

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES EN
LA TECLA DE MARIMBA.

ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES EN
LA TECLA DE MARIMBA

BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Guatemala

1963

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

I.	INTRODUCCIÓN	1
II.	EL VALLE DE GUATEMALA Y LA INVESTIGACIÓN EN FÍSICA	2
III.	MÉTODOS DE ANÁLISIS	3
A.	Experimentación	4
B.	Simulación por computadora	11
C.	Mediciones directas	12
D.	Mediciones indirectas	13
IV.	ANÁLISIS DE VIBRACIONES	14
A.	ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES EN LA TECLA DE MARIMBA	15
B.	Experimentación	16
V.	CONCLUSIÓN DEL ESTUDIO	17
VI.	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	18
VII.	RESUMEN	19
VIII.	AGRADECIMIENTOS	20
IX.	EFRAIN FIGUEROA LEMUS	21
A.	Programa de computadora para el análisis de vibraciones	22
B.	Programa de computadora para el análisis de vibraciones	23

Trabajo de investigación presentado para optar al Grado Académico de Licenciado en Física

Guatemala

1985

CONTENIDO

	<u>Página</u>
I. INTRODUCCION	1
II. EL CALCULO DE VARIACIONES Y LA FORMULACION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES	6
III. METODOS DE SOLUCION	8
A. Rayleigh-Ritz	8
B. Solución de la ecuación diferencial del movimiento	11
C. Diferencias finitas	14
D. Métodos numéricos	19
IV. HIPOTESIS Y PLANTEAMIENTO	23
A. Geometría analizada	23
B. Condiciones de frontera	26
V. RESULTADOS	26
VI. COMPARACION CON EL EXPERIMENTO	84
VII. DISCUSION Y CONCLUSIONES	91
VIII. BIBLIOGRAFIA	94
APENDICES	
A. Programa de computadora para el método de Rayleigh-Ritz	97
B. Programa de computadora para el análisis de diferencias finitas	102

I. INTRODUCCION

Esta es una primera aproximación al estudio de las vibraciones de la tecla de marimba. Con anterioridad se han estudiado otros instrumentos musicales, con lineamientos parecidos a los seguidos aquí. Por ejemplo, una investigación sobre la respuesta de la caja del violín a excitaciones con un transductor electromagnético ha sido realizada por Taylor (1979: 515-534). El procedimiento consiste en analizar hologramas de las tapaderas excitadas. Fletcher (1978: 1570-1576) trabajó las vibraciones en la membrana del tambor bajo de una batería. En este caso, se propone un modelo para la membrana en vibración, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento, y con las condiciones de frontera apropiadas, se resuelve para los modos normales de vibración. Fletcher también compara el tono fundamental y algunos sobretonos calculados teóricamente con mediciones en el laboratorio. En estos trabajos se enfatiza la distribución de las frecuencias de los diferentes modos para determinada geometría del problema.

Esta investigación trata principalmente con un modelo de barras con sección transversal no uniforme. Se obtiene la ecuación diferencial del movimiento con los métodos clásicos del cálculo de variaciones y haciendo uso de consideraciones de energía. El análisis seguido es el mismo de Rayleigh (1945: 255-305), pero generalizado a barras con sección transversal no uniforme. Se obtienen así mismo, las condiciones naturales de frontera. En cuanto a hipótesis sobre la barra misma, aquí se trabaja con la teoría de

Euler para barras delgadas. Una vez obtenida la ecuación diferencial del movimiento, se resuelve ésta con métodos numéricos. Uno de estos métodos numéricos proviene del uso de sucesiones minimizantes, mientras que el otro es de diferencias finitas en la ecuación diferencial ordinaria.

Los resultados buscados aquí son principalmente relaciones entre las frecuencias de diferentes nodos de vibración y la geometría de la tecla. Estos resultados son tabulados y graficados. El objetivo final es construir un teclado basado en estos resultados.

Ya que sólo se cuenta con equipo sencillo para mediciones en acústica, la parte experimental se limita a mediciones del tono fundamental de pedales de teclas construidos con especificaciones a partir de los resultados obtenidos en la parte teórica.

Reseña histórica: Las vibraciones pequeñas de una barra cilíndrica con un extremo empotrado en la pared fueron estudiadas por Daniel Bernoulli entre 1734 y 1735. Encontró que la ecuación del movimiento es:

$$\frac{1}{r^4} \frac{d^4 y}{dz^4} = y, \quad \text{y} \quad \frac{1}{r^4} = \frac{GE}{\rho} \quad (1-1)$$

pero que las soluciones conocidas por él (senos y cosenos, exponenciales) eran inadecuadas. Euler, por su parte, encontró en 1735 la solución en forma de series a (1-1) y trabajó con las condiciones de frontera. Específicamente, encontró su "condición del péndulo" para una barra:

$$Q E \frac{d^2 y}{dz^2} = (z - \xi) \int_0^z p y dz \quad (1-2)$$

$$\} \quad \xi = \frac{\int_0^z \hat{z} p d\hat{z}}{\int_0^z p d\hat{z}} \quad \text{y } p(z) \text{ una densidad de fuerza.}$$

Comprendió que en el extremo empotrado, $dy/dx = 0$. Notó además que diferenciando dos veces (1-2) se obtendría (1-1).

Euler hizo poco por resolver la ecuación (1-1) y se limitó a encontrar su solución en serie de potencias:

$$y = C_0 + C_1 z + \frac{C_0}{Q E 4!} z^4 + \frac{C_1}{Q E 5!} z^5 + \dots + \quad (1-3)$$

Hay que hacer ver que Euler no notó que las soluciones a (1-1) pueden escribirse como:

$$A \operatorname{sen} cz + B \operatorname{cos} cz + C \operatorname{exp} cz + D \operatorname{exp} -cz \quad (1-4)$$

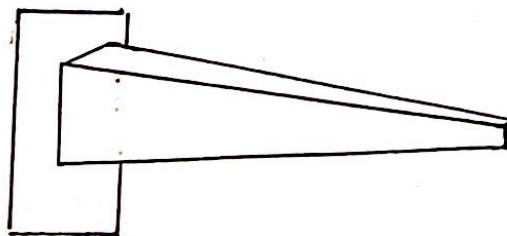
y además que no mencionó la posibilidad de modos superiores de vibración.

En 1740, Bernoulli resuelve la ecuación (1-1) en forma aproximada por el método de coeficientes indeterminados y en la forma (1-4). Predice la frecuencia fundamental de vibración de una aguja empotrada en uno de sus extremos, y confirma los resultados experimentalmente. Al completar este trabajo, tomó el problema de

la barra con ambos extremos libres. Calcula los puntos nodales y las frecuencias para los primeros 5 modos. Reporta experimentos en los cuales se inducen diferentes modos de vibración sosteniendo ligeramente la barra en puntos nodales predichos. En estos experimentos, Bernoulli escucha varios modos superpuestos, y da un argumento teórico de que la superposición puede ocurrir. Para mayor detalle sobre la evolución inicial de la dinámica referirse a la obra de Cannon y Destrovsky (1981: 70 - 120).

En 1827, Navier hizo la primera investigación sobre las ecuaciones generales del equilibrio y vibración de sólidos elásticos. Dedujo, por aplicación del cálculo de variaciones, no solo las anteriores ecuaciones sino también las condiciones de frontera en la superficie del sólido.

En la actualidad se ha investigado bastante sobre barras cuyo grosor varía como una función de la posición. Timoshenko (1974: 469-471) muestra algunos sólidos de revolución cuya frecuencia se calcula, y cuyas funciones propias son las funciones de Bessel. Mabie y Rogers (1974: 982 - 985) trabajaron las vibraciones libres de vigas cuyo grosor disminuye linealmente desde el extremo empotrado (horizontal y verticalmente):



Allí se estudia el efecto que tiene la geometría sobre la frecuencia fundamental y los siguientes cuatro sobretonos. Esta investi-

gación se basa en la ecuación de Euler-Bernoulli:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = - \left(\frac{\rho A}{g} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1-5)$$

Para este caso, Mabie y Rogers encuentran una solución analítica en términos de las funciones de Bessel. Estos resultados son utilizados en la construcción de contactos eléctricos y artefactos electro-mecánicos.

Basándose siempre en la ecuación (1-5) Morse sugiere un método de perturbación para encontrar las frecuencias y funciones propias de barras con sección transversal no uniforme (1948:).

Toshiyuki (1977: 982-985) trabaja con fórmulas aproximadas para la frecuencia fundamental de placas rectangulares con grosor que varía linealmente. Deriva analíticamente una ecuación característica usando series trigonométricas. Con estos resultados obtenidos numéricamente, deduce fórmulas para estimar la frecuencia fundamental della placa.

II. EL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE LAS VIBRACIONES.

Muchos problemas de la física matemática, entre ellos el de las vibraciones de sistemas continuos y discretos, están relacionados con el cálculo variacional. Tal como en la teoría elemental de máximos y mínimos de funciones continuas, el cálculo de variaciones tiene por objeto encontrar valores estacionarios. Recordemos algo sobre el cálculo de funciones: los puntos para los cuales $df = 0$ se llaman estacionarios; aquellos puntos estacionarios en los que existe un mínimo o un máximo relativo a alguna vecindad se llaman extremos de la función.

El cálculo de variaciones, sin embargo, trata de encontrar extremos de funcionales más que de funciones de un número finito de variables independientes. Un funcional es una aplicación sobre un espacio vectorial con imagen en los reales: $J: V \rightarrow \mathbb{R}$. En particular, se tienen funcionales integrales cuyo valor depende del conjunto de valores de una o más funciones, o en términos geométricos, de su trayectoria completa. El dominio de un funcional integral será, por lo tanto, un espacio de funciones admisibles. Se dice "admisibles" pues se debe definir el espacio de donde se pueden seleccionar las funciones argumento. Por ejemplo, este espacio podría ser el conjunto de todas las funciones continuas y diferenciables hasta el k -ésimo orden.

Ya que buscamos el extremo del funcional solamente con respecto de funciones argumento en una cierta vecindad de la función extremal, es necesario definir el concepto de vecindad de una función $g(x, y, \dots)$. Para h , una cantidad positiva, se dice que la función $g_1(x, y, \dots)$ está

7

en la vecindad (h) de la función $g(x,y,\dots)$ si $|g - g_1| < h$ en la región de definición.

En resumen, el problema fundamental del cálculo de variaciones es encontrar una o varias funciones argumento de un funcional a partir de un dominio dado de funciones admisibles, de manera que dicho funcional alcance un valor extremo con respecto a todas las funciones argumento dentro de la vecindad (h) de la función extremizante.

A diferencia de la teoría de máximos y mínimos ordinarios, para la cual existe el teorema de Weierstrass que asegura la existencia de las soluciones, en el cálculo de variaciones no puede garantizarse la existencia de un extremo para la generalidad de problemas. Es decir que, para cada problema o clase de problemas, se necesita una prueba específica.

Existen básicamente dos maneras de resolver problemas variacionales. La primera es una solución directa consistente en formular un problema ordinario aproximado en el que se determina sólo un número finito n de parámetros. Enseguida, se pasa al límite $n \rightarrow \infty$ en la solución aproximada. Esta manera es ilustrada por el método de las secuencias minimizantes, del cual el de Rayleigh-Ritz es un caso especial. La segunda forma de obtener la solución consiste en reducir el problema a uno en el cálculo diferencial, produciéndose las ecuaciones diferenciales de Euler.

En las siguientes secciones trabajamos con algo de detalle ambas formas de solución, ejemplificánd^{se} con casos cuyos resultados serán de utilidad en el tratamiento de las vibraciones en barras, con sección transversal no uniforme.

III. METODOS DE SOLUCION.

La siguiente es una exposición de los métodos numéricos utilizados en la solución del problema de las vibraciones en barras con sección transversal no uniforme.

A. Método de Rayleigh-Ritz:

Como se vió en el capítulo anterior, este método se basa en la aproximación de la función de forma $Y(x)$ por una combinación de funciones tomadas de un conjunto completo de las mismas. Para escoger las constantes c_i de la expresión

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k(x) \quad (3-1)$$

se hace uso de la propiedad de que, para un sistema en vibración, la frecuencia fundamental dada por este método es siempre mayor que la real ó analítica. Esta propiedad concuerda con el hecho de que al imponer restricciones a un sistema vibratorio, su frecuencia fundamental tiende a subir (aumenta la rigidez). Imponer una función de forma que no es la real equivale, en este caso, a imponer restricciones al sistema. Sin embargo, Den Hartog da también una demostración formal de la propiedad en meción (1956: 161-162). La frecuencia real es, por lo consiguiente, una cota inferior a la sucesión de valores de frecuencia obtenidos para diferente número de funciones en la combinación (3-1), y de todos los resultados así encontrados, el más pequeño es el mejor.

Si asumimos que cada sección transversal se mueve sinusoidalmente al-

rededor de su posición de equilibrio e ignoramos la rotación que cada sección transversal realiza alrededor de un eje perpendicular al plano de vibración y que pasa por su centro de inercia, las expresiones para las energías potencial y cinética máximas son:

$$U_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \int_0^l q I(x) y''^2 dx \quad T_{\text{máx}} = \frac{\rho^2}{2} \int_0^l \omega(x) y^2 dx \quad (3-2)$$

Igualando las dos energías encontramos la ecuación para la frecuencia:

$$p^2 = \frac{\int_0^l q I(x) y''^2 dx}{\int_0^l \rho \omega(x) y^2 dx}, \quad p = 2\pi\nu \quad (3-3)$$

El requisito de que la frecuencia sea mínima se escribe

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \frac{\int_0^l q I(x) y''^2 dx}{\int_0^l \rho \omega(x) y^2 dx} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3-4)$$

Derivando el anterior cociente y sustituyendo la ecuación (3-3) en el resultado produce la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \left[\int_0^l \left(I(x) y''^2 - \frac{\rho^2}{q} \omega(x) y^2 \right) dx \right] = 0 \quad (3-5)$$

De allí que la nueva ^{expresión} cantidad a extremizarse sea

$$Z = \int_0^l \left(I(x) y''^2 - \frac{\rho^2}{q} \omega(x) y^2 \right) dx \quad (3-6)$$

El resultado anterior es más fácil de trabajar, como veremos enseguida. Notar la similitud con la ecuación (2-4) para ~~la variación~~ el funcional J. La diferencia es que, habiéndose sugerido un número finito de funciones admisibles, el problema se reduce a uno de mínimos ordinarios en los parámetros c_k .

Introduzcamos la función de forma $Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k \Psi_k$ de prueba en la ecuación (3-6):

$$Z = \int_0^b \left[I(x) \left(\sum_{k=1}^n C_k \Psi_k''(x) \right)^2 - \frac{p^2 \rho}{q} w(x) \left(\sum_{k=1}^n C_k \Psi_k \right)^2 \right] dx \quad (3-7)$$

Definamos además los siguientes productos escalares:

$$R_{ij} = \int_0^b w(x) \Psi_i \cdot \Psi_j dx \quad S_{ij} = \int_0^b I(x) \Psi_i'' \cdot \Psi_j'' dx \quad (3-8)$$

Al desarrollar los cuadrados en la expresión (3-7) y luego imponer las condiciones

$$\frac{\partial Z}{\partial C_k} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3-9)$$

del problema de mínimos ordinarios, obtenemos la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & \dots & S_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1n} & S_{2n} & S_{3n} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n} & R_{2n} & R_{3n} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

con S_{ij} y R_{ij} tal como se definieron en (3-8) y $\sigma = p^2 \rho / q$.
Notamos que (3-10) es un problema de eigenvalores con σ como eigenvalor, mientras que $[C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]$, un vector de coeficientes, es a su vez el vector de forma generalizado. Cada coeficiente así calculado es un peso que señala la contribución de su función a la forma de $Y(x)$.

La forma de resolver la ecuación (3-10) para σ y $[C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]$ será expuesta en la sección C.

El éxito del método de Rayleigh -Ritz depende de las funciones escogidas para la aproximación. Ya que el modo fundamental es relativamente sencillo de aproximar, los resultados para dicho caso son satisfactorios. Para los sobretonos, no obstante, la dificultad aumenta y los resultados son menos exactos. Por esta razón, en esta investigación se utiliza el presente método sólo como un sondeo inicial del comportamiento de la relación geometría - frecuencia fundamental de la barra en vibración.

B. Solución de la ecuación diferencial del movimiento.

Delineamos a continuación el procedimiento general a seguirse en la búsqueda de una solución a la ecuación diferencial (2-35).

1. Método de las eigenfunciones. Sea G el dominio de las variables espaciales independientes x, y, \dots , con una frontera suave Γ . Supongamos que el estado de un continuo que ocupa completamente a G está caracterizado por una función $u(x, y, \dots, t)$ la cual es cero si el sistema está en equilibrio estable. Sea $L[u]$ una expresión diferencial lineal en las variables independientes x, \dots , definido en G . Esta expresión diferencial se debe a la variación de la energía potencial del sistema. Sea $\rho(x, \dots)$ la densidad de masa en cualquier punto de G e incluyamos una fuerza externa $Q(x, \dots, t)$. Deseamos entonces encontrar una solución a la ecuación diferencial

$$L[u] = \rho u_{tt} - Q \quad (3-11)$$

que satisface condiciones de frontera homogéneas independientes del tiempo (no hay condiciones iniciales).

De todos los movimientos libres que son solución de la ecuación diferencial homogénea

$$L[u] = \rho u_{tt} \quad (3-12)$$

y que satisfacen las condiciones de frontera, hacemos distinción de las eigenvibraciones al requerir que $u = Y(x, \dots)g(t)$ (sincronismo). Cada una de estas eigenvibraciones está asociada a una constante λ , el eigenvalor, tal que

$$\ddot{g} + \lambda g = 0 \quad (3-13)$$

De esta separación de variables se sigue que:

$$g(t) = a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t \quad y \quad (3-14)$$

$$L[Y] + \lambda P Y = 0.$$

donde Y debe satisfacer las condiciones de frontera de $u(x, \dots, t)$. El problema de eigenvalores consiste entonces en encontrar los valores de λ para los cuales la ecuación (3-14) tiene solución no trivial que cumple con las condiciones de frontera.

Quando el dominio G es finito se sigue generalmente que los eigenvalores λ forman una secuencia infinita contable $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Existe además un sistema de funciones propias asociadas Y_1, Y_2, \dots, Y_n que satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\int_G P Y_i Y_k d\tau = 0, \quad i \neq k; \quad \int_G P Y_i^2 d\tau = 1 \quad (3-15)$$

y que es completo en el sentido de que cualquier función continua $f(x)$ puede ser aproximada por la serie finita $\sum_{k=1}^n C_k Y_k$ de manera que para un $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y un $n > 0$ suficientemente grande, el error cuadrático medio de la aproximación, $\int_G (f - \sum_{k=1}^n C_k Y_k)^2 d\tau$, es menor que ϵ . De estas eigenvibraciones obtenemos soluciones al problema de valores iniciales por superposición de dichos modos propios o normales de vibración.

El argumento F del funcional integral (2-23) es de la forma

$$F = \frac{1}{2} \left[\rho \omega(x) y_t^2 + \rho \kappa^2(x) \omega(x) y_{xt}^2 - B(x) y_{xx}^2 \right]$$

$$\text{donde } B(x) = E \kappa^2(x) \omega(x) \quad (3-16)$$

donde $\omega(x)$ es el área de la sección transversal de la barra, $\kappa^2(x)$ es el radio de giro de la misma, ρ es la densidad del medio, y E es el módulo de Young. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación diferencial parcial (2-35) obtenemos:

$$\begin{aligned} & B y_{xxxx} + \frac{\rho}{E} B y_{xttx} + 2B_x y_{xxx} - \frac{\rho}{E} B_x y_{xtt} \\ & + B_{xx} y_{xx} + \rho \omega y_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (3-17)$$

Al aplicar las ideas anteriores del método de las eigenfunciones, resultan las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\ddot{g} + p^2 g = 0$$

$$\left[B \frac{d^4}{dx^4} + 2B_x \frac{d^3}{dx^3} + B_{xx} \frac{d^2}{dx^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\rho^2 \omega}{E} \left(B \frac{d^2}{dx^2} + B_x \frac{d}{dx} - \omega(x) \right) \right] y = L[y] = 0$$

(3-18a)

La última es una ecuación diferencial lineal homogénea para la función $y(x)$. Satisface la relación: $L [C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L [y_1] + C_2 L [y_2]$, donde c_1, c_2, \dots son constantes arbitrarias. Se puede combinar cualquier número de soluciones conocidas y_1, y_2, \dots con constantes c_1, c_2, \dots , para obtener una nueva solución $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots$.

