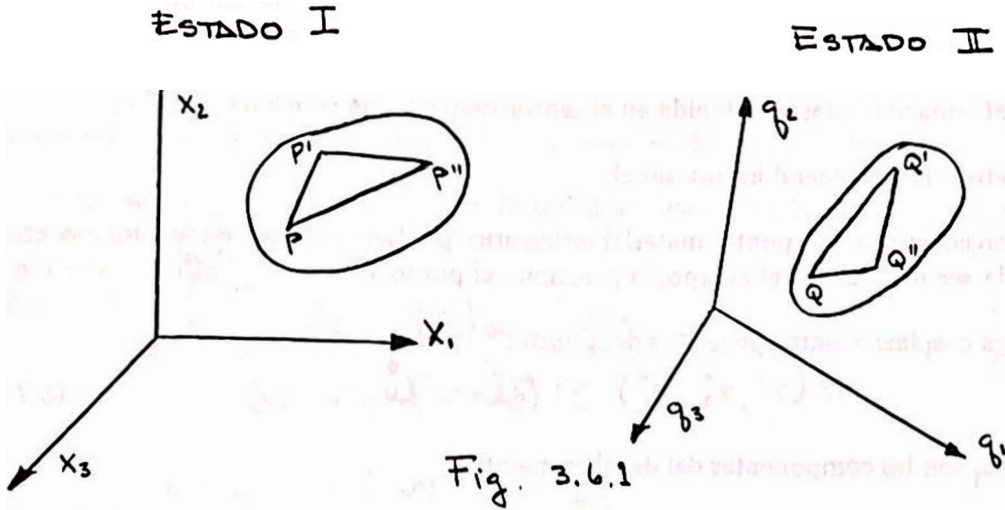
El área resultante de $\bar{a} \times \bar{b}$ es igual a la resultante de $\bar{a}' \times \bar{b}'$ y por lo tanto tenemos una deformación llamada corte puro, que es aquella en la cual el cambio en volumen del cuerpo deformado es cero.

3.6 El tensor de deformación en un sistema de coordenadas cualquiera:

Supongamos un cuerpo sólido que sufre una deformación pasando del estado I al estado II. Si P es un punto de coordenadas (x_1, x_2, x_3) antes de la deformación, después de la deformación este punto pasa a ser el punto Q de coordenadas (q_1, q_2, q_3) . La relación entre los dos sistemas de coordenadas viene dada por las relaciones

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.6.1)$$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad (3.6.2)$$



Si en el estado primitivo los puntos P, P', P'' forman un triángulo determinado, después de la deformación este triángulo pasará a ser el triángulo Q, Q', Q''. La deformación se puede medir por el cambio de longitud en los lados del triángulo.

Consideremos la longitud de uno de los lados $\overline{PP'}$; según la ecuación (2.3.3),

$$\overline{PP'}^2 = h_{ij} dx_i dx_j \tag{3.6.3}$$

Después de la deformación la distancia entre esos dos puntos QQ' será

$$QQ'^2 = g_{ij} dq_i dq_j \tag{3.6.4}$$

donde h_{ij} y g_{ij} son los tensores métricos de los sistemas de coordenadas x_i y q_i . La deformación sufrida por el cuerpo vendrá dada por:

$$\overline{PP'}^2 - \overline{QQ'}^2 = \left(g_{rs} \frac{\partial q_r}{\partial x_i} \frac{\partial q_s}{\partial x_j} - h_{ij} \right) dx_i dx_j \tag{3.6.5}$$

en función de las coordenadas x_i , o bien, por:

$$\overline{PP'}^2 - \overline{QQ'}^2 = \left(g_{ij} - h_{rs} \frac{\partial q_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_s}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j \tag{3.6.6}$$

en función de las coordenadas q_i .

A partir de estas dos relaciones podemos definir los tensores de deformación de Green E_{ij} , y de Almansi e_{ij} en la forma

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{rs} \frac{\partial q_r}{\partial x_i} \frac{\partial q_s}{\partial x_j} - h_{ij} \right) \tag{3.6.7}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - h_{rs} \frac{\partial q_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_s}{\partial q_j} \right) \tag{3.6.8}$$

El análisis de las deformaciones puede hacerse de dos modos:

1o. Utilizando los mismos ejes de coordenadas para el estado original I y el deformado II; por facilidad se utilizan con frecuencia, coordenadas cartesianas tal como lo hemos hecho en la sección 3.4 y así

$$h_{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$$

2o. Utilizando en el estado deformado II un sistema de coordenadas tal que las coordenadas de un punto q_i después de la deformación tienen los mismos valores numéricos que las coordenadas del mismo punto antes de la deformación x_i . En este caso, toda la información sobre la deformación estará contenida en el tensor métrico que relaciona q_i con x_i .

3.7 Deformación general infinitesimal:

Consideremos un punto material arbitrario $P^0(x_1, x_2, x_3)$ en un medio continuo. Después de ser deformado el cuerpo, la posición del punto $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. (Ver Fig. 3.3.1)

Los desplazamientos pequeños del punto P^0 los denotamos por

$$u_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = x_i^1 - x_i^0 \quad (3.7.1)$$

donde las u_i son las componentes del desplazamiento.

Consideremos un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ del medio sin deformar y un vector \bar{r} que une P^0 con P .

Si $P'(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ es la posición deformada de P , entonces el desplazamiento u_i del punto P es

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1^0 + r_1, x_2^0 + r_2, x_3^0 + r_3) = x_i^1 - x_i^0 \quad (3.7.2)$$

Las componentes del vector deformado \bar{r}' son $r_i' = x_i^1 - x_i^0$ si llamamos \bar{r}' a este vector.

Las componentes de $\delta \bar{r} = \bar{r}' - \bar{r}$ son

$$\begin{aligned} \delta r_i &= (x_i^1 - x_i^0) - (x_i - x_i^0) = (x_i^1 - x_i) - (x_i^0 - x_i^0) \\ \delta r_i &= u_i(x_1^0 + r_1, x_2^0 + r_2, x_3^0 + r_3) - u_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Lo anterior no es más que

$$\delta r_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 r_j \quad (3.7.4)$$

donde el "0" en la parte inferior derecha del paréntesis indica la derivada valuada en el punto P^0 .

En la ecuación (3.7.4) no hemos escrito el resto de la expansión de Taylor de la función $u_i(x_1^0 + r_1, x_2^0 + r_2, x_3^0 + r_3)$.

Podemos utilizar también la notación

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv u_{i,j} \quad (3.7.5)$$

Si escogemos a P cerca de P^0 , \bar{r} será muy pequeño y podremos tomar

$$\delta r_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j \quad (3.7.6)$$

Comparando esta ecuación con $\delta r_i = \alpha_{ij} r_j$ vemos que

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.7.7)$$

Si asumimos que los desplazamientos u_i , y sus derivadas parciales son tan pequeños que sus productos pueden despreciarse, entonces,

$$\delta r_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j$$

define una transformación infinitesimal afín de la vecindad del punto en cuestión.

Como se ha visto con anterioridad, la transformación (3.7.6) puede descomponerse en una deformación pura y un movimiento de cuerpo rígido.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] r_j \quad (3.7.8)$$

$$\delta r_i = (v_{ij} + \omega_{ij}) r_j \quad (3.7.9)$$

donde

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

3.8 Ecuaciones de compatibilidad:

La relación entre los desplazamientos y las deformaciones viene dada por

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ecuación que representa seis ecuaciones diferentes.

Para encontrar los desplazamientos a partir de las deformaciones hay seis ecuaciones con tres incógnitas (u_j).

Para que exista una solución, las componentes de los esfuerzos tienen que satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_l} = 0 \quad (3.8.1)$$

Sólo 6 de las 81 ecuaciones anteriores son esenciales y son llamadas Ecuaciones o Condiciones de Compatibilidad.

El sentido de estas condiciones es que si en el Estado sin deformar tenemos tres puntos que definen un triángulo, si nos dan el estado de las deformaciones sufridas y a partir de ellas determinamos los desplazamientos de cada uno de los tres puntos, éstos deben de ser tales que formen entre sí un triángulo. Para esto, las componentes de las deformaciones tienen que cumplir entre sí las condiciones anteriores que redujimos a seis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial v_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{31}}{\partial x_3} \right); \quad 2 \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial v_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{23}}{\partial x_1} \right); \quad 2 \frac{\partial v_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial v_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial v_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{31}}{\partial x_2} \right); \quad 2 \frac{\partial v_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

3.9 Vector de esfuerzos:

Consideremos un medio contínuo en un sistema de coordenadas rectangulares, ocupando un volumen \mathcal{V} . Sea $\Delta\mathcal{V}$ un elemento de volumen.

Si analizamos las fuerzas que actúan sobre este elemento de volumen tendremos que tomar en cuenta los dos siguientes tipos de fuerzas:

a) Fuerzas de cuerpo o volumétricas, esto es, las fuerzas que son proporcionales a la masa contenida en el elemento de volumen $\Delta\mathcal{V}$.

b) Fuerzas superficiales que actúan sobre la superficie $\Delta\mathcal{S}$ del elemento de volumen

Asumiremos que las fuerzas del tipo a) son funciones continuas de la clase C^1 y que las del tipo b) son funciones seccionalmente continuas de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) de los puntos del medio.

Sea el vector $\bar{f} = \hat{e}_i f_i$ la fuerza por unidad de volumen del medio. La fuerza resultante $\bar{F} = \hat{e}_i F_i$ donde

$$F_i = \int_{\mathcal{V}} f_i d\mathcal{V} \quad \text{o bien} \quad \bar{F} = \int_{\mathcal{V}} \bar{f} d\mathcal{V} \quad (3.9.1)$$

El momento resultante $\bar{N} = \hat{e}_i N_i$ debido a la fuerza \bar{f} puede escribirse como

$$\bar{N} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{r} \times \bar{f}) d\mathcal{V} \quad (3.9.2)$$

siendo $\bar{r} = \hat{e}_i x_i$; o bien, en componentes,

$$N_i = \int_{\mathcal{V}} \delta_{ijk} x_j f_k d\mathcal{V} \quad (3.9.3)$$

Consideremos ahora un elemento de área $\Delta\mathcal{S}$ situado en el interior o en la frontera del medio, y sea la fuerza $\bar{T} \Delta\mathcal{S}$ la que actúa sobre el elemento $\Delta\mathcal{S}$.

Como asumimos continuidad de fuerzas tenemos

$$\lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{\bar{T} \Delta\mathcal{S}}{\Delta\mathcal{S}} = \bar{T}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.9.4)$$

donde \bar{T} es un vector que representa la fuerza superficial por unidad de área que actúa en el punto (x_i) y es llamado "vector de esfuerzos" o "tensión".

3.10 El tensor de esfuerzos o tensor de tensiones:

Cuando un cuerpo no se encuentra deformado, sus moléculas están distribuidas de una manera tal que corresponde a su estado de equilibrio térmico.

Cada una de las partes de este cuerpo se encontrará, además, en equilibrio mecánico; esto es que, la suma de fuerzas que actúan sobre una parte del cuerpo, debida a las demás partes, es cero.

Al ser deformado un cuerpo, la distribución de las moléculas cambia y por lo tanto, el cuerpo deja de estar en su estado de equilibrio normal. Al deformarse un cuerpo aparecen ciertas fuerzas internas llamadas tensiones internas, las cuales sólo existen cuando hay alguna deformación.

Las tensiones internas, citadas con anterioridad, se originan debido a las fuerzas moleculares, esto es, debido a las fuerzas de interacción entre las moléculas.

Como las fuerzas moleculares tienen un radio de acción muy corto, su efecto alcanza sólo a las moléculas vecinas y actúa hasta una distancia del mismo orden que las distancias entre moléculas. Por otro lado, la Teoría de la Elasticidad es una teoría macroscópica que sólo toma en cuenta distancias grandes comparadas con las intermoleculares, por lo que en esta teoría consideraremos el radio de acción de las fuerzas moleculares como igual a cero.

Por lo tanto, las fuerzas que producen las tensiones internas son de corto alcance, por lo que sólo llegan a actuar sobre la superficie de las partes vecinas. (Salvo en materiales piroeléctricos y piezoeléctricos).

Consideremos la fuerza total que se ejerce sobre un volumen del cuerpo. Esta fuerza total es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos de volumen de la parte considerada y puede escribirse como

$$\bar{F} = \sum f_i \Delta \tau_i \quad (3.10.1)$$

$$\text{o bien} \quad F = \int_{\tau} \bar{f} d\tau \quad (3.10.2)$$

donde \bar{f} es la fuerza por unidad de volumen y $f d\tau$ la fuerza que se ejerce sobre el elemento de volumen $d\tau$.

Las fuerzas que los distintos elementos de la porción considerada ejercen unos sobre otros, se anulan mutuamente por la tercera ley de Newton. La fuerza total requerida puede entonces considerarse como la suma de las fuerzas que ejercen, sobre el volumen en cuestión, las porciones del sólido que lo rodean.

Como estas fuerzas actúan sobre la superficie de la región considerada, la fuerza resultante puede representarse como la suma de las fuerzas que se ejercen sobre todos los elementos de superficie, o sea, mediante una integral de superficie.

Por lo tanto, para cualquier parte del sólido, cada una de las tres componentes $\int f_i d\tau$ de la resultante de todas las tensiones internas se puede transformar en una integral de superficie.

Utilizando el Teorema de la Divergencia de Gauss en su forma 2.2.2, tenemos que expresar a f_i como la divergencia de un tensor de segundo rango, por ser f_i un vector. O sea,

$$f_i = \partial_j \sigma_{ij} \quad (3.10.3)$$

$$\text{y } \int f_i d\tau \text{ la expresaremos como } \int \partial_j \sigma_{ij} d\tau \quad (3.10.4)$$

y por 2.2.2 tenemos

$$\int \partial_j \sigma_{ij} d\tau = \oint \sigma_{ij} n_j d\tau = \oint \sigma_{ij} ds_j \quad (3.10.5)$$

donde ds_j son las componentes del vector elemento de superficie $d\bar{s}$, dirigido según la normal exterior de la superficie.

El tensor σ_{ij} recibe el nombre de tensor de esfuerzos o tensor de tensiones.

$\sigma_{ij} ds_j$ es la i -ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de

superficie $d\bar{s}$. La componente σ_{ij} del tensor de tensiones es la i -ésima componente de la fuerza que actúa sobre la unidad de área perpendicular al eje x_j .

Calcularemos ahora el momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo. Este tendrá por componentes $F_i x_j - F_j x_i$ siendo x_i las coordenadas del punto donde se aplica la fuerza. El momento de la fuerza \vec{f} se define como el producto vectorial $\vec{f} \times \vec{r}$.

El cálculo anterior era para una parte del cuerpo. El momento de las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen $d\tau$ es $(f_i x_j - f_j x_i) d\tau$ y sobre todo el volumen τ es

$$N_{ij} = \int_{\tau} (f_i x_j - f_j x_i) d\tau \quad (3.10.6)$$

Este momento lo podemos expresar como una integral sobre la superficie que rodea el volumen.

Como $f_i = \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l}$ y $f_j = \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_l}$, el momento lo podemos expresar así:

$$N_{ij} = \int_{\tau} \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_j - \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_l} x_i \right) d\tau \quad (3.10.7)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial (\sigma_{il} x_j)}{\partial x_l} = \sigma_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} + x_j \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} \quad (3.10.8)$$

y

$$\frac{\partial (\sigma_{jl} x_i)}{\partial x_l} = \sigma_{jl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} + x_i \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_l} \quad (3.10.9)$$

Sustituyendo en N_{ij} los segundos términos del miembro derecho de las ecuaciones 3.10.8 y 3.10.9 tenemos

$$N_{ij} = \int_{\tau} \frac{\partial (\sigma_{il} x_j - \sigma_{jl} x_i)}{\partial x_l} d\tau - \int_{\tau} \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} - \sigma_{jl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) d\tau \quad (3.10.10)$$

Como x_j y x_i son variables independientes

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il} \quad (3.10.11)$$

$$\text{Luego,} \quad \sigma_{il} \delta_{jl} = \sigma_{ij} \quad \text{y} \quad \sigma_{jl} \delta_{il} = \sigma_{ji} \quad (3.10.12)$$

$$\text{y por consiguiente} \quad N_{ij} = \int_{\tau} \frac{\partial (\sigma_{il} x_j - \sigma_{jl} x_i)}{\partial x_l} d\tau - \int_{\tau} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) d\tau \quad (3.10.13)$$

Aplicando ahora el Teorema de la Divergencia de Gauss para tensores (Ec.2.2.2)

$$N_{ij} = \oint_S (\sigma_{il} x_j - \sigma_{jl} x_i) dS_l + \int_{\tau} (\sigma_{ji} - \sigma_{ij}) d\tau \quad (3.10.14)$$

Como necesitamos que N_{ij} se pueda expresar solo como una integral de superficie entonces

$$\int_{\tau} (\sigma_{ji} - \sigma_{ij}) d\tau \quad (3.10.15)$$

debe ser cero y para esto
por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} - \sigma_{ij} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \end{aligned}$$

Deducimos pues, que el tensor de tensiones es simétrico y el momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo, será:

$$N_{ij} = \int_V (f_i x_j - f_j x_i) d\tau = \oint_S (\sigma_{ie} x_j - \sigma_{je} x_i) dS_e \quad (3.10.17)$$

Para una deformación arbitraria, las componentes no diagonales del tensor de tensiones serán diferentes de cero.

3.11 Ecuaciones para los casos de equilibrio

En el equilibrio la suma de tensiones internas en cada elemento de volumen debe ser cero, o sea,

$$f_i = 0 \quad \text{y por lo tanto,} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.11.1)$$

será la ecuación de equilibrio para un cuerpo deformado.

Si el cuerpo está en el campo gravitatorio, entonces

$$\vec{f} + \rho \vec{g} = 0 \quad (3.11.2)$$

donde f = total de fuerzas internas por unidad de volumen
 ρ = densidad (para pequeñas deformaciones usaremos $d\rho=0$)
 g = aceleración de la gravedad

La ecuación de equilibrio será pues:

$$f_i + \rho g_i = 0 \quad (3.11.3)$$

o sea,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (3.11.4)$$

Como al tomar en cuenta las condiciones de contorno de las ecuaciones de equilibrio aparecen las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie del cuerpo, consideraremos a \vec{P} como la fuerza externa por unidad de área del cuerpo. Sobre un elemento de área ds actuará una fuerza $\vec{P} ds$, la cual deberá ser anulada, para el caso del equilibrio, por la fuerza $-\sigma_{ij} ds_j$ debida a las tensiones internas que actúan sobre dicho elemento de superficie, o sea,

$$P_i ds - \sigma_{ij} ds_j = 0 \quad (3.11.5)$$

Sustituyendo ds_j por $n_j ds$, siendo n_j un vector unitario en la dirección de la normal externa a la superficie, obtenemos:

$$P_i ds - \sigma_{ij} n_j ds = 0 \quad (3.11.6)$$

y por lo tanto

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.11.7)$$

que es la condición de frontera que debe cumplirse en cada punto de la superficie de un cuerpo en equilibrio.

Calculamos ahora el valor medio del tensor de tensiones de un cuerpo deformado.

Multiplicando la ecuación $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ por x_j e integrando luego sobre el volumen τ tenemos:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_j d\tau \quad (3.11.8)$$

Como

$$\frac{\partial (\sigma_{il} x_j)}{\partial x_l} = \sigma_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} + x_j \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} \quad (3.11.9)$$

entonces

$$\int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_j d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial (\sigma_{il} x_j)}{\partial x_l} d\tau - \int_{\tau} \sigma_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} d\tau = 0 \quad (3.11.10)$$

Utilizando el Teorema de la Divergencia de Gauss para tensores en la primer integral del miembro derecho

$$\int_{\tau} \frac{\partial (\sigma_{il} x_j)}{\partial x_l} d\tau = \oint_S \sigma_{il} x_j dS_l \quad (3.11.11)$$

y poniendo $\frac{\partial x_l}{\partial x_l} = \delta_{il}$ tenemos:

$$\oint_S \sigma_{il} x_j dS_l - \int_{\tau} \sigma_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} d\tau = \oint_S \sigma_{il} x_j dS_l - \int_{\tau} \sigma_{il} \delta_{jl} d\tau = 0 \quad (3.11.12)$$

$$\text{Como } \sigma_{il} dS_l = \sigma_{il} n_l ds \quad \text{y} \quad \sigma_{il} n_l = P_i \quad (3.11.13)$$

$$\begin{aligned} \text{entonces} \quad \oint_S \sigma_{il} x_j dS_l &= \oint_S P_i x_j ds \\ \text{teniendo ahora} \quad \oint_S P_i x_j ds &= \int_{\tau} \sigma_{ij} d\tau \end{aligned} \quad (3.11.14)$$

Como el valor medio de una cantidad tensorial en un volumen dado τ es

$$\bar{\Delta}_{ij} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \Delta_{ij} d\tau \quad (3.11.15)$$

$$\text{entonces} \quad \int_{\tau} \sigma_{ij} d\tau = \tau \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.11.16)$$

siendo $\bar{\sigma}_{ij}$ el valor promedio del tensor de tensiones en todo el volumen.

Dado que el tensor de tensiones es simétrico, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y que su valor promedio es

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\tau} \oint_S P_i x_j ds \quad (3.11.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \text{ lo podemos escribir como } & \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) \\ \int_{\tau} \sigma_{ij} d\tau &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ji} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) d\tau \end{aligned} \quad (3.11.18)$$

$$= \frac{1}{2} \oint_S (P_i x_j + P_j x_i) ds = \tau \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.11.19)$$

con lo cual expresamos $\overline{\sigma}_{ij}$ en la forma simétrica

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2\epsilon} \oint (P_i x_j + P_j x_i) ds \quad (3.11.20)$$

3.12 Interpretación geométrica del tensor de esfuerzos

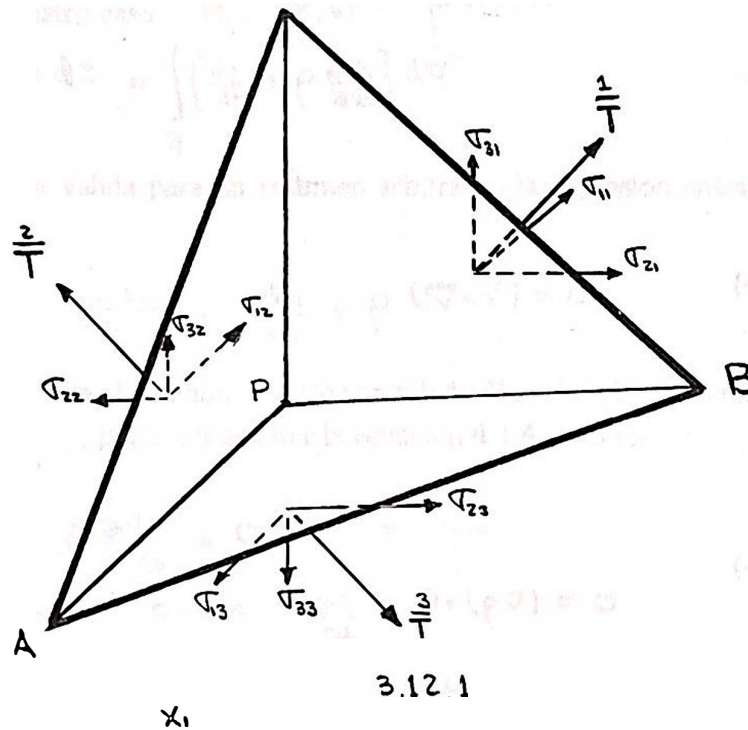
Para tener una evidencia explícita de la dependencia del vector de esfuerzos \overline{T} de la orientación del elemento de superficie, lo escribiremos ahora así \overline{T} . En general \overline{T} no está en la dirección $\overline{\nu}$.

El estado de esfuerzos de cualquier punto de un medio está completamente caracterizado por la especificación de nueve cantidades que son las componentes del tensor de esfuerzos.

Sea $P(x)$ un punto en el medio, $\overline{\nu}$ el vector de esfuerzos actuando sobre un elemento de superficie en P , con la normal $\overline{\nu}$.

Consideremos 3 superficies planas, paralelas a los ejes de coordenadas, que pasan a través de P , y un cuarto plano ABC normal a $\overline{\nu}$ y a una pequeña distancia δ_n desde P .

Tenemos ahora la siguiente figura:



en la cual \overline{T} es el vector de esfuerzos que actúa sobre la cara PBC del tetraedro $PABC$ y \overline{T}^1 y \overline{T}^2 actúan sobre las caras PAC y PAB respectivamente.

Entonces, \overline{T}^i es el vector de esfuerzos que actúa sobre un elemento de superficie plano normal al eje x_j . Cada uno de estos tres vectores tiene tres componentes y por eso tenemos que

$$\overline{T}_i^j = \hat{e}_i \cdot \overline{T}^j \quad (3.12.1)$$

Es más conveniente escribir $\overline{T}_i^j \equiv \sigma_{ij}$ (3.12.2)

y por eso

$$\frac{\bar{T}}{T} = \hat{e}_i \sigma_{ij} \quad (3.12.3)$$

El vector de esfuerzos \bar{T} puede ser calculado a partir de los σ_{ij} para cualquier orientación \bar{v} del elemento de superficie en P. El significado de los subíndices en las componentes σ_{ij} del tensor de esfuerzos con respecto al vector de esfuerzos, es el siguiente: El primer subíndice "i" indica la dirección de la componente del vector de esfuerzos \bar{T} , mientras que el segundo subíndice "j" indica el eje de coordenadas normal al elemento de área sobre el cual el vector \bar{T} está actuando.

Si conocemos los esfuerzos a través de tres planos perpendiculares entre sí $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, podemos escribir el esfuerzo a través de un plano cualquier cuya normal es \bar{v} en función de estos esfuerzos. Si escogemos los tres planos normales a los tres ejes de coordenadas, ellos definen las nueve componentes del tensor σ_{ij} y el esfuerzo \bar{T} a través del plano cuya normal es \bar{v} viene dado por

$$\bar{T}_i = \sigma_{ij} v_j \quad (3.12.4)$$

4. ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA ELASTICIDAD

4.1 La ecuación de continuidad

Con esto buscamos expresar en una ecuación el hecho de que la masa de cualquier porción dada de materia se conserva.

Sea m la masa contenida en un cuerpo o region de volumen τ en un tiempo t . Esta viene dada por

$$m = \int_{\tau} \rho(x_i, t) d\tau \quad (4.1.1)$$

donde $\rho(x_i, t)$ es la densidad que depende de la posición y del tiempo. La conservación de masa requiere que la masa de una porción específica del cuerpo continuo permanezca constante y por lo tanto la derivada material de la Ec. 4.1.1 debe ser cero.

La derivada material de una integral de volumen es

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_{ij\dots}^*(\bar{x}, t) d\tau = \int_{\tau} \left[\frac{d\rho_{ij\dots}^*(\bar{x}, t)}{dt} + \rho_{ij\dots}^*(\bar{x}, t) \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \right] d\tau \quad (4.1.2)$$

Considerando para nuestro caso $\rho_{ij\dots}^*(\bar{x}, t) = \rho(\bar{x}, t)$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho(\bar{x}, t) d\tau = \int_{\tau} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] d\tau \quad (4.1.3)$$

Como esta ecuación es válida para un volumen arbitrario, la expresión entre corchetes debe ser igual a cero, o sea,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{o bien,} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4.1.4)$$

Esta ecuación es llamada Ecuación de Continuidad. Usando el operador derivada material $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_p \frac{\partial}{\partial x_p}$, podemos escribir la ecuación 4.1.4 en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{o sea} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Para un cuerpo continuo incompresible la densidad de cada partícula es independiente del tiempo, por lo que $\frac{d\rho}{dt} = 0$ y la ecuación 4.1.4 se convierte en $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Como la divergencia de cualquier rotor es cero, la velocidad $\vec{v}(\bar{x}, t)$ de un cuerpo continuo incompresible puede ser expresada por la ecuación $\vec{v} = \nabla \times \vec{\xi}$ con componentes $v_i = \delta_{ijk} \partial_j \xi_k$ en la cual $\vec{\xi}(\bar{x}, t)$ es llamado el vector potencial de \vec{v}

La ecuación de continuidad puede también ser expresada en la forma material o Lagrangiana. La conservación de la masa requiere que esta sea la misma al inicio y a cualquier tiempo t , esto es,

$$\int_{\tau_0} \rho_0(\bar{x}, 0) d\tau_0 = \int_{\tau} \rho(\bar{x}, t) d\tau \quad (4.1.6)$$

donde las integrales se toman sobre las mismas partículas y $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ siendo x_i las coordenadas materiales de un punto del cuerpo.

$$\text{Tomando en cuenta que } \chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.1.7)$$

o sea, $\chi_i = \chi_i(\bar{x}, t)$ y por otro lado el elemento de volumen es

$$d\tau = \delta_{ijk} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \chi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.1.8)$$

en el cual $J = \det(\partial \chi_i / \partial x_j)$ es el Jacobiano de la transformación 4.1.7 y $d\tau_0 = dx_1 dx_2 dx_3$ podemos expresar la Ec. 4.1.6 en la siguiente forma:

$$\int_{\tau} \rho(\bar{x}, t) d\tau = \int_{\tau_0} \rho_0(\bar{x}, 0) d\tau_0 = \int_{\tau_0} \rho(\chi_i(\bar{x}, t), t) J d\tau_0 = \int_{\tau_0} \rho(\bar{x}, t) J d\tau_0 \quad (4.1.9)$$

Como la relación anterior debe cumplirse para cualquier volumen τ_0 , entonces $\rho = \rho J$ lo cual implica que el producto ρJ es independiente del tiempo siempre que el volumen sea arbitrario, o sea que

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = 0$$

ecuación que se conoce como forma diferencial Lagrangiana de la ecuación de continuidad.

4.2 Ley de Hooke

Se tratará de expresar la energía libre F del cuerpo como una función del tensor de deformaciones.

Al considerar sólo deformaciones pequeñas se puede desarrollar F en serie de potencias de u_{ij} . Se considerarán sólo cuerpos isótropos.

El estado no deformado de un cuerpo es cuando éste está en ausencia de fuerzas externas y a la misma temperatura. Cuando la deformación es cero ($u_{ij} = 0$), las tensiones internas son cero ($\sigma_{ij} = 0$).

Como $\sigma_{ij} = \partial F / \partial u_{ij}$ entonces en el desarrollo de F en serie de potencias de u_{ij} no pueden aparecer términos lineales. Como F es escalar, cada término de la serie debe ser escalar.

Expresando F en potencias de u_{ij} —hasta el orden dos— resulta

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} U_{ii}^2 + \mu U_{ij}^2 \quad (4.2.1)$$

o sea, la energía libre de un cuerpo isótropo deformado, donde F_0 es la energía libre del cuerpo, no deformado, U_{ii}^2 es el cuadrado de la suma de los elementos diagonales, U_{ij}^2 es la suma de los cuadrados de todas las componentes del tensor u_{ij} y λ, μ son los coeficientes de Lamé.

El $\Delta\tau =$ cambio de volumen $= U_{ii}$ y si $U_{ii} = 0$ entonces $\Delta\tau = 0$ durante la deformación y por lo tanto, sólo hay cambio de forma en el cuerpo. A este tipo de deformación se le llama deformación de corte.

Otro caso es cuando no cambia la forma del cuerpo pero sí su volumen. A este tipo de deformación se le llama compresión hidrostática.

Toda deformación se puede representar como la suma de un corte y de una compresión hidrostática.

$$U_{ij} = (U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee} \quad (4.2.2)$$

donde $U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee}$ es un corte puro y $\frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee}$ es una compresión hidrostática.

Utilizando la descomposición anterior, Ec. 4.2.2, podemos expresar la energía libre de un cuerpo isótropo deformado así:

$$F = \mu (U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee})^2 + \frac{k_e}{2} U_{ee}^2 \quad (4.2.3)$$

en la cual F_0 se consideró cero, K es el módulo de compresión hidrostática y μ el módulo de rigidez.

Para que F dado por la Ec. 4.2.3 nos dé la misma expresión que la Ec. 4.2.1 cuando $F_0 = 0$, K tiene que ser igual a $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ que es la relación entre el Módulo de Compresión hidrostática y los coeficientes de Lamé, la cual puede ser comprobada así:

$$F = \mu (U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee})^2 + \frac{k_e}{2} U_{ee}^2$$

desarrollando el paréntesis y sustituyendo $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ tenemos

$$F = \mu U_{ij}^2 - \frac{2}{3} \mu U_{ii}^2 + \frac{1}{3} \mu U_{ee}^2 + \frac{\lambda}{2} U_{ii}^2 + \frac{1}{3} \mu U_{ii}^2$$

$$F = \mu U_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} U_{ii}^2 \quad (4.2.4)$$

Los módulos de compresión y rigidez son positivos. Para calcular el tensor de tensiones (o de esfuerzos) usaremos la ecuación

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial U_{ij}} \right)_T \quad (4.2.5)$$

dF (a temperatura constante) es

$$dF = K U_{ee} dU_{ee} + 2\mu (U_{ij} dU_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} \delta_{ij} dU_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} U_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{9} U_{ee}^2 \delta_{ij}^2)$$

$$dF = K U_{ee} dU_{ee} + 2\mu (U_{ij} dU_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} \delta_{ij} dU_{ij})$$

Como $dU_{ee} = \delta_{ij} dU_{ij}$

$$dF = [K U_{ee} \delta_{ij} + 2\mu (U_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} \delta_{ij})] dU_{ij} \quad (4.2.6)$$

$$\frac{dF}{dU_{ij}} = K U_{ee} \delta_{ij} + 2\mu (U_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} \delta_{ij})$$

y por Ec. 4.2.5

$$\sigma_{ij} = K U_{ee} \delta_{ij} + 2\mu (U_{ij} - \frac{1}{3} U_{ee} \delta_{ij}) \quad (4.2.7)$$

Expresaremos ahora U_{ij} en función de σ_{ij}

$$\sigma_{ii} = K U_{ee} \delta_{ii} + 2\mu (U_{ii} - \frac{1}{3} \delta_{ii} U_{ee}) \quad (4.2.8)$$

$$\sigma_{ii} = 3K U_{ii} \Rightarrow U_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii} \quad \text{y} \quad U_{ee} = \frac{1}{3K} \sigma_{ee} \quad (4.2.9)$$

Sustituyendo estas expresiones en 4.2.7 obtenemos

$$\sigma_{ij} = \kappa \left(\frac{1}{3} \sigma_{ee} \delta_{ij} \right) + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} \sigma_{ee} \delta_{ij} \right) \right)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{ee} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} - \frac{2\mu}{3\kappa} \sigma_{ee} \delta_{ij}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{9\kappa} \delta_{ij} \sigma_{ee} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ee} \right) \quad (4.2.10)$$

En la compresión hidrostática de un cuerpo el tensor de tensiones es $\sigma_{ij} = -P \delta_{ij}$ y

$$\sigma_{ii} = -P \delta_{ii} = -3P \quad (4.2.11)$$

$$\dots \quad u_{ii} = \frac{1}{3\kappa} \sigma_{ii} = -\frac{3P}{3\kappa} = -P/\kappa \quad (4.2.12)$$

Dado que son cantidades pequeños podemos tomar

$$\frac{u_{ii}}{P} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P} \right)_T \quad (4.2.13)$$

$$\text{y como } u_{ii} = -\frac{P}{\kappa} \Rightarrow \frac{u_{ii}}{P} = -\frac{1}{\kappa} \quad (4.2.14)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P} \right)_T \quad (4.2.15)$$

donde $\frac{1}{\kappa}$ es llamado coeficiente de compresión hidrostática o coeficiente de compresión.

Viendo la ecuación 4.2.10, el tensor de deformación u_{ij} es una función lineal del tensor de tensiones σ_{ij} , o sea, que la deformación es proporcional a las fuerzas aplicadas al cuerpo.

Esta ley se conoce como Ley de Hooke y se puede aplicar a casi todas las deformaciones de tipo elástico.

Otra forma de expresar la energía libre de un cuerpo deformado es usando el teorema de Euler

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2\Phi \quad \text{donde } X \text{ es un tensor} \quad (4.2.16)$$

$$\text{tenemos } u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} = 2F \quad (4.2.18)$$

$$\text{como } \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow F = \frac{\sigma_{ij} u_{ij}}{2} \quad (4.2.18)$$

$$\text{Aplicando de nuevo el Teorema de Euler } \sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \quad (4.2.19)$$

$$2F = \sigma_{ij} u_{ij} \Rightarrow u_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.2.20)$$

4.3 Ley de Hooke generalizada

El estado de esfuerzos en un medio continuo está completamente determinado por σ_{ij} y el tensor de deformación u_{ij} .

Asumiremos que cuando un medio elástico se mantiene a temperatura fija hay una relación uno a uno.

$$\sigma_{ij} = F_{ij} (e_{11}, e_{22}, \dots, e_{12}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.3.1)$$

entre σ_{ij} y U_{ij} y los σ_{ij} son cero cuando los U_{ij} son todos cero.

Esto último significa que en el estado inicial no deformado el cuerpo no está sometido a esfuerzos netos.

Si expandemos las funciones F_{ij} en una serie de potencias en U_{ij} y sólo retenemos los términos lineales, en la expansión tenemos

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} U_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4.3.2)$$

Los coeficientes C_{ijkl} variarán de un punto a otro del medio. Si son independientes de la posición del punto, el medio es llamado elásticamente homogéneo.

La ecuación 4.3.2 es una generalización natural de la Ley de Hooke y es utilizada en todos los desarrollos de la teoría lineal de la elasticidad.

Como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ podemos usar $C_{ijkl} = C_{jilk}$

Como consideramos que C_{ijkl} ha sido simetrizado, entonces a lo sumo habrá 36 constantes independientes en la ley general esfuerzo-deformación dada por la Ec. 4.3.2

Introduciremos la notación

$$\sigma_{11} = \sigma_1 \quad \sigma_{22} = \sigma_2 \quad \sigma_{33} = \sigma_3 \quad \sigma_{23} = \sigma_4 \quad \sigma_{31} = \sigma_5 \quad \sigma_{12} = \sigma_6$$

y

$$U_{11} = U_1 \quad U_{22} = U_2 \quad U_{33} = U_3 \quad 2U_{23} = U_4 \quad 2U_{31} = U_5 \quad 2U_{12} = U_6$$

y escribiremos las ecuaciones 4.3.2 así

$$\sigma_1 = C_{11} U_1 + C_{12} U_2 + C_{13} U_3 + C_{14} U_4 + C_{15} U_5 + C_{16} U_6$$

⋮

$$\sigma_6 = C_{61} U_1 + C_{62} U_2 + C_{63} U_3 + C_{64} U_4 + C_{65} U_5 + C_{66} U_6$$

o bien $\sigma_i = C_{ij} U_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.3.3)$

Las relaciones entre los σ_i y los U_i deben ser reversibles y por eso

$$|C_{ij}| \neq 0 \quad U_i = C_{ij}^{-1} \sigma_j \quad (4.3.4)$$

Las constantes C_{ij} con llamadas constantes elásticas o módulos de elasticidad del material.

Como los U_i son adimensionales, los C_{ij} tienen las mismas dimensiones que las componentes de los esfuerzos.

El número (36) de las constantes elásticas se reduce a 21 cuando existe una función

$$F = \frac{1}{2} C_{ij} U_i U_j \quad (4.3.5)$$

con la propiedad de que

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = \sigma_i \quad (4.3.6)$$

Si suponemos que la forma 4.3.5 es simétrica, entonces

$$F = C_{ij} u_i u_j \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial u_i} = C_{ij} u_j = \sigma_i \quad (4.3.7)$$

por lo tanto $\sigma_i = C_{ij} u_j$ (4.3.8)

La función es llamada función de densidad de energía de deformación.

Para el caso más general de un cuerpo elástico anisotrópico el número de constantes elásticas independientes en la Ley de Hooke generalizada es 21.

Si el medio es elásticamente simétrico en ciertas direcciones el número de C_{ij} independiente en $\sigma_i = C_{ij} u_j$ se reduce más.

Si hay simetría con respecto a un plano nos quedan 13 constantes. Si la simetría es con respecto a 3 planos mutuamente perpendiculares, las constantes se reducen a 9.

Cuando las propiedades elásticas de un cuerpo son idénticas en todas direcciones, o sea, si el cuerpo es elásticamente isotrópico, el número de constantes elásticas esenciales se reduce a 2.

