
Diseño e implementación de un sistema modular
para la captura de datos de sistemas mecánicos
traslacionales para simulaciones basadas en
Linear Graph Modeling

Jorge Enrique Muñiz Fuentes



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería



**Diseño e implementación de un sistema modular para la
captura de datos de sistemas mecánicos traslacionales para
simulaciones basadas en *Linear Graph Modeling***

Trabajo de graduación presentado por Jorge Enrique Muñiz Fuentes
para optar al grado académico de Licenciado en Ingeniería Mecatrónica

Guatemala,

2025

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería




**Diseño e implementación de un sistema modular para la
captura de datos de sistemas mecánicos traslacionales para
simulaciones basadas en *Linear Graph Modeling***

Trabajo de graduación presentado por Jorge Enrique Muñoz Fuentes
para optar al grado académico de Licenciado en Ingeniería Mecatrónica

Guatemala,

2025

Vo.Bo.:

(f) 

Dr. Luis Alberto Rivera Estrada

(f) 

M.Sc. Carlos Esquit Hernández

Fecha de aprobación: Guatemala, 20 de noviembre de 2025.

Agradezco profundamente a mis padres por todos los años de esfuerzo, sacrificio y dedicación con los que me han bendecido, permitiéndome alcanzar mis sueños. Gracias de corazón por impulsarme a seguir lo que me apasiona y por ser siempre mi refugio incondicional.

A ti, Friedrich, gracias por haber sido un hermano a pesar de no compartir lazos de sangre. Gracias por acompañarme a descubrir mi vocación e inspirarme en cada proyecto. Aunque ya no estés con nosotros, tu recuerdo continúa siendo una guía y una fuente de motivación constante.

Agradezco a mi novia Angela, por siempre brindarme su apoyo y estar conmigo en todos esos momentos donde creí que no podía seguir adelante. Gracias por compartir esta etapa tan bonita conmigo, y por la oportunidad de cerrarla juntos.

Agradezco a todos los catedráticos que me han apoyado e inspirado a lo largo de la carrera, por las oportunidades brindadas y las puertas que me han abierto.

Un agradecimiento especial a la ingeniera Magda Moscoso, por su confianza, apoyo y consejo tanto durante mi tiempo como alumno, como en el rol de auxiliar, y más allá en los espacios en los que me ha permitido aprender de su ejemplo.

A Pablo Mazariegos, gracias por la oportunidad de colaborar con él, así como por el apoyo brindado en la asesoría no oficial del diseño mecánico y en múltiples solicitudes de fabricación.

Finalmente, a mi asesor Luis Rivera, por el seguimiento tan cercano, la disposición constante para atender mis necesidades y la guía que me ayudó a sobrellevar los momentos de mayor estrés.

Prefacio	I
Índice de figuras	V
Índice de cuadros	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Metodologías de modelado interdisciplinario	3
2.2. Herramientas de simulación de múltiple dominio	4
2.3. Plataformas para captura de datos de sistemas mecánicos	4
2.4. Ecosistema de captura de datos Robotat	5
3. Justificación	6
4. Objetivos	8
4.1. Objetivo general	8
4.2. Objetivos específicos	8
5. Definición del problema	9
6. Marco teórico	10
6.1. Modelado de grafos lineales	10
6.2. Modelado de sistemas mecánicos	13
6.3. Transformaciones homogéneas	16
7. Diseño y fabricación de prototipos del sistema mecánico	18
7.1. Requisitos de funcionamiento	18
7.2. Primer acercamiento de diseño	21

7.3. Segundo acercamiento de diseño	27
7.4. Tercer acercamiento de diseño	32
8. Desarrollo de la aplicación para rastreo de masas	40
8.1. Aplicación con Matlab	40
8.2. Aplicación con Python	42
9. Validación de datos experimentales de diseño final	43
9.1. Diseño experimental	43
9.2. Análisis de datos	44
10. Concordancia con LGM	48
10.1. Conteo estructural	49
10.2. Ecuaciones elementales	50
10.3. Continuidad y compatibilidad	50
10.4. Modelo dinámico	51
10.5. Espacio de estados	51
10.6. Función de transferencia	51
11. Conclusiones	53
12. Recomendaciones	55
13. Referencias	56
14. Anexos	59
14.1. Diseño y fabricación de prototipos	59

Índice de figuras

1.	Sistema dinámico industrial	3
2.	Grafo orientado de 4 nodos y 5 ramas	11
3.	Primer prototipo de resorte: vista en sección y pieza fabricada	22
4.	Ejemplo de medición de parámetros de resorte	22
5.	Ensamblaje y prototipo impreso de amortiguador	24
6.	Falla de rosca de prototipo SLA	24
7.	Prototipo del sistema de anclaje	26
8.	Diseño de primer carruaje de masas	28
9.	Diseño de primer pared de montura en Robotat	28
10.	Vista de sección de resorte de tensión	29
11.	Vista de sección de resorte de compresión	29
12.	Vista de sección de ensamblaje de resorte	30
13.	Ensamblaje de resorte fabricado	31
14.	Montaje del sistema completo	31
15.	Ensamblaje de carruaje de masas	33
16.	Diseño de pared de montaje	33
17.	Diseño final del encapsulado de resortes	35
18.	Fabricación de ejes metálicos en torno	36
19.	Prototipos impresos con PA12-CF	37
20.	Montaje de amortiguador	39
21.	Diseño final del sistema montado en Robotat	39
22.	Aplicación de captura de datos en Matlab	41
23.	Posición inicial de configuración de pruebas de resortes	41
24.	Aplicación de captura de datos en Python	42
25.	Modelo masa–resorte–amortiguador anclado a tierra	44
26.	Ejemplo de datos obtenidos para un resorte en compresión	45
27.	Distribución de coeficientes de amortiguamiento por viscosidad del aceite	47
28.	Grafo lineal de modelo masa–resorte–amortiguador anclado a tierra	49

29.	Plano de placa deslizante	61
30.	Vista lateral de segundo prototipo en tensión	61
31.	Vista aérea de segundo prototipo en tensión	62
32.	Posición final de configuración de pruebas de resortes	62

Índice de cuadros

1.	Variables de flujo y esfuerzo por dominio	12
2.	Resultados del experimento de validación del resorte	23
3.	Dimensiones diseñadas y reales de prototipos SLA	25
4.	Dimensiones diseñadas y reales de prototipos de amortiguador	25
5.	Dimensiones de resortes de compresión seleccionados en caja <i>Dianrui</i>	34
6.	Longitud de carrera de los empaquetados de resorte	38
7.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.3 mm	46
8.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 20 WT	47
9.	Matriz de requerimientos funcionales de los componentes del sistema mecánico	59
10.	Dimensiones de resortes de compresión disponibles en caja <i>Tactix</i>	60
11.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.3 mm	63
12.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.4 mm	63
13.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.5 mm	63
14.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.6 mm	64
15.	Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.7 mm	64
16.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 20 WT	64
17.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 25 WT	64
18.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 30 WT	65
19.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 35 WT	65
20.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 40 WT	65
21.	Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 45 WT	65

Este trabajo presenta el diseño, construcción e implementación de un sistema mecánico modular orientado a la caracterización experimental de sistemas traslacionales de masas, resortes y amortiguadores, con el propósito de generar datos confiables para la validación de la metodología *Linear Graph Modeling* (LGM). El sistema fue concebido para replicar el comportamiento de un modelo lineal de parámetros concentrados, permitiendo la sustitución rápida de componentes y garantizando una respuesta lineal invariante en el tiempo.

El proceso de diseño incluyó tres iteraciones que abarcaron modelado CAD, impresión 3D y evaluación de prototipos. Se desarrollaron empaquetados universales para resortes basados en un conjunto comercial con longitudes constantes, así como un sistema de anclaje modular para amortiguadores de aceite cuya constante de amortiguamiento depende de la viscosidad del fluido. Paralelamente, se construyeron carruajes de masas compatibles con guía tipo V-slot y con monturas para esferas de rastreo OptiTrack, integrándose el sistema al ecosistema Robotat.

Se desarrollaron aplicaciones en Matlab y Python para la adquisición y procesamiento de datos, logrando una frecuencia de muestreo máxima de 70 Hz mediante MQTT. Se ejecutaron 192 experimentos de resortes y 96 de amortiguadores, y los parámetros dinámicos se estimaron mediante *System Identification Toolbox*. Los valores experimentales de rigidez presentaron errores menores al 15 % respecto al modelo teórico, y los amortiguadores mostraron un ajuste promedio de 96.33 %.

Los resultados validan la funcionalidad del sistema, confirman la concordancia con LGM y establecen una base experimental sólida para futuras investigaciones en modelado multi-dominio e integración de técnicas de simulación híbrida.

Palabras clave: sistemas dinámicos, grafos lineales, caracterización experimental, resortes, amortiguadores.

This work presents the design, construction, and implementation of a modular mechanical system intended for the experimental characterization of translational mass–spring–damper systems, with the goal of providing reliable data for validating the Linear Graph Modeling (LGM) methodology. The system was conceived to replicate the behavior of a linear time-invariant lumped-parameter model, enabling rapid component substitution and ensuring consistent linear dynamics.

The design process included three iterations involving CAD modeling, 3D printing, and prototype evaluation. Universal spring housings were developed based on a commercial assortment with constant lengths, and a modular mounting system was created for oil-based dampers whose damping coefficient depends on fluid viscosity. Mass carriages were designed to interface with V-slot rails and to support OptiTrack reflective markers, enabling full integration with the Robotat motion-capture ecosystem.

Data-acquisition applications were developed in Matlab and Python, achieving a maximum sampling frequency of 70 Hz via MQTT. A total of 192 spring experiments and 96 damper experiments were performed, and dynamic parameters were estimated using the System Identification Toolbox. Experimental spring stiffness values exhibited errors below 15 % relative to theoretical predictions, while dampers achieved an average model fit of 96.33 %.

Results confirm the system’s functionality, validate its agreement with LGM, and establish a robust experimental foundation for future research in multidomain modeling and hybrid simulation techniques.

Keywords: dynamic systems, linear graph modeling, experimental characterization, springs, dampers.

El estudio de sistemas dinámicos es fundamental en ingeniería, pues permite describir, analizar y predecir el comportamiento de fenómenos físicos mediante modelos matemáticos. Entre estos sistemas, los modelos traslacionales de masa–resorte–amortiguador representan una herramienta clave tanto para la docencia como para la investigación, ya que ofrecen una estructura simple pero suficiente para estudiar vibraciones, disipación de energía y comportamiento lineal de parámetros concentrados.

En este contexto, el presente trabajo desarrolla la infraestructura necesaria para obtener datos experimentales de sistemas mecánicos traslacionales lineales e invariantes en el tiempo, con el fin de sentar las bases para la validación de la metodología *Linear Graph Modeling* (LGM). Para ello, se diseñó, construyó e integró un sistema modular compuesto por masas intercambiables, empaquetados de resortes y amortiguadores comerciales modificados, montado sobre una guía tipo V-slot. Esta modularidad permite configurar múltiples arreglos dinámicos de forma rápida y controlada.

El sistema se integró con el ecosistema Robotat mediante el uso de marcadores retroreflectivos y el sistema de captura OptiTrack, lo que permite registrar la posición del carruaje con alta precisión. Asimismo, se desarrollaron aplicaciones en Matlab y Python para la adquisición, procesamiento y exportación de datos, alcanzando frecuencias de muestreo de hasta 70 Hz mediante comunicación MQTT.

La metodología incluyó tres iteraciones de diseño mecánico en software CAD, la fabricación de prototipos mediante impresión 3D, la selección y modificación de elementos comerciales, y la ejecución de 288 pruebas experimentales para caracterizar resortes y amortiguadores. Posteriormente, se emplearon técnicas de identificación de sistemas para estimar parámetros dinámicos y validar su concordancia con el modelo lineal y con el marco teórico de LGM.

Los resultados demuestran que el sistema es estable, modular y capaz de generar datos experimentales confiables, con errores menores al 18% en rigidez de resortes y ajustes superiores al 96% en amortiguadores. En conjunto, el prototipo constituye una herramienta

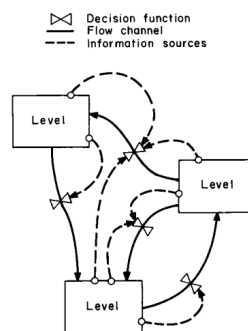
didáctica y de investigación versátil y económica, y establece una base sólida para futuros trabajos en modelado multidominio, simulación híbrida y control de sistemas mecánicos.

El modelado de sistemas físicos es una herramienta fundamental de ingeniería. Esencialmente consiste en describir la dinámica de dichos sistemas; es decir, determinar su respuesta variante en el tiempo ante estímulos externos [1]. Se han desarrollado diversas metodologías para representar la dinámica de los sistemas en función del dominio físico al que pertenece el sistema. Sin embargo, es deseable una forma para unificarlas.

2.1. Metodologías de modelado interdisciplinario

Forrester [2] definió formalmente una metodología para trabajar un sistema industrial interdisciplinario unificado llamado *Industrial Dynamics*, el cual se define como “el estudio de las características de información-retroalimentación de la actividad industrial”. A grandes rasgos, identifica las interacciones entre sistemas como flujos de materia y energía, como se ve en la Figura 1.

Figura 1. Sistema dinámico industrial



Nota. Muestra la representación de un sistema dinámico industrial. Imagen obtenida de [2].

Rowell [1] recopiló avances en modelado de elementos básicos mono puerto para sistemas de parámetros concentrados. Cada elemento puede ser representado por medio de nociones de nodos y ramas para crear interconexiones que muestren el flujo de la conservación de energía. La topología de grafo que utilizó se denomina “grafos lineales” (*linear graphs*) e identificó seis sistemas principales: mecánicos traslacionales, mecánicos rotacionales, eléctricos, térmicos, químicos y sistemas de fluidos.

En un trabajo similar, Broenink [3] hizo un recopilatorio análogo que representa el flujo de energía mediante “gráficas de enlace” (*bond graphs*). Este tipo de grafo denota la dinámica del sistema mediante vértices e idealiza uniones de energía (*bonds*) entre elementos en los bordes. Establece que los grafos son modelos no causales que pueden ser reutilizados y vistos como objetos, independientemente del dominio físico.

2.2. Herramientas de simulación de múltiple dominio

Gracias a los avances en modelado de sistemas físicos, se han desarrollado simuladores capaces de integrar múltiples dominios físicos. Uno de ellos es Modelica, un lenguaje orientado a objetos que aprovecha la representación mediante gráficos de enlace. Particularmente, se creó una librería denominada *BondLib*, que permite la simulación de los seis sistemas identificados por Rowell [4].

MathWorks desarrolló el entorno *Simulink* [5], un simulador que permite conectar elementos pertenecientes a diferentes dominios físicos para modelar la dinámica del sistema. Este entorno emplea diversas herramientas especializadas (*toolboxes*) diseñadas para representar cada tipo de sistema.

En años recientes, ha surgido una metodología que combina simulación analítica multi-dominio con datos experimentales, denominada “simulación híbrida” (*Hybrid Simulation*), apoyada por técnicas de aprendizaje automático (*machine learning*). Bas [6] define esta técnica como un método para obtener una comprensión más profunda de sistemas complejos. No obstante, su implementación resulta costosa desde el punto de vista computacional debido a los modelos analíticos involucrados. Por ello, se ha explorado el uso de modelos de aprendizaje automático implementados en *Python*, con el fin de realizar simulaciones híbridas en tiempo real a partir de datos experimentales obtenidos mediante análisis por elementos finitos en sistemas estructurales lineales.

2.3. Plataformas para captura de datos de sistemas mecánicos

Como alternativas para la obtención de datos experimentales, *Educational Control Products* (ECP) ofrece el modelo 210, un sistema mecánico traslacional que consiste en un conjunto configurable de masas, resortes y amortiguadores. Esta configuración permite la demostración de dinámicas de parámetros concentrados, así como la implementación de problemas de control genéricos [7]. Adicionalmente, en el *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) se desarrolló un sistema experimental que simula efectos de amortiguamiento mediante el uso de corrientes de Eddy, permitiendo así la variación de parámetros físicos [8].

2.4. Ecosistema de captura de datos Robotat

El Robotat es un ecosistema robótico desarrollado en la Universidad del Valle de Guatemala con el propósito de proporcionar un entorno controlado para experimentación en robótica e identificación de movimiento. Este sistema fue presentado por Camilo Perafán Montoya (2021) como parte de su trabajo de graduación, en el cual se integró un sistema de captura de movimiento de alta precisión basado en la tecnología *OptiTrack* [9].

El sistema de captura de movimiento OptiTrack permite registrar la posición y orientación de cuerpos rígidos dentro de un espacio tridimensional mediante la detección óptica de marcadores retroreflectivos. Estos marcadores se colocan en configuraciones específicas sobre los objetos o robots que se desean rastrear, permitiendo que las cámaras infrarrojas Prime^x41 triangulen su posición en el espacio con una precisión de aproximadamente ± 0.10 mm y una latencia de 5.5 ms [10].