La ecuación (3-18a) puede escribirse

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{dy}{dx} \right) - \lambda \omega y = -\lambda \frac{d}{dx} \left(B \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\lambda = \rho^2 \rho / \epsilon \quad (3-18b)$$

El lado derecho de la anterior ecuación desaparece si se ignora la rotación de las secciones transversales.

2. Diferencias finitas en la ecuación diferencial ordinaria. Sustituimos aquí las derivadas de una función por expresiones de diferencias de la función valuada en intervalos finitos. Cada punto pivotal da origen a una ecuación algebraica lineal. El efecto de trabajar con diferencias finitas es aproximar un sistema continuo por uno con un número finito de grados de libertad. El número de modos normales de vibración, que es infinito en el caso de medio continuo, se reduce al número finito de grados de libertad o coordenadas independientes que produce la discretización del medio. Las ecuaciones provenientes de los puntos pivetales, junto con las ecuaciones de restricción en la frontera, constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas para Y_1, Y_2, \dots, Y_m .

En este trabajo se utilizan las diferencias finitas centrales. Cada derivada de $Y(x)$ se aproxima por las diferencias de $Y(x_k)$ valuada en puntos localizados simétricamente alrededor del punto en consideración. Las primeras cuatro derivadas de $Y(x)$ se escriben a continua-

ción:

$$y'(x_n) = (y_{n+1} - y_{n-1})/2h + \frac{1}{6} h^2 y''' + \frac{1}{120} h^4 y^{(5)} + \dots$$

$$y''(x_n) = (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})/h^2 + \frac{1}{12} h^2 y^{(4)} + \dots$$

$$y'''(x_n) = (y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2})/2h^3 + \frac{1}{4} h^2 y^{(5)} + \dots$$

$$y^{(4)}(x_n) = (y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2})/h^4 + \frac{1}{6} h^2 y^{(6)} + \dots$$

(3-19)

Los términos sumados después de la expresión en diferencias para cada derivada, son el error de cada aproximación. Dichos términos se truncan quedando únicamente el primer término. El orden del error es $O(h^2)$. Para una discusión detallada del error de aproximación, consultar la obra de Wang (1966: 3-8).

Introduciendo las ecuaciones (3-19) en la ecuación ordinaria (3-18b), deducimos

$$\begin{aligned} & B_{m-1} y_{m-2} - 2(B_{m-1} + B_m) y_{m-1} + (B_{m-1} + 4B_m + B_{m+1}) y_m \\ & - 2(B_m + B_{m+1}) y_{m+1} + B_{m+1} y_{m+2} = \lambda h^4 \left[\frac{-B_{m-1}}{4h^2} y_{m-2} + \right. \\ & \left. \left(W_m + \frac{B_{m-1} + B_{m+1}}{4h^2} \right) y_m - \frac{B_{m+1}}{4h^2} y_{m+2} \right] \end{aligned} \quad (3-20)$$

Al hacer la identificación

$$M = B_{m-1}$$

$$R = -2(B_{m-1} + B_m)$$

$$T = B_{m-1} + 4B_m + B_{m+1}$$

$$P = -2(B_m + B_{m+1})$$

$$Q = B_{m+1}$$

$$U = -B_{m-1}/4h^2$$

$$V = W_m + (B_{m-1} + B_{m+1})/4h^2$$

$$W = -B_{m+1}/4h^2$$

(3-21)

la ecuación (3-20) toma la forma:

$$My_{n-2} + Ry_{n-1} + Ty_n + Py_{n+1} + Qy_{n+2} = \lambda h^4 [Uy_{n-2} + Vy_n + Wy_{n+2}] \quad (3-22)$$

Como ejemplo, consideremos las condiciones de frontera correspondientes a extremos libres de la barra:

$$\begin{aligned} y''(x_0=0) &= y''(x_N=L) = 0 \\ y'''(x_0=0) &= y'''(x_N=L) = 0 \end{aligned} \quad (3-23a)$$

que en su forma discretizada se escriben así:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= 2y_0 - y_1 & y_{N+1} &= 2y_N - y_{N-1} \\ y_{-2} &= y_2 - 4y_1 + 4y_0 & y_{N+2} &= 4y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2} \end{aligned} \quad (3-23b)$$

Al sustituir las condiciones de frontera en su forma discretizada en la ecuación (3-22), para los valores de n que corresponda, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

Si se suman todos los elementos en cada fila, para la matriz del lado izquierdo de la igualdad, se observa que el resultado es cero. Esto implica que un vector propio es $b(1, 1, \dots, 1)$, donde b es alguna constante, y además que el correspondiente valor propio es también nulo. Lo anterior es resultado de que al imponer condiciones de frontera de extremos libres, se añade a los grados de libertad vibratoriales, los de cuerpo rígido (traslacional y rotacional).

Si en la ecuación diferencial del movimiento (3-16) se ignora la rotación de las secciones transversales, ésta se reduce a

$$By^{IV} + 2B_x y''' + B_{xx} y'' - \rho \omega^2 y = 0 \quad (3-26)$$

El efecto que esto tiene en la ecuación matricial (3-25) es que la matriz del lado derecho se vuelve diagonal, permaneciendo únicamente los elementos V_k :

$$[V_k] = \begin{vmatrix} V_1 & & & 0 \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & V_k \end{vmatrix} \quad (3-27)$$

La ecuación matricial resultante, al invertir $[V_k]$ es:

$$Au = \lambda u \quad (3-28)$$

donde A tiene exactamente la misma forma que en (3-25), pero con cada una de sus filas dividida por el correspondiente V_k . El modo fundamental se ve poco afectado por esta simplificación, no así los sobretonos. Como veremos más adelante, la rotación de las secciones transversales sí influye en los modos superiores de vibración.

Métodos numéricos para resolver el problema matricial de eigenvalores.

Los métodos que a continuación se desarrollan son más aplicables al caso que se requieran solo algunos de los modos inferiores de vibración.

1. Método de la potencia iterada. Sea A una matriz cuadrada, real, con un valor propio mayor λ_M . Es decir, suponemos que λ_M es una raíz simple del polinomio característico de A tal que $\lambda_M > |\lambda_i|, i \neq M$. Para X_0 un vector arbitrario no ortogonal a la dirección v definida por $A^T v = \lambda_M v$, ($v^T \cdot X_0 \neq 0$), y φ una norma en R^n , la iteración

$$X_{n+1} = \frac{AX_n}{\varphi(AX_n)} \quad (3-29)$$

converge, cuando $n \rightarrow \infty$, al vector u tal que

$$Au = \lambda_M u, \quad \varphi(u) = 1 \quad (3-30)$$

y además

$$\frac{(AX_n)_i}{(X_n)_i} \rightarrow \lambda_M \quad (3-31)$$

El anterior es el Teorema de la potencia iterada. Para demostrarlo observamos que si λ_M es un valor propio de A , entonces la transformación lineal representada por A en la base fundamental $\beta_i = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ puede representarse en la base $\beta = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ por una transformación de semejanza sobre A :

$$A' = B^{-1} A B \quad (3-32)$$

tal que

$$A' = \begin{vmatrix} \lambda_M & 0 \\ 0 & A_1 \end{vmatrix}, \quad A_1 \text{ es matriz } (n-1) \times (n-1). \quad (3-33)$$

Entonces E_1 es un vector propio asociado a λ_M , y tiene por componente en la base β , la primera columna de la matriz B del cambio de base. Sea

2. Desfase de valores propios en análisis de sobretonos. Hemos visto en la sub-sección anterior que el método de la potencia iterada permite obtener el modo de vibración con la frecuencia más grande. El mismo método puede usarse para encontrar la frecuencia más pequeña y el vector propio correspondiente. Para el problema $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$, con A no singular, vemos que al multiplicar ambos lados por A^{-1} se obtiene:

$$A^{-1} \bar{x} = \frac{1}{\lambda} \bar{x} \quad (3-53)$$

Este es una forma alterna de tratar el problema, en la cual se selecciona la frecuencia menor - el método de potencia iterada converge a $(\frac{1}{\lambda})_{\max}$ y su correspondiente vector propio.

Sin embargo, en la ecuación (3-25) del ejemplo de una barra con extremos libres $\lambda = 0$, por lo que A es singular. Ya que no ^{se} puede aplicar (3-53) a este caso, se debe buscar una manera de "barrer" los modos traslacional y rotacional, de manera que el nuevo λ sea no nulo. En otros casos, se deseará converger al próximo modo más bajo (o más alto) debiéndose barrer cualquier contribución de los otros modos. *

Para resolver la dificultad anterior se utiliza un procedimiento basado en el desfase de eigenvalores, el cual es más efectivo en iteración inversa (3-53). La idea básica del desfase es escribir cada eigenvalor

λ_n como la suma de un desfase μ más un residuo ρ_n : Clough (1975:247-250)

$$\lambda_n = \rho_n + \mu \quad (3-54)$$

o, considerando la matriz completa de eigenvalores,

$$\Lambda = \hat{\rho} + \mu I \quad (3-55)$$

donde $\hat{\rho}$ es la matriz diagonal de residuos, mientras que cada eigenvalor

se desfasa en la misma cantidad μ .

El desfase de eigenvalores puede visualizarse como un desplazamiento del origen en la recta de eigenvalores, como se muestra en la figura (3-1).

El efecto del desfase es transformar el problema de eigenvalores en análisis de los residuos. Sustituyendo (3-54) en (3-53)

$$AX = (S + \mu I)X \quad (3-56)$$

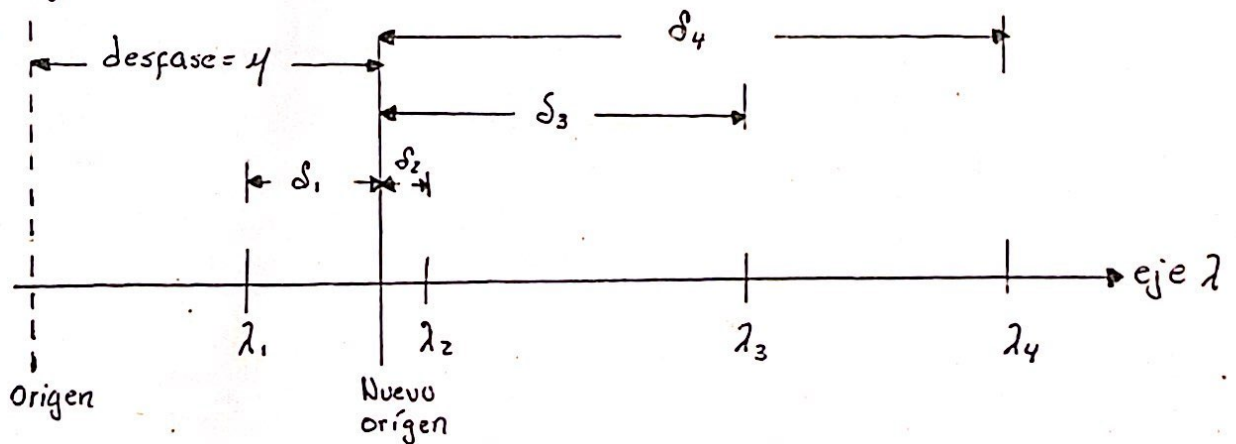
que puede re-escribirse

$$[A - \mu I]X = SX \quad (3-57)$$

El término entre corchetes representa la nueva matriz con eigenvalor S .

Denotando a la nueva matriz por \hat{A} tenemos $\hat{A}X = SX$. Mediante una iteración inversa se consigue S_{\min} y luego $\lambda_{\min} = \mu + S_{\min}$.

Fig. (3-1)



Si el problema es de la forma $AX = \lambda BX$, siempre podemos poner:

$$AX = (\mu + S)BX \quad (3-58)$$

por lo que

$$(A - \mu B)X = SBX \equiv \hat{A}X \quad (3-59)$$

Nuevamente se itera para el menor residuo. Notar que (3-59) se diferencia de (3-57) en que B no es la matriz identidad. Como se mencionó

antes, B tiende a diagonalizarse en la medida que sea despreciable la rotación de las secciones transversales. La ventaja de (3-59) puede verse que será el hecho de que A siempre será, a lo más, pentadiagonal. Esto permite la utilización de un algoritmo de inversión eficiente para matrices diagonales (la inversa de una matriz rala no será necesariamente rala).

con la forma y el comportamiento de los nodos de curvatura. Se estudian los aspectos acerca del modelo y las limitaciones y ventajas que tiene.

1. curvatura prescrita. A partir de la observación de las curvas reales (cuya representación es empírica), la forma general presentada en este procedimiento es la de una barra cuyo grosor varía simétricamente a partir del centro en forma parabólica. Adicionalmente, la barra tiene una sección con sección transversal uniforme, cerca de los extremos. El ancho de la barra es constante.



Los parámetros son:

L = longitud de la barra

H = profundidad de la barra

B = ancho de la barra (sección transversal uniforme)

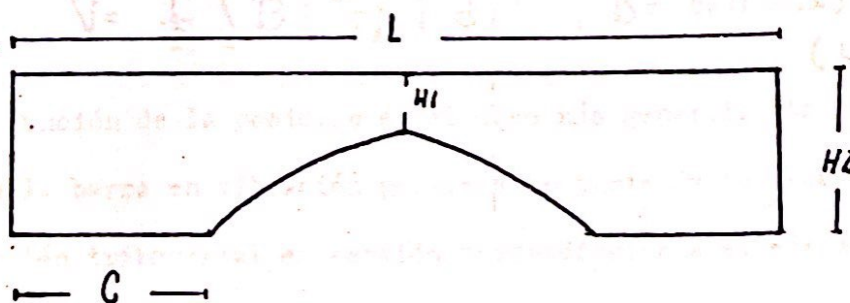
α = ángulo de la parte superior de la barra en el extremo

β = coeficiente de la curva parabólica

III. HIPOTESIS Y PLANTEAMIENTO

En este capítulo se expone el modelo con el cual se intenta aproximar la forma y el comportamiento de las teclas de marimba. Se plantean las hipótesis acerca del modelo y las limitaciones y alcances que éstas implican.

A. Geometría analizada. A partir de la observación de las teclas reales (cuya construcción es empírica), la forma general propuesta en esta investigación es la de una barra cuyo grosor varía simétricamente a partir del centro en forma parabólica. Adicionalmente, la barra tiene una región con sección transversal uniforme, cerca de los extremos. El ancho de la barra es constante.



Los parámetros son:

L - longitud de la barra

H_1 - grosor mínimo de la barra

H_2 - grosor máximo de la barra (sección transversal uniforme)

C - longitud de la parte con sección transversal uniforme.

V - coeficiente de la parábola

B. El modelo de la tecla en vibración. Esta investigación trata básicamente con barras con sección transversal no uniforme, cuyo grosor es una función definida a trazos en la región del dominio. La teoría utilizada es la de barras delgadas, la cual discutiremos brevemente. Aunque un mejor modelo del medio (madera) es el de medio ortotrópico, aquí se idealiza a uno isotrópico.

1. Teoría de barras delgadas.

Rayleigh trata este tema en el primer volumen de su trabajo *The Theory of Sound*. Se supone que un eje principal está en el plano de vibración. Luego, se deduce que la energía potencial necesitada para deflectar la barra es proporcional al cuadrado de la curvatura del eje neutral:

$$V = \frac{1}{2} \int E \kappa^2 w(x) \frac{ds}{R^2} \quad (4-1)$$

o, si la deflexión es pequeña,

$$V = \frac{1}{2} \int B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad B = E \kappa^2 w(x) \quad (4-2)$$

donde B es función de la posición en el caso más general. La energía cinética de la barra en vibración proviene en parte de la traslación de cada sección transversal en sentido perpendicular a el eje neutral de la barra, y en parte a la rotación de las secciones transversales de la misma. La primera parte se expresa como:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int \rho \omega y^2 dx \quad (4-3)$$

mientras que la segunda se escribe:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \int k^2 \rho \omega \left(\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

(4-4)

Las expresiones anteriores son la base para formar el Lagrangiano y obtener, mediante el procedimiento usual del cálculo de variaciones, la ecuación diferencial del movimiento de la barra con cualquier forma. Las suposiciones anteriores llevan a resultados satisfactorios siempre que las dimensiones laterales de la barra sean mucho menores que su longitud, pues así puede ignorarse los esfuerzos de corte sin que los resultados salgan demasiado afectados.

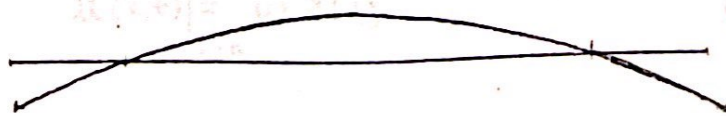
BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

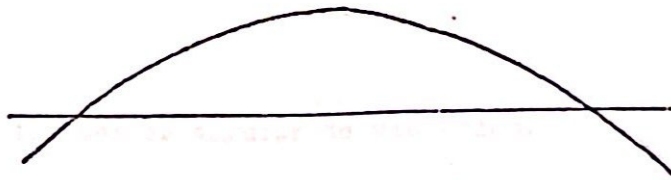
IV. RESULTADOS.

A continuación se exponen los resultados de la búsqueda de relaciones entre la geometría de la barra y los modos normales de vibración. Estos resultados fueron obtenidos a partir de los dos métodos numéricos estudiados con anterioridad. El método de Ritz se utiliza cuando se desea rapidez pero poca exactitud. El método de diferencias finitas se utiliza en la mayor parte del trabajo, en el que se desea tener una buena aproximación de los valores de frecuencia. Además, se hace una comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos, a fin de probar que existe concordancia.

A. Rayleigh-Ritz. Aquí hacemos una discusión sobre la forma de escoger las funciones base, y su aplicación para producir los resultados que se buscan.

1. Funciones base. Para una función base determinada, la posición de los nodos puede variarse con solo trasladar esa función con respecto a la posición en equilibrio de la barra. Esto causa una variación en la frecuencia de vibración. Por ejemplo, en la siguiente figura se tiene la misma función básicamente, pero con diferente traslado a partir del equilibrio:





Ahora, aquí se desea que las funciones propias correspondan a las de una barra con extremos libres. Debe verificarse que, tanto la función, como las derivadas respectivas cumplan con las condiciones de frontera. Luego que se han cumplido dichas condiciones, debe indicarse el traslado apropiado de cada función de manera que los nodos estén en el lugar que correspondería a una barra en vibración con extremos libres, pero donde se han descartado los modos de cuerpo rígido (es decir, rotación y traslación). Para ello se hace uso de la conservación del momentum total de la barra: la suma de los momentos de las secciones transversales Σx sobre toda la barra debe ser cero.

Procedamos a encontrar dicho desplazamiento. Sea $g(x)$ la función de grosor de la barra (variable, para este caso). Sea $f(x)$ la función aproximante sugerida para el modo fundamental. Entonces, cuando la tecla está en vibración, las fuerzas son puramente internas y el momentum total es cero, $P = 0$. La función propia, que cumple con las condiciones de frontera y descarta los modos de cuerpo rígido, será: $Y(x) = f(x) - a_t$. Aquí a_t es el traslado de la función con respecto a la posición ~~xxxx~~ que ocuparía la barra en su posición de equilibrio. Cuando la barra está pasando por su posición de equilibrio, la velocidad de cada sección transversal es:

$$\dot{u}(x,t) \Big|_{t=0} = \omega Y(x) \quad (5-1)$$

donde ω es la frecuencia angular de vibración.

El momentum de una sección transversal es:

$$dP = v \cdot dM \propto g(x)y(x)\omega dx \quad (5-2)$$

donde dM es el diferencial de masa. Entonces, el momentum total debe ser cero:

$$\begin{aligned} \int_0^l dP &\propto \int_0^l g(x)y(x)dx = \int_0^l g(x)[f(x) - a_t]dx \\ &= \int_0^l g(x)f(x)dx - a_t \int_0^l g(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (5-3)$$

De lo anterior se deduce inmediatamente que:

$$a_t = \frac{\int_0^l g(x)f(x)dx}{\int_0^l g(x)dx} \quad (5-4)$$

La constante de traslación a_t debe encontrarse para cada función propia aproximante. En un programa de computadora, fácilmente puede incorporarse un algoritmo de integración numérica que, dadas las funciones base, encuentre $a_t(i)$ para la i -ésima función aproximante. Luego se produce el traslado calculado ^{sobre} cada función para proseguir con el algoritmo del método de Rayleigh-Ritz.

