UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Fundamentos del análisis no estándar y su relación con el cálculo

Trabajo de graduación presentado por Javier Alfredo Ronquillo Rivera para optar al grado académico de Licenciado en Matemáticas

Guatemala
2012

Fundamentos del análisis no estándar y su relación con el cálculo

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Fundamentos del análisis no estándar y su relación con el cálculo

Trabajo de graduación presentado por Javier Alfredo Ronquillo Rivera para optar al grado académico de Licenciado en Matemáticas

Guatemala
2012

Vo. Bo. :

(f) ______________________________
(Doctor Roberto Molina)

Tribunal Examinador:

(f) ______________________________
(Licenciada Nancy Zurita)

(f) ______________________________
(Licenciado Dorval Carías)

(f) ______________________________
(Doctor Roberto Molina)

Fecha de aprobación: Guatemala, 29 de febrero de 2012.

Contenido

Resumen

Se presentan en esta tesis los puntos centrales del análisis no estándar para llegar a demostrar a través de esta herramienta el teorema fundamental del cálculo para funciones continuas.

Como parte central de la herramienta desarrollada se contruyen los números hiperreales, dicha construcción representa una aplicación importante de la lógica matemática, más en particular, de la teoría de modelos. La importancia de este conjunto de números consiste en que en él existen objetos que formalizan la antigua noción de infinitesimal, por lo que se puede lograr sobre este conjunto un desarrollo riguroso de gran parte de las implicaciones que producía aquella noción. Como resultado de mezcla entre intuición de la noción de infinitesimal y formalismo inducido por el marco lógico se alcanza un desarrollo consistente del análisis más cercano a la intuición de los infinitesimales, parecido al de Newton, Leibniz e incluso Euler en la no idispensabilidad del uso de la definición formal actual de límite introducida por Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX. Así a través de este desarrollo se logran probar de forma paralela algunos resultados del cálculo matemático como el teorema fundamental del cálculo.

La tesis se separará en tres secciones para lograr su objetivo. La primera sección encierra un conjunto de resultados preliminares que el lector debe conocer para poder entrar en materia. Por ejemplo, se expone el material necesario de la lógica de primer orden y resultados sobre filtros y ultrafiltros. En la segunda sección se construiye el conjunto de los números hiperreales, y se estudia la relación inducida por dicha construcción con los números reales y sus propiedades. También se estudia la aritmética del conjunto construido y algunas propiedades topológicas. En la última sección se hace un recorrido por la versión no estándar de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad, finalmente se prueba sobre este marco el teorema fundamental del cálculo.

1. Introducción

El análisis es una de las ramas más antiguas de la matemática, y surge en buena medida como el lenguaje matemático necesario para expresar las relaciones naturales. Por ejemplo, en el cálculo desarrollado por Isaac Newton en el siglo XVII se trata a los objetos estudiados como variables en función del tiempo, y a la derivada como una velocidad instantánea, esto evidencia la estrecha relación que existió, al inicio, entre los objetos matemáticos del cálculo y los conocimiento o las leyes naturales que pretendía estudiar o expresar. Tan estrecha fue esta relación que incluso, los resultados físicos o supeditados a la realidad servían como métodos de validación para los procedimientos matemáticos, aunque estos últimos no tuvieran todo el rigor matemático necesario. Un ejemplo de ello es lo expresado por el matemático italiano Bonaventura Cavalieri en 1630: $<<$Rigor, es algo que concierne a los filósofos y no a la geometría$>>$. Es así como podemos observar que en los primeros desarrollos no se tenía el rigor con el que hoy se cuenta. Unos de los objetos utilizados constantemente durante los siglos XVII y XVIII, sin el rigor al que se refiere Cavalieri eran los infinitesimales, cantidades infinitamente pequeñas que eran mayores a cero. Por ejemplo, En el siglo XVII, el matemático francés Pierre de Fermat, para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva, utilizó el hecho de que en un punto cercano al punto de tangencia, la curva y la recta tenían una imagen prácticamente indistinguible (su diferencia era infinitesimal). En el siglo XVII, Isaac Newton para hallar la tangente de una curva dictada por la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, en un punto arbitrario (x, y) utilizó un punto infitesimalmente cercano $(x + xo, y + yo)$, despreciando más adelante términos infinitesimales para llegar a la solución del problema. Una de las "pruebas" más ilustrativas utilizando infinitesimales es la planteada por Gottfried Leibniz para demostrar la regla del producto de las derivadas. Para hallar la derivada del producto de dos funciones tomó: $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx$, donde omitía el término $dxdy$ notando que era infinitamente pequeño en comparación con el resto. Leonhard Euler también utilizó los infinitesimales, Euler decía que existían cantidades prácticamente iguales a cero, que a pesar de ello podían tener un cociente bien definido. Es así como argumentos sin un rigor estricto llevaban a resultados correctos, correctos en el sentido de las formalizaciones del cálculo que surgirían posteriormente, sin embargo, es claro que estos argumentos eran de un tipo bastante intuitivo, y que por lo mismo permitían avanzar con dicha intuición hasta resultados que todavía la lógica o el rigor no permitían alcanzar; es decir, en buena forma esta intuición permitía avanzar y alcanzar conocimientos que luego podrian buscar formalizarse. [6]

A partir de Euler la matemática completa tuvo un cambio radical, Euler identificó al concepto *función* como la pieza central del cálculo. Esto abrió las puertas para que tanto el matemático francés Augustin Cauchy y el matemático alemán Karl Weierstrass crearan el análisis clásico, como se le conoce hoy. Estos dos últimos matemáticos fueron capaces de formalizar los conceptos y objetos utilizados en el cálculo y hacer una teoría consistente que permitiera el rigor lógico y matemático buscado por tantos años para esta área del conocimiento. Sin embargo, en esta formalización se eliminó por completo el concepto de infinitesimal, principalmente por las inconsistencias que generaba y la falta de un marco lógico que lo soportara. Es así como durante años se creyó a los infintesimales como un error o una curiosidad, hasta que en 1960 el lógico Abraham Robinson logró realizar una formalización del concepto de infintesimal a través de un marco lógico adecuado, dicho marco fue la lógica de relaciones. A partir de esta formalización se puede formalizar las pruebas intuitivas de los primeros años del desarrollo del cálculo y con ello presentar pruebas alternativas a las del cálculo clásico. Es así como a través de este mecanismo se puede aprovechar de nuevo esa intuición de la que se hablaba previamente para producir teoría nueva o resolver problemas viejos de una forma más sencilla o natural. A esta rama de la matemática que utiliza los mecanismos formales de los infinitesimales se le llama análisis no estándar.[6]

A continuación se presenta una prueba del teorema fundamental del cálculo utilizando análisis no estándar.