El principio de funcionamiento del sistema se basa en la triangulación óptica: cada marcador es detectado simultáneamente por al menos dos cámaras, lo que permite calcular su posición tridimensional mediante la intersección de los rayos proyectados desde las cámaras hacia el marcador. A partir de la disposición espacial de los marcadores, el software Motive identifica los cuerpos rígidos, calcula su orientación en el espacio y genera su pose completa (posición y rotación) en tiempo real [11].

El modelado de sistemas físicos, especialmente mediante representaciones estructuradas como los grafos lineales, permite una visión unificada de la dinámica en distintos dominios físicos. Además, este enfoque puede integrarse en esquemas de simulación híbrida, en combinación con técnicas de aprendizaje automático, con el objetivo de reducir el costo computacional asociado a los modelos analíticos.

No obstante, la validación de esta metodología requiere datos experimentales provenientes de sistemas con características bien controladas y reproducibles, que muestren un comportamiento lineal de parámetros concentrados. En particular, los sistemas mecánicos traslacionales presentan desafíos significativos debido a su naturaleza frecuentemente no lineal.

Actualmente, existen pocas plataformas que permitan la recolección de este tipo de datos. Si bien es posible utilizar sistemas experimentales como los de ECP o MIT, o incluso acoplar el equipo Pasco disponible en los laboratorios de Física, estos presentan limitaciones tanto en la flexibilidad de configuraciones como en la metodología de adquisición de datos. A diferencia de otros dominios, como el eléctrico, donde es relativamente simple intercambiar componentes como resistencias, el ámbito mecánico carece de la misma facilidad de modularidad.

Este proyecto busca crear una infraestructura experimental que permita la obtención de datos de sistemas mecánicos traslacionales con comportamiento lineal e invariante en el tiempo. La construcción de este sistema facilitará el reemplazo y ajuste de componentes como masas, resortes y amortiguadores, permitiendo así una amplia variedad de configuraciones dentro de un entorno físico controlado. De esta manera, se busca alcanzar un nivel de modularidad y flexibilidad comparable al que se tiene en un circuito eléctrico, donde componentes como resistencias, capacitores o inductores pueden ser intercambiados con facilidad para modificar el comportamiento dinámico.

Adicionalmente, se propone integrar esta infraestructura con el entorno del Robotat, la cual es una plataforma que cuenta con el sistema de cámaras de captura de movimiento

OptiTrack. Esto permitirá aprovechar sus herramientas de medición y facilitará la adquisición de datos. De esta forma, se asegurará precisión y eficiencia en la recolección de datos experimentales.

Teniendo esta facilidad de captura de datos, se crea la oportunidad de utilizar estos datos de sistemas mecánicos traslacionales para realizar simulaciones híbridas basadas en la teoría de grafos lineales. Esto sería el primer paso para el desarrollo de un simulador multidominio que combine las ventajas analíticas de los grafos lineales con aprendizaje automático.

4.1. Objetivo general

Crear la infraestructura para obtener datos de sistemas mecánicos traslacionales lineales invariantes en el tiempo de parámetro concentrado para futura validación de la metodología *Linear Graph Modeling*.

4.2. Objetivos específicos

- Diseñar un sistema mecánico modular con comportamiento lineal invariante en el tiempo que permita realizar cambios de elementos con facilidad.
- Construir el sistema y verificar su funcionalidad sin importar la configuración seleccionada.
- Integrar el sistema modular con la infraestructura del Robotat para permitir la recolección de datos.
- Obtener y validar datos de varias configuraciones del sistema mecánico para construir una colección preliminar de datos que pueda utilizarse para la validación de la metodología de *Linear Graph Modeling*.

Definición del problema

La validación de datos de sistemas mecánicos para utilización en simulaciones basadas en grafos lineales resulta compleja debido a la falta de plataformas para adquisición de datos. Este proyecto incluyó el diseño y construcción de un sistema mecánico lineal traslacional cuyos componentes base se definieron como: masas, resortes y amortiguadores.

El sistema se diseñó para permitir cambios en la configuración de los parámetros de sus componentes con facilidad. Además, se integró este sistema con la infraestructura del Robotat utilizando marcadores para registrar la posición precisa de las masas. Así mismo, se utilizó Python para programar una interfaz gráfica que facilita la conexión y adquisición de datos. Este programa le da la opción al usuario para recolectar los datos de posición sin procesar en coordenadas absolutas, o realizar un preprocesamiento que devuelve la posición de las masas con respecto al punto de anclaje del sistema. Adicionalmente, se utilizó el sistema para recopilar datos de distintas configuraciones de parámetros, utilizando impulsos manuales y liberaciones desde posiciones iniciales como mecanismos de accionamiento mecánico.

Este trabajo no incluyó la implementación de mecanismos para impulso controlado del sistema. De igual forma, no profundiza en la generación de una base de datos extensiva para implementación y validación de la metodología de modelado por grafos lineales.

6.1. Modelado de grafos lineales

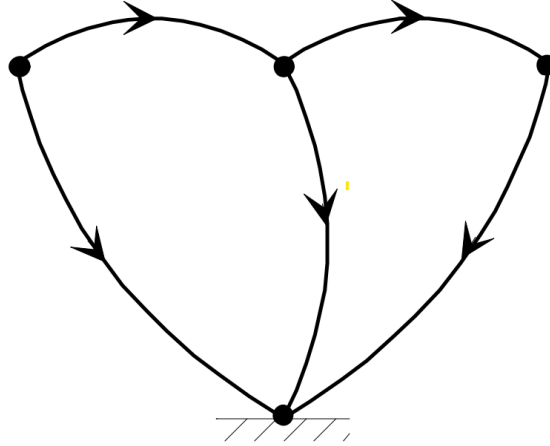
El modelado por medio de grafos lineales permite obtener una representación gráfica de un sistema y la interacción entre sus elementos. A partir del grafo lineal, es posible derivar un conjunto de ecuaciones diferenciales conocidas como ecuaciones de estado, cuyas variables son definidas como variables de estado. Estos parámetros permiten determinar la respuesta de un sistema ante estímulos externos [12].

Un grafo lineal se define como un conjunto de nodos y arcos. Los nodos representan puntos de conexión, es decir, las variables comunes entre elementos. Por otra parte, los arcos representan los elementos físicos del sistema mediante relaciones de flujo y esfuerzo [12].

6.1.1. Definición y fundamentos

Los grafos lineales pueden considerarse como un caso particular de grafos orientados. Un grafo orientado se caracteriza porque cada arco posee una dirección específica que conecta un nodo de origen con un nodo de destino, lo cual permite representar flujos unidireccionales de información, energía o materia dentro de un sistema. Esta propiedad es fundamental en el modelado, ya que garantiza que la formulación de las ecuaciones de conservación refleje adecuadamente la causalidad y la interacción entre los elementos [13].

Figura 2. Grafo orientado de 4 nodos y 5 ramas



Nota. Muestra un ejemplo de grafo orientado. Imagen obtenida de [14].

Es importante notar que, en un grafo orientado como el de la Figura 2, cada arco posee una dirección asignada de manera arbitraria, la cual no necesariamente coincide con la dirección real del flujo físico. Esta convención se utiliza ampliamente en el modelado por grafos lineales y permite establecer la matriz de incidencia, que describe la conectividad entre nodos y arcos [12]. Formalmente, si un grafo cuenta con n nodos y m arcos, su matriz de incidencia A es de dimensión $n \times m$, con entradas:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si el arco } j \text{ entra al nodo } i, \\ -1 & \text{si el arco } j \text{ sale del nodo } i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La matriz de incidencia constituye el punto de partida para formular las ecuaciones de conservación. En particular, garantiza el cumplimiento de las leyes de Kirchhoff generalizadas: la conservación de esfuerzos (fuerzas, voltajes, presiones) y la conservación de flujos (velocidades, corrientes, caudales), dependiendo de la naturaleza física del sistema [14].

6.1.2. Variables de esfuerzo y flujo

El modelado de grafos lineales se basa en un principio unificador: todos los sistemas físicos pueden describirse mediante pares de variables conjugadas denominadas *esfuerzo* (e) y *flujo* (f). Para asegurar una formulación desde el punto de vista de la conservación de energía, se utiliza la ecuación

$$P = ef \tag{1}$$

Donde P es la potencia instantánea del sistema, e representa el esfuerzo y f el flujo.

Utilizando la ecuación (1), se puede definir una convención de signos para determinar la dirección del flujo de energía a través de los elementos del sistema. Si $P > 0$, la potencia está fluyendo hacia el elemento, si $P < 0$, la potencia fluye desde el elemento. En cada tipo de sistema, estas variables se representan como se muestra en el Cuadro 1 [14].

Cuadro 1. Variables de flujo y esfuerzo por dominio

Sistema	Esfuerzo	Flujo
Eléctrico	Voltaje	Corriente
Mecánico	Velocidad	Fuerza
Térmico	Diferencia de temperatura	Flujo de calor
Hidráulico	Presión	Caudal

Nota. El cuadro muestra la representación de flujo y esfuerzo por cada dominio de modelado. Elaborado a partir de [14].

De esta manera, la teoría de grafos lineales ofrece un marco común que facilita el análisis de sistemas multidominio, permitiendo estudiar interacciones entre subsistemas de distinta naturaleza sin perder consistencia energética [14].

6.1.3. Construcción de modelos

El procedimiento para modelar un sistema mediante grafos lineales sigue una secuencia definida [12]:

1. **Identificación de nodos y elementos:** se determinan los puntos de conexión y los componentes físicos que intervienen en el sistema.
2. **Asignación de direcciones:** cada arco se orienta arbitrariamente para construir el grafo orientado.
3. **Formulación de la matriz de incidencia:** se establece la relación algebraica entre nodos y arcos.
4. **Ecuaciones de conservación:** a partir de la matriz de incidencia se plantean las ecuaciones que garantizan el equilibrio de esfuerzos y flujos en cada nodo.
5. **Ecuaciones constitutivas:** cada arco se describe mediante su relación característica entre esfuerzo y flujo.
6. **Modelo de estado:** combinando conservación y constitutivas, se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del sistema.

6.1.4. Ventajas

El modelado mediante grafos lineales presenta varias ventajas en comparación con otros métodos clásicos [12], [14]:

- **Universalidad:** permite representar de forma homogénea sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos y térmicos.
- **Consistencia energética:** la formulación asegura que la potencia se conserva entre nodos y elementos.
- **Escalabilidad:** es aplicable a sistemas con gran número de elementos, facilitando su implementación computacional.
- **Claridad estructural:** la representación gráfica brinda una visión intuitiva de las interacciones entre componentes.

6.2. Modelado de sistemas mecánicos

Los grafos lineales permiten representar la dinámica de masas, resortes y amortiguadores bajo un marco energético común. Estos elementos básicos capturan, respectivamente, la inercia, la elasticidad y la disipación de energía, lo que los convierte en bloques fundamentales para el estudio de vibraciones, dinámica estructural y sistemas de control [14].

6.2.1. Elementos constitutivos

Cada componente mecánico puede describirse mediante una relación que vincula esfuerzo (e), definido como fuerza, con flujo (f), definido como velocidad. Estas relaciones permiten modelar el comportamiento dinámico de cada elemento:

- **Masa (M):** se opone a cambios de velocidad, con relación constitutiva

$$F = M\dot{v} \quad (2)$$

donde la fuerza es proporcional a la aceleración de la partícula.

- **Resorte (K):** almacena energía elástica mediante la relación

$$f(t) = K \int v \quad (3)$$

donde la fuerza es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio.

- **Amortiguador (f_v):** disipa energía por fricción o viscosidad, con ecuación

$$f(t) = f_v v \quad (4)$$

donde la fuerza es proporcional a la velocidad relativa entre los extremos.

Estos tres elementos constituyen los análogos mecánicos de inductores, capacitores y resistencias en circuitos eléctricos, lo que permite establecer correspondencias directas entre dominios físicos distintos [12].

6.2.2. Formulación en grafos lineales

Como establece [14], en el marco de los grafos lineales, un sistema mecánico se representa asignando arcos a cada elemento (masa, resorte o amortiguador) y nodos a los puntos de conexión. La elección de la dirección de los arcos es arbitraria, pero necesaria para definir la matriz de incidencia. Posteriormente, se aplican dos tipos de ecuaciones fundamentales:

- **Ecuaciones de conservación:** garantizan el equilibrio de fuerzas en cada nodo, equivalentes a la primera ley de Newton.
- **Ecuaciones constitutivas:** definen el comportamiento dinámico de cada arco, de acuerdo con las expresiones mostradas anteriormente.

6.2.3. Ley de Hooke

La ley de Hooke describe el comportamiento elástico lineal de un resorte ideal, estableciendo que la fuerza ejercida por el resorte es directamente proporcional a su elongación respecto a la posición de equilibrio. Matemáticamente se expresa como la ecuación (3). Esta relación es válida dentro del rango elástico del material; es decir, cuando presenta deformación no permanente [15].

Resortes helicoidales

Para aplicar la ley de Hooke en un resorte helicoidal, se debe considerar que, al someterlo a una carga axial, los alambres del resorte no se estiran en la dirección de la carga, sino que experimentan un esfuerzo de torsión. Debido a esto, la energía total de deformación del resorte está dada por la suma de la energía debida a la torsión y a la cortante [16]:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG} \quad (5)$$

donde T es el momento torsor, L la longitud total del alambre, G el módulo de rigidez del material, J el momento polar de inercia, y A el área de la sección transversal del alambre.

El momento polar de inercia se define como

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (6)$$

y el área de la sección transversal como

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (7)$$

En las ecuaciones (6) y (7), d representa el diámetro del alambre del resorte.

Para un resorte de N espiras activas y diámetro medio D , se cumple que

$$L = N\pi D \quad (8)$$

y el momento torsor en el alambre está dado por

$$T = \frac{FD}{2} \quad (9)$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (5), se obtiene la energía total de deformación:

$$U = \frac{4F^2D^3N}{d^4G} + \frac{2F^2DN}{d^2G} \quad (10)$$

A partir de esta expresión, el teorema de Castigliano permite determinar la deflexión total del resorte. Este teorema establece que el desplazamiento en la dirección de una carga F es igual a la derivada parcial de la energía de deformación respecto a dicha carga:

$$x = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (11)$$

Aplicando la ecuación (11) a la energía de deformación (10), se obtiene:

$$x = \frac{8FD^3N}{d^4G} + \frac{4FDN}{d^2G} \quad (12)$$

Dado que la contribución del esfuerzo cortante es significativamente menor que la de torsión, puede despreciarse, quedando:

$$x = \frac{8FD^3N}{d^4G} \quad (13)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3) (Ley de Hooke) y despejando k , se obtiene la expresión teórica de la constante elástica de un resorte helicoidal:

$$k = \frac{d^4G}{8D^3N} \quad (14)$$

Por último el valor del módulo de rigidez está dado por las propiedades del material del resorte. En capítulos posteriores, el material utilizado por los resortes es acero inoxidable grado *UNSS304000*, el cual tiene una rigidez de entre 74×10^9 y 81×10^9 MPa. Asumiendo una distribución uniforme del valor de la rigidez en el material, se puede utilizar el promedio de estos valores para reescribir la Ecuación (14) como:

$$k = \frac{77.5 \times 10^9 d^4}{8D^3 N} \quad (15)$$

Donde, para recapitular, d es el diámetro del alambre, D el diámetro medio del resorte y N el número de espiras activas.

6.2.4. Modelo de fricción de Coulomb

El modelo de fricción de Coulomb describe la resistencia al movimiento relativo entre dos superficies en contacto. Este modelo establece que la fuerza de fricción F_f es proporcional a la fuerza normal N ejercida entre las superficies y se expresa como:

$$F_f = \mu N \quad (16)$$

donde μ es el coeficiente de fricción, que puede ser estático (μ_s) o cinético (μ_k). La fricción estática se opone al inicio del movimiento hasta un valor máximo, mientras que la fricción cinética actúa cuando el movimiento ya está en curso, generalmente con un valor menor que el estático [15].

Además de la fricción seca descrita por el modelo de Coulomb, existen otros tipos de fricción relevantes en el análisis dinámico, como la fricción viscosa, la cual ocurre cuando el movimiento relativo entre superficies está mediado por un fluido. En este caso, la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad relativa y se expresa como en la ecuación (4). Este tipo de fricción es característica de sistemas amortiguados y produce una fuerza de resistencia dependiente de la velocidad, que disipa energía en forma de calor y reduce gradualmente la amplitud de las oscilaciones [17].

6.3. Transformaciones homogéneas

En robótica, las transformaciones homogéneas constituyen la herramienta estándar para describir la posición y la orientación de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional. Una transformación homogénea combina en una sola matriz 4×4 la rotación y la traslación entre dos marcos de referencia. Esto permite expresar la coordenada de un punto en diferentes sistemas de referencia de manera consistente y sistemática [18].