Es interesante notar que la forma de a_t (ecuación 5-4)

corresponde a lo que, por costumbre, da en llamarse el promedio ponderado de $f(x)$ con respecto a $g(x)$ en el dominio de definición: $\langle f(x) \rangle$.

Luego de formar la ecuación matricial (3-10), se puede utilizar el algoritmo de von Mises o de la potencia iterada para calcular el valor propio más pequeño. Este valor no es cero, pues se han descartado los modos de cuerpo rígido.

Las funciones base utilizadas son:

$$f(n) = Z^n(1-Z)^2 \quad n = 2, 3, \dots, 8$$

$$f(1) = (Z^4/12 - Z^5/10 + Z^6/30 - Z/60)L^2$$

donde $Z = X/L$, es decir, la posición a lo largo de la tecla sobre la longitud total de la misma.

En el apéndice B se muestra un diagrama de flujo para el método de Ritz, incluyendo el cálculo de los traslados. Luego se presenta el respectivo programa codificado en FORTRAN IV. A continuación, los resultados obtenidos con el método de Ritz-Rayleigh.

λ	ψ	λ	ψ
0.015	101.70	0.015	101.70
0.020	101.70	0.020	101.70
0.025	101.70	0.025	101.70
0.030	101.70	0.030	101.70
0.035	101.70	0.035	101.70
0.040	101.70	0.040	101.70
0.045	101.70	0.045	101.70
0.050	101.70	0.050	101.70
0.055	101.70	0.055	101.70
0.060	101.70	0.060	101.70
0.065	101.70	0.065	101.70
0.070	101.70	0.070	101.70
0.075	101.70	0.075	101.70
0.080	101.70	0.080	101.70
0.085	101.70	0.085	101.70
0.090	101.70	0.090	101.70
0.095	101.70	0.095	101.70
0.100	101.70	0.100	101.70

α . Caso C $\neq 0$. Esta vez encontramos la relación frecuencia contra coeficiente de la parábola, para la forma más cercana a una tecla. Estos resultados son tabulados inmediatamente, mientras que en las siguientes páginas se muestran algunas corridas del programa presentándose los datos de entrada, los valores de los coeficientes de cada función aproximante y por último los valores de la función propia en 20 puntos equidistantes entre sí. Notar que la simetría no es perfecta.

Tabla 5-1.

Relación frecuencia- V (Ritz)

L = 20.0 cms

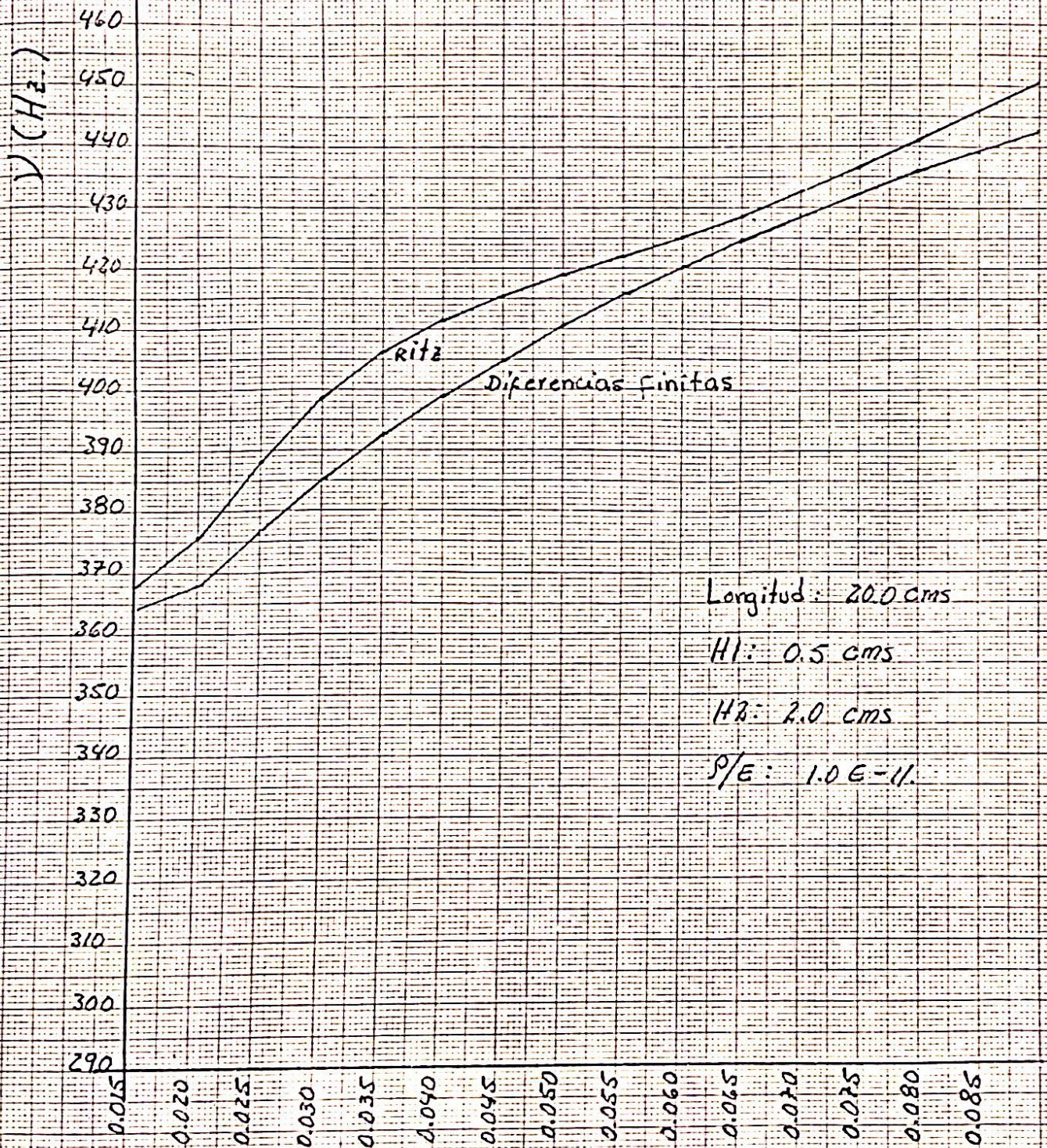
 $\rho/E = 1.0E-11$

H1 = 0.5 cms

H2 = 2.0 cms

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	367.60	0.065	428.74
0.020	375.72	0.070	432.51
0.025	388.21	0.075	436.61
0.030	398.57	0.080	441.00
0.035	406.19	0.085	445.64
0.040	411.62	0.090	450.49
0.045	415.64	0.095	455.46
0.050	418.97	0.100	460.58
0.055	422.07		
0.060	425.28		

Gráfica 5.1



De la gráfica anterior observamos que las frecuencias obtenidos por el análisis de diferencias finitas son menores que las obtenidas por el método de Rayleigh-Ritz. Esto es lo esperado, de acuerdo a la discusión del capítulo 2 sobre ambos métodos. Ya que el método de Rayleigh Ritz está limitado por el número finito de funciones base, la función calculada a partir de ellas implica restringir el movimiento de la barra. Esto produce, como vimos entonces, una frecuencia mayor que la real (pues aumenta la rigidez del sistema vibratorio). El máximo de diferencia en el valor de la frecuencia entre las dos curvas ocurre en $V = 0.035$, y es de aproximadamente 15 Hz. Esto representa una diferencia máxima de 4 %.

Con la razón a trabajar en un programa, aumenta el error de la aproximación — que es del orden $\frac{1}{N^2}$ — pero si se mejora la aproximación aumentando N se incrementa proporcionalmente el tiempo de corrida del programa de computadora. Por tanto, se desea tener una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial, en un tiempo de corrida razonable.

A continuación se tabulan las frecuencias obtenidas para una geometría fija, haciendo variar el número de la discretización N .

$C = 0.0 \text{ cms.}$ $L = 20.0 \text{ cms.}$
 $EI = 0.5 \text{ cms.}$ $P/Q = 1.0 \times 10^{-11} \text{ (cms/seg)}^2$

Tabla S-2
 Frecuencia vs. N

N	Frecuencia	N	Frecuencia
10	319.54	10	319.54
20	341.07	20	341.07
25	346.00	25	346.00

B. Diferencias finitas.

La mayor parte de los resultados obtenidos proviene del método de diferencias finitas. Se investiga a continuación la variación de la frecuencia fundamental y algunos sobretonos con la geometría de la barra. Luego se proponen modelos de un teclado completo, y se establece la relación que debe existir entre las formas de las teclas para cada modelo, de manera que se reproduzca la escala cromática. Finalmente se estudia la posición de los nodos para el modo fundamental de las teclas en vibración correspondientes a cada modelo.

1. Experimento numérico para establecer discretización apropiada.

Cuando el número de partes en que se divide la región a trabajarse es muy pequeño, aumenta el error de la aproximación — que es del orden de h^2 —, pero si se mejora la aproximación aumentando N se incrementa rápidamente el tiempo de corrida del programa de computadora. Por tanto, se desea tener una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial, en un tiempo de corrida razonable.

A continuación se tabulan las frecuencias obtenidas para una geometría fija, haciendo variar el número de la discretización N .

$$C = 0.0 \text{ cms.}$$

$$H1 = 0.5 \text{ cms.}$$

$$L = 20.0 \text{ cms}$$

$$P/Q = 1.0E-11 \text{ (cms/seg)}^2$$

Tabla S.2

Frecuencia vrs. N

N	Frecuencia	N	Frecuencia
15	339.94	15	323.68
20	344.09	20	327.71
25	346.08	25	329.73

30	347.18	30	330.85
35	347.85	35	331.53
40	348.28	40	331.98
45	348.59	45	332.28
50	348.80	55	332.50
55	348.96	55	332.66
60	349.08	60	332.79
65	349.18	65	332.89
70	349.25	70	332.96

En las siguientes páginas se grafican las anteriores relaciones. Notamos que para $N = 50$, el valor de la frecuencia está muy cercano al valor límite aparente de la gráfica. Si imponemos una cota superior a la sucesión de valores de frecuencia, la diferencia entre ésta y la frecuencia en $N=50$ es menor que 0.5 %. El tiempo de corrida es aproximadamente de 1 minutos. Para $N = 60$ este tiempo se incrementa a 1.5 minutos, y para $N = 70$ a 3 minutos, mientras que el valor de la frecuencia no varía significativamente. Convenimos aquí en trabajar con $N=50$ en casos en que se requiera exactitud en el valor de la frecuencia.

Gráfica 5.2

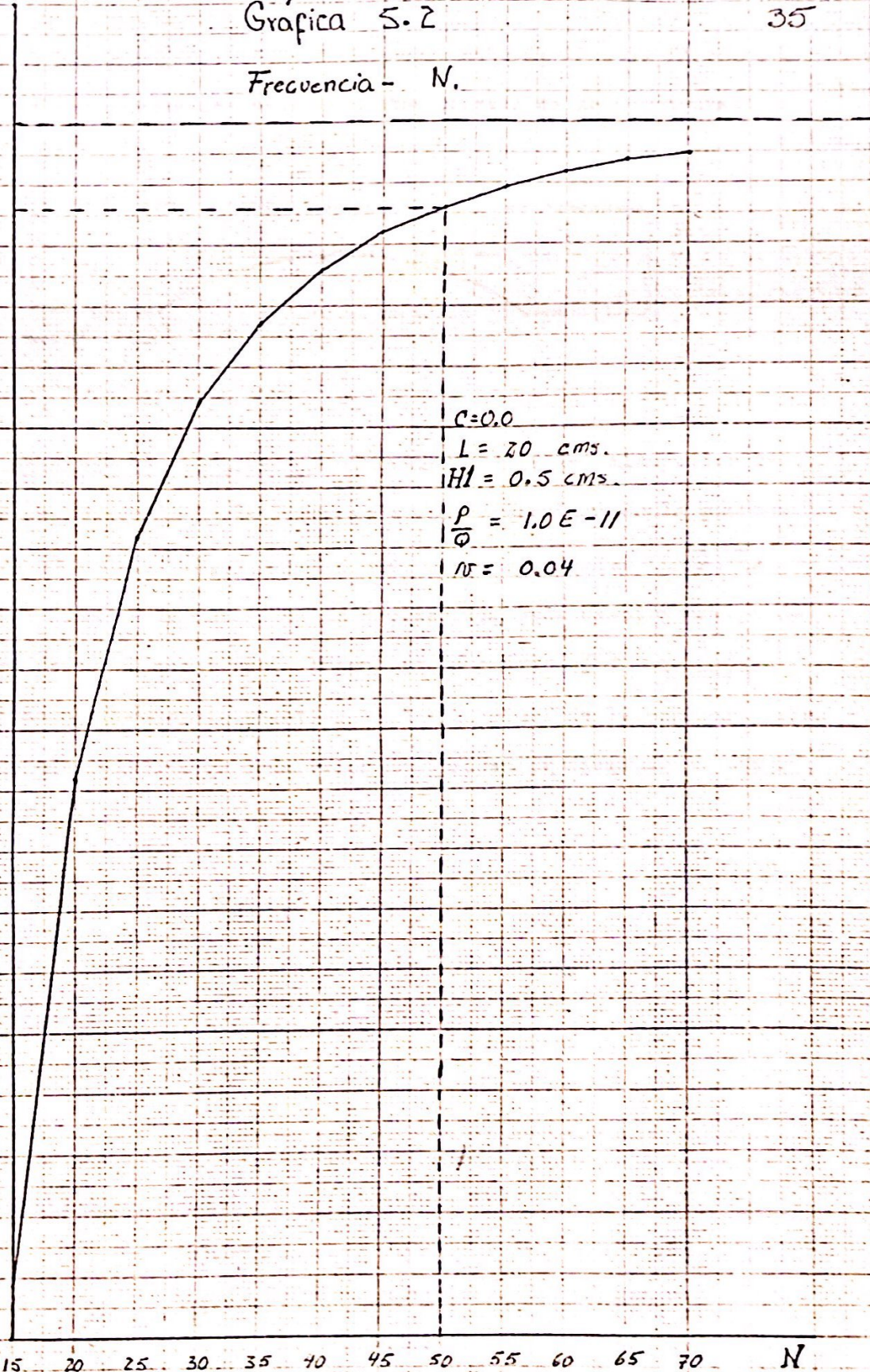
Frecuencia - N.

Frecuencia (Hz.)

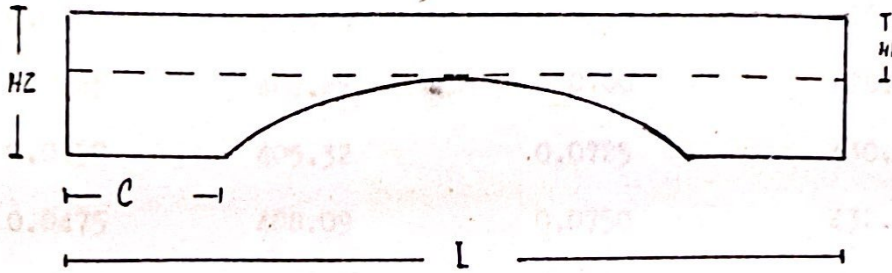
350.0
349.5
349.0
348.5
348.0
347.5
347.0
346.5
346.0
345.5
345.0
344.5
344.0
343.5
343.0
342.5
342.0
341.5
341.0
340.5
340.0
339.5

15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 N

$c=0.0$
 $L=20 \text{ cms.}$
 $H=0.5 \text{ cms.}$
 $\frac{P}{Q} = 1.0E-11$
 $N=0.04$



3. Barra con $C \neq 0.0$. Aquí estudiamos las barras cuya forma está más apegada a las teclas reales. La forma general es la siguiente:



a. Variando el valor de H_1 : Consideramos en las siguientes tablas la variación de la frecuencia con la abertura de la parábola "V", para $H_1 = 0.5, 1.0, 1.8$ y 2.0 cms. respectivamente. ^{huego de} ~~Antes de~~ ^{las} ~~cada~~ tablas se ilustra la forma de las teclas para cada caso, a manera de dar una idea de sus dimensiones. Luego, en la gráfica 5.7 se representa la relación frecuencia relativa contra abertura de la parábola, donde la frecuencia relativa es cada valor de frecuencia dividido por la frecuencia máxima alcanzada ($V = 0.09$).

Tabla 5.10.

Relación frecuencia-V para $H_1=0.5$ cms

$$H_2 = 2.0 \text{ cms}$$

$$L = 20.0 \text{ cms}$$

$$P/Q = 1.0E-11 \text{ (seg/cm)}^2$$

Abertura (V)	(Hz)	Abertura (V)	(Hz)
0.015	363.69	0.0250	376.64
0.0175	364.42	0.0275	380.97
0.0200	367.90	0.0300	385.10
0.0225	372.20	0.0325	388.98

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.0350	392.64	0.0625	422.47
0.0375	396.08	0.0650	424.55
0.0400	399.33	0.0675	426.61
0.0425	402.41	0.0700	428.60
0.0450	405.32	0.0725	430.52
0.0475	408.09	0.0750	432.38
0.0500	410.74	0.0775	434.17
0.0525	413.28	0.0800	435.98
0.0550	415.70	0.0825	437.74
0.0575	418.04	0.0850	439.44
0.0600	420.30	0.0875	441.09
		0.0900	442.70

Tabla S. II.
Relación frecuencia-V para $H_1=1.0\text{cms}$

Abertura (V)	(Hz)	Abertura (V)	(Hz)
0.0150	769.61	0.0375	846.38
0.0175	779.55	0.0400	852.73
0.0200	789.63	0.0425	858.85
0.0225	799.27	0.0450	864.63
0.0250	808.37	0.0475	870.15
0.0275	816.93	0.0500	875.49
0.0300	824.93	0.0525	880.60
0.0325	832.51	0.0550	885.45
0.0350	839.61	0.0575	890.15

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.0600	894.73	0.0775	922.77
0.0625	899.18	0.0800	926.25
0.0650	903.36	0.0825	929.67
0.0675	907.43	0.0850	933.01
0.0700	911.41	0.0875	936.29
0.0725	915.29	0.0900	939.50
0.0750	919.08		

Tabla 5.12.
Relación frecuencia-V para H1= 1.5 cms

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.015	1231.53	0.0475	1331.41
0.0175	1244.06	0.0500	1335.92
0.0200	1255.26	0.0525	1339.93
0.0225	1265.42	0.0550	1343.88
0.0250	1274.61	0.0575	1347.76
0.0275	1282.90	0.0600	1351.57
0.0300	1290.66	0.0625	1355.32
0.0325	1297.74	0.0650	1358.68
0.0350	1304.20	0.0675	1361.63
0.0375	1310.50	0.0700	1364.54
0.0400	1316.18	0.0725	1367.42
0.0425	1321.36	0.0775	1370.25
0.0450	1326.44	0.0800	1373.04

Abertura	(Hz)
0.0825	1378.52
0.0850	1381.21
0.0875	1383.70
0.0900	1385.74

Tabla 5.13
Relación frecuencia-V para $H_1=1.8$ cms.

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.0150	1507.03	0.0500	1551.69
0.0200	1518.83	0.0550	1554.07
0.0250	1527.56	0.0600	1556.40
0.0300	1533.98	0.0650	1558.70
0.0350	1539.88	0.0700	1560.97
0.0400	1543.91	0.0750	1563.20
0.0450	1547.84	0.0800	1565.02
		0.0850	1566.22
		0.0900	1567.40

La gráfica 5.7 ilustra como el cambio fraccional de la frecuencia (con respecto a la frecuencia en $V=0.09$) va siendo menor cuando $H_1 \rightarrow H_2$.

Si regresamos a la gráfica 5.4 que muestra la relación frecuencia-abertura de la parábola para $C = 0.0$, y la comparamos con la correspondiente relación para $C \neq 0.0$, observamos comportamientos completamente opuestos. A medida que la parábola se va cerrando, la frecuencia de barras con $C = 0.0$ va decreciendo, mientras que la frecuencia de teclas va aumentando. La gráfica 5.8 reúne los dos casos en un mismo sistema de ejes coordenados.