2. Preliminares

A continuación se presentan algunos conceptos que componen el material necesario para la contrucción de los números hiperreales y sus propiedades. En la primera parte se exponen nociones básicas sobre conjuntos, relaciones y funciones, y la convención que se adoptará para su notación. En la segunda sección se desarrollan los conceptos básicos de lógica de primer orden que servirán como marco de interacción entre los números reales y los hiperreales. Finalmente se presenta una sección sobre filtros, ultrafiltros y sus propiedades; específicamente estos objetos se utilizan para definir la relación de equivalencia sobre el conjunto de sucesiones de números reales y con ello construir lo números hiperreales y su relación con los números reales.

2.1. Relaciones

. Algunos de los conjuntos que utilizaremos frecuentemente y su respectiva notación son los siguientes:

- El conjunto vacío ϕ
- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\}$
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$
- Si X es un conjunto, el conjunto potencia de X es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de X, $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A : A \subset X\}$
- Sean A, X conjuntos, el complemento de A con respecto a X es el conjunto cuyos elemenos están en X pero no están en A, $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$

Definición 2.1. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección finita de conjuntos. El producto cartesiano de $A_1, A_2, ..., A_n$ esta definido como sigue:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) : \ a_i \in A_i \ \text{,con } i = 1, ..., n\}$$

Observación.

- Cuando $A_i = A$, $i = 1, 2, ...n$, al producto cartesiano se le denota por A^n
- El producto cartesiano de una colección de un solo conjunto A_1 es A_1.

Definición 2.2. Una relación P de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Además se usará la notación $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ cuando $(a_1, a_2, ..., a_n) \in P$

Observación.

- Cuando $A_i = A$, $i = 1, 2, ...n$, a P se le llama una relación $n - aria$ de A.

- En general se le llamará a cualquier relación $n-aria$ de A (sin importar el n), relación finitaria, dado que es un subconjunto de un producto cartesiano finito de A.

Ejemplo.

- Sea $P = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$, P es la relación binaria de $\mathbb{R}$ que describe la igualdad entre dos elementos de $\mathbb{R}$, dado que $P(a,b)$ si y sólo si $a = b$. De la misma forma las relaciones de orden $<$ y $>$ de $\mathbb{R}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$
- Sea $P = \{(a, a+3k) : a, k \in \mathbb{Z}\}$ es la relación binaria de $\mathbb{Z}$ que decribe la congruencia módulo tres en $\mathbb{Z}$, dado que $P(a,b)$ si y sólo si $3 \mid a-b$ si sólo si $a \equiv b \,(mód\, 3)$
- Considérese ahora la naturaleza de las relaciones unarias. En este caso la relación $P \subset A$ con A el único elemento de la colección finita de conjuntos. De esa cuenta las relaciones unarias de A son los subconjuntos de A.

Definición 2.3. Dados dos conjuntos C y D una función f de C en D (Denotado por $f : C \to D$) es una relación de C y D tal que:

- Si $a \in C$ entonces $\exists! b \in D \ni (a,b) \in f$

A los conjuntos C y D se les llama dominio y contradominio de f respectivamente. Además si $(a,b) \in f$ se conoce a b como imagen de a bajo f y se denota por $f(a) = b$.

Observación.

- Si $C \subset A^n$ y $D \subset A$ entonces a f se le llama función $n-aria$ de A. En general a toda función $n-aria$ de A, se le llamará función finitaria de A.
- Si se toma $C = \mathbb{Z}^+$ y $D = \mathbb{R}$ a f se le conoce como sucesión de números reales, y se denota de cualquiera de las formas siguientes $f = \{x_n\}_n = (x_n)_n = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle = \langle x_n \rangle = \langle x_1, x_2, ...\rangle$. Al conjunto de todas las sucesiones de números reales se le denota por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ejemplo. Considérese $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(a,b) = a+b$, es decir a cada par de elementos de $\mathbb{R}$ le asigna sus suma. De esa forma la función f representa la suma en $\mathbb{R}$ y $f(a,b)$ el número real que es la suma de los elementos a, b.

Definición 2.4. Sea $f : C \to D$ una función, la restricción de f a $C_1 \subset C$ denotada por $f_{|C_1}$es la función con dominio C_1 y contradominio B, tal que para cualquier $c \in C_1,\ f_{|C_1}(c) = f(c)$. A f se le llama extensión de $f_{|C_1}$al conjunto C.

2.2. Lógica.

Definición 2.5. Una estructura es un sistema de la forma $\mathcal{E} =< E, Rel_{\mathcal{E}}, Fun_{\mathcal{E}} >$ donde E es un conjunto no vacío, $Rel_{\mathcal{E}}$ es una colección de relaciones finitarias de E y $Fun_{\mathcal{E}}$ es una colección de funciones finitarias de E.

Observación. Un caso particular de estructura es $< E, Rel_E, Fun_E >$ donde Rel_E es la colección de *todas* las relaciones finitarias de E, y Fun_E son *todas* las funciones finitarias de E. A esta estructura se le llama estructura completa de E.