4.4 Medio isotrópico homogéneo

Cuando un medio es isotrópico sus propiedades elásticas son independientes de la orientación de los ejes de coordenadas. En particular los coeficientes C_{ij} deben permanecer invariantes cuando introducimos nuevos ejes de coordenadas x'_j obtenidos por rotar el sistema $x_1-x_2-x_3$ un ángulo recto sobre el eje x_1 .

La Ley de Hooke generalizada para un cuerpo homogéneo e isotrópico puede ser escrita de la siguiente manera.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu u_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4.1)$$

donde $\vartheta = u_{ii}$

Haciendo $i=j$ en 4.4.1 y definiendo $\Theta = \sigma_{ii}$ tenemos

$$\Theta \equiv \sigma_{ii} = 3\lambda \vartheta + 2\mu u_{ii} = 3\lambda \vartheta + 2\lambda \vartheta = (3\lambda + 2\mu) \vartheta \quad (4.4.2)$$

A partir de la ecuación 4.4.1 podemos expresar los u_{ij} en función de los σ_{ij} así

$$u_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \vartheta}{2\mu}$$

o bien,

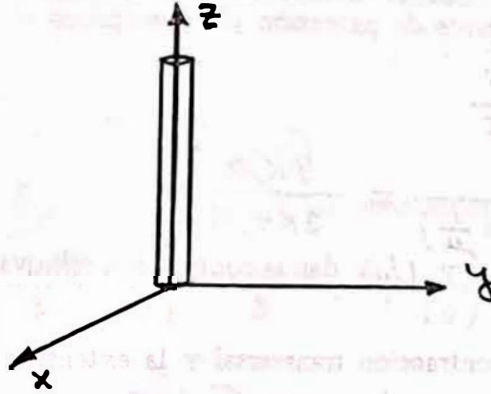
$$u_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \Theta}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Las constantes λ y μ son las constantes de Lamé.

4.5 Deformaciones homogéneas

Una deformación es homogénea cuando el tensor de deformaciones u_{ij} y por consiguiente el tensor de tensiones σ_{ij} son constantes, es decir, tienen el mismo valor en todo punto del cuerpo.

Estudiaremos ahora una varilla colocada sobre el eje z así:



En las tapas de los extremos de la varilla se aplican fuerzas en sentidos opuestos actuando uniformemente en toda la superficie de los extremos. Sea P la fuerza por unidad de área en los extremos.

En la superficie lateral de la varilla no se aplica ninguna fuerza por lo que $\sigma_{ij} n_j = 0$. Además en las superficies laterales $n_z = 0$.

Como sólo nos interesa la componente z de las fuerzas que se aplican sobre los elementos de área perpendiculares al eje z, entonces $\sigma_{ij} = 0$ salvo para σ_{zz} .

En las tapas tendremos $\sigma_{zi} n_i = P$ y como sólo $\sigma_{zz} \neq 0$ resulta $\sigma_{zz} = P$.

En la ecuación 4.2.10, cuando $i \neq j$ entonces $\delta_{ij} = 0$ y $\sigma_{ij} = 0$ quedando solamente

$$U_{ii} = \frac{1}{9K} \delta_{ii} \sigma_{zz} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ii} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \sigma_{zz} \right) \quad (4.5.1)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{zz}$$

Calculando U_{xx} a partir de 4.5.1 tenemos

$$U_{xx} = \frac{1}{9K} \sigma_{zz} + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{1}{3} \sigma_{zz} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{zz} \quad (4.5.2)$$

$$U_{xx} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) P$$

La componente U_{yy} del tensor de deformación la calculamos en forma similar y nos resulta.

$$U_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) P \quad (4.5.3)$$

Por último la componente U_{zz} será

$$U_{zz} = \frac{1}{9K} (\delta_{33} \sigma_{zz}) + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} \delta_{33} \sigma_{zz} \right) \quad (4.5.4)$$

$$U_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{9K} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{2}{3} \sigma_{zz} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) \sigma_{zz}$$

$$U_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) P$$

La componente U_{zz} da el cambio relativo de longitud de la varilla siendo el coeficiente de ρ el coeficiente de extensión y su recíproco el módulo de extensión o de Young.

$$U_{zz} = \frac{P}{E} \quad (4.5.5)$$

donde

$$E = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (4.5.6)$$

Las componentes U_{xx} y U_{yy} dan la contracción relativa de la varilla en la dirección transversal.

El cociente entre la contracción transversal y la extensión longitudinal es el llamado coeficiente de Poisson σ .

$$U_{xx} = -\sigma U_{zz}$$

$$U_{xx} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) P \quad U_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) P$$

$$-\frac{U_{xx}}{U_{zz}} = \frac{\frac{3K-2\mu}{6\mu K}}{\frac{\mu+3K}{3K\mu}} = \frac{1}{2} \frac{(3K-2\mu)}{3K+\mu} = \sigma \quad (4.5.7)$$

Como $K > 0$ y $\mu > 0$, σ tiene como extremos los valores para los cuales $K=0$ y $\mu=0$, los cuales dan $\sigma = -1$ y $\sigma = 1/2$ respectivamente siendo estos los límites que indican el rango de variación de σ , o sea

$$-1 \leq \sigma \leq 1/2$$

El aumento relativo de volumen de la varilla es

$$U_{\Delta L} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) P + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) P \quad (4.5.8)$$

$$U_{\Delta L} = \left(-\frac{2}{6\mu} + \frac{2}{9K} + \frac{1}{9K} + \frac{1}{3\mu} \right) P = \frac{1}{3K} P$$

La energía libre $F = \frac{\sum_{ij} U_{ij}}{2}$ se reduce a $F = \frac{1}{2} \sigma_{zz} U_{zz}$

$$U_{zz} = P/E \quad \sigma_{zz} = P \quad F = \frac{P^2}{2E} \quad (4.5.9)$$

Si utilizamos las E y σ en vez de K y μ podremos expresar F , σ_{ij} y U_{ij} en función de E y σ .

$$\text{Partiremos de } E = \frac{9K\mu}{3K+\mu} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{(3K-2\mu)}{3K+\mu}$$

$$\mu = \frac{3KE}{9K-E}$$

mientras que

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{3K - 6KE/9K-E}{3K + 3KE/9K-E} \right)$$

$$2\sigma = \frac{27K^2 - 3KE - 6KE}{27K^2} = \frac{3K-E}{3K}$$

$$6\sigma K = 3K - E$$

$$\Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

Sustituyendo K en $\mu = \frac{3KE}{9K-E}$ tenemos $\mu = \frac{3E^2/3(1-2\sigma)}{9E/3(1-2\sigma)-E} = \frac{3E}{6+6\sigma}$ (4.5.10)

$$\therefore \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad (4.5.11)$$

Además $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$; sustituyendo las ecuaciones 4.5.10 y 4.5.11 en la anterior tendremos que

$$\lambda = \frac{E}{3(1-2\sigma)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

y simplificando

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \quad (4.5.12)$$

Sustituyendo ahora λ y μ en la Ec. 4.2.4. obtenemos

$$F = \frac{E\sigma}{2(1-2\sigma)(1+\sigma)} U_{ii}^2 + \frac{E}{2(1+\sigma)} U_{ij}^2 \quad (4.5.13)$$

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} U_{ii}^2 + U_{ij}^2 \right)$$

Si en la expresión

$$\sigma_{ij} = K U_{ee} \delta_{ij} + 2\mu \left(U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee} \right)$$

sustituimos K y μ obtenemos

$$\sigma_{ij} = \frac{E U_{ee} \delta_{ij}}{3(1-2\sigma)} + \frac{E}{1+\sigma} \left(U_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} U_{ee} \right)$$

y después de un poco de álgebra obtendremos

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left(U_{ij} + \frac{\sigma U_{ee} \delta_{ij}}{(1-2\sigma)} \right) \quad (4.5.14)$$

y

$$U_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\sigma) \sigma_{ij} - \sigma U_{ee} \delta_{ij} \right] \quad (4.5.15)$$

4.6 Ecuaciones de equilibrio para un sólido elástico isotrópico

Este sistema de ecuaciones se basa en las ecuaciones siguientes:

a) Ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

b) Relaciones esfuerzo-deformación

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu U_{ij} \quad \text{donde } \vartheta = U_{ii}$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Las ecuaciones a) y b) deben ser satisfechas en todo punto interior del cuerpo \mathcal{C} y en la superficie S del cuerpo. Los esfuerzos deben llenar las condiciones de equilibrio

$$\sigma_{ij} \gamma_j = \bar{T}_i \quad (4.6.1)$$

donde γ_i son los cosenos directores de la normal exterior ∇ con la superficie S y \vec{T} es el vector de esfuerzos que actúa sobre el elemento de superficie con normal ∇

Deben ampliarse además las ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial U_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial U_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (4.6.2)$$

La primera de las ecuaciones de b) la podemos escribir así:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.6.3)$$

Sustituyendo σ_{ij} en la ecuación a) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i = 0$$

$$\lambda \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j \partial x_i} + f_i = 0$$

$$\lambda \frac{\partial U_i}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j \partial x_i} + f_i = 0$$

o bien

$$\mu \nabla^2 U_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + f_i = 0 \quad (4.6.4)$$

donde

$$\vartheta = U_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_e}{\partial x_e} = U_{ee}$$

La ecuación 4.6.4 se llama Ecuación de Navier para el caso de equilibrio.

Trabajaremos ahora el mismo tema considerando las ecuaciones en función de E y σ .

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (4.6.5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left(U_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} U_{ee} \delta_{ij} \right) \quad (4.6.6)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.6.7)$$

Tomando $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ tenemos, después de sustituir Ec. 4.6.6 en 4.6.5

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial U_{ee} \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial U_{ee}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j}$$

Considerando U_{ij} dado por Ec. 4.6.7 y sabiendo que $U_{ee} = \frac{\partial U_e}{\partial x_e}$

tenemos

$$\frac{\partial U_{ee}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_e}{\partial x_e} \right) = \frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} \quad (4.6.8)$$

por otro lado

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \quad (4.6.9)$$

Sea $\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = a$ y $\frac{E}{1+\sigma} = b$ de la ecuación 4.6.5 tenemos

$$a \frac{\partial U_e}{\partial x_i} + b \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

$$a \frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} + \frac{b}{2} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_e} \right) + \rho g_i = 0$$

Tomando $\frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} = \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j}$ por ser los subíndices independientes obtenemos.

$$\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 U_e}{\partial x_i \partial x_e} + \rho g_i = 0$$

Las $\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$ son las componentes del vector $\nabla^2 \bar{U}$ y $\frac{\partial U_e}{\partial x_e} = \nabla \cdot \bar{U}$
por lo que

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_e}{\partial x_e} \right) = - \rho g_i \frac{2(1+\sigma)}{E} \quad (4.6.10)$$

será en forma vectorial

$$\nabla^2 \bar{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) = - \rho \bar{g} \frac{2(1+\sigma)}{E} \quad (4.6.11)$$

Esta es la Ecuación de Navier para el caso de equilibrio similar a la Ec. 4.6.4.

Analizaremos ahora la ecuación 4.6.11. Usando la identidad

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{U}) = \nabla^2 \bar{U} + \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) \quad (4.6.12)$$

sustituiremos $\nabla^2 \bar{U} = \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{U})$ en la Ec. 4.6.11 y nos quedará

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{U}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) = - 2 \rho \bar{g} \frac{(1+\sigma)}{E}$$

multiplicando esta ecuación por $\frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}$ obtenemos.

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{U}) - \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) = - \rho \bar{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \quad (4.6.13)$$

que es la ecuación de equilibrio para un campo gravitatorio uniforme.

Cuando la deformación del cuerpo es causada por fuerzas aplicadas sobre superficie, la ecuación de equilibrio será:

$$(1-2\sigma) \nabla^2 \bar{U} + \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) = 0 \text{ donde } f_i = 0 \quad (4.6.14)$$

$$\text{o bien, haciendo la sustitución } \nabla^2 \bar{U} = \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{U}) \quad (4.6.15)$$

tenemos $(1-2\sigma)\nabla(\nabla\cdot\bar{U}) - (1-2\sigma)\nabla\times(\nabla\times\bar{U}) + \nabla(\nabla\cdot\bar{U}) = 0$

$$2(1-\sigma)\nabla(\nabla\cdot\bar{U}) - (1-2\sigma)\nabla\times(\nabla\times\bar{U}) = 0 \quad (4.6.16)$$

Aplicándole la divergencia a la ecuación 4.6.16 nos queda

$$2(1-\sigma)\nabla\cdot(\nabla(\nabla\cdot\bar{U})) - (1-2\sigma)\nabla\cdot(\nabla\times(\nabla\times\bar{U})) = 0$$

Como la divergencia de un rotor es cero y la divergencia de un gradiente es el laplaciano, tenemos

$$\nabla^2(\nabla\cdot\bar{U}) = 0 \quad (4.6.17)$$

Si aplicamos ahora el laplaciano a la ecuación 4.6.14 obtenemos

$$(1-2\sigma)\nabla^2\nabla^2\bar{U} + \nabla^2[\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] = 0 \quad (4.6.18)$$

Sustituyendo $\nabla^2[\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] = \nabla[\nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] - \nabla\times[\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\bar{U})]$

en la Ec. 4.6.18 tenemos

$$(1-2\sigma)\nabla^2\nabla^2\bar{U} + \nabla[\nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] - \nabla\times[\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] = 0$$

$$(1-2\sigma)\nabla^2\nabla^2\bar{U} + \nabla[\nabla^2(\nabla\cdot\bar{U})] - \nabla\times[\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\bar{U})] = 0$$

Tomando en cuenta que el rotor de cualquier gradiente es cero y que $\nabla^2(\nabla\cdot\bar{U}) = 0$, nuestra ecuación 4.6.18 se reduce a

$$\nabla^2\nabla^2\bar{U} = 0 = \Delta\Delta\bar{U} \quad (4.6.19)$$

La ecuación anterior quiere decir que el vector de desplazamiento, en el equilibrio, satisface la ecuación biarmónica.

Consideremos ahora el caso de una deformación plana en la cual $U_z = 0$ † punto del cuerpo y tanto U_x como U_y son funciones sólo de "x" y de "y".

Como $U_z = 0$, las tres componentes del tensor de deformación en la dirección "z" (perpendicular al plano xy) son cero. Las componentes del tensor de tensiones en la dirección z son cero menos σ_{zz} debido a que $U_z = 0$ esto es, no se desplaza el cuerpo en la dirección z, es decir, su longitud en esta dirección permanece constante.

Cuando las fuerzas externas de volumen son cero

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.6.20)$$

y como $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ y los σ_{ij} no dependen de z, la ecuación anterior se convierte en las ecuaciones

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (4.6.21)$$

La forma más general de las soluciones es:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \quad (4.6.22)$$

donde $\chi = \chi(x, y)$ es una función arbitraria.

La ecuación 4.6.6 tomará las siguientes formas al escribirla explícitamente.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)U_{xx} + \sigma(U_{yy} + U_{zz}) \right] \quad (4.6.23)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)U_{yy} + \sigma(U_{xx} + U_{zz}) \right] \quad (4.6.24)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (U_{xx} + U_{yy} + 2\sigma U_{zz}) \quad (4.6.25)$$

pero como $U_{zz} = 0$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (U_{xx} + U_{yy}) \quad (4.6.26)$$

Tomando las soluciones dadas en las ecs. 4.6.22

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \nabla^2 \chi \quad (4.6.27)$$

Además

$$U_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x_x} + \frac{\partial U_x}{\partial x_x} \right) = \frac{\partial U_x}{\partial x_x}$$

y

$$U_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x_y} + \frac{\partial U_y}{\partial x_y} \right) = \frac{\partial U_y}{\partial x_y}$$

por lo que

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{\partial U_x}{\partial x_x} + \frac{\partial U_y}{\partial x_y} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = \nabla \cdot \bar{U} \quad (4.6.28)$$

Sustituyendo 4.6.27 y 4.6.28 en 4.6.26 obtenemos

$$\nabla^2 \chi = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla \cdot \bar{U} \quad (4.6.29)$$

Como $\nabla \cdot \bar{U}$ es armónica, esto es, $\nabla^2(\nabla \cdot \bar{U}) = 0$ si aplicamos el Laplaciano a ambos miembros de la ecuación 4.6.29

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla^2(\nabla \cdot \bar{U})$$

y por lo tanto

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad (4.6.30)$$

siendo χ una función biarmónica.

A χ se le llama función de tensiones.

Después de calcular χ podemos calcular σ_{zz} a partir de la ecuación 4.6.6 para el caso apropiado σ_{zz} tomando $U_{zz} = 0$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)U_{zz} + \sigma(U_{xx} + U_{yy}) \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (U_{xx} + U_{yy}) = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

o sea que

$$\sigma_{zz} = \sigma \nabla^2 \chi \quad (4.6.31)$$

4.7 Ecuaciones dinámicas de un sólido elástico isotrópico:

Las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de equilibrio dadas por 4.6.5 y, además, tomando en cuenta el principio de D'Alembert y agregando las fuerzas de inercia a las componentes f_i de la fuerza de volumen.

Si (x_1, x_2, x_3) es la densidad del medio, entonces las componentes de la fuerza de inercia actuando sobre la masa contenida dentro del elemento de volumen $d\tau$ son:

$$-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\tau \quad (4.7.1)$$

Si consideramos la expresión anterior por unidad de volumen y la agregamos a la ecuación 4.6.5 obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7.2)$$

Las ecuaciones dinámicas en términos de los desplazamientos u_i resultan ahora después de sustituir

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

así,

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_{kk}}{\partial x_i} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i \quad (4.7.3)$$

A estas ecuaciones hay que agregar las condiciones iniciales y de frontera.

En notación vectorial la ecuación 4.7.3 tiene la forma

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \rho \vec{g} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (4.7.4)$$

Si las fuerzas que dependen del volumen son nulas en la ecuación 4.7.3 obtenemos la ecuación de Navier para el caso dinámico,

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (4.7.5)$$

4.8 Solución de la ecuación de Navier:

La ecuación presupone un sólido infinito perfectamente elástico, homogéneo e isótropo en el que los esfuerzos y las deformaciones son infinitesimales.

Si una región es tan grande que los efectos de frontera pueden despreciarse, es posible representar la perturbación como una suma de dos ondas que se propagan con velocidades que dependen sólo de la densidad y de las constantes elásticas del medio.

Por consiguiente el vector de desplazamiento u puede representarse como una suma de dos vectores, uno de los cuales es solenoidal y el otro irrotacional, es decir, consideraremos dos tipos especiales de perturbaciones para una de las cuales $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ y para la otra $\nabla \times \vec{u} = 0$.

Considerando el primer caso, $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ en la ecuación 4.7.5 obtenemos la ecuación

$$\mu \nabla^2 \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}}$$

o sea,

$$\nabla^2 \bar{u} - \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.8.1)$$

que es la conocida ecuación de onda cuya velocidad de propagación es

$$c_1 = \sqrt{\mu/\rho} \quad (4.8.2)$$

Este es el caso de una propagación de onda equivolúmenal.

Considerando ahora el segundo caso, $\nabla \times \bar{u} = 0$, utilizaremos la identidad $\nabla \times (\nabla \times \bar{u}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla^2 \bar{u}$ y la sustituiremos en la forma $\nabla (\nabla \cdot \bar{u}) = \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) + \nabla^2 \bar{u}$ en la ecuación 4.7.5 con lo que resultará

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) [\nabla \times (\nabla \times \bar{u}) + \nabla^2 \bar{u}] = \rho \ddot{\bar{u}}$$

como $\nabla \times \bar{u} = 0$ obtenemos

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}}$$

o sea,

$$\nabla^2 \bar{u} - \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (4.8.3)$$

ecuación de onda cuya velocidad de propagación de onda irrotacional es

$$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Para interpretar físicamente las ecuaciones 4.8.1 y 4.8.3 haremos lo siguiente:

Para el primer caso en el cual $\nabla \cdot \bar{u} = 0$, tomaremos el rotor de la ecuación 4.7.5 para obtener

$$\mu \nabla^2 (\nabla \times \bar{u}) + (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \bar{u})$$

$$\mu \nabla^2 (\nabla \times \bar{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \bar{u}) \quad (4.8.4)$$

Como $\bar{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \bar{u}$ cuyas componentes son

$$w_k = \frac{1}{2} (\nabla \times u)_k = \frac{1}{2} \delta_{kij} \partial_i u_j$$

que indican la rotación sobre el eje k ; la ecuación 4.8.4 se convertirá en

$$\mu \nabla^2 \bar{w} = \rho \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}$$

o sea,

$$\nabla^2 \bar{w} = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \quad (4.8.5)$$

La deformación elástica que se propaga con esta velocidad representa una distorsión sin cambio de volumen ya que $\nabla \cdot \bar{w} = 0$. Estas ondas transversales reciben en Sismología el nombre de ondas S ya que son las "segundas" en recibirse.

Para el segundo caso, en el cual $\nabla \times \bar{u} = 0$, tomaremos la divergencia de la ecuación 4.7.5 para obtener.

$$\mu \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) + (\lambda + \mu) \nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \bar{u})$$

$$\mu \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) + (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \bar{u})$$

Como $u_{11} = \vartheta = \nabla \cdot \bar{u}$ tenemos

$$\mu \nabla^2 \vartheta + (\lambda + \mu) \nabla^2 \vartheta = \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$$

o sea,

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{1}{(\lambda + 2\mu)/\rho} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \quad (4.6.8)$$

La perturbación elástica que representa la ecuación anterior es el aumento o disminución de volumen de acuerdo con que $\vartheta = u_{11}$ sea positiva o negativa, sin distorsión ya que ella está asociada con el rotor y el rotor de la divergencia es siempre cero. Las ondas elásticas que se propagan con velocidad

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

reciben el nombre de ondas longitudinales o de compresión. En Sismología reciben el nombre de ondas P ya que son las primeras que se reciben.

Otra manera de reducir la Ecuación de Navier a dos ecuaciones de onda en las que la deformación elástica queda dividida en dos partes —una que lleva consigo cambio de volumen sin distorsión y otras acompañada de una distorsión con volumen constante— es utilizando el Teorema de Helmholtz. Este teorema dice que para un campo vectorial, el vector en un punto se puede expresar en función de un potencial escalar φ y otro potencial vectorial ψ_k de acuerdo con la relación

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \delta_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad (4.8.7)$$

$$u_i = \partial_i \varphi + \delta_{ijk} \partial_j \psi_k$$

o bien, en notación vectorial

$$\bar{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \bar{\psi} \quad (4.8.8)$$

Para que $\bar{\psi}$ quede completamente definido es necesario que $\nabla \cdot \bar{\psi} = 0$ y entonces al tomar la divergencia de 4.8.7 tendremos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \nabla^2 \varphi \quad (4.8.9)$$

esto es

$$\nabla \cdot \bar{u} = \nabla^2 \varphi \quad (4.8.10)$$

ecuación que indica la relación entre el potencial escalar φ y la dilatación cúbica u_{11} .

Si tomamos ahora el rotor de la ecuación 4.8.8 obtenemos

$$\nabla \times \bar{u} = \nabla \times (\nabla \varphi) + \nabla \times \nabla \times \bar{\psi} \quad (4.8.11)$$

$$\nabla \times \bar{u} = \nabla \times \nabla \times \bar{\psi}$$

pero $\nabla \times (\nabla \times \bar{\psi}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{\psi}) - \nabla^2 \bar{\psi}$

y como $\nabla \cdot \bar{\psi} = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \bar{\psi}) = -\nabla^2 \bar{\psi}$ (4.8.12)

Sustituyendo 4.8.12 en 4.8.11 y tomando en cuenta que $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \bar{U}$ tenemos

$$\nabla \times \bar{U} = 2\bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi} \quad (4.8.13)$$

con lo cual hemos relacionado el rotor de 4.8.8 con el potencial vectorial $\bar{\psi}$ y la rotación de \bar{u} dada por $\bar{\omega}$.

Sustituyendo ahora 4.8.8 en la ecuación de Navier obtenemos

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \rho + \nabla \times \bar{\psi}) = (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot (\nabla \varphi + \nabla \times \bar{\psi})] + \mu \nabla^2 (\nabla \varphi + \nabla \times \bar{\psi})$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \rho) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \bar{\psi}) = (\lambda + \mu) (\nabla \nabla^2 \varphi) + \mu \nabla \nabla^2 \varphi + \mu \nabla^2 (\nabla \times \bar{\psi})$$

Agrupando los términos en φ y $\bar{\psi}$ la ecuación anterior podemos escribirla así:

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \right) + \nabla \times \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi} - \mu \nabla^2 \bar{\psi} \right) = 0 \quad (4.8.14)$$

Una solución de esta ecuación es cuando las cantidades entre paréntesis son cero y así

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.8.15)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{\psi} = 0 \quad (4.8.16)$$

Ecuaciones que podemos escribir de la siguiente forma

$$\nabla^2 \varphi - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0 = \square^2 \varphi \quad (4.8.17)$$

donde $C_1 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}$

y $\nabla^2 \bar{\psi} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\psi} = 0 = \square^2 \bar{\psi}$ (4.8.18)

donde

$$C_2 = \frac{\mu}{\rho}$$

las cuales tienen la forma de la ecuación del movimiento ondulatorio. Estas ecuaciones son para los potenciales y no para las deformaciones elásticas y tienen soluciones con la misma forma que las de la ecuación de onda. La velocidad asociada al potencial φ es c_1 . Esto es lógico ya que el potencial escalar φ está asociado con la dilatación cúbica u_{11} la cual se propaga con la velocidad c_1 .

La velocidad asociada con el potencial vectorial $\bar{\psi}$ es la misma que la asociada con $\bar{\omega}$, o sea, c_2 .

Resolviendo las ecuaciones 4.8.17 y 4.8.18 obtenemos φ y $\bar{\psi}$ y conociendo éstas obtenemos \bar{u} a partir de 4.8.8.

4.9 La función de energía de deformación y su conexión con la ley de Hooke . .

El estado no deformado o natural de un cuerpo es un estado estandar de temperatura uniforme y desplazamiento cero, con respecto al cual todas las deformaciones serán especificadas.

Si el cuerpo está en el estado natural al tiempo $t = 0$, y si está sujeto a la acción de fuerzas externas, entonces más tarde se producirá una deformación del cuerpo y se realizará un trabajo.

Si (x_1, x_2, x_3) denotan las coordenadas de un punto material arbitrario P en un cuerpo en el estado no deformado, entonces a cualquier tiempo t , las coordenadas de P serán

$$x_i + U_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.9.1)$$

Como el desplazamiento del punto P en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$ está dado por

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} dt \equiv \dot{U}_i dt$$

se sigue que el trabajo hecho en dt segundos por las fuerzas volumétricas actuando sobre el elemento de volumen $d\mathcal{V}$, localizado en P, es

$$f_i \dot{U}_i d\mathcal{V} dt \quad (4.9.2)$$

El trabajo efectuado por las fuerzas superficiales externas en el mismo intervalo de tiempo es

$$\int_S f_i \dot{U}_i ds dt \quad (4.9.3)$$

siendo ds el elemento de superficie.

Denotando por W el trabajo total hecho por las fuerzas volumétricas y superficiales, tenemos

$$dW = \int_{\mathcal{V}} f_i \dot{U}_i d\mathcal{V} dt + \int_S f_i \dot{U}_i ds dt$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} f_i \dot{U}_i d\mathcal{V} + \int_S f_i \dot{U}_i ds \quad (4.9.4)$$

Utilizando el teorema de la Divergencia de Gauss en el segundo término del miembro derecho, tenemos que

$$\int_S f_i \dot{U}_i ds = \int_S (\sigma_{ij} \dot{U}_i) \eta_j ds = \int_{\mathcal{V}} \partial_j (\sigma_{ij} \dot{U}_i) d\mathcal{V} \quad (4.9.5)$$

Desarrollando esto último tenemos

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_j \sigma_{ij} \dot{U}_i d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{ij} \dot{U}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{w}_{ij}) d\mathcal{V} \quad (4.9.6)$$

donde hicimos uso de

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{y} \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

como $w_{ij} = -w_{ji}$ entonces $\sigma_{ij} \dot{w}_{ij} = 0$ pues

$$\sigma_{ij} \dot{w}_{ij} = \sigma_{11} \dot{w}_{11} + \sigma_{22} \dot{w}_{22} + \sigma_{33} \dot{w}_{33} + \sigma_{12} \dot{w}_{12} + \sigma_{23} \dot{w}_{23} + \sigma_{31} \dot{w}_{31} \\ + \sigma_{13} \dot{w}_{13} + \sigma_{21} \dot{w}_{21} + \sigma_{32} \dot{w}_{32}$$

Como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $w_{ij} = 0$ cuando $i = j$ entonces

$$\sigma_{ij} \dot{w}_{ij} = \sigma_{12} \dot{w}_{12} + \sigma_{23} \dot{w}_{23} - \sigma_{13} \dot{w}_{13} + \sigma_{13} \dot{w}_{13} - \sigma_{12} \dot{w}_{12} - \sigma_{23} \dot{w}_{23} = 0$$

Tenemos ahora la ecuación 4.9.6 de la siguiente forma

$$\oint_{\mathcal{E}} \dot{f}_i \dot{u}_i ds = \int_{\mathcal{E}} (\partial_j \sigma_{ij} \dot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{ij}) d\mathcal{E} \quad (4.9.7)$$

Si multiplicamos $\partial_j \sigma_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i$ por \dot{u}_i obtenemos

$$\partial_j \sigma_{ij} \dot{u}_i = (\rho \ddot{u}_i - f_i) \dot{u}_i$$

expresión que podemos sustituir en la ecuación 4.9.7 y tendremos

$$\oint_{\mathcal{E}} \dot{f}_i \dot{u}_i ds = \int_{\mathcal{E}} (\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i - f_i \dot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{ij}) d\mathcal{E}$$

$$\oint_{\mathcal{E}} \dot{f}_i \dot{u}_i ds + \int_{\mathcal{E}} f_i \dot{u}_i d\mathcal{E} = \int_{\mathcal{E}} \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i d\mathcal{E} + \int_{\mathcal{E}} \sigma_{ij} \dot{u}_{ij} d\mathcal{E}$$

Tomando en cuenta la ecuación 4.9.4 tenemos

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{E}} \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i d\mathcal{E} + \int_{\mathcal{E}} \sigma_{ij} \dot{u}_{ij} d\mathcal{E} \quad (4.9.8)$$

La energía cinética del cuerpo está definida por

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\mathcal{E} \quad (4.9.9)$$

$$\text{Si calculamos } \frac{dK}{dt} \text{ tendremos } \frac{dK}{dt} = \int_{\mathcal{E}} \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i d\mathcal{E} \quad (4.9.10)$$

donde asumimos que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y entonces la ecuación 4.9.8 la podremos escribir así:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} + \int_{\mathcal{E}} \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} d\mathcal{E} \quad (4.9.11)$$

Considerando de nuevo la notación utilizada en la sección 4.3 para σ_{ij} y u_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) transformados en σ_i y u_i ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) y suponiendo que existe una función $F = F(u_i)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial u_i} = \sigma_i$ entonces la ecuación 4.9.11 podemos escribirla ahora como

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} + \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathcal{E} = \frac{dK}{dt} + \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial F}{\partial t} d\mathcal{E} \quad (4.9.12)$$

Como F es la densidad volumétrica de la energía de deformación, o potencial elástico, entonces $\int_{\mathcal{E}} F d\mathcal{E} \equiv U$ (4.9.13)

donde U es la energía de deformación.

La ecuación 4.9.12 queda de la siguiente forma

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

e integrando esta ecuación con respecto al tiempo desde $t = 0$ hasta $t = t$, donde $t = 0$ corresponde al estado natural, obtenemos

$$W = K + U \quad (4.9.14)$$

Esta última ecuación se lee como: "el trabajo W realizado por las fuerzas externas para

alterar la configuración del estado natural al estado al tiempo t es igual a la suma de la energía cinética K más la energía de deformación U ''

La energía de deformación U puede considerarse como la energía almacenada en el cuerpo cuando va de la configuración del estado natural al estado del tiempo t . Si al tiempo t el cuerpo está en equilibrio, entonces $K=0$ y $W=U$.

Asumiremos ahora que la función densidad de energía de deformación F puede expandirse en una serie de potencias $2F = C_0 + 2C_1 U_i + C_{ij} U_i U_j + \dots$

donde despreciamos todos los términos de orden tres y superior en las deformaciones. Si nos interesan sólo las derivadas de F podemos despreciar C_0 también.

$$\text{Tomando } \frac{\partial F}{\partial U_i} = \sigma_i \text{ tenemos } \sigma_i = C_i + \frac{1}{2} (C_{ij} + C_{ji}) U_j$$

Si los σ_i tienen que ser nulos cuando $U_j = 0$ entonces $C_i = 0$ y volviendo a F tendremos

$$F = \frac{1}{2} C_{ij} U_i U_j \quad (4.9.15)$$

y

$$\sigma_i = \frac{\partial F}{\partial U_i} = \frac{1}{2} (C_{ij} + C_{ji}) U_j \quad (4.9.16)$$

Si $C_{ij} = C_{ji}$ al igual que en la ley de Hooke generalizada, entonces

$$\sigma_i = C_{ij} U_j \quad (4.9.17)$$

Sustituyendo 4.9.17 en 4.9.15 obtenemos

$$F = \frac{1}{2} C_{ij} e_i e_j = \frac{1}{2} \sigma_i U_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.9.18)$$

que también puede describirse como

$$F = \frac{1}{2} \sigma_{ij} U_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.9.19)$$

Cuando la ley esfuerzo-deformación se escribe en la forma

$$U_i = C_{ij} \sigma_j \quad (4.9.20)$$

la fórmula de Clapeyron, dada por la ecuación 4.9.18, es

$$F = \frac{1}{2} C_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (4.9.21)$$

así que

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = C_{ij} \sigma_j = U_i \quad (4.9.22)$$

Este último resultado se debe a Castigliano por lo que recibe el nombre de fórmula de Castigliano.

Si el medio es isotrópico, la ley esfuerzo-deformación tiene la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda U_{ee} \delta_{ij} + 2\mu U_{ij}$$

$$\text{Como } F = \frac{1}{2} \sigma_{ij} U_{ij} \Rightarrow F = \frac{1}{2} \lambda U_{ee} U_{ij} \delta_{ij} + \mu U_{ij} U_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \lambda U_{ee} U_{ii} + \mu U_{ij}^2 = \frac{1}{2} \lambda U_{ee}^2 + \mu U_{ij}^2$$

la cual desarrollándola nos da

$$F = \frac{1}{2} \lambda U_{ee}^2 + \mu (U_{11}^2 + U_{22}^2 + U_{33}^2 + U_{12}^2 + U_{23}^2 + U_{31}^2 + U_{13}^2 + U_{32}^2 + U_{21}^2)$$

como $u_{ij} = u_{ji}$

$$F = \frac{1}{2} \lambda U_{ii}^2 + \mu (U_{11}^2 + U_{22}^2 + U_{33}^2 + 2U_{12}^2 + 2U_{23}^2 + 2U_{31}^2) \quad (4.9.24)$$

4.10 Equilibrio de un medio elástico limitado por un plano:

Consideraremos ahora un medio elástico que ocupa un semiespacio, es decir, un medio elástico limitado únicamente por un plano infinito. Calcularemos la deformación debida a las fuerzas aplicadas sobre la superficie libre.

Aplicando la ecuación general

$$(1 - 2\sigma) \nabla^2 \bar{u} + \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) = 0 \quad (4.10.1)$$

con la condición de que en el infinito no habrá deformación, pasaremos a resolverla.

Probaremos una solución de la forma

$$\bar{u} = \bar{f} + \nabla \varphi \quad (4.10.2)$$

donde φ es un escalar y \bar{f} satisface la ecuación

$$\nabla^2 \bar{f} = 0 \quad (4.10.3)$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación general tenemos

$$\begin{aligned} (1 - 2\sigma) \nabla^2 (\bar{f} + \nabla \varphi) + \nabla(\nabla \cdot (\bar{f} + \nabla \varphi)) &= 0 \\ (1 - 2\sigma) [\nabla(\nabla \cdot \nabla \varphi) - \nabla \times \nabla \times \nabla \varphi] + \nabla(\nabla \cdot \bar{f}) + \nabla(\nabla^2 \varphi) &= 0 \\ 2(1 - \sigma) \nabla(\nabla^2 \varphi) + \nabla(\nabla \cdot \bar{f}) &= 0 \\ \nabla [2(1 - \sigma)(\nabla^2 \varphi) + \nabla \cdot \bar{f}] &= 0 \\ 2(1 - \sigma) \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \bar{f} &= 0 \\ 2(1 - \sigma) \nabla^2 \varphi &= -\nabla \cdot \bar{f} \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

Eligiendo como plano XY la superficie libre del medio elástico, el dominio ocupado por el medio será el semiespacio $z > 0$.

Tomemos ahora

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z} \quad (4.10.5)$$

Como f_x y f_y son funciones armónicas se puede elegir g_x y g_y tales que

$$\nabla^2 g_x = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 g_y = 0 \quad (4.10.6)$$

y en este caso

$$\begin{aligned} 2(1 - \sigma) \nabla^2 \varphi &= - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\varphi = - \frac{z}{2(1 - \sigma)} \left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \psi \quad (4.10.7)$$

donde Ψ satisface la ecuación $\nabla^2 \Psi = 0$ y por lo tanto, es armónica.

Por consiguiente, para determinar el desplazamiento \bar{u} basta encontrar las funciones g_x , g_y , f_z y Ψ , que satisfagan la ecuación de Laplace.

Ahora escribiremos las condiciones de contorno que deben satisfacerse en la superficie libre del medio (en el plano $z = 0$). Como el vector unitario normal \hat{n} apunta hacia valores negativos de z , usando la ecuación $P_i = \nabla_{ij} \eta_j$, tenemos $\nabla_{iz} = -P_i$ donde $\eta_z = 1$

$$\text{Utilizando ahora} \quad \nabla_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (U_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} U_{kk} \delta_{ij})$$

y expresando las componentes del vector \bar{u} en términos de g_x, g_y, f_z y Ψ

$$\begin{aligned} \text{obtenemos:} \quad \nabla_{iz} = -P_i &= \frac{E}{1+\nu} (U_{iz} + \frac{\nu}{1-2\nu} U_{kk} \delta_{iz}) \\ -\frac{(1+\nu)P_i}{E} &= U_{iz} + \frac{\nu}{1-2\nu} U_{kk} \delta_{iz} \end{aligned} \quad (4.10.8)$$

Sabemos que $U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
 $\bar{u} = \bar{f} + \nabla \Psi$ con componentes $U_x = f_x + (\nabla \Psi)_x, \dots$
 o bien, en general $U_i = f_i + (\nabla \Psi)_i$

o sea, $U_i = f_i + \partial_i \Psi$

Efectuando los cálculos tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\frac{z}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 g_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= -\frac{z}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 g_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned}$$

Evaluando para $z = 0$ queda:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi|_{z=0} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}|_{z=0} ; \quad \partial_y \Psi|_{z=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}|_{z=0} \\ \partial_z \Psi|_{z=0} &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ (f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} \\ U_x &= f_x + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} ; \quad U_y = f_y + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ U_z &= f_z + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) f_z - \frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned}$$

todo lo anterior evaluándolo para $z = 0$.

Calculando las parciales de U_x, U_y y U_z que nos interesan para obtener U_{xz}, U_{yz} y U_{zz} tenemos finalmente según 3.4.19

$$u_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left((1-2\sigma) \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial^2 g_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right]$$

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left((1-2\sigma) \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right]$$

$$u_{zz} = \frac{1}{2(1-\sigma)} \left[\frac{\partial f_z}{\partial z} (1-2\sigma) - \frac{\partial^2 g_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g_y}{\partial z \partial y} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Recordando que todo lo anterior estaba evaluado en $z = 0$ lo escribiremos ahora así:

$$2u_{xz} = \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} \quad (4.10.9)$$

$$2u_{yz} = \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} \quad (4.10.10)$$

$$(1-\sigma)u_{zz} = \frac{1}{2} \left((1-2\sigma) \frac{\partial f_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 g_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g_y}{\partial z \partial y} \right) \Big|_{z=0} + (1-\sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \quad (4.10.11)$$

Dándole los subíndices x, y & z al subíndice "i" en la ecuación 4.10.8 obtenemos

$$-\frac{(1+\sigma)P_i}{E} = u_{xz} \quad , \quad -\frac{(1+\sigma)P_j}{E} = u_{yz} \quad y \quad (4.10.12)$$

$$-\frac{(1+\sigma)P_z}{E} = u_{zz} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (4.10.13)$$

Desarrollando esta última ecuación tenemos

$$-\frac{(1+\sigma)P_z}{E} = \frac{(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})}{1-2\sigma} \quad (4.10.14)$$

Utilizando la ecuación 4.10.11 y sustituyéndola en 4.10.14 tenemos

$$-\frac{2(1+\sigma)P_z}{E} = \frac{\partial f_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{1-2\sigma} \left[2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 4\sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2\sigma \nabla^2 \psi \right]$$

Como $\nabla^2 \psi = 0$

$$-\frac{2(1+\sigma)P_z}{E} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) \right\} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4.10.15)$$

Por último, a partir de las ecuaciones 4.10.9, 4.10.10 y 4.10.11 y de 4.10.12 y 4.10.15 obtenemos las condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -2 \frac{(1+\sigma)P_x}{E} \quad (4.10.16)$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -2 \frac{(1+\sigma)P_y}{E} \quad (4.10.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -2 \frac{(1+\sigma)P_z}{E} \quad (4.10.18)$$

Las componentes P_i de las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie son funciones $P_i = P_i(x, y)$ tales que $P_i|_{z=0} = 0$.