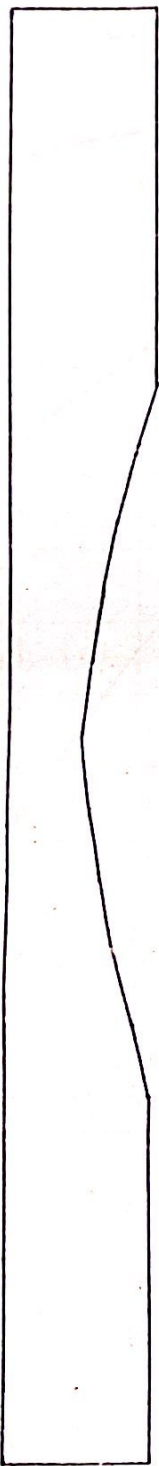
$L = 20 \text{ cms.}$

$V = 0.03$

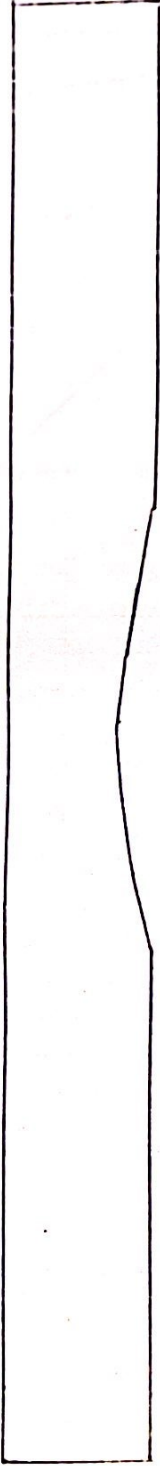
$H_2 = 2.0 \text{ cms.}$



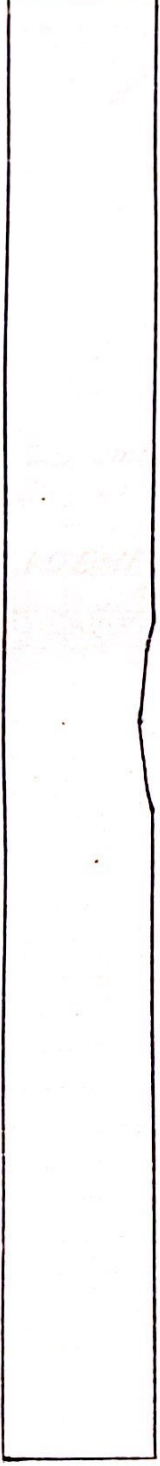
$H_1 = 0.5 \text{ cm}$



$H_1 = 1.0 \text{ cm}$



$H_1 = 1.5 \text{ cm}$

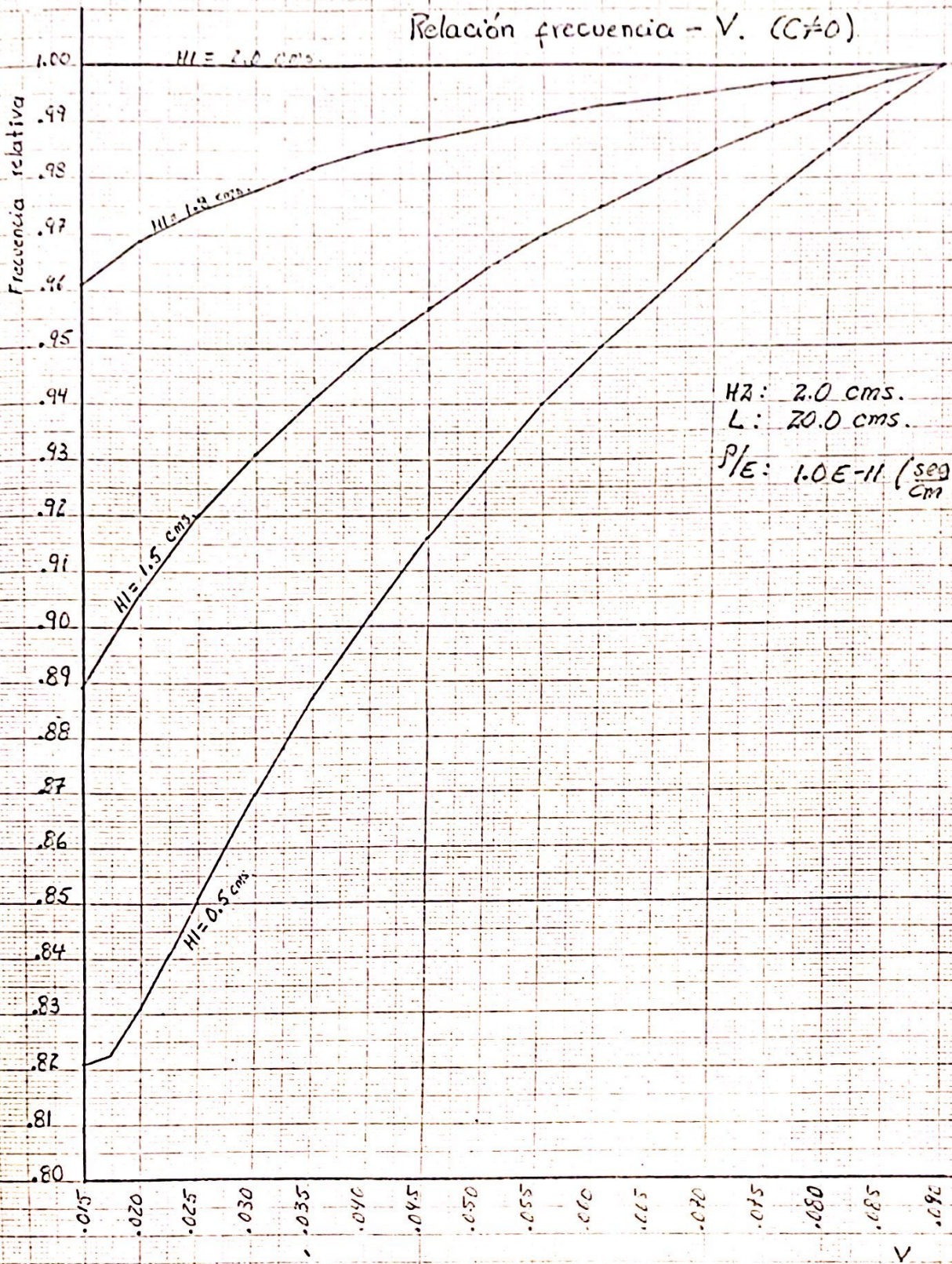


$H_1 = 1.8 \text{ cm}$

Grafica 5.7.

41

Relación frecuencia - V. ($C \neq 0$)



A2

Grafica 5.8.

Relación frecuencia - V.

ν (Hz)

$c = 0.6$
(DIAB)

$H1 = 0.5 \text{ cms.}$

$H2 = 2.0 \text{ cms.}$

$L = 20.0 \text{ cms.}$

$P/E = 1.0E-11 \left(\frac{\text{seg}}{\text{cm}} \right)^2$

430
425
420
415
410
405
400
395
390
385
380
375
370
365
360
355
350
345
340
335
330
325

0.015 0.020 0.025 0.030 0.035 0.040 0.045 0.050 0.055 0.060 0.065 0.070 0.075 0.080

V

$c = 0.6$
(DIAB)

b. Variando el valor de L: A continuación se tabulan los datos de frecuencia vrs. abertura de la parábola (V) para diferentes longitudes de la barra. Se consideran los casos $L = 20.0, 30.0,$ y 40.0 cms. Cada relación ha sido representada en la gráfica 5.9, donde se han hecho cortes en el eje "frecuencia" a fin de comparar las gráficas fácilmente.

Tabla 5.14.

$$H_2 = 2.0 \text{ cms}$$

$$H_1 = 0.5 \text{ cms}$$

$$q/Q = 1.0E-11 \text{ (seg/cm)}^2$$

Relación frecuencia-V para $L = 30$ cms

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.015	173.70	0.055	205.32
0.020	180.14	0.060	207.80
0.025	185.28	0.065	210.07
0.030	189.61	0.070	212.36
0.035	193.37	0.075	214.48
0.040	196.75	0.080	216.46
0.045	199.84	0.085	218.31
0.050	202.65	0.090	220.24

Tabla 5.15.

Relación frecuencia-V para $L = 40$ cms.

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.015	105.08	0.025	112.23
0.020	109.00	0.030	115.00

4A

Abertura	(Hz)	Abertura	(Hz)
0.035	117.47	0.065	128.60
0.040	119.72	0.070	130.14
0.045	121.76	0.075	131.59
0.050	123.65	0.080	132.94
0.055	125.46	0.085	134.20
0.060	127.10	0.090	135.39

Gráfica 5.9.

Curvas V-V para diferentes longitudes.

($C \neq 0$)

$H1 = 0.5 \text{ cms.}$

$H2 = 2.0 \text{ cms.}$

$\frac{P}{Q} = 1.0 \text{ E}^{-11}$

V (Hz.)

450

440

430

420

410

400

390

380

370

360

270

210

200

190

180

170

130

120

110

100

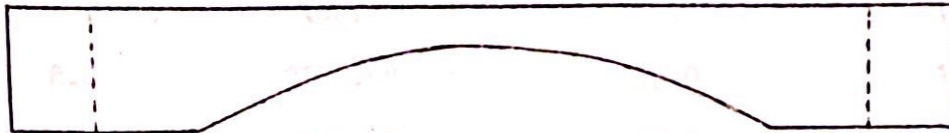
L = 20 cms.

L = 30 cms.

L = 40 cms.

.015 .020 .025 .030 .035 .040 .045 .050 .055 .060 .065 .070 .075 .080 .085 .090

d. Relación frecuencia - Longitud (V constante). Al igual que con las barras con $C = 0.0$, analizamos aquí la variación de la frecuencia de una barra tecla cuando se aumenta su longitud. El incremento es sobre la parte con sección transversal uniforme:



Consideramos aquí los casos con $V = 0.03$ y $V = 0.09$.

$H1 = 0.5$ cms

$H2 = 2.0$ cms.

$/Q = 1.0E-11$

Tabla 5.19.

Relación frecuencia-L ($V=0.03$)

L (cms)	(Hz)	L (cms)	(Hz)
14.0	742.81	40.0	115.00
20.0	385.09	45.0	93.88
25.0	260.74	50.0	78.37
30.0	189.61	55.0	66.66
35.0	144.94	60.0	57.50

Tabla 5.20.

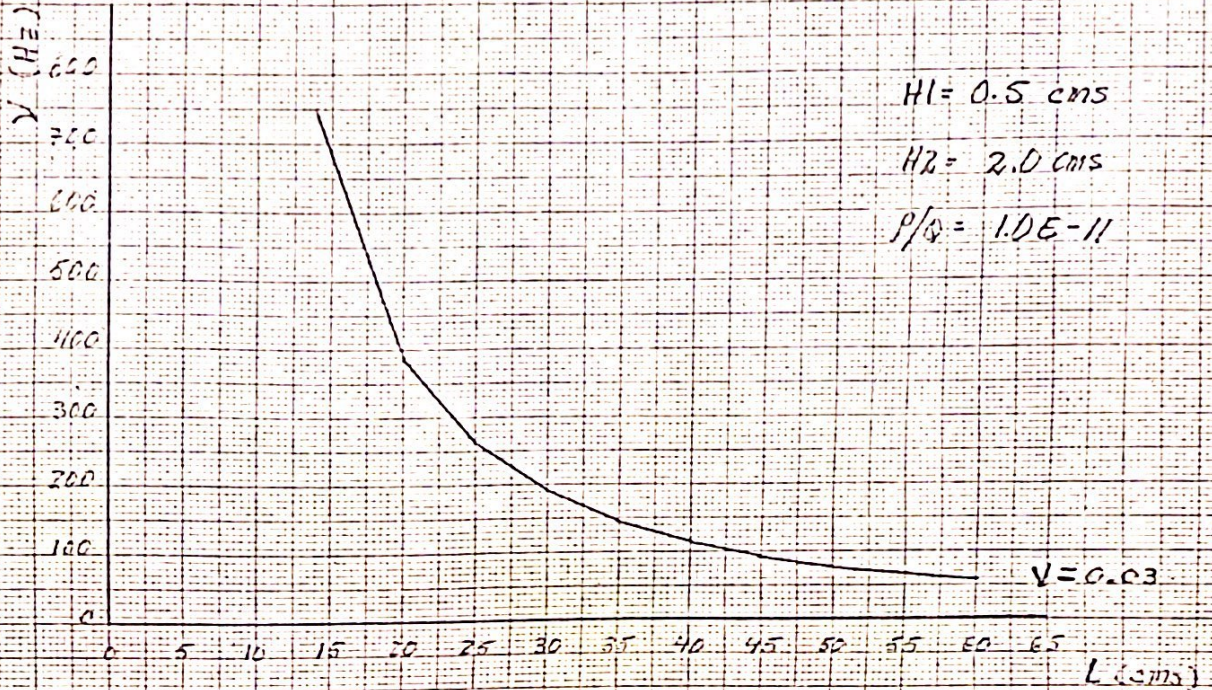
Relación frecuencia-L ($v = 0.09$)

L (cms)	(Hz)	L (cms)	(Hz)
8.0	2276.68	35.0	169.55
10.0	1488.79	40.0	135.39
15.0	731.35	45.0	111.24
20.0	442.70	50.0	93.25
25.0	300.90	55.0	79.64
30.0	220.24	60.0	68.96

Los datos anterior se encuentran graficados en la siguiente página (gráfica 5.17).

48

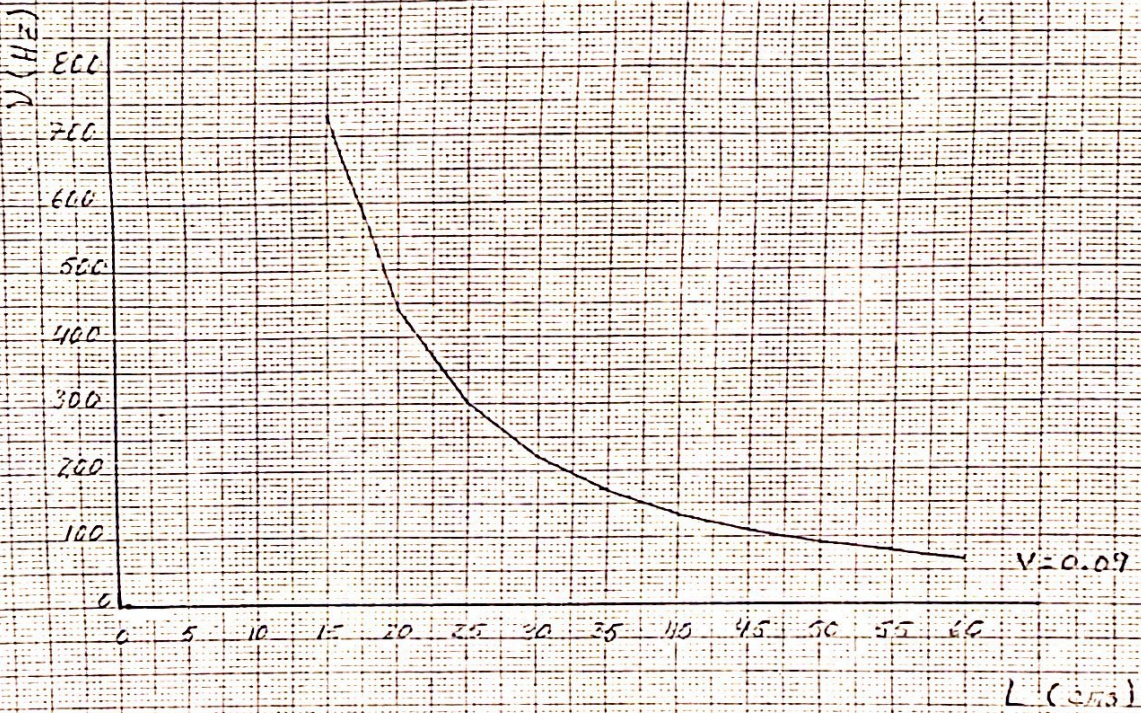
Gráfica 5.12. Relación Frecuencia-Longitud.



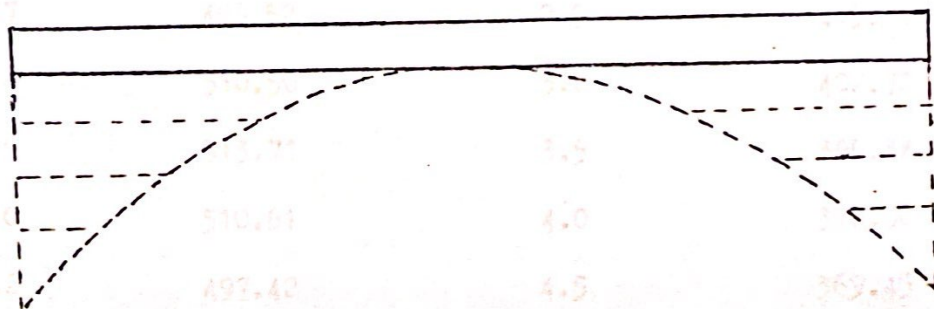
$H_1 = 0.5 \text{ cms}$

$H_2 = 2.0 \text{ cms}$

$\rho/\sigma = 1.0E-11$



e. Relación frecuencia-H2 (V constante). Hemos estudiado con anterioridad relaciones en las cuales H2 es constante. En el caso $C = 0.0$ no se restringe el grosor máximo de la tecla. Ahora, veremos como varía la frecuencia para una tecla a medida que H2 varía desde H1 (barra uniforme) hasta la forma correspondiente a $C = 0.0$ (máximo grosor que se puede alcanzar) :



$$H1 = 0.5 \quad L = 20.0 \text{ cms}$$

$$/Q = 1.0E-11$$

Tabla S.21.

Relación frecuencia-H2 ($V_c = 0.03$) :

H2 (cms)	Frecuencia (Hz)	H2 (cms)	Frecuencia (Hz)
0.5	405.65	1.4	416.24
0.6	450.97	1.5	409.91
0.7	463.80	2.0	385.09
0.8	462.58	2.5	368.36
0.9	455.79	3.0	357.79
1.0	447.36	3.5	353.68
1.2	430.69		

Tabla 5.22.

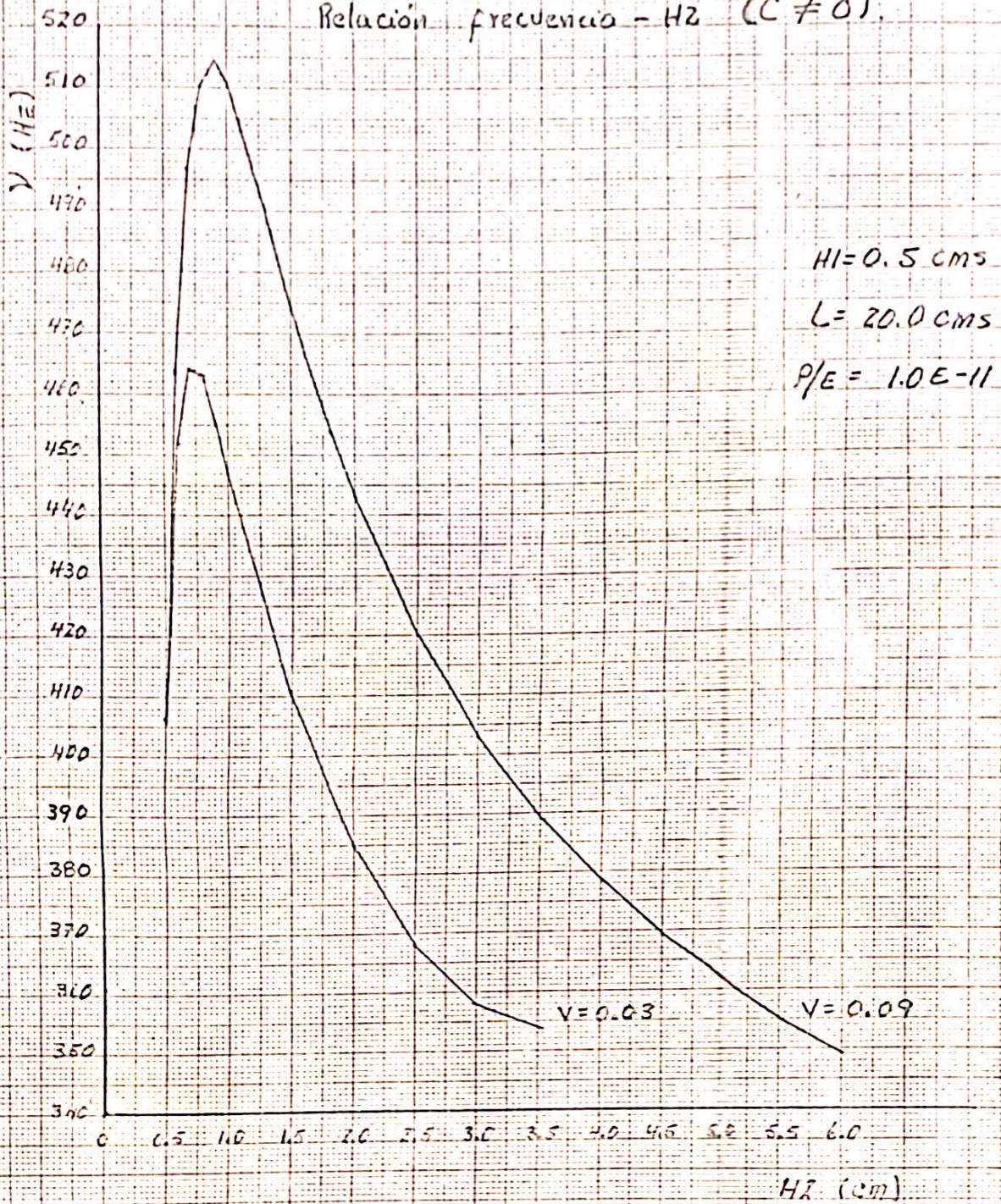
Relación frecuencia-H2 ($V = 0.09$)

H2 (cms)	(Hz)	H2 (cms)	(Hz)
0.5	405.65	1.8	454.16
0.6	464.31	2.0	442.70
0.7	496.52	2.5	419.82
0.8	510.50	3.0	402.70
0.9	513.71	3.5	389.34
1.0	510.81	4.0	378.50
1.2	497.42	4.5	369.45
1.3	489.63	5.0	361.74
1.5	474.34	5.5	355.08
1.6	467.19	6.0	349.28

En la siguiente página se muestra la gráfica de la anterior relación para $V = 0.03$ y $V = 0.09$. A diferencia de las anteriores relaciones estudiadas, estas gráficas no son monotónicas. El máximo de cada curva representa la forma de la barra que provee la máxima frecuencia posible para $H1$ y L fijos. Es interesante notar que el $H2$ óptimo es casi el mismo para cualquier valor de abertura de la parábola, y es escasamente mayor que $H1$. Para $H2$ mayor que este valor crítico, la inercia en los extremos comienza a dominar y a bajar la frecuencia fundamental.