Cada estructura $\mathcal{E}$ tiene asociado un lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ que está formado por varios componentes. Entre estos componentes está el alfabeto del lenguaje que está conformado por los siguientes elementos:

- Conectivos lógicos
  - $\wedge$ y
  - $\vee$ o
  - $\neg$ no
  - $\rightarrow$ implica
  - $\longleftrightarrow$ si y sólo si

- Cuantificadores
  - $\forall$ para todo
  - $\exists$ existe

- Paréntesis
  - (,)
  - [,]

- Variables: $\{x_1, x_2, ...\}$ un conjunto contable de símbolos en el que también se pueden incluir x, y, z, x'.

Definición 2.6. Los términos del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ se forman a través de la aplicación sucesiva de las siguientes reglas:

- Cada variable de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ es un término.
- Cada $e \in E$ es un término llamado constante.
- Si $f \in Fun_{\mathcal{E}}$ es $n - aria$, y $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ son términos de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, entonces $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ es un término de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Observación. Dependiendo de la estructura con la que se trabaje se utilizará la notación usual propia de cada una de las funciones $n-arias$ para denotar a los términos generados por ellas. Por ejemplo, si se estuviera trabajando con la estructura completa de $\mathbb{R}$ para la función suma del ejemplo 2.1 se utilizaría $\tau_1 + \tau_2$ en lugar de $f(\tau_1, \tau_2)$. En el mismo caso se utilizará $\tau_1 \cdot \tau_2$ para el producto, y e^x, $\frac{1}{x}$, $|x|, x^2$ para las respectivas funciones que denotan.

Definición 2.7. Un término cerrado es aquel que no posee variables, es decir, está conformado sólo por símbolos de funciones y constantes. Por lo tanto *busca* denotar un elemento de E.

A pesar de que la aplicación sucesiva de las reglas anteriores asegura la formación de términos, las mismas no aseguran en ningún momento que los términos formados tengan significado matemático.

Por ejemplo en la estructura completa de $\mathbb{R}$, la función $\frac{1}{x} \in Fun_{\mathbb{R}}$ dado que es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Además, $0 \in \mathbb{R}$, por lo tanto, aplicando la segunda y tercera regla de la definición 2.6, $\frac{1}{0}$ es un término del lenguaje, pero dicho cociente no tiene significado matemático. Es importante notar que $\frac{1}{0}$ es además un término cerrado, pero que no nombra o denota ningún elemento de $\mathbb{R}$ o de su estructura completa. A estos términos cerrados que no nombran a ningún elemento de E se les llama terminos cerrados indefinidos. A continuación se muestran las reglas para determinar cuando un término cerrado nombra algún elemento de E:

- Las constante e se nombra a ella misma.
- Si $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ nombran a los elementos $e_1, e_2, ..., e_n$ respectivamente y la $n-tupla$ $(e_1, e_2, ..., e_n)$ está en el dominio de la función $n-aria$ f, entonces $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ nombra al elemento $f(e_1, e_2, ..., e_n)$
- El término $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ está indefinido si alguno de los términos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ está indefinido o si la $n-tupla$ $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ no está en el dominio de f.

Ejemplo.

- $7tan(\frac{\pi}{2})$ es un término indefinido en la estructura completa de $\mathbb{R}$, dado que $tan(\frac{\pi}{2})$ no está definido.

Definición 2.8. Las fórmulas atómicas del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ son de la forma $P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$, donde $P \in Rel_{\mathcal{E}}$ es una relacion $n-aria$ y $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ son términos de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Observación.

- Al igual que con los términos generados por funciones, se utilizará la notación usual propia de cada una de las relaciones $n - arias$ para denotar a las fórmulas atómicas generadas por ellas. Por ejemplo, si se estuviera trabajando con la estructura completa de $\mathbb{R}$ para la relación de igualdad se utilizaría $(\tau_1 = \tau_2)$ en lugar de $P(\tau_1, \tau_2)$. En el mismo caso se utilizará $(\tau_1 < \tau_2)$, $(\tau_1 > \tau_2)$ para las relaciones de orden de $\mathbb{R}$.
- Cuando la relación P es *unaria* se sabe que es un subconjunto de E (inciso tres del ejemplo 2.1). Dicha fórmula $P(\tau)$ expresa pertenencia a P por lo que será denotada usualmente por $\tau \in P$.

Definición 2.9. Las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ se forman a través de la aplicación sucesiva de las siguientes reglas:

- Cada fórmula atómica de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.
- Si φ y ψ son fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \longleftrightarrow \psi$, $\neg\varphi$, también son fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.
- Si φ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, x es una variable, y $P \in Rel_{\mathcal{E}}$ es *unaria*, i.e., $P \subset E$, entonces $(\forall x \in P)\varphi$ y $(\exists x \in P)\varphi$ son cada una fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. En cada caso a P se le llama cota del cuantificador.

Observación. Como con los términos y fórmulas atómicas se tratará de hacer la notación lo más simple posible, así por ejemplo para fórmulas del tipo $(x < y) \wedge (y < z)$ se abreviará $(x < y < z)$. También para los cuatificadores, si se tiene $(\forall x \in P)(\forall y \in P)(\forall z \in P)$ se abreviará como $(\forall x, y, z \in P)$.

Definición 2.10. Una fórmula definida es aquella para la cual todos sus términos cerrados están bien definidos.

Definición 2.11. Una ocurrencia de la varible x en la fórmula ψ es llamada acotada si está localizada dentro de una fórmula de la forma $(\forall x \in P)\varphi$ o $(\exists x \in P)\varphi$ que es parte de ψ. Una ocurrencia que no es acotada se llama libre.

Ejemplo. En la fórmula $\psi = [(\forall x \in \mathbb{Z}^+)(3 < x + y)] \wedge (x < 7)$ la primera ocurrencia de la variable x es acotada, mientras que la segunda ocurrencia es libre. La ocurrencia de la variable y es libre.