Formalmente, una transformación homogénea de un marco $\{B\}$ respecto a un marco $\{I\}$ se representa como [18]:

$$T_B^I = \begin{bmatrix} R_B^I & o_B^I \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

donde $R_B^I \in SO(3)$ es la matriz de rotación que describe la orientación del marco $\{B\}$ respecto a $\{I\}$, y $o_B^I \in \mathbb{R}^3$ es el vector de traslación que indica la posición del origen de $\{B\}$ respecto a $\{I\}$. De esta forma, la transformación de un punto expresado en coordenadas del marco $\{B\}$, $p^B = [x \ y \ z \ 1]^T$, hacia coordenadas en el marco $\{I\}$ se realiza mediante [18]:

$$p^I = T_B^I p^B. \quad (18)$$

La gran ventaja de esta metodología es que permite combinar rotaciones y traslaciones en una sola operación matricial, facilitando la composición de múltiples transformaciones. Así, si un marco $\{C\}$ está definido respecto a $\{B\}$, y $\{B\}$ respecto a $\{I\}$, la relación entre $\{C\}$ y $\{I\}$ se obtiene simplemente mediante la multiplicación de matrices [18]:

$$T_C^I = T_B^I T_C^B \quad (19)$$

Diseño y fabricación de prototipos del sistema mecánico

En este capítulo se describe el proceso iterativo de diseño y fabricación de los elementos que conforman el sistema mecánico. Cada iteración de diseño fue validada cualitativamente para identificar áreas de mejora y, a partir de estas, realizar modificaciones de diseño. Siguiendo este procedimiento, se buscó obtener una configuración lo más robusta posible y cercana al modelo ideal de un sistema mecánico traslacional.

7.1. Requisitos de funcionamiento

De manera general, el sistema debe presentar una respuesta lineal invariante en el tiempo. Sus componentes deben cumplir con las condiciones del modelo de parámetros concentrados, de forma que, puedan ser representados dentro del marco de modelado basado en grafos lineales. Considerando estos lineamientos, se identificaron cuatro componentes principales para el desarrollo del sistema mecánico, los cuales fueron considerados como: carruajes de masas, resortes, amortiguadores y la guía de movimiento.

Cada uno de estos componentes posee ciertos requerimientos funcionales específicos. El objetivo, es garantizar, que en conjunto, se obtenga el comportamiento dinámico esperado.

7.1.1. Carruajes de masas

El carruaje de masas constituye el componente encargado de permitir la variación de la masa en el sistema. Debe asegurar que la adición o sustracción de masa se realice de manera sencilla e intuitiva. Además, se buscó compatibilidad con conjuntos educativos de masas cilíndricas para un proceso práctico de adquisición o reemplazo. Finalmente, se estableció que el número máximo de carruajes en uso simultáneo sería de cuatro.

Se establecieron requisitos auxiliares adicionales para ayudar al funcionamiento del resto de componentes del sistema. Estos se encuentran relacionados a tres aspectos: Interconexión de componentes, movimiento del sistema, captura de datos e integración con el Robotat.

Interconexión de componentes

Cada carruaje debe tener puntos de anclaje sólidos para la conexión de resortes y amortiguadores. Es imperativo que estos anclajes sean rígidos y eliminen la posibilidad de vibraciones, desconexión involuntaria o desviaciones durante el movimiento del sistema. Asimismo, deben permitir al usuario realizar cambios de resortes y amortiguadores de forma rápida y práctica.

Movimiento del sistema

Dentro del modelo teórico, se consideran el desplazamiento y velocidad de las masas como salidas fundamentales del sistema. Por ello, cada carruaje debe integrarse con la guía de movimiento utilizando mecanismos que reduzcan la fricción entre ambos. Intrínsecamente, la presencia de fricción en el sistema no es perjudicial, ya que, si ésta sigue el modelo de Coulomb en la región cinética, aún asegura que el sistema presentará un comportamiento lineal. Sin embargo, tener fricción entre los carruajes y el sistema de guía es sinónimo a tener amortiguamiento parasítico, análogo a la resistencia parasítica en el ámbito de los circuitos eléctricos. En consecuencia, se busca minimizar esta fricción, especialmente en la región estática para evitar que interfiera con la captura de datos. No obstante, se entiende que existirá una resistencia natural al movimiento.

Captura de datos e integración con Robotat

Dado que las salidas del sistema dependen directamente de la masa, cada carruaje debe incorporar un mecanismo para montar marcadores retroreflectivos. Estas esferas permiten al sistema de captura de movimiento del Robotat registrar la posición de los carruajes en tiempo real con una precisión de ± 0.1 mm [10].

Para garantizar la correcta detección en distintas orientaciones y evitar la pérdida de información durante el movimiento, se estableció que cada carruaje debe portar cuatro esferas de rastreo. Esta configuración asegura la redundancia necesaria para que el sistema de visión identifique de manera confiable la posición y orientación del carruaje, aun cuando algunas esferas no estén completamente visibles para las cámaras.

La montura para estas esferas debe ser versátil y permitir diferentes configuraciones, dando adaptabilidad a las condiciones del sistema de captura. Asimismo, se definió que el diseño sea estandarizado, de modo que todos los carruajes se fabriquen de manera idéntica y se facilite su reemplazo.

7.1.2. Resortes

El requisito principal de los resortes es que su comportamiento sea descrito mediante la Ecuación (3), es decir, que cumplan con la ley de Hooke. Particularmente, la constante de rigidez K debe ser uniforme en todo el rango de movimiento que permita el resorte, tanto en tensión como en compresión. Asimismo, el movimiento que produzca debe ser estrictamente

unidireccional, evitando la posibilidad de desviaciones y vibraciones.

Otro requisito esencial se relaciona con el mecanismo de anclaje a los carruajes de masas. Cada extremo de los resortes deben contar con el complemento de los puntos de anclaje, y el diseño debe ser estandarizado para asegurar compatibilidad con los carruajes, independientemente del valor de la constante K . De igual forma, para asegurar la intercambiabilidad entre componentes, se estableció que la longitud de carrera de todos los resortes debe ser idéntica. Esto permite al usuario sustituir resortes con distintas constantes de rigidez y realizar experimentos con diferentes configuraciones de manera rápida y sencilla.

Finalmente, debido a que se debe utilizar un mecanismo de guía para asegurar un movimiento estrictamente unidireccional, se introduce la posibilidad de fricción interna en los resortes. Al igual que ocurre con el movimiento de los carruajes de masas, este fenómeno representa un amortiguamiento parasítico que debe minimizarse lo máximo posible. En este caso es especialmente importante, ya que la acumulación de fricción interna en múltiples resortes puede afectar significativamente la respuesta dinámica global del sistema.

7.1.3. Amortiguadores

El requisito principal para los amortiguadores, su comportamiento dinámico pueda describirse mediante un modelo lineal dependiente de la velocidad relativa de los carruajes, como lo establece la Ecuación (4). Por consecuencia, la constante de amortiguamiento f_v debe permanecer uniforme en todo rango de velocidades y desplazamientos en que opere el sistema. De manera adicional, el desplazamiento de los amortiguadores debe ser estrictamente unidireccional, de la misma forma que los resortes. En cuanto a la integración con el resto del sistema, cada extremo de los amortiguadores debe estar provisto de un sistema de anclaje compatible con los carruajes de masas y con los resortes. El diseño de dichos anclajes debe ser estandarizado, de modo que el reemplazo de un amortiguador no requiera adaptaciones adicionales y se mantenga la intercambiabilidad entre componentes con diferentes valores de f_v .

Finalmente, se debe prestar especial atención a las pérdidas parasíticas internas. Si bien los amortiguadores cumplen precisamente la función de disipar energía, la presencia de fricción no lineal o efectos de retardo hidráulico/neumático pueden introducir no linealidades que afecten la validez del modelo.

7.1.4. Guía de movimiento

La guía de movimiento constituye el elemento encargado de asegurar el desplazamiento unidireccional de los carruajes de masas. Su función principal es restringir los grados de libertad del sistema, de modo que las masas se desplacen únicamente a lo largo del eje de interés. Para cumplir con esta función, la guía debe minimizar la fricción entre sus superficies y los carruajes, reduciendo así el amortiguamiento parasítico asociado. Aunque una fricción residual es inevitable, esta debe ser lo suficientemente baja para no introducir errores significativos en la dinámica del sistema ni en los datos experimentales adquiridos.

Adicionalmente, la guía debe garantizar la estabilidad del movimiento, evitando vibra-

ciones indeseadas y desviaciones en planos distintos al de análisis. Esto implica que la rigidez estructural del sistema de guía sea adecuada para soportar las cargas generadas por el peso de los carruajes, las fuerzas de los resortes y amortiguadores, y las posibles perturbaciones externas.

Finalmente, el diseño de la guía debe facilitar su anclaje con la plataforma del Robotat. Esto permite que el sistema tenga una “tierra” o referencia mecánica en relación al espacio del sistema de captura de movimiento. Para llevar un control de los requisitos cumplidos por cada prototipo, se realizó una matriz de requerimientos la cual se puede consultar en la sección 14.1.1.

7.2. Primer acercamiento de diseño

En la primera iteración de diseño, se realizó una abstracción muy general de cada uno de los componentes y sus requerimientos. El objetivo de esta etapa consistió en establecer una línea base sobre la cual desarrollar el sistema mediante iteraciones sucesivas de mejora. El programa utilizado para diseñar componentes fue Autodesk Fusion debido a su manejo de versiones y almacenamiento en la nube, lo cual facilita manejar un control ordenado de iteraciones.

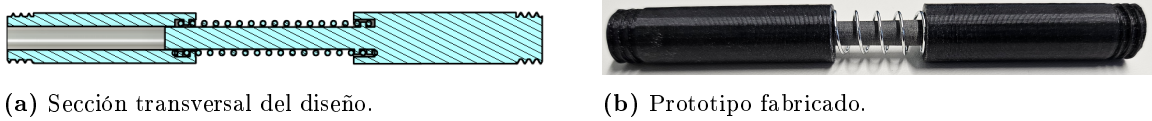
7.2.1. Primer prototipo de empaquetados para resortes

Como primer paso, se diseñó un prototipo de empaquetado para resortes. Para contar con varias rigideces y asegurar la intercambiabilidad, se evaluó inicialmente la caja de resortes *Tactix* [19], que incluye resortes de compresión y tensión. Se trabajó únicamente con resortes de compresión, ya que pueden adaptarse para funcionar en tensión, mientras que el proceso inverso resulta más complejo.

Durante el análisis de esta caja se identificó un problema: las longitudes de los resortes varían significativamente entre calibres (Cuadro 10). Esto implica cambios simultáneos en rigidez y carrera, lo cual incumple el requisito **REQ-SPR-05**. Por ello, se inició en paralelo la búsqueda de un conjunto de resortes con longitud constante y variaciones únicamente en el ancho de alambre.

Para desarrollar el primer prototipo se seleccionó el resorte número 2 del Cuadro 10, debido a su mayor longitud y número de vueltas. El diseño consistió en un resorte montado sobre un eje guía de 40 mm de largo y 4.2 mm de diámetro, permitiendo un deslizamiento sin interferencias. En cada extremo se incorporaron tapas cilíndricas con un fileteado helicoidal que engrana entre las espiras para fijar el resorte. Ambas tapas funcionan como una camisa protectora y cuentan con roscas métricas $M10 \times 1.5$ en sentidos opuestos, permitiendo un montaje simétrico y seguro.

Figura 3. Primer prototipo de resorte: vista en sección y pieza fabricada



Nota. La figura muestra el diseño en sección transversal y el primer prototipo de resorte fabricado mediante manufactura aditiva. Elaboración propia.

En la Figura 3a se presenta en detalle el diseño de del primer prototipo. Un aspecto de suma importancia para el funcionamiento del resorte, corresponde a la holgura planeada entre el eje y la camisa. Se diseñaron ambos componentes con un espaciado axial de 0.1 mm, siendo el eje el elemento más pequeño. Este valor se seleccionó en función a las limitaciones de la manufactura aditiva, metodología que se utilizó debido a su facilidad de acceso. Particularmente, este es uno de los parámetros recomendados por el laboratorio de fabricación del Departamento de Ingeniería Mecatrónica. De esta manera, se asegura el desplazamiento libre entre las piezas sin comprometer la rigidez estructural ni introducir desviaciones axiales significativas [20].

Para la fabricación del prototipo, se utilizó una impresora 3D de la marca bambulab, disponible en el laboratorio de manufactura. El perfil utilizado fue predeterminado con una altura de capa de 0.2 mm y configuración automática orientada a optimizar la rigidez estructural. El resultado del proceso de manufactura se presenta en la Figura 3b.

Al analizar la Figura 3b, se observa el acabado superficial del vástago. Durante el ensamblaje del prototipo, el vástago no logró acoplarse adecuadamente a la camisa. Esto ocurrió debido a una expansión del material mayor a la esperada. Para corregir esta condición se utilizó una lija de grano 220 con el fin de remover el exceso de material. Si bien este hecho inicialmente se consideró como una falla de diseño, el proceso de lijado mejoró la suavidad del movimiento relativo entre ambas piezas, ya que generó una superficie más uniforme que el obtenido con las líneas de impresión. No obstante, persistió una resistencia considerable al desplazamiento, lo que motivó la consideración de técnicas más avanzadas de posprocesamiento en futuras iteraciones, con el objetivo de cumplir con el requisito REQ-SPR-06.

Se realizó un experimento de validación del funcionamiento del prototipo para verificar su cumplimiento del requisito REQ-SPR-02. Si la constante K es uniforme en tensión y compresión, el resorte no debe presentar deformación permanente ante un desplazamiento de igual magnitud en ambos sentidos.

Figura 4. Ejemplo de medición de parámetros de resorte



Nota. La imagen muestra el procedimiento para realizar mediciones en el resorte. Elaboración propia.

El procedimiento consistió en comprimir el resorte hasta distancia máxima permitida por su geometría, registrando la deformación y la distancia entre hilos en esta condición. Posteriormente, se le sumó dicha deformación a la longitud original del resorte para determinar la extensión requerida en tensión. Luego de tensar el resorte hasta esa magnitud, se midió nuevamente la distancia entre hilos para comparar ambos escenarios. Para realizar las mediciones se utilizó un calibre pie de rey como se ejemplifica en la Figura 4. Los resultados se recopilaron en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Resultados del experimento de validación del resorte

Parámetro	Magnitud (mm)
Longitud original del resorte	86.6
Distancia de deformación aplicada	12.8
Longitud del resorte en compresión	73.8
Longitud del resorte en tensión	99.4
Distancia entre hilos tras compresión	3.9
Distancia entre hilos tras tensión	4.3

Nota. El cuadro muestra los resultados de la prueba de uniformidad de la constante de rigidez. Elaboración propia.

En el Cuadro 2 se ve que la distancia entre hilos tras compresión y tensión presenta discrepancias. Esta diferencia evidencia que el prototipo no cumple con la ley de *Hooke*, pues la deformación permanente representa un comportamiento no lineal. En consecuencia, se descartó la utilización de un solo resorte en compresión para las futuras iteraciones.

7.2.2. Primer prototipo de amortiguadores

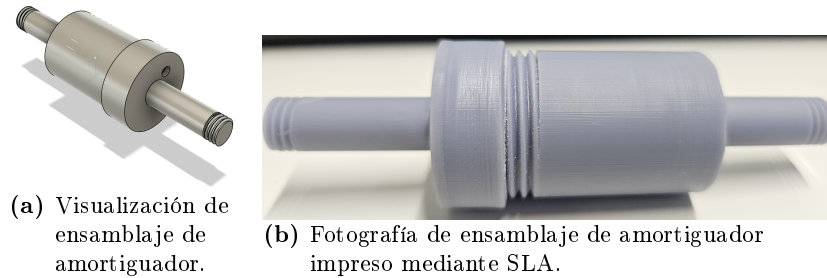
Para el diseño del amortiguador, se adoptó como referencia la metodología implementada por *Educational Control Systems* (ECP) en su modelo 210 [7]. Dicho enfoque se basa en utilizar un mecanismo camisa-pistón de aire, en el cual el pistón genera un flujo de aire a través de una abertura variable en la tapadera del cilindro. La restricción generada por esta abertura controla el paso de aire y, en consecuencia, produce el efecto de amortiguamiento.

Se desarrolló un prototipo de cilindro con rosca en uno de sus extremos, lo que permite el intercambio de tapaderas con aberturas de diferentes diámetros para modificar el nivel de amortiguamiento. Asimismo, se diseñó un pistón con una ranura destinada a alojar una junta tórica (*O-ring*), con el fin de garantizar un desplazamiento hermético y evitar fugas de aire durante el funcionamiento. El diseño detallado se puede ver en la Figura 5a.