Gráfica 5.13.

Relación frecuencia - Hz ($C \neq 0$).



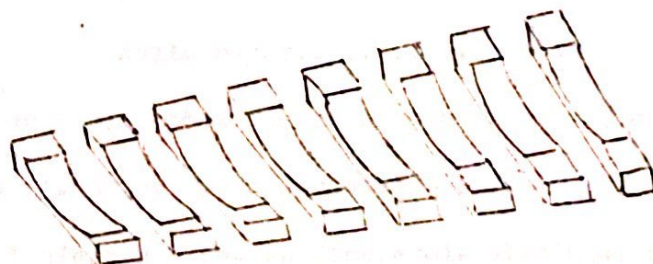
4. Modelos de teclado lineal. En las marimbas reales podemos observar que la longitud de las teclas varía linealmente con la posición que ocupan dentro del teclado completo. Además se nota que la parte de la tecla con grosor constante también varía linealmente en su longitud con la posición que ocupa la tecla. Proponemos inicialmente un modelo de teclado en el cual todas las teclas tienen el mismo grosor total H_2 , ^{igual que H_1 ,} están equidistanciadas una con respecto a la otra y además,

$$L = m.X + L_0 \quad C = p.L \quad (5-1)$$

donde m es una constante, L_0 es la longitud de la primera tecla (la de mayor frecuencia fundamental), y p es un número positivo menor que 1. En otras palabras, la relación de la longitud del segmento de barra con grosor constante a la longitud total es constante. La abertura de la parábola se ajusta de manera que C tenga el valor predicho por (5-1) con la fórmula

$$V = \frac{H_2 - H_1}{(L/2 - c)^2} \quad (5-2)$$

La siguiente figura ilustra como se vería dicho teclado visto desde abajo:



El objetivo de la presentación del siguiente material es encontrar el valor de m y de p apropiados (la forma del teclado) que producen en el teclado la escala cromática, es decir, la sucesión de sonidos musicales que son base para las composiciones a que estamos acostumbrados.

Antes de adentrarnos en el material propiamente dicho, conviene hacer un breve bosquejo de como están distribuidos los intervalos musicales en la escala cromática. El intervalo entre dos notas musicales es la razón de sus frecuencias. Así, por ejemplo, una octava es el intervalo de aquellas notas para las cuales la frecuencia de una es el doble de la otra. Es notable el hecho de que existen relaciones especiales entre las notas cuya relación de períodos son recíprocos de los números naturales. La siguiente tabla muestra lado a lado los nombres usuales de los intervalos y la relación de frecuencias respectiva:

octava.....	2:1
quinta.....	3:2
cuarta.....	4:3
tercera mayor.....	5:4
sexta menor.....	8:5
tercera menor.....	6:5
sexta mayor.....	5:3

Sobre cualquier nota tomada como nota clave, o tónica, se puede construir una escala diatónica, cuya derivación resumimos a continuación. Si la nota clave, cualquiera que sea su frecuencia absoluta, se denomina Do, la quinta arriba, o dominante, es Sol, y la quinta por debajo, o subdominante es Fa. El acorde sobre cualquier nota se produce combinándola con su tercera mayor, y su quinta, dando las fracciones de frecuencia $1:5/4:3:2$ o $4:5:6$.

Ahora, si tomamos el acorde común sobre la tónica, sobre la dominante, y en la subdominante, y los trasponemos cuando sea necesario dentro de la octava inmediatamente superior a la tónica, obtenemos notas cuya frecuencia ordenadas en orden de magnitud son:

Do Re Mi Fa Sol La Si Do
 1, 9/8, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3, 15/8, 2

La frecuencia absoluta convenida para Do (c más bajo de voz de tenor) es 256 o 2^8 .

Ahora, aquí trataremos con la escala de temperamentos iguales, en la cual se divide la escala en 12 semitonos. la ventaja de esta escala es que las mismas notas sirven para una clave como para otra. Las razones de los intervalos de la escala con temperamento igual están dadas por:

Nota	Frecuencia	Nota	Frecuencia
c	1.00000	f#	1.41421 = $2^{6/12}$
c#	1.05946 = $2^{1/12}$	g	1.49831 = $2^{7/12}$
d	1.12246 = $2^{2/12}$	g#	1.58740 = $2^{8/12}$
d#	1.18921 = $2^{3/12}$	a	1.68179 = $2^{9/12}$
e	1.25992 = $2^{4/12}$	a#	1.78180 = $2^{10/12}$
f	1.33484 = $2^{5/12}$	b	1.88775 = $2^{11/12}$
		c'	2.0000

En las siguientes páginas veremos como se puede acomodar la geometría de las teclas de manera que los intervalos entre los tonos sean los de arriba (escala cromática). Ya que el modelo es de momento bastante rígido, no esperaríamos que la curva de frecuencia-posición de la tecla se pegue exactamente a la curva frecuencia de la escala cromática vs. posición de la tecla, para algún valor de m y p. ($2^{n/12}$ vs. x_n)

Veamos a continuación los resultados obtenidos.

H1 = 0.5 cms
 H2 = 2.0 cms
 $P/Q = 1.0E-11$

$m = 0.15$
 distancia entre teclas = 5 cms.

Tabla 5.23.

Posición de la tecla - frecuencia.
 $(P = 1/4)$

X (cms)	L (cms)	V(p=1/4)	X (cms)	L (cms)	V(p = 1/4)
0	20.00	420.30	55	28.25	210.66
5	20.75	390.47	60	29.00	199.90
10	21.50	363.70	65	29.75	189.95
15	22.25	339.59	70	30.50	180.72
20	23.00	317.81	75	31.25	172.15
25	23.75	298.05	80	32.00	164.18
30	24.50	280.08	85	32.75	156.75
35	25.25	263.69	90	33.50	149.81
40	26.00	248.70	100	35.00	137.24
45	26.75	234.95	105	35.75	131.54
50	27.50	222.31	110	36.50	126.19

Tabla 5.24.

Posición de la tecla - frecuencia.

$$p = 1/5$$

X (cms)	L (cms)	V (Hz)	X (cms)	L (cms)	V (Hz)
0	20.00	401.40	50	27.50	212.31
5	20.75	372.91	55	28.25	201.19
10	21.50	347.35	60	29.00	190.92
15	22.25	324.32	65	29.75	181.41
20	23.00	303.52	70	30.50	172.60
25	23.75	284.65	75	31.25	164.41
30	24.50	267.49	80	32.00	156.80
35	25.25	251.84	85	32.75	149.70
40	26.00	237.52	90		
45	26.75	224.38			

Tabla 5.25.

Posición de la tecla - frecuencia

$$p = 1/6$$

X	L	(Hz)	X	L	(Hz)
	20.00	390.84		26.75	218.48
	20.75	363.09		27.50	206.72
	21.50	338.20		28.25	195.89
	22.25	315.79		29.00	185.89
	23.00	295.53		29.75	176.64
	23.75	277.16		30.50	168.06
	24.50	260.45		31.25	160.09
	25.25	245.21		32.00	152.67
	26.00	231.26		32.75	145.76
				33.50	139.30

En la página siguiente se ha graficado las relaciones anteriores ($m = 0.15$ y $p = 1/4, 1/5, \text{ y } 1/6$ respectivamente). Es interesante notar que, para diferentes valores de p , las curvas se mantienen equidistanciadas a lo largo de toda su trayectoria. Es decir que la única variación entre ellas es un desplazamiento.

Por aparte vemos que a medida que la parte de la tecla con grosor constante se va haciendo más grande en relación a la longitud total de la misma, la frecuencia aumenta.

Tomando la frecuencia máxima para $p = 1/4$ como c' , construimos la escala cromática de igual temperamento. La curva $12^{n/12}$ versus x_n se encuentra también en la gráfica 5.14. Observamos que esta curva tiene valores de frecuencia por encima de los de $p=1/4$. Por la discusión del párrafo anterior, sabemos que para una m constante, la separación entre estas dos curvas no se altera si variamos p . De manera que debemos experimentar con diferentes pendientes del teclado si queremos ajustar la curva del modelo a la curva de la escala cromática.

Antes de seguir con lo planeado, debe aclararse que, al contrario de las marimbas reales, aquí se han incluido los accidentes musicales (bemoles y sostenidos) dentro de un solo teclado. Es decir que las notas que corresponderían al doble teclado de la marimba, o bien a las notas negras del piano, están en una sola sucesión de barras. Si se desea construir el doble teclado (sacar los accidentes) y al mismo tiempo evitar la discontinuidad de la longitud entre teclas adyacentes, puede variarse H_1 ó H_2 hasta conseguir la longitud correspondiente a la frecuencia deseada.

A continuación se exponen los resultados para $m = 0.2$ y $p = 1/4$ y $1/6$ respectivamente.

Gráfica 5.14.

Curva frecuencia - posición para barras
en un teclado lineal.

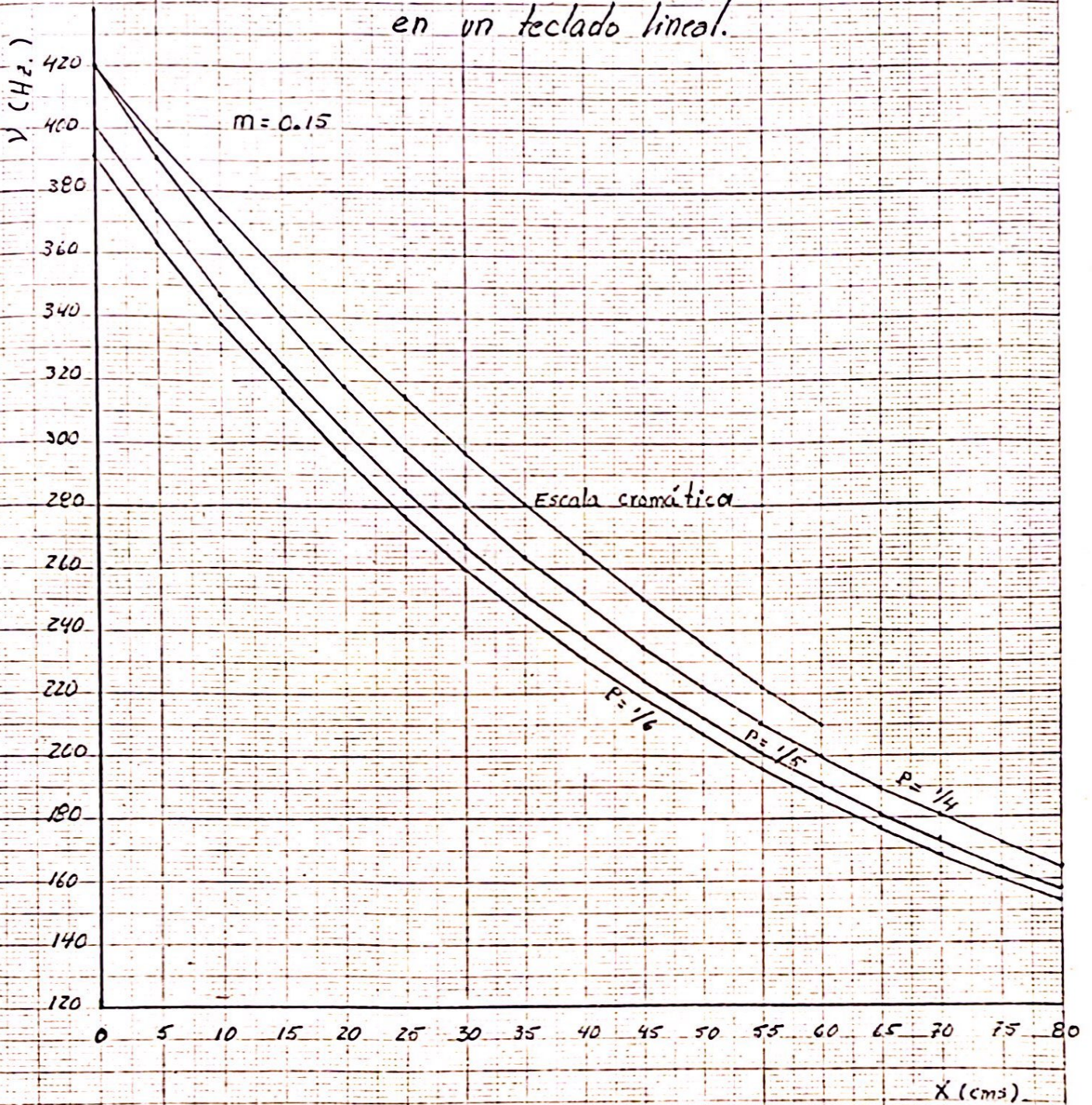


Tabla 5.26.

Posición de la tecla-frecuencia.

$m = 0.20$

$p = 1/4$

X	L(cms)	(Hz)	X (cms)	L(cms)	(Hz)
0	20.0	420.00	45	29.0	199.90
5	21.0	381.22	50	30.0	186.80
10	22.0	347.36	55	31.0	174.94
15	23.0	317.81	60	32.0	164.18
20	24.0	291.88	65	33.0	154.38
25	25.0	268.99	70	34.0	145.43
30	26.0	248.70	75	35.0	137.24
35	27.0	230.62	80	36.0	
40	28.0	214.44			

Tabla 5.27.

Posición de la tecla - frecuencia.

$m = 0.20$

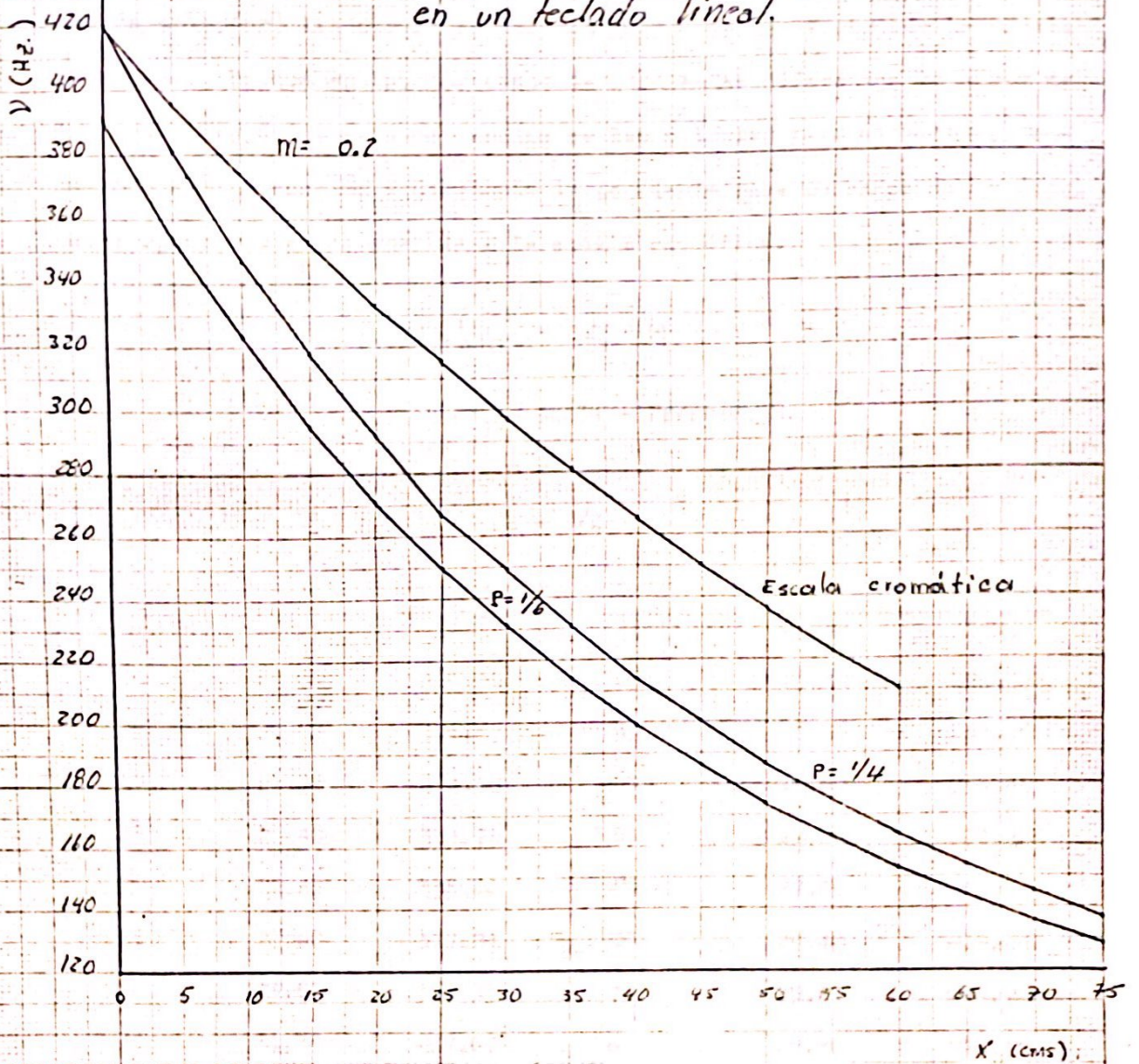
$p = 1/6$

X	L(cms)	(Hz)	X(cms)	L(cms)	(Hz)
0	20.0	392.00	35	27.00	214.45
5	21.0	354.50	40	28.00	199.41
10	22.0	323.01	45	29.00	185.90
15	23.0	295.53	50	30.00	173.70
20	24.0	271.41	55	31.00	162.68
25	25.0	250.14	60	32.00	152.67
30	26.0	231.26	65	33.00	143.56

60

Gráfica 5.15.

Curva frecuencia-posición para barras
en un teclado lineal.



x(cms)	L(cms)	(Hz)	X(cms)	L(cms)	(Hz)
70	34.00	135.24	75	35.0	127.62

Entos datos son presentados en la gráfica 5.15 . Notamos nuevamente que las curvas de $p = 1/4$ y $p = 1/6$ están equidistanciadas en la región de X_n trabajada. Sin embargo, para esta nueva pendiente (mayor que la anterior) las curvas se apartan mucho más de la curvatura de la escala cromática. Ya que en los dos casos de pendientes diferentes la curva de la escala cromática está por encima de las calculas para el modelo, procedemos a continuación a disminuir la pendiente para un valor de p fijo, hasta ajustarla en lo posible a la escala cromática.