Si una fórmula contiene ocurrencias libres, entonces la misma no tiene ningún significado matemático en particular hasta que se le asigne un valor específico a dichas variables libres. Así, en el ejemplo 2.2 si se asignan a las variables libres los siguientes valores $y = 7$ y $x = 1$ la fórmula ψ tiene significado matemático y además en el sentido matemático es verdadera, dado que sin importar el entero positivo que se le sume a 7, el resultado siempre dará algo mayor a 3. Además $(1 < 7)$. En cambio, si se sustituyen con $y = x = 0$ tiene un significado matemático pero es falsa.

Teniendo esto en cuenta se busca definir para la estructura y su lenguaje criterios de verdad para las fórmulas que además coincidan con los criterios de verdad de lo que expresan matemáticamente. Sin embargo, para ello es necesario que las fórmulas, en efecto, tengan un significado particular, por lo que dichos criterios de verdad serán definidos sobre las fórmulas sin ocurrencias de variables libres.

Definición 2.12. Una oración de $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ es una fórmula en la que todas las ocurrencias de variables son acotadas.

Observación. Considerando una oración de la forma $(\forall x \in P)\varphi$ se sabe que la única ocurrencia libre de una variable en φ es la de x, de lo contrario $(\forall x \in P)\varphi$ no sería oración. De esa cuenta para cualquier elemento $p \in P$ se puede formar la oración $\varphi(p)$ donde cada ocurrencia libre de x en φ se sutituye por p.

Definición 2.13. Las oraciones verdaderas de la estructura $< E, Rel_\mathcal{E}, Fun_\mathcal{E} >$ y su lenguaje $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ se forman a través de la aplicación sucesiva de las siguientes reglas:

- Si $P \in Rel_\mathcal{E}$, $P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ es verdadera si y sólo si los términos cerrados[1] están bien definidos y son tales que $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in P$.
- $(\forall x \in P)\varphi$ es verdadera si y sólo si para todo $p \in P$, $\varphi(p)$ es verdadera.
- $(\exists x \in P)\varphi$ es verdadera si y sólo si existe un $p \in P$ tal que $\varphi(p)$ es verdadera.
- $(\varphi \wedge \psi)$ es verdadera si y sólo si φ es verdadera y ψ es verdadera.
- $(\varphi \vee \psi)$ es verdadera si y sólo si φ es verdadera o ψ es verdadera.
- $\neg\varphi$ es verdadera si y sólo si φ no es verdadera (es decir es falsa).
- $(\varphi \to \psi)$ es verdadera si y sólo la verdad de φ implica la verdad de ψ.
- $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ es verdadera si y sólo si $(\varphi \to \psi)$ y $(\psi \to \varphi)$ son verdaderas.

Observación.

[1]Los términos deben ser cerrados para que la fórmula atómica sea una oración.

- Es importante notar que los elementos básicos para formar oraciones verdaderas son las oraciones atómicas verdaderas. En el primer inciso podemos ver que éstas para ser verdaderas deben de tener un significado matemático, es decir que sus términos deben estar bien definidos no incluyendo expresiones como $\frac{1}{0}$ o $tan(\frac{\pi}{2})$. Además tienen que ser verdaderas en el sentido matemático. Esto último dado que el criterio de verdad para la expresión del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$[2] coincide con el significado matemático de la expresión $P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ según lo dicho en la definición 2.2.
- De ahi que definiendo de esta forma los criterios de verdad para la oraciones es posible observar que la verdad de una oración en la estructura $< E, Rel_{\mathcal{E}}, Fun_{\mathcal{E}} >$ y su lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ se da si y sólo si la oración tiene un sentido matemático y en dicho sentido matemático es verdadera.

2.3. Filtros.

Definición 2.14. Sea X un conjunto no vacío. Un filtro de X es una colección no vacía $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X, que cumple los siguientes axiomas:

- Intersección: Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$
- Superconjunto: Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B \subset X$ entonces $B \in \mathcal{F}$

Observación. Un filtro $\mathcal{F}$ de X tal que $\phi \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. A un filtro $\mathcal{F}$ de X tal que $\phi \notin \mathcal{F}$ se le llama filtro propio de $\mathcal{F}$.

Definición 2.15. Un ultrafiltro es un filtro propio $\mathcal{F}$ que satisface que para cualquier $A \subset X$ exactamente uno de los conjutos A o A^c es elemento de $\mathcal{F}$.

Ejemplo. Dado $x \in A$, $\mathcal{F}^x = \{A \subset X : x \in A\}$ es un ultrafiltro principal generado por x. Ya que:

- Si $A, B \in \mathcal{F}^x$ entonces $x \in A$ y $x \in B$ por lo que $x \in A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}^x$
- Si $A \in \mathcal{F}^x$ entonces $x \in A$, si $A \subset B \subset X$ también tenemos $x \in B$, por lo que $B \in \mathcal{F}^x$.
- Si $A \subset X$ entonces hay dos casos completamente excluyentes. En el primer caso $x \in A$ por lo que $A \in \mathcal{F}^x$. En el segundo caso $x \notin A$ por lo que $x \in A^c$ entonces $A^c \in \mathcal{F}^x$.

[2] El criterio de verdad es $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in P$

Ejemplo. $\mathcal{F}^{CO} = \{A \subset X : A^c\, es\, finito\}$ es un filtro y se le llama filtro cofinito. Ya que:

- Si $A, B \in \mathcal{F}^{CO}$ entonces A^c, B^c son finitos, por lo que $A^c \cup B^c$ es un conjunto finito. Por lo tanto $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in F^{CO}$.
- Si $A \in F^{CO}$, y $A \subset B \subset X$, entonces A^c es finito y $B^c \subset A^c$ por lo que B^c es finito. Por lo tanto $B \in F^{CO}$.

Nótese que si X es infinito entonces $\mathcal{F}^{CO}$ no es un ultrafiltro. Además si X es infinito el filtro cofinito no tiene elementos finitos.