Como las funciones g_x, g_y, f_z y ψ tal como las expresamos en las ecuaciones 4.10.5, 4.10.6 y 4.10.7 quedan determinadas univocamente, pueden escogerse con cierta arbitrariedad y por ello, les impondremos una condición como la siguiente:

$$\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

o bien

$$(1-2\sigma) f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 4(1-\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (4.10.19)$$

con lo cual las condiciones dadas por 4.10.16 y 4.10.17 se reducen a

$$\left. \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -2 \frac{(1+\sigma) P_x}{E} \quad \left. \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -2 \frac{(1+\sigma) P_y}{E} \quad (4.10.20)$$

Estando ahora las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones 4.10.18 y 4.10.20, con lo cual podemos determinar las funciones armónicas g_x, g_y, f_z y ψ y con ello llegar a la solución de la ecuación 4.10.1 que tenía la forma

$$\bar{U} = \bar{f} + \nabla \psi$$

5. CONSTANTES ELÁSTICAS:

5.1 Constantes elásticas de una sustancia:

De acuerdo a la ley generalizada de Hooke, las seis componentes del esfuerzo en cualquier punto de un cuerpo sólido elástico están conectadas con las seis componentes de la deformación en el punto por las ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 \overset{x}{T}_x &= \overset{1}{T}_1 = C_{11}U_{11} + C_{12}U_{22} + C_{13}U_{33} + C_{14}U_{12} + C_{15}U_{23} + C_{16}U_{31} \\
 \overset{y}{T}_y &= \overset{2}{T}_2 = C_{21}U_{11} + C_{22}U_{22} + C_{23}U_{33} + C_{24}U_{12} + C_{25}U_{23} + C_{26}U_{31} \\
 \overset{z}{T}_z &= \overset{3}{T}_3 = C_{31}U_{11} + C_{32}U_{22} + C_{33}U_{33} + C_{34}U_{12} + C_{35}U_{23} + C_{36}U_{31} \\
 \overset{xy}{T}_{xy} &= \overset{4}{T}_4 = C_{41}U_{11} + C_{42}U_{22} + C_{43}U_{33} + C_{44}U_{12} + C_{45}U_{23} + C_{46}U_{31} \\
 \overset{yz}{T}_{yz} &= \overset{5}{T}_5 = C_{51}U_{11} + C_{52}U_{22} + C_{53}U_{33} + C_{54}U_{12} + C_{55}U_{23} + C_{56}U_{31} \\
 \overset{xz}{T}_{xz} &= \overset{6}{T}_6 = C_{61}U_{11} + C_{62}U_{22} + C_{63}U_{33} + C_{64}U_{12} + C_{65}U_{23} + C_{66}U_{31}
 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Las coeficientes de estas ecuaciones, c_{11}, \dots , son las constantes elásticas de la sustancia.

5.2 Constantes elásticas y módulos de elasticidad de sólidos isotrópicos:

Cuando la función de energía de deformación está expresada por

$$F = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)U_{el}^2 + \frac{1}{2}\mu(U_{22}^2 + U_{33}^2 + U_{12}^2 - 4U_{22}U_{33} - 4U_{33}U_{11} - 4U_{11}U_{22}) \tag{5.2.1}$$

las componentes del vector de esfuerzos están dadas por

$$\begin{aligned}
 \overset{x}{T}_x &= \overset{1}{T}_1 = \lambda U_{el} + 2\mu U_{xx} & \overset{y}{T}_y &= \overset{2}{T}_2 = \mu U_{yyz} \\
 \overset{y}{T}_y &= \overset{2}{T}_2 = \lambda U_{el} + 2\mu U_{yy} & \overset{z}{T}_z &= \overset{3}{T}_3 = \mu U_{zxx} \\
 \overset{z}{T}_z &= \overset{3}{T}_3 = \lambda U_{el} + 2\mu U_{zz} & \overset{xy}{T}_{xy} &= \overset{4}{T}_4 = \mu U_{xy}
 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Un cuerpo de cualquier forma sujeto a la acción de una presión constante P , la misma en todos los puntos de su superficie, estará en un cierto estado de esfuerzo, dado por

$$\overset{x}{T}_x = \overset{y}{T}_y = \overset{z}{T}_z = -P \quad \overset{xy}{T}_{xy} = \overset{yz}{T}_{yz} = \overset{xz}{T}_{xz} = 0 \tag{5.2.3}$$

De acuerdo a las ecuaciones 5.1.3, el cuerpo está en un estado de deformación tal que

$$U_{xx} = U_{yy} = U_{zz} = -P/(3\lambda + 2\mu) \tag{5.2.4}$$

pues

$$\begin{aligned}
 -P &= \lambda U_{el} + 2\mu U_{xx} & ; & & -P &= \lambda U_{el} + 2\mu U_{yy} \\
 & & & & -P &= \lambda U_{el} + 2\mu U_{zz}
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

de donde deducimos que $u_{xx} = u_{yy} = u_{zz}$

y por lo tanto, $u_{yy} = 3u_{xx} = 3u_{yy} = 3u_{zz}$

$$U_{xx} = -P/(3\lambda + 2\mu) \tag{5.2.6}$$

La compresión cúbica es $U_{el} = 3P/(3\lambda + 2\mu) \tag{5.2.7}$

o sea, $U_{el} = P/(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \tag{5.2.8}$

Escribiremos $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ donde k es la cantidad que se obtiene de dividir la magnitud de una presión uniforme entre la compresión cúbica producida por ella. Este es el llamado módulo de compresión.

Un cilindro o prisma de cualquier forma, sujeto a una tensión uniforme T sobre sus tapas y libre de tracción sobre sus superficies laterales estará en cierto estado de esfuerzo.

Este estado estará dado por las ecuaciones

$$\frac{x}{T_x} = T \quad ; \quad \frac{y}{T_y} = \frac{z}{T_z} = \frac{x}{T_x} = \frac{y}{T_y} = \frac{z}{T_z} = 0 \quad (5.2.9)$$

De acuerdo a las ecuaciones 5.1.3 el cuerpo estará en un estado de deformación tal que

$$u_{xx} = \frac{T(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad y \quad u_{yy} = \frac{-\lambda T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (5.2.10)$$

obtenidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda u_{ee} + 2\mu u_{xx} &= T \\ \lambda u_{ee} + 2\mu u_{yy} &= 0 \\ \lambda u_{ee} + 2\mu u_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

De las dos últimas ecuaciones deducimos $u_{yy} = u_{zz}$ y considerando una de ellas tenemos

$$\lambda(u_{xx} + 2u_{yy}) + 2\mu u_{yy} = 0$$

de donde

$$u_{yy} = -\frac{\lambda u_{xx}}{2(\lambda + \mu)}$$

Sustituyendo este valor en la primera de las tres ecuaciones 5.2.11 obtenemos

$$\lambda u_{xx} + 2\lambda \left(-\frac{\lambda u_{xx}}{2(\lambda + \mu)} \right) + 2\mu u_{xx} = T$$

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)\lambda u_{xx} - 2\lambda^2 u_{xx} + 4(\lambda + \mu)\mu u_{xx} &= 2T(\lambda + \mu) \\ 6\mu\lambda u_{xx} + 4\mu^2 u_{xx} - 2T(\lambda + \mu) &= 0 \Rightarrow u_{xx} = \frac{T(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \end{aligned}$$

$$u_{yy} = -\frac{\lambda u_{xx}}{2(\mu + \lambda)} = -\frac{\lambda T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$\text{Tomaremos ahora } E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (5.2.12)$$

y

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.2.13)$$

Vemos que E se obtiene dividiendo la medida de una tensión longitudinal simple entre la medida de la deformación (extensión) producida por ella. Esta cantidad es conocida como módulo de Young.

El número ν es la razón de la contracción lateral a la extensión longitudinal de una barra bajo una tensión terminal y es conocido como razón de Poisson

$$\nu = \frac{u_{yy}}{u_{xx}} = \frac{-\lambda T}{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{T(\lambda + \mu)}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Sin embargo, el sistema de esfuerzos puede ser las extensiones en las direcciones de los ejes y las tracciones normales que cruzan los planos que forman ángulos rectos con los ejes y están conectados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E} \left\{ \bar{T}_x - \nu (\bar{T}_y + \bar{T}_z) \right\} & u_{yy} &= \frac{1}{E} \left\{ \bar{T}_y - \nu (\bar{T}_z + \bar{T}_x) \right\} \\ u_{zz} &= \frac{1}{E} \left\{ \bar{T}_z - \nu (\bar{T}_x + \bar{T}_y) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Sin embargo, el sistema de esfuerzos puede ser también, la deformación de corte correspondiente en un par de ejes rectangulares y el esfuerzo de corte sobre el par de planos que forman ángulos rectos con los ejes y están conectados por una ecuación de la forma

$$l_x = \mu u_{xy} \quad (5.2.15)$$

Esta relación es independiente de las direcciones de los ejes. La cantidad μ es llamada la rigidez.

5.3 Módulos de elasticidad:

Podemos definir tipos de esfuerzos y tipos de deformaciones. Por ejemplo, la simple tensión \bar{T}_x , el esfuerzo de corte \bar{T}_y , la tensión media $\frac{1}{3}(\bar{T}_x + \bar{T}_y + \bar{T}_z)$ son tipos de esfuerzos. Los tipos de deformaciones correspondientes son la extensión simple u_{xx} , la deformación de corte u_{yz} y la dilatación cúbica $u_{11} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Podemos expresar la deformación de cualquiera de estos tipos, que acompaña un esfuerzo del tipo correspondiente, —cuando no hay otro esfuerzo—, mediante la ecuación de la forma

$$\text{Esfuerzo} = M \times \text{Deformación correspondiente}$$

donde M es llamado Módulo de elasticidad.

El módulo correspondiente a la simple tensión es conocido como módulo de Young para la dirección de la tensión que se trata.

El módulo que corresponde al esfuerzo de corte sobre un par de planos ortogonales es conocido como módulo de rigidez para el par de direcciones relacionadas (las normales a los planos).

El módulo correspondiente a la tensión media o presión es conocido como Módulo de Compresión.

6. DENSIDAD Y CONSTANTES ELASTICAS DE LA TIERRA

Posteriormente veremos que las velocidades de propagación de las ondas sísmicas y, por lo tanto, las trayectorias de las ondas por la tierra dependen de tres magnitudes: la rigidez μ , la constante de Lamé λ y la densidad ρ .

En los medios isotropos λ y μ son independientes de la dirección. Los materiales que constituyen la tierra, si se consideran en grandes masas, son generalmente isotropos. En la parte cercana a la corteza terrestre se puede admitir que la tierra es completamente uniforme a cualquier profundidad y, por ello podemos considerar que λ , μ y ρ están en función de la profundidad.

6.1 Razón de Poisson

Consideraremos a la tierra como un adisposición uniforme de capas. Además ya pueden localizarse las superficies de separación que están más claramente definidas y que poseen mayor extensión. Estas superficies de separación se han localizado por medio de la variación de las velocidades de las ondas sísmicas con la profundidad, estudiando las curvas de trayectoria tiempo de los terremotos. De esta manera se conocen dos propiedades de las rocas a cada profundidad dentro de la tierra: la velocidad de la onda de compresión C_L y la velocidad de la onda transversal C_t . A partir de estas dos podemos calcular la llamada razón de Poisson.

$$C_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad C_t = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6.1.1)$$

$$\frac{C_L}{C_t} = \left[\frac{(\lambda + 2\mu)/\rho}{\mu/\rho} \right]^{1/2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} \quad (6.1.2)$$

Sustituyendo los valores de λ y μ dado por

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{\sigma E}{2(1+\sigma)}$$

y elevando al cuadrado $\frac{C_L}{C_t}$ obtendremos

$$\left(\frac{C_L}{C_t} \right)^2 = \frac{\lambda}{\mu} + 2 = \frac{\sigma E / ((1-2\sigma)(1+\sigma))}{E / 2(1+\sigma)} + 2 = \frac{2-2\sigma}{1-2\sigma} \quad (6.1.3)$$

$$\left(\frac{C_L}{C_t} \right)^2 - 2\sigma \left(\frac{C_L}{C_t} \right)^2 = 2 - 2\sigma$$

$$\sigma = \frac{\left(\frac{C_L}{C_t} \right)^2 - 2}{2 \left(\frac{C_L}{C_t} \right)^2 - 2} \quad (6.1.4)$$

la razón de Poisson en función de las velocidades de las ondas sísmicas primaria y secundaria.

6.2 Variación de la densidad con la profundidad

K. E. Bullen, en 1947, determinó aproximadamente la variación de la gravedad con la profundidad.

Si consideramos a la tierra esférica y que se comporta como un líquido, entonces tenemos una ecuación diferencial para la presión como función de r dada por

$$\frac{dP}{dr} = \rho g \quad (6.2.1)$$

donde el signo menos se debe a que la presión aumenta a medida que r disminuye.

Además, en el interior de una capa esférica de densidad uniforme, no hay ningún campo gravitatorio, mientras que fuera de la capa la fuerza es la misma que si la masa de ella estuviera concentrada en su centro. Por consiguiente, sólo influirá sobre el punto considerado el material que se halla dentro del radio r , siendo r la distancia desde el centro de la tierra hasta el punto en cuestión y el campo gravitatorio g estaría dado por.

$$g = G \frac{m}{r^2} \quad (6.2.2)$$

donde G es la constante universal de la gravitación y m es la masa total de la esfera de radio r .

Por otro lado, hemos visto que el módulo de compresión k es la relación entre el diferencial de presión y la variación fraccionaria dada en el volumen V , producida en condiciones adiabáticas, o sea

$$k = \frac{dP}{dV/V} = \frac{dP}{d\rho/\rho} \quad (6.2.3)$$

Considerando la ecuación 5.1.8 y las ecuaciones 6.1.1 tenemos que

$$\lambda = \rho c^2 - 2\mu \quad \text{donde } \mu = \rho c_t^2$$

$$\text{entonces } \lambda = \rho (c^2 - 2c_t^2) \quad (6.2.4)$$

Sustituyendo los valores de λ y μ en k obtenemos

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \rho(c^2 - 2c_t^2) \quad (6.2.5)$$

Podemos encontrar ahora la variación de la densidad con la profundidad utilizando primero las Ecs. 6.2.1 y 6.2.3

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dP} = -g\rho \frac{1}{k} \quad (6.2.6)$$

y sustituyendo los valores para k y g obtenemos

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{-g\rho}{\rho[c^2 - (4c_t^2/3)]} = \frac{-Gm\rho}{r^2[c^2 - (4c_t^2/3)]} \quad (6.2.7)$$

Esta ecuación no puede integrarse directamente ya que $\rho = \rho(r)$; pero conociendo el valor de ρ para una profundidad determinada podemos encontrar la razón de variación de la densidad para esa profundidad. Si suponemos que la densidad varía linealmente con la profundidad para una unidad en longitud hacia abajo, podremos calcular la densidad para esta nueva profundidad y seguir con el mismo cálculo realizado sucesivamente.

6.3 Otras constantes elásticas

Ahora podemos calcular las demás constantes elásticas, λ , μ , k , ν y E a partir de la densidad y de las velocidades de las ondas sísmicas y de esta manera tenemos

$$\mu = \rho c_t^2 \quad (6.3.1)$$

$$\lambda = \rho c^2 - 2\mu = \rho(c^2 - 2c_t^2) \quad (6.2.4)$$

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \rho(c^2 - \frac{4}{3}c_t^2) \quad (6.2.5)$$

$$\sigma = \frac{(c_e/c_t)^2 - 2}{2(c_e/c_t)^2 - 2} \quad (6.1.4)$$

$$E = 2\mu(1+\sigma) = 2\rho c_t^2 \left(1 + \frac{(c_e/c_t)^2 - 2}{2(c_e/c_t)^2 - 2} \right) \quad (6.3.2)$$

$$E = \rho c_t^2 \left(\frac{3c_e^2 - 4c_t^2}{c_e^2 - c_t^2} \right)$$

6.4 Presión y gravedad

Conociendo el valor de la densidad a cada profundidad, podemos calcular la aceleración de la gravedad para cualquier radio utilizando la ecuación 6.2.2

$$g = \frac{Gm}{R^2} = \frac{G}{R^2} \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi G}{R^2} \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

donde ρ es la densidad a la profundidad R , o sea $g(R)$.

Conociendo ahora la gravedad y la densidad, podemos calcular la presión para un radio cualquiera R , utilizando la ecuación 6.2.1 así

$$P = - \int_{R_v}^R \rho g dr$$

donde R_v es el radio de una esfera de volumen igual al de la tierra.

7. ONDAS

7.1 Nociones:

Trataremos en este capítulo sólo con ondas mecánicas, es decir, aquéllas que se propagan en medios deformables o elásticos y que se originan al desplazar alguna porción de estos medios de su posición normal, poniéndolo a oscilar con respecto a una posición de equilibrio. Por estar tratando con medios elásticos, esta perturbación provocada se transmitirá de una capa a la siguiente y es lo que llamamos onda.

Las ondas mecánicas se caracterizan por el transporte de energía a través de la materia mediante el movimiento de una perturbación en esa materia sin que haya un movimiento de conjunto correspondiente de la materia misma. Además, para su transmisión necesitan de un medio material.

Las propiedades de un medio que determinan la velocidad de una onda a través de ese medio son: su inercia y su elasticidad. La elasticidad origina las fuerzas restauradoras y la inercia indica cómo responderá la porción desplazada del medio, a esas fuerzas restauradoras.

Para estudiar algunos conceptos acerca de las ondas utilizaremos una expresión de la forma

$$\Psi(x, t) = f(x \pm ct) \quad (7.1.1)$$

la cual describe una onda unidimensional.

Un caso interesante de ella es cuando la función $\Psi(x, t)$

es una función armónica como

$$\Psi(x, t) = A \operatorname{sen} k(x \pm ct) \quad (7.1.2)$$

y generalizando más

$$\Psi(x, t) = A \operatorname{sen} [k(x - ct) + \varphi] \quad (7.1.3)$$

Si se reemplaza x por $x + \frac{2\pi}{k}$ obtenemos para Ψ el mismo valor que cuando teníamos sólo x

$$\begin{aligned} \Psi(x + 2\pi/k - ct) &= A \operatorname{sen} [k(x + 2\pi/k - ct) + \varphi] \\ &= A \operatorname{sen} [k(x - ct) + \varphi + 2\pi] = A \operatorname{sen} [k(x - ct) + \varphi] = \Psi(x - ct) \end{aligned}$$

por lo que $\lambda = 2\pi/k$ es el período espacial pues la curva se repite cada longitud λ . Esta cantidad se llama longitud de onda. Por lo tanto,

$$\Psi(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - ct) = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \quad (7.1.4)$$

representa una onda sinusoidal o armónica de longitud de onda λ propagándose hacia la derecha según el eje-X con velocidad c .

La ecuación 7.1.4 la podemos escribir así:

$$\Psi(x, t) = A \operatorname{sen} (kx - \omega t) \quad (7.1.5)$$

donde

$$\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

da la frecuencia angular de la onda y A su amplitud.

Por otro lado, sabemos que $\omega = 2\pi\nu$ siendo ν la frecuencia de vibración. Entonces si $\omega = \frac{2\pi}{T}c \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \nu$ y $\lambda\nu = c$ siendo c la velocidad de propagación.

Si T es el período temporal de oscilación de cada punto

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (7.1.6)$$

y la longitud de onda la podemos definir como la distancia que avanza el movimiento ondulatorio en un período pues

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = cT$$

Extendiendo ahora $\psi = \psi(x - ct)$ sobre todo el espacio, para un tiempo t dado, ψ tendrá el mismo valor en todos los puntos de abscisa x . Además, $x = \text{constante}$ representa un plano perpendicular al eje- X y por consiguiente $\psi = \psi(x - ct)$ describe en tres dimensiones una onda plana que se propaga en la dirección \hat{x} .

Si $\psi = \psi(x - ct)$ es un campo vectorial y es paralelo a \hat{x} tenemos una onda longitudinal. Pero si ψ es perpendicular a \hat{x} resulta una onda transversal.

Lo característico en una onda plana es la dirección de propagación, que indicaremos mediante el versor \hat{n} perpendicular al plano de la onda y orientando los ejes de coordenadas arbitrariamente. La onda queda descrita ahora por

$$\psi = \psi(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad (7.1.7)$$

donde \vec{r} es el vector de posición de cualquier punto P del frente de onda y $\hat{n} \cdot \vec{r}$ resulta ser la distancia desde el origen en la dirección de propagación.

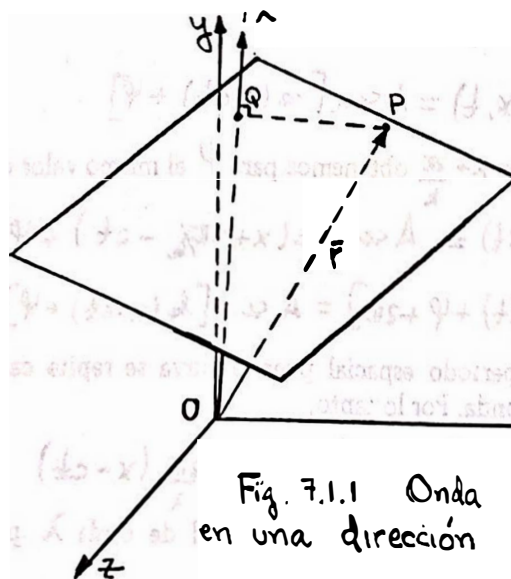


Fig. 7.1.1 Onda plana propagándose en una dirección arbitraria.

La ecuación 7.1.7 representa una onda plana que se propaga en la dirección \hat{n} .

Tomando como ejemplo de nuevo una onda armónica plana

$$\psi = A \cos k(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad (7.1.8)$$

pasaremos a analizarla.

El vector $k \hat{n} = k$ se llama vector de propagación y su longitud $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ número de onda siendo su dirección y sentido los de la propagación.

La ecuación 7.1.8 cambiará a

$$\psi = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = A \cos(k_x x_1 + k_y x_2 + k_z x_3 - \omega t) \quad (7.1.9)$$

Tomando sólo

$$\psi = A \cos(kx - \omega t) \quad (7.1.10)$$

y con un ángulo de fase φ arbitrario, obtenemos la onda

$$\psi = A \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (7.1.11)$$

que podemos representar gráficamente por:

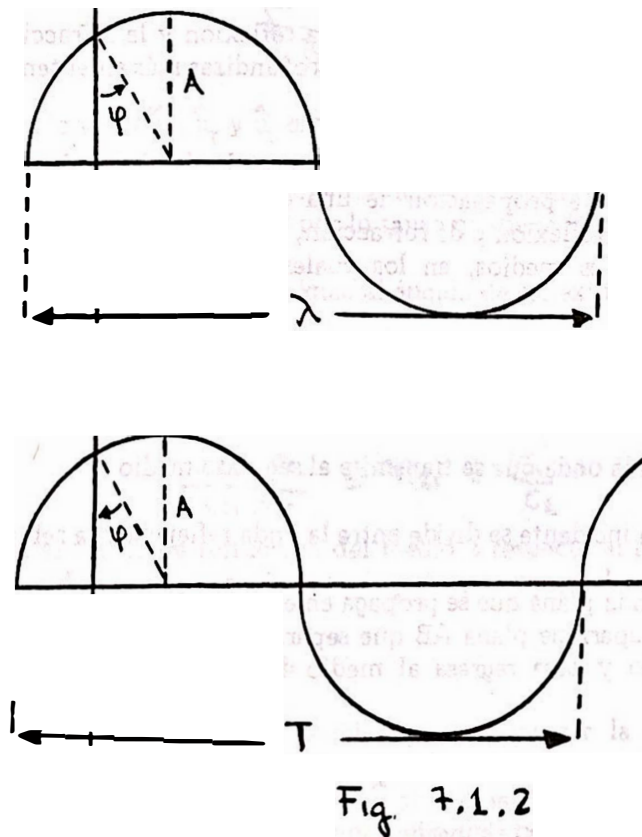


Fig. 7.1.2

Una onda plana de la forma

$$\psi = \psi(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

es una onda unidimensional pues su propagación es en una sola dirección.

Hay otras clases de ondas que se propagan en varias direcciones, Las de mayor interés son las cilíndricas y las esféricas.

En las ondas cilíndricas los frentes de onda son superficies paralelas a una línea dada, por ejemplo el eje-Z, y la perturbación se propaga en todas las direcciones perpendiculares al eje-Z.

En las ondas esféricas la perturbación se propaga en todas direcciones con la misma velocidad siendo los frentes de onda esferas concéntricas cuyo centro es el punto donde se originó la perturbación.

Estudiando ahora los tipos de onda y considerando primero la relación entre los movimientos de las partículas de materia y la dirección de propagación de las ondas mismas, podemos clasificar a las ondas en: transversales, cuando ambos son perpendiculares y longitudinales, cuando tienen la misma dirección.

El caso más especial de onda periódica es una onda armónica simple que da a cada partícula un movimiento armónico simple. Si para una onda periódica trazamos superficies tales que todos sus puntos estén en la misma fase del movimiento, estas superficies se llamarán frentes de onda.

Si el medio es homogéneo e isotrópico la dirección de propagación es siempre perpendicular al frente de onda. Una línea normal a los frentes de onda que indique la dirección y sentido del movimiento de las ondas se llama rayo.

Veremos ahora unas cuantas ideas acerca de la reflexión y la refracción de ondas. Lo haremos en una forma sencilla por lo que quien desee profundizar más en el tema debe remitirse a libros que traten de él con más detalle.

La velocidad de las ondas elásticas depende del módulo de elasticidad y de la densidad del medio. Como la velocidad de propagación de una onda depende de las propiedades del medio, se dan los fenómenos de reflexión y de refracción, que ocurren cuando una onda cruza la superficie de separación de dos medios, en los cuales la onda se propaga con diferentes velocidades.

La onda reflejada es una nueva onda que se propaga en el medio en el cual la onda original se estaba propagando.

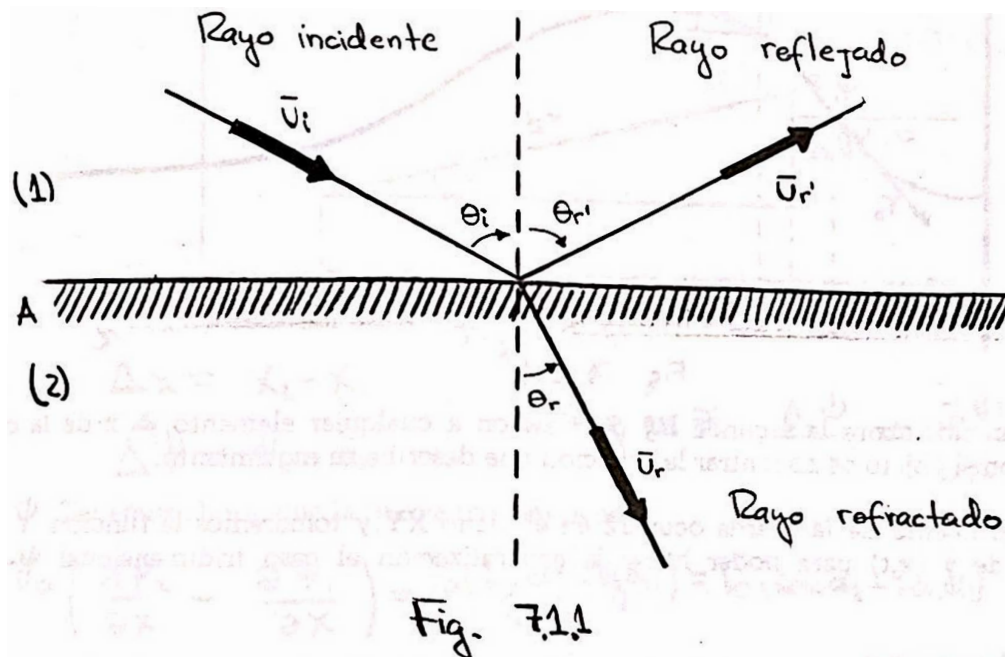
La onda refractada es la onda que se transmite al segundo medio.

La energía de la onda incidente se divide entre la onda reflejada y la refractada.

Consideremos una onda plana que se propaga en el medio 1 en la dirección del vector \hat{u}_i . Cuando la onda alcanza la superficie plana AB que separa el medio 1 del medio 2, se transmite una onda al segundo medio y otra regresa al medio 1. Estas son las ondas refractadas y reflejadas, respectivamente.

Cuando el ángulo de incidencia es oblicuo, las ondas refractadas se propagan en la dirección indicada por el vector \hat{u}_r , diferente de \hat{u}_i , y la reflejada en la dirección indicada por el vector \hat{u}_r simétrico a \hat{u}_i con respecto a la superficie.

Lo anterior podemos observarlo en la siguiente figura en la cual θ_i , θ_r y θ_r se llaman ángulos de incidencia, refracción y reflexión, respectivamente.



Las direcciones de \hat{u}_i , \hat{u}_r y \hat{u}_r' están relacionados por las siguientes leyes:

- Las direcciones de incidencia, refracción y reflexión están en un mismo plano, que es normal a la superficie de separación y por lo tanto contiene la normal N a la superficie.
- El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.
- Se cumple la ley de Snell, esto es: el cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el del ángulo de refracción es constante, es decir

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r} = n_{21} = \frac{c_1}{c_2} \quad (7.1.12)$$

donde n_{21} es el índice de refracción del medio 2 respecto al medio 1, constante cuyo valor numérico depende de la naturaleza de la onda y de las propiedades de los medios.

7.2 Ecuación de onda. Deducción:

Consideramos el caso más sencillo para encontrar la ecuación de onda y luego extenderemos esta ecuación al caso tridimensional.

Para nuestro propósito, supondremos que una porción de una cuerda, cuya masa por unidad de longitud es μ , sometida a una tensión constante y de sentido opuesto T_0 en ambos extremos.

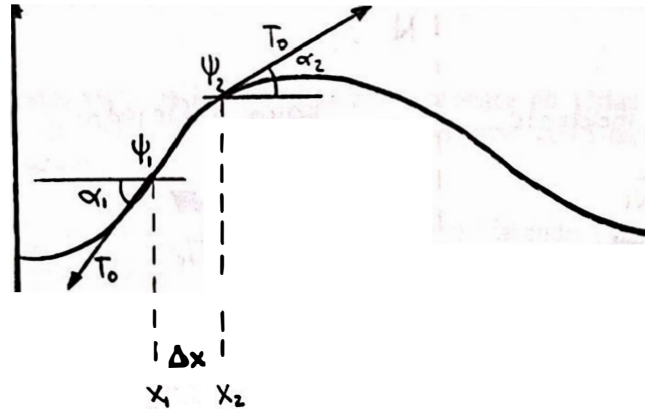


Fig. 7.2.1

Aplicaremos ahora la segunda ley de Newton a cualquier elemento Δx de la cuerda desplazada, con el objeto de encontrar la ecuación que describe su movimiento.

El movimiento de la cuerda ocurrirá en el plano XY y tomaremos la función $\psi = \psi(x, t)$ en vez de $y(x, t)$ para poder hacer la generalización al caso tridimensional $\psi = \psi(x, y, z, t)$.

Asumiremos que:

- $T_0 \neq T_0(x, t)$ sino que $T_0 = \text{constante}$
- El movimiento de la cuerda es sólo transversal.
- El ángulo entre la cuerda y el eje X es pequeño para cualquier punto de la cuerda.
- La fuerza de fricción y el efecto de la gravedad son despreciables.

La componente en Y de la fuerza resultante será:

$$T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (7.2.1)$$

mientras que la componente en X será:

$$T_0 \cos \alpha_2 - T_0 \cos \alpha_1 \quad (7.2.2)$$

Como hemos supuesto que α_2 y α_1 son muy pequeños, podemos despreciar la componente en X de la fuerza resultante y considerar a $\sin \alpha = \text{tg } \alpha$. Pero $\text{tg } \alpha$ no es más que $\partial \psi / \partial x$.

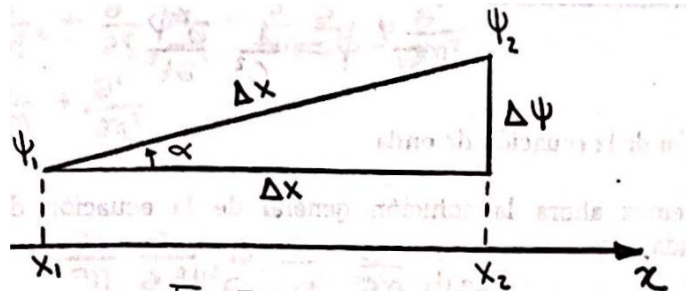


Fig. 7.2.2

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta \psi = \psi_2 - \psi_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Tenemos ahora, que la fuerza resultante es

$$T_0 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = T_0 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = T_0 (\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) \quad (7.2.3)$$

y aplicando la segunda ley de Newton, será igual a la masa del segmento de cuerda por la aceleración $\partial^2 \psi / \partial t^2$ en el eje Y , o sea que,

$$T_0 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.2.4)$$

donde $\mu \Delta x$ es la masa del segmento de cuerda.

Dividiendo la ecuación (7.2.4) entre Δx y tomando el $\lim \Delta x \rightarrow 0$ tenemos:

$$T_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

En el primer miembro, por la definición de segunda derivada, podemos sustituir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (7.2.5)$$

y tendremos

$$T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.2.6)$$

que escrita en otra forma nos queda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.2.7)$$

donde

$$c = \left(\frac{T_0}{\mu} \right)^{1/2} \quad (7.2.8)$$

es la velocidad de las ondas transversales de amplitud pequeña en una cuerda.

Escribiendo finalmente la ecuación de onda para el caso unidimensional tenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.2.9)$$

y para el caso tridimensional es

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.2.10)$$

7.3 Solución de la ecuación de onda

Buscaremos ahora la solución general de la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

o sea,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.3.1)$$

o bien, $\square^2 \psi = 0$

donde

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7.3.2)$$

es el operador de D'Alembert para el caso unidimensional, es decir $\psi = \psi(x, t)$ y por

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Para resolver la ecuación $\square^2 \psi = 0$ introduciremos como nuevas variables

$$\xi = \xi(x, t) \quad \eta = \eta(x, t) \quad (7.3.3)$$

en vez de x y t .

$$\text{Tomaremos } \xi = x - ct \quad \text{y} \quad \eta = x + ct \quad (7.3.4)$$

$$\text{y tendremos ahora } \psi = \psi(\xi, \eta) \quad (7.3.5)$$

Calculando $\frac{\partial}{\partial x}$ en función de las nuevas variables tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7.3.6)$$

pero

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \quad (7.3.7)$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7.3.8)$$

Obteniendo ahora $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ tendremos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \quad (7.3.9)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (7.3.10)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (7.3.11)$$

pues

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Trabajaremos ahora con $\partial/\partial t$ para obtener $\partial^2/\partial t^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7.3.12)$$

Como $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c$ y $\frac{\partial \eta}{\partial t} = +c$ (7.3.13)

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7.3.14)$$

Similaremente a $\partial^2/\partial x^2$ obtenemos $\partial^2/\partial t^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \quad (7.3.15)$$

$$\text{y } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (7.3.16)$$

Sustituyendo (7.3.11) y (7.3.16) en (7.3.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (7.3.17)$$

La ecuación (7.3.17) podemos escribirla como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (7.3.18)$$

lo que nos indica que para que esto se cumpla, $\partial \psi / \partial \eta$ debe ser independiente de ξ y entonces podemos decir que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \phi(\eta)$$

Integrando parcialmente ψ con respecto a η tenemos:

$$\psi(\xi, \eta) = \int \phi(\eta) d\eta + U(\xi) \quad (7.3.19)$$

Siendo $\phi(\eta)$ una función cualquiera de η

$$\int^{\eta} \phi(\eta') d\eta' = v(\eta) \quad (7.3.20)$$

y

$$\Psi(\xi, \eta) = U(\xi) + V(\eta) \quad (7.3.21)$$

Sustituyendo ξ y η en (7.3.21) obtenemos:

$$\Psi(x, t) = U(x - ct) + V(x + ct) \quad (7.3.22)$$

que es la forma general de la solución de la ecuación $\square^2 \Psi = 0$.

La función $\Psi(x, t)$ dada por (7.3.22) es la solución de D'Alembert de la ecuación de onda. En esta solución, $U = U(x - ct)$ representa una curva que se mueve hacia la derecha con velocidad de fase o de propagación c ; y $V = V(x + ct)$ representa una curva que se mueve hacia la izquierda con velocidad c .

La expresión matemática $\Psi(x, t) = U(x - ct) + V(x + ct)$ describe un movimiento ondulatorio.

Por otro lado, el teorema de Fourier dice que cualquier movimiento periódico puede expresarse como una superposición de movimientos armónicos simples de frecuencia $w, 2w, \dots, nw, \dots$ o períodos $\tau, \tau/2, \dots, \tau/n, \dots$

Esto último también lo podemos aplicar al movimiento ondulatorio periódico.

Supongamos que $f(x)$ es una función periódica definida en el intervalo $(-L, L)$ y supongámosla de período $2L$. La serie de Fourier correspondiente a $f(x)$ es:

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (7.3.23)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier y están dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (7.3.24)$$

y

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (7.3.25)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$

Pero en el caso en el que $L \rightarrow \infty$ la serie de Fourier se transforma en una integral de Fourier.

Supongamos que $f(x)$ y $f'(x)$ son seccionalmente continuas en cada intervalo finito y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

converge, es decir, $f(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$. Entonces en cada punto x donde existan las derivadas unidireccionales $f_D(x)$ y $f'_D(x)$ la función está representada por la fórmula integral de Fourier que en su forma exponencial es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{i\alpha\beta} d\beta d\alpha \quad (7.3.26)$$

donde $-\infty < x < \infty$

Formas equivalentes a (7.3.26) son:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{-i\alpha(x-\beta)} d\beta d\alpha \quad (7.3.27)$$

$$y \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{i\alpha\beta} d\beta \quad (7.3.28)$$

Escogiendo nuestra función como $\Psi(x, t)$ y aplicándole el teorema de la integral de Fourier tenemos:

$$\Psi(x, t) = U(x-ct) + V(x+ct)$$

$$U(x-ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\beta) e^{-i\alpha(x-ct-\beta)} d\beta d\alpha \quad (7.3.29)$$

$$V(x+ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\beta) e^{-i\alpha(x+ct-\beta)} d\beta d\alpha \quad (7.3.30)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[U(\beta) e^{i\alpha(\beta-x+ct)} + V(\beta) e^{i\alpha(\beta-x-ct)} \right] d\beta d\alpha \quad (7.3.31)$$

III. ONDAS ELÁSTICAS

8. Ondas Elásticas en un medio infinito

8.1 Ondas Elásticas en un medio isótropo

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un medio elástico utilizaremos la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (8.1.1)$$

donde ρ es la densidad del medio, \ddot{u}_i la aceleración y

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ es la fuerza por unidad de volumen debida a las tensiones internas.

La ecuación de equilibrio para cuerpos sólidos isótropos es:

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = -\rho \vec{g} \quad (8.1.2)$$

Por otro lado, $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (u_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{kk} \delta_{ij})$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_{kk}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \quad (8.1.3)$$

Además

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (8.1.4)$$

y

$$\frac{\partial u_{kk}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_{kk}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (8.1.5)$$

Después de sustituir 8.1.5, 8.1.4 en 8.1.3, la Ec. 8.1.1 queda así

Tomando

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_{kk}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (8.1.6)$$

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = a \quad \text{y} \quad \frac{E}{1+\nu} = b$$

obtenemos

$$a \frac{\partial^2 u_{kk}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \rho \ddot{u}_i = 0$$

Tomando ahora

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_l}$$

$$\left(a + \frac{b}{2}\right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{o sea,}$$

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} \quad \text{donde}$$

\ddot{u}_i son las componentes del vector $\ddot{\mathbf{U}}$,

$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ son las componentes del vector $\nabla^2 \bar{\mathbf{U}}$

$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$; y $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)$ son las componentes de $\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}})$

La ecuación en forma vectorial estará dada por:

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \bar{\mathbf{U}} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}) \quad (8.1.7)$$

Como suponemos que las deformaciones son pequeñas, los movimientos que tomaremos en cuenta serán pequeñas oscilaciones u ondas elásticas.