Tabla 5.28.

Posición de la tecla - frecuencia.

$$m = 0.12$$

$$p = 1/4$$

X(cms)	L(cms)	(Hz)	X(cms)	L(cms)	(Hz)
0	20.00	420.30	45	25.40	260.59
5	20.60	396.17	50	26.00	248.70
10	21.20	374.06	55	26.60	237.60
15	21.80	353.76	60	27.20	227.24
20	22.40	335.06	65	27.80	217.54
25	23.00	317.81	70	28.40	208.44
30	23.60	301.85	75	29.00	199.90
35	24.20	287.07	80	29.60	191.88
40	24.80	273.35	85	30.20	184.33
			90	30.80	177.22

Tabla 5.29.

Posición de la tecla - frecuencia.

$$m = 0.13$$

$$p = 1/4$$

X (cms)	L (cms)	(Hz)	X(cms)	L(cms)	(Hz)
0	20.00	420.30	45	25.85	251.59
5	20.65	394.26	50	26.50	239.40
10	21.30	370.56	55	27.15	228.08
15	21.95	348.94	60	27.80	217.54
20	22.60	329.16	65	28.45	207.71
25	23.25	311.01	70	29.10	198.53
30	23.90	294.32	75	29.75	189.95
35	24.55	278.94	80	30.40	181.92
40	25.20	264.74	85		

Tabla 5.30.

Posición de la tecla - frecuencia.

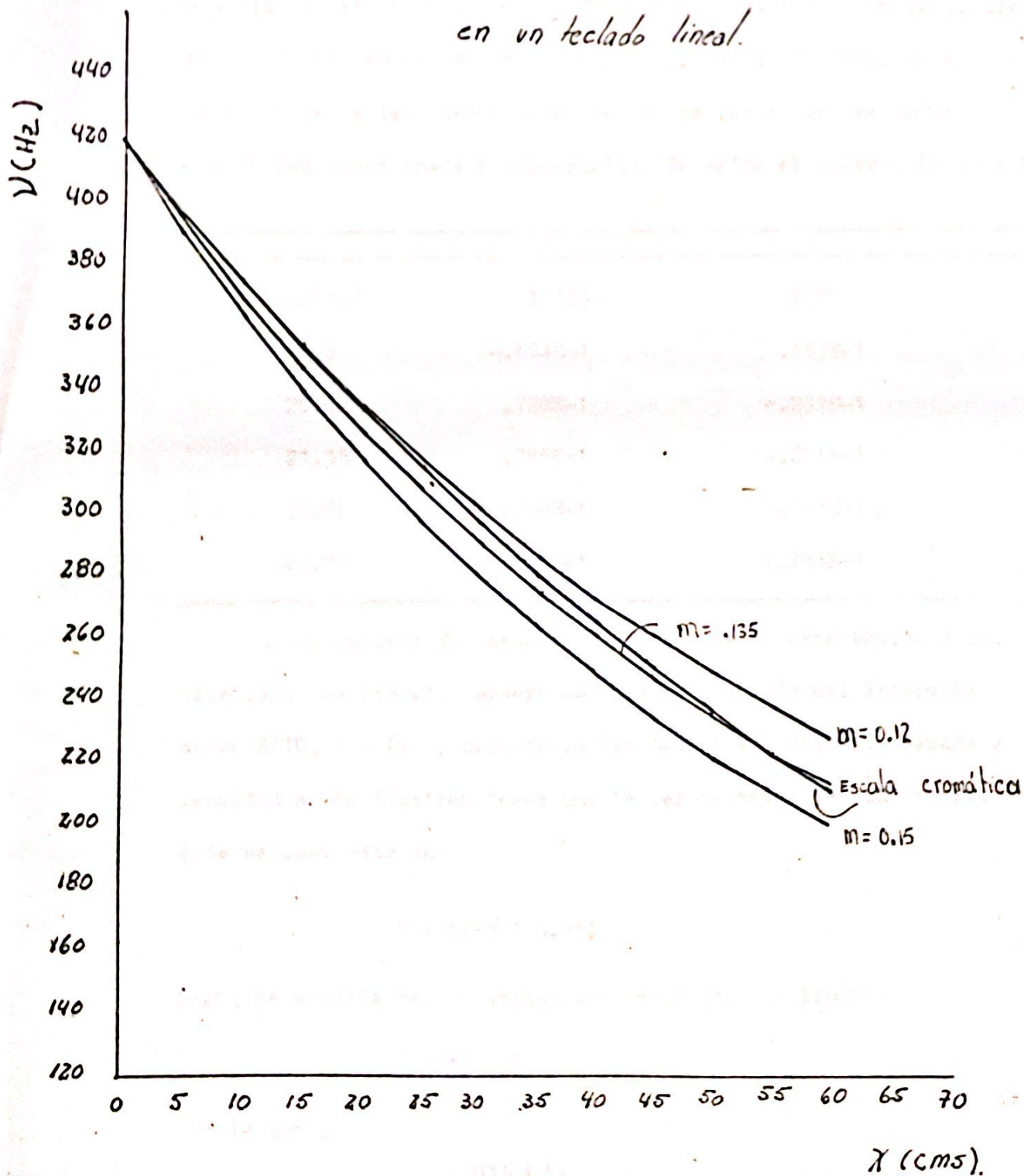
$$m = 0.135$$

$$p = 1/4$$

X	L (cms)	(Hz)	X(cms)	L(cms)	(Hz)
0	20.00	420.30	40	25.40	260.59
5	20.68	393.30	45	26.08	247.27
10	21.35	368.83	50	26.75	234.95
15	22.02	346.57	55	27.42	223.52
20	22.70	326.26	60	28.10	212.92
25	23.38	307.69	65	28.78	203.04
30	24.05	290.66	70	29.45	193.84
35	24.72	275.01	75	30.12	185.25

Gráfica 5.16.

Relación frecuencia- posición para barras
en un teclado lineal.



Nodos : Modelo de teclado lineal. Enseguida se encuentra la distribución de los nodos para un teclado lineal con $n=135$, $p = 1/4$ y distancia entre barras sucesivas de 5 cm. En la siguiente tabulación se muestra el número de la tecla, la longitud que le corresponde y los puntos pivotaes entre los cuales se encuentra uno de los nodos (modo fundamental). Se omite el valor calculado de V .

Longitud	X(10)	X(11)
20.0	-.624E-1	.183E-1
20.68	.788E-1	-.231E-1
21.35	.788E-1	-.231E-1
22.02	.788E-1	-.231E-1
22.70	.788E-1	-.231E-1

Si calculamos la posición donde ocurre el nodo mediante una interpolación lineal, observamos que está a .733 del intervalo entre X(10) y X(11), para todas las barras anteriores. Pasado a longitud en centímetros desde uno de los extremos de la barra, esto se convierte en:

$$Z = (L/N)(9.73)$$

Pero, de acuerdo con la definición de un teclado lineal:

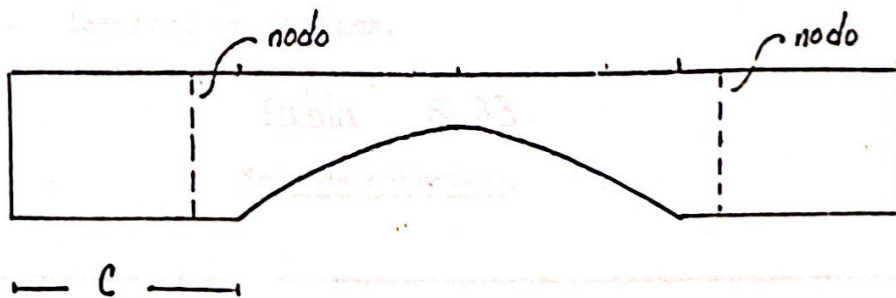
$$L = nX + L_0$$

por lo que:

$$Z = (nX + L_0)9.733/N = n'X + L_0' \text{ donde}$$

$$n' = n(9.733/N) \quad \text{y} \quad L_0' = L_0(9.733/N)$$

Por lo consiguiente, la posición de los nodos también varía linealmente. En el caso particular de $n = 0.135$ y $p = 1/4$, la pendiente es $\eta' = 0.026$. Hemos averiguado que la fracción de la distancia nodal desde el extremo más cercano de la barra a la longitud total de la misma es $10.733/N = .9.733/50 \approx .19$, mientras que se tenía que la fracción de la parte de la barra con sección transversal uniforme a la longitud total es de $p = 1/4 = 0.25$. Concluimos entonces que los nodos en todas las barras están en la región con grosor constante, a aproximadamente .80. La siguiente figura ilustra exactamente esta situación:



6. Análisis de sobretonos.

Esta vez estudiaremos la relación frecuencia fundamental contra el coeficiente de la parábola, para los primeros 5 modos normales de vibración. El objetivo es encontrar como se separan las frecuencias de diferentes modos para cada geometría. Se analizan los casos $C \neq 0$ y $C = 0$. El método es tabular los resultados obtenidos del programa de computadora DIAB (diferencias finitas) y graficar cada relación.

Al final se obtienen, a manera de ilustrar, las frecuencias y vectores propios de los primeros 5 modos normales de vibración para el caso $V = 0.08$. Dichos resultados son graficados y discutidos.

El modo fundamental se hizo usando de los resultados de la sección 5.33.

a. Caso $C = 0$: Consideramos una barra con $H_1 = 0.5$ cms y longitud de 20.0 cms.

Tabla 5.33.

Segundo sobretono.

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	3354.91	0.065	6455.19
0.025	4025.43	0.075	7033.77
0.035	4659.42	0.085	7606.04
0.045	5271.40	0.095	8173.24
0.055	5868.60		

Tabla 5.34.

67

Cuarto sobretono.

v	(Hz)	v	(Hz)
0.015	8878	0.065	17072
0.025	10759	0.075	18489
0.035	12474	0.085	19865
0.045	14080	0.095	21207
0.055	15606		

El modo fundamental ha sido tomado de los resultados de la sección

2a .

b. Caso $C \neq 0$. Consideremos una barra con $H1 = 0.5$ cms,
 $L = 20.0$ cms, $H2 = 2,0$ cms.

Tabla 5.35
Primer sobretono.

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	1441.5	0.065	2260.9
0.025	1651.9	0.075	2377.2
0.035	1835.5	0.085	2484.3
0.045	1993.5	0.095	2582.9
0.055	2133.84		

Tabla 5.36.
Segundo sobretono.

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	3354	0.065	6432
0.025	4117	0.075	6797
0.035	4818	0.085	7085
0.045	5440	0.095	7316
0.055	5979		

Tabla 5.37.
Tercer sobretono.

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	5827.5	0.075	10358
0.025	7185.1	0.085	10455
0.035	8339.8	0.095	10508
0.045	9214.2		
0.055	9811.0		
0.065	10169.0		

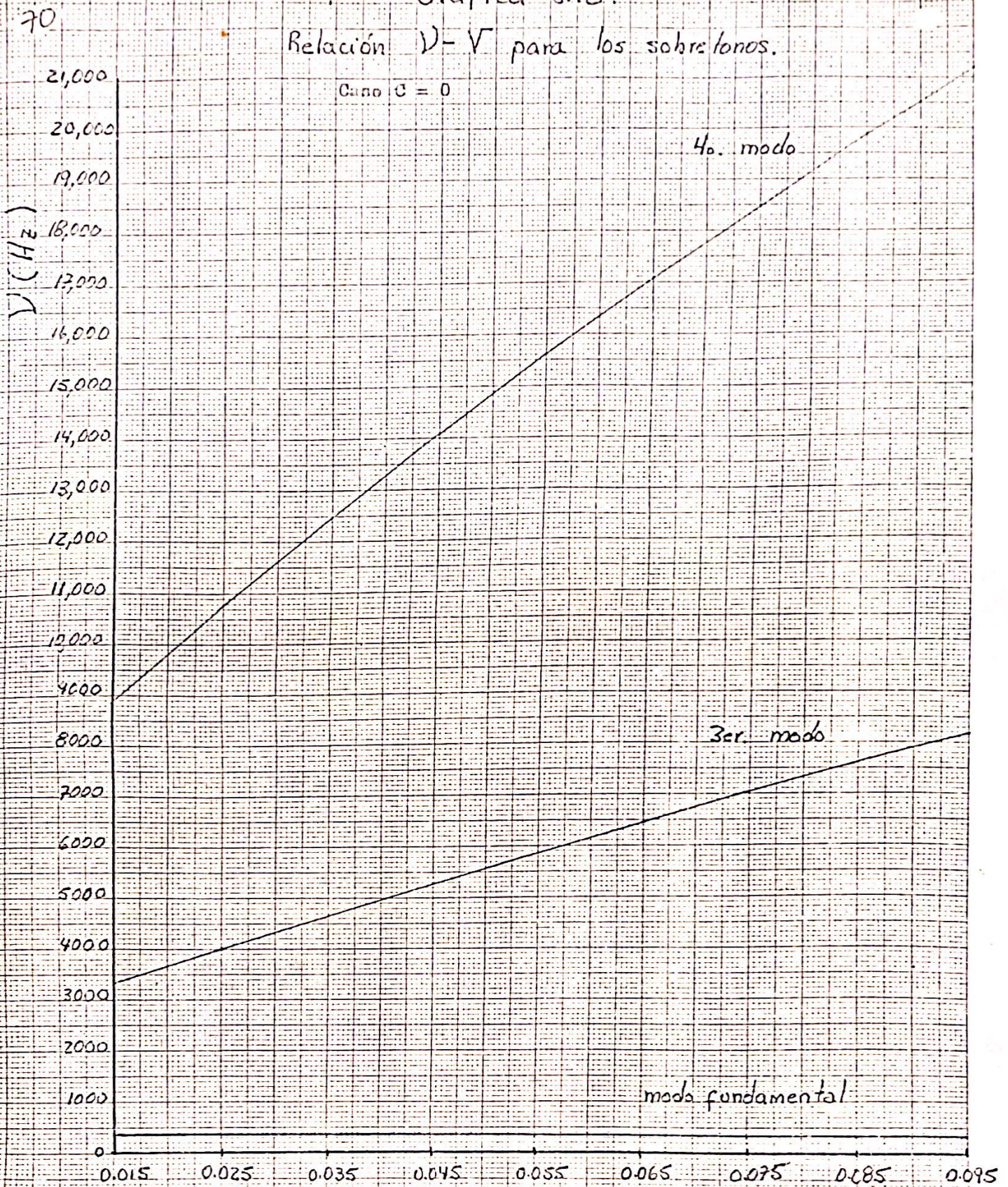
Tabla 5.38.
Cuarto sobretono.

V	(Hz)	V	(Hz)
0.015	8878	0.065	14194
0.025	10924	0.075	14423
0.035	12488	0.085	14675
0.045	13427	0.095	14959
0.055	13917		

Grafica 5.18.

Relación $\nu - \nu$ para los sobretonos.

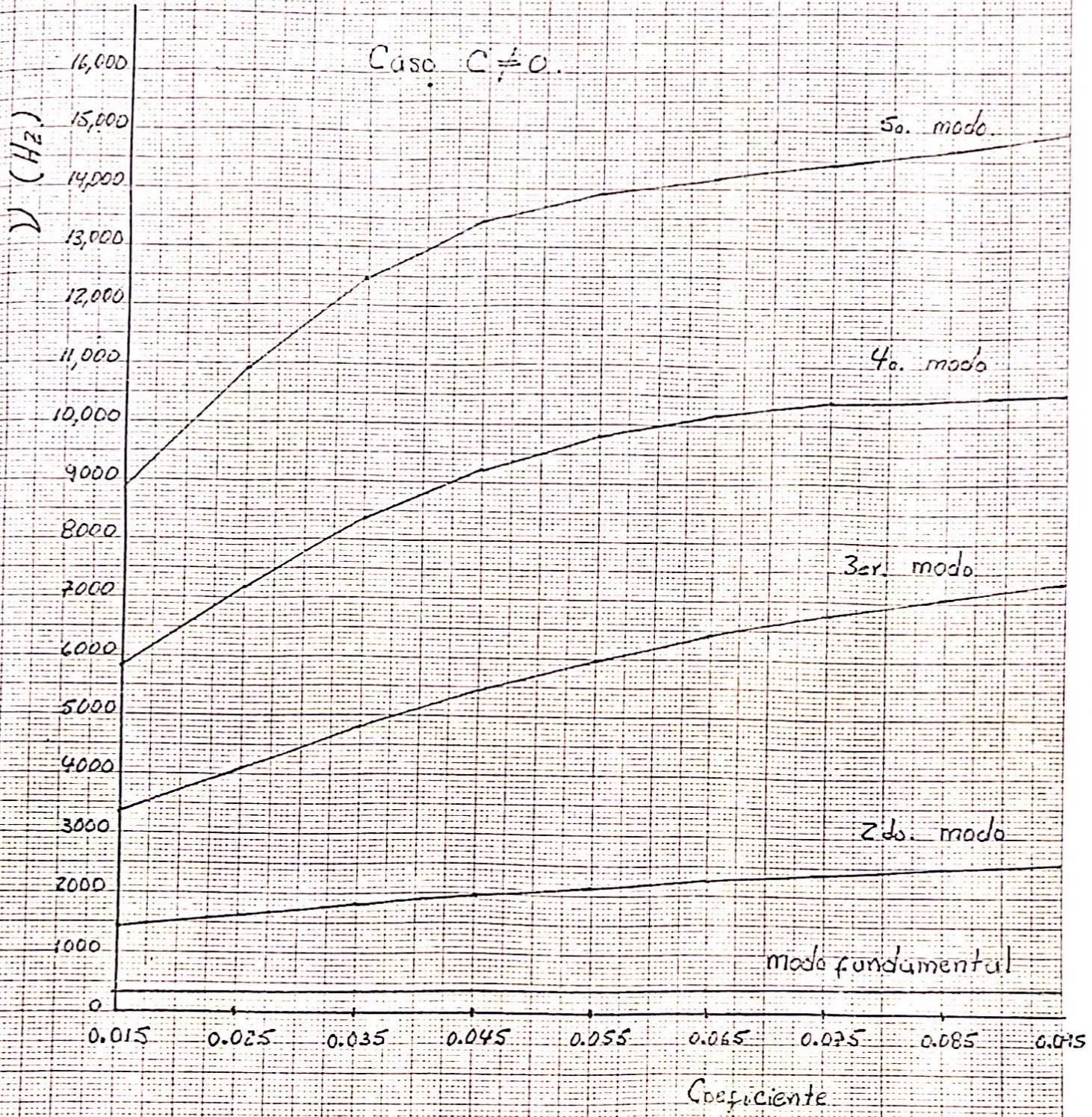
Caso $\sigma = 0$



Gráfica 5.19.

Relación $\nu - \nu$ para los sobretonos.

Caso $C \neq 0$.



La discusión de las gráficas anteriores es quizá la parte más importante de un estudio acerca de la naturaleza del sonido emitido por barras con la forma propuesta. Esto se debe a que el sonido recibido no es un tono puro sino la superposición de varios modos normales de vibración. La forma en que estén distribuidos las frecuencias para los sobretonos presentes tiene mucha influencia en el timbre del sonido y probablemente sea decisivo para identificar el instrumento del cual se origina. Claro que también entra en juego las intensidades relativas de cada modo de vibración, y la forma en que cada uno de éstos se va amortiguando. Los anteriores factores deben reunirse si se quiere sintetizar el sonido emitido por la tecla de marimba. Por el momento, nos limitaremos a investigar la distribución de frecuencias, dejando el resto para progreso posterior.

Para el caso $C = 0$ se ha observado que la frecuencia del modo fundamental disminuye a medida que el coeficiente de la parábola crece, lo cual es atribuible al incremento de la inercia de la barra en los extremos (cosa que no sucede en el caso $C \neq 0$). Sin embargo, vemos de la gráfica 5.18 que los sobretonos crecen de forma casi lineal

. La pendiente es más grande a medida que se incrementa el orden del modo de vibración, lo cual significa que las frecuencias de los diferentes modos se van separando a medida que el coeficiente de la parábola crece. Este resultado puede ser útil si lo que se desea es aislar el modo fundamental del resto de sobretonos. Ya que generalmente predomina el modo fundamental y los sobretonos son rápidamente amortiguados, esto produciría un tono bastante puro. Sin embargo, aquí entra en juego la forma en que se golpea la tecla, la dureza de las superficies en contacto, y la naturaleza misma del material (madera), lo cual requiere investigación por aparte

a nivel experimental.