Ejemplo. Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección no vacía de subconjuntos de X, el filtro generado por $\mathcal{H}$ está dado por:

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{A \subset X : A \supset B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n\, para\, algún\, n\, y\, algunos\, B_i \in \mathcal{H}\}$$

- Si $A, B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, entonces $A \supset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ y $B \supset B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_m$ para algunos n, m y algunos $A_j, B_i \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $A \cap B \supset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_m$ por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$.
- Si $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ entonces $A \supset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ para algún n y algunos $B_i \in \mathcal{H}$, si $A \subset B \subset X$ tenemos también que $B \supset A \supset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ por lo que $B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$.

Finalmente es importante notar que $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ es el filtro más pequeño que contiene a $\mathcal{H}$.

Ejemplo. Sea $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ una colección de filtros de X que está linealmente ordenada por la contensión de conjuntos. Es decir para cada par $i, j \in I$ se cumple que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ o $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$. Entonces $\mathcal{F} = \cup_{i \in I} \mathcal{F}_i = \{A : \exists i \in I \ni A \in \mathcal{F}_i\}$ es un filtro de X.

- Sean $A, B \in \mathcal{F}$ entonces existen $i, j \in I$ tal que $A \in \mathcal{F}_i$ y $B \in \mathcal{F}_j$, como se trata de una colección linealmente ordenada de filtros, sin pérdida de generalidad suponer que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ entonces $A, B \in \mathcal{F}_j$ por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}_j$. Por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Sea $A \in \mathcal{F}$ entonces existe $i \in I$ tal que $A \in \mathcal{F}_i$, si $A \subset B \subset X$ tenemos que $B \in \mathcal{F}_i$, por lo que $B \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.16. *Un ultrafiltro $\mathcal{F}$ satisface:*

1. $A \cap B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$.

2. $A^c \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \notin \mathcal{F}$
3. $A \cup B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Sean $A, B \subset X$, suponer que $A \cap B \in \mathcal{F}$, como $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ y $\mathcal{F}$ cumple el axioma de superconjuto por ser ultrafiltro, entonces $A, B \in \mathcal{F}$. ($\Leftarrow$) Es inmediata del axioma de intersección del ultrafiltro $\mathcal{F}$.
2. ($\Rightarrow$) Suponer que $A^c \in \mathcal{F}$ y por reducción al absurdo suponer que $A \in \mathcal{F}$, entonces por la propiedad de interesección $\mathcal{F}$, $\phi = A \cap A^c \in \mathcal{F}$ por lo que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$, pero $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y por lo tanto en es un filtro propio, que lleva a una contradicción. Entonces $A \notin \mathcal{F}$. ($\Leftarrow$) Esta se deduce de aplicar la implicación anterior al conjunto A.
3. ($\Rightarrow$) Sean $A, B \subset X$, suponer por contrapuesta que $A^c, B^c \in \mathcal{F}$, entonces por la propiedad de intersección de $\mathcal{F}$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$, por lo que del inciso anterior $A \cup B \notin \mathcal{F}$, dado que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. ($\Leftarrow$) Suponer sin pérdida de generalidad que $A \in \mathcal{F}$, como $A \subset A \cup B$ y $\mathcal{F}$ cumple el axioma de superconjuto por ser ultrafiltro entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$.

$\square$

Proposición 2.17. *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro y $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una colección finita de conjuntos disjuntos a pares (i.e., $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$), tal que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$, entonces $A_i \in \mathcal{F}$ para exactamente un i tal que $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demostración. Por inducción sobre n

Para $n = 2$, por el inciso 2 de la proposición 2.16 sabemos que si $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ entonces $A_1 \in \mathcal{F}$ o $A_2 \in \mathcal{F}$. Suponer por reducción al absurdo que $A_1 \in \mathcal{F}$ y $A_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\phi = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$, pero eso es imposible dado que $\mathcal{F}$ es un filtro propio por ser ultrafiltro. Por lo tanto sólamente uno de los dos conjuntos puede estar en $\mathcal{F}$.

Suponer que la proposición se cumple para $n \geqslant 2$

Para $n+1$ nótese que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1} = (A_1) \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1})$ y se cumple que $(A_1) \cap (A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = \phi$ dado que $A_1 \cap A_i = \phi$ para todo $i \neq 1$. Como $(A_1) \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1} \in \mathcal{F}$ por el caso base $n = 2$ exactamente uno de los dos A_1 o $(A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1})$ están en $\mathcal{F}$. En el caso de que $A_1 \in \mathcal{F}$ entonces $A_i \notin \mathcal{F}$ para $i \neq 1$ (de lo contrario $(A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1})$ estaría en $\mathcal{F}$), por lo que se cumple que exactamente uno de los $n+1$ conjuntos se encuentra en $\mathcal{F}$. En el caso de que $(A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \in \mathcal{F}$ por el paso inductivo exactamente uno de los n conjuntos está en $\mathcal{F}$ y como A_1 no está en $\mathcal{F}$ tenemos lo que queríamos probar.

□

Proposición 2.18. *Si un ultrafiltro contiene un conjunto finito, entonces contiene un conjunto de un elemento y es principal .*

Demostración. Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \in \mathcal{F}$, entonces $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\}$, por la proposición 2.17 exactamente uno de los $\{a_i\}$ está en $\mathcal{F}$, sin pérdida de generalidad $\{a_1\} \in \mathcal{F}$. De esa cuenta $\mathcal{F}^{a_1} \subset \mathcal{F}$. Se probará que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{a_1}$. Suponer por reducción al absurdo que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $a_1 \notin B$, por lo tanto por la propiedad de intersección de $\mathcal{F}$, $\phi = \{a_1\} \cap B \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$, pero como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro entonces es un filtro propio lo que conduce a una contradicción, de ahí que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{a_1}$, por lo que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{a_1}$. □

Observación. De la proposición anterior se deduce que un ultrafiltro no principal debe contener a todos los conjuntos cofinitos (i.e., los complementos de los conjuntos finitos).

Definición 2.19. Una colección $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita, o pif, si la interesección de cada subcolección finita no vacía de $\mathcal{H}$ es no vacía, i.e., $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \neq \phi$, para cualquier n y cualesquiera $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{H}$.