Con el objetivo de validar este diseño preliminar, se fabricaron dos prototipos utilizando tecnologías de manufactura aditiva diferentes: estereolitografía (SLA) y modelado por deposición fundida (FDM). A continuación, se documentan los resultados obtenidos en cada caso.

Prototipo fabricado con SLA

Figura 5. Ensamblaje y prototipo impreso de amortiguador



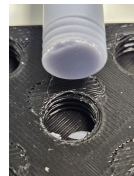
Nota. La imagen muestra la visualización del ensamblaje del amortiguador de aire (a) y el ensamblaje impreso mediante SLA (b). Elaboración propia.

El prototipo SLA se imprimió en resina *Anycubic Standard* utilizando una impresora *Elegoo Neptune 4* (véase Figura 5b). El acabado de las piezas presentó irregularidades: en algunos componentes se observaron imperfecciones superficiales causadas por la colocación de soportes de impresión. Este efecto fue más notorio en la cabeza del pistón, que presentó abolladuras y marcas circulares, lo cual afectó su circularidad. Además, durante el ensamblaje de la tapadera con el cilindro, la rosca se agarrotó en las primeras vueltas, generando desgaste por fricción y un polvillo característico.

A pesar de estas imperfecciones, el ensamble permitió un movimiento libre del pistón en el cilindro tras realizar ajustes mediante lijado. Sin embargo, el sistema de amortiguamiento no funcionó adecuadamente con el orificio abierto. Solo al obstruir manualmente dicho orificio se observó efecto de amortiguamiento, lo que evidenció exceso de holgura y/o un diámetro de paso demasiado grande.

En cuanto a propiedades mecánicas, la resina presentó fragilidad y poca durabilidad. Al conectar la unión con el punto de anclaje, la rosca colapsó y parte del elemento se fracturó, como se observa en la Figura 6.

Figura 6. Falla de rosca de prototipo SLA



Nota. La imagen muestra la falla de la rosca del prototipo SLA. Elaboración propia.

Para evaluar la precisión dimensional del método de manufactura, se recopilaron mediciones de los distintos componentes en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Dimensiones diseñadas y reales de prototipos SLA

Parte de amortiguador	Diseño	Impresión SLA	Error relativo
Vástago pistón	9.650	9.779	-1.34 %
Vástago tapadera	9.650	9.779	-1.34 %
Agujero tapadera	4.000	3.810	4.75 %
Exterior cilindro	26.822	26.593	0.85 %
Interior cilindro	20.000	19.837	0.81 %
Diámetro pistón	20.000	19.685	1.70 %

Nota. Las medidas se encuentran en milímetros, mientras que el error relativo es porcentual. Elaboración propia.

Como se observa en el Cuadro 3, la mayor holgura se presentó en el agujero de la tapadera, con un 4.75 %, lo cual probablemente explica la ausencia de amortiguamiento. En general, la estabilidad dimensional fue aceptable y corregible mediante ajustes de diseño; sin embargo, la fragilidad del material impidió su compatibilidad con el sistema de anclajes, incumpliendo el requisito REQ-DMP-04.

Prototipo fabricado con FDM

El prototipo FDM se fabricó en PLA utilizando los mismos parámetros de impresión que el resorte. La principal limitación fue la rugosidad de la superficie interna del cilindro, producto de las líneas de impresión, lo que generó fricción excesiva y obligó a realizar pos-procesado mediante lijado. Este tratamiento afectó la estabilidad dimensional del sistema aumentó la holgura entre el cilindro y la cabeza del pistón. Para evaluar esta condición, se recopilaron mediciones en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Dimensiones diseñadas y reales de prototipos de amortiguador

Parte de amortiguador	Diseño	Impresión SLA	Error relativo
Vástago pistón	9.650	9.550	1.032 %
Vástago tapadera	9.650	9.550	1.032 %
Agujero tapadera	4.000	3.658	8.56 %
Exterior cilindro	26.822	26.797	0.093 %
Interior cilindro	20.000	20.32	-1.6 %
Diámetro pistón	20.000	19.698	1.575 %

Nota. Las medidas se encuentran en milímetros. Elaboración propia.

Las mediciones revelaron errores relativos de hasta 8.56 % en el agujero de la tapadera, atribuibles al proceso de impresión y posterior suavizado. Tras el lijado, las holguras entre el interior del cilindro y el vástago alcanzaron 0.622 mm. Estas desviaciones comprometieron el funcionamiento del prototipo, ya que en las pruebas de amortiguamiento no se registró ningún efecto. A diferencia del prototipo en SLA, no fue posible corregir esta situación ajustando manualmente la apertura de la tapadera. No obstante, este método de manufactura mostró mayor durabilidad que la resina, pues el prototipo en PLA resistió múltiples acoples

en las roscas sin fracturas.

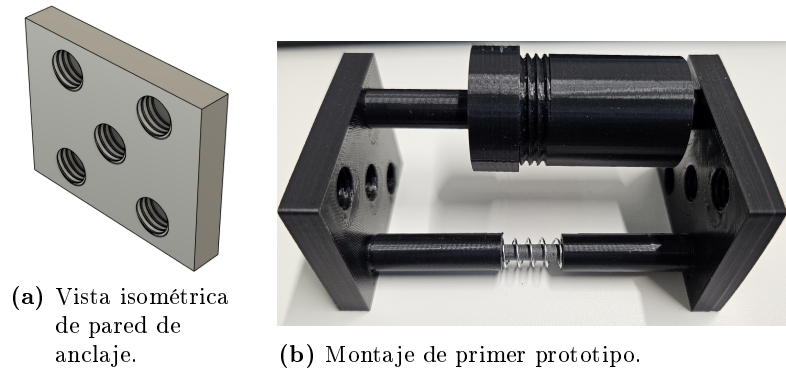
Comparativa de prototipos y decisiones de diseño a futuro

El diseño de los prototipos de amortiguador no dio resultados satisfactorios, ya que factores de manufactura como el acabado superficial y la estabilidad dimensional resultaron críticos para lograr amortiguamiento en un fluido compresible como el aire. Si no se cuenta con un conjunto de tolerancias cerradas, el fluido puede escapar sin oponer resistencia al movimiento o hacerlo de forma no proporcional a la velocidad. Hubiese sido posible realizar más iteraciones de diseño siguiendo esta filosofía y combinando ambos métodos de manufactura para aprovechar sus ventajas. Sin embargo, este proceso habría añadido ciclos de diseño más complejos para garantizar la tolerancia deseada. Por esta razón, se decidió descartar la manufactura local de amortiguadores y optar por adquirir elementos prefabricados para posteriormente realizarles modificaciones. En particular, se investigó la alternativa de emplear amortiguadores a base de aceite, populares en vehículos a escala [21]. La principal ventaja de estos dispositivos es que utilizan un fluido no compresible, lo cual reduce la sensibilidad a desviaciones dimensionales. Además, la constante de amortiguamiento puede variarse fácilmente mediante el cambio de la viscosidad del fluido [22].

7.2.3. Primer prototipo de método de fijación

Este prototipo se desarrolló en paralelo al diseño del resorte, ya que el diámetro del empaquetado de este último se empleó como referencia para definir de manera provisional el tamaño de los puertos de anclaje. Representó, además, el primer avance hacia la configuración de los carruajes de masas.

Figura 7. Prototipo del sistema de anclaje



Nota. La imagen muestra la visualización del prototipo de anclajes (a) y el montaje del resorte-amortiguador (b). Elaboración propia.

La filosofía de diseño, descrita previamente en la sección de empaquetado del resorte, se aplicó en este caso mediante la incorporación de dos paredes con roscas destinadas a la fijación de componentes. Como se ejemplifica en la Figura 7a, cada pared se diseñó con

un patrón simétrico de cinco orificios roscados $M10 \times 1.5$, lo que permite la instalación simultánea de hasta cinco elementos por extremo del carruaje. Adicionalmente, se estableció una dirección de roscado opuesta entre ambas paredes; una con roscas a mano derecha y la otra a mano izquierda, con el propósito de garantizar que, al introducir un elemento, este pudiera acoplarse de manera uniforme en ambos extremos independientemente del sentido de roscado. Su fabricación se realizó utilizando la misma metodología y parámetros que el prototipo de resorte.

Para validar el prototipo, se realizó un montaje de prueba colocando los prototipos de resorte y amortiguador entre ambas paredes de manera simultánea. El sistema de roscado proporcionó un punto de anclaje sólido en ambos extremos y facilitó el roscado de cada componente en una única dirección. Sin embargo, se requirió una alineación radial precisa de los extremos de los componentes para asegurar que ambas roscas ingresaran de forma uniforme en profundidad. Asimismo, el montaje de varios elementos resultó laborioso, ya que la dificultad del roscado aumenta conforme se incrementa el número de componentes. Finalmente, como se aprecia en la Figura 7b, el tamaño de los componentes impidió aprovechar de manera óptima el espacio y la disposición de los anclajes.

7.3. Segundo acercamiento de diseño

Para la segunda iteración de diseño, se tomaron en consideración las fallas observadas en el primer prototipo de cada uno de los componentes. Se realizaron desarrollos para cada uno de los elementos del sistema, salvo para los amortiguadores, pues se encontraban en proceso de envío.

7.3.1. Carruajes de masas y guía de riel

Para los carruajes de masas, se mantuvo la intención de implementar paredes en las cuales colocar los puntos de anclaje. Para integrar esto con la guía de movimiento, se optó por utilizar un mecanismo de placa deslizante y perfil tipo V2020 ranurado. Este sistema, ampliamente utilizado en impresoras 3D y máquinas CNC, destaca por su baja fricción y facilidad de implementación. Además, ambas piezas (perfil y placa deslizante) se pueden adquirir localmente [23] [24].

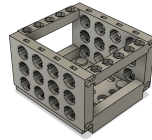
A partir de esta selección, la placa deslizante fue medida con un calibre pie de rey para generar su modelo tridimensional. El sistema de ensamble se definió a partir de holguras y geometría: las ranuras en los extremos de la placa se utilizaron como puntos de acoplamiento para las paredes, las cuales incorporaron ranuras tipo rompecabezas destinadas a la inserción de vigas de soporte con un ligero juego. La viga inferior incluyó una sección con ajuste por interferencia que asegura la fijación a la placa y evita desprendimientos. Se evaluó la incorporación de vaciados para reducir la masa; sin embargo, se determinó que este procedimiento incrementaba el peso debido a los perímetros de impresión, por lo que se mantuvo el diseño original.

Con el fin de cumplir el requisito REQ-MC-05, se incorporaron agujeros para tornillos hexagonales métricos $M3$, compatibles con las esferas de rastreo del sistema de captura de

movimiento. Se dispusieron cinco orificios por cada viga, permitiendo diversas configuraciones de montaje de esferas.

Finalmente, para optimizar el sistema de anclaje de componentes, se descartó el uso de roscas y se optó por agujeros con ranuras simétricas en los costados, diseñados con ligera interferencia. Se estableció un patrón de tres hileras por cuatro columnas, de modo que cada carruaje pudiera admitir múltiples configuraciones. Debido al ajuste y a la geometría de las ranuras, los componentes deben insertarse en una orientación específica, lo cual, junto con la interferencia, garantiza su fijación durante el uso. Además, se añadió una ranura vertical desde la parte superior de la pared hasta el último orificio, en la cual puede colocarse una barra que refuerce la fijación axial de los componentes. El diseño completo se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Diseño de primer carruaje de masas



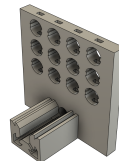
Nota. La imagen muestra el ensamblaje del diseño del primer carruaje de masas. Elaboración propia.

La fabricación del prototipo se realizó mediante impresión FDM empleando parámetros predeterminados. El ensamblaje final del sistema físico se presenta en la Figura 14 al final de la sección.

7.3.2. Anclaje a Robotat

Para dar cumplimiento al requisito **REQU-GUI-05**, se diseñó una pared con la misma geometría base que la empleada en el carruaje de masas. A esta se le añadió una sección cuya forma coincide con el perfil del riel, permitiendo su inserción en los extremos del mismo. El diseño resultante se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Diseño de primer pared de montura en Robotat



Nota. La figura muestra la visualización del diseño de la pared de montura en el software Fusion. Elaboración propia.

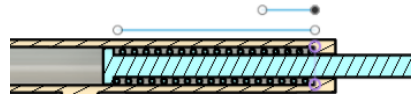
7.3.3. Empaquetado de resorte

Para el empaquetado de resorte se retomó el experimento de la primera iteración de diseño. Se mantuvo la restricción de utilizar únicamente resortes de compresión debido a su facilidad de guía. Sin embargo, su deformación a tensión representaba una limitación. Para resolver este inconveniente, se planteó la utilización de dos resortes de compresión en paralelo, de manera que cada resorte absorbiera la carga en un sentido distinto. Con este objetivo, se diseñó un nuevo mecanismo alrededor del resorte 2 del Cuadro 10.

El proceso inició colocando dos resortes en paralelo en *Fusion*, acompañados de bocetos con líneas guía que indicaban la longitud máxima y mínima de trabajo. A cada resorte se le asignó una función: uno como resorte de compresión y otro como resorte de tensión. Para el segundo caso, se modeló un cilindro con diámetro interno ligeramente mayor al diámetro externo del resorte, donde la holgura no resultaba crítica. En un extremo del cilindro se incorporó un cambio de diámetro que permite retener al resorte en su interior, mientras posibilita el libre movimiento de un eje a través de la cavidad.

El eje se diseñó con un diámetro externo apenas menor al diámetro interno del resorte, y una cabeza en su extremo cuya dimensión coincide con la del cilindro. De esta manera, al aplicar tensión sobre el eje, el resorte interno se comprime. El funcionamiento del sistema puede observarse en la Figura 10.

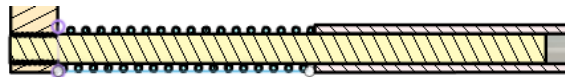
Figura 10. Vista de sección de resorte de tensión



Nota. La imagen muestra la vista de sección del cilindro de tensión. El eje se muestra en color azul y el cilindro en color amarillo, únicamente con fines ilustrativos. Las líneas representan el largo máximo y mínimo del resorte. Elaboración propia.

Para el resorte de compresión se diseñó un eje simple, con diámetro ligeramente menor al diámetro interno del resorte para permitir un guiado adecuado. En el extremo del eje se incorporó un cilindro con diámetro interno equivalente al del eje, que actúa como elemento de alojamiento y apoyo. Finalmente, en el extremo opuesto del eje se añadió una rosca, destinada a fijarse en un tope. De esta manera, el cilindro y el tope trabajan en conjunto con el eje para generar la compresión del resorte. La vista en sección del mecanismo se presenta en la Figura 11.

Figura 11. Vista de sección de resorte de compresión

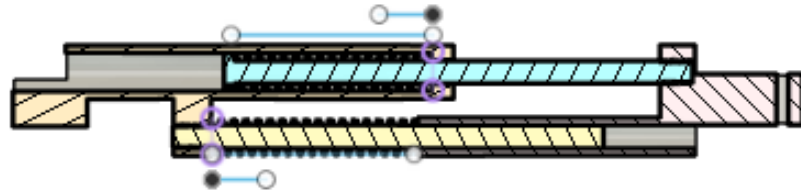


Nota. La imagen muestra la vista de sección del cilindro de compresión. El eje se muestra en color amarillo y el cilindro en color rosado, únicamente con fines ilustrativos. Elaboración propia.

Ambos mecanismos, de tensión y de compresión, se integraron en un solo conjunto mediante el uso de roscas para insertar los ejes. Las dimensiones finales se definieron estableciendo los límites de movimiento físico de los resortes a través de las herramientas de ensamblaje en Fusion. Debido a esta metodología, el diseño resultante se ajusta exclusivamente al resorte utilizado en esta iteración. Se planteó que, en caso de validar su funcionamiento, versiones futuras se desarrollarían con un diseño parametrizado en función de las dimensiones de los resortes disponibles.

En los extremos de los cilindros de tensión y compresión se incorporó la geometría necesaria para acoplar los resortes a los orificios de montaje de los carruajes. No obstante, durante el ensamblaje se identificó una interferencia entre esta geometría y el cilindro de tensión, por lo que fue necesario realizar un corte adicional que permitiera el libre desplazamiento del eje. Este aspecto se registró como una mejora a implementar en futuras iteraciones de diseño. La vista en sección del ensamblaje completo se presenta en la Figura 12.

Figura 12. Vista de sección de ensamblaje de resorte



Nota. La imagen muestra la vista de sección del ensamble de resorte de compresión y tensión. Elaboración propia.

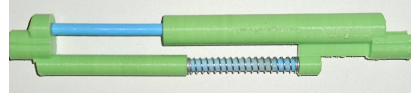
La manufactura de este prototipo presentó diversos retos, principalmente asociados a la necesidad de tolerancias más estrictas para garantizar el correcto funcionamiento del ensamble. Debido al tamaño reducido del conjunto, la impresión de los ejes resultó especialmente delicada. No fue posible utilizar el *slicer* predeterminado del laboratorio (Orca), ya que no generaba el detalle suficiente en las roscas. En su lugar, se empleó *Cura*, configurado con una altura de capa de 0.08 mm, lo que permitió reproducir las roscas con la resolución requerida.