Estudiando la gráfica 5.A se observa que, al contrario del caso $C = 0$, el modo fundamental también provee una frecuencia que crece con la constante de la parábola. Además se produce un acercamiento entre las curvas de frecuencia- V a medida que V se incrementa, lo cual no sucede en el caso $C = 0$. Las teclas de marimba tienen, en conclusión, agrupadas las frecuencias de sus sobretonos. La característica del sonido tendrá que ser, por consiguiente, diferente de las barras con curvatura a todo su largo.

A manera de ilustración, se muestra a continuación listados de las frecuencias y vectores propios correspondientes a los primeros 5 modos de vibración. Estos son graficados y luego comparados con los resultados conocidos de barras con sección transversal uniforme.

Modo fundamental:

DATOS ENTRADOS

N= 20
DL= 20.00
H2= 2.00
H1= .50
C= 5.67
COEFICIENTE a = .030
E/P = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

X(1)= -.8041719D+00
X(2)= -.6035881D+00
X(3)= -.4030934D+00
X(4)= -.2029107D+00
X(5)= -.3352081D-02
X(6)= .1952253D+00
X(7)= .3924636D+00
X(8)= .5873562D+00
X(9)= .7739180D+00
X(10)= .9307541D+00
X(11)= .1000000D+01
X(12)= .9307541D+00
X(13)= .7739180D+00
X(14)= .5873562D+00
X(15)= .3924636D+00
X(16)= .1952253D+00
X(17)= -.3352081D-02
X(18)= -.2029107D+00
X(19)= -.4030934D+00
X(20)= -.6035881D+00
X(21)= -.8041719D+00
FRECUENCIA= .43264270E+03 SH= .8663910E-03

- Program terminated.

Segundo modo:

DATOS ENTRADOS

N= 20
 OL= 20.00
 H2= 2.00
 H1= .50
 C= 5.67
 COEFICIENTE a = .060
 E/P = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

X(1)= -.8287365D+00
 X(2)= -.5292326D+00
 X(3)= -.2325446D+00
 X(4)= .5491534D-01
 X(5)= .3251547D+00
 X(6)= .5705542D+00
 X(7)= .7857040D+00
 X(8)= .9557708D+00
 X(9)= .1000000D+01
 X(10)= .7339981D+00
 X(11)= .3277042D-05
 X(12)= -.7339981D+00
 X(13)= -.1000000D+01
 X(14)= -.9557708D+00
 X(15)= -.7857040D+00
 X(16)= -.5705542D+00
 X(17)= -.3251547D+00
 X(18)= -.5491534D-01
 X(19)= .2325446D+00
 X(20)= .5292326D+00
 X(21)= .8287365D+00
 FRECUENCIA= .23953510E+04 SH= .29148585D-01

Stop - Program terminated.

76

Tercer modo:

DATOS ENTRADOS

N= 20
DL= 20.00
H2= 2.00
H1= .50
C= 5.67
COEFICIENTE a = .090
E/ = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

X(1)= -.1000000D+01
X(2)= -.5082949D+00
X(3)= -.4352275D-01
X(4)= .3400036D+00
X(5)= .5556269D+00
X(6)= .6550047D+00
X(7)= .5413398D+00
X(8)= .2084348D+00
X(9)= -.5655643D+00
X(10)= -.1903015D+01
X(11)= -.2831977D+01
X(12)= -.1903015D+01
X(13)= -.5655643D+00
X(14)= .2084348D+00
X(15)= .5413398D+00
X(16)= .6550047D+00
X(17)= .5556269D+00
X(18)= .3400036D+00
X(19)= -.4352275D-01
X(20)= -.5082949D+00
X(21)= -.1000000D+01
FRECUENCIA= .67439730E+04 SH= .17989971E+00

P - Program terminated.

Cuarto modo:

DATOS ENTRADOS

N= 20
DL= 20.00
H2= 2.00
H1= .50
C= 5.67
COEFICIENTE a = .080
E/ = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

X(1)= -.6585834E+00
X(2)= -.2656472E+00
X(3)= .8896232E-01
X(4)= .3360545E+00
X(5)= .4167682E+00
X(6)= .3113369E+00
X(7)= .4947829E-01
X(8)= -.3455790E+00
X(9)= -.8389116E+00
X(10)= -.1000000E+01
X(11)= -.5097848E-07
X(12)= .1000000E+01
X(13)= .8389115E+00
X(14)= .3455790E+00
X(15)= -.4947829E-01
X(16)= -.3113369E+00
X(17)= -.4167682E+00
X(18)= -.3360545E+00
X(19)= -.8896231E-01
X(20)= .2656471E+00
X(21)= .6585833E+00
FRECUENCIA= .59108790E+04 SH= .50000000E+00

Program terminated.

Quinto modo:

DATOS ENTRADOS

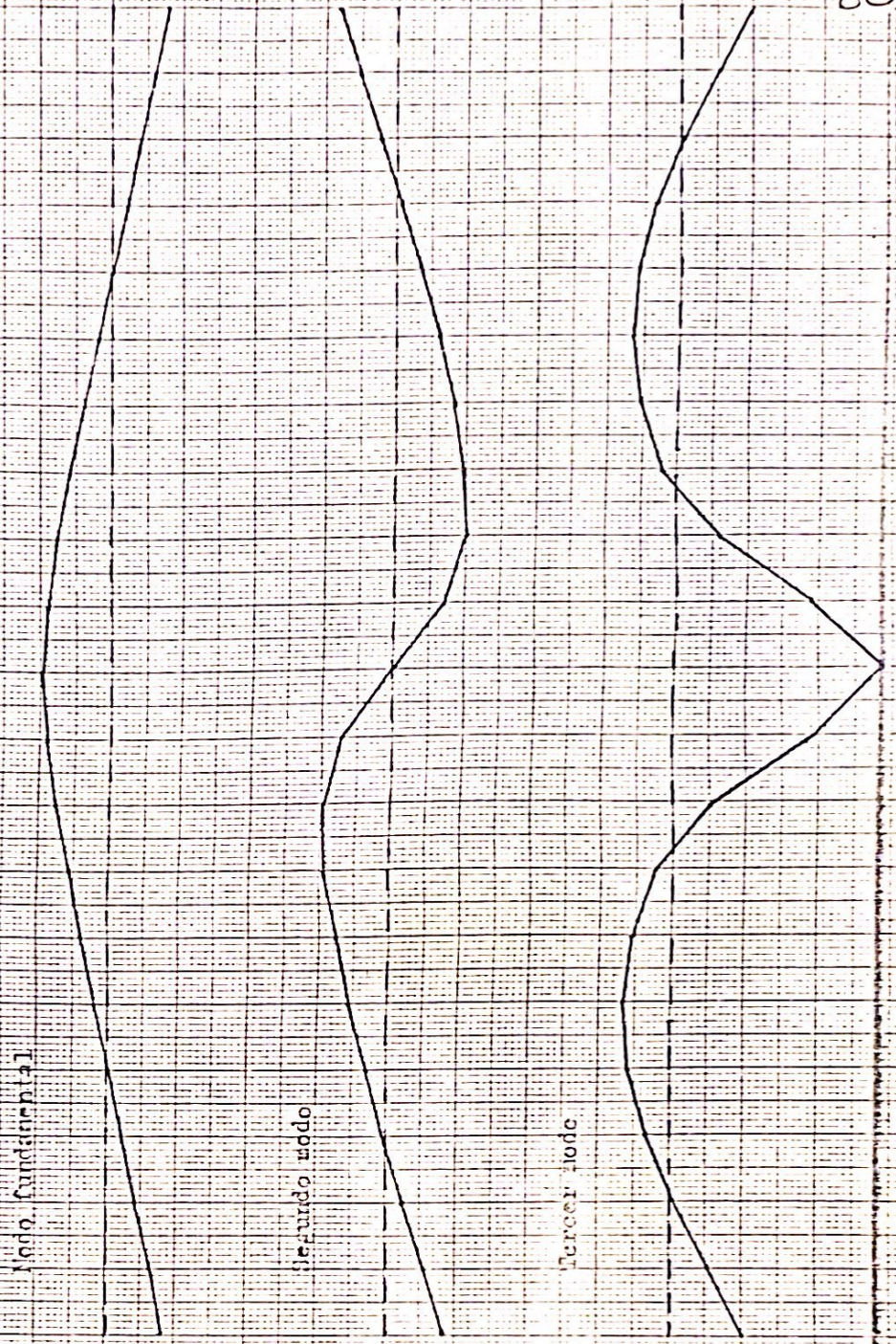
N= 20
DL= 20.00
H2= 2.00
H1= .50
C= 5.67
COEFICIENTE α = .030
E/ = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

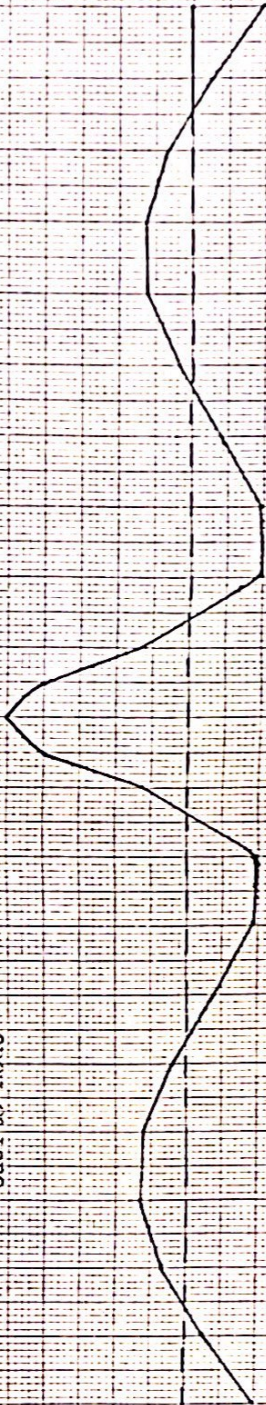
X(1)= .98262140+00
X(2)= .23465690+00
X(3)= -.30722910+00
X(4)= -.62549800+00
X(5)= -.56894470+00
X(6)= -.17141510+00
X(7)= .41040440+00
X(8)= .97838100+00
X(9)= .10000000+01
X(10)= -.57708720+00
X(11)= -.24632220+01
X(12)= -.57708720+00
X(13)= .10000000+01
X(14)= .97838100+00
X(15)= .41040440+00
X(16)= -.17141510+00
X(17)= -.56894470+00
X(18)= -.62549800+00
X(19)= -.30722910+00
X(20)= .23465690+00
X(21)= .98262140+00
FRECUENCIA= .13501830E+05 β = .50000000E+00

- Program terminated.

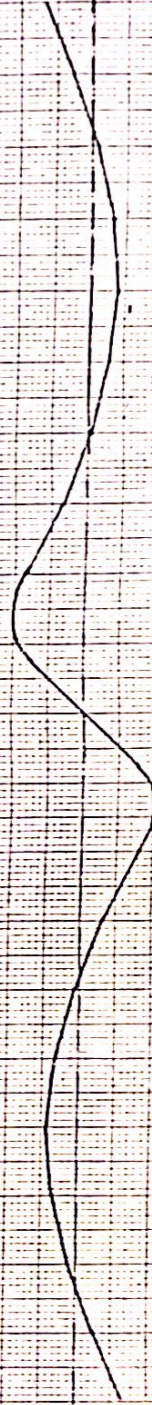
Gráfica 5.20.
Vectores propios para los primeros cinco modos normales de vibración



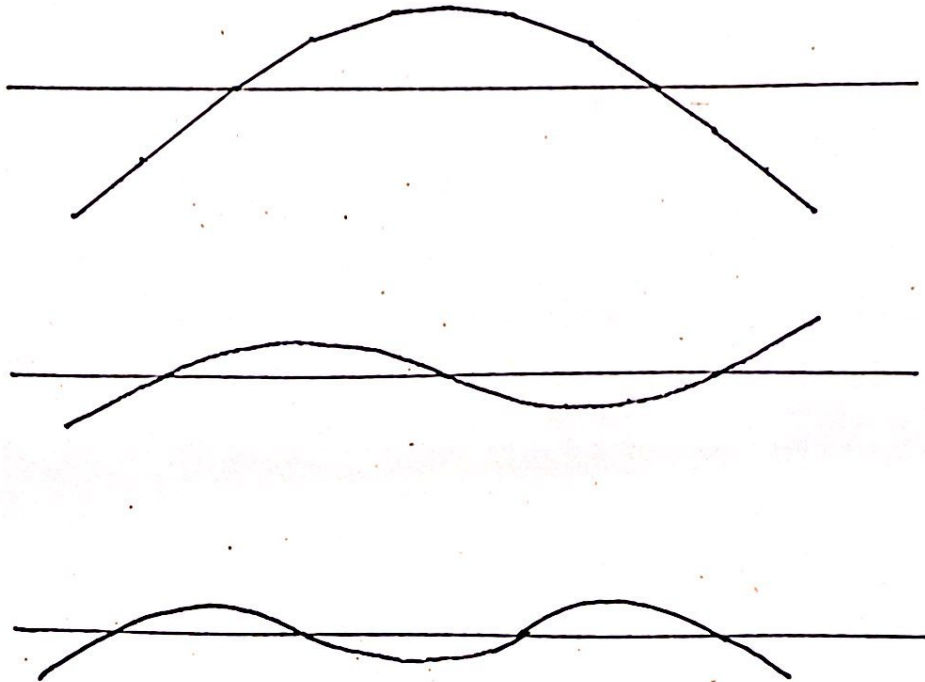
Quarto modo



Quinto modo



El mismo Rayleigh analizó las funciones propias correspondientes a diferentes modos de vibración de una barra con sección transversal uniforme y extremos libres. Para el modo fundamental, encontró que el desplazamiento en la mitad de la barra es menor que el producido en los extremos de la misma. Para el segundo modo, el desplazamiento en las cimas de la función propia es también menor que aquel en los extremos de la barra. Finalmente, para el tercer modo, observó que el desplazamiento en la cima de enmedio no es tan grande como en las de los lados:



Es fácil ver de las figuras 5.20 que las anteriores observaciones no se aplican al caso de barras con la forma propuesta aquí. Por ejemplo, para el modo fundamental, el mayor desplazamiento sí ocurre en el centro. Para el segundo modo de vibración, el desplazamiento en las cimas de la función es mayor que en los extre-

mos de la barra. En el tercer modo, el desplazamiento máximo en la cima de enmedio es mayor que en las cimas de los lados. En el cuarto modo puede verse esta misma característica (mayor amplitud en la mitad de la barra). En el quinto modo, las cimas de los lados son menores que las de enmedio, pero también son menores que el desplazamiento en cada extremo de la barra. Concluimos que debido a la reducción del grosor de la barra en la parte central, la mayor amplitud se produce en esa región, mientras que los extremos (con mayor inercia) recorren menos distancia.

El mismo procedimiento anterior se sigue para barras con $C \neq 0$, δ y ϵ totalmente distintos. El estudio de modos de la barra se realiza a partir de la ecuación de vibración de una barra con sección transversal variable en el eje x , considerando la 1^a condición como un free end en función de h, ν, β y densidad.

El mismo procedimiento anterior se sigue para barras con $C \neq 0$, δ y ϵ totalmente distintos.

El estudio de modos de la barra se realiza a partir de la ecuación de vibración de una barra con sección transversal variable en el eje x , considerando la 1^a condición como un free end en función de h, ν, β y densidad.

V . COMPARACION CON EL EXPERIMENTO.

En el laboratorio se midieron las frecuencias de barras con diferentes valores de los parámetros. Primero se construyeron barras en madera con $C = 0$. Se varió el coeficiente de la parábola entre 0.015 y 0.0875. Luego se comparó con los valores predichos por el método de Ritz y por el de diferencias finitas. Se hace el cálculo de porcentaje de diferencia entre los valores teóricos y el experimental. El módulo de Young de la madera se calcula a partir de la frecuencia de vibración de una barra con sección transversal uniforme del material y utilizando la ya conocida fórmula de frecuencia en función de L , E , H y densidad.

El mismo procedimiento anterior se sigue para barras con $C \neq 0$, ó teclas propiamente dichas.

El equipo utilizado en la medición de frecuencias es de un osciloscopio marca Heath modelo , un micrófono de baja impedancia (del utilizado en equipos de sonido normales), un generador de audio-frecuencias marca Heath modelo SG-5218, el amplificador de audio de una radiograbadora y las barras de madera. El arreglo es como se ilustra a continuación:

A. Barras con C = 0. (Caoba)

Tabla 5.39

Dimensiones de la barra.

Barra	Longitud (cms)	H1 (cms)	H2 (cms)	V
#1	19.9 ± .025	1.14 ± .0025	2.10 ± .0025	0.010
#2	19.9	1.13	2.63	0.015
#3	20.0	1.12	3.03	0.020
#4	19.9	1.03	3.49	0.025
#5	19.9	1.14	4.18	0.030
#6	22.6	2.48	2.48	0.000

La barra #6 es utilizada para calcular ρ/E . La frecuencia de dicha barra se midió en el laboratorio y fué de 1810 ± 50 Hz. Sabemos que para una barra uniforme, homogénea, de longitud L, y con grosor H,

$$\rho/E = \frac{H^2 m^4}{48\pi^2 L^4 \nu_f^2} \quad m \approx 4.73004 \quad (6-1)$$

donde ν_f es la frecuencia fundamental. Con la fórmula anterior computamos el dato requerido:

$$\rho/E = 7.6038E-12 \quad (\text{seg/cm})^2$$

La incertidumbre en la cantidad anterior la encontramos propagando el error de cada una de las cantidades involucradas a la cantidad final. En general, la fórmula de propagación de error para la cantidad F que depende de los parámetros A, B, ... es:

$$\lambda^2(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 \lambda^2(A) + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2 \lambda^2(B) + \dots \quad (6-2)$$

donde $\lambda(F)$ es la incertidumbre en F. Al aplicar (6-2) a (6-1) tenemos:

$$\lambda^2(P/E) = (P/E) \left[\left(\frac{Z}{H}\right)^2 \lambda^2(H) + \left(\frac{Y}{L}\right)^2 \lambda^2(L) + \left(\frac{Z}{V_f}\right)^2 \lambda^2(V_f) \right] \quad (6-3)$$

Sustituyendo números:

$$\lambda^2(P/E) = 1.7781 E^{-25} \quad \text{ó} \quad \lambda(P/E) = 0.422 E^{-12} \left(\frac{\text{seg}}{\text{cm}}\right)^2$$

Concluimos entonces que:

$$P/E = 7.6038E-12 \pm .42 E-12 \quad (\text{seg/cm})^2$$

Ahora se calcula la frecuencia teórica de cada una de las diez barras. A continuación se tabulan los resultados de RITZ y DIAB (diferencias finitas).

Tabla 5.40

Frecuencia fundamental teórica y experimental.

Barra	DIAB (Hz)	RITZ (Hz)	Experimental (Hz)
#1	1015	1019	1040
#2	985	995	1015

Barra	DIAB	RITZ	Experimental
#3	953	966	946
#4	865	884	844
#5	955	976	930

A continuación se tabulan los porcentajes de diferencia entre los resultados teóricos y el experimental.

Tabla 5.41

Porcentajes de diferencia con respecto al valor experimental de ν teórica de cada barra.

Barra	RITZ	Diferencias finitas
#1	2.0 %	2.4 %
#2	2.0 %	3.0 %
#3	2.1 %	0.7 %
#4	4.7 %	2.5 %
#5	5.0 %	2.7 %

B. Barras con $C \neq 0$.

Tabla 5.42

Dimensiones de las barras.

Barra	Longitud (cms)	H1 (cms)	H2 (cms)
#1	20.0 ± 0.025	0.52 ± 0.0025	1.90 ± 0.0025
#2	20.0	0.55	2.00
#3	20.0	0.58	2.00

Barra	Longitud	H1	H2
#4	19.9	0.50	1.98
#5	20.0	0.97	0.97

La frecuencia medida de la barra #5 es 1030 ± 25 Hz. Utilizando esta barra se calcula nuevamente la razón ρ/E , junto con su error propagado:

$$\rho/E = 5.96 \text{ E-12} \pm 0.5 \text{ E-12 (seg/cm)}^2.$$

A continuación se tabulan las frecuencias teóricas y la experimental para cada una de las teclas restantes.

Tabla 5.43

Frecuencia fundamental teórica y experimental.

Barra	RITZ (Hz)	DIAB (Hz)	Experimental (Hz)
#1	497	478	502
#2	559	537	564
#3	614	590	595
#4	583	560	568

Los porcentajes de diferencia con respecto al valor experimental se muestran a continuación.