Veremos primero el caso de una onda plana elástica en un medio infinito e isótropo, o sea, una onda en la cual la deformación $\bar{\mathbf{U}}$ es función de una coordenada, por ejemplo x , y el tiempo, y entonces para este caso

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{U}} = \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right),$$

siendo las componentes de $\nabla^2 \bar{\mathbf{U}}$ de esta forma $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$

Además, $\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}})$ se convierte en el vector

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right)$$

el cual se reduce a

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, 0, 0 \right)$$

Trabajando con la primer componente de la ecuación vectorial 8.1.7 obtenemos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$$\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

o sea

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \right)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1.8)$$

donde

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1.9)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

Para las otras dos componentes tenemos

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{2\rho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0$$

o sea,

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1.10)$$

donde

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \quad (8.1.11)$$

Lo mismo se cumple para u_z .

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1.12)$$

Las tres ecuaciones anteriores, 8.1.8, 8.1.10 y 8.1.12, son ecuaciones ordinarias de ondas en una dimensión y las cantidades c_l y c_t son sus velocidades de propagación.

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la componente u_x es diferente de la velocidad de propagación de u_y y u_z .

Una onda elástica consiste de dos ondas que se propagan con diferentes direcciones e independientemente. En una (u_x), el desplazamiento es en la dirección de propagación y es una onda longitudinal que se propaga con velocidad c_l . En la otra onda (u_y, u_z) el desplazamiento es en un plano perpendicular a la dirección de propagación y es una onda transversal que se propaga con velocidad c_t .

Las velocidades c_l y c_t se llaman con frecuencia velocidades longitudinal y transversal del sonido y cumplen siempre la relación $c_l > c_t \sqrt{4/3}$

Recordando, sabemos que el cambio de volumen está dado por $\Delta \equiv \nabla \cdot \vec{u}$. En una onda transversal (u_x, u_y, u_z) = u_t no hay componentes u_x y como tanto u_y como u_z no son funciones de y y z entonces $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ para este tipo de onda, y por lo tanto, en estas ondas no hay involucrado un cambio de volumen.

Pero para las ondas longitudinales $\vec{u}_l = (u_x, 0, 0)$, $\nabla \cdot \vec{u}_l = \frac{\partial u_x}{\partial x} \neq 0$ pues $u_x = u_x(x, t)$ y estas ondas provocan expansiones y compresiones del cuerpo.

La separación de la onda en dos partes que se propagan independientemente con diferentes velocidades puede efectuarse también en el caso general de una onda arbitraria (no plana) que se propaga en un medio elástico infinito.

Escribiendo la ecuación

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \nabla^2 \vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$

y utilizando

$$c_l^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}$$

vemos que

$$c_l^2 - c_t^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}$$

$$c_l^2 - c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

y entonces

$$\ddot{\bar{U}} = c_t^2 \nabla^2 U + (c_l^2 + c_t^2) \nabla(\nabla \cdot \bar{U}) \quad (8.1.13)$$

Representaremos al vector \bar{U} como

$$U = \bar{U}_l + U_t \quad (8.1.14)$$

donde

$$\nabla \cdot \bar{U}_t = 0 \quad (8.1.15)$$

y

$$\nabla \times \bar{U}_l = 0 \quad (8.1.16)$$

ya que siempre es posible expresar un vector como la suma del rotor de un vector y el gradiente de un escalar, aunque no se demostrará aquí.

\bar{U}_t lo expresaremos como el rotor de un vector y \bar{U}_l como el gradiente de un escalar y de esta manera justificamos las condiciones dadas por 8.1.15 y 8.1.16 ya que el rotor de un gradiente tanto como la divergencia de un rotacional siempre son cero.

Haciendo la sustitución de 8.1.14 en 8.1.13 obtenemos:

$$U_l + \ddot{U}_t = c_t^2 \nabla^2 (\bar{U}_l + \bar{U}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\nabla \cdot (\bar{U}_l + \bar{U}_t)) \quad (8.1.17)$$

Tomando la divergencia de ambos lados:

$$\nabla \cdot \ddot{U}_l + \nabla \cdot \ddot{U}_t = c_t^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{U}_l + \nabla \cdot \bar{U}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{U}_l) \quad \text{quedando}$$

$$\nabla \cdot \ddot{U}_l = c_t^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{U}_l) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{U}_l)$$

$$\text{o sea,} \quad \nabla \cdot (\ddot{U}_l - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_l) = 0$$

$$\text{como} \quad \nabla \times \bar{U}_l = 0$$

$$\nabla \times (\ddot{U}_l - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_l) = 0$$

Pero si el rotacional y la divergencia de un vector se anulan simultáneamente, entonces el vector tiene que ser nulo, con lo cual,

$$\ddot{U}_l - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_l = 0 \quad (8.1.18)$$

$$\text{o sea} \quad \frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_l = 0 \quad \text{o bien,} \quad \square^2 \bar{U}_l = 0$$

Tomando ahora el rotacional de la ecuación 8.1.17 tenemos

$$\nabla \times \ddot{U}_l + \nabla \times \ddot{U}_t = c_t^2 \nabla^2 (\nabla \times \bar{U}_l + \nabla \times \bar{U}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla \times \nabla (\nabla \cdot \bar{U}_l + \nabla \cdot \bar{U}_t)$$

$$\nabla \times \ddot{U}_t = c_t^2 \nabla \times \nabla^2 \bar{U}_t \Rightarrow \nabla \times (\ddot{U}_t - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_t) = 0$$

$$\text{como la} \quad \nabla \cdot U_t = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\ddot{U}_t - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_t) = 0$$

y utilizando el mismo razonamiento usado para la ecuación anterior tenemos

$$\ddot{U}_t - c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_t = 0 \quad (8.1.19)$$

o sea,
$$\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \bar{u}_t = 0 \quad \text{o bien} \quad \square^2 \bar{u}_t = 0$$

Las ecuaciones 8.1.18 y 8.1.19 son ecuaciones de onda en tres dimensiones y cada una de ellas representa la propagación de una onda elástica con velocidades de propagación c_t y c_l respectivamente. La onda (\bar{u}_t) no lleva consigo cambios de volumen pues $\nabla \cdot \bar{u}_t = 0$ y la onda (\bar{u}_l) sí lleva consigo compresiones y extensiones de volumen.

En una onda elástica y monocromática el vector desplazamiento es

$$U = \text{Re} \left\{ \bar{U}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\} \quad (8.1.20)$$

o sea,
$$U = \bar{U}_0 \cos \omega t \quad (8.1.21)$$

Si sustituimos 8.1.21 en 8.1.13 obtenemos:

$$\dot{U} = -\omega \bar{U}_0 \sin \omega t \quad \ddot{U} = -\omega^2 \bar{U}_0 \cos \omega t$$

Además, como el laplaciano, el gradiente y la divergencia llevan consigo sólo derivadas de posición,

$$\nabla^2 \bar{U} = (\nabla^2 \bar{U}_0) \cos \omega t \quad \text{y} \quad \nabla(\nabla \cdot \bar{U}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{U}_0) \cos \omega t$$

Finalmente tendremos que \bar{U}_0 cumple con

$$c_t^2 (\nabla^2 \bar{U}_0) \cos \omega t + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\nabla \cdot \bar{U}_0) \cos \omega t + \omega^2 \bar{U}_0 \cos \omega t = 0$$

o sea,
$$c_t^2 \nabla^2 \bar{U}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\nabla \cdot \bar{U}_0) + \omega^2 \bar{U}_0 = 0 \quad (8.1.22)$$

Las partes longitudinal y transversal de una onda monocromática satisfacen las ecuaciones

$$\nabla^2 \bar{U}_l + k_l^2 \bar{U}_l = 0 \quad (8.1.23)$$

$$\nabla^2 \bar{U}_t + k_t^2 \bar{U}_t = 0 \quad (8.1.24)$$

donde
$$k_l = \omega/c_l \quad k_t = \omega/c_t$$

Son los números de onda de las ondas longitudinales y transversal, respectivamente.

8.2 Reflexión y Refracción de una onda elástica plana y monocromática.

Trataremos este tema en la superficie de separación entre 2 medios elásticos diferentes. Lo haremos en una forma breve.

En general, durante la reflexión o refracción se altera la naturaleza de la onda.

Si una onda transversal pura o longitudinal pura incide sobre una superficie de separación, el resultado será una onda que contiene una parte longitudinal y una parte transversal. Cuando la onda incide normalmente sobre dicha superficie, o cuando una onda transversal —cuyas vibraciones son paralelas a la superficie—, incide sobre ella en cualquier dirección, la naturaleza de la onda no varía.

Sean θ y θ' los ángulos de incidencia y reflexión (o refracción) y c y c' las velocidades de las 2 ondas.

Se cumple entonces que

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'} \quad (8.2.1)$$

Consideremos, por ejemplo, una onda incidente transversal con velocidad $c = c_{t1}$ en medio 1. Para la onda transversal reflejada tenemos $c' = c_{t1}$ y utilizando 8.2.1 deducimos que $\theta = \theta'$. O sea, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Para la onda longitudinal reflejada $c = c_{l1}$ y

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}$$

La velocidad de la onda transversal refractada será $c' = c_{t2}$ y $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}$ y la velocidad de la onda longitudinal refractada será $c' = c_{l2}$ cumpliéndose $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l2}}$.

8.3 Geometría de las Ondas Planas P y S.

La forma general de las ondas planas viene dada por la ecuación:

$$u_i = A_i e^{i k (\eta_j x_j - ct + \phi)} \quad (8.3.1)$$

donde A_i es la amplitud, c la velocidad, ϕ el retraso de fase y η_j directores de la normal al frente de onda, o sea de la dirección de propagación.

En un sólido elástico infinito e isótropo existen dos tipos de ondas: unas viajan velocidad c_l y las componentes de sus desplazamientos cumplen la condición

$$\sum_{j,k} \delta_{ijk} u_{j,k} \eta_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.3.2)$$

donde el primer subíndice de $u_{j,k}$ significa que la onda es longitudinal y el segundo v según la componente. Esta es la onda P cuyo movimiento está en la dirección del rayo.

El segundo tipo se propaga con velocidad c_t y su movimiento está en el plano no al rayo, por lo que sus desplazamientos cumplen la condición

$$u_{ti} \eta_i = 0 \quad (8.3.3)$$

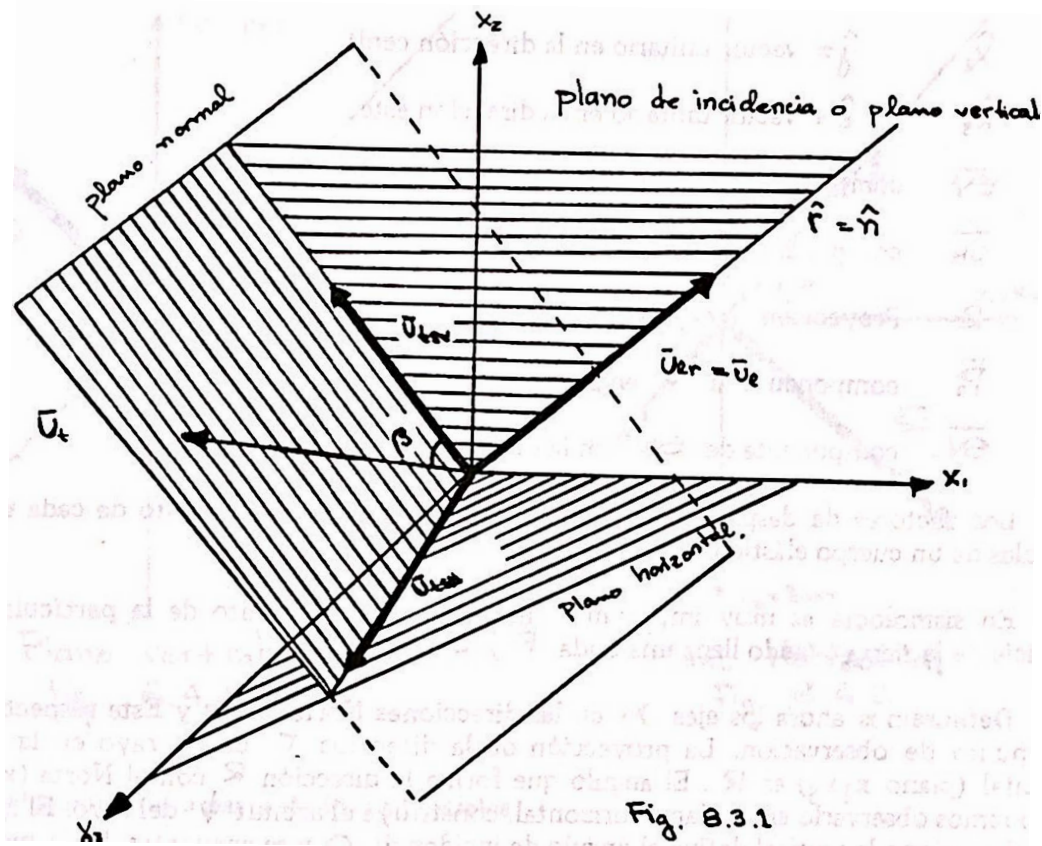
donde el primer subíndice de u_{ti} significa que la onda es transversal.

En un sistema de coordenadas cartesianas los vectores u_l y u_t que representen los desplazamientos de las ondas P y S, tienen sus componentes dadas por u_{li} u_{ti} respectivamente.

Definiremos un nuevo sistema de coordenadas (r, sv, sh) donde r es la dirección de propagación del rayo o \hat{n} y sv y sh están en el plano normal. sv es la intersección del plano normal con el plano $r \times z$, o sea, $r \times z$, representando la componente vertical de la onda S; y sh es la intersección del plano normal con el plano $x_1 \times x_3$, o $x \times z$, representando la componente horizontal de la onda S. Las componentes de ondas P y S en uno y otro sistema de coordenadas vienen dadas por:

$$u_l = (u_{l1}, u_{l2}, u_{l3}) = (u_{lr}, 0, 0) \quad (8.3.4)$$

$$\bar{u}_t = (u_{t1}, u_{t2}, u_{t3}) = (0, u_{t sv}, u_{t sh}) \quad (8.3.5)$$



El ángulo que forma la dirección del movimiento de la onda \vec{S} con el eje \vec{SV} se llama ángulo de polarización β

$$\beta = \arctg \frac{U_{tSH}}{U_{tSV}} \quad (8.3.6)$$

Las amplitudes totales del movimiento de la onda \vec{P} , y \vec{S} vienen dadas por

$$|\vec{U}_e| = (U_{e1}^2 + U_{e2}^2 + U_{e3}^2)^{1/2} = |\vec{U}_{er}| = U_{er} \quad (8.3.7)$$

$$|\vec{U}_t| = (U_{t1}^2 + U_{t2}^2 + U_{t3}^2)^{1/2} = (U_{tSV}^2 + U_{tSH}^2)^{1/2} \quad (8.3.8)$$

8.4 El movimiento de la partícula

La nomenclatura que utilizaremos para facilitar la comprensión de esta sección será la siguiente, que hace uso de vectores:

- \vec{P} onda primaria
- \vec{S} onda secundaria
- \hat{r} vector unitario en la dirección de la coordenada r del nuevo sistema (r, SV, SH)
- \hat{SV} vector unitario en la dirección de la coordenada SV
- \hat{SH} vector unitario en la dirección de la coordenada SH

\hat{x}_1 \hat{x} = vector unitario en la dirección norte

\hat{x}_2 \hat{y} = vector unitario en la dirección cenit

\hat{x}_3 \hat{z} = vector unitario en la dirección este

SV componente vectorial vertical de la onda S

SH componente vectorial horizontal de la onda S

R Proyección en el plano horizontal de la coordenada r

P_R componente de P en la dirección de R

SV_R componente de SV en la dirección de R

Los vectores de desplazamiento \bar{U}_R y U_t definen el movimiento de cada una de las partículas de un cuerpo elástico al paso de las ondas P y S .

En sismología es muy importante fijarse en el movimiento de la partícula sobre la superficie de la tierra cuando llega una onda P y S .

Definiremos ahora los ejes X_i en las direcciones Norte, Cenit y Este respectivamente, en el punto de observación. La proyección de la dirección r de un rayo en la superficie horizontal (plano x_1x_3) es R . El ángulo que forma la dirección R con el Norte (x_1), y que sólo podemos observarlo en el plano horizontal, constituye el azimut ϕ del rayo. El ángulo que forma el rayo con la vertical define el ángulo de incidencia Θ y se encuentra, lógicamente, en el plano vertical (plano $r x_2$).

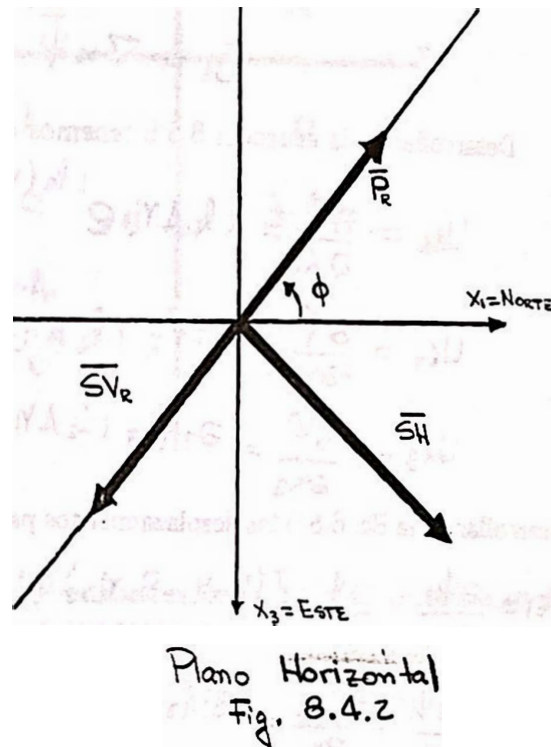
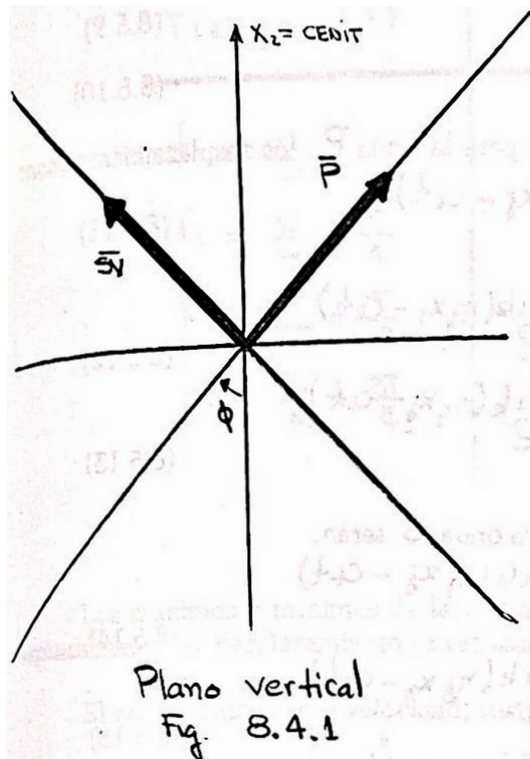
En el plano vertical, R y x_2 son perpendiculares y ambos se encuentran en dicho plano. R es la intersección del plano vertical con el plano horizontal. En el plano vertical se propaga la onda P que tiene una componente vertical, su proyección sobre x_2 , $(P \cdot \hat{x}_2)$, y otra horizontal, su proyección sobre R , $(\bar{P} \cdot \hat{R})$. En este plano se propaga también la componente vertical de la onda S , o sea, SV . La onda SV tiene una componente vertical $(\bar{S}V \cdot \hat{x}_2)$ y una componente en el plano horizontal en la dirección de R dada por $\bar{S}V \cdot \hat{R}$.

En el plano horizontal la onda SH tiene su dirección perpendicular a la dirección de R . Las componentes de las ondas P y SV que aparecen en este plano son

$$P_R = \bar{P} \cdot \hat{R} \quad \text{y} \quad SV_R = \bar{S}V \cdot \hat{R}$$

o sea, aquellas que están en la dirección de R .

Los planos vertical ($r x_2$) y horizontal ($x_1 x_3$) los vemos a continuación en la siguiente figura.



8.5 Desplazamientos a partir de los potenciales

Para encontrar los desplazamientos utilizaremos los potenciales φ y ψ_i que son las soluciones de las ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \varphi \quad (8.5.1)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \psi_i \quad (8.5.2)$$

respectivamente y podemos expresarlos en forma de ondas planas.

$$\varphi = A e^{i k (x_j n_j - c t)} \quad (8.5.3)$$

$$\psi_i = B_i e^{i k (x_j n_j - c t)} \quad (8.5.4)$$

donde A y B_i son las amplitudes de los potenciales.

Como $U_i = \partial_i \varphi + \delta_{ijk} \partial_j \psi_k$ podemos encontrar

$$U_{ei} = \partial_i \varphi = A_i k n_i e^{i k (x_j n_j - c t)} \quad (8.5.5)$$

$$\text{y} \quad U_{ti} = \delta_{ijk} \partial_j \psi_k \quad (8.5.6)$$

puesto que $\bar{U} = \bar{U}_e + U_t \quad (8.5.7)$

y se cumple que $\nabla \times \bar{U}_e = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \bar{U}_t = 0 \quad (8.5.8)$

por lo que
$$\bar{U}_e = \nabla \varphi \quad (8.5.9)$$

y
$$\bar{U}_t = \nabla \times \bar{\psi} \quad (8.5.10)$$

Desarrollando la ecuación 8.5.5 tenemos que para la onda P los desplazamientos son:

$$U_{e1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = ikA\eta_1 e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.11)$$

$$U_{e2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \partial_2 \varphi = ikA\eta_2 e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.12)$$

$$U_{e3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \partial_3 \varphi = ikA\eta_3 e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.13)$$

y desarrollando la Ec. 8.5.6 los desplazamientos para la onda S serán:

$$U_{t1} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = (B_3 \eta_2 - B_2 \eta_3) k e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.14)$$

$$U_{t2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = (B_1 \eta_3 - B_3 \eta_1) k e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.15)$$

$$U_{t3} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = (B_2 \eta_1 - B_1 \eta_2) k e^{ik(\eta_j x_j - ct)} \quad (8.5.16)$$

8.6 Velocidad de la partícula

Las velocidades C_e y C_t representan las velocidades de propagación de las ondas. Ahora estamos interesados en saber la velocidad con que se mueve cada partícula cuando pasan las ondas.

Tomaremos una onda P propagándose en la dirección del eje x , para mayor facilidad. El desplazamiento de la partícula está dado por la Ec. 8.3.1 con $i = 1$, o sea,

$$U_{e1} = A_1 \cos k(x_1 - C_e t) \quad (8.6.1)$$

la velocidad, por lo tanto, será:

$$\dot{U}_{e1} = \frac{\partial U_{e1}}{\partial t} = A_1 k C_e \sin k(x_1 - C_e t) \quad (8.6.2)$$

Para un punto sobre el eje x_1 (eje x) a una distancia $x_1 = x_1^0$ del origen, asignando valores a t , podemos encontrar los valores correspondientes para el desplazamiento y la velocidad sustituyendo t en las ecuaciones 8.6.1 y 8.6.2 y sabiendo que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y obtenemos así la siguiente tabla.

Tiempo (t)	u_{e1}	u_{e2}
$t_0 = \frac{x_1}{\alpha}$	A_1	0
$t_1 = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{T}{4}$	0	$-A_1 \sin \alpha$
$t_2 = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{T}{2}$	$-A_1$	0
$t_3 = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{3T}{4}$	0	$A_1 \sin \alpha$

Los máximos y mínimos de la velocidad están desfasados en $T/4$ con respecto a los del desplazamiento. El desplazamiento va retrasado con respecto a la velocidad.

El valor máximo de la velocidad, sustituyendo $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/T\alpha$, es

$$\dot{u}_{e1} = \frac{2\pi A_1}{T} \quad (8.6.3)$$

La velocidad de la partícula es, por lo tanto, independiente de la velocidad de propagación de la onda y depende sólo de la amplitud y del período.

8.7 Energía en una onda plana elástica

La energía total en una onda elástica plana es la suma de la energía cinética T y la energía potencial V , esto es,

$$E = T + V \quad (8.7.1)$$

Consideraremos, para ejemplificar esto, una onda que se propaga en la dirección $x_1 = x$ y que tiene desplazamiento $(0, u_z, 0)$, o sea, $u = u_z$

La onda estará dada entonces por

$$u = A \sin k(x - ct) = u(x - ct) \quad (8.7.2)$$

La energía cinética de la onda entre dos frentes de onda x' y x'' es proporcional al cuadrado de la velocidad

$$T = \frac{1}{2} a \int_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (8.7.3)$$

y la energía potencial en un cuerpo perfectamente elástico es proporcional al cuadrado de las deformaciones

$$V = \frac{1}{2} b \int_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8.7.4)$$

De acuerdo con el principio de mínima acción, o principio de Hamilton para sistemas conservativos, todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida por

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (8.7.5)$$

o sea,

$$L(q, \dot{q}, t)$$

y el movimiento del sistema del tiempo t_1 al tiempo t_2 es tal que la integral de línea dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (8.7.6)$$

tome el menor valor posible.

La función L se llama Lagrangiano del sistema y es

$$L = T - V \quad (8.7.7)$$

mientras que la integral S se llama acción.

La condición necesaria de mínimo de S es que su primera variación se anule, esto es:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (8.7.8)$$

El principio de Hamilton es condición necesaria y suficiente para que se cumplan las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (8.7.9)$$

donde las q_i son las coordenadas y las \dot{q}_i las velocidades.

Aplicando la Ec. 8.7.9 a nuestro problema obtenemos:

$$L = T - V = \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\dot{q} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$q = u$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad \frac{d}{dt} \left[a \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \right] = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{b}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx = -\frac{b}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -b \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - b \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

integral que es cero cuando

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (8.7.10)$$

o sea,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ecuación que al compararla con la ecuación de onda da

$$h = ac^2$$

Si sustituimos en las Ecs. 8.7.3 y 8.7.4 una onda de la forma de la Ec. 8.7.2 tendremos.

$$T = \frac{ac^2 b^2}{2} \int_{x'}^{x''} A^2 \cos^2 k(x-ct) dx \quad (8.7.11)$$

$$V = \frac{b b^2}{2} \int_{x'}^{x''} A^2 \cos^2 k(x-ct) dx \quad (8.7.12)$$

y como $b=ac^2$ queda $T=V$, o sea que la energía en una onda plana elástica está dividida por igual en energía cinética y potencial y es proporcional al cuadrado de la amplitud. La energía total es

$$E = T+V = b b^2 \int_{x'}^{x''} A^2 \cos^2 k(x-ct) dx \quad (8.7.13)$$

8.8 Propagación de la Energía

Muchas veces es más conveniente utilizar la densidad de energía ω , o sea, la energía por unidad de volumen. En ausencia de disipaciones de energía y considerando que el cuerpo es perfectamente elástico, la ecuación de conservación de la energía puede escribirse así:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (\omega v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (8.8.1)$$

donde v_i es la velocidad de transmisión de la energía.

La forma unidimensional de la ecuación anterior es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (\omega v)}{\partial x} = 0 \quad (8.8.2)$$

donde ω es ahora la energía por unidad de longitud en la dirección de propagación de la onda.

Verificaremos ahora que cuando la onda es transmitida no cambia en forma y que la energía se propaga en el medio con la misma velocidad, o sea que:

$$\omega = \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (8.8.3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

Utilizando la ecuación $a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad (8.8.4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(- b \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Colocando el valor anterior en la ecuación 8.8.2

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\omega v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{y por lo tanto}$$

$$v \omega = - b \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad v = - \frac{b}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.8.5)$$

o sea que

Si tomamos $U = f(x-ct)$ y calculamos w , $\frac{\partial U}{\partial t}$ y $\frac{\partial U}{\partial x}$

y los sustituimos en la Ec. 8.8.5 obtendremos:

$$w = \frac{a}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \frac{b}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -c f(x-ct) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = f(x-ct)$$

$$V = - \frac{b(-c f(x-ct))(f(x-ct))}{\frac{1}{2}(c^2 a + b) f^2(x-ct)} = \frac{2bc}{c^2 a + b} = \frac{2bc}{2b} = c$$

∴ $V = c$ (8.8.6)

o sea que para el caso en que una onda plana se propaga con velocidad constante, la energía se transmite con la misma velocidad con que se propaga la onda.

8.9 Ondas Esféricas

La ecuación de las ondas esféricas con simetría con respecto al centro puede deducirse a partir de la ecuación de onda 7.2.10 poniendo el laplaciano en coordenadas esféricas, haciendo $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y suponiendo que $\psi = \psi(r, t)$ para simplificar la solución.

El laplaciano en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (8.9.1)$$

Como $\psi = \psi(r, t)$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (8.9.2)$$

y la ecuación de onda estará dada para este caso por

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8.9.3)$$

o sea,

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8.9.4)$$

Haciendo la sustitución $\psi(r, t) = \frac{\Phi(r, t)}{r}$ (8.9.5)

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

Volviendo a la Ec. 8.9.4 $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (8.9.6)$$

Esta última ecuación tiene una solución más sencilla. Suponiendo que no hay fuentes en el infinito, es decir, la energía se propaga desde el origen hacia afuera, la solución tendrá la forma:

$$\Phi = \Phi(r - ct) \quad (8.9.7)$$

$$\Psi = \frac{1}{r} \Phi(r - ct) \quad (8.9.8)$$

Para este caso $c = c_0$ pues no existirá velocidad transversal al propagarse la onda en forma radial.

La solución ψ que satisface la ecuación será

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(k_0 r - \omega t)} = \frac{A}{r} e^{i k_0 c (r - ct)} \quad (8.9.9)$$

donde $k_0 c$ es el número de onda correspondiente a la onda de velocidad c

Summerfield demostró que esta expresión se puede escribir en la forma:

$$\frac{e^{i k_0 r}}{r} = \int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-v|z|} \frac{k}{v} dk \quad (8.9.10)$$

donde $J_0(kr)$ es la función de Bessel de orden cero, z y r las coordenadas cilíndricas y $v^2 = c^2 - k^2$.

Esta expresión describe las ondas esféricas en función de las coordenadas cilíndricas y es muy útil en Sismología.

8.10 Ondas Cilíndricas

El laplaciano de una función $U = U(r, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (8.10.1)$$

Para escribir la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas supondremos que hay simetría con respecto al eje z y entonces

$$\nabla^2 \varphi(r, z, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (8.10.2)$$

$$y \quad \nabla^2 \psi(r, z, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8.10.3)$$

donde los potenciales φ y ψ son sólo funciones de r , z y t .

Los desplazamientos son R en la dirección de r y Z en la dirección de z , y pueden deducirse de los potenciales $\varphi(r, z, t)$ y $\chi(r, z, t)$ de tal forma que:

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (8.10.4)$$

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\chi)}{\partial r} \quad (8.10.5)$$

donde $\chi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

Los potenciales φ y χ son soluciones de

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (8.10.6)$$

y $\nabla^2 \chi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (8.10.7)$

Si hacemos $\chi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ el nuevo potencial, ψ , es solución de la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8.10.8)$$

9. ONDAS ELASTICAS EN UN MEDIO SEMI-INFINITO:

9.1 Leyes de reflexión y refracción:

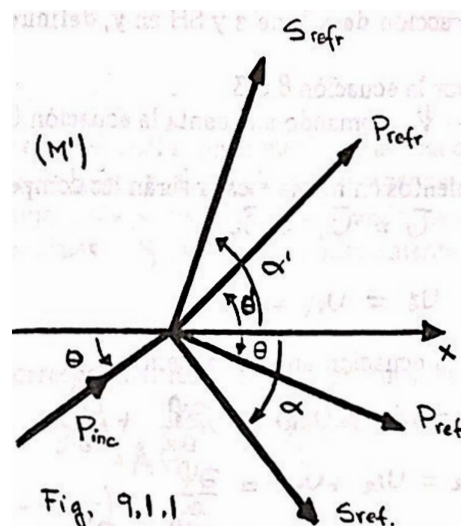
En la sección 8.2 se trató este tema para ondas longitudinales y transversales. En esta sección trataremos lo mismo utilizando ondas S y P e introduciendo una nueva forma de trabajar con los ángulos de incidencia, reflexión y refracción.

Sea Θ el ángulo (acutángulo) entre la normal a un frente de onda y el eje-X para cualquier tipo de onda (incidente, reflejada o refractada) y sea i su complemento. Sea c la velocidad de la onda. Para todas las ondas involucradas se cumple que

$$\frac{\text{sen } l}{c} = \frac{\cos \Theta}{c} = \text{constante} \quad (9.1.1)$$

Con una onda incidente, i es llamado ángulo de incidencia y Θ ángulo de emergencia. Como trataremos con ondas P y S, en adelante denotaremos los ángulos entre las normales a los frentes de onda y el eje-X por Θ para las ondas P y por α para las ondas S en el medio M (esto es, para ondas incidentes y reflejadas), y por Θ' y α' en el medio M' (esto es, para ondas refractadas).

La siguiente figura nos hace visualizar mejor lo dicho.



9.2 Reflexión de ondas internas:

Consideremos un medio elástico semi-infinito limitado por la superficie XY y ocupando la parte inferior del espacio. c_p es la velocidad de la onda P y c_t la velocidad de la onda S. Consideraremos tres casos para el tipo de onda de incidencia.

Caso 1: incidencia de una onda P

Utilizando la ley de Snell, ecuación 8.2.1 y la ecuación 9.1.1 obtenemos la relación

$$\frac{\text{sen } i}{c_t} - \frac{\cos \Theta}{c_p} = \frac{\cos \alpha}{c_t} \quad (9.2.1)$$

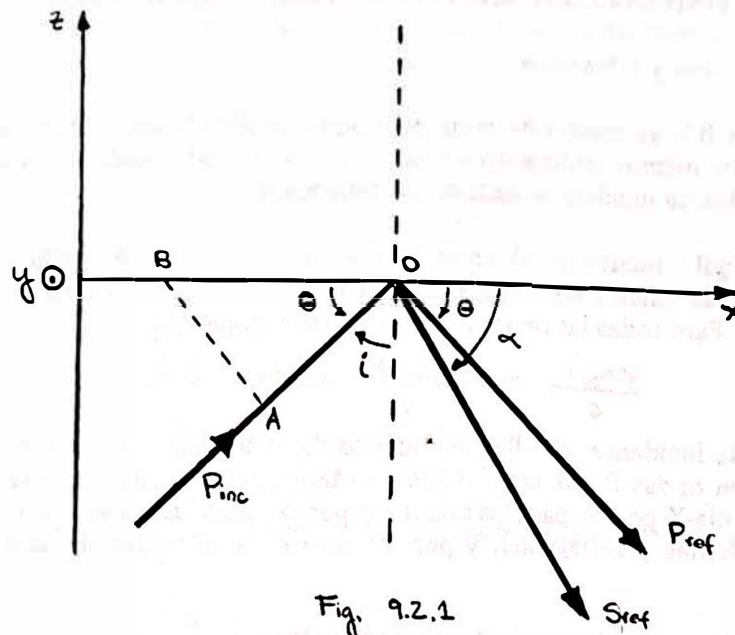


Fig. 9.2.1

donde i es el ángulo de incidencia, Θ el ángulo de emergencia de la onda P tanto incidente como reflejada, y α es el ángulo de emergencia de la onda S reflejada.

Para representar los desplazamientos de las ondas P y S, y teniendo en cuenta que el rayo está contenido en el plano XZ y que los desplazamientos de las ondas P y SV tienen sólo componentes en la dirección de x y de z y SH en y, definiremos los potenciales φ , ψ y u_z así.

φ dado por la ecuación 8.5.3
 ψ como $-\psi_z$ tomando en cuenta la ecuación 8.5.4

Los desplazamientos en forma escalar serán las componentes de \bar{u}

$$\bar{u} = \bar{u}_e + \bar{u}_t$$

o sea,

$$u_i = u_{ei} + u_{ti}$$

Desarrollando la ecuación anterior tenemos

$$u_1 = u_{e1} + u_{t1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (9.2.2)$$

$$u_2 = u_{e2} + u_{t2} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (9.2.3)$$

$$u_3 = u_{e3} + u_{t3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.2.4)$$

donde φ , ψ y u_z son soluciones de las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_p^2 \nabla^2 \varphi \quad (9.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \psi \quad (9.2.6)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_t^2 \nabla^2 u_z \quad (9.2.7)$$

Los cosenos directores del rayo incidente P son

$$(\cos \Theta, 0, \sin \Theta) \quad (9.2.8)$$

En el medio M los potenciales pueden ser escritos de la siguiente forma.

$$\varphi = A_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} + A e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \theta - vt)} \quad (9.2.9)$$

$$\psi = B_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + B e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad (9.2.10)$$

$$U_z = C_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + C e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad (9.2.11)$$

donde $v = \frac{c}{\cos \theta}$ es la velocidad aparente del punto B en la superficie que se propaga de B a O mientras el rayo se propaga de A a O; $\kappa = k \cos \theta$ es el número de onda correspondiente a la velocidad v . Además, los primeros términos del lado derecho de las ecuaciones 9.2.9, 9.2.10 y 9.2.11 corresponden a las ondas incidentes y los segundos términos a las reflejadas.

Las tres ecuaciones anteriores resultaron a partir de la forma general de la solución de la ecuación de onda. Por ejemplo:

$$\varphi = A e^{i k_e (x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 - ct)} = A e^{i k_e (x \cos \theta + y \cos 90^\circ + z \cos (90^\circ - \theta) - ct)}$$

$$\varphi = A e^{i k_e (x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta - ct)}$$

$$\varphi = A e^{i k_e (x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta - ct)}$$

dividiendo y multiplicando el exponente por $\cos \theta$

$$\varphi = A e^{i k_e \cos \theta (x + z \operatorname{tg} \theta - ct / \cos \theta)} = A e^{i \kappa (x + z \operatorname{tg} \theta - vt)}$$

donde $\kappa = k \cos \theta$ y $v = c / \cos \theta$.

Como estamos tratando el caso en el cual la onda incidente es una onda P, tenemos que $B_0 = C_0 = 0$ y $A_0 \neq 0$. Además $c = c_p$, $v = v_p$, $k = k_p$ y el ángulo de emergencia será θ cuando nos referimos al potencial φ mientras que $c = c_t$, $v = v_t$, $k = k_t$ y el ángulo de emergencia será α cuando nos referimos a los potenciales ψ y U_z . Explícitamente $k_e = k_p \cos \theta$ y $v_e = c_p / \cos \theta$ para φ y $k_t = k_t \cos \alpha$ y $v_t = c_t / \cos \alpha$ para ψ y U_z .

Haciendo las modificaciones correspondientes en los tres potenciales tenemos:

$$\varphi = A_0 e^{i k_e (x + z \operatorname{tg} \theta - v_e t)} + A e^{i k_e (x - z \operatorname{tg} \theta - v_e t)} \quad (9.2.13)$$

$$\psi = B e^{i k_t (x - z \operatorname{tg} \alpha - v_t t)} \quad (9.2.14)$$

$$U_z = C e^{i k_t (x - z \operatorname{tg} \alpha - v_t t)} \quad (9.2.15)$$

Por la ley de Snell

$$\frac{\cos \theta}{c_p} = \frac{\cos \alpha}{c_t}$$

y por lo tanto, $v_p = v_t$ y $k_e = k_t$

donde $v_e = c_p / \cos \theta$ y $v_t = c_t / \cos \alpha$

$$k_e = k_p \cos \theta \quad \text{y} \quad k_t = k_t \cos \alpha$$

por lo que utilizaremos indistintamente la notación

$$K = K_e = K_t \quad \text{y} \quad \nu = \nu_e = \nu_t$$

en esta sección y la siguiente.

Para evaluar las constantes A, B y C estableceremos las condiciones de contorno del problema. Estas son, que los esfuerzos son nulos en la superficie libre $z=0$. O sea que para $z=0$.