Las piezas del ensamble debieron imprimirse en orientación vertical para conservar tanto el detalle de las roscas como la precisión dimensional de ejes y cilindros. Esta estrategia, sin embargo, aumentó el riesgo de fallas en la impresión, pues la altura de los modelos era considerablemente mayor a su ancho. Adicionalmente, el reducido espesor de las paredes de los cilindros y de los ejes ocasionó la rotura de múltiples componentes durante el montaje y las pruebas preliminares. Para mitigar este problema, se optó por utilizar un relleno del 100%, lo que mejoró significativamente la resistencia. Aun así, la manipulación descuidada o el uso repetido continuaban provocando fracturas, aspecto identificado como una limitación a corregir en iteraciones posteriores.

Tras la fabricación, se observó que las líneas de impresión generaban una superficie excesivamente rugosa, lo que impedía un movimiento relativo uniforme. Para mitigar este problema, se aplicó nuevamente un posprocesado por lijado con el objetivo de mejorar el acabado superficial. Se utilizó una combinación de lijas de grano 220 y 300 para suavizar

la superficie; no obstante, la resistencia al movimiento continuó siendo perceptible. En la Figura 13 se puede notar la irregularidad del acabado superficial de la pieza.

Figura 13. Ensamblaje de resorte fabricado



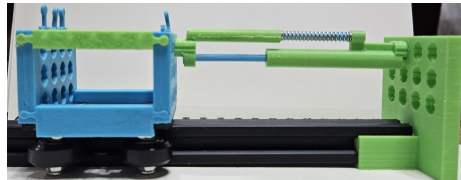
Nota. La figura muestra el ensamblaje del empaquetado de resorte luego de la fabricación y posprocesado. Elaboración propia.

Durante el uso del ensamble se identificaron tres limitaciones principales. En primer lugar, en la transición entre tensión y compresión se generó un tiempo muerto en el cual ninguno de los dos resortes permanecía comprimido, lo que afectaba la continuidad del esfuerzo transmitido. En segundo lugar, debido a la apertura de un orificio en la geometría de anclaje, al alcanzarse la máxima compresión el eje de tensión tendía a desplazarse a través de dicho orificio, provocando trabas en el movimiento del conjunto. Finalmente, también en condición de compresión máxima, el eje de compresión sobresalía en exceso de su cilindro, superando la longitud de la geometría de fijación y ocasionando interferencias potenciales con el carruaje de masas durante el montaje del sistema.

7.3.4. Montaje del sistema

Para probar la funcionalidad del sistema, se realizó un ensamblaje completo, el cual se puede ver en la Figura 14.

Figura 14. Montaje del sistema completo



Nota. La figura muestra el ensamblado de todos los componentes de la segunda iteración de diseño. Elaboración propia.

Durante el armado se identificaron varias dificultades. En primer lugar, resultó complejo insertar los extremos del resorte en los puntos de anclaje de la pared y del carruaje. Asimismo, las barras de fijación requirieron un posprocesado por lijado para poder ensamblarse correctamente. A pesar de ello, los extremos del resorte no llegaron a acoplarse completamente en los anclajes, lo que impidió probar el prototipo bajo cargas elevadas por el riesgo de desmontaje.

Adicionalmente, estas limitaciones en el montaje ocasionaron que el carruaje no pudiera completar la carrera de desplazamiento, ya que el mecanismo se trababa en varios puntos.

También se detectó que la delgadez de las piezas favorecía la deformación del sistema bajo carga. Finalmente, la disposición de los agujeros de anclaje provocó un desalineamiento de los componentes: el resorte no coincidía con el eje de movimiento, generando un momento indeseado durante la operación. Esto se puede observar en el Anexo 14.1.3.

7.4. Tercer acercamiento de diseño

Para esta iteración, se decidió continuar con la base construida durante la segunda iteración. A pesar de todas las limitaciones de dicho prototipo, se identificaron áreas de mejoras puntuales: a) geometría de agujeros de anclaje, b) patrón de los agujeros de anclaje, c) delgadez de las piezas, d) acabado superficial de elementos, e) rugosidad excesiva en ejes de resorte, f) fragilidad de resorte, g) empaquetado de resorte no universal, h) tiempo muerto en transición entre resortes. Se rediseñó cada uno de los componentes del sistema para tomar en consideración estos aspectos.

7.4.1. Carruaje de masas

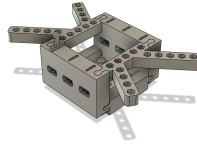
El primer cambio introducido en los carruajes de masas consistió en incrementar de manera considerable el espesor de las paredes, con el objetivo de proporcionar mayor rigidez al sistema y evitar las desalineaciones observadas en el prototipo anterior.

En relación con el sistema de anclajes, se determinó que el patrón previo, capaz de alojar hasta doce elementos simultáneamente, resultaba excesivo. En la práctica, cada carruaje puede admitir un máximo de tres componentes sin generar interferencias durante el montaje o el funcionamiento. Por ello, se diseñó un nuevo patrón conformado por tres orificios, dispuestos simétricamente respecto al centro geométrico de la pared, garantizando así el balance del carruaje al incorporar los componentes.

Adicionalmente, se identificó que el uso de orificios circulares completos ocasionaba complicaciones derivadas de las holguras propias del proceso de impresión. Para solventar este problema, se modificó la geometría de los orificios mediante cortes rectilíneos paralelos, de forma que solo se utilizara una sección del círculo. Asimismo, las barras transversales fueron redimensionadas para adaptarse al mayor espesor de las paredes, lo que a su vez contribuyó a disminuir las restricciones de tolerancia al trabajar con componentes de mayor tamaño.

Finalmente, se implementó una modificación en las vigas superiores. Durante las pruebas de configuración en el Robotat, se observó que la variación entre los orificios no era suficiente para que el sistema de captura identificara múltiples cuerpos rígidos de manera diferenciada. En consecuencia, se añadieron extensiones a las vigas con el fin de aumentar la versatilidad del montaje. Como resultado, la geometría superior adquirió una forma similar a la de una mariposa, lo que amplía las posibilidades de disposición de los marcadores en el sistema. Esto se puede ver a detalle en la Figura 15.

Figura 15. Ensamblaje de carruaje de masas



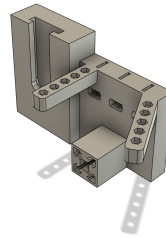
Nota. La figura muestra el ensamblaje final del carruaje de masas en el software *Fusion*. Elaboración propia.

7.4.2. Anclaje al Robotat

Al igual que en la iteración anterior, el sistema de anclaje se diseñó a partir de un espejo de la geometría utilizada en el carruaje de masas, generando un conjunto de paredes que se colocan en los extremos del riel. Sin embargo, en el prototipo previo no se había contemplado un mecanismo que asegurara la fijación sólida del sistema a la plataforma del Robotat. Para resolver esta limitación, en la presente iteración se incorporó el uso de una prensa de barra tipo F de 12 pulgadas [25].

La pared de anclaje fue modificada con una extensión lateral que replica la geometría de una de las puntas de la prensa, diseñada con una holgura mínima para garantizar un acoplamiento firme. Adicionalmente, se integraron vigas superiores con puntos de montaje para esferas de rastreo, de manera que el sistema pueda funcionar también como marco de referencia dentro del entorno de captura del Robotat. Se puede ver a detalle en la Figura 16.

Figura 16. Diseño de pared de montaje



Nota. La figura muestra el diseño de la pared de montaje a Robotat en *Fusion*. Elaboración propia.

7.4.3. Empaquetado de resortes

El primer punto que se trató respecto a los resortes, consistió en cambiar los resortes utilizados. Como se mencionaba con anterioridad, se buscó una caja de resortes con la misma longitud de carrera y solamente variación al ancho de alambre para cambiar la constante de rigidez. Se decidió utilizar un juego de resortes de la marca *Dianrui*, el cual cuenta con

5 distintos calibres de resorte en longitudes uniformes [26]. Se seleccionó una longitud de resorte de 25 mm, pues este es el mayor largo que comparten entre todas las opciones de calibre. De esta manera, se obtienen las opciones mostradas en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Dimensiones de resortes de compresión seleccionados en caja
Dianrui

Resorte	Ancho de alambre (<i>mm</i>)	Diámetro externo (<i>mm</i>)	Número de vueltas
1	0.3	4	15
2	0.4	5	17
3	0.5	6	22
4	0.6	7	12
5	0.7	7	12

Nota. Todos los resortes tienen un largo de 25 mm.

Diseño

El encapsulado de resortes fue rediseñado con el objetivo de mejorar la simetría del mecanismo, asegurar un balance entre los largos de los cilindros de tensión y compresión, y parametrizar el modelo en función de las dimensiones de los resortes. Para ello, se tomaron mediciones exactas a partir del ensamblaje en *Fusion*, considerando parámetros críticos como diámetros internos, externos y longitudes de trabajo.

En el caso del cilindro de tensión, el diámetro interno d_1 se definió como el diámetro externo del resorte más 0.5 mm:

$$d_1 = d_r + 0.5 \text{ mm} \quad (20)$$

Donde d_r representa el diámetro externo del resorte. El diámetro externo del empaquetado se estableció como el doble de d_1 :

$$d_2 = 2d_1 \quad (21)$$

La longitud del cilindro se parametrizó como:

$$d_3 = 2l_r - (d_a(n + 1)) \quad (22)$$

donde l_r es el largo del resorte, d_a el diámetro del alambre y n el número de vueltas. El término restado corresponde a la longitud del resorte completamente comprimido

La extensión adicional en el extremo opuesto al de la tapadera se definió como:

$$a = 2(l_r + 1 \text{ mm}) - d_3 + 4 \text{ mm} \quad (23)$$

La distancia entre centros de cilindros se modeló mediante:

$$d = 3d_{20} + 2 \text{ mm} \quad (24)$$

donde d_{20} corresponde al espesor de la pared del cilindro.

Para el cilindro de compresión se mantuvieron las mismas relaciones, con la diferencia de que la longitud se definió como:

$$d_{comp} = 2l_r - (d_a(n + 1)) + 4 \text{ mm} \quad (25)$$

incorporando directamente el espesor de la tapadera del cilindro de tensión.

En cuanto a los ejes, el de tensión se diseñó con una cabeza de diámetro y longitud equivalentes al diámetro externo del resorte más 0.5 mm. El eje presenta un diámetro igual al interno del resorte y una longitud de:

$$L_{tension} = 2l_r + 4 \text{ mm} + 7 \text{ mm} \quad (26)$$

donde los 7 mm adicionales corresponden a la sección roscada.

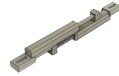
El eje de compresión se parametrizó únicamente a partir del diámetro interno del resorte, con una longitud definida como:

$$L_{comp} = 2l_r \quad (27)$$

Este enfoque permitió obtener un diseño simétrico y parametrizado, con dimensiones equilibradas entre los cilindros de tensión y compresión, asegurando un funcionamiento equivalente entre resortes. La parametrización también definió el espesor de paredes según el diámetro del resorte, permitiendo generar hasta cinco variaciones por calibre a partir de un solo modelo.

Para mejorar la calidad de impresión, la geometría externa se modificó incorporando un contorno cuadrado con filetes, lo que favoreció trayectorias rectilíneas y redujo vibraciones durante la manufactura. Asimismo, la forma del anclaje se ajustó para evitar interferencias con los orificios de guía. El diseño final se muestra en la Figura 17.

Figura 17. Diseño final del encapsulado de resortes



Nota. La figura muestra el ensamblaje del diseño final del empaquetado de resortes en Fusión. Elaboración propia.

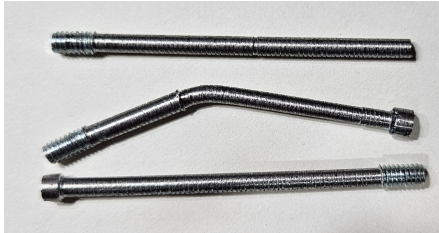
Fabricación

Para la fabricación se evaluaron tres alternativas principales: impresión de camisas y maquinado de ejes, impresión con *PA12-CF* e impresión tridimensional tradicional.

Impresión de camisas y maquinado de ejes

Esta alternativa se consideró como posible solución a la fragilidad observada en los ejes. Se realizó una prueba de maquinado para los ejes correspondientes al resorte de 0.3 mm, dado que estos son los más delgados y frágiles. Para ello, se adquirió un paquete de tornillos de acero galvanizado de 5/32 de pulgada, ligeramente mayor al diámetro del eje, los cuales fueron mecanizados en torno hasta alcanzar la dimensión deseada, con una tolerancia de ± 0.1 mm.

Figura 18. Fabricación de ejes metálicos en torno



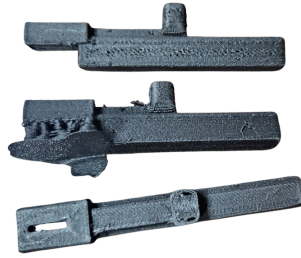
Nota. La figura muestra ejemplos de los distintos intentos de mecanizado de los ejes en metal. Elaboración propia.

Como se observa en la Figura 18, los resultados no fueron satisfactorios. Debido a la elevada esbeltez de la pieza, la fijación en el torno resultó compleja y provocó que al mecanizar la zona central el eje tendiera a deformarse. Aunque no todos los ejes presentaron un doblez severo, sí se evidenció una desviación perceptible en cada intento, incluso a simple vista y sin necesidad de instrumentos de medición. Adicionalmente, el acabado superficial obtenido fue más rugoso que el de las piezas impresas. Aun utilizando un avance automático lento, no fue posible eliminar por completo las marcas de la herramienta de corte. Por estas razones, este método de fabricación fue descartado.

Impresión con *PA12-CF*

Esta alternativa se consideró debido a que el material *PA12-CF* ofrece excelentes propiedades mecánicas al estar reforzado con fibra de carbono. Adicionalmente, este filamento posee características autolubricantes, lo cual resulta deseable para reducir la fricción interna en el empaquetado del resorte [27]. Para evaluar su desempeño, se fabricaron diversos prototipos utilizando una impresora BambuLab P1S disponible en la Universidad del Valle.

Figura 19. Prototipos impresos con PA12-CF



Nota. La figura muestra distintos prototipos impresos con filamento PA12-CF. Elaboración propia.

Como se observa en la Figura 19, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios. A pesar de realizar múltiples pruebas, todas las piezas presentaron problemas de subextrusión, evidenciando un flujo restringido de material, posiblemente asociado a la presencia de fibras de carbono en el filamento. Asimismo, la adhesión entre capas fue deficiente: en varios puntos las capas podían separarse manualmente, comprometiendo la resistencia estructural de los prototipos.

Si bien algunas regiones aisladas lograron alcanzar un acabado adecuado y mostraron buena dureza, este comportamiento no fue consistente dentro de una misma pieza ni entre diferentes impresiones. Se consideró que la humedad del filamento podría ser un factor influyente, por lo que este fue sometido a un proceso de secado en horno a 70°C durante 12 horas; sin embargo, los resultados no mejoraron.

Debido a la falta de repetibilidad, la baja calidad superficial y la insuficiente integridad mecánica de los prototipos, esta alternativa de fabricación fue descartada.

Impresión tradicional

La tercera alternativa de fabricación consistió en continuar utilizando impresión 3D tradicional, introduciendo ajustes en los perfiles de impresión con el fin de mejorar el acabado superficial y la durabilidad de las piezas. Como se mencionó previamente, la metodología de generación de paredes en *Cura* permitió fabricar roscas en los ejes con relativa facilidad. No obstante, parámetros críticos como el flujo de material y la altura variable de capa no podían modificarse de manera precisa.

Con apoyo de la herramienta ChatGPT [28], se configuró OrcaSlicer para replicar y optimizar las condiciones de impresión logradas en *Cura*. En particular, se ajustó el algoritmo de generación de paredes y perímetros para emplear Arachne y se aplicó compensación de flujo de material en áreas reducidas.

Adicionalmente, se estableció una altura de capa uniforme de 0.08 mm para la impresión de los ejes, mientras que en las camisas se implementó altura de capa variable. En la camisa de tensión se utilizó 0.08 mm en la zona correspondiente al cilindro interno que aloja al resorte completamente comprimido, mientras que el resto de la pieza, al igual que la camisa de compresión, se imprimió con una altura de capa de 0.20 mm.