Proposición 2.20. *El filtro $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ es propio si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene la pif.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponer por contrapuesta que $\mathcal{H}$ no tiene la pif, entonces existen $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{H}$ tal que $\phi = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ no es un filtro propio. ($\Leftarrow$) Suponer por contrapuesta que $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ no es un filtro propio, entonces $\phi \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ por lo que existen $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{H}$ tal que $\phi \supset B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ de donde podemos concluir que $\phi = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ y por lo tanto $\mathcal{H}$ no tiene la pif . □

Proposición 2.21. *Si $\mathcal{H}$ tiene la pif entonces para cualquier $A \subset X$, al menos uno de los conjuntos $\mathcal{H} \cup \{A\}$ o $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ tiene la pif.*

Demostración. Suponer que $\mathcal{H}$ tiene la pif, y por reducción al absurdo suponer que $\mathcal{H} \cup \{A\}$ y $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ no tienen la pif, entonces existen $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{H}$ y $C_1, C_2, ..., C_m \in \mathcal{H}$ tales que $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \cap A = \phi$ y $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m \cap A^c = \phi$ de donde se puede concluir que $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \subset A^c$ y $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m \subset A$ por lo que $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m \subset A \cap A^c = \phi$ de donde $\mathcal{H}$ no tiene la pif, lo cual es una contradicción. Entonces al menos uno de los conjuntos $\mathcal{H} \cup \{A\}$ o $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ tiene la pif. □

Proposición 2.22. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de X si y sólo si es un filtro propio maximal de X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de X entonces $\mathcal{F}$ es un filtro propio de X . Sea $\mathcal{F}_1$ un ultrafiltro de X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. Se probará que $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1$, suponer por reducción al absurdo que existe $B \in \mathcal{F}_1$ tal que $B \notin \mathcal{F}$, por el inciso 2 de la porposición 2.16, $B^c \in \mathcal{F}$, pero como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ entonces $B^c \in \mathcal{F}_1$. Por la propiedad de intersección de $\mathcal{F}_1$, $\phi = B \cap B^c \in \mathcal{F}_1$ por lo que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(X)$, lo que es una contradicción dado que $\mathcal{F}_1$ es ultralfiltro y por lo tanto un filtro propio. De esa cuenta $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, por lo que $\mathcal{F}$ es maximal.($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro propio maximal de X. Nótese que $\mathcal{F}$ tiene la pif, de lo contrario existirían $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{F}$ tal que $\phi = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \in \mathcal{F}$ por lo que $\mathcal{F}$ no sería propio. Sea $A \subset X$, como $\mathcal{F}$ tiene la pif entonces por la proposicion 2.21 al menos uno de los conjuntos $\mathcal{F} \cup \{A\}$ o $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ también debe tener la pif. En el caso que $\mathcal{F} \cup \{A\}$ tenga la pif, por la proposicion 2.20, $\mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A\}}$ es un filtro propio que contiene a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cup \{A\} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A\}}$, como $\mathcal{F}$ es un filtro maximal de X entonces $\mathcal{F}= \mathcal{F}^{\mathcal{F} \cup \{A\}}$ por lo que $A \in \mathcal{F}$. De la misma forma en el caso que $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ tenga la pif entonces podemos concluir que $A^c \in \mathcal{F}$. El caso donde $\mathcal{F} \cup \{A\}$ y $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ tengan la pif no puede ocurrir dado que si así fuera, por los casos anteriores se deduce que $A, A^c \in \mathcal{F}$, lo que implicaría que $\phi = A \cap A^c \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}$ no sería propio. De esa cuenta podemos concluir que para cualquier $A \subset X$ se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o_{ex} $A^c \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. □

Teorema 2.23. *Cualquier colección de subconjuntos de X que tiene la pif puede ser extendida a un ultrafiltro de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ una colección de subconjuntos de X que tiene la pif, entonces por la proposición 2.20, $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ es propio. Considérese $P = \{\mathcal{F}\, filtro\, propio\, de\, X \ni \mathcal{F} \supset \mathcal{F}^{\mathcal{H}}\}$ la colección de filtros propios de X que contienen a $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$; P está parcialmente ordenado por la contención de conjuntos $\subset$. Debido a lo mostrado en el ejemplo 2.3, cada subconjunto de P linealmente ordenado tiene una cota superior que es un filtro que contiene a $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, además dicho filtro no contiene al conjunto ϕ dado que se forma de una unión de filtros propios que a su vez no contienen al vacío. De esa cuenta la cota superior también es un filtro propio y debe estar dentro de P. Por el lema de Zorn, P debe tener un elemento maximal $\mathcal{F}_{max}$, pero este elemento maximal de P también es un filtro maximal de X. En efecto, si suponemos que existe otro filtro propio de X, $\mathcal{F}_1$ tal que $\mathcal{F}_{max} \subset \mathcal{F}_1$, entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{H}} \subset \mathcal{F}_1$ por lo que $\mathcal{F}_1 \in P$ de donde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{max}$. De esa cuenta por la proposición 2.22 $\mathcal{F}_{max}$ es un ultrafiltro que además contiene a $\mathcal{H}$. □

Corolario 2.24. *Cualquier conjunto infinito tiene un ultrafiltro no principal*[3].