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (9.2.16)$$

Para evaluar C tomaremos la condición $\sigma_{23} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Como } \sigma_{ij} &= (\lambda + \frac{2}{3}\mu) u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu (u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll}) \\ \sigma_{23} &= 2\mu u_{23} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (9.2.17) \\ u_3 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{y como } \varphi \neq \varphi(y) \quad \text{y } \psi \neq \psi(z) \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \text{ y por lo tanto } \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \quad (9.2.18)$$

Tomando u_2 dada por la ecuación 9.2.15

$$\mu \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\kappa i \mu t g \alpha C e^{i\kappa(x - z t g \alpha - vt)} = \sigma_{23} = 0 \quad (9.2.19)$$

Pero σ_{23} tiene que ser nulo para todos los valores de θ y α y por lo tanto, C tiene que ser igual a cero, es decir, si la onda incidente es una onda P, no hay onda reflejada SH.

Esto coincide con el resultado a obtener a partir de la ecuación 9.2.3 ya que para este caso $\varphi \neq \varphi(y)$ y por lo tanto $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 = u_2$

Para evaluar A y B tomamos las otras dos condiciones de contorno

$$\sigma_{13} = 2\mu u_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0 \quad (9.2.20)$$

$$\text{y} \quad \sigma_{33} = \lambda u_{ll} + 2\mu u_{33} = \lambda u_{ll} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (9.2.21)$$

Sustituyendo los valores de u_i en función de φ y ψ en las ecuaciones 9.2.20 y 9.2.21 obtenemos las ecuaciones:

$$2A_0 t g \theta e^{z t g \theta} - 2A t g \theta e^{-z t g \theta} + (t g^2 \alpha - 1) B e^{-z t g \alpha} = 0 \quad (9.2.22)$$

$$\text{y} \quad A_0 (1 + 3 t g^2 \theta) e^{z t g \theta} + A (1 + 3 t g^2 \theta) e^{-z t g \theta} + 2B t g \alpha e^{-z t g \alpha} = 0 \quad (9.2.23)$$

Despejando B en la segunda ecuación y sustituyendo su valor en la primera obtenemos después de agrupar adecuadamente los términos:

$$\begin{aligned} A_0 [4 t g \theta t g \alpha - (1 + 3 t g^2 \theta) (t g^2 \alpha - 1)] e^{z t g \theta} &= A [4 t g \theta t g \alpha + (1 + 3 t g^2 \theta) (t g^2 \alpha - 1)] e^{-z t g \theta} \\ \frac{A}{A_0} &= \frac{[4 t g \theta t g \alpha - (1 + 3 t g^2 \theta) (t g^2 \alpha - 1)] e^{z t g \theta}}{[4 t g \theta t g \alpha + (1 + 3 t g^2 \theta) (t g^2 \alpha - 1)] e^{-z t g \theta}} \quad (9.2.24) \end{aligned}$$

Despejando ahora en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda obtenemos

$$\frac{B}{A_0} = \frac{-4 \operatorname{tg} \theta (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) e^{2 \operatorname{tg} \theta}}{[4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)] e^{-2 \operatorname{tg} \alpha}} \quad (9.2.25)$$

Como para muchos sólidos y en particular para la mayoría de rocas de la Tierra, se encuentra que los valores de los dos parámetros elásticos λ y μ no difieren mucho, consideraremos las siguientes aproximaciones en las cuales se desprecia todo tipo de diferencia entre los valores de λ y μ y ésta es la llamada relación de Poisson que podemos expresar así:

$$\lambda = \mu ; \quad \kappa = \frac{5}{3} \mu ; \quad \nu = \frac{1}{4} ; \quad c_2 = \sqrt{3} c_1 ; \quad c_2^2 = 3 \mu / \rho \quad (9.2.26)$$

Como c_1 está relacionada con el potencial ψ y c_2 está asociada con los potenciales Ψ y U_2 , entonces tenemos que

$$\cos^2 \theta = 3 \cos^2 \alpha \quad (9.2.27)$$

A partir de la relación anterior tenemos

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{sen}^2 \theta &= 3 \operatorname{sen}^2 \alpha - 3 ; & 3 \operatorname{sen}^2 \alpha &= \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \\ \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 &= \frac{3 \operatorname{sen}^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + 2}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{3 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ & & \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 &= 3 \operatorname{tg}^2 \theta + 1 \end{aligned} \quad (9.2.28)$$

y por lo tanto, evaluando la ecuación 9.2.24 para $z=0$ y tomando en cuenta la ecuación 9.2.28 obtenemos la relación A/A_0 en la frontera entre los medios M y M' .

$$\frac{A}{A_0} = \frac{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha - (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \quad (9.2.29)$$

De la misma forma obtenemos

$$\frac{B}{A_0} = \frac{-4 \operatorname{tg} \theta (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \quad (9.2.30)$$

Para $\theta=0$ y $\theta = \pi/2$, $B=0$ y por consiguiente no hay onda reflejada SV.

$A=0$ para los valores que hacen cero el numerador de 9.2.29, éstos son, para la condición de Poisson, $\theta = 12^\circ 47'$ y $\theta = 30^\circ$.

Caso 2: incidencia de una onda SV

Consideraremos ahora el caso de una onda incidente SV. Trabajando en una forma semejante al caso 1, y teniendo $A_0 = C_0 = 0$, podemos deducir que las ondas reflejadas son P y SV, no existiendo onda reflejada SH.

Las relaciones entre las amplitudes de los potenciales de las ondas reflejadas con respecto a la del potencial de la onda incidente, podemos deducirlas de manera similar al caso anterior y tendremos que:

$$\frac{A}{B_0} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \quad (9.2.31)$$

y

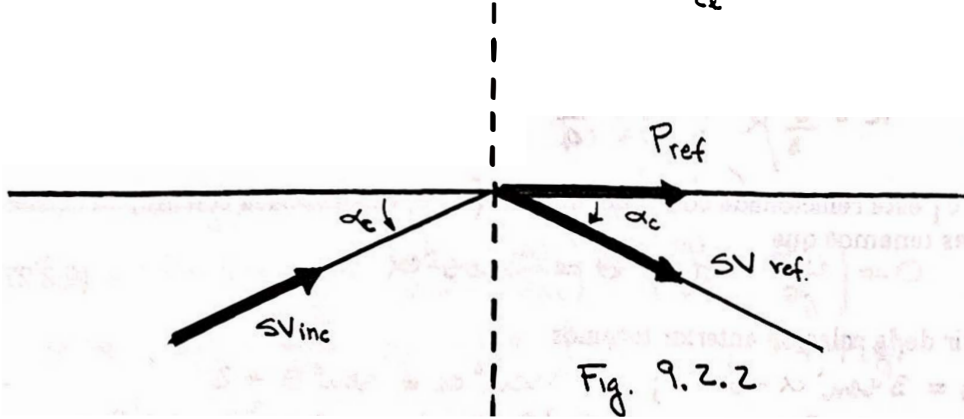
$$\frac{B}{B_0} = \frac{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha - (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \quad (9.2.32)$$

Para una onda incidente SV, la relación entre el ángulo de emergencia de la onda incidente y el de la onda reflejada P, viene dada, según la ley de Snell, por

$$\frac{\cos \alpha}{c_t} = \frac{\cos \theta}{c_l}$$

donde $\theta < \alpha$ ya que $c_t < c_l$. El valor de α para el cual $\theta = 0$ recibe el nombre de ángulo crítico y viene dado por

$$\alpha_c = \arccos \frac{c_t}{c_l} \quad (9.2.33)$$



Para todos los ángulos de incidencia $0 < \alpha < \alpha_c$ sólo existen ondas reflejadas SV y no P.

A partir de la relación

$$\frac{c_l}{\cos \theta} = \frac{c_t}{\cos \alpha}$$

obtenemos $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{v^2}{c_t^2} - 1}$ (9.2.34)

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{v^2}{c_l^2} - 1} \quad (9.2.35)$$

Para valores del ángulo $\alpha < \alpha_c$, de acuerdo con la ecuación 9.2.35 obtenemos valores de $\cos \theta$ mayores que 1 y por lo tanto $v/c_l < 1$, es decir, $v < c_l$.

Si los valores de v se encuentran en el intervalo $c_t < v < c_l$, la $\operatorname{tg} \alpha$ es real y la $\operatorname{tg} \theta$ es imaginaria

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{v^2}{c_l^2} - 1} \quad (9.2.36)$$

$$\operatorname{tg} \theta = i \sqrt{1 - v^2/c_t^2} \quad (9.2.37)$$

Sustituyendo los valores anteriores en las ecuaciones 9.2.31 y 9.2.32 obtenemos para B una expresión compleja que podemos escribir de la siguiente manera:

donde $B = B_0 e^{i2\delta}$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4 \sqrt{1 - v^2/c_l^2} \sqrt{v^2/c_t^2 - 1}}{(2 - v^2/c_t^2)^2} \quad (9.2.38)$$

La onda incidente SV se refleja como una onda SV de la misma amplitud con sólo un cambio de fase.

Caso 3: incidencia de una onda SH

Para una onda incidente SH, la cual en el caso de un rayo contenido en el plano XZ solamente tiene desplazamientos U_z representados por

$$U_z = C_0 e^{iK(x + z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad (9.2.39)$$

es fácil demostrar, aplicando las condiciones de contorno, que sólo existe una onda reflejada también del tipo SH y cuya amplitud es igual a la de la onda incidente.

9.3 Movimiento del suelo a la llegada de una onda:

Basados en la sección anterior analizaremos ahora el movimiento del suelo a la llegada de una onda P o S.

Supongamos que tenemos un sismógrafo sobre la superficie de la tierra y consideremos ésta como un medio semi-infinito. Al llegar una onda P o S el aparato responde al desplazamiento de la superficie libre. Este desplazamiento corresponde a la suma de los desplazamientos de las ondas incidentes y reflejadas, así:

$$U_p = U_{p,inc} + U_{p,ref} + U_{sv,ref} \quad (9.3.1)$$

$$U_{sv} = U_{sv,inc} + U_{sv,ref} + U_{p,ref} \quad (9.3.2)$$

$$U_{sh} = U_{sh,inc} + U_{sh,ref} \quad (9.3.3)$$

Estudiaremos los tres casos como en la sección anterior:

Caso 1: onda P incidente

El movimiento de la partícula de la superficie libre a la llegada de una onda P es la suma de los desplazamientos de la onda incidente P y de las reflejadas P y SV. Las amplitudes de estos desplazamientos podemos deducirlas de las ecuaciones 9.2.2, 9.2.3 y 9.2.4 sustituyendo en ellas los valores de los potenciales de las expresiones 9.2.9, 9.2.10 y 9.2.11 que representan las tres ondas. A las amplitudes de las tres componentes del movimiento de la superficie las designaremos U_{p_i} donde el primer subíndice no es una variable.

$$U_{p_1} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{amp} = \left[A_0 k e^{ik(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} + A k e^{ik(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} - B k \operatorname{tg} \alpha e^{ik(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \right]_{amp}$$

Nota: Amp en la parte inferior derecha del corchete significa amplitud.

$$U_{p_2} = A_0 k + A k - B k \operatorname{tg} \alpha$$

$$U_{p_3} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{amp} = \left[A_0 k \operatorname{tg} \theta e^{ik(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} - A k \operatorname{tg} \theta e^{ik(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} - B k e^{ik(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \right]_{amp}$$

$$U_{p_3} = A_0 k \operatorname{tg} \theta - A k \operatorname{tg} \theta - B k$$

y por último,

$$U_{p_2} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{amp} = 0$$

Quedan así las amplitudes

$$U_{p_1} = A_0 k + A k - B k \operatorname{tg} \alpha \quad (9.3.4)$$

$$U_{p_2} = 0 \quad (9.3.5)$$

$$U_{p_3} = A_0 k \operatorname{tg} \theta - A k \operatorname{tg} \theta - B k \quad (9.3.6)$$

La amplitud total de la onda incidente P es

$$U_{p,inc} = \left([U_{e_1}^2 + U_{e_2}^2 + U_{e_3}^2]_{amp} \right)^{1/2} = A_0 k \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (9.3.7)$$

donde obtuvimos los u_{1i} a partir de los primeros términos de las ecuaciones 9.2.2, 9.2.3 y 9.2.4 usando los potenciales adecuados.

Los cocientes de las amplitudes de la componente horizontal (U_{P1}) y vertical (U_{P3}) del movimiento del suelo divididos entre la amplitud total de la onda incidente P ($U_{P \text{ inc}}$) son:

$$\frac{U_{P1}}{U_{P \text{ inc}}} = \frac{A_0 + A - B \operatorname{tg} \alpha}{A_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \quad (9.3.8)$$

$$\frac{U_{P3}}{U_{P \text{ inc}}} = \frac{A_0 \operatorname{tg} \theta - A \operatorname{tg} \theta - B}{A_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \quad (9.3.9)$$

Si sustituimos los valores de A/A_0 y B/A_0 de las ecuaciones 9.2.24 y 9.2.25 en estas expresiones obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{U_{P1}}{U_{P \text{ inc}}} = \frac{12 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sec}^2 \theta \operatorname{tg} \alpha}{d} \quad (9.3.10)$$

$$\frac{U_{P3}}{U_{P \text{ inc}}} = \frac{6 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sec}^2 \theta (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)}{d} \quad (9.3.11)$$

$$\text{donde } d = 4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2 \quad (9.3.12)$$

Trataremos además dentro de este caso, el ángulo aparente de emergencia de la onda P, que se obtiene tomando el arco tangente del cociente que resulta de dividir las amplitudes verticales del desplazamiento de un punto sobre la superficie entre las horizontales. Este ángulo se obtiene a partir de las observaciones de las amplitudes medidas en un sismograma. Como las amplitudes observadas en la superficie no son las de la onda incidente, sino las de la suma de las ondas incidentes y reflejadas, el ángulo obtenido en la forma descrita anteriormente no es el ángulo de emergencia de la onda P, o sea θ , sino $\bar{\theta}$, o sea, el ángulo aparente de emergencia.

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{U_{P3}}{U_{P1}} = \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad (9.3.13)$$

Caso 2: onda SV incidente

El movimiento de un punto de la superficie a la llegada de una onda incidente SV podemos deducirlo de una forma similar a la utilizada para el caso No. 1. Dicho movimiento estará dado por la suma de los desplazamientos de la onda incidente SV y las reflejadas P y SV. Los cocientes resultantes de dividir las amplitudes de las componentes horizontal (U_{SV1}) y vertical (U_{SV3}) del movimiento del suelo entre la amplitud total de la onda incidente SV ($U_{SV \text{ inc}}$) son:

$$\frac{U_{SV1}}{U_{SV \text{ inc}}} = \frac{A - B \operatorname{tg} \alpha + B_0 \operatorname{tg} \alpha}{B_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}} \quad (9.3.14)$$

$$\frac{U_{SV3}}{U_{SV \text{ inc}}} = \frac{-B_0 - A \operatorname{tg} \theta - B}{B_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}} \quad (9.3.15)$$

Sustituyendo los valores de los cocientes A/B_0 y B/B_0 en función de los ángulos y dados en las ecuaciones 9.2.31 y 9.2.32, obtenemos:

$$\frac{U_{SV1}}{U_{SV \text{ inc}}} = \frac{6 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sec}^2 \theta (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)}{d \operatorname{sec} \alpha} \quad (9.3.16)$$

$$\frac{U_{SV3}}{U_{SV \text{ inc}}} = \frac{-12 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sec}^2 \theta}{d \operatorname{sec} \alpha} \quad (9.3.17)$$

El ángulo aparente de emergencia $\bar{\alpha}$, será

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha} = \frac{U_{SV3}}{U_{SV1}} = \frac{-2 \operatorname{tg} \theta}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (9.3.18)$$

Caso 3: onda SH incidente

El movimiento del suelo a la llegada de una onda SH es en amplitud el doble de la amplitud del desplazamiento de la onda SH incidente

Por último, consideraremos el ángulo aparente de polarización de la onda S. El ángulo de polarización de la onda S viene definido por

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{U_{tsu}}{U_{tsv}} = \frac{U_{SHinc}}{U_{SVinc}} \quad (9.3.19)$$

Este ángulo no puede calcularse directamente ya que lo que observamos es siempre el movimiento de la superficie a la llegada de la onda S y no el desplazamiento de la onda S incidente. El ángulo aparente de polarización está definido por el movimiento horizontal de la onda S observado en la superficie libre.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{U_{SH2}}{U_{SV1}} \quad (9.3.20)$$

Sustituyendo en la ecuación 9.3.19 la amplitud del desplazamiento de SV en función del potencial tenemos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{C_0}{k B_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}} \quad (9.3.21)$$

En la ecuación 9.3.20 sustituimos ahora U_{SH2} y U_{SV1} por su valor en función de las amplitudes de los potenciales de las ondas incidente y reflejadas, obteniendo así:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2C_0}{A - B \operatorname{tg} \alpha + B_0 \operatorname{tg} \alpha} \quad (9.3.22)$$

A partir de las ecuaciones

$$\frac{A}{B_0} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \quad \frac{B}{B_0} = \frac{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha - (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2}{4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2}$$

deducimos

$$A = B_0 \frac{1}{d} 4 \operatorname{tg} \alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) \quad (9.3.23)$$

$$B = B_0 (1/d) [4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha - (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2] \quad (9.3.24)$$

donde $d = 4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2$

Sustituyendo 9.3.23 y 9.3.24 en 9.3.22 obtenemos

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{C}{B_0 k} = \frac{d}{3 \operatorname{tg} \alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \quad (9.3.25)$$

De la ecuación 9.3.21 podemos obtener $C/B_0 k$ así:

$$\frac{C}{B_0 k} = \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

valor que sustituyéndolo en la ecuación 9.3.25 nos da

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} [4 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2]}{\alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \quad (9.3.26)$$

Esta es la relación entre el ángulo aparente γ , y el ángulo real β de polarización de la onda S. Si se cumple la relación de Poisson ($\lambda = \mu$) podemos escribir la ecuación 9.3.26 en función del ángulo de emergencia utilizando la relación

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2) \quad (9.3.27)$$

que sustituida en la ecuación 9.3.26 da

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2} \operatorname{tg} \alpha + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)^2 \right]}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)} \operatorname{tg} \beta \quad (9.3.28)$$

expresión que puede tomar una forma más sencilla al escribirla en función del seno y coseno de α :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos^2 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{3}} \cos^2 \alpha \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta \quad (9.3.29)$$

Para ángulos de emergencia mayores que el ángulo crítico, el factor es solamente un poco mayor que la unidad. En la práctica podemos utilizar

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Esta última relación equivale a despreciar el efecto de las ondas reflejadas y considerar β como la proyección sobre la superficie libre del ángulo β .

9.4 Ondas de superficie:

Las ondas de Rayleigh son ondas elásticas que se propagan cerca de la superficie de un cuerpo sin penetrar en él.

Escribiremos primero las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0 \quad (9.4.1)$$

donde u es cualquier componente de los vectores \bar{u}_1 , \bar{u}_t y c es la velocidad correspondiente c_1 o c_t .

La superficie del medio elástico la supondremos plana e infinita. Eligiremos este plano como plano XY . Supondremos que el cuerpo ocupa el semiespacio $Z < 0$.

Consideremos una onda de superficie plana y monocromática que se propaga a lo largo del eje- X .

Buscaremos un u de la forma

$$u = e^{i(kx - \omega t)} f(z) \quad (9.4.2)$$

Sustituyendo la solución dada por 9.4.2 en la ecuación 9.4.1 obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z i \omega \frac{\partial f}{\partial z} - \omega^2 f \right] e^{i(kx - \omega t)} = -\omega^2 f e^{i(kx - \omega t)} \\ \nabla^2 u &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f \right] e^{i(kx - \omega t)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u &= 0 \Rightarrow -\omega^2 f - \frac{c^2 \partial^2 f}{\partial z^2} + c^2 k^2 f = 0 \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= k^2 f - \frac{\omega^2}{c^2} f = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Ahora hay dos posibilidades

a) $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$

b) $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$

Para el caso a) nos resultará que f es una función periódica, o sea, una onda plana ordinaria que no se amortigua dentro del cuerpo. Por lo tanto tendremos que suponer que se cumple la posibilidad b), o sea, $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$

Si hacemos

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

la ecuación 9.4.3 se convertirá en

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \lambda^2 f = 0 \quad (9.4.4)$$

cuya solución es

$$f(z) = c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z} \quad (9.4.5)$$

Como Z varía en $Z < 0$, cuando $z \rightarrow -\infty$ el segundo miembro de la solución no tendrá sentido pues correspondería a un aumento ilimitado de la deformación y por lo tanto, $c_2 = 0$ y

$$f(z) = c e^{\lambda z} \quad (9.4.6)$$

será la solución.

Volviendo a la ecuación 9.4.2 nos queda la siguiente solución para u

$$u = c e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda z} \quad (9.4.7)$$

Esta solución corresponde a una onda que se amortigua exponencialmente hacia el interior del cuerpo, o sea, una onda que se propaga solamente cerca de la superficie. El valor de λ determina la rapidez del amortiguamiento. El verdadero vector desplazamiento es la suma de los vectores \bar{u}_1 y \bar{u}_t , esto es,

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_t \quad (9.4.8)$$

cuyas componentes satisfacen la ecuación 9.4.1 con $c = c_1$ para u_1 y $c = c_t$ para u_t .

En el caso de ondas de volumen en un medio infinito, estas dos partes representan dos ondas que se propagan independientemente.

En el caso de ondas de superficie no se puede hacer la división en dos partes independientes porque hay que tomar en cuenta las condiciones de contorno.

El vector desplazamiento \bar{u} debemos poder expresarlo como una combinación lineal de los vectores \bar{u}_1 y \bar{u}_t sin considerar estos vectores como las componentes de \bar{u} en las direcciones paralela y perpendicular a la dirección de propagación. Para encontrar esta combinación lineal de \bar{u}_1 y \bar{u}_t debemos de utilizar las condiciones de contorno, las cuales dan una relación entre k y ω y por lo tanto, determinan la velocidad de propagación de la onda.

En la superficie libre la fuerza externa por unidad de superficie debe ser cero, o sea, $P_i = 0$ y por lo tanto, $\sigma_{ij} n_j = 0$ ahí. Como el vector normal \hat{n} es paralelo al eje- Z , esto es, sus componentes son

$$\hat{n} = (0, 0, n_z) = (0, 0, n) \quad (9.4.9)$$

entonces $\sigma_{iz} = 0$, o sea, $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ (9.4.10)

Como

$$u_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}], \quad u_{xz} = 0 = u_{yz} \quad (9.4.11)$$

y

$$\nabla_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)U_{zz} + \sigma(U_{xx} + U_{yy})] \quad (9.4.12)$$

según la ecuación

$$\nabla_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left(U_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} U_{kk} \delta_{ij} \right)$$

evaluada para $i=j=z$.Como $\nabla_{zz} = 0$ entonces

$$(1-\sigma)U_{zz} + \sigma(U_{xx} + U_{yy}) = 0 \quad (9.4.13)$$

Por otro lado, $U \neq U(y)$, o sea, no depende de "y" y tomando en cuenta la segunda condición de la ecuación 9.4.11 tenemos

$$U_{yz} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0$$

 $U_y = U_{ey} + U_{tz}$ donde U_{ey} y U_{tz} cumplen con la ecuación 9.4.1 por ser componentes de los vectores \bar{u}_y y \bar{u}_t respectivamente, y tendrán la forma

$$U_{ey} = C_1 e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda_e z} ; \quad U_{tz} = C_2 e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda_t z}$$

$$U_y = (C_1 + C_2) e^{i(kx - \omega t)} e^{(\lambda_e + \lambda_t) z}$$

$$\text{Como } \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0 = (\lambda_e + \lambda_t)(C_1 + C_2) e^{i(kx - \omega t)} e^{(\lambda_e + \lambda_t) z}$$

entonces $u_y = 0$

(9.4.14)

Por lo tanto el vector desplazamiento \bar{u} en una onda de superficie se encuentra en un plano que contiene a la dirección de propagación (x) y es perpendicular a la superficie (plano XY).La parte transversal \bar{u}_t de la onda debe satisfacer la condición $\nabla \cdot \bar{u}_t = 0$ o sea,

$$\frac{\partial U_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{tz}}{\partial z} = 0 \quad (9.4.15)$$

La dependencia de u_{tx} y u_{tz} respecto de X y Z está dada por el factor de la solución

$$\text{donde } e^{i(kx + \lambda_t z)} \quad \lambda_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.4.16)$$

Al sustituir la solución en $\nabla \cdot \bar{u}_t = 0$ siendo $U_t = C e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda_t z}$

$$\frac{\partial U_{tx}}{\partial x} = i k U_{tx} ; \quad \frac{\partial U_{tz}}{\partial z} = \lambda_t U_{tz}$$

$$\text{y } \nabla \cdot \bar{u}_t = i k U_{tx} + \lambda_t U_{tz} = 0 \quad (9.4.17)$$

o bien

$$\frac{U_{tx}}{U_{tz}} = - \frac{\lambda_t}{i k}$$

relación con la cual podemos escribir

$$U_{tx} = \lambda_t a e^{i(kx + \lambda_t z - \omega t)} \quad (9.4.18)$$

$$U_{tz} = -i k a e^{i(kx + \lambda_t z - \omega t)} \quad (9.4.19)$$

donde "a" es una constante.

Por otro lado, la parte longitudinal \bar{u}_l satisface la condición $\nabla \times \bar{u}_l = 0$ o sea,
 $\text{Si } \partial_i \partial_j u_{lk} = 0 \quad \bar{u}_l = (u_{lx}, 0, u_{lz})$

$$\nabla \times \bar{u}_l = \hat{y} \left(\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} = \lambda_l u_{lx} \quad \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = i \lambda_l u_{lz}$$

Para que $\nabla \times \bar{u}_l = 0$ se necesita que $\lambda_l u_{lx} - i \lambda_l u_{lz} = 0$

donde

$$\lambda_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (9.4.20)$$

o bien,

$$\frac{u_{lx}}{u_{lz}} = \frac{i k}{\lambda_l} = \frac{k}{-i \lambda_l}$$

relación con la cual podemos escribir

$$u_{lx} = k b e^{i k x + \lambda_l z - i \omega t} \quad (9.4.21)$$

$$u_{lz} = -i \lambda_l b e^{i k x + \lambda_l z - i \omega t} \quad (9.4.22)$$

donde "b" es una constante.

Considerando las condiciones 9.4.11 y 9.4.13 obtendremos

$$u_{xz} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (9.4.23)$$

$$y \quad \sigma (u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma) u_{zz} = 0 = \sigma \frac{\partial u_x}{\partial x} + (1 - \sigma) \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (9.4.24)$$

Esta última ecuación podemos escribirla como

$$c^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (9.4.25)$$

donde tomamos $c^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ y $c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}$

Sustituyendo $u_x = u_{lx} + u_{tx}$ $u_z = u_{lz} + u_{tz}$

en las ecuaciones 9.4.23 y 9.4.25 y evaluándolas en la frontera, o sea, $Z=0$ obtenemos para la primera condición de contorno

$$\left. \frac{\partial u_{lx}}{\partial z} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial u_{tx}}{\partial z} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial u_{tz}}{\partial x} \right|_{z=0} = 0 \quad (9.4.26)$$

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} = \lambda_l k b e^{i k x + \lambda_l z - i \omega t}$$

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial z} = \lambda_t a e^{i k x + \lambda_t z - i \omega t}$$

$$\frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = k \lambda_l b e^{i k x + \lambda_l z - i \omega t}$$

$$\frac{\partial u_{tz}}{\partial x} = k a e^{i k x + \lambda_t z - i \omega t}$$

Evaluando en $Z=0$ las derivadas parciales anteriores y sumándolas e igualando su suma a cero tenemos:

$$2\lambda_l k b + a(k^2 + \lambda_l^2) = 0 \quad (9.4.27)$$

Trabajando ahora con la segunda condición tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{tz}}{\partial z} &= -i\lambda_l^2 b e^{ikx + \lambda_l z - i\omega t} & ; & \quad \frac{\partial v_{tz}}{\partial z} = -ik\lambda_l a e^{ikx + \lambda_l z - i\omega t} \\ \frac{\partial v_{lx}}{\partial x} &= ik^2 b e^{ikx + \lambda_l z - i\omega t} & ; & \quad \frac{\partial v_{lx}}{\partial x} = ik\lambda_l a e^{ikx + \lambda_l z - i\omega t} \end{aligned}$$

Sumándolas, evaluándolas para $Z=0$ y aplicando la condición 9.4.25 obtenemos

$$2ac_t^2 \lambda_l k + b \left[c_t^2 (\lambda_l^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2 \right] = 0 \quad (9.4.28)$$

Dividiendo esta ecuación entre c_t^2 resulta

$$2a\lambda_l k + b \left[\frac{c_t^2}{c_l^2} (\lambda_l^2 - k^2) + 2k^2 \right] = 0$$

y sustituyendo en ella

$$\lambda_l^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_l^2} = -(\lambda_l^2 - \lambda_t^2) \frac{c_t^2}{c_l^2}$$

tomada a partir de las ecuaciones 9.4.16 y 9.4.20 tenemos

$$\begin{aligned} 2a\lambda_l k + b \left[\frac{c_t^2}{c_l^2} (\lambda_l^2 - k^2) \frac{c_t^2}{c_l^2} + k^2 \right] \\ 2a\lambda_l k + b(\lambda_l^2 + k^2) = 0 \end{aligned} \quad (9.4.29)$$

Para que las ecuaciones homogéneas 9.4.25 y 9.4.29 sean compatibles debe cumplirse que exista cierta relación entre los coeficientes de a y b de tal forma que su determinante sea cero, o sea,

$$(\lambda_l^2 + \lambda_t^2) a + 2k\lambda_l b = 0 \quad \text{y} \quad 2k\lambda_l a + (\lambda_l^2 + \lambda_t^2) b = 0$$

de donde la condición es

$$(\lambda_l^2 + \lambda_t^2)^2 - 4k^2 \lambda_l \lambda_t = 0$$

o sea,

$$(\lambda_l^2 + \lambda_t^2)^2 = 4k^2 \lambda_l \lambda_t$$

o bien, elevando al cuadrado y sustituyendo λ_l^2 y λ_t^2

$$\begin{aligned} (\lambda_l^2 + \lambda_t^2)^4 &= 16k^4 \left(\lambda_l^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) \left(\lambda_l^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) \\ \left(2\lambda_l^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right)^4 &= 16k^4 \left(\lambda_l^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) \left(\lambda_l^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) \end{aligned} \quad (9.4.30)$$

A partir de esta última ecuación se determina la relación entre ω y k y para esto hacemos

$$\omega = c_l k \xi \quad (9.4.31)$$

Desarrollando la ecuación 9.4.30 haciendo uso de la sustitución 9.4.31

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 24\xi^2 - 32 = -16 - 16 \frac{c_t^2}{c_l^2} + 16 \frac{c_t^2}{c_l^2} \xi^2$$

finalmente

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0 \quad (9.4.32)$$

En esta ecuación puede verse que ξ sólo depende de la razón c_t/c_l que es una constante, característica de cada sustancia, y que depende sólo del coeficiente de Poisson

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

La cantidad debe ser real, positiva y menor que 1 de tal forma que λ_t y λ_l sean reales. La ecuación 9.4.32 tiene sólo una raíz que satisface estas condiciones por lo que para cada valor de c_t/c_l obtendremos sólo un valor de ξ .

Tanto en el caso de ondas de superficie como en el caso de ondas de volumen la frecuencia es proporcional al número de onda, siendo el coeficiente de proporcionalidad la velocidad de propagación de la onda,

$$V_p = c_t \xi \quad (9.4.33)$$

Esta ecuación da la velocidad de propagación de la onda de superficie en función de las velocidades c_t y c_l de las ondas transversal y longitudinal de volumen.

La razón de la amplitud de la parte longitudinal a la transversal de la onda se obtiene en función de ξ mediante la fórmula

$$\frac{a}{b} = \frac{2 - \xi^2}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (9.4.34)$$

El cociente c_t/c_l varía entre $1/\sqrt{2}$ y 0, correspondiendo a variaciones de ν entre 0 y 1/2; ξ variará entre 0.874 y 0.955.

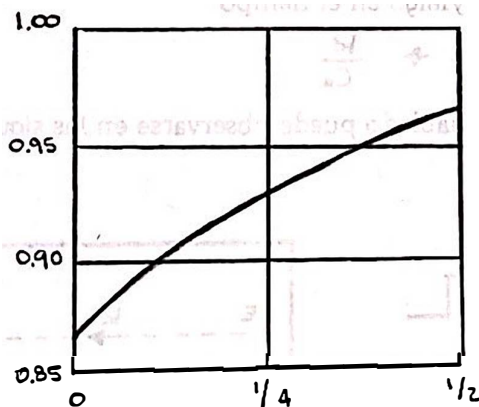


Fig. 9.4.1

Variación de ξ en función de ν .

9.5 La Tierra como un medio semi-infinito:

El modelo más simple para considerar la tierra es como un medio semi-infinito, elástico e isótropo. Podemos considerar el comportamiento de la tierra como plana, con respecto a la propagación de las ondas elásticas, para distancias cortas en las cuales la curvatura de la tierra no influye mucho.

De acuerdo con este modelo situaremos una estación con tres sismógrafos —uno vertical, uno transversal y otro en la dirección radial— con el objeto de observar desplazamientos de la superficie de la tierra.

Consideremos un terremoto como un foco de ondas elásticas. La profundidad del foco es h y su proyección en la superficie se llama epicentro. Sea R la distancia del epicentro a la estación y sean c_l y c_t las velocidades de las ondas internas.

Si el terremoto se produce en el tiempo $t=t_0$ y tiene la forma de un impulso, las ondas también tendrán esta forma.

El primer impulso que se recibirá en la estación será el de la onda P, el cual llegará a la estación en el tiempo

$$t_p = t_0 + r/c_e \quad (9.5.1)$$

Esta onda es de compresión y por lo tanto no tiene componente transversal, observándose solamente en el receptor vertical y en el radial.

El segundo impulso que llegará a la estación será el de la onda S, en el tiempo

$$t_s = t_0 + r/c_s \quad (9.5.2)$$

La diferencia entre el tiempo de llegada de la onda P y el de la onda S es

$$t_s - t_p = \frac{r}{c_s} - \frac{r}{c_e} = \frac{r(c_e - c_s)}{c_e c_s} \quad (9.5.3)$$

tiempo con el cual podemos calcular la distancia del foco a la estación, o sea,

$$r = \frac{c_e c_s (t_s - t_p)}{c_e - c_s} \quad (9.5.4)$$

El sismógrafo vertical y el radial registrarán la componente SV de la onda S mientras que el sismógrafo transversal registrará la componente SH de la onda S.

Por último, llegará la onda Rayleigh en el tiempo

$$t_R = t_0 + \frac{R}{c_R} \quad (9.5.5)$$

Un esquema de lo que hemos hablado puede observarse en las siguientes figuras:

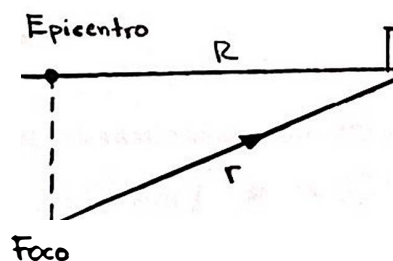


Fig. 9.5.1
VISTA LATERAL

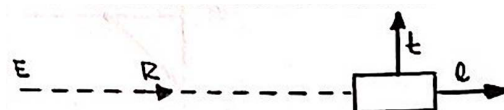


Fig. 9.5.2
VISTA DESDE ARRIBA

Podemos representar además en las componentes z, t y l (vertical, transversal y longitudinal o radial) del registro de los sismógrafos, las gráficas del movimiento de una tierra formada por un medio semi-infinito elástico de parámetros elásticos constantes en una forma muy ideal que lógicamente no corresponde con la forma de los registros en la tierra real.

Hay tres características principales que aparecen en los sismogramas y que no pueden explicarse considerando a la tierra como un medio semi-infinito:

- a) entre la onda P y S y entre la S y la Rayleigh aparecen una serie de ondas o impulsos.
- b) la onda Rayleigh no es observada como un solo impulso sino como un tren de ondas.
- c) en el registro transversal se observa también un tren de ondas superficiales.

Estas tres características se pueden explicar si introducimos una capa sobre el medio semi-infinito de parámetros elásticos distintos de los del medio. Este será el tema central de la siguiente sección.

The first step in the derivation of the general form of the wave function is to assume that the wave function is separable in the coordinates of the two particles.

Let us assume that the wave function can be written as a product of two functions, one depending only on the coordinates of the first particle and the other depending only on the coordinates of the second particle.

Substituting this form into the Schrödinger equation and separating the variables, we obtain two separate equations, one for each particle.

The first of these equations is the Schrödinger equation for a single particle in a potential well. The second equation is the Schrödinger equation for a single particle in a potential well.

The solutions to these equations are the wave functions for the two particles. The total wave function is then the product of these two wave functions.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.



The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

The wave function for the two-particle system is then given by the product of the wave functions for the two individual particles.

10. ONDAS ELÁSTICAS EN UN MEDIO SEMI-INFINITO Y UNA CAPA

10.1 Reflexión y refracción de ondas internas

En el capítulo anterior nos habíamos restringido a estudiar la reflexión de ondas internas habiendo tratado antes sobre las leyes de reflexión y refracción. Antes de considerar el problema de un medio semi-infinito y una capa, modelo con el que podemos representar la situación de la tierra, limitándonos al manto y la corteza, estudiaremos los fenómenos que se producen al incidir un rayo en la superficie de separación entre dos medios de distintas constantes elásticas. La situación se ilustra en la Fig. 9.1.1

La superficie de separación de los dos medios, o interfaz está formada por el plano $z = 0$. Las constantes elásticas de los medios M y M' son λ, μ, ρ y λ', μ', ρ' respectivamente, y las velocidades de propagación de las ondas P y S en cada medio c_e, c_s y c_e', c_s'

Una onda P incidente origina ondas reflejadas y refractadas P y S —utilizando el principio de Huyghens en el punto de incidencia—. Aplicando la ley de Snell, tenemos

$$\frac{\cos \theta}{c_e} = \frac{\cos \alpha}{c_s} = \frac{\cos \theta'}{c_e'} = \frac{\cos \alpha'}{c_s'} \quad (10.1.1)$$

Para estudiar los desplazamientos de cada una de estas ondas, las expresaremos en función de los potenciales φ y ψ tal como los muestran las ecuaciones 9.2.2, 9.2.3 y 9.2.4 donde φ, ψ y u_z tienen que satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_e^2 \nabla^2 \varphi \quad (10.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \psi \quad (10.1.3)$$

y

$$\frac{\partial u_z}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 u_z \quad (10.1.4)$$

para el medio M; y las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_e'^2 \nabla^2 \varphi \quad (10.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s'^2 \nabla^2 \psi \quad (10.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_s'^2 \nabla^2 u_z \quad (10.1.7)$$

para el medio M'.

Utilizando ondas planas, para el caso general con ondas incidentes P y S, podemos escribir las soluciones para las ecuaciones de los medios, así:

$$\varphi = A_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} + A e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \theta - vt)} \quad (10.1.8)$$

$$\psi = B_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + B e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad (10.1.9)$$

$$u_z = C_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + C e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad (10.1.10)$$

para el medio M y

$$\varphi = A' e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \theta' - vt)} \quad (10.1.11)$$

$$\psi = B' e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha' - vt)} \quad (10.1.12)$$

$$u_z = C' e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha' - vt)} \quad \text{Para el medio M}' \quad (10.1.13)$$

Donde v es la velocidad aparente a lo largo de la interfase y viene dada por

$$v = \frac{c_e}{\cos \theta} = \frac{c_t}{\cos \alpha} = \frac{c_e'}{\cos \theta'} = \frac{c_t'}{\cos \alpha'} \quad (10.1.14)$$

Siendo κ el número de onda correspondiente.

Para facilitar la utilización de las condiciones de contorno desarrollaremos los términos que más intervienen en ellas.