Tabla 5.44

Porcentaje de diferencia entre la frecuencia teórica y su valor experimental.

Barra	RITZ	Dif. finitas
#1	1.0 %	5.0 %
#2	0.9 %	5.0 %
#3	3.2 %	1.8 %
#4	2.6 %	1.4 %

Vemos que para los dos casos estudiados, el porcentaje de diferencia no excede el 5%. Aunque se espera que el método de diferencias finitas dé mejores resultados, éste no pudo comprobarse aquí ya que las diferencias suelen ser grandes indistintamente para los dos métodos. Sabemos que las frecuencias calculadas por diferencias finitas son menores que las de Ritz, y son a su vez mayores que la frecuencia experimental. El hecho de que algunas veces la frecuencia del método de Ritz esté muy cercana al valor real, y éste a su vez por encima del obtenido a partir de diferencias finitas sugiere que la incertidumbre en las cantidades medidas para efectuar el cálculo teórico (H_1 , H_2 , P/E , la parábola misma, etc.) es tan grande que la incertidumbre en el valor teórico es del orden del tamaño de la diferencia de frecuencia entre los dos métodos. Para verificar lo anterior, encontramos a continuación la incertidumbre en la frecuencia de una barra con sección transversal uniforme, debido sólo a la incertidumbre en la constante P/E

Utilizando la fórmula (6-2) encontraremos que:

$$\lambda(\nu) = \frac{\nu}{2\xi} \lambda(\xi) + \xi = \rho/E$$

De manera que, si queremos calcular la incertidumbre en el valor teórico de la misma barra, sólo debido a la incertidumbre en ρ/E tendríamos:

$$\lambda(\nu) = \frac{1810 (.42E-12)}{2(7.6E-12)} \approx 50 \text{ Hz.}$$

Esto es cerca del 6 % de la frecuencia medida. Es claro que, al introducir también las incertidumbres en los demás parámetros, este porcentaje crece. Ahora, la diferencia de frecuencias de los dos métodos, para el rango de frecuencias trabajado, es como máximo del 4% (véase ^{gráfica} ~~sección~~ 5.1). Ya que la mayor contribución a la incertidumbre la da la constante ρ/E , lo cual se debe a la naturaleza no homogénea de la madera, el modelo deberá ser comparado con piezas construidas de material más homogéneo.

En términos generales, sin embargo, los métodos anteriores proveen la suficiente exactitud como para alcanzar la frecuencia deseada con una pequeña perturbación sobre la pieza construida.

VI .DISCUSION Y CONCLUSIONES.

Hemos visto con anterioridad que existen diferencias básicas entre las dos formas estudiadas: las barras con curva a todo su largo y las teclas propiamente dichas. En las primeras, la frecuencia disminuye con el coeficiente de la parábola, mientras que en las segundas aumenta. En las primeras, los sobretonos están dispuestos en intervalos cada vez mayores, mientras que en las segundas éstos tienden a agruparse.

La relación frecuencia- H_1 es, en buena aproximación, lineal (al igual que barras con sección transversal uniforme). El coeficiente de correlación lineal es de .999962 y .999513 para los casos $C=0$ y $C \neq 0$ respectivamente. De la misma manera, la variación de la frecuencia con la longitud de la barra se separa poco de el resultado para barras con sección transversal uniforme, es decir, $\nu \propto \frac{1}{L^2}$.

La relación frecuencia - H_2 presenta características especiales (véase gráfica 5.13). Vemos que cualquiera que sea el valor del coeficiente de la parábola ajustada a la barra (dentro del rango estudiado), el valor de H_2 que produce la frecuencia máxima está en un intervalo muy reducido (de $H_2 = 0.75$ a $H_2 = 1.0$). A partir de ese punto disminuye la curva monótonicamente. Por ejemplo, aquí se trabajó en la región de la curva donde la frecuencia va disminuyendo ($H_2 = 2.0$). El resultado anterior es importante en las teclas más pequeñas, donde la frecuencia es muy alta. Sin imponer grosores muy grandes a la barra, o bien longitudes extremadamente cortas, puede alcanzarse una frecuencia bien alta utilizando H_2 y V apropiados. Lo opuesto se aplicaría cuando la frecuencia de las barras debe ser muy baja.

Los resultados del modelo del teclado lineal propuesto son directamente aplicables al diseño de un teclado con una geometría bajo control (ya no a nivel empírico). En la sección 4 del capítulo 5 se ilustró un procedimiento para adaptar las frecuencias del teclado a la escala cromática. Vimos además que, para ese modelo, la posición de los nodos del modo fundamental también es una función lineal de la posición. En la gráfica #5.16, la curva que más se apega a la de escala cromática difiere en un máximo de 10 Hz. En la práctica, esta diferencia puede corregirse con una pequeña perturbación sobre la barra. Por otro lado, puede variarse de manera regular la distancia entre cada barra sucesiva del teclado, para que su frecuencia quede sobre la curva de escala cromática.

Vimos con anterioridad que la forma de la tecla causa que halla un "agrupamiento" de los sobretonos. Los intervalos entre éstos sobretonos afecta la calidad o timbre del sonido emitido. Por ejemplo, si los sobretonos se disponen en octavas, junto con el modo fundamental, puede lograrse un sonido homogéneo, en el cual no puede distinguirse si el sonido proviene de dos o un solo origen. Lo que es importante resaltar es que la forma en que se combinan los armónicos y la frecuencia fundamental da la riqueza del sonido emitido por un instrumento musical.

El resultado de que la mayor amplitud de vibración para todos los modos (y en particular los impares) ocurre en ^{el} centro de la barra, está de acuerdo con lo que podríamos intuir de la forma de la tecla. Ya que la parte central es más delgada, su menor inercia en comparación a los extremos hace que se desplace más.

Finalmente, se aclara que el estudio realizado aquí debe ser combinado con otros aspectos que deben ser tomados en cuenta para mejorar el tono producido por las teclas. Por ejemplo, debe estudiarse el medio con que se trabaja (madera). Cabe preguntarse si la calidad de los grandes instrumentos se relaciona con la naturaleza de la madera, o si la naturaleza de la madera ha influenciado el diseño de tal manera que se tendrían que hacer grandes cambios al instrumento si se sustituye el material por otro más accesible. Cabe preguntarse también si el tipo de madera es tan importante como se sugiere por los artesanos fabricantes de marimbas, es decir, si la madera del árbol de hormigo es especial para la construcción de las teclas. Mencionamos también el aspecto psico-físico de la acústica, el cual juega un papel importante en la percepción del sonido.

Un estudio posterior del tema involucrará, por tanto, a ramas diferentes del conocimiento como la física, la música, e incluso el proceso de fabricación del instrumento.

BIBLIOGRAFIA

- Banichuk, N.V. Problems and methods of optimal structural design. 1a. ed. en inglés, New York, Plenum Press, 313 pp.
1983
- Cannon, J.t.; S. Dostrovski. The evolution of dynamics. 1981 New York, Springer Verlag, Inc. 184 pp.
- Courant, R.; D. Hilbert. Methods of mathematical physics. 1953 Vol. 1, 1a. ed. en inglés, New York, Interscience Publishers, Inc. 560 pp.
- _____ ; Differential and Integral Calculus. Vol. 2, 1968 New York, Wiley Interscience. 682 pp.
- Den Hartog, J.P. Mechanical vibrations. 4th ed. 1956 New York, McGraw-Hill Book Company, Inc. 436 pp.
- Fenves, S.J. Métodos de computación en ingeniería civil. 1969 1a. edición en español. México, Editorial Limusa-Wiley, S.A. 590 pp.
- Fletcher, Harvey; Irving g.B. "Some experiments with the bass drum." Journal of the Acoustical Society of America. 1978
- Ford, H.; J. Alexander. Advanced mechanics of materials. 2a ed. Great Britain, Ellis Horwood Limited. 1977 672 pp.
- Gastinel, Noel. Análisis numérico lineal. España, 1975 Editorial Reverté, S.A. 372 pp.
- Goldstein, H. Classical mechanics. U.S.A., Addison-1965 Wesley Publishing Company, Inc. 399 pp.
- Hochstadt, H. The functions of mathematical physics. 1971 New York, Wiley Interscience. 322 pp.
- Hunter, S.C. Mechanics of continuous media. New York, 1983 John Wiley & Sons. 640 pp.
- Livesley, R.K. Matrix methods of structural analysis. 1975 "A" ed. Oxford, Pergamon Press. pp.

- Laura, P.A. Introducción a la teoría de vibraciones de sistemas discretos y continuos. Buenos Aires, Editorial Universitaria. 217 pp.
1973
- Livesley, R.K. Matrix methods of structural analysis. 2a. ed. Oxford, Pergamon Press, pp.
1975
- Love, A. E. H. A treatise of the mathematical theory of elasticity. 4th. ed. Dover Publications, Inc. New York. 643 pp.
1944
- Mabie, H.; C.B. Rogers. "Transverse vibrations of double tapered cantilever beams with end supports and with end mass." The Journal of the Acoustical Society of America. 55 (5):
1974
- Mohan, D.; H.B. Kingsbury. "Free vibrations of generally orthotropic plates". The Journal of the Acoustical Society of America. 54 (4): 922-927.
1971
- Morse, Philip M. Vibration and sound. 2a. ed. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc. pp.
1953
- _____ ; Herman Feshbach. Methods of theoretical physics. Vol. 1 y 2, U.S.A. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1978 pp.
- Przemieniecki, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill Book Company, 444 pp.
1968
- Prenter, P.M. Splines and variational methods. U!S!A! 1975 Wiley-Interscience. 322 pp.
- Rayleigh, J!W.S. The theory of sound. 2nd. ed. New York, 1945 Dover Publications. 480 pp.
- Sandberg, J.E.; J. Lindqvist. "Musical octaves and pitch". The Journal of the Acoustical Society of America. 54 (4): 922-926.
1973
- Smith, R.R.; J.T. Hunt y D. Barach. "Finite Element analysis acoustically radiating structures with application to sonar transducers." The Journal of the acoustical society of America. 54 (5): 1277-1288
1973
- Sokolnikoff, I.S. Mathematical theory of elasticity. 2a. ed. New York, McGraw-hill Book Company. 476 pp.
1956
- Sun, C.T.; S.H. Yang. Contact Law and impact responses of laminated composites. Purdue University, Indiana. 1980 103 pp.

Taylor, C.A. "Musical acoustics". Contemporary Physics,
1979 20 (5):

Timoshenko, S.; D.H. Young ad W. Weaver Jr. Vibrations
1974 problems in engineering. 4a. ed. New York,
John Wiley & Sons. 521pp.

Tolstoy, Ivan. Wave propagation. U.S.A. McGraw-Hill,
1973 Inc. 466 pp.

Toshiyuki, S_akata. "Approximate formulas for natural
1977 frequencies of rectangular plates with linearly
varying thickness". Journal of the Acoustical
Society of America. 61 (4): 982-985.

Wang, P.C. Numerical and matrix methods in structural
1966 mechanics. New York, John Wiley & Sons, Inc.
426 pp.

APENDICE A.

Un programa de computadora para el método de Rayleigh-Ritz de obtener eigenvalores y sus eigenfunciones.

Aún cuando puede utilizarse para modos superiores de vibración, este programa se usa aquí solamente para calcular la frecuencia fundamental así como su eigenvector. Los parámetros que deben encontrarse son:

- N - el número de la discretización del dominio
- L - longitud de la barra
- H1 - grosor mínimo de la barra (en el centro).
- H2 - grosor máximo en la parte de la barra con sección transversal uniforme.
- V - coeficiente de la parábola
- ρ/E - razón densidad sobre módulo de Young.
- G - número de funciones aproximantes que desea usarse (máximo de ocho).

Todas las variables de trabajo se les asigna doble precisión. El tiempo de corrida es de aproximadamente 10 segundos.

Las salidas son los coeficientes o pesos de las funciones aproximantes, la frecuencia fundamental, y la eigenfunción valuada en veinte puntos pivotaes. A continuación se muestra un ejemplo de una corrida, luego viene un diagrama de flujo del programa (muy a grandes rasgos) y finalmente, el programa codificado en FORTRAN IV.

DATOS ENTRADOS

N= 20
CL= 20.00
H2= 2.00
H1= .50
C= 5.67
COEFICIENTE a = .030
E/P = .1000E-10

VECTOR PROPIO:

X(1)= .3531078D+00
X(2)= .1794829D+00
X(3)= .1536822D-01
X(4)= -.1200579D+00
X(5)= -.2067894D+00
X(6)= -.2312873D+00
X(7)= -.1911513D+00
X(8)= -.7359993D-01
X(9)= .1997051D+00
X(10)= .6719693D+00
X(11)= .1000000D+01
X(12)= .6719693D+00
X(13)= .1997051D+00
X(14)= -.7359993D-01
X(15)= -.1911513D+00
X(16)= -.2312873D+00
X(17)= -.2067894D+00
X(18)= -.1200579D+00
X(19)= .1536822D-01
X(20)= .1794829D+00
X(21)= .3531078D+00
FRECUENCIA= .67439730E+04 SH= .20000000D+00

Program terminated.

DATOS ENTRADOS:

N = 300
 L = 20.0 cms
 H1 = 0.5 cms
 H2 = 2.0 cms
 V = 0.08
 $\rho/E = 1.0 \text{ E } -11 (\text{seg}/\text{cm})^2$
 G = 6

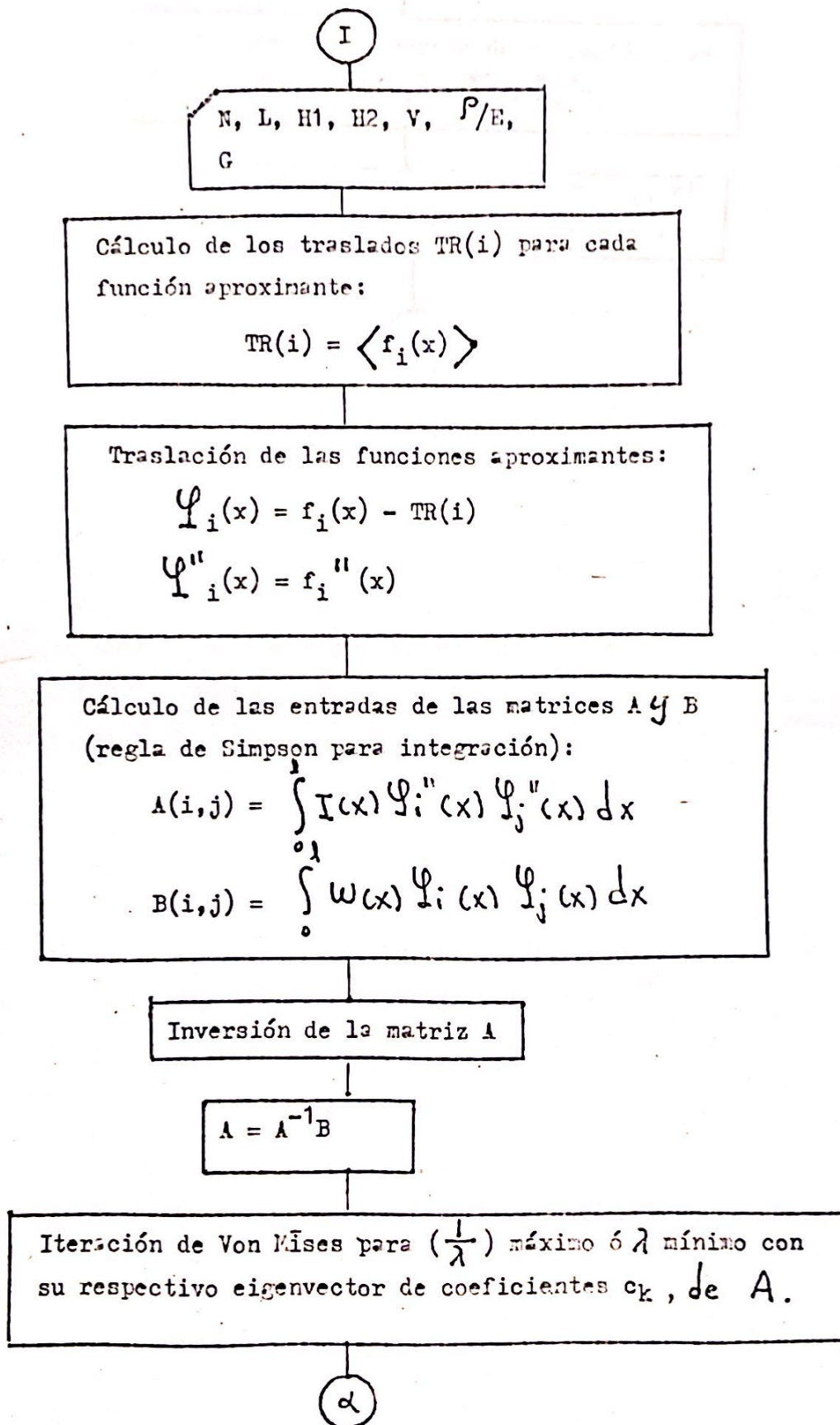
COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES APROXIMANTES:

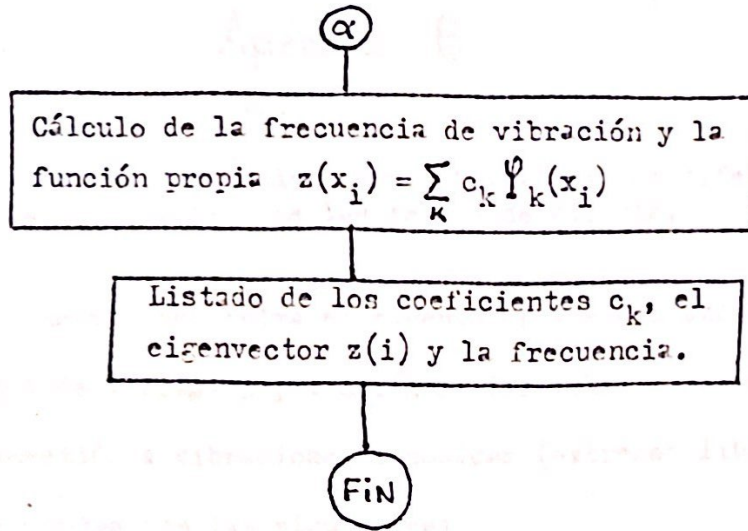
X(1) = .4921727D-01 X(2) = -.4090464D+00
 X(3) = .1000000D+01 X(4) = -.9780026D+00
 X(5) = .3382266D+00 X(6) = .2289546D-03

FRECUENCIA = .4410027D+03

Z() = -3.081721E-001
 Z() = -1.488826E-001
 Z() = 6.973302E-003
 Z() = 1.588412E-001
 Z() = 3.107297E-001
 Z() = 4.660597E-001
 Z() = 6.223732E-001
 Z() = 7.695217E-001
 Z() = 8.917929E-001
 Z() = 9.726488E-001
 Z() = 1.0000000
 Z() = 9.700439E-001
 Z() = 8.893466E-001
 Z() = 7.678397E-001
 Z() = 6.244652E-001
 Z() = 4.720579E-001
 Z() = 3.185294E-001
 Z() = 1.651553E-001
 Z() = 9.615037E-003
 Z() = -1.489235E-001
 Z() = -3.081721E-001

DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL PROGRAMA RITZ.





Apéndice B

Programa de computadora para el análisis de diferencias finitas de la vibración de las teclas de marimba.

Este programa encuentra el eigenvalor y eigenfunción del modo fundamental de vibración y también de los sobretonos de la tecla de marimba sometida a vibraciones armónicas (extremos libres).

Las entradas son las siguientes:

N - número de la discretización o partes en que se divide la región del dominio.

OL - longitud de la barra

H2 - grosor máximo de la barra (en la parte con sección transversal uniforme).

RAZ - razón densidad sobre módulo de Young.

V - coeficiente de la parábola.

SH - desfase producido sobre la matriz de la ecuación

$Ax = \lambda x$ para obtener los sobretonos (ó bien en el caso más general $Ax = \lambda Bx$)

El valor del desfase apropiado para conseguir determinado sobretono se obtiene fácilmente por prueba y error.

Las salidas son el eigenvector correspondiente al modo investigado y su frecuencia de vibración. A continuación se muestra una corrida, luego se presenta un diagrama de flujo del programa (muy a grandes rasgos) y finalmente el programa codificado en FORTRAN IV.

DIAGRAMA DE FLUJO (DIAB)