Para solucionar la rugosidad de los ejes, se implementó un posprocesado exhaustivo mediante lijado progresivo, utilizando de forma secuencial lijas de grano cada vez más fino, iniciando con 120 y continuando con 150, 220, 240, 280, 320, 360, 400, 500, 600, 1000, 1200, 1500 y hasta 2000. El uso de granos bajos permitió remover las imperfecciones iniciales y reducir las marcas propias del proceso de impresión; luego, los granos intermedios facilitaron la nivelación de la superficie, mientras que los granos finos y muy finos proporcionaron el acabado requerido para garantizar un movimiento relativo uniforme entre las piezas. Aunque este procedimiento fue demandante en tiempo, permitió disminuir significativamente la resistencia al movimiento causada por la rugosidad de las capas impresas, obteniéndose ejes con una superficie más lisa y adecuada para el ensamble final.

Con los ajustes implementados, esta metodología de manufactura permitió obtener resultados aceptables en términos de acabado y funcionalidad. Sin embargo, se identificó como desventaja la persistente fragilidad en los empaquetados correspondientes a los resortes de menor diámetro, lo que continúa representando una limitación en su desempeño estructural.

7.4.4. Amortiguadores

En esta iteración de diseño se procedió con el prototipado de amortiguadores, ya que existía disponibilidad local de estos componentes. Los amortiguadores seleccionados cuentan con una longitud variable entre 81 y 120 mm, lo que proporciona una carrera de 39 mm. Para verificar si esta carrera era suficiente en comparación con los empaquetados de resorte, se evaluó la longitud de compresión máxima utilizando la expresión

$$L_{resortes} = 50 - 2(d_a(n + 1)) \quad (28)$$

donde d_a representa el diámetro de alambre del resorte y n el número de vueltas del resorte. A la longitud total de ambos resortes (50 mm) se le resta la dimensión correspondiente a los resortes completamente comprimidos.

Cuadro 6. Longitud de carrera de los empaquetados de resorte

Resorte	Longitud de carrera (mm)
0.3	40.4
0.4	35.6
0.5	27.0
0.6	22.4
0.7	31.8

Nota. Valores calculados a partir de la ecuación (28). Elaboración propia.

Como se observa en el Cuadro 6, únicamente el resorte de 0.3 mm podría generar una ligera interferencia, pero dado que el margen es reducido, se consideró que los amortiguadores eran adecuados para el sistema. Con el fin de evaluar su comportamiento bajo diferentes niveles de amortiguamiento, se adquirió una docena de unidades y se emparejaron con seis

viscosidades distintas de aceite del fabricante Losi, en un rango comprendido entre 25 y 45 *weight (wt)* [22].

Durante el llenado inicial se detectó una fuga de aceite en uno de los extremos. Para corregirla, el amortiguador fue desmontado y se añadió una junta tórica adicional para mejorar el sellado; si bien esta modificación incrementa ligeramente la fricción interna, el aceite compensa parcialmente este efecto. Una vez corregido el problema, se procedió al llenado por parejas, obteniéndose dos amortiguadores por cada viscosidad.

Finalmente, se diseñó un mecanismo de acople geométrico en ambos extremos para integrarlos al sistema de anclaje de los carruajes de masas. Este acople presenta una ligera interferencia para asegurar su fijación, por lo que el montaje debe realizarse mediante una prensa manual.

Figura 20. Montaje de amortiguador



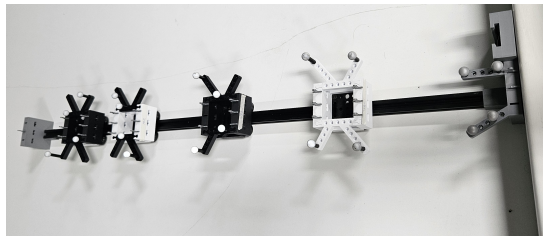
Nota. La figura muestra el montaje del amortiguador con los puntos de anclaje. Elaboración propia.

7.4.5. Montaje del sistema

Se realizó el montaje completo del sistema incorporando todas las modificaciones de diseño implementadas en esta iteración. El ensamblaje resultó significativamente más sencillo y versátil en comparación con versiones previas, además de no presentar desviaciones ni vibraciones asociadas a la fragilidad de los componentes.

Con base en estos resultados, se seleccionó esta iteración como el diseño final para los procesos de validación. La Figura 21 muestra el sistema montado en el entorno del Robotat.

Figura 21. Diseño final del sistema montado en Robotat



Nota. La figura muestra el montaje del prototipo final en el ecosistema del Robotat. Elaboración propia.

Desarrollo de la aplicación para rastreo de masas

El desarrollo de la aplicación para conectar con el sistema OptiTrack consideró elementos que facilitaran una captura e integración sencilla de datos. La interfaz incluyó menús para seleccionar el número de masas, el sistema de coordenadas (absoluto o relativo), botones de conexión, inicio y fin de grabación, y una opción para exportar los datos.

OptiTrack envía las posiciones respecto al centro de la plataforma del Robotat, por lo que se implementó una opción de coordenadas relativas utilizando un marcador fijo (*homeID*) como referencia. Esto se realizó mediante la transformación

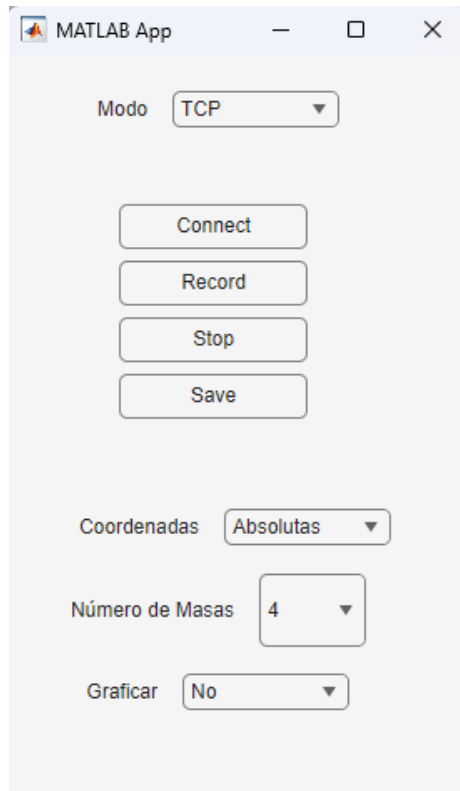
$$T_{\text{rel}} = T_{\text{GND}}^{-1} T_i, \quad (29)$$

donde T_{GND} es la transformación del marcador de referencia y T_i la de cada masa. La posición relativa se obtuvo del vector de traslación de T_{rel} , aplicando inversión de ejes cuando la orientación física del sistema lo requirió.

8.1. Aplicación con Matlab

La primera versión se desarrolló en *App Designer* de Matlab, aprovechando las funciones disponibles en la Universidad (`robotat_connect`, `robotat_disconnect` y `robotat_getpose`) para comunicarse con el sistema Robotat. Esto permitió una integración directa con el laboratorio y una rápida construcción de la interfaz gráfica. Adicionalmente, se utilizó ChatGPT [28] como apoyo para resolver problemas de reconexión, actualización en tiempo real y manejo básico de errores. La aplicación se puede ver en la Figura 22.

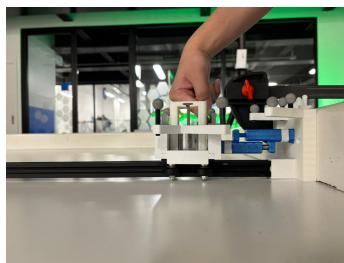
Figura 22. Aplicación de captura de datos en Matlab



Nota. La figura muestra la interfaz de la aplicación para captura de datos en Matlab. Elaboración propia.

Con esta aplicación se realizaron pruebas iniciales de rastreo para un sistema masa-resorte (Figura 23). En ellas se observó que la frecuencia de muestreo era insuficiente: el graficado en vivo alcanzaba solo unos 3 Hz y, aun desactivándolo y optimizando el código, la frecuencia máxima obtenida fue de aproximadamente 9 Hz. Esta limitación se debe al protocolo TCP utilizado por las funciones de conexión preexistentes.

Figura 23. Posición inicial de configuración de pruebas de resortes



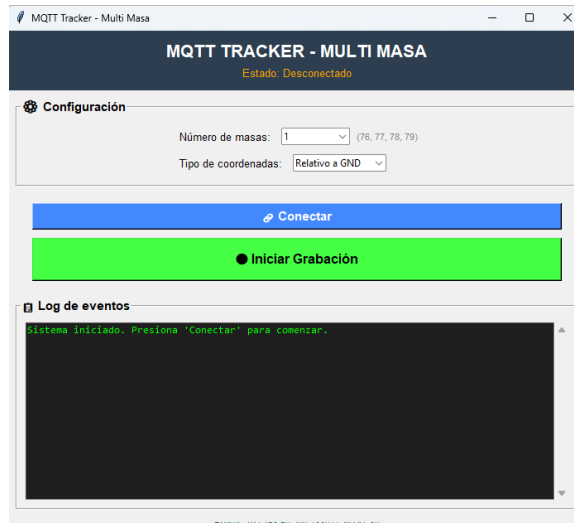
Nota. La figura muestra la posición de liberación del sistema en pruebas de compresión. Elaboración propia.

8.2. Aplicación con Python

Para aumentar la frecuencia de captura, se desarrolló una segunda aplicación en Python utilizando el protocolo MQTT. Este protocolo, implementado en [29], publica continuamente las posiciones de los cuerpos rígidos del Robotat en un servidor, evitando la necesidad de solicitar datos desde la interfaz. Python fue elegido en lugar de Matlab porque permite manejar hilos de ejecución de manera más eficiente, requisito clave para procesar datos en tiempo real.

La interfaz gráfica se implementó con el paquete TKInter y, para maximizar la frecuencia de muestreo, se omitió la visualización en vivo. En pruebas experimentales se alcanzó una frecuencia promedio de 70 Hz, considerablemente mayor que la obtenida en Matlab. Por lo demás, las funciones de la aplicación son equivalentes a las de la versión anterior. La aplicación se puede ver en la Figura 24.

Figura 24. Aplicación de captura de datos en Python



Nota. La figura muestra la interfaz de la aplicación para captura de datos en Python. Elaboración propia.

Ambas aplicaciones se pueden descargar de *Github* en el Anexo 14.1.5.

Validación de datos experimentales de diseño final

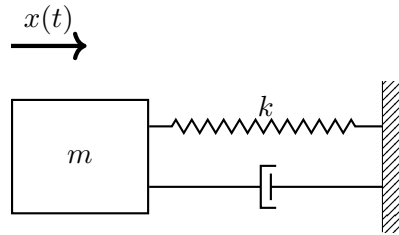
Para validar el desempeño del sistema y confirmar que los componentes cumplen con el comportamiento dinámico esperado, se llevó a cabo una fase de caracterización experimental. Esta etapa tuvo como finalidad obtener datos reales de la respuesta del sistema masa–resorte–amortiguador y utilizar estos datos para estimar los parámetros físicos de los elementos, verificando que su funcionamiento es coherente con el modelo teórico planteado en capítulos anteriores.

La validación experimental consistió en registrar la respuesta libre del sistema bajo distintas configuraciones, procesar las señales obtenidas y compararlas con el modelo dinámico asociado a cada componente. Para ello, se emplearon configuraciones que incluían un resorte o amortiguador montado en el carruaje, junto con masas comerciales que permitieron ajustar las condiciones iniciales de cada ensayo.

9.1. Diseño experimental

Todas las pruebas se ejecutaron utilizando el mismo modelo físico representado en la Figura 25, el cual consiste en un sistema masa–resorte–amortiguador con un extremo fijo a tierra. El carruaje se desplazó manualmente hasta una posición inicial conocida y posteriormente se liberó para registrar la respuesta transitoria del sistema.

Figura 25. Modelo masa–resorte–amortiguador anclado a tierra



Nota. La figura muestra el sistema masa–resorte–amortiguador empleado en los análisis dinámicos. Elaboración propia.

El diseño experimental contempló la caracterización de resortes y amortiguadores por separado. Para los resortes, se trabajó con seis unidades correspondientes a los calibres de alambre de 0.3, 0.4 y 0.5 mm, mientras que para los calibres de 0.6 y 0.7 mm se contó con tres unidades por calibre. En el caso de los amortiguadores, se dispuso de dos unidades para cada viscosidad de aceite, desde 25 hasta 45 WT.

En todos los ensayos, la variable independiente fue la masa total del sistema. Para ello, se añadieron masas educativas estándar de 100, 200, 300 y 400 g, las cuales se suman a la masa del carruaje de 212.4 g. Con cada configuración de masa, el carruaje se desplazó manualmente desde una posición inicial definida, tanto en tensión como en compresión, y posteriormente se liberó para registrar la respuesta transitoria completa hasta que el movimiento tendió al reposo.

Para cada componente se realizaron ocho pruebas en total, correspondientes a las cuatro masas y a las dos condiciones iniciales (tensión y compresión). Las señales obtenidas se utilizaron posteriormente para estimar los parámetros dinámicos asociados al elemento evaluado.

En el caso de los resortes, cada unidad se caracterizó de manera individual siguiendo este procedimiento. Para los amortiguadores, se dejó fija una masa y se utilizó un resorte de calibre 0.7 mm, con el fin de proporcionar un desplazamiento inicial suficientemente amplio que permitiera observar el efecto del amortiguamiento durante un intervalo de tiempo prolongado.

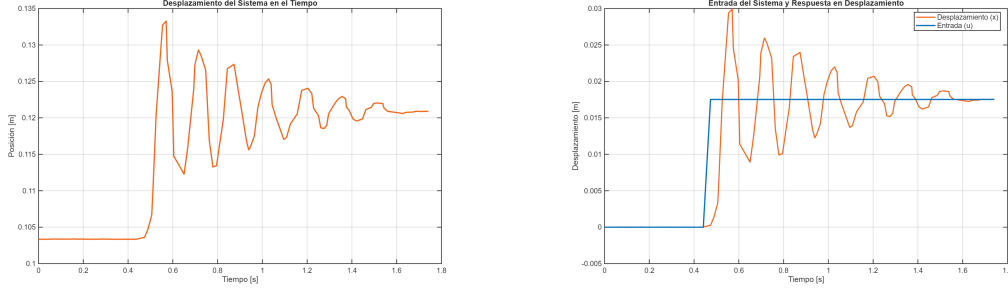
9.2. Análisis de datos

Para realizar el análisis de datos, se programaron dos scripts en Matlab: uno para procesar los datos de los resortes y otro para los datos de los amortiguadores. En ambos casos, se partió de archivos `xlsx` que contenían los vectores de tiempo y posición del carruaje en el eje de desplazamiento.

La forma de las señales obtenidas, ejemplificada en la Figura 26a, se asemeja a la respuesta de un sistema ante un escalón unitario. El *System Identification Toolbox* requiere pares de señales de entrada y salida para estimar un modelo dinámico; sin embargo, debido a que

los ensayos consisten en liberar el sistema desde una condición inicial, no existe un vector de entrada explícito. Para abordar esta limitación, se aproximó la respuesta del sistema a la forma de un escalón unitario, como se observa en la Figura 26b. Para ello, la señal de posición se centró en el origen y se determinó el punto de equilibrio, con lo cual se definió la magnitud del “escalón virtual” utilizado como entrada en el proceso de identificación.

Figura 26. Ejemplo de datos obtenidos para un resorte en compresión



(a) Datos crudos.

(b) Datos ajustados a escalón unitario.

Nota. La figura muestra los datos de posición contra tiempo obtenidos mediante el sistema de captura, incluyendo la señal cruda (a) y la versión ajustada a un escalón unitario (b). Elaboración propia.

Se seleccionó un modelo LTI de segundo orden de la forma

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}, \quad (30)$$

el cual presenta explícitamente los parámetros físicos del sistema en el denominador [30]. Experimentalmente, se obtuvieron funciones de transferencia similares. Durante la identificación, se indicó al software que la masa debía permanecer fija; sin embargo, al finalizar el proceso se obtuvo una función de transferencia con una masa distinta a la especificada. Esto ocurre porque, al tratarse de un ajuste basado en una entrada equivalente a un escalón, la ganancia real del sistema no es considerada directamente.

Para corregir esta discrepancia, se calculó una ganancia C mediante

$$C = \frac{M_{\text{real}}}{M_{\text{estimada}}}, \quad (31)$$

la cual se aplicó posteriormente a los coeficientes b y K estimados, obteniendo así valores experimentales consistentes con la masa real del sistema.

El procedimiento fue similar para resortes y amortiguadores, con la salvedad de que estos últimos se emparejaron con el resorte número 3 de calibre 0.7 mm, seleccionado porque permitía un mayor desplazamiento inicial y un tiempo más largo de observación del amortiguamiento. Durante la identificación se dejó fija la masa y la rigidez del resorte, de modo que el modelo ajustara únicamente el coeficiente de amortiguamiento.

Experimentalmente, las funciones de transferencia obtenidas por medio de esta metodología, son similares a la ejemplificada en la Ecuación (32).

$$G(s) = \frac{1}{0.4124s^2 + 3.02s + 692.41}, \quad (32)$$

La cual fue obtenida en una de las pruebas de caracterización de un resorte de calibre 0.7 mm.