El tensor de tensiones, expresado en función del tensor de deformaciones queda así:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(u_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ee} \delta_{ij} \right)$$

y expresando en forma explícita en componentes:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{xx} + (u_{yy} + u_{zz})] \quad (10.1.15)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{yy} + (u_{xx} + u_{zz})] \quad (10.1.16)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{zz} + (u_{xx} + u_{yy})] \quad (10.1.17)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} u_{xy} ; \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu} u_{xz} ; \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu} u_{yz} \quad (10.1.18)$$

Por otro lado, el tensor de deformación, expresado en términos de los desplazamientos resulta así:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Trabajaremos con todas estas cantidades en el medio M primero:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Los potenciales están dados por:

$$\varphi = A_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \theta - vt)} + A e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \theta - vt)}$$

$$\psi = B_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + B e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)}$$

$$u_z = C_0 e^{i\kappa(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + C e^{i\kappa(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)}$$

Obteniendo las derivadas parciales que utilizaremos resulta:

$$U_x = U_1 = ikA_0 e^{ik(x+z\text{tg}\theta-vt)} + ikA e^{ik(x-z\text{tg}\theta-vt)} + \text{tg}\alpha ikB_0 e^{ik(x+z\text{tg}\alpha-vt)} - \text{tg}\alpha ikB e^{ik(x-z\text{tg}\alpha-vt)} \quad (10.1.19)$$

$$U_z = U_3 = ik\text{tg}\theta A_0 e^{ik(x+z\text{tg}\theta-vt)} - ik\text{tg}\theta A e^{ik(x-z\text{tg}\theta-vt)} + ikB_0 e^{ik(x+z\text{tg}\alpha-vt)} - ikB e^{ik(x-z\text{tg}\alpha-vt)} \quad (10.1.20)$$

$$U_{xx} = -k^2 A_0 e^{ik(x+z\text{tg}\theta-vt)} - k^2 A e^{ik(x-z\text{tg}\theta-vt)} + k^2 \text{tg}\alpha B_0 e^{ik(x+z\text{tg}\alpha-vt)} - k^2 \text{tg}\alpha B e^{ik(x-z\text{tg}\alpha-vt)}$$

$$U_{yy} = 0$$

$$U_{zz} = -k^2 \text{tg}^2\theta A_0 e^{ik(x+z\text{tg}\theta-vt)} - k^2 \text{tg}^2\theta A e^{ik(x-z\text{tg}\theta-vt)} + k^2 \text{tg}\alpha B_0 e^{ik(x+z\text{tg}\alpha-vt)} - k^2 \text{tg}\alpha B e^{ik(x-z\text{tg}\alpha-vt)}$$

$$U_{xz} = \frac{k^2}{2} \left(-2A_0 \text{tg}\theta e^{ikz\text{tg}\theta} + 2A \text{tg}\theta e^{-ikz\text{tg}\theta} + B_0(1-\text{tg}^2\alpha) e^{ikz\text{tg}\alpha} + B(1-\text{tg}^2\alpha) e^{-ikz\text{tg}\alpha} \right) e^{ik(x-vt)}$$

$$U_{yz} = \frac{k}{2} \left(i\text{tg}\alpha C_0 e^{ikz\text{tg}\alpha} - i\text{tg}\alpha C e^{-ikz\text{tg}\alpha} \right) e^{ik(x-vt)}$$

$$U_{xy} = \frac{ik}{2} \left(C_0 e^{ikz\text{tg}\alpha} + C e^{-ikz\text{tg}\alpha} \right) e^{ik(x-vt)}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu} U_{xz} \quad (10.1.21)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E k^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(\nu \text{tg}^2\theta - \text{tg}^2\theta - \nu) (A_0 e^{ikz\text{tg}\theta} + A e^{-ikz\text{tg}\theta}) + (1-2\nu) \text{tg}\alpha (B_0 e^{ikz\text{tg}\alpha} - B e^{-ikz\text{tg}\alpha}) \right] e^{ik(x-vt)} \quad (10.1.22)$$

Los potenciales en el medio M' están dados por:

$$\varphi = A' e^{ik(x+z\text{tg}\theta' - vt)}$$

$$\psi = B' e^{ik(x+z\text{tg}\alpha' - vt)}$$

$$U_2 = C' e^{ik(x+z\text{tg}\alpha' - vt)}$$

Obteniendo las derivadas parciales adecuadas.

$$U_x = ikA' e^{ik(x+ztg\theta' - vt)} + itg\alpha' B' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)} \quad (10.1.23)$$

$$U_y = C' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)} \quad (10.1.24)$$

$$U_z = itg\theta' A' e^{ik(x+ztg\theta' - vt)} - ikB' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)} \quad (10.1.25)$$

$$U_{xx} = -k^2 A' e^{ik(x+ztg\theta' - vt)} - k^2 tg\alpha' B' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)}$$

$$U_{yy} = 0$$

$$U_{zz} = -k^2 tg^2 \theta' A' e^{ik(x+ztg\theta' - vt)} + k^2 tg\alpha' B' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)}$$

$$U_{xz} = \frac{k^2}{2} B' (1 - tg^2 \alpha') e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)}$$

$$U_{yz} = \frac{ik}{2} tg\alpha' C' e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)}$$

$$U_{xy} = \frac{ik}{2} C_0 e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)}$$

$$= \frac{E}{z(1+\sigma)} k^2 B' (1 - tg^2 \alpha') e^{ik(x+ztg\alpha' - vt)} \quad (10.1.26)$$

$$= \frac{Ek^2}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1+tg^2 \theta' - tg^2 \theta' - \sigma) A' e^{ikztg\theta'} + (1-2\sigma) tg\alpha' B' e^{ikztg\alpha'} \right] e^{ik(x-vt)} \quad (10.1.27)$$

Consideraremos diferentes tipos de ondas incidentes. El caso más sencillo de reflexión y refracción de ondas es el de una onda incidente S que sólo tiene componente SH, o sea que su componente SV=0.

Para este caso $A_0=0$ y $B_0=0$ en las ecuaciones 10.1.8. y 10.1.9.

Las condiciones de contorno son:

- a) continuidad de desplazamiento (en $z=0$)

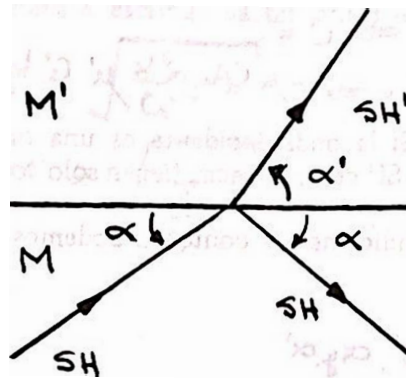
$$(U_i)_M = (U_i)_{M'} \quad (10.1.28)$$

- b) continuidad de esfuerzos

$$(\sigma_{iz})_M = (\sigma_{iz})_{M'} \quad (10.1.29)$$

El problema que estamos tratando se ilustra con la siguiente Fig:

z



10.1.1

Utilizando $(U_1)_M = (U_1)_{M'}$, $(U_3)_M = (U_3)_{M'}$ para $z=0$ tenemos a partir de las ecuaciones 10.1.19., 10.1.20., 10.1.23., y 10.1.25.

$$(U_1)_M = ik \tan \theta A - ikB = ikA' + ik \tan \alpha' B' \quad \text{y} \quad ikA_0 \tan \theta - ikA \tan \theta - ikB = ikA' \tan \theta' - ikB'$$

de donde $A' = A \tan \theta$, $\forall \theta \Rightarrow A' = A = 0$
 y $-ikB = ikB' \tan \alpha'$, $\forall \alpha' \Rightarrow B = B' = 0$

Igual conclusión obtenemos de las condiciones $(\sigma_{13})_M = (\sigma_{13})_{M'}$ y $(\sigma_{33})_M = (\sigma_{33})_{M'}$

Para el caso de una onda incidente P seguimos los mismos pasos que en la deducción anterior. Ahora $B_0 = C_0 = 0$ y las condiciones de contorno son para $z=0$

$$(U_i)_M = (U_i)_{M'}$$

$$(\sigma_{i3})_M = (\sigma_{i3})_{M'}$$

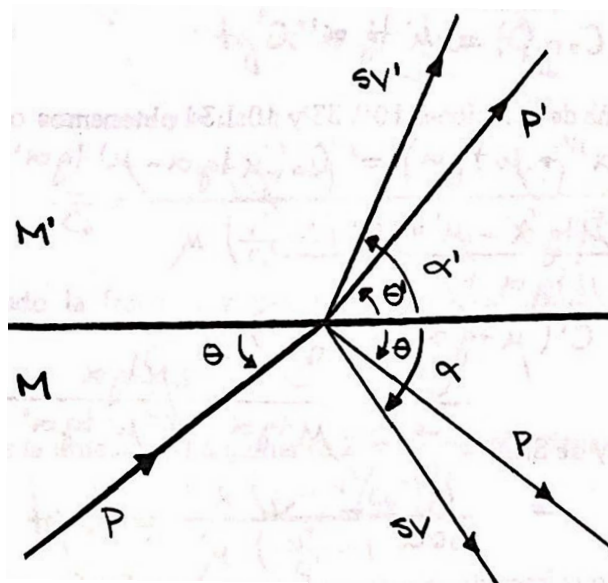


Fig. 10.1.3

Aplicando las anteriores condiciones de contorno podemos evaluar las constantes A, B, C, A', B', C' . Para evaluar C y C' utilizamos

$$y \quad (U_z)_M = (U_z)_{M'} \Rightarrow C = C'$$

$$(T_{23})_M = (T_{23})_{M'} \Rightarrow -\mu C \operatorname{tg} \alpha = \mu' C' \operatorname{tg} \alpha'$$

y por consiguiente $C=C'=0$. Si la onda incidente es una onda P, las ondas S reflejadas y refractadas tienen componente SH cero, es decir, tienen sólo componente SV.

Utilizando las otras condiciones de contorno podemos evaluar los valores de las razones $A/A_0, A'/A_0, B/A_0, B'/A_0$.

en función de los ángulos $\Theta, \Theta', \alpha, \alpha'$

Esto quiere decir que si la onda incidente es SH no existen ondas reflejadas ni refractadas P y las ondas reflejadas y refractadas S sólo tienen componentes SH pues SV es igual a cero. Por lo tanto, las ecuaciones se reducen a

$$U_z = C_0 e^{ik(x+z \operatorname{tg} \alpha - vt)} + C e^{ik(x-z \operatorname{tg} \alpha - vt)} \quad \text{en } M \quad (10.1.30)$$

$$y \quad U_z = C' e^{ik(x+z \operatorname{tg} \alpha' - vt)} \quad \text{en el medio } M' \quad (10.1.31)$$

Aplicando las condiciones de contorno dadas por

$$(U_z)_M = (U_z)_{M'} \quad (T_{23})_M = (T_{23})_{M'} \quad (10.1.32)$$

obtenemos

$$C_0 + C = C' \quad (10.1.33)$$

$$y \quad \mu \operatorname{tg} \alpha (C_0 - C) = \mu' \operatorname{tg} \alpha' C' \quad (10.1.34)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 10.1.33 y 10.1.34 obtenemos

$$C(\mu' \operatorname{tg} \alpha' + \mu \operatorname{tg} \alpha) = C_0(\mu \operatorname{tg} \alpha - \mu' \operatorname{tg} \alpha')$$

o sea,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\mu \operatorname{tg} \alpha - \mu' \operatorname{tg} \alpha'}{\mu \operatorname{tg} \alpha + \mu' \operatorname{tg} \alpha'} \quad (10.1.35)$$

$$y \quad 2C_0 \mu \operatorname{tg} \alpha = C'(\mu \operatorname{tg} \alpha + \mu' \operatorname{tg} \alpha')$$

$$\frac{C'}{C_0} = \frac{2\mu \operatorname{tg} \alpha}{\mu \operatorname{tg} \alpha + \mu' \operatorname{tg} \alpha'} \quad (10.1.36)$$

De acuerdo con la ley de Snell

$$\frac{C_t}{\cos \alpha} = \frac{C_t'}{\cos \alpha'} \quad (10.1.37)$$

Si $C_t' < C_t$; $\alpha' > \alpha$, el rayo refractado se acerca a la normal y si $C_t' > C_t$, $\alpha' < \alpha$, el rayo se aleja de la normal. Para este último caso puede darse que para cierto valor de α , α' sea igual a cero. Cuando esto sucede no hay rayo refractado en el medio M' y es el caso de reflexión total. Al valor correspondiente α se le denomina ángulo crítico α_c , que viene dado por

$$\alpha_c = \arccos \frac{C_t}{C_t'} \quad (10.1.38)$$

Estudiaremos ahora las ondas que se propagan a lo largo de la interfase, para lo cual consideraremos el caso en el que el ángulo de incidencia es igual, o menor que el ángulo crítico. A partir de la ley de Snell podemos escribir las tangentes de los ángulos de incidencia y refracción en la forma.

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{v^2}{c_t^2} - 1} \quad (10.1.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{\frac{v^2}{c_t'^2} - 1} \quad (10.1.40)$$

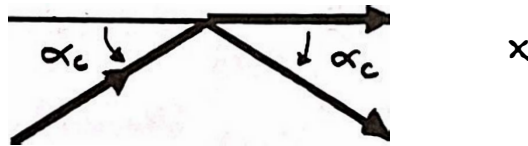


Fig. 10.1.2

Para el valor $\alpha = \alpha_c$, $v = c_t$ y por consiguiente $\operatorname{tg} \alpha' = 0$, o sea $\alpha' = 0$, es decir, la onda se propaga con velocidad c_t' a lo largo de la interfase. Esta onda se llama con frecuencia onda de interfase (head wave).

Para valores de $\alpha < \alpha_c$, el $\cos \alpha_c$ tendría que ser mayor que la unidad, o sea, $v < 1$ ya que $\cos \alpha' = \frac{c_t'}{v}$, y por lo tanto $\operatorname{tg} \alpha'$ dada por la ecuación 10.1.40 es imaginaria

$$\operatorname{tg} \alpha' = i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_t'^2}} \quad (10.1.41)$$

Sustituyendo este valor y el de $\operatorname{tg} \alpha$ dado por 10.1.39, en 10.1.35 queda para el caso en que $c_t < v < c_t'$

$$C = \frac{\mu \left(\frac{v^2}{c_t^2} - 1\right)^{1/2} - i\mu' \left(1 - \frac{v^2}{c_t'^2}\right)^{1/2}}{\mu \left(\frac{v^2}{c_t^2} - 1\right)^{1/2} + i\mu' \left(1 - \frac{v^2}{c_t'^2}\right)^{1/2}} \quad (10.1.42)$$

Racionalizando la fracción y pasando la cantidad compleja a la forma exponencial obtenemos

$$\frac{C}{C_0} = e^{2i\Theta} \quad (10.1.43)$$

El módulo es la unidad y el argumento 2Θ , donde Θ tiene el valor

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\mu' \left(1 - \frac{v^2}{c_t'^2}\right)^{1/2}}{\mu \left(\frac{v^2}{c_t^2} - 1\right)^{1/2}} \quad (10.1.44)$$

Al producirse la reflexión total, la onda reflejada tiene igual amplitud que la onda incidente con solo un cambio de fase de valor 2Θ . En este caso no hay onda refractada en el medio M. Sin embargo, sí hay una perturbación elástica en dicho medio. Sustituyendo 10.1.41 en 10.1.31 obtenemos

$$v_z = C' e^{-\kappa \left(1 - \frac{v^2}{c_t'^2}\right)^{1/2} z + i\kappa(x - vt)} \quad (10.1.45)$$

Esta expresión representa una onda que se propaga paralelamente a la superficie de separación de los dos medios, es decir, en la dirección x , con velocidad $c_t < v < c_t'$ y cuya amplitud decrece exponencialmente al aumentar la distancia z desde la superficie de separación.

De acuerdo con la ley de Snell

$$\frac{c_t}{\cos \Theta} = \frac{c_t'}{\cos \alpha'} = v \quad (10.1.46)$$

Las tangentes de éstos ángulos vienen dadas por

$$\operatorname{tg} \Theta = \left(\frac{v^2}{c_t^2} - 1 \right)^{1/2} = a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{v^2}{c_t^2} - 1 \right)^{1/2} = b$$

$$\operatorname{tg} \Theta' = \left(\frac{v^2}{c_t'^2} - 1 \right)^{1/2} = a'$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \left(\frac{v^2}{c_t'^2} - 1 \right)^{1/2} = b'$$

y las ecuaciones resultantes de las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} (U_1)_M &= (U_1)_{M'} & A_0 + A + bB &= A' + b'B' \\ (U_3)_M &= (U_3)_{M'} & a(A_0 - A) - B &= a'A' - B' \\ (\sigma_{33})_M &= (\sigma_{33})_{M'} & \rho c_t^2 [-(b^2 - 1)(A_0 + A) + 2bB] &= \rho' c_t'^2 [2a'A' + (b^2 - 1)B'] \\ (\tau_{13})_M &= (\tau_{13})_{M'} & 2a(A_0 - A) + (b^2 - 1)B &= \rho' c_t'^2 [2a'A' + (b^2 - 1)B'] \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden deducir las expresiones para las razones de las amplitudes reflejadas y refractadas a la amplitud incidente.

10.2 Ondas Superficiales en un medio y una capa. Ondas love

Consideremos un medio semi-infinito M de constantes elásticas λ, μ y ρ y de velocidades de las ondas internas c_l y c_t , sobre el que tenemos una capa de espesor h y de constantes λ', μ', ρ' y velocidades c_l' y c_t' de manera que $c_t' < c_t$

z

↑

M'

μ', ρ', c_t'

μ, ρ, c_t

Fig 10.2.1

A diferencia del caso de un medio semi-infinito, aparecen ahora unas ondas superficiales con desplazamientos transversales a la dirección de propagación. A.E.H. Love descubrió la existencia de estas ondas y por eso reciben el nombre de ondas Love.

Para este caso sólo necesitamos considerar la componente $U_z = U_y$ del desplazamiento y suponemos que la onda se propaga en la dirección de x , para los medios M y M' .

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\text{en } M \quad \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = c_t^2 \nabla^2 U_z \quad (10.2.1)$$

$$\text{en } M' \quad \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = c_t'^2 \nabla^2 U_z \quad (10.2.2)$$

Consideremos una onda de superficie, plana y monocromática, que se propaga a lo largo del eje X . Buscaremos entonces $U = U_z$ en la forma

$$U_z = e^{i(kx - \omega t)} f(z) \quad (10.2.3)$$

$$y \quad U_z = e^{i(kx - \omega t)} f'(z) \quad (10.2.4)$$

Substituyendo 10.2.3 y 10.2.4 en 10.2.1 y 10.2.2 respectivamente tenemos que:

$$y \quad \frac{d^2 f}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) f \quad (10.2.5)$$

$$\frac{d^2 f'}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t'^2} \right) f' \quad (10.2.6)$$

Si $k^2 - \omega^2/c_t^2 < 0$, las ecuaciones anteriores nos dan funciones periódicas f y f' , obteniendo así una onda plana ordinaria que no se amortigua dentro del medio en el que se propaga. Debemos suponer, pues, que $k^2 - \omega^2/c_t^2 > 0$ para el medio M , o sea que $\omega < c_t$. Ya que en este medio $z < 0$. Para el medio M' no hace falta limitar el valor de $k^2 - \omega^2/c_t'^2$ ya que $0 < z < h$.

Las soluciones de las ecuaciones 10.2.5 y 10.2.6 son:

$$f(z) = A e^{\lambda_t z} + B e^{-\lambda_t z} \quad (10.2.7)$$

$$y \quad f'(z) = A' e^{\lambda_t' z} + B' e^{-\lambda_t' z} \quad (10.2.8)$$

Para la función $f(z)$, dada por 10.2.7, $z < 0$ por lo que la parte de la función con el signo menos correspondería a un aumento ilimitado de la deformación cuando $z \rightarrow -\infty$. Como esta solución carece de sentido $B = 0$ y por consiguiente:

$$f(z) = A e^{\lambda_t z} \quad (10.2.9)$$

Substituyendo 10.2.8 y 10.2.9 en las ecuaciones 10.2.4 y 10.2.3 respectivamente tenemos:

$$U_y = A e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda_t z} \quad \text{para } z < 0 \quad (10.2.10)$$

$$y \quad U_y = A' e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda_t' z} + B' e^{i(kx - \omega t)} e^{-\lambda_t' z} \quad \text{para } 0 < z < h \quad (10.2.11)$$

donde

$$\lambda_t = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right)^{1/2} \quad \lambda_t' = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t'^2} \right)^{1/2}$$

Utilizaremos ahora las condiciones de contorno:

- a) en la superficie libre los esfuerzos deben ser nulos, o sea para $z = h$

$$\sigma_{z3} = \sigma_{yz} = 0 \quad (10.2.12)$$

- b) en la superficie de separación de los dos medios debe de haber continuidad de esfuerzos y desplazamientos, o sea, para $z=0$

$$(\sigma_{z3})_M = (\sigma_{z3})_{M'} \quad (10.2.13)$$

$$(U_z)_M = (U_z)_{M'} \quad (10.2.14)$$

Aplicando la condición 10.2.12 tenemos:

o sea

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu} U_{y,z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial U_y}{\partial z} = \mu$$

$$\mu \frac{\partial U_y}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$$

$$\mu' \frac{\partial U_y}{\partial z} = \mu' \left(\lambda_t A' e^{i(kx-\omega t)} e^{\lambda_t' z} - \lambda_t' B' e^{i(kx-\omega t)} e^{-\lambda_t' z} \right)$$

$$\mu' \frac{\partial U_y}{\partial z} \Big|_{z=h} = \mu' \lambda_t' e^{i(kx-\omega t)} (A' e^{\lambda_t' h} - B' e^{-\lambda_t' h}) = 0$$

$$= A' e^{\lambda_t' h} - B' e^{-\lambda_t' h} = 0 \quad (10.2.15)$$

Aplicando la condición 10.2.13 tenemos:

o sea

$$\mu \lambda_t A e^{i(kx-\omega t)} e^{\lambda_t z} \Big|_{z=0} = \mu' (\lambda_t A' e^{\lambda_t' z} - \lambda_t' B' e^{-\lambda_t' z}) e^{i(kx-\omega t)} \Big|_{z=0}$$

$$\mu \lambda_t A = \mu' \lambda_t' (A' - B')$$

$$\mu' \lambda_t' A' - \mu' \lambda_t' B' - \mu \lambda_t A = 0 \quad (10.2.16)$$

aplicando, por

último, la condición 10.2.14 tenemos:

o sea

$$A e^{\lambda_t z} = A' e^{\lambda_t' z} + B' e^{-\lambda_t' z} \quad \text{para } z=0$$

$$A = A' + B' \Rightarrow A' + B' - A = 0 \quad (10.2.17)$$

Las tres ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} A' e^{\lambda_t' h} - B' e^{-\lambda_t' h} &= 0 \\ A' \lambda_t' \mu' - B' \lambda_t' \mu' - A \lambda_t \mu &= 0 \\ A' + B' - A &= 0 \end{aligned}$$

La condición para que estas tres ecuaciones homogéneas sean compatibles es que su determinante sea cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_t l} & -e^{-\lambda_t l} & 0 \\ \lambda_t \mu & -\lambda_t \mu & -\lambda_t \mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_t l} (\mu \lambda_t + \mu \lambda_t) + e^{-\lambda_t l} (\mu \lambda_t - \mu \lambda_t) &= 0 \\ \mu \lambda_t (e^{\lambda_t l} + e^{-\lambda_t l}) &= -\mu \lambda_t (e^{\lambda_t l} - e^{-\lambda_t l}) \\ \frac{\mu \lambda_t}{\mu \lambda_t} &= i^2 \frac{e^{\lambda_t l} - e^{-\lambda_t l}}{e^{\lambda_t l} + e^{-\lambda_t l}} = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \lambda_t l \\ \therefore \operatorname{tg} \lambda_t l &= \frac{i \mu \lambda_t}{\mu \lambda_t} \end{aligned} \quad (10.2.18)$$

Sustituyendo los valores de λ_t y λ_t' , tenemos:

$$\frac{i \mu (k^2 - \omega^2/c_t^2)^{1/2}}{\mu' (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2}} = \operatorname{tg}' l \omega (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2} \quad (10.2.19)$$

Esta es la ecuación de dispersión de las ondas Love. En ella la velocidad c es una función implícita de k , el número de onda.

Considerando esta ecuación de dispersión de la onda Love, podemos notar lo siguiente: la función tangente tiene el mismo valor para valores de su argumento que se diferencien en múltiplos enteros de π

Si nos limitamos a los valores positivos de la tangente, ésta toma valores entre 0 y ∞ , para valores del argumento en los intervalos: $0 - \frac{\pi}{2}$; $\pi - \frac{3\pi}{2}$; $2\pi - \frac{5\pi}{2}$; $n\pi - \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

A cada uno de estos intervalos le corresponde un modo de la onda Love. El primero recibe el nombre de modo fundamental y los demás modos superiores primero, segundo, etc. Considerando el argumento de la tangente de la ecuación 10.2.19 para cada modo, éste se encuentra en el intervalo:

Modo fundamental	$0 \leq l \omega (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2} \leq \frac{\pi}{2}$
Primer modo superior	$\pi \leq l \omega (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2} \leq \frac{3\pi}{2}$
Segundo modo superior	$2\pi \leq l \omega (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2} \leq \frac{5\pi}{2}$
n-ésimo modo superior	$n\pi \leq l \omega (k^2 - \omega^2/c_t'^2)^{1/2} \leq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

La ecuación de dispersión dada por la ecuación 10.2.19 indica que la velocidad de las ondas Love c es una función del número de onda k , y de la frecuencia angular ω , o del período T . Por lo tanto, podemos escribir

$$c = c(k), \quad c = c(\omega) \quad \text{ó} \quad c = c(T)$$

Si calculamos ahora los valores de c que corresponden a cada frecuencia o período, la curva de la velocidad con respecto a las frecuencias o períodos recibe el nombre de "curva de dispersión". Para cada caso la forma de esta curva dependerá de los parámetros que entren en la ecuación de dispersión μ, μ', c_t, c_s y h .

Consideremos de nuevo la ecuación de dispersión.

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{i\mu (h^2 - \omega^2/c_t^2)^{1/2}}{\mu' (h^2 - \omega^2/c_t^2)^{1/2}} \quad \text{donde} \quad \eta = \operatorname{arctg} \left(h^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right)$$

Para el modo fundamental el argumento de la tangente, η , está en el intervalo $[0, \pi/2]$. Si hacemos $c = c_t$ el segundo miembro se hace infinito y η tiende a cero. Pero el argumento de la tangente cuyo valor es infinito es $\pi/2$, y como el radical en η tiende a cero tenemos que hacer que h tienda a infinito para que el producto sea constante e igual a $\pi/2$. De esta manera obtenemos un punto de la curva, $c(\infty) = c_t$.

Si hacemos ahora $c = c_s$, el segundo miembro es cero y por lo tanto, η debe ser cero. Como el radical no es cero, ya que $c_s > c_t$, entonces k debe ser cero y por consiguiente $c(\omega) = c_s$. La forma de la curva entre estos dos puntos depende de los parámetros del medio y la capa.

Para los modos superiores el argumento de la tangente nunca es cero ya que el límite inferior de η es $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$. Por esto k nunca puede ser cero, sino que para $c = c_t$ corresponde el caso del primer modo superior

$$\operatorname{tg} \eta = 0 \quad \operatorname{arctg} \left(h^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right)^{1/2} = \pi$$

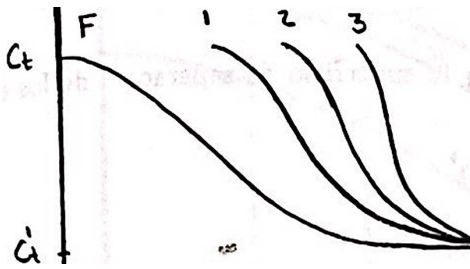
y despejando k

$$h_{s1} = \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right)^{1/2}$$

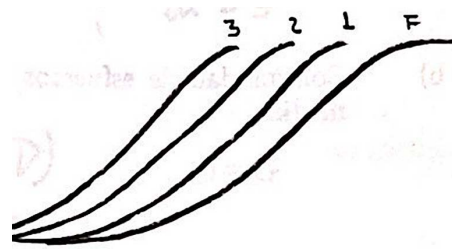
Este es el valor límite mínimo de k para el primer modo superior. A la frecuencia correspondiente se le denomina frecuencia límite. Para el n modo superior h_{sn} viene dada por:

$$h_{sn} = \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (10.2.20)$$

En las siguientes figuras podemos ver las curvas de dispersión teóricas para el modo fundamental y tres modos superiores con respecto a k , número de onda y T , período.



k_1, k_2, k_3
Fig. 10.2.2



T_3, T_2, T_1
Fig. 10.2.3

10.3 Ondas Rayleigh en un medio semi-infinito y una capa.

El problema de la propagación de ondas Rayleigh en un medio semiinfinito con una capa superpuesta de distintas constantes elásticas es similar al resuelto en la sección anterior para las ondas Love. Veremos solamente los pasos principales para la solución de este problema.

z

$$\mu, \lambda, \rho, c_1, c_2$$

o

$$\mu, \lambda, \rho, c_1, c_2$$

10.3.1

Como solución a la ecuación de movimiento escribimos los potenciales Ψ y ψ en forma de ondas planas.

En M
$$\psi = A e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda z} \tag{10.3.1}$$

$$\psi = C e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda z} \tag{10.3.2}$$

En M'
$$\psi = A' e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda z} + B' e^{i(kx - \omega t)} e^{-\lambda z} \tag{10.3.3}$$

$$\psi = C' e^{i(kx - \omega t)} e^{\lambda z} + D' e^{i(kx - \omega t)} e^{-\lambda z} \tag{10.3.4}$$

Las condiciones de contorno adecuadas son:

Las condiciones de contorno adecuadas son:

- a) Esfuerzos nulos en la superficie libre

$$z = h, \quad \sigma_{33} = 0 \quad \tau_{13} = 0$$

- b) Continuidad de esfuerzos y desplazamientos en la superficie de separación de los dos medios.

$$z = 0 \quad \begin{aligned} (\sigma_{33})_M &= (\sigma_{33})_{M'} \\ (\tau_{13})_M &= (\tau_{13})_{M'} \\ (u_1)_M &= (u_1)_{M'} \\ (u_3)_M &= (u_3)_{M'} \end{aligned}$$

De aquí resultan seis condiciones de contorno de las cuales podemos evaluar las seis constantes de las soluciones propuestas.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- a) Expresar los esfuerzos en función de los desplazamientos

$$\tau_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \quad \sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- b) Hallar las expresiones para los desplazamientos en función de los potenciales φ y ψ

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- c) Utilizar las condiciones de contorno para obtener seis ecuaciones homogéneas de A, C, A', B', C' y D'.
- d) Para que exista una solución del sistema homogéneo la condición es que su determinante sea cero. Al poner el determinante igual a cero obtenemos una ecuación que expresa la velocidad C en función de la frecuencia. Esta es la ecuación de dispersión de las ondas Rayleigh para un medio con una capa. La única dificultad, es lo tedioso de desarrollar un determinante de seis por seis.

En el caso para el medio semi-infinito, las ondas Rayleigh tenían una velocidad constante $C = C_R$; al añadir una capa estas ondas presentan el fenómeno de dispersión, siendo su velocidad función de las frecuencias. Además, en este caso aparecen los modos superiores además del modo fundamental. Los modos superiores de la onda Rayleigh aparecen en pares de modos llamados simétricos y asimétricos para cada orden. Para el orden n, los modos simétricos se denominan M_{1n} y los asimétricos M_{2n} . La curva de dispersión de la velocidad de fase de las ondas Rayleigh para un medio semi-infinito con una capa tiene las siguientes características. Para $k = 0$, es decir, para frecuencias bajas, el modo fundamental tiene la velocidad de la onda Rayleigh correspondiente al medio semi-infinito $C = C_R$. Para estas frecuencias que corresponden a periodos muy largos, la onda se comporta como si la capa no existiera. Los modos superiores tienen una frecuencia mínima y para ella, la velocidad es la de la onda S en el medio semi-infinito, $C = C_t$. Para $k = \infty$, o frecuencias altas, la velocidad del modo superior

tiende a la velocidad de la onda Rayleigh correspondiente a un medio semi-infinito de las características de la capa. Las ondas se comportan como si la capa fuera un medio semi-infinito. La velocidad límite de los modos superiores es la de la onda S en la capa, $c = c_t$

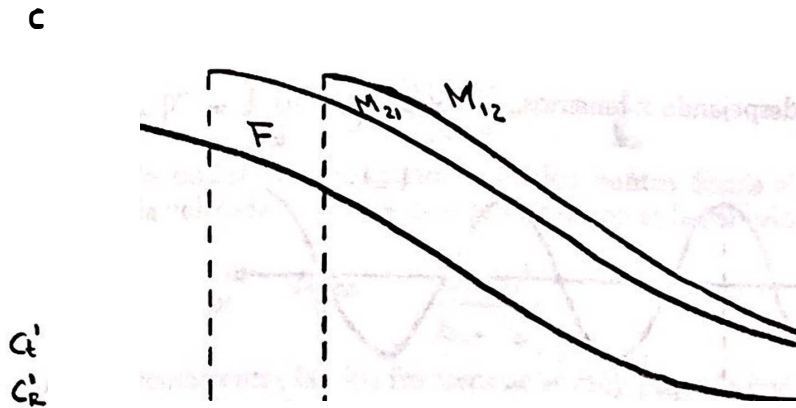


Fig. 10.3.2

10.4 El fenómeno de dispersión, velocidad de fase y de grupo.

Para las ondas superficiales en un medio semi-infinito y una capa la velocidad de propagación no es constante sino que es una función de la frecuencia. Este fenómeno recibe el nombre de dispersión. Consideremos que la velocidad de una onda superficial depende de la frecuencia de acuerdo a la curva de la figura 10.4.1, con velocidades menores para las frecuencias altas. Si la perturbación en el origen ($x = 0$) tiene la forma de un impulso en el tiempo, se puede representar por la función delta de Dirac $\delta(t)$, que vale cero para todos los valores de t menos $t = 0$ para el que vale la unidad. De acuerdo con el Teorema de Fourier podemos representar esta función como una superposición de ondas armónicas de distintas frecuencias entre $0 < \omega < \infty$. Si suponemos ahora que cada onda armónica se propaga con distinta velocidad de acuerdo con la distribución mencionada con anterioridad, a una distancia R del origen, las ondas llegarán durante el intervalo de tiempo $R/c_t < t < R/c_r$. Además, de acuerdo con la distribución de las velocidades, llegarán antes las frecuencias bajas y luego las más altas. Los períodos más largos se han adelantado a los cortos y la duración de la señal que en el origen era infinitesimal, se ha estirado hasta tener la duración $\Delta t = \frac{R}{c_t} - \frac{R}{c_r}$. La onda se ha dispersado.

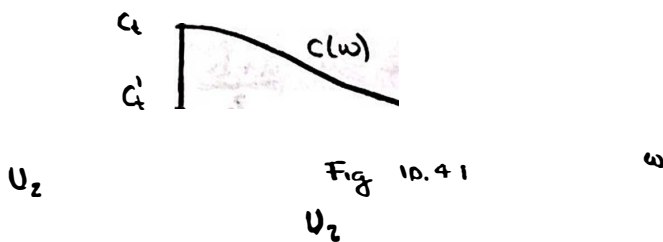
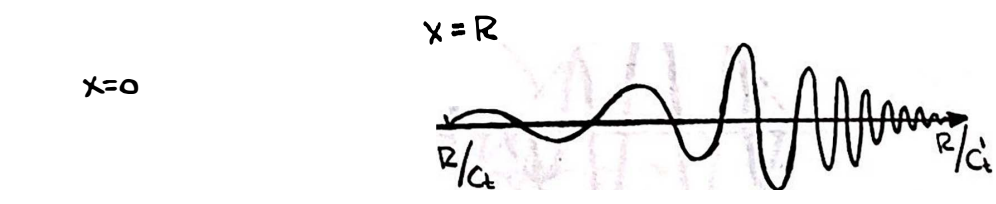


Fig. 10.4.1



10.4.2

10.4.3

Veremos ahora la velocidad de fase y de grupo. Sea una onda armónica pura de una sola frecuencia

$$u = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

si hacemos $kx - \omega t = \eta$ despejando x tenemos, $x = \eta + \frac{\omega}{k}t = \eta + ct$

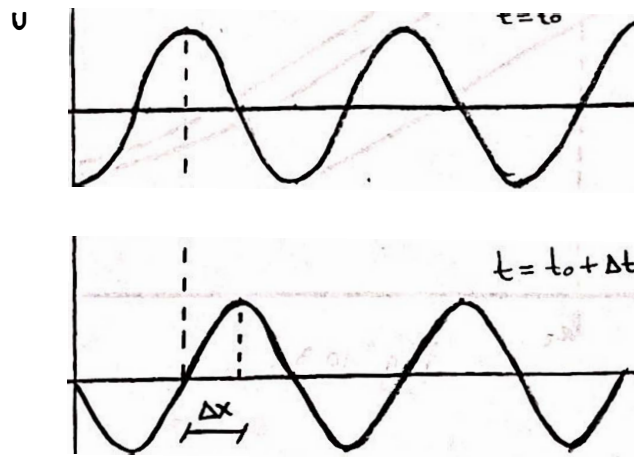


Fig 10.4.4

El punto P de la onda $u = A \operatorname{sen} \eta$ al aumentar el tiempo se desplaza en la dirección de x con velocidad $c = \omega/k$. Como η es el valor de la fase, la velocidad de propagación c se llama velocidad de fase. En la Fig. 10.4.4, el punto P correspondiente a la fase $k(x - ct) = \eta$ al aumentar el tiempo se desplaza Δx y la velocidad de fase será

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (10.4.1)$$

Si tomamos dos ondas de la misma amplitud y frecuencias un poco distintas, la suma de las dos ondas vendrá dada por

$$u + u' = A [\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(k'x - \omega't)] \quad (10.4.2)$$

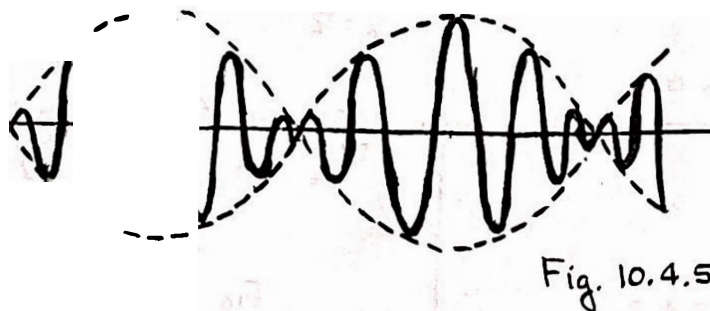
Sustituyendo la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

tenemos

$$u + u' = 2A \operatorname{sen} \left[\frac{k+k'}{2}x - \frac{\omega+\omega'}{2}t \right] \cos \left[\frac{k-k'}{2}x - \frac{\omega-\omega'}{2}t \right] \quad (10.4.3)$$

y la representación gráfica será



La línea interrumpida representa $\cos\left(\frac{k-k'}{2}x - \frac{\omega-\omega'}{2}t\right)$. Como la diferencia entre las dos frecuencias es muy pequeña, la longitud de onda del coseno, $\lambda_c = 4\pi/(k-k')$, es muy grande si la comparamos con la de seno $\lambda_s = 4\pi/(k+k')$. La línea continua representa el producto del seno y el coseno. La velocidad de fase de esta onda corresponde a la de las fases del seno y viene dada por

$$c = \frac{\omega + \omega'}{k + k'} - \frac{\omega}{k} \quad (10.4.4)$$

El tren de ondas, comprendido entre dos puntos donde el coseno se hace cero, es un grupo de ondas; la velocidad con que avanza este grupo se llama velocidad de grupo y viene dada por

$$v_g = \frac{\omega - \omega'}{k - k'} \quad (10.4.5)$$

Si la diferencia entre las dos frecuencias es muy pequeña podemos representar el valor de la velocidad de grupo por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (10.4.6)$$

Sustituyendo $w = kc$ obtenemos

$$v_g = c + k \frac{dc}{dk} \quad (10.4.7)$$

Esta ecuación da la relación entre la velocidad de grupo y la de fase. Evidentemente si la velocidad de fase es constante, $v_g = c$. Del hecho que el máximo de la energía transportada por la onda, corresponde al máximo del coseno y se hace cero en los puntos donde ésta es nula, podemos deducir que la energía en una onda dispersada se transmite con la velocidad de grupo.