Demostración. Sea X un conjunto infinito, entonces $\phi \notin \mathcal{F}^{\mathcal{CO}}$, de donde $\mathcal{F}^{\mathcal{CO}}$ es un filtro propio. Como $\mathcal{F}^{\mathcal{CO}}$ es un filtro propio entonces tiene la propiedad de intersección finita y por el teorema 2.23 puede ser extendido a un ultrafiltro $\mathcal{F}$. Sea $x \in X$, suponer por reducción al absurdo que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^x$ entonces $\{x\} \in \mathcal{F}$ pero como $\mathcal{F}^{\mathcal{CO}} \subset \mathcal{F}$ y X es infinito entonces $\{x\}^c \in \mathcal{F}$ por lo que $\phi = \{x\} \cup \{x\}^c \in \mathcal{F}$, que contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Entonces $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^x$ para todo $x \in X$, de donde $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal. $\square$

[3] Por lo discutido en la proposición 2.18 lo natural es extender el filtro cofinito a un ultrafiltro y ver si éste resulta ser no principal

3. Los Hiperreales

El conjunto de los números hiperreales constituye la base sobre la cual se contruye el análisis no estándar; dado que en él existen objetos que formalizan la antigua noción de infinitesimal, se puede lograr sobre este conjunto un desarrollo riguroso de gran parte de las implicaciones que producía aquella noción. Es importante resaltar que tras la formalización que se menciona existe un marco lógico que provee a la misma de un significado más amplio que el de la noción que formaliza, aunque mantiene buena parte de la intuición de esta última. Como resultado de esta mezcla entre intuición y formalismo se alcanza un desarrollo del análisis más cercano a la intuición de los infinitesimales, parecido al de Newton, Leibniz e incluso Euler en la no idispensabilidad del uso de la definición formal actual de límite introducida por Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX. De esta forma la nueva teoría generada en el análisis no estándar puede verse como un estudio independiente con sus propios axiomas, como lo propone Medvedev en [1], cuando habla de la construcción de los sistemas intuicionistas y constructivistas del análisis, del analisis usual y del análisis no estándar: $<<$*Cada uno de estos sistemas es bastante independiente y difiere definitivamente con los otros en sus conceptos fundamentales. Es poco probable o quizas imposible (y si posible, innecesario) hacer una sola construcción teórica de todos ellos ... no hay razón para preferir uno de ellos a los demás: en situaciones distintas es conveniente usar diferentes Cálculos*$>>$

A pesar de esta visión que proclama al análisis no estándar como una teoria independiente que describe el mismo objeto abstracto que el análisis usual, en el presente capítulo no se adoptará esta visón, más bien se presentará al conjunto de los hiperreales como un modelo $\mathbb{R}$. Primero porque se pretende exponer un mecanismo más general de la herramienta lógica utilizada que implica no un estudio del análisis sino un estudio de como contruir modelos útiles de ciertas estructuras matemáticas. Además esta tesis busca utilizar el análisis no estándar como una herramienta para probar resultados del análisis usual, tales como el teorema fundamental del cálculo, mostrando expliciatamente la equivalencia lógica de los resultados obtenidos en $\mathbb{R}$ con los resultados obetnidos en los hiperreales.

A continuación se presenta una construcción de los números hiperreales y se estudia la relación inducida por dicha contrucción con los números reales y sus propiedades. También se estudia la aritmética del conjunto construido y algunas propiedades topológicas.

3.1. Construcción de los números hiperreales

. Una forma de contruir $\mathbb{R}$ es tomar el conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales y definir sobre el mismo una relación de equivalencia, el conjunto cociente resultante es $\mathbb{R}$. La relación de equivalencia inducida para este proposito consiste en que dos sucesiones de Cauchy de números racionales $\langle a_1, a_2, ...\rangle$ y $\langle b_1, b_2, ...\rangle$ son equivalentes si y sólo si sus términos son arbitrariamente cercanos, es decir, $Lim_{n\to\infty}|a_n - b_n| = 0$. En este sentido un número real es una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales y sobre dicho conjunto se pueden definir las operaciones que terminan cumpliendo con los axiomas de campo y las relaciones de orden total. De esa forma se puede pensar que si la relación de equivalencia inducida fuera menos restrictiva se podría obtener un conjunto más grande y con propiedades que fueran de interés, incluso se podría obtener un conjunto que contuviera a $\mathbb{R}$. Con esta idea en mente se buscará inducir sobre el conjunto de sucesiones de números reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una relación de equivalencia que genere un conjunto cociente que contenga propiedades de interés como cumplir con los axiomas de campo, tener un orden total y contener a $\mathbb{R}$ pero ser más grande que este último. Sin embargo, la naturaleza de esta relación de equivalencia será distinta a la naturaleza analítica de la relación de equivalencia utilizada para contruir el conjunto de los números reales, y permitirá una correspondencia entre objetos (subconjuntos, funciones y relaciones) del conjunto cociente (los hiperreales) y objetos de $\mathbb{R}$.

Sean $r = \langle r_n\rangle$, $s = \langle s_n\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se definen $r \oplus s = \langle r_n + s_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $r \otimes s = \langle r_n \cdot s_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Con lo que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo con cero $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0...\rangle$ y unidad $\mathbf{1} = \langle 1, 1, 1...\rangle$, e inversos aditivos $-r = \langle -r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Sin embargo, no es un campo debido a que tiene divisores de cero que son distintos a cero, por ejemplo: $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...\rangle \otimes \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\rangle = \langle 0, 0, 0, ...\rangle = \mathbf{0}$.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$, y sean $r = \langle r_n\rangle$, $s = \langle s_n\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se define la relación módulo ultrafiltro $\equiv$ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como sigue: $\langle r_n\rangle \equiv \langle s_n\rangle$ si y sólo si $\{n \in \mathbb{N} : \ r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$. Cuando dos sucesiones están relacionadas módulo ultrafiltro se dice que coinciden en casi todo punto. [4]

Observación. Se denotará a $\{n \in \mathbb{N} : \ r_n = s_n\}$ por $\langle|r = s|\rangle$, de esa cuenta $r \equiv s$ si y sólo si $\langle|r = s|\rangle \in \mathcal{F}$. En forma más general si P es una relación binaria de $\mathbb{R}$ se denotará al conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ P(r_n, s_n)\}$ por $\langle|P(r, s)|\rangle$, manteniendo la notación usual para las relaciones que la tengan, por ejemplo para $\langle|r < s|\rangle = \{n \in \mathbb{N} : \ r_n < s_n\}$. A su vez si P es una relación $k-aria$ de $\mathbb{R}$ y se tienen $r^1, r^2, ..., r^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ entonces $\langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle = \{n \in \mathbb{N} : \ P(r^1_n, r^2_n, ..., r^k_n)\}$. Es importante no olivdar que bajo esta notación los conjuntos denotados de la forma $\langle|...|\rangle$ son siempre subconjuntos de $\mathbb{N}$. Finalmente cuando $\langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle \in \mathcal{F}$ se dice que $r^1_n, r^2_n, ..., r^k_n$ están en la relación P para casi todo n.