A partir de esta corrección, para los resortes se calculó el promedio de las ocho mediciones realizadas por unidad y se comparó con el valor teórico obtenido mediante la Ecuación (15). En el caso de los amortiguadores, al no existir un valor teórico de referencia, se analizó la desviación estándar entre ensayos como indicador de la incertidumbre asociada a las mediciones.

En la sección 14.1.6 se presentan los valores resumidos de los resortes, y en la sección 14.1.7 se presentan los resultados correspondientes a los amortiguadores. Como se observa en los cuadros correspondientes a los resortes, se obtuvieron porcentajes de error entre 0.29 % y 17.85 %. Estos valores son aceptables al considerar que las mediciones se realizaron directamente con el sistema OptiTrack, sin aplicar filtrado previo para eliminar ruido causado por vibraciones. Además, en la Ecuación (15) se utiliza el valor promedio del módulo de rigidez del material, por lo que existe incertidumbre asociada al valor teórico. También es importante destacar que en todas las mediciones de resortes se observó un amortiguamiento parasítico, atribuible a la fricción interna de los empaquetados y a la fricción entre el carruaje y el riel. Este valor se mantuvo cercano entre experimentos, independientemente del resorte utilizado, con un promedio de 3.1 Ns/m, lo cual confirma que el amortiguamiento proviene del mecanismo. Un ejemplo de esto se puede observar en el Cuadro 7.

Cuadro 7. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.3 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	96.65	2.83	6.42	84.07	3.29e-06	95.53
2	110.64	3.24	-7.13	86.17	2.34e-06	111.06
3	104.79	2.72	-1.47	83.80	3.54e-06	100.13
4	100.48	2.78	2.70	86.45	2.23e-06	96.68
5	98.14	2.65	4.98	84.03	3.16e-06	96.93
6	102.50	3.15	0.75	83.04	3.25e-06	107.19

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

En el caso de los amortiguadores, según los cuadros de la sección 14.1.7, el ajuste promedio fue de 96.33 %, superior al obtenido en los resortes. Esto probablemente se debe a que en este caso el modelo debía estimar únicamente un parámetro. Para evaluar la consistencia de los datos se utilizó la desviación estándar entre las ocho pruebas realizadas por amortiguador. En la Figura 27 se observa la tendencia de las mediciones junto con sus barras de error. Si bien el coeficiente de amortiguamiento aumenta con la viscosidad del aceite, los valores se encuentran lo suficientemente cercanos como para solaparse entre viscosidades. Incluso se obtuvo un amortiguador de 30 WT cuyo coeficiente b es el más alto, pese a no ser el más viscoso, lo que se atribuye a la presencia de sellos toroidales que aumentan la fricción

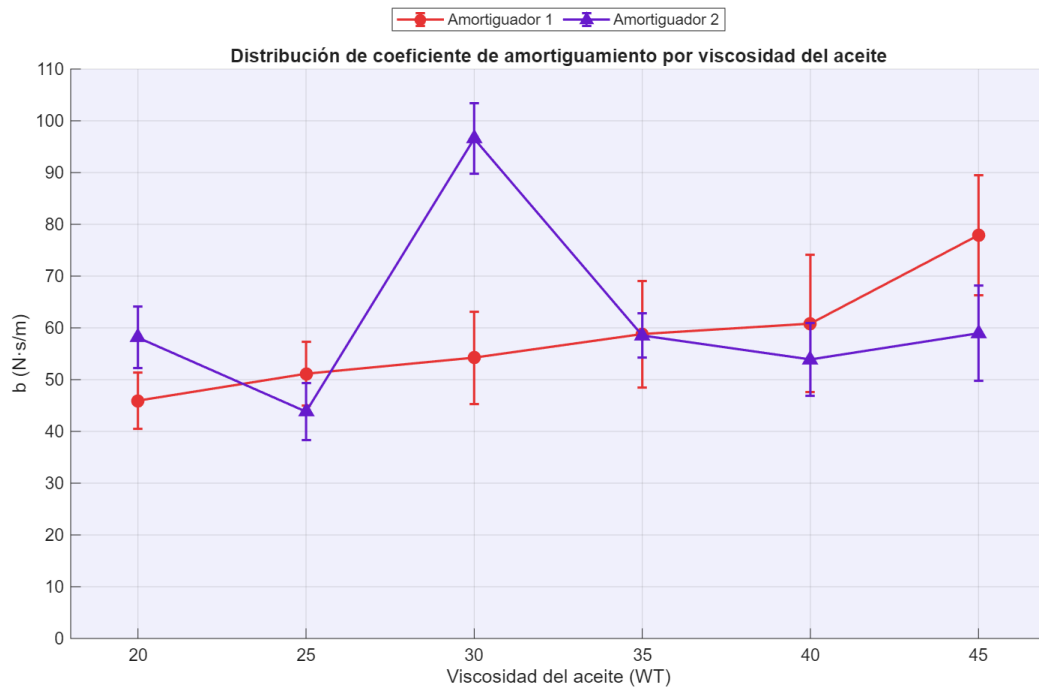
interna y modifican el comportamiento del fluido. Un ejemplo de estos datos se observa en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 20 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	45.94	5.45	96.56	6.96e-08	6.55e-08	685.30
2	58.12	5.94	95.15	1.45e-07	1.38e-07	684.72

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación. Elaboración propia.

Figura 27. Distribución de coeficientes de amortiguamiento por viscosidad del aceite



Nota. La figura muestra la distribución de los coeficientes de amortiguamiento de los amortiguadores caracterizados. Elaboración propia.

Concordancia con LGM

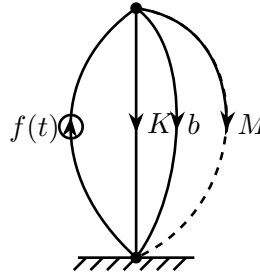
El objetivo de este capítulo es demostrar que la dinámica obtenida experimentalmente para el sistema masa–resorte–amortiguador coincide con la formulación teórica obtenida mediante la metodología de *Linear Graph Modeling* (LGM). Esta concordancia es fundamental, ya que valida que el sistema físico desarrollado en los capítulos anteriores puede ser representado adecuadamente dentro del marco de los modelos de parámetros concentrados y, por lo tanto, es compatible con análisis basados en grafos lineales.

Siguiendo la metodología descrita en la Sección 6.1.3, se construyó el grafo lineal correspondiente al sistema experimental mostrado en la Figura 25. En este grafo, cada elemento físico del sistema se representa mediante una rama: la masa del carruaje, el resorte, el amortiguador y la fuerza inicial almacenada en el resorte. Esta última se incluye como una *fuerza de esfuerzo* para reflejar las condiciones iniciales de precarga.

Asimismo, se consideró explícitamente el amortiguamiento parasítico presente en los resortes reales. Aunque este amortiguamiento no forma parte del modelo ideal, en la práctica introduce pérdidas de energía adicionales. Su inclusión como un amortiguador en paralelo permite que el grafo represente con mayor fidelidad el comportamiento observado en los experimentos.

El sistema completo queda representado por dos nodos: el nodo asociado al anclaje a tierra y el nodo correspondiente al carruaje de masas. A partir de estos elementos se obtiene el grafo de la Figura 28, el cual refleja la topología energética del sistema y constituye la base para derivar el modelo dinámico mediante las leyes de continuidad y compatibilidad.

Figura 28. Grafo lineal de modelo masa–resorte–amortiguador anclado a tierra



Nota. La figura muestra el el grafo lineal del sistema masa–resorte–amortiguador empleado en los análisis dinámicos. Elaboración propia.

El grafo lineal representa explícitamente cómo fluye la potencia entre los elementos. Las direcciones de las ramas corresponden a las orientaciones positivas de velocidad y esfuerzo adoptadas en el modelo. Debido a que la fuerza restauradora del resorte actúa en sentido opuesto al movimiento, su contribución aparece con signo contrario respecto a la orientación del grafo, lo cual se refleja en las ecuaciones de continuidad.

Esta representación gráfica no es únicamente simbólica: permite asegurar que el modelo cumple con las leyes de conservación de energía y con la causalidad requerida por LGM. En particular, la elección de variables primarias garantiza que cada elemento se modele con independencia estructural antes de aplicar las ecuaciones de interconexión del sistema.

10.1. Conteo estructural

A partir del grafo lineal de la Figura 28 se realiza el conteo estructural del sistema, el cual permite determinar el número de variables independientes que describen su dinámica. Este análisis es fundamental dentro de LGM, pues establece cuántas ecuaciones constitutivas y cuántas ecuaciones de interconexión serán necesarias para obtener el modelo dinámico completo.

El grafo del sistema posee:

$$n = 2, \quad b = 4, \quad s = 1 \quad (33)$$

donde n corresponde al número de nodos, b al número de ramas y s al número de fuerzas independientes (en este caso, la fuerza inicial del resorte modelada como una fuente de esfuerzo). A partir de estos valores se obtiene:

$$p = b - s = 3, \quad 2b = 8, \quad 2b - s = 7 \quad (34)$$

El $p = 3$ indica que existen tres variables primarias asociadas a las ramas constitutivas

del sistema: la rama de masa, la rama del resorte y la rama del amortiguador. Estas ramas definen los elementos que aportan almacenamiento o disipación de energía.

La estructura de nodos cumple:

$$n - 1 = 1, \quad b - (n - 1) = 3 \quad (35)$$

lo cual confirma que el sistema contiene un único lazo independiente y que las tres ecuaciones constitutivas deben complementarse con tres ecuaciones de continuidad y compatibilidad para cerrar el modelo.

Finalmente, las variables primarias y que se consideran independientes antes de imponer las restricciones topológicas son: $v_m, f_k, f_b, f(t)$. Las variables secundarias determinadas posteriormente por continuidad, son: $v(t), f_m, v_k, v_b$.

10.2. Ecuaciones elementales

A partir del grafo lineal del sistema, cada rama se describe mediante su relación constitutiva esfuerzo-flujo, siguiendo las definiciones presentadas en el marco teórico. Las ecuaciones elementales para la masa, el resorte y el amortiguador quedan entonces expresadas como:

$$\frac{dv_m}{dt} = \frac{1}{m} f_m \quad (36)$$

$$\frac{df_k}{dt} = k v_k \quad (37)$$

$$f_b = B v_b \quad (38)$$

Estas expresiones representan el comportamiento individual de cada elemento antes de imponer las ecuaciones de continuidad y compatibilidad del grafo.

10.3. Continuidad y compatibilidad

Las condiciones de continuidad y compatibilidad se obtienen al analizar los nodos del grafo lineal. En el nodo correspondiente al carruaje, la suma de esfuerzos debe equilibrarse, lo cual conduce a:

$$f_m = f(t) - f_b - f_k \quad (39)$$

Por otro lado, como el resorte y el amortiguador están conectados en paralelo entre los mismos dos nodos, ambos experimentan la misma velocidad relativa del sistema, por lo que:

$$v_k = v_m, \quad v_b = v_m \quad (40)$$

Estas relaciones permiten ensamblar las ecuaciones elementales de cada rama y conducir al modelo dinámico completo del sistema.

10.4. Modelo dinámico

Al combinar las ecuaciones elementales de cada rama con las relaciones de continuidad y compatibilidad, se obtiene el modelo dinámico completo del sistema masa–resorte–amortiguador. La ecuación de movimiento viene dada por el balance de esfuerzos sobre la masa:

$$\frac{dv_m}{dt} = \frac{1}{m} (f(t) - f_b - f_k) \quad (41)$$

El comportamiento del resorte se describe mediante la evolución de su fuerza interna:

$$\frac{df_k}{dt} = k v_m \quad (42)$$

y el amortiguador introduce una fuerza proporcional a la velocidad:

$$f_b = B v_m \quad (43)$$

Este conjunto de ecuaciones representa la dinámica del sistema en términos de velocidad y fuerza interna, y constituye la base para su formulación en espacio de estados en la siguiente sección.

10.5. Espacio de estados

A partir del modelo dinámico obtenido, se seleccionan como variables de estado la velocidad del carruaje y la fuerza interna del resorte:

$$x = \begin{bmatrix} v_m \\ f_k \end{bmatrix} \quad (44)$$

Con esta elección, el sistema puede expresarse en forma de espacio de estados como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_m \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{m} & -\frac{1}{m} \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ f_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (45)$$

Para efectos de análisis, se define como salida la velocidad del sistema:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ f_k \end{bmatrix} \quad (46)$$

Esta representación permite emplear herramientas clásicas de análisis y control, además de facilitar la obtención directa de la función de transferencia del sistema.

10.6. Función de transferencia

A partir del modelo en espacio de estados, la función de transferencia entre la fuerza aplicada y la velocidad del sistema se obtiene mediante [31]:

$$G(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B \quad (47)$$

Al evaluar esta expresión para el sistema masa–resorte–amortiguador, se obtiene:

$$G(s) = \frac{s}{ms^2 + Bs + k} \quad (48)$$

Para obtener la transferencia entre desplazamiento y fuerza, se divide por s , resultando en:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} \quad (49)$$

Esta función de transferencia coincide con la empleada en la etapa de identificación experimental, lo que confirma la concordancia entre el modelo derivado mediante LGM y el comportamiento dinámico observado en el prototipo.

En conjunto, los resultados obtenidos en este capítulo demuestran que la metodología de grafos lineales permite representar de manera coherente la dinámica del sistema masa–resorte–amortiguador desarrollado. Desde la construcción del grafo y el conteo estructural, hasta la obtención del modelo en espacio de estados y su función de transferencia, todas las etapas conducen a expresiones matemáticas que coinciden con la forma clásica del sistema y, más importante aún, con los modelos identificados experimentalmente. Esta concordancia confirma que el prototipo cumple con las condiciones del modelado de parámetros concentrados y valida que el sistema físico puede analizarse y caracterizarse bajo el marco teórico de LGM. De esta manera, se establece un puente sólido entre la formulación teórica y el comportamiento real del sistema.

- Se logró desarrollar una infraestructura experimental capaz de generar datos confiables de sistemas mecánicos traslacionales lineales e invariantes en el tiempo, cumpliendo con los requisitos necesarios para su futura utilización en la validación de la metodología *Linear Graph Modeling*.
- La integración del sistema físico con herramientas de captura y análisis permitió obtener mediciones de alta precisión y reproducibilidad, estableciendo una base experimental sólida para estudios posteriores de modelado multidominio.
- Se diseñó un sistema mecánico modular que permite intercambiar masas, resortes y amortiguadores de manera rápida y estable, garantizando un comportamiento dinámico que se ajusta al modelo lineal de parámetros concentrados.
- Las iteraciones de diseño permitieron identificar y corregir fallas estructurales y geométricas, logrando un prototipo final robusto, simétrico y compatible con múltiples configuraciones experimentales.
- La fabricación mediante impresión 3D permitió obtener componentes con tolerancias adecuadas y desempeño mecánico consistente, validando la metodología de manufactura seleccionada para el proyecto.
- Las pruebas realizadas confirmaron la estabilidad funcional del sistema en todas sus configuraciones, observándose comportamientos dinámicos acordes con las predicciones teóricas.
- El sistema se integró exitosamente con el ecosistema Robotat mediante el uso de marcadores retroreflectivos y montaje compatible con la plataforma de captura OptiTrack.
- La integración permitió registrar posiciones con una frecuencia máxima de 70 Hz, lo cual garantiza datos experimentales adecuados para análisis dinámico y comparación con modelos teóricos.

- Se recopilaron y procesaron datos de 288 ensayos experimentales, obteniendo parámetros dinámicos con errores menores al 15 % en resortes y ajustes superiores al 96 % en amortiguadores, lo cual valida la calidad de los datos obtenidos.
- La colección preliminar de datos generada constituye un insumo valioso para la validación futura de LGM y abre la puerta al desarrollo de simuladores híbridos basados en datos experimentales.

A partir del trabajo desarrollado y considerando las limitaciones establecidas en el alcance, se plantean las siguientes recomendaciones para proyectos futuros:

- Implementar mecanismos de accionamiento controlado, como motores, que permitan aplicar entradas reproducibles al sistema y mejorar la precisión de los experimentos. La inclusión de estos dispositivos, además, amplía la representación del sistema desde elementos de un solo puerto hacia elementos de múltiples puertos dentro del marco del modelado por grafos lineales.
- Desarrollar una base de datos extensa con registros de múltiples configuraciones de masas, resortes y amortiguadores, que sirva de referencia para validar de forma sistemática la metodología de modelado por grafos lineales.
- Explorar métodos de manufactura más reproducibles y escalables que la impresión 3D, facilitando la replicación del sistema.
- Extender el sistema hacia la inclusión de elementos no lineales y configuraciones con mayor número de grados de libertad, que permitan estudiar dinámicas más complejas y ampliar las aplicaciones didácticas e investigativas del prototipo.
- Desarrollar una orientación académica del sistema, creando guías de laboratorio y metodologías de control y perturbaciones aplicables a cursos de Control.