Si en lugar de dos frecuencias ω_1 y ω_2 tenemos una perturbación $g(t)$ formada por la superposición de ondas armónicas de frecuencia comprendidas en el intervalo $\omega_1 < \omega < \omega_2$ y con velocidades c distintas para cada valor de ω de acuerdo con el teorema de Fourier podemos expresar $G(t)$ en la forma

$$G(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) d\omega \quad (10.4.8)$$

Consideremos ahora la expresión

$$P = \int_m^N U(x) \cos V(x) dx \quad (10.4.9)$$

en la que $U(x)$ cambia muy despacio con x , mientras que $V(x)$ cambia mucho más rápidamente, de manera que con $V(x)$ cambia rápidamente de signo, mientras que $U(x)$ cambia solamente en una pequeña fracción

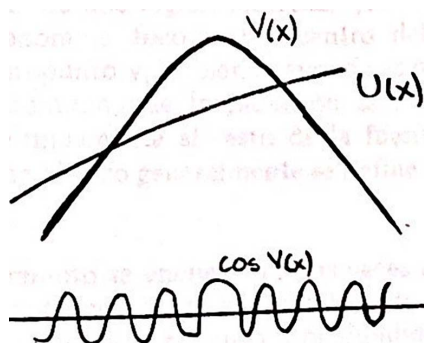


Fig 10.4.6

Dadas estas condiciones, el valor de la integral 10.4.9 será pequeño al anularse las partes positivas del cos $V(x)$ con las negativas. Sin embargo, esto no sucede para los valores estacionarios de $V(x)$, es decir, para aquellos valores de x en que

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0$$

El principio de fase estacionaria se puede enunciar en la siguiente forma: en una integral del tipo indicado, las partes positivas y negativas se anulan mutuamente a excepción de los valores en que la fase es estacionaria. Si escribimos la integral para P en función de un parámetro α ,

$$P(\alpha) = \int_M^N U(x, \alpha) \cos V(x, \alpha) dx \quad (10.4.10)$$

La integral depende solamente del valor de α para el que $V(x, \alpha)$ es estacionario $\partial V / \partial x = 0$, siendo cero o muy pequeña para todos los demás valores de α .

Aplicando el principio de fase estacionaria a la ecuación 10.4.8, la mayor parte de la energía corresponde a

$$\frac{d}{d\omega} \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{\omega x}{c^2} \frac{dc}{d\omega} = 0 \quad (10.4.11)$$

y despejando x

$$x = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{dc}{d\omega} \quad (10.4.12)$$

Si hacemos $x/t = v_g$, la velocidad de grupo está viene dada a partir de la ecuación 10.4.12 por

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{dc}{d\omega} \quad (10.4.13)$$

Puede fácilmente comprobarse que esta ecuación corresponde a la ecuación 10.4.7. Como la integral de 10.4.8 representa la amplitud total de la perturbación y la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la velocidad de grupo v_g corresponde a la de la transmisión de la energía. La velocidad de fase c es la que corresponde a la transmisión de cada uno de los componentes armónicos en que se descompone \bar{U}

IV ONDAS SISMICAS

11. INTRODUCCION A LA SISMOLOGIA. TERREMOTOS.

11.1 Definiciones y conceptos generales.

Geofísica

“Es la aplicación de los principios y prácticas de la Física para la resolución de los problemas relacionados con la Tierra”, Howell (1962). La parte más desarrollada de la Geofísica es la Sismología.

Sismología

“Ciencia que trata de los terremotos y de otras vibraciones del subsuelo”, Howell (1962). Unas de las aplicaciones de la Sismología son el reducir los daños materiales causados por terremotos y conocer más el interior de la Tierra.

Terremoto

Se entiende por terremoto, según Howell (1962), un movimiento violento, repentino y pasajero, o bien, una serie de movimientos del subsuelo en una región limitada y que desde este lugar se extiende en todas direcciones. Dicho de otra forma, es una ruptura súbita del equilibrio elástico y que se propaga en todas direcciones.

El estudio de un terremoto se puede hacer:

- a) mediante la observación de la zona afectada, reconocimiento de los destrozos producidos y de las deformaciones del terreno, comparando los mapas de la región antes y después del terremoto. (Sismología Geográfica).
- b) mediante el registro en observatorios del movimiento vibratorio producido como consecuencia de la conmoción. (Sismología Física). Las ondas propagadas en esta forma se llaman ondas sísmicas.

Como las rocas son el medio por el cual se propagan las ondas sísmicas, estas últimas deben ser elásticas, ya que las gravitacionales no son tan fuertes.

Epicentro y Foco

Cuando se presenta un terremoto, éste no lo hace simultáneamente en todos los sitios donde es observado. Las vibraciones se propagan con velocidades definidas y conmensurables y actúan como si procedieran de una región limitada, que es la denominada fuente de energía del sismo. Esta región se denomina foco o hipocentro del terremoto. Los sismólogos suelen considerar el foco como un punto y, si bien la energía es generada en una zona extensa o en un gran volumen de tierra, admiten que la radiación se inicia en un punto cualquiera de este volumen y se difunde continuamente al resto de la fuente. Esta teoría es consecuencia de la observación y por esta razón el foco generalmente se define como “punto desde el cual se irradia la energía”, Howell (1962).

El foco de un terremoto se encuentra raras veces en la misma superficie de la tierra y hasta la fecha no se conocen sismos que se hayan originado a profundidades de más de 700 kms. La mayor parte de los terremotos se originan a profundidades de unos 50 kms, siendo los 25 kms la profundidad focal más común. Los terremotos cuyos focos se encuentran a menos de 70 kms se denominan normales, según Howell. Otros autores toman los normales hasta los 60 kms. Más de un 70o/o de los terremotos son normales.

Los terremotos anormalmente profundos suelen reconocerse de varias maneras. Las ondas superficiales son débiles normalmente. Los terremotos cuyo foco se encuentra a gran profundidad, pueden reconocerse por observación directa de los daños causados, ya que el sismo se nota en una zona muy extensa, siendo el temblor de igual intensidad en todos los lugares. En el caso de terremotos superficiales, la intensidad del temblor suele disminuir rápidamente con la distancia de un punto de la superficie situado directamente encima del foco y que se llama epicentro del terremoto. La situación de un terremoto se especifica generalmente indicando la latitud y longitud del epicentro, así como la profundidad del foco.

Los sismólogos han descubierto que los terremotos tienen una tendencia a ocurrir en cinchos o fajas. Actualmente se han mejorado los métodos para detectar los epicentros, y las fajas sísmicas pueden definirse con más precisión.

Los epicentros de los terremotos están además alineados a lo largo de fallas de transformación, donde las placas divergen una de la otra, como podemos verlo en la Fig. 11.1, en la parte por donde emerge el magma.

Por otro lado, los terremotos que se originan a profundidades de más de 100 kms, ocurren cerca de las márgenes donde las placas colindan. Los focos de estos terremotos están distribuidos sobre planos bien definidos que se sumergen en el manto y están íntimamente relacionados con fosos profundos en el mar, archipiélagos, montañas recientes y volcanes. En esto ha acertado la teoría de las placas tectónicas, pues estos terremotos profundos definen actualmente las posiciones de las placas de convergencia. Gracias a esta correlación que existe entre la Topografía, la Geología y la Sismicidad se tienen los datos esenciales para definir las fronteras de las placas de la litosfera.

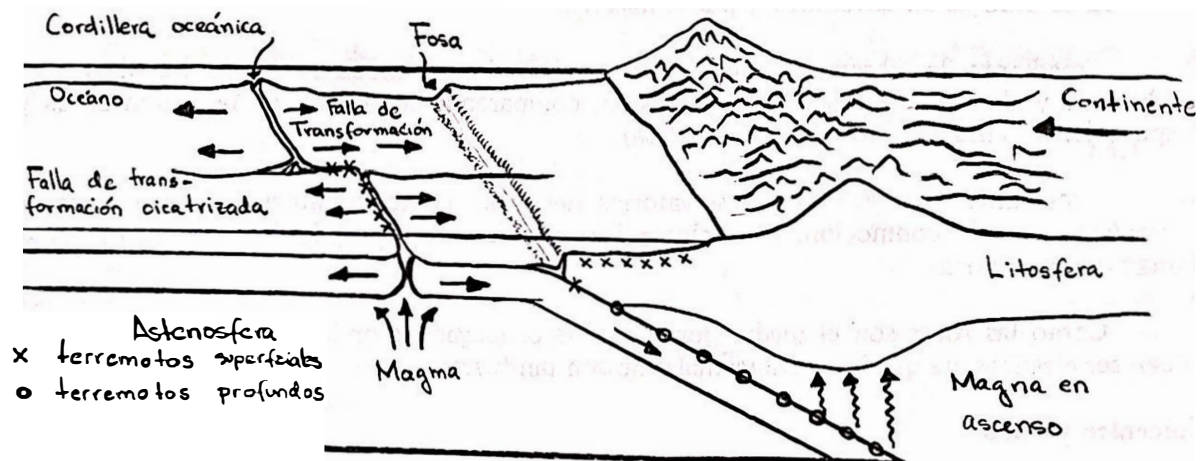


Fig. 11.1 Diagrama ilustrando la asociación de terremotos con las fronteras de las placas: cordilleras oceánicas, fallas de transformación y fosas.

Clasificación de los terremotos.

Los terremotos podríamos clasificarlos de la siguiente manera:

- A. Según el origen de la perturbación, Howell (1962.)
 Natural: si es producido por procesos naturales de la Tierra.
 Artificial: si es producido con intervención del hombre.
 Algunos científicos no incluyen las perturbaciones "artificiales" y únicamente consideran como vibraciones de esta clase las ocasionadas por las fallas de las rocas.

- B. Según la distancia del epicentro, a la estación donde se observan las ondas, Udías (1971)
 Locales: si la distancia es menor de 1000 km.
 Telesismos: si la distancia es mayor de 1000 km.
- C. Según la profundidad del foco, Howell (1962).
 Superficiales: si la profundidad focal está entre 0. y 70 km.
 Intermedios: si está entre 70 y 300 km.
 Profundas: si está a más de 300 km.
 Udías toma 60 km como límite de los terremotos superficiales en vez de 70 km.
- D. Según su origen, Howell (1962) y Udías (1971).
 Volcánicos: relacionados con la actividad volcánica. De poca intensidad.
 Tectónicos: relacionados con los procesos de deformación de la corteza terrestre que dan origen a la formación de continentes y montañas.
 Otros: relacionados con derrumbamientos de cavernas, caída de meteoritos, corrimientos de tierra.

11.2 Causas de los Terremotos

En la actualidad se cree, en general, que la mayor parte de los terremotos son producidos por reacción elástica. No obstante, han sido sugeridas otras muchas causas y algunas de las cuales se sabe son el origen de cierta clase de terremotos. Las interpretaciones más plausibles pueden dividirse en tres clases en función del mecanismo: tectónico, volcánico y por impacto.

Podríamos entonces clasificar a los terremotos, por su origen, de la siguiente forma siguiendo a Howell.

- A. Origen Tectónico
 a) Reacción elástica.
 b) Fisuración repentina durante una corriente plástica.
 c) Plegamiento.
- B. Origen Volcánico
 a) Explosiones debidas a presión subterránea acumulada.
 b) Cristalización.
 c) Rotura por tensión.
 d) Intrusión de magma.
 e) Excavación.
 f) Interrupción o bloqueo de una corriente.
- C. Por impacto
 a) Explosiones en la superficie.
 b) Caída de meteoros, etc.
 c) Hundimientos.
 d) Deslizamientos de rocas y fenómenos similares.

A. Origen Tectónico

La clase tectónica comprende todos los terremotos provocados por deformación de rocas, como las que forman los sistemas montañosos.

La reacción elástica es el miembro principal de esta clase. A grandes profundidades, se cree que las rocas se encuentran en estado plástico, debido a la alta temperatura, por lo cual ceden más fácilmente por fluencia, que por fractura.

Las rocas plásticas, si el esfuerzo es suficientemente elevado, pueden fluir y fracturarse al mismo tiempo, de manera que tenemos como segunda causa propuesta el rápido cizallamiento de rocas plásticas profundas, ya sea a lo largo de un plano, o bien, en un extenso volumen. En este caso el mecanismo es generalmente similar a la reacción elástica en rocas más rígidas, es decir, tan sólo varía la clase de roca.

El último miembro de la clase, es la fisuración y aplastamientos repentinos debidos a una tensión, que puede producirse cuando las rocas son plegadas independientemente de cualquier reacción cortante elástica de igual formación. Como estas fisuras o grietas suelen ser pequeñas, puede ser que esta causa sea probablemente de menor importancia, si es que no se considera como del todo insignificante.

B. Origen Volcánico

En general, los terremotos acompañan a las erupciones volcánicas. En ciertos casos, se cree que los temblores son provocados por el vulcanismo, aunque la mayor parte de estas vibraciones son de origen tectónico. El mecanismo por el cual el vulcanismo puede causar un terremoto es fundamentalmente una cuestión especulativa, siendo las explosiones volcánicas la única causa concreta conocida.

Se han señalado otras cinco posibilidades por las cuales el vulcanismo puede ser la causa de un terremoto, aunque no se ha podido comprobar que ninguna de ellas haya sido la causa de los terremotos reales.

A ciertas profundidades donde la presión es elevada y la temperatura uniforme, se ha sugerido que el magma puede subenfriarse sin llegar a solidificarse hasta que grandes volúmenes se cristalicen repentinamente con la consiguiente reducción de volumen que da lugar a una contracción de extrema violencia que, por sí sola, ya constituye un terremoto. Aunque en el laboratorio en ciertas condiciones puede producirse artificialmente un rápido crecimiento de cristales, no hay evidencia alguna que demuestre que este fenómeno pueda ocurrir en la naturaleza con una velocidad que produzca una apreciable vibración de la tierra.

Una de las causas lógicas de los temblores es la rotura por tensión. Cuando la lava se enfría, se producen agrietamientos. Si se forma una fisura suficientemente amplia en un intervalo de tiempo cualquiera, este acontecimiento puede liberar energía suficiente para producir un terremoto. De forma similar, la presión del magma intrusivo abriéndose camino a través de la roca, puede dar lugar a que sean fraccionados grandes trozos de rocas. Se ha indicado que el hundimiento, proceso por el cual se desprenden bloques aislados de roca del techo para sumergirse en el magma— puede ocurrir con tal violencia que el techo, al retroceder por acción del desprendimiento de una roca, puede causar un terremoto. Finalmente, si una gran caverna vacía subterránea se llena de magma, cuando dicha caverna queda totalmente llena, la masa fluyente de roca líquida actuaría como un émbolo y al golpear las paredes causaría un sismo. Todas estas hipótesis son pura especulación.

Cualquiera que sea la causa, ciertos terremotos que tienen lugar en regiones volcánicas tienen características suficientemente claras para pensar que pertenecen a un grupo especial. Estos temblores se caracterizan por su extrema violencia en su localidad y por una rápida disminución del movimiento del suelo al aumentar la distancia, lo cual indica que el foco es anormalmente superficial. Suelen acompañar al vulcanismo, en la región de su origen.

En conclusión, son extremadamente raros los terremotos que pueden ser definitivamente considerados como volcánicos.

C Por impacto

Los terremotos causados por impacto tienen lugar por causas superficiales. Han sido registradas muchas explosiones importantes en diversas zonas de gran extensión. La mayor parte de la energía de una explosión superficial se transforma en calor y en oscilaciones del aire.

Se supone que los meteoritos al chocar contra nuestro planeta también pueden provocar terremotos, aunque la distancia a que pueden ser registradas las vibraciones resultantes suele ser en general, muy pequeñas.

También se ha señalado la posibilidad de que el derrumbamiento de los techos de las cavernas, así como la caída de grandes declives de tierra, provoque una liberación suficiente de energía para causar un terremoto, aunque no está comprobado. El fenómeno inverso suele ser generalmente cierto, ya que los terremotos causan con frecuencia el hundimiento de cavernas y el corrimiento de los declives pronunciados.

Podríamos añadir a modo de resumen, que la mayoría de los terremotos se origina en la cercanía o vecindad de las fronteras, límites o contornos de las placas de la litosfera.

Los mecanismos de los esfuerzos que causan el movimiento en las fallas podemos reducirlos a los tres que se ilustran a continuación en la Fig. 11.2.1, que nos muestra la situación de la falla antes del movimiento (a); la situación de la falla cuando está sometida a esfuerzos de tensión (b); a esfuerzos de compresión (c) y por último, sometida a un esfuerzo de corte o cizallamiento (d)

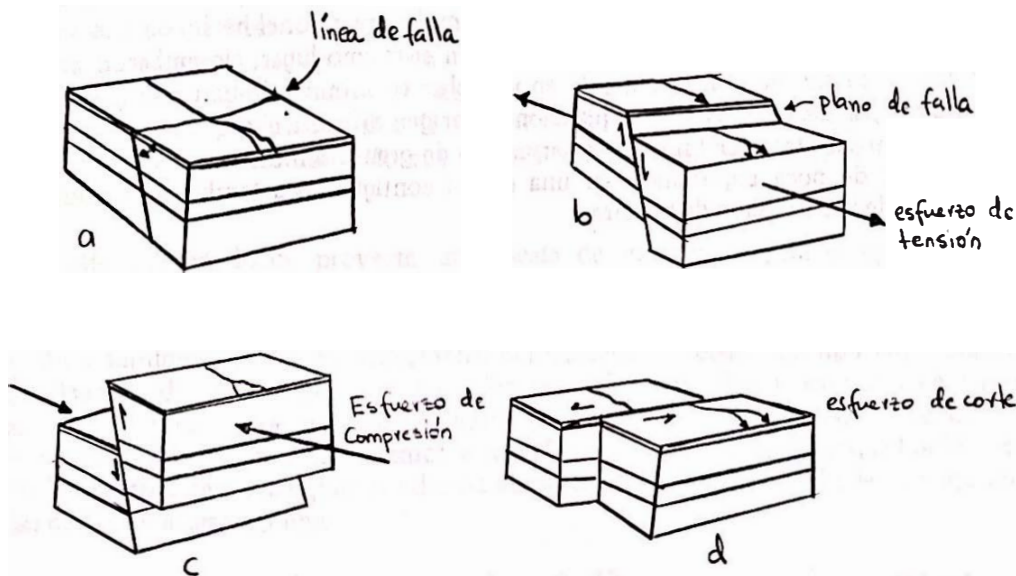


Fig 11.2.1

Tomados del libro "Earth", de los autores F. Press y R. Siever.

Por último, podemos decir, además, que los grandes terremotos tienen lugar en unos pocos minutos, debido a sumas de energía de deformación elástica que ha sido almacenada en una forma lenta en las rocas de una zona de fallas durante decenas o cientos de años. La fuente de esta deformación son los movimientos de las placas de la litosfera.

11.3 Características de los terremotos

Temblores iniciales y temblores finales

En general, un terremoto no es un acontecimiento aislado. Los terremotos se presentan en ciertas regiones con más frecuencia que en otras y cuando se producen estos fenómenos lo hacen conjuntamente. En algunos casos, aunque raramente, los diversos temblores del conjunto son de igual magnitud, aunque uno de ellos es el mayor y recibe el nombre de **temblor principal**. Los temblores que proceden al terremoto se llaman **iniciales** y los que siguen, **finales**. Otros autores les llaman **precursores** y **réplicas**.

Los temblores finales son más comunes que los iniciales. Todos los terremotos de importancia van seguidos de un gran número de temblores finales; sin embargo, no todos los terremotos importantes van acompañados de temblores iniciales, salvo en casos excepcionales. En cambio el número de temblores finales es del orden de los millares. La duración del conjunto de terremotos puede ser de varias semanas, meses e incluso años, pues la frecuencia con que se producen dichos fenómenos en general, disminuye hiperbólicamente.

En consecuencia, puede afirmarse, teóricamente, que el conjunto de terremotos no desaparece nunca. No obstante, prácticamente, cuando el tiempo entre los temblores posteriores llega a ser de unos meses, ya no es posible diferenciar un temblor final de un nuevo principal. En general, la magnitud final de los temblores, al igual que la frecuencia, disminuye, de modo que, eventualmente, su magnitud se encuentra a un nivel de microsismo. De todos modos no se produce una reducción continua, debido a que la magnitud de los temblores finales varía irregularmente, siendo algunos de ellos mucho mayores que otros que se presentan con anterioridad en la sucesión. El problema todavía se complica más por el hecho de que no todos los temblores del conjunto se producen exactamente en el mismo lugar; sin embargo, el origen de toda la energía se encuentra normalmente en un volumen mínimo de tierra cerca del origen del temblor principal. Esta variación en la posición del origen dificulta el establecimiento de una distancia clara entre un temblor final de un terremoto de gran magnitud en una región, de un temblor principal de poca importancia en una región contigua. Los temblores finales de la catástrofe inicial de la formación de la tierra.

Intensidad.

La violencia o intensidad del temblor producido por un terremoto es la medida de su magnitud. El grado de violencia se determina anotando las condiciones en que el temblor resulta perceptible por el ser humano, por la magnitud en que resultan dañados los edificios construidos por el hombre, y la naturaleza de cualquier deformación visible de la tierra. La intensidad de un terremoto se mide por una escala definida arbitrariamente.

En el caso de terremotos, las ondas superficiales están formadas generalmente por una larga sucesión de vibraciones casi de la misma amplitud, de modo que resulta más conveniente medir la intensidad con respecto al impacto, que atendiéndose a la aceleración. Las ondas internas, por otra parte, suelen llegar en forma de impulsos de corta duración y muy frecuentemente con sólo un pico de máxima amplitud o unos pocos de ellos.

Se debe tener presente que la intensidad no es una medida de la magnitud del terremoto, sino del grado en que fue observado y de los destrozos causados. Por esta razón, resulta difícil, y en algunos casos imposible, fijar valores de intensidad a los terremotos que tienen lugar en regiones des pobladas o en el mar.

La intensidad en la región más violentamente sacudida o afectada por un terremoto, suele considerarse, por lo general, como intensidad del mismo.

Magnitud

La intensidad de un terremoto varía de un sitio a otro y no depende solamente de la cantidad de energía liberada y de la distancia al foco, sino también de la naturaleza del terreno de la región en que tiene lugar el sismo. Por lo tanto, dicho factor, a pesar de que los grandes temblores suelen tener intensidades mayores que los temblores pequeños no constituye una medida apropiada para determinar la magnitud del temblor. Sin embargo, la medida de la amplitud del movimiento del suelo nos suministra un método relativamente preciso para medir la magnitud de un terremoto.

Richter, en 1935, proyectó una escala de magnitudes para comparar las energías liberadas en terremotos en California meridional y en las regiones circundantes. Definió dicha magnitud en función del logaritmo de la máxima amplitud, medida en micras (0.001 mm), sobre el gráfico suministrado por un sismómetro normalizado de torsión del tipo Wood-Anderson, a una distancia de 100 kilómetros del epicentro del mismo. Las magnitudes de terremotos registradas a otras distancias pueden determinarse conociendo la variación de la amplitud máxima con la distancia. Para terremotos superficiales del sur de California, del orden de 200 a 1500 kilómetros, sirvió la siguiente relación empírica entre la magnitud M y la máxima amplitud de las ondas en el sismograma.

$$M = \log A + 3 \log \Delta - 3.37 \quad (11.3.1)$$

en la que Δ es la distancia expresada en kilómetros. Para distancias mayores, la relación resulta más complicada.

Esta no es la única definición de magnitud y la variedad en el modo de medirse hace que los valores asignados a un mismo terremoto varíen a veces hasta en dos unidades.

Actualmente, no hay un acuerdo total sobre el modo de medir la magnitud, pero, generalmente, se admiten dos escalas de magnitud, una utilizando amplitudes de ondas internas y otra usando ondas superficiales.

La magnitud a partir de ondas internas, de acuerdo a Udías (1971), viene dada por:

$$m_b = \log(A) + \sigma(A) \quad (11.3.2)$$

A = Amplitud reducida al movimiento del suelo en micras de la onda P en la componente vertical del sismograma de período corto.

T = Período en segundos de la onda cuya amplitud se ha medido.

$\sigma(A)$ = Función de calibración que depende de la distancia.

La magnitud a partir de ondas superficiales es:

$$M_s = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1.66 \log \Delta \quad (11.3.3)$$

A = es la amplitud de la onda superficial de mayor amplitud en el componente vertical de sismógrafos de período largo.

T = es el período correspondiente.

Δ es la distancia epicentral en grados.

La relación entre M_s y m_b es:

$$m_b = 2.5 + 0.63 M_s \quad (11.3.4)$$

Uno de los usos más importantes de la magnitud es conseguir un valor aproximado de la energía liberada por los terremotos. Para deducir la relación entre la magnitud y la energía, hay que admitir que toda la energía del terremoto es irradiada en forma de ondas elásticas y que desde el foco se propaga en todas direcciones.

Periodicidad de los terremotos

Se cree que la mayor parte de los terremotos son de origen tectónico. Como estos temblores son debidos a la lenta acumulación de esfuerzos durante largos períodos de tiempo, se podría admitir que dichos fenómenos ocurren con más frecuencia cuando la tierra está sometida a esfuerzos externos como la presión del aire y las mareas. No se cree que estas fuerzas por sí solas sean de intensidad suficiente para producir terremotos, aunque sumadas a mayores esfuerzos que provienen de fuentes desconocidas, pueden muy bien actuar como fuerzas suplementarias e incrementar los esfuerzos en un pequeño incremento que el material es incapaz de soportar. De este modo, se podría establecer el momento en que estos temblores tienen lugar.

En ciertas partes del mundo, es de creencia general que los terremotos se presentan con mayor frecuencia con calor y tiempo bochornoso. Evidentemente, no hay base científica que pueda corroborar esta creencia. Las investigaciones científicas de los momentos en que tiene lugar los terremotos no permiten establecer correlación con las condiciones meteorológicas.

Frecuencia de los terremotos

Según Gutenberg y Richter, en 1949, anualmente tienen lugar unos 18 temblores aproximadamente de magnitud comprendida entre 7 y 7.9. En un año típico tendrían que producirse unos 120 temblores de magnitud comprendida entre 6 y 6.9. Los terremotos de menor magnitud pueden tener lugar fácilmente sin ser registrados en ningún observatorio sismográfico del mundo, por lo que resulta imposible establecer el número total de temblores que se producen en un año.

Gutenberg y Richter, en ese mismo año, demostraron que la frecuencia de terremotos de magnitud M_s (tolerancia $\pm .1$) puede representarse con cierta aproximación por la siguiente ecuación:

$$\log N = a + b(8 - M_s) \quad (11.3.5)$$

en la que N es la frecuencia, $a = 0.48$, $b = 0.90$ para temblores superficiales; $a = 1.2$, $b = 1.1$ para temblores de profundidad intermedia y $a = -1.9$, $b = 1.2$ para temblores de gran profundidad.

TABLA 11.3.1
ESCALA DE INTENSIDADES MERCALLI MODIFICADA EN 1931
(según Wood y Neumann, 1931)

Grado de la escala	Magnitud Eqivalente Richter	
		Efectos en personas, estructuras y otros.
		Unicamente perceptible por muy pocas personas en circunstancias favorables.
II	2.5	Lo perciben algunas personas en reposo. Algunos objetos delicados suspendidos se balancean ligeramente.
III		Perceptible en interiores. Algunos autos se balancean un poco. La duración puede ser estimada.
IV	3.5	Perceptible por lo general en interiores. Se despiertan las personas que se hallan en reposo. Se balancean los autos y se mueven las ventanas.
V		Perceptible en general. Caen algunos repellos. Se rompe la vajilla y los cristales de las ventanas. Se paran los péndulos de los relojes.
VI		Perceptible por todos. Empieza a cundir el terror. Daños en las chimeneas y en los repellos de las paredes. Se mueven los muebles y caen los objetos pequeños.
VII	5.5	Todos se lanzan a la calle. Perceptible en automóviles en marcha. Daños moderados en las estructuras.
VIII	6	Alarma general. Efectos destructivos y daños generales en estructuras débiles. Pocos daños en estructuras bien construidas. Se desploman los monumentos y las paredes. Se vuelcan los muebles. Se esparcen el fango y la arena. Variaciones en los niveles de agua de fuentes y pozos.
IX		Total destrucción de estructuras débiles. Daños considerables en edificios bien construidos. Daños en los fundamentos de los edificios. Rotura de las tuberías subterráneas de canalización. En el suelo, grietas; crujidos perceptibles. Pánico.
X		Destrucción general de estructuras de mampostería y armadas. Sólo quedan en pie los edificios mejor construídos. Fundamentos en estado ruinoso. Pánico.
XI	8	Pánico. Sólo quedan en pie contados edificios. Grietas estrechas. Fallas pronunciadas en el suelo. Canalizaciones subterráneas fuera de servicio.
XII	8.5	Pánico. Destrucción total. Ondas visibles en el suelo.

11.4 Tipos de ondas sísmicas

Cuando se estudiaron los primeros sismogramas se observó que estaban constituidos por una larga serie de ondas de amplitud gradualmente creciente hasta uno o varios máximos y que después disminuían con mayor rapidez. Estas ondas principales eran precedidas por un número de impulsos relativamente débiles, que fueron denominados *Vorläufer* o precursoras. Durante las ondas precursoras, los movimientos de onda eran más breves que durante la última parte del registro (del orden de un segundo en comparación con 10 segundos); por esta razón, estas ondas últimas se denominaron ondas largas.

Durante la llegada de las vibraciones procedentes de un terremoto intenso y distante, el suelo se mueve primeramente con gran intensidad hacia arriba y hacia abajo. Estas ondas se llaman ondas primarias, abreviadamente ondas P. A continuación de las ondas primarias llegan las precursoras, con un movimiento que generalmente es perpendicular a los movimientos P. Estas ondas secundarias (ondas S) son generalmente de mayor amplitud que las ondas P.

A diferencia de las ondas P y S, que se manifiestan por su iniciación relativamente abrupta, las ondas largas empiezan generalmente con amplitudes gradualmente crecientes y sin un comienzo claro y definido. Las ondas largas iniciales son las que suelen tener los períodos más largos. En algunos casos, es posible reconocer una serie de ondas largas que llegan en primer lugar con un período verdaderamente notable de más de 25 segundos. A esta vibración se le denomina G, mientras que las ondas largas normales se denominan ondas L. Al máximo más pronunciado de las ondas largas se le llama M y la parte del terremoto que le sigue a este máximo es lo que se denomina coda.

Haciendo una digresión sobre la propagación de las ondas elásticas, vemos que, a través de un sólido homogéneo, isotrópico y elástico pueden transmitirse dos tipos diferentes de ondas. Las ondas de dilatación (de compresión), —de las que las ondas sonoras forman un ejemplo típico—, comprenden movimientos de partículas que son paralelos a la dirección de propagación de la energía, mientras que las ondas transversales constituyen un movimiento perpendicular a esta dirección. En 1899, R.D. Oldham y E. Wieckert reconocieron, cada uno por aparte, que los impulsos P eran ondas de dilatación y los impulsos S, ondas transversales. Como estas ondas se producen dentro de la tierra, se denominan ondas internas.

Las ondas largas no son de tan fácil interpretación. Si se representa el tiempo de llegada de las mismas en función de la distancia a lo largo de la superficie a partir de su manantial, el gráfico resultante es una línea recta, demostrándose así que, a diferencia de las ondas internas, aquéllas se manifiestan sobre la superficie de la tierra. Por esta razón dichas ondas se denominan ondas superficiales.

Teóricamente pueden existir muchos tipos de ondas superficiales.

En 1885, Lord Rayleigh demostró que a través de una superficie libre limitada por un semiespacio elástico, homogéneo, isotrópico o infinito, pueden propagarse ondas en las que las partículas están sometidas a un movimiento elíptico de retroceso, con el semieje mayor de la elipse generalmente vertical, como puede verse en la Fig. 11.4.1, si seguimos la trayectoria indicada por las flechitas. Stoneley y otros, en 1924, demostraron que dichas ondas pueden existir incluso en el caso de que los límites del espacio no sean libres o cuando el medio no es homogéneo. Las ondas que se manifiestan a lo largo de una superficie limitada entre dos medios densos se denominan ondas Stoneley.

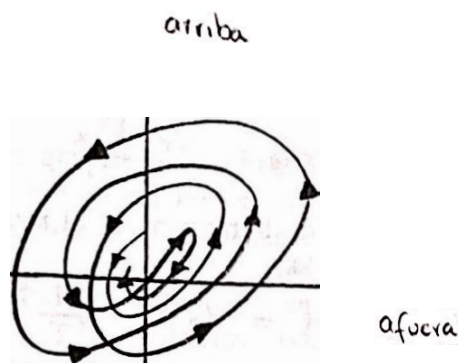


Fig. 11.4.1
Movimiento de partículas durante la llegada de una pseudo-onda Rayleigh provocada por una explosión de dinamita.

El movimiento que procede inmediatamente a las ondas M y en las codas de los terremotos, es similar al pronosticado con anterioridad, con la excepción de que la componente horizontal del movimiento acostumbra a ser generalmente mayor que la componente vertical y, en este caso, las elipses de movimiento suelen resultar inclinadas. A dichas ondas se les denomina ondas Rayleigh o seudo Rayleigh para distinguirlas de las previstas teóricamente por Rayleigh en las que la amplitud vertical es mayor que la horizontal. Cuando el movimiento de las partículas es de retroceso se emplea la letra R para designarlas y cuando es directo, se utiliza la letra H.

Un movimiento que precede a H, que en su mayor parte queda limitado a la componente longitudinal (en la dirección de propagación), constituye un ejemplo del tipo de impulso descrito por Leet, en 1939, y que dicho investigador denomina ondas acopladas. Este impulso se representa por la letra C.

En los registros de terremotos se presenta también otro tipo de onda que suele ser común. Se conoce por onda Love, de acuerdo con el investigador A.E.H. Love, que fue el que dedujo la teoría de su propagación en el año 1911. Se trata de una onda transversal de superficie, en la que el movimiento se realiza en dirección transversal (paralelamente a la superficie y perpendicularmente a la dirección de propagación).

11.5 Movimiento de la tierra debido a las ondas sísmicas

Un terremoto consta de tres grupos de impulsos: P, S, y L. Durante algunos terremotos estos tres grupos, pueden observarse aisladamente, en particular cuando el sismo es de importancia. No obstante en la mayor parte de los casos estas observaciones aisladas no resulta factible, pues el movimiento del suelo es muy complicado. En los casos en que se puede reconocer, P consta generalmente de una oscilación netamente vertical. El impulso de compresión no suele ser tan perjudicial para las estructuras como los impulsos del tipo S y L. Esto se debe posiblemente a dos factores: En primer lugar, al impulso de compresión acostumbra a poseer una amplitud menor que las ondas transversales o las largas. En segundo lugar los edificios se construyen para poder resistir la aceleración de la gravedad, que es una fuerza vertical. La fuerza ejercida por las ondas de compresión es del mismo sentido que el movimiento del suelo, que, en general, es también casi vertical y sólo en casos excepcionales es mayor que la de la gravedad.

Lo que antecede no es aplicable a los impulsos de otros tipos, en los que el movimiento es horizontal o posee una componente horizontal intensa. Las ondas transversales pueden reconocerse, en algunos casos, por una violenta oscilación tangencial del suelo. Con frecuencia un observador las diferencia de las ondas largas, en las que el movimiento principalmente se diferencia en que su período es mayor y la forma del movimiento más complicada.

La fuerza ejercida por una vibración de un terremoto depende no sólo de la amplitud del movimiento sino, asimismo, de su frecuencia (ω), puesto que

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.5.1)$$

en la que x es el desplazamiento de la masa m . Si el movimiento es armónico simple y de semi-amplitud x_0 máxima, tendremos:

$$x = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (11.5.2)$$

en la que T es el período del movimiento y

$$m \ddot{x} = - \frac{m\pi^2}{T^2} x \quad (11.5.3)$$

A igualdad de desplazamiento, cuanto menor es el período, tanto mayor es la fuerza. En general, S tiene un período menor que L , aunque este último, ejerce, en muchos casos, la mayor fuerza debido a su mayor amplitud de movimiento. Además, los daños son también un efecto de duración del temblor de tierra (posiblemente del número de sacudidas) y las ondas más largas son de mayor duración que las del tipo P y S .

La duración de un terremoto es en gran modo función de la distancia a la fuente del movimiento, aunque también depende del intervalo de tiempo en que la energía es radiada desde la fuente. Es función asimismo de la importancia del terremoto, puesto que durante un sistema de poca intensidad a gran distancia, la mayor parte del movimiento se pierde en el fondo microsísmico. Los diversos impulsos recorren diferentes trayectorias a velocidades distintas; las ondas internas, por la tierra, y las superficiales, por el exterior de la misma. Las ondas P se propagan con mayor rapidez, variando su velocidad desde menos de un kilómetro por segundo en un material de composición poco compacta, cerca de la superficie, hasta 14 km/seg en el centro de la tierra. Las ondas transversales se propagan en todas direcciones más lentamente que las de compresión, siendo las ondas Rayleigh las de propagación más lenta.

Las ondas largas son las últimas en llegar porque se propagan por la superficie, donde las velocidades son más reducidas. Se observa una difusión de ondas debido a la dispersión que se produce por ser la velocidad de propagación función de la longitud de onda. En general, para ondas sísmicas superficiales, cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la velocidad. Para ondas superficiales en la tierra de dispersión es fundamentalmente resultado de la mayor capacidad de penetración de las ondas de período largo, que son asimismo las de mayor longitud de onda. La energía de ondas de superficie se propaga en su mayor parte por una capa contigua a la superficie de espesor igual a una longitud de onda, cuya amplitud de movimiento disminuye rápidamente al aumentar la distancia a la superficie. En la tierra la velocidad de propagación aumenta con la profundidad. Por consiguiente, las ondas que penetran a mayor profundidad alcanzan los márgenes más elevados de velocidad y, en consecuencia, se propaga con mayor rapidez.

El temblor del suelo o el de un edificio durante un terremoto, no sólo depende de la naturaleza de las ondas sísmicas que se reciban, sino también de la naturaleza de la estructura, natural (geológica) o artificial (mano de obra) que las reciba. Existen tres formas distintas de transmitirse el movimiento de las ondas en un sistema cualquiera:

- a) El sistema puede negarse a aceptar las vibraciones que llegan. Este fenómeno se denomina reflexión.
- b) La energía puede pasar por el sistema, abandonándolo con la misma rapidez con que entró y sin haber sufrido ninguna variación por acción del medio. Este fenómeno se denomina transmisión perfecta.

- c) La energía puede acumularse en el sistema apareciendo en otras formas. Este fenómeno se denomina absorción.

En el caso de un terremoto que sacude una estructura, es muy importante además "la resonancia". Si la energía se transmite con mayor lentitud que como es suministrada, se acumulará con un aumento gradual en la amplitud de vibración. El resultado será que el temblor se hace lo suficientemente violento para provocar graves daños, desproporcionados, como la causa que los produce. Esto es común en ciertos tipos de suelos, como terraplenes de relleno, depósitos de aluvión poco compactos y lechos de ríos o lagos. En estos lugares el suelo vibra con mayor intensidad que en regiones contiguas de rocas más sólidas.

Los edificios poseen determinadas frecuencias naturales de vibración y si son sacudidos a estas mismas frecuencias, la amplitud puede llegar a valores mucho mayores que en el suelo subyacente. El límite de amplitud se establece por el grado en que la energía resulta transformable en otras formas. Si no es transformada de este modo o no es vuelta a emitir como energía de vibración, la amplitud aumenta hasta que el edificio es destruido.

Este almacenamiento de energía debido a la resonancia o a otros efectos, contribuye también en la dispersión. El almacenamiento da lugar a un retraso en la nueva radiación de la energía. Si el retraso depende de la frecuencia de la vibración, la velocidad de propagación depende de la frecuencia (y por tanto, de la longitud de onda), que es la dispersión.

El resultado final de la dispersión y de la propagación de los diferentes impulsos a través de distintas trayectorias, en un punto dado, es que el terremoto llega en forma de una serie de vibraciones que tardan algún tiempo en pasar. Si dos terremotos se presentan casi simultáneamente, puede que resulte imposible diferenciar uno del otro.

11.6 Otros tipos de sismos

a) Microsismos y microterremotos

Aunque etimológicamente estas dos palabras tienen el mismo significado, se emplean para designar dos fenómenos totalmente distintos.