[4]Se sabe que el ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$ existe por Corolario 2.24

Proposición 3.2. *La relación módulo ultrafiltro $\equiv$ es de equivalencia*

Demostración. Sean $r = \langle r_n \rangle$, $s = \langle s_n \rangle$, $t = \langle t_n \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (Reflexividad) Dado que $\mathbb{N}$ es elemento del ultrafiltro $\mathcal{F}$ que induce la relación $\equiv$, y $\langle |r = r| \rangle = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ entonces $r \equiv r$ para cualquier $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (Simetría) Si $r \equiv s$ entonces $\langle |r = s| \rangle = \langle |s = r| \rangle \in \mathcal{F}$, por lo que $s \equiv r$. (Transitividad) Si $r \equiv s$ y $s \equiv t$ entonces $\langle |r = s| \rangle \in \mathcal{F}$ y $\langle |s = t| \rangle \in \mathcal{F}$, dado que $\langle |r = s| \rangle \cap \langle |s = t| \rangle \subset \langle |r = t| \rangle$, por propiedad de intersección y superconjunto de $\mathcal{F}$, $\langle |r = t| \rangle \in \mathcal{F}$, de donde $r \equiv t$.

□

Observación.

- La clase de equivalencia de la sucesión $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bajo la relación de equivalencia $\equiv$ se denota por $[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ r \equiv s\}$.
- El conjunto cociente (el conjuto de todas las clases de equivalencia) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bajo $\equiv$ es ${}^*\mathbb{R} = \{[r] : r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Proposición 3.3. *Si $r, r', s, s' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ entonces $\langle |r < s| \rangle \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\langle |r' < s'| \rangle \in \mathcal{F}$*

Demostración. Si $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ entonces $\langle |r = r'| \rangle \in \mathcal{F}$ y $\langle |s = s'| \rangle \in \mathcal{F}$. ($\Rightarrow$) Nótese que $\langle |r = r'| \rangle \cap \langle |s = s'| \rangle \cap \langle |r < s| \rangle \subset \langle |r' < s'| \rangle$, debido a que $r'_n < s'_n$ se cumple al menos para los n en los que coincidan r y r', s y s' y que $r_n < s_n$ (esta última desigualdad es la misma entonces que $r'_n < s'_n$). De esa cuenta si $\langle |r < s| \rangle \in \mathcal{F}$ entonces por propiedad de intersección y superconjunto de $\mathcal{F}$ se tiene que $\langle |r = r'| \rangle \cap \langle |s = s'| \rangle \cap \langle |r < s| \rangle \subset \langle |r' < s'| \rangle \in \mathcal{F}$. ($\Leftarrow$)Se aplica la implicación anterior suponiendo ahora que $\langle |r' < s'| \rangle \in \mathcal{F}$. □

Observación. Si $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$, se define: $[r] < [s]$ si y sólo si $\langle |r < s| \rangle \in \mathcal{F}$ si y sólo si $r_n < s_n$ para casi todo n. Esta relación está bien definida debido a que por la proposición anterior si para alguna escogencia de representantes de $[r]$ y $[s]$ se cumple $\langle |r < s| \rangle \in \mathcal{F}$ entonces se debe cumplir para cualquier escogencia de dichos representantes.

Observación. Vale la pena mencionar que en la prueba de la proposición 3.3 no se utiliza directamente el hecho de que la relación en mención sea la relación de orden $<$. Si por ejemplo, en lugar de probar que $\langle |r < s| \rangle \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\langle |r' < s'| \rangle \in \mathcal{F}$, se hubiera querido probar $\langle |P(r, s)| \rangle \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\langle |P(r', s')| \rangle \in \mathcal{F}$, donde P es una relación binaria de $\mathbb{R}$, el argumento habría sido el mismo dado que $\langle |r = r'| \rangle \cap \langle |s = s'| \rangle \cap \langle |P(r, s)| \rangle \subset \langle |P(r', s')| \rangle$. No es muy complicado intuir que no esto puede extenderse a relaciones $k - arias$.

Proposición 3.4. *Si* $r^1, r^2, ..., r^k, s^1, s^2, ..., s^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *y* $r^i \equiv s^i$ *para* $i = 1, 2, ..., k$*, y si* P *es un relación* $k - aria$ *de* $\mathbb{R}$*, entonces* $\langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $\langle|P(s^1, s^2, ..., s^k)|\rangle \in \mathcal{F}$

Demostración. Si $r^i \equiv s^i$ para $i = 1, 2, ..., k$, entonces $\langle|r^i = s^i|\rangle \in \mathcal{F}$ $(\Rightarrow)$ Nótese que $\langle|r^1 = s^1|\rangle \cap \langle|r^2 = s^2|\rangle \cap \cdots \cap \langle|r^k = s^k|\rangle \cap \langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle \subset \langle|P(s^1, s^2, ..., s^k)|\rangle$, debido a que $P(s_n^1, s_n^2, ..., s_n^k)$ se cumple al menos para los n en los que coincidan r^i con s^i, y que $P(r_n^1, r_n^2, ..., r_n^k)$ (esta última sentencia es la misma entonces que $P(s_n^1, s_n^2, ..., s_n^k)$). De esa cuenta si $\langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces por propiedad de intersección y superconjunto de $\mathcal{F}$ se tiene que $\langle|r^1 = s^1|\rangle \cap \langle|r^2 = s^2|\rangle \cap \cdots \cap \langle|r^k = s^k|\rangle \cap \langle|P(r^1, r^2, ..., r^k)|\rangle