-
-
- [1] D. Rowell y D. N. Wormley, *System Dynamics: An Introduction*, 1.^a ed., M. Horton, B. M. DeLeon y C. Dean, eds. Pearson Education, 1997, págs. 1-5.
 - [2] J. W. Forrester, *Industrial Dynamics*, 2.^a ed. MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, jun. de 1962.
 - [3] J. F. Broenink, *Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs*, 1999.
 - [4] A. D. L. Calle, F. E. Cellier, L. J. Yebra y S. Dormido, «Improvements in BondLib, the Modelica bond graph library,» en *Proceedings - 8th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, EUROSIM 2013*, Institute of Electrical y Electronics Engineers Inc., ene. de 2015, págs. 282-287, ISBN: 9780769550732. DOI: 10.1109/EUROSIM.2013.58.
 - [5] I. Liebgott, *Simulink para diseño y simulación de sistemas*, 2025. dirección: <https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/80674-modeling-and-simulation-of-multi-physics-systems-with-matlab>.
 - [6] E. E. Bas y M. A. Moustafa, «Real-Time Hybrid Simulation with Deep Learning Computational Substructures: System Validation Using Linear Specimens,» *Machine Learning and Knowledge Extraction*, vol. 2, págs. 469-489, 4 oct. de 2020, ISSN: 2504-4990. DOI: 10.3390/make2040026.
 - [7] E. C. Systems, *Model 210: Rectilinear plant*. dirección: https://www.ecpsystems.com/controls_recplant.htm.
 - [8] D. Trumper, S. Nayfeh y K. Lilienkamp, *PROJECTS FOR TEACHING MECHATRONICS AT MIT*, 2002. dirección: https://web.ece.ucsb.edu/~katiebyl/papers/Trumper_Nayfeh_Lilienkamp.pdf.
 - [9] C. P. Montoya, «Robotat: un ecosistema robótico de captura de movimiento y comunicación inalámbrica,» Trabajo de graduación de licenciatura, Universidad Del Valle de Guatemala, 2021.
 - [10] OptiTrack, *PrimeX 41 Motion Capture Camera*, <https://optitrack.com/cameras/primex-41/>, Consultado: 27 de septiembre de 2025, 2025.
 - [11] OptiTrack, *Camera Placement*, <https://docs.optitrack.com/hardware/camera-placement>, Consultado: 12 de noviembre de 2025, 2025.

- [12] MIT, *Linear Graph Modeling: State Equation Formulation*, Available: <https://web.mit.edu/2.151/www/Handouts/EqFormulation.pdf>, sep. de 2004.
- [13] *Oriented Graph*, ScienceDirect Topics, Accedido: septiembre 2025, 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/oriented-graph>.
- [14] MIT, *Energy and Power Flow in State Determined Systems*, ene. de 2003.
- [15] R. A. Serway y J. W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Chapters 1-46*, 7th. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2007, ISBN: 0-495-11245-3.
- [16] R. G. Budynas y J. K. Nisbett, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, 9a, trad. por E. M. Mauricia. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2011, Traducción de *Shigley's Mechanical Engineering Design*, ISBN: 978-607-15-0771-6.
- [17] J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, 3rd. New York y London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1947.
- [18] P. Corke, *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms In MATLAB*, 2nd. Springer, 2017, ISBN: 978-3-319-54412-0.
- [19] Tactix. «200Pc Spring Assortment.» Accessed: Sep. 28, 2025.
- [20] P. D. Mazariegos, *MakerLab - Universidad del Valle de Guatemala*, Available: <https://sites.google.com/view/makerlabuvg/main>, Accessed: Sep. 28, 2025, 2024.
- [21] *Shock Absorber Adjustable for Crawler Traxxas Upgrade*, <https://www.amazon.com/dp/B0B6WNSZN9>, Consultado: 25 de septiembre de 2025, 2025.
- [22] Team Losi Racing, *Silicone Shock Oil 45wt 610cst 2oz (TLR74012)*, <https://www.losi.com/product/silicone-shock-oil-45wt-610cst-2oz/TLR74012.html>, Consultado: 27 de septiembre de 2025, 2025.
- [23] *IP-1850 placa deslizante 4 rodamientos V-slot 2020*, <https://electronicarych.com/shop/ip-1850-ip-1850-placa-deslizante-4-rodamientos-v-slot-2020-7654>, Consultado: 25 de septiembre de 2025, 2025.
- [24] *PF-2040V-1 perfil de aluminio 2040 V-slot (1 m de largo aprox.)* <https://electronicarych.com/shop/pf-2040v-1-pf-2040v-1-perfil-de-aluminio-2040-v-slot-1m-largo-aprox-13964>, Consultado: 25 de septiembre de 2025, 2025.
- [25] Tactix, *Trigger Clamp Dual Action*, Available: <https://shop.tactixtools.co.uk/products/trigger-clamp-dual-action/>, Accessed: Sep. 28, 2025, 2025.
- [26] *Dianrui Compression Spring Assortment*, https://www.amazon.com/Dianrui-Compression-Assortment-Mechanical-K-P-051-300/dp/B0BVTDP29W/ref=sr_1_3?sr=8-3, Consultado: 26 de septiembre de 2025, 2025.
- [27] eSUN Industrial Co., Ltd., *ePA12-CF Filament — Technical Data Sheet (TDS) V4.01*, https://www.esun3d.com/uploads/eSUN_ePA12-CF-Filament_TDS_V4.01.pdf, Accedido: 15 de noviembre de 2025, 2024.
- [28] OpenAI, *ChatGPT (GPT-5)*, Disponible en: <https://chat.openai.com>, Accedido: 26 de septiembre de 2025, 2025.

- [29] C. A. Schwendener, «Desarrollo de herramientas de software para la evaluación de sensores de posicionamiento en el control individual y seguro del cuadricóptero Crazyflie 2.1,» Trabajo de graduación de licenciatura, Universidad Del Valle de Guatemala, 20251.
- [30] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 8.^a ed. Wiley, 2019, págs. 90-95.
- [31] G. Beale, «Example: State-Space to Transfer Function for ECE 521,» George Mason University, Volgenau School of Engineering, Technical Report xmpl-521-ss2tf-01, 2013. dirección: https://people-ece.vse.gmu.edu/~gbeale/ece_521/xmpl-521-ss2tf-01.pdf.

En estos anexos se incluye información adicional acerca del diseño y fabricación de prototipos, así como el repositorio para la aplicación desarrollada.

14.1. Diseño y fabricación de prototipos

14.1.1. Resumen de requisitos de diseño

Cuadro 9. Matriz de requerimientos funcionales de los componentes del sistema mecánico

Código	Requisito
REQ-MC-01	El carruaje debe permitir la variación de masa mediante adición o sustracción sencilla e intuitiva.
REQ-MC-02	El carruaje debe ser compatible con masas cilíndricas educativas estándar.
REQ-MC-03	El número máximo de carruajes en uso simultáneo debe ser 4.
REQ-MC-04	Cada carruaje debe contar con puntos de anclaje rígidos y universales para resortes y amortiguadores.
REQ-MC-05	Los carruajes deben integrar un mecanismo para montar 4 esferas de rastreo.
REQ-SPR-01	Los resortes deben cumplir la ley de Hooke en todo su rango de operación (tensión y compresión).
REQ-SPR-02	La constante de rigidez K debe permanecer uniforme en todo el rango de desplazamiento.
REQ-SPR-03	El desplazamiento debe ser estrictamente unidireccional, sin desviaciones o vibraciones laterales.
REQ-SPR-04	Cada resorte debe contar con anclajes universales compatibles con todos los carruajes.

Continúa en la siguiente página

Código	Requisito
REQ-SPR-05	Todos los resortes deben tener igual longitud de carrera, independientemente de K .
REQ-SPR-06	La fricción interna del resorte debe minimizarse.
REQ-DMP-01	Los amortiguadores deben cumplir un modelo lineal proporcional a la velocidad relativa de los carruajes.
REQ-DMP-02	La constante de amortiguamiento f_v debe mantenerse uniforme en el rango de operación.
REQ-DMP-03	El desplazamiento de los amortiguadores debe ser unidireccional.
REQ-DMP-04	Los anclajes de los amortiguadores deben ser universales y compatibles con carruajes y resortes.
REQ-DMP-05	Las pérdidas parasíticas (fricción no lineal, retardo) deben minimizarse.
REQ-GUI-01	La guía debe restringir el movimiento de los carruajes a un solo eje.
REQ-GUI-02	La guía debe minimizar la fricción con los carruajes.
REQ-GUI-03	La guía debe evitar vibraciones y desviaciones en planos no deseados.
REQ-GUI-04	La guía debe contar con rigidez estructural suficiente para soportar las cargas del sistema.
REQ-GUI-05	La guía debe facilitar su anclaje con la plataforma del Robotat.

Nota. Cuadro con requerimientos de diseño. Elaboración propia.

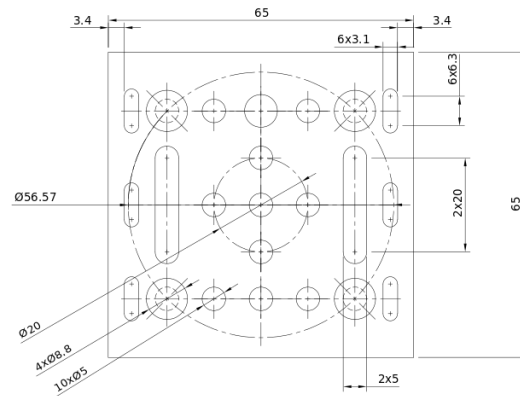
14.1.2. Ayudas de diseño

Cuadro 10. Dimensiones de resortes de compresión disponibles en caja *Tactix*

Resorte	Ancho de alambre (mm)	Largo de resorte (mm)	Número de vueltas
1	5.5	17.0	6
2	5.5	38.0	17
3	7.0	12.5	10
4	7.0	19.0	6
5	6.5	10.0	5
6	9.1	35.0	10
7	9.5	16.0	5
8	9.5	19.0	5

Nota. Los valores para el número de vueltas son adimensionales. Obtenido de [19].

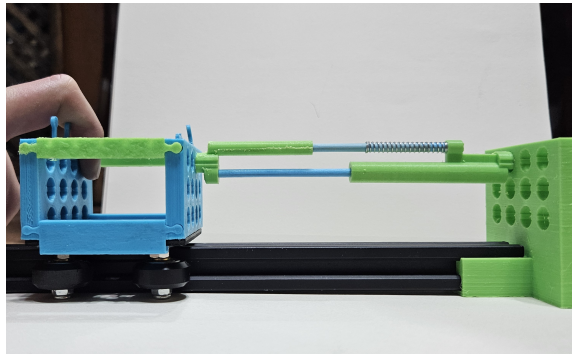
Figura 29. Plano de placa deslizante



Nota. La imagen muestra el plano con las dimensiones de los agujeros de la placa deslizante. Elaboración propia.

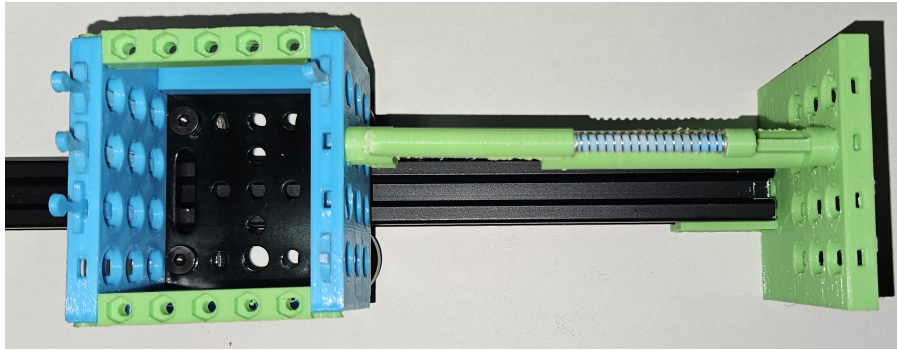
14.1.3. Vistas de desviación en segundo prototipo

Figura 30. Vista lateral de segundo prototipo en tensión



Nota. La figura muestra el desalineamiento lateral del ensamblaje del segundo prototipo. Elaboración propia.

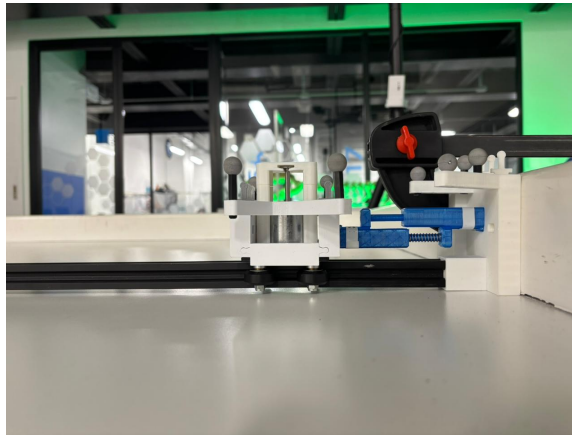
Figura 31. Vista aérea de segundo prototipo en tensión



Nota. La figura muestra el desalineamiento aéreo del ensamblaje del segundo prototipo. Elaboración propia.

14.1.4. Montaje de experimentos

Figura 32. Posición final de configuración de pruebas de resortes



Nota. La figura muestra la posición final del sistema en pruebas de compresión de resortes. Elaboración propia.

14.1.5. Repositorio de aplicación

Para acceder al repositorio de *GitHub* con la aplicación desarrollada y sus dependencias, ir a: <https://github.com/JorgeMnz726/Proyecto-de-Graduacion>

14.1.6. Datos de caracterización de resortes

Cuadro 11. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.3 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	96.65	2.83	6.42	84.07	3.29e-06	95.53
2	110.64	3.24	-7.13	86.17	2.34e-06	111.06
3	104.79	2.72	-1.47	83.80	3.54e-06	100.13
4	100.48	2.78	2.70	86.45	2.23e-06	96.68
5	98.14	2.65	4.98	84.03	3.16e-06	96.93
6	102.50	3.15	0.75	83.04	3.25e-06	107.19

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 12. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.4 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	147.41	2.69	1.64	84.88	2.35e-06	154.07
2	151.79	3.03	-1.28	83.77	2.52e-06	150.12
3	142.20	2.17	5.12	78.78	6.58e-06	150.84
4	142.38	3.56	5.00	79.06	3.66e-06	155.45
5	167.71	3.33	-11.90	79.86	6.68e-06	162.09
6	148.02	3.70	1.24	81.27	3.22e-06	160.82

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 13. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.5 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	189.39	3.94	-14.49	84.84	1.49e-06	187.28
2	165.89	2.69	-0.29	81.63	2.44e-06	172.31
3	194.95	3.23	-17.85	84.72	1.29e-06	199.16
4	167.07	2.59	-1.00	85.71	1.49e-06	173.11
5	189.84	5.61	-14.76	88.48	6.84e-07	200.76
6	173.36	5.42	-4.80	83.53	1.85e-06	189.43

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 14. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.6 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	376.21	2.44	5.74	85.16	1.99e-06	372.69
2	332.82	2.76	16.61	89.92	8.84e-07	339.97
3	378.06	2.37	5.28	82.26	2.96e-06	380.74

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 15. Resumen de resultados promedio por resorte de calibre 0.7 mm

Resorte	K medio	b medio	Error medio (%)	Fit (%)	MSE medio	C medio
1	682.87	1.99	11.91	79.49	2.68e-06	680.59
2	692.23	2.42	10.70	79.26	3.25e-06	685.93
3	692.41	3.02	10.68	78.57	3.22e-06	692.21

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

14.1.7. Datos de caracterización de amortiguadores

Cuadro 16. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 20 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	45.94	5.45	96.56	6.96e-08	6.55e-08	685.30
2	58.12	5.94	95.15	1.45e-07	1.38e-07	684.72

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 17. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 25 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	51.14	6.18	96.91	5.05e-08	4.78e-08	684.38
2	43.81	5.50	97.20	4.65e-08	4.42e-08	684.49

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 18. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 30 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	54.25	8.92	94.37	3.25e-07	3.04e-07	682.97
2	96.55	6.82	97.02	3.87e-08	3.69e-08	685.71

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 19. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 35 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	58.81	10.26	96.62	7.95e-08	7.53e-08	683.34
2	58.53	4.31	97.92	1.89e-08	1.80e-08	684.72

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 20. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 40 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	60.82	13.24	97.69	3.00e-08	2.83e-08	683.11
2	53.90	7.04	95.47	1.10e-07	1.04e-07	685.20

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

Cuadro 21. Resumen de resultados promedio para amortiguadores con aceite de 45 WT

Amortiguador	b medio	DesvEst b	Fit (%)	FPE medio	MSE medio	C medio
1	77.91	11.61	97.01	4.60e-08	4.33e-08	686.32
2	58.96	9.20	94.03	1.88e-07	1.82e-07	683.38

Nota. Valores promedio calculados a partir de los resultados de identificación.
Elaboración propia.