Microterremotos son terremotos pequeños detectables solamente con aparatos muy sensibles situados a muy corta distancia de su origen. Los microterremotos pueden estar asociados a procesos de ajuste en las capas superiores de la corteza terrestre o a corrimientos muy pequeños de fallas.

el término microsismos se reserva para perturbaciones continuas registradas en sismógrafos y que son debidas a una variedad de causas. Gran parte de estas perturbaciones están asociadas con fenómenos meteorológicos sobre océanos, como, zonas de baja presión, ciclones tropicales, etc. Estos últimos producen microsismos que se propagan directamente desde el centro de la tormenta.

b) Maremotos

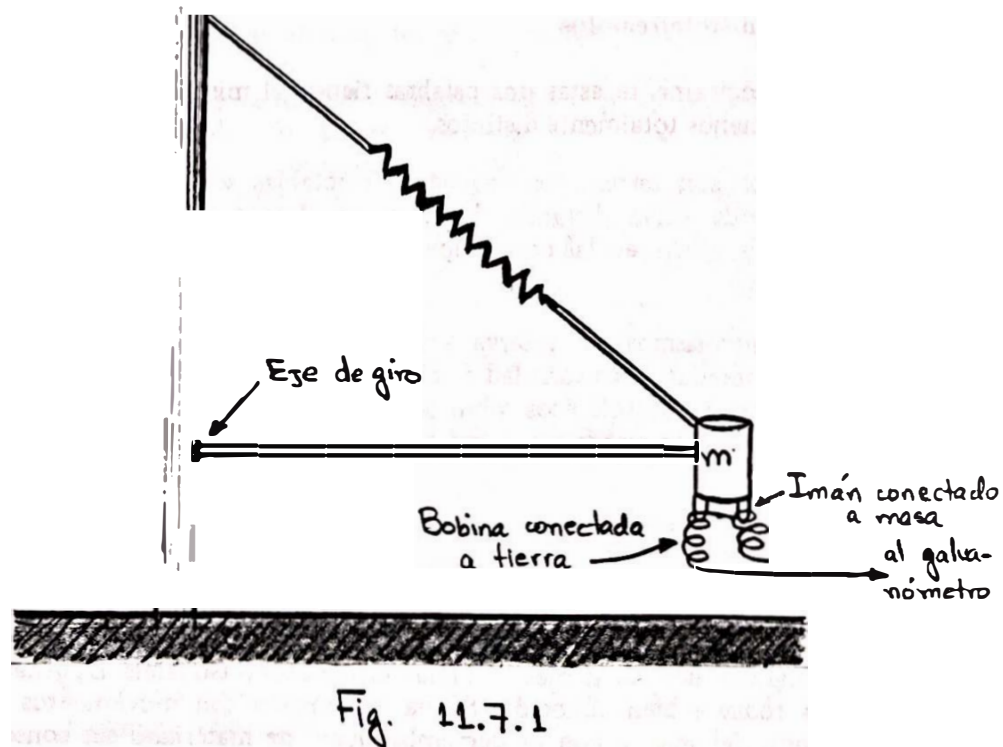
Terremotos grandes cuyo epicentro está en el mar o cerca de la costa pueden producir olas que se propagan a partir del epicentro y que pueden alcanzar alturas hasta de 20 metros sobre el nivel normal del mar. Estas olas se llaman maremotos o tsunamis. La generación de los maremotos no es todavía bien conocida. Se ha relacionado con movimientos relativos de bloques en el fondo del mar y con el derrumbamiento de materiales sin consolidar en las pendientes de las grandes simas oceánicas.

11.7 Registro de ondas sísmicas

Los aparatos utilizados para registrar las vibraciones de la Tierra producidos por un terremoto se llaman sismógrafos. Los más usados modernamente son del tipo electromagnético y consisten de un péndulo o sismómetro y un galvanómetro. En ellos el movimiento de la masa del péndulo produce una corriente eléctrica inducida en una bobina que luego es convertida de nuevo en el galvanómetro, en un desplazamiento que se registra gráfica o fotográficamente, ver Fig. 11.4.1 La respuesta del sistema completo depende del período del sismómetro y del galvanómetro.

El registro producido por un sismógrafo se llama sismograma y representa la respuesta de éste al desplazamiento del suelo producido por un terremoto. En el registro de un terremoto las cuatro fases que podemos llamar primarias son las ondas internas directas P y S, y las superficiales R y L. En general, la onda P se aprecia mejor en la componente vertical y la S en las horizontales. Debido a la diferencia de velocidades, la diferencia entre el tiempo de llegada de estas dos ondas es una indicación de la distancia a la que se ha producido el terremoto. De las ondas superficiales, las R llegan un poco más tarde que las Love y tienen desplazamientos en la componente vertical, mientras que las Love solo tienen desplazamientos en el plano horizontal.

Además de estas ondas, aparecen en los sismogramas una serie de ondas internas reflejadas o refractadas en el núcleo, o reflejadas en la superficie de la Tierra.



12. ONDAS Y RAYOS SISMICOS EN LA TIERRA ESFERICA Y ESTRATIFICADA

12.1 Rayos sísmicos

Consideraremos la Tierra como compuesta por un gran número de cáscaras esféricas concéntricas delgadas y homogéneas. Consideremos una porción $PP'P''$ de un rayo sísmico, donde P, P', P'' son puntos situados en las tres fronteras consecutivas entre estas cáscaras.

Sean V', V'' las velocidades del rayo a lo largo de PP' y $P'P''$, respectivamente y sean los ángulos i', j', j'' , tales como se muestran en la Fig. 12.1.1.

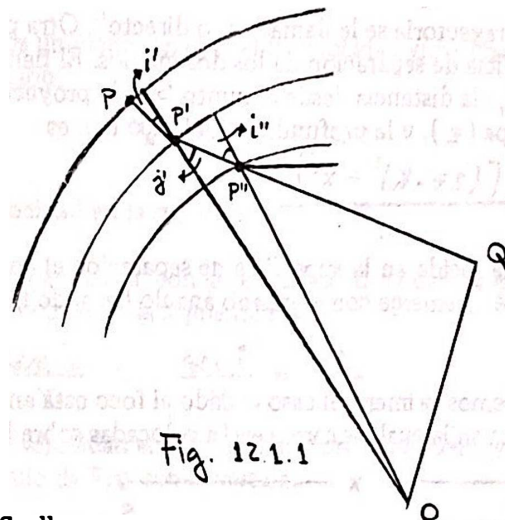


Fig. 12.1.1

Por la ley de Snell

$$\frac{\overline{OP'} \operatorname{sen} i'}{v'} = \frac{\overline{OP''} \operatorname{sen} j''}{v''}$$

Como puede verse en la figura $\overline{OP'} \operatorname{sen} j'$ es igual a $\overline{OP''} \operatorname{sen} i''$ pues $\overline{OP'} \operatorname{sen} j' = \overline{OQ} = \overline{OP''} \operatorname{sen} i''$.

Ahora tenemos que

$$P = \underline{r \operatorname{sen} i}$$

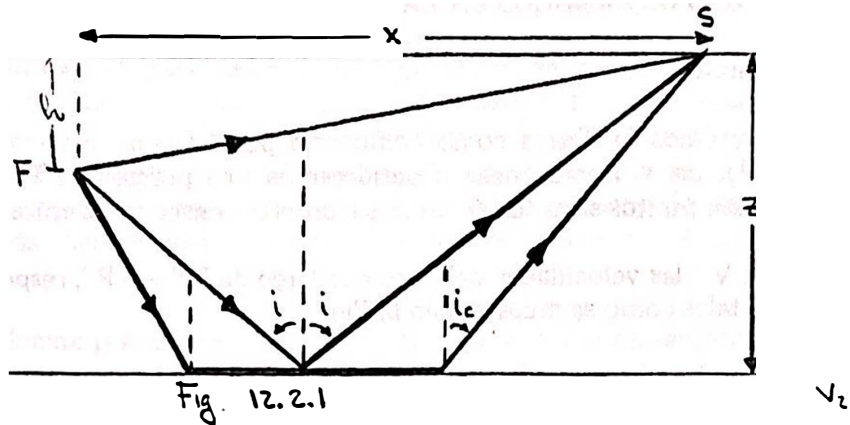
donde r es la distancia de O a cualquier punto P del modelo, v es la velocidad del rayo en P , i es el ángulo entre OP y la dirección del rayo en P , y P es constante a lo largo de todo el rayo. El valor de P llamado el parámetro del rayo, diferirá de miembro a miembro de una familia dada.

12.2 Propagación de rayos en medios estratificados de velocidad constante

Hasta ahora hemos enfocado el problema de la propagación de ondas en forma de soluciones de la ecuación diferencial del movimiento en un sólido elástico introduciendo las discontinuidades como condiciones de contorno. Si sólo estamos interesados en los tiempos de llegada de las ondas y no en las amplitudes, es conveniente el uso de la teoría de rayos. En esta teoría se sigue la propagación de los rayos de las ondas propagadas en medios elásticos por medio del recorrido geométrico.

Consideremos un foco sísmico en el interior de una capa de velocidad v_1 superpuesta sobre un medio semi-infinito de velocidad v_2 donde $v_1 < v_2$. Si S es un punto de observación, el tiempo de llegada de una onda a S desde F viene dado por

$$t_{11} = \frac{(x^2 + h^2)^{1/2}}{v_1} \quad (12.2.1)$$

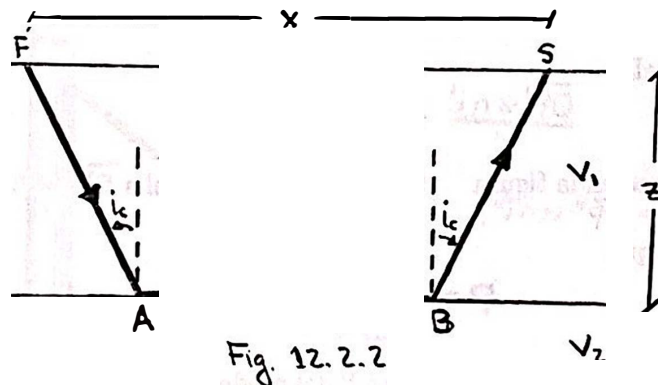


Al rayo que sigue esta trayectoria se le llama "rayo directo". Otra posibilidad es la de un rayo que se refleja en la superficie de separación de los dos medios. El tiempo de llegada para el rayo reflejado en función de x , -la distancia desde el punto S a la proyección del foco sobre la superficie-, el espesor de la capa (z), y la profundidad del foco (h), es

$$t_r = \frac{[(2z-h)^2 + x^2]^{1/2}}{v_1} \tag{12.2.2}$$

Un tercer rayo es el que incide en la superficie de separación el ángulo crítico (i_c), se refracta a lo largo de la interfase y emerge con el mismo ángulo llegando finalmente al punto de observación.

Para este rayo consideremos primero el caso cuando el foco está en la superficie. Este es el caso de la prospección sísmica en la cual las cargas están colocadas sobre la superficie.



El tiempo de recorrido viene dado por

$$t_{1,2} = \frac{FA}{v_1} + \frac{AB}{v_2} + \frac{BS}{v_1} \tag{12.2.3}$$

Sustituyendo el valor de estos segmentos en función del ángulo crítico

$$t_{1,2} = \frac{z}{v_1 \cos i_c} + \frac{x - 2z \tan i_c}{v_2} + \frac{z}{v_1 \cos i_c}$$

$$t_{1,2} = \frac{2z}{v_1 \cos i_c} + \frac{x - 2z \tan i_c}{v_2}$$

o bien

$$t_{1,2} = \frac{x}{v_2} + \frac{2z \cos i_c}{v_1} \tag{12.2.4}$$

y en función de las velocidades

$$t_{12} = \frac{x}{v_2} + \frac{2z \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} \quad (12.2.5)$$

Para el caso en que el foco está a profundidad h se puede fácilmente deducir que el tiempo de llegada del rayo refractado es

$$t_{12} = \frac{x}{v_2} + \frac{(2z-h) \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} \quad (12.2.6)$$

12.3 Propagación de rayos en un medio de velocidad variable

Consideremos un medio en el cual la velocidad varía linealmente con la profundidad de acuerdo con la ecuación:

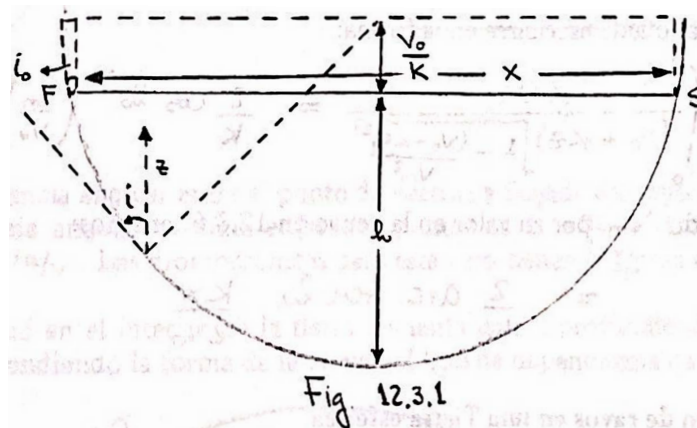
$$v = v_0 + kz \quad (12.3.1)$$

donde v_0 es la velocidad en la superficie.

Si la velocidad aumenta con la profundidad podemos escribir para cada punto del rayo – utilizando la Ley de Snell – la siguiente relación:

$$\frac{\sin i_0}{v_0} = \frac{\sin i}{v} = \quad (12.3.2)$$

en la cual v_m es la velocidad en el punto más profundo del rayo, y por lo tanto en el punto en el que forma un ángulo de $\pi/2$ con la vertical.



Para cada punto de la trayectoria del rayo podemos escribir el ángulo de incidencia correspondiente en la forma:

$$\sin i = \frac{v}{v_m} = \frac{\frac{v_0}{k} + z}{\frac{v_0}{k} + h} \quad (12.3.3)$$

Es fácil demostrar que la ecuación 12.3.3 se satisface si la trayectoria del rayo es una circunferencia cuyo centro está a una altura v_0/k por encima de la superficie. Si consideramos el punto de partida del rayo como origen de coordenadas y z positivo hacia abajo, el centro está en $(x/2, -v_0/k)$. El radio es:

$$r = \frac{v_0}{k} + h = \left[\left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (12.3.4)$$

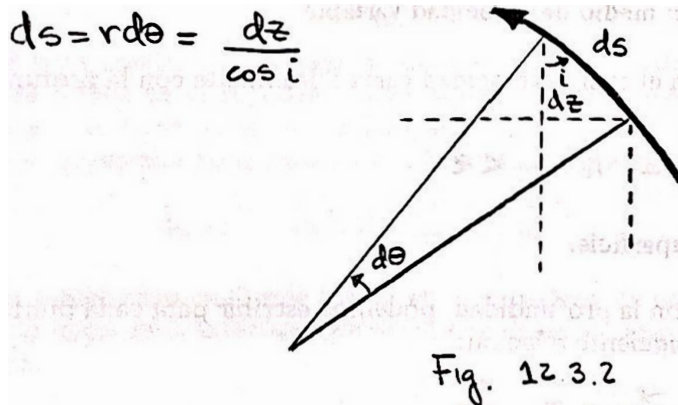
La penetración máxima del rayo viene dada en función de x y v_0 por:

$$h = \left[\left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{K} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (12.3.5)$$

y la velocidad en el punto más profundo v_m

$$v_m = \left[\frac{(Kx)^2}{4} + v_0^2 \right]^{1/2} \quad (12.3.6)$$

Para calcular el tiempo que tarda la onda en recorrer la trayectoria circular, consideremos un elemento de arco ds .



El tiempo empleado en el recorrido del rayo completo está dado por:

$$T = \int_0^h \frac{dz}{v \cos i}$$

Este integral puede escribirse en la forma:

$$T = \frac{2}{K} \int_0^h \frac{K dz}{(v_0 + Kz) \sqrt{1 - \frac{(v_0 + Kz)^2}{v_m^2}}} = \frac{2}{K} \cos^{-1} \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \quad (12.3.7)$$

Sustituyendo v_m por su valor en la ecuación 12.3.6 tenemos:

$$T = \frac{2}{K} \arcsen \frac{Kx}{2v_0} \quad (12.3.8)$$

12.4 Propagación de rayos en una Tierra esférica

En esta sección utilizaremos los siguientes parámetros:

- Δ = distancia angular de P a Q
- T = tiempo que tarda la onda en llegar de P a Q
- S = recorrido del rayo en el interior de la esfera
- $\frac{dT}{d\Delta} = P$ = pendiente de la curva dromocrónica
- $\frac{d\Delta}{dP}$ = variación de la distancia angular con el cambio del parámetro del rayo.

Las curvas más utilizadas que representan las variaciones de estos parámetros, son las siguientes:

- (T, Δ) Curva dromocrónica (tiempos de recorrido y distancias angulares)
- (v, r) distribución de velocidades con el radio de la Tierra
- (ξ, r) variación del parámetro ξ con el radio
- (p, Δ) variación del parámetro p con la distancia angular Δ
- ($\frac{d\Delta}{dp}, p$) variación de la pendiente de la curva anterior con p

El caso más sencillo de propagación de rayos en el interior de una esfera elástica es cuando ésta tiene velocidad constante. Los rayos son en éste rectilíneos y podemos escribir el tiempo de recorrido así:

$$T = \frac{PQ}{v} = \frac{2R}{v} \sin \frac{\Delta}{2} \quad (12.4.1)$$

a partir de la figura 12.4.1

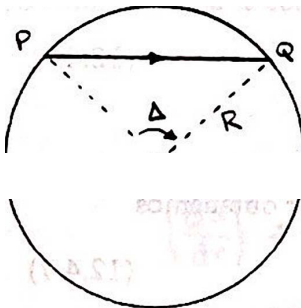


Fig. 12.4.1

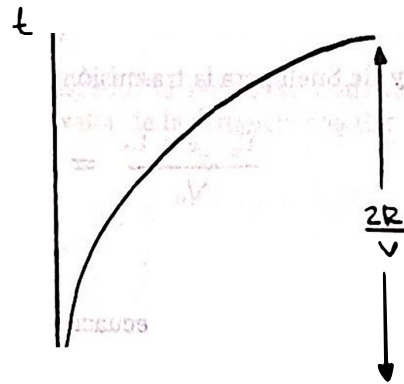


Fig. 12.4.2

donde Δ es la distancia angular entre el punto de partida y llegada del rayo y R es el radio de la esfera. La distancia angular máxima entre dos puntos es $\Delta = \pi$ y el rayo que llega a esa distancia tarda $T = 2R/v$. Las dromocrónicas para este caso tienen la forma de la fig. 12.4.2.

Si la velocidad en el interior de la tierra aumenta con la profundidad, la trayectoria del rayo será curva, dependiendo la forma de la curva, del tipo de dependencia de la velocidad con el radio.

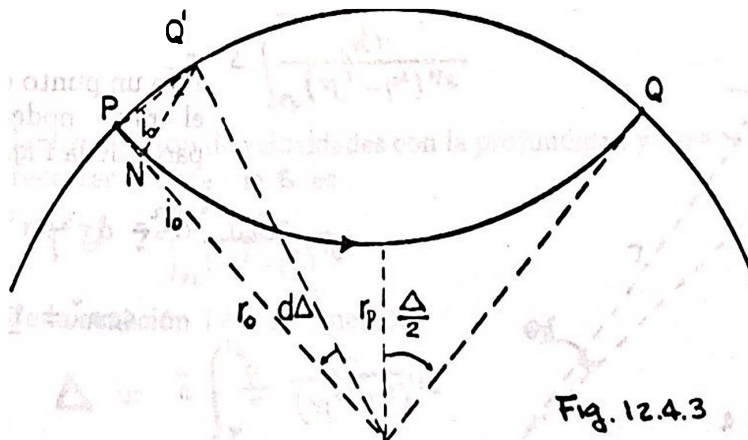


Fig. 12.4.3

Si el rayo se propaga de P a Q, para un punto Q' cercano a P, si la distancia angular entre estos dos puntos es $d\Delta$ y el radio r_0 podemos escribir

$$\overline{PQ'} = r_0 d\Delta \quad (12.4.2)$$

Consideremos el punto N sobre la trayectoria del rayo para el que

$$\text{sen } i_0 = \frac{PN}{PQ'} \quad (12.4.3)$$

Si la onda tarda dT en llegar de P a N la distancia medida a lo largo del rayo entre estos dos puntos viene dada por

$$\overline{PN} = v_0 dT \quad (12.4.4)$$

donde v_0 es la velocidad en la superficie y como N está tan cercano a P suponemos que en el trayecto PN la velocidad es constante e igual a v_0 .

Utilizando las ecuaciones 12.4.2, 12.4.3 y 12.4.4 escribimos

$$\text{sen } i_0 = \frac{v_0 dT}{r_0 d\Delta} \quad (12.4.5)$$

La ley de Snell para la transmisión de rayos en esferas concéntricas puede expresarse en la forma

$$\frac{r_0 \text{sen } i_0}{v_0} = \frac{r \text{sen } i}{v} = p \quad (12.4.6)$$

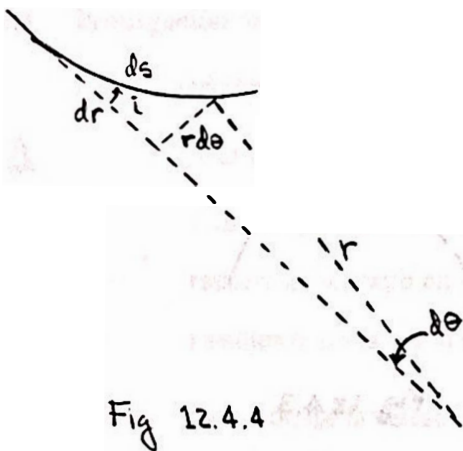
donde p es el parámetro del rayo.

Sustituyendo $\text{sen } i_0$ de la ecuación 12.4.5 en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{r_0 \text{sen } i_0}{v_0} = \frac{dT}{d\Delta} = p \quad (12.4.7)$$

Esta ecuación relaciona el parámetro del rayo p y la pendiente de la curva dromocrónica, $dT/d\Delta$

Vamos a deducir ahora expresiones para Δ , distancia angular entre dos puntos sobre la superficie de la esfera, correspondientes a los de partida y llegada de un rayo; S , distancia medida a lo largo de la trayectoria del rayo y T , tiempo de recorrido.



Para un punto cualquiera sobre el rayo podemos escribir a partir de la Fig. 12.4.4

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (12.4.8)$$

$$\text{sen } i = \frac{r d\theta}{ds} \quad (12.4.9)$$

Sustituyendo la ecuación 12.4.9 en la Ec. 12.4.7 tenemos

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = p \quad (12.4.10)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación 12.4.8

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 - r^2 \quad (12.4.11)$$

y sustituyendo en esta ecuación el valor de $ds/d\theta$ a partir de la Ec. 12.4.10 y haciendo $r/v = \eta$, obtenemos

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{r^2}{pv}\right)^2 = \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{r}{v}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{r}{v}\right)^2 - r^2 = \frac{r^2}{p^2} \left[\left(\frac{r}{v}\right)^2 - p^2\right]$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{p} \sqrt{\eta^2 - p^2} \quad (12.4.12)$$

Suponiendo que el arco es simétrico con respecto al punto de penetración máxima, podemos integrar la ecuación 12.4.12 para obtener el valor de la distancia angular

$$\int_{r_p}^{r_0} \frac{p}{r} \frac{dr}{\sqrt{\eta^2 - p^2}} = \frac{\Delta}{2} \quad (12.4.13)$$

Expresando la Ec. 12.4.8 de la sig. manera

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dr}\right)^2$$

y sustituyendo aquí 12.4.10 podemos obtener

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 - 1 = r^2 \left(\frac{pv}{r^2} \frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{p^2 v^2}{r^2} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\eta}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \Rightarrow ds = \frac{\eta dr}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \quad (12.4.14)$$

Integrando obtenemos el valor de la distancia a lo largo de la trayectoria del rayo

$$s = 2 \int_{r_p}^{r_0} \frac{\eta dr}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \quad (12.4.15)$$

Si v es la distribución de velocidades con la profundidad y $s = vT$, el tiempo T que tarda el rayo en recorrer la distancia s es

$$T = 2 \int_{r_p}^{r_0} \frac{\eta dr}{(v(\eta^2 - p^2))^{1/2}} \quad (12.4.16)$$

A partir de la ecuación 12.4.13 tenemos

$$\Delta = 2 \int_r^{r_0} \frac{p}{r} \frac{dr}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \quad (12.4.17)$$

Expresando la Δ en función de $\eta = r/v$ tenemos

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{v} - \frac{r}{v^2} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{r}{v} \frac{dv}{dr} \right)$$

Sea $\xi = \frac{r}{v} \frac{dv}{dr}$ y $\xi = z/(1-s)$
 $d\eta = \frac{1}{v} (1-s) dr \Rightarrow dr = v(1-s)^{-1} d\eta$

haciendo las sustituciones adecuadas tenemos

$$\Delta = 2p \int_{\eta_p}^{\eta_0} \eta^{-1} (1-s)^{-1} (\eta^2 - p^2)^{-1/2} d\eta$$

y tomando $\xi = z(1-s)^{-1}$

$$\Delta = \int_{\eta_p}^{\eta_0} p \eta^{-1} \xi (\eta^2 - p^2)^{-1/2} d\eta \quad (12.4.18)$$

Integrando por partes la ecuación 12.4.18 tenemos

$$u = \xi ; \quad dv = \frac{p}{\eta} \frac{d\eta}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} ; \quad v = -\arccos(p/\eta) ; \quad du = d\xi$$

$$\Delta = \int_{\eta_p}^{\eta_0} p \eta^{-1} \xi (\eta^2 - p^2)^{-1/2} d\eta = \left[\xi \arccos(p/\eta) \right]_{\eta_p}^{\eta_0} - \int_{\xi_p}^{\xi_0} \arccos(p/\eta) d\xi$$

$$\Delta = \xi_0 \arccos(p/\eta_0) - \xi_p \arccos(p/\eta_p) - \int_{\xi_p}^{\xi_0} \arccos(p/\eta) d\xi$$

Como $\eta_p = p = \frac{r_p}{v_p} \Rightarrow \arccos(p/\eta_p) = \arccos 1 = 0$ y

$$\Delta = \xi_0 \arccos(p/\eta_0) - \int_{\xi_p}^{\xi_0} \arccos(p/\eta) d\xi \quad (12.4.19)$$

Derivando Δ con respecto al parámetro p tenemos

$$\frac{d\Delta}{dp} = \xi_0 \eta_0^{-1} (1 - p/\eta_0)^{-1/2} - \int_{\xi_p}^{\xi_0} \eta^{-1} (1 - p/\eta)^{-1/2} d\xi$$

$$\frac{d\Delta}{dp} = \xi_0 (\eta_0^2 - p^2)^{-1/2} - \int_{\xi_p}^{\xi_0} (\eta^2 - p^2)^{-1/2} d\xi \quad (12.4.20)$$

o bien

$$\frac{d\Delta}{dp} = \frac{z}{(1-s_0)(\eta_0^2 - p^2)^{1/2}} + 2 \int_{r_p}^{r_0} \frac{1}{(1-s)^2 (\eta^2 - p^2)^{1/2}} \frac{ds}{dr} dr \quad (12.4.21)$$

12.5 Distribución normal de velocidades

Cuando la distribución de velocidades con la profundidad cumple las siguientes condiciones:

A) la velocidad v aumenta lentamente con la profundidad

B) dv/dr cambia lentamente con r , recibe el nombre de distribución normal.

En este caso ξ es negativo, y su valor absoluto relativamente pequeño $0 < |\xi| < 0.25$ y $d\xi/dr$ también pequeño.

Con estas condiciones el segundo miembro de 12.4.21 es muy pequeño respecto al primero por lo que la expresión se reduce a:

$$\frac{d\Delta}{dp} = \frac{1}{(1-s_0)(\eta_0^2 - p^2)^{1/2}}$$

Integrando llegamos a

$$\Delta = \int_{\eta_0}^p \frac{z dp}{(1-s_0)(\eta_0^2 - p^2)^{1/2}} = \frac{z}{1-s_0} \arccos\left(\frac{p}{\eta_0}\right) \quad (12.5.1)$$

donde las variables con subíndices cero representan valores en la superficie. A partir de la ecuación 12.5.1 podemos deducir que

$$p = \eta_0 \cos\left[\frac{1}{2}(1-s_0)\Delta\right] \quad (12.5.2)$$

Como $p = dT/d\Delta$ podemos deducir de 12.5.2 que

$$T = \int_0^{\Delta} \eta_0 \cos\left[\frac{1}{2}(1-s_0)\Delta\right] d\Delta = \frac{2\eta_0}{1-s_0} \sin\left[\frac{1}{2}(1-s_0)\Delta\right] \quad (12.5.3)$$

Para $s = s_0$ constante para todos los valores de r , y utilizando la definición de $s = r \frac{dv}{v dr}$ podemos deducir que la velocidad en función de r tiene la forma

$$v = Ar^{-s_0} \quad (12.5.4)$$

Para esta distribución de velocidades obtenemos las siguientes curvas para (v, r) , (s, r) , (p, Δ) y (T, Δ)

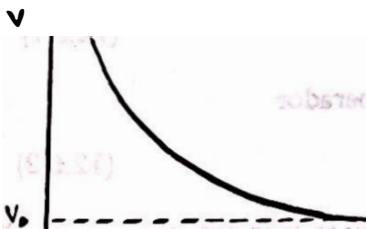


Fig. 12.5.1

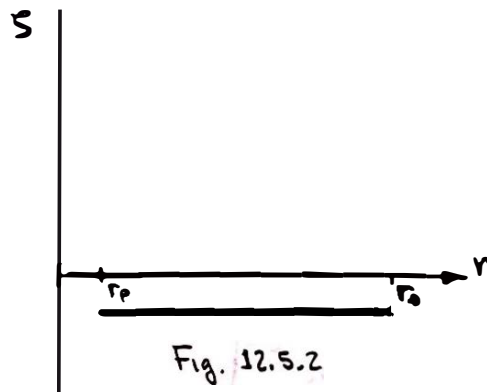


Fig. 12.5.2

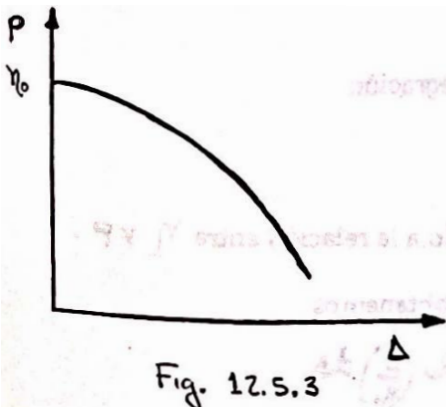


Fig. 12.5.3

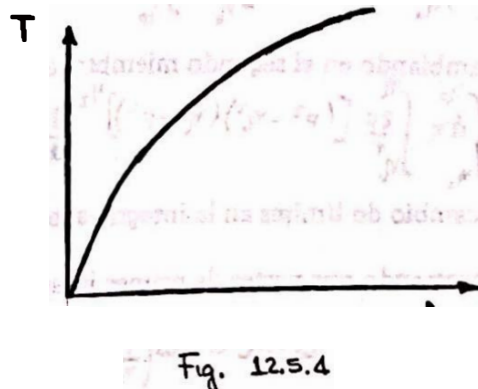


Fig. 12.5.4

12.6 Determinación de las velocidades de las ondas P y S en el interior de la Tierra a partir de la relación (T, Δ)

La Tierra está formada por tres regiones concéntricas, la más exterior, o corteza, de un espesor del orden de los 30 kms; la zona intermedia hasta los 2,900 kms. de profundidad, llamada manto; y el núcleo. En el manto la velocidad aumenta gradualmente con la profundidad de manera que podemos aplicar las ideas anteriores para deducir la distribución de velocidades con la profundidad en esta región de la Tierra, si conocemos las curvas dromocrónicas para las ondas P y S.

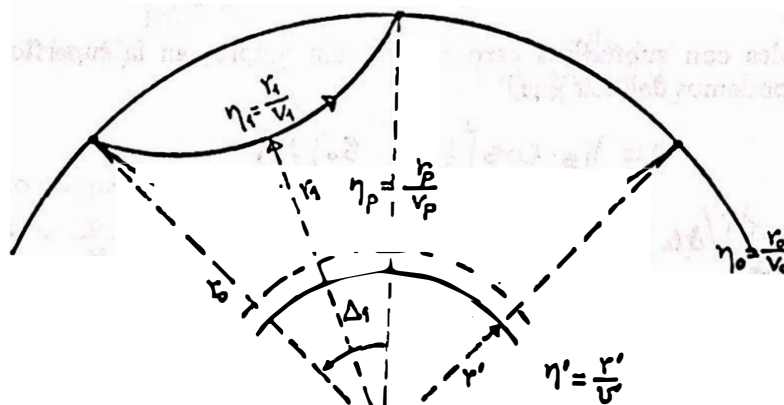


Fig. 12.6.1

Para el manto el valor del radio terrestre está comprendido entre los valores $r_0 > r > r'$. r_0 es el radio terrestre eliminando la corteza y r' el radio del núcleo. A medida que r disminuye en este intervalo la velocidad aumenta de manera que η disminuye monótonamente. Como para $r=r'$, $\eta = \eta'$, si $p > \eta'$ el rayo está en toda su trayectoria por encima del nivel correspondiente a $r=r'$. La ecuación 12.4.17 expresada en función de η es:

$$\Delta = 2 \int_{\eta_p}^{\eta_0} r \frac{p}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \frac{dr}{d\eta} d\eta \tag{12.6.1}$$

Aplicando a los dos miembros de la expresión 12.6.1 el operador

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{dp}{(p^2 - \eta_1^2)^{1/2}} \tag{12.6.2}$$

en el cual $\eta_0 = \frac{r_i}{v_i}$; r_i es la distancia del centro de la tierra al punto más profundo de un rayo determinado y v_i es la velocidad a ese nivel, siempre que $r_0 > r_i > r'$ obtenemos

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\Delta dp}{(p^2 - \eta_1^2)^{1/2}} = \int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_{\eta_p}^{\eta_0} \frac{2p \frac{dr}{d\eta} d\eta}{r (\eta^2 - p^2)^{1/2} (p^2 - \eta_1^2)^{1/2}} dp \tag{12.6.3}$$

Cambiando en el segundo miembro el orden de integración

$$= \int_{\eta_1}^{\eta_0} d\eta \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{2p}{r} [(p^2 - \eta_1^2)(\eta^2 - p^2)]^{1/2} \frac{dr}{d\eta} dp$$

donde el cambio de límites en la integral sobre p es debido a la relación entre η y p .

Integrando por partes, la primer integral de 12.6.3 obtenemos

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\Delta dp}{(p^2 - \eta_1^2)^{1/2}} = \Delta \arccos \frac{p}{\eta_1} \Big|_{\eta_1}^{\eta_0} - \int_{\Delta_1}^{\Delta_0} \arccos \frac{p}{\eta_1} d\Delta$$

Sustituyendo los límites, la primera parte es cero, la segunda integral de la ecuación 12.6.3 resulta ser:

$$2 \int_{\eta_1}^{\eta_0} d\eta \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{P}{r} [(p^2 - \eta_1^2)(\eta_2 - p^2)]^{-1/2} dr dp = \pi \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)$$

La relación final es

$$\int_0^{\Delta} \arccos \ln\left(\frac{p}{\eta_1}\right) d\Delta = \pi \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) \quad (12.6.4)$$

Esta es la fórmula de Herglotz-Wiechert, que puede utilizarse para deducir la distribución de velocidades $v(r)$ para los valores de $r_0 > r > r_1$ conociendo la curva dromocrónica.

En el primer miembro P viene dado por la pendiente de la curva dromocrónica, o sea, $p = dT/d\Delta$ para cada valor de Δ . Para un valor fijo de Δ , η_1 , es la pendiente $dT/d\Delta$ en el punto $\Delta = \Delta_1$. La integral puede valorarse numéricamente por cualquiera de los métodos conocidos, ya que para los valores de Δ en el intervalo $0 < \Delta < \Delta_1$, p puede derivarse de las curvas (T, Δ) . Hecho esto, la ecuación 12.6.4 dará el valor de r_1 correspondiente al valor de Δ_1 . Como η_1 es también conocido, podemos obtener fácilmente v_1 ,

$$v_1 = r_1 / \eta_1$$

De esta manera obtenemos un punto en la curva $v(r)$; variando ahora el valor de Δ_1 obtenemos los valores restantes.

Conocidas experimentalmente las curvas de tiempo de recorrido de las ondas P y S en el interior de la tierra, en concreto en la región correspondiente al manto, podemos deducir de la forma indicada con anterioridad la distribución de las velocidades de estas dos ondas con la profundidad.



V. CONCLUSIONES

1. La Tierra puede representarse-para efectos de la propagación de ondas en el manto y la corteza terrestres- como un medio semi-infinito y una capa, teniendo ambos medios, distintas constantes elásticas.

Los fenómenos que ocurren en la superficie de separación —al incidir una onda— son los que proporcionan las condiciones de frontera necesarias para la resolución de las ecuaciones de movimiento de las ondas en cada uno de estos medios.

2. La representación matemática más sencilla del mecanismo de un terremoto es por medio de fuerzas actuando en un punto. Este mecanismo puntual se puede considerar como una buena aproximación para representar los procesos dinámicos del foco cuando se examinan ondas elásticas a distancias grandes y de longitudes de onda más largas que las dimensiones reales del foco.

Los mecanismos puntuales más usados son los llamados modelo I o un par de fuerzas y modelo II o dos pares de fuerzas en ángulo recto y sin momento o torque resultante, modelo equivalente a fuerzas de compresión y tensión en ángulo recto.

3. La Teoría de las placas o platos tectónicos es la que ha alcanzado más aceptación con respecto al origen de los terremotos debido a que la mayoría de los terremotos se originan en la vecindad de fronteras de placas. El mecanismo de los terremotos está regido por el tipo de frontera existente entre dos placas:

- a) fractura por esfuerzos de tensión en fronteras de divergencia.
- b) fractura por esfuerzos de compresión en fronteras de convergencia.
- c) deslizamiento lateral a lo largo de fallas de transformación.

4. Los grandes terremotos desprenden en pocos minutos grandes cantidades de energía elástica de deformación que ha sido almacenada lentamente en las rocas de la zona de fallas por decenas o cientos de años. La fuente de esta deformación son los movimientos de las placas tectónicas.

5. Existen tres tipos principales de ondas sísmicas —ondas P, ondas S y ondas superficiales— las cuales pueden ser recogidas o grabadas en sismógrafos, y a partir de estos gráficos, pueden determinarse las magnitudes de los sismos.

1 1

VI. BIBLIOGRAFIA

Textos de Matemáticas:

- BUCK, Creighton. Cálculo Avanzado. Ediciones del Castillo, Madrid; 1968.
- BUTKOV, Eugene. Mathematical Physics. Addison-Wesley, New York; 1973.
- BYRON, Frederick.
FULLER, Robert. Mathematics of Classical and Quantum Physics. Addison Wesley, Massachusetts; 1969.
- CHURCHILL, Ruel. Series de Fourier y Problemas de Contorno. McGraw-Hill, New York, 1966
- JEFFREYS, Harold. Cartesian tensors. Cambridge; 1952.
- MORSE, Philip
FESHBACH, Herman
SOKOLNIKOFF, I.S. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York, 1953.
- ANÁLISIS TENSORIAL. Limusa, México; 1976.

Textos de Física:

- ALONSO, Marcelo
FINN, Edward. Física. Vol. II (Ondas y Campos). Fondo Educativo Interamericano, México; 1970.
- RESNICK, Robert
HALLIDAY, David. Física. Vol. I. Cecsá, México; 1977
- TOLSTOY, Ivan. Wave Propagation. Mc. Graw-Hill, New York, 1973.

Textos de Mecánica Teórica:

- BRADBURY, T.C. Theoretical Mechanics. John Wiley, New York; 1968.
- GOLDSTEIN, Herbert. Classical Mechanics. Addison Wesley, Massachusetts; 1950.
- HERTIG, Ricardo. Mecánica Teórica. El Ateneo, Buenos Aires; 1970.
- LANDAU, L.D.
LIFSHITZ, E.M. Mecánica. Reverté, México; 1965.
- SYMON, Keith. Mechanics. Addison Wesley, Massachusetts; 1971.

Textos de Elasticidad

- KITTEL, Charles. Física del Estado Sólido. Reverté, México; 1975.
- LANDAU, L.D.
LIFSHITZ, E.M. Teoría de la Elasticidad. Reverté, México; 1969.

- LOVE, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover, New York; 1944. ·
- MASE, George Continuum Mechanics. McGraw Hill, New York; 1970.
- NADEAU, Gérard Introduction to the Theory of Elasticity. Holt, Rinehart and Winston, New York; 1964.
- SOKOLNIKOFF, I.S. Mathematical Theory of Elasticity. McGraw Hill, New York; 1956.

Textos de Sismología y de la Tierra

- BULLEN, K.E. Introduction to the Theory of Seismology. Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
- HOWELL, Benjamín Introducción a la Geofísica. Ediciones Omega, Barcelona; 1962.
- LOZANO, Luis Introducción a la Geofísica. Paraninfo, Madrid; 1972.
- PRESS, Frank
SIEVER, Raymond Earth. W. H. Freeman and Company, San Francisco; 1974.
- STACEY, Frank Physics of the Earth. John Wiley, New York; 1969.
- WHITE, J.E. Seismic waves. McGraw Hill, New York; 1965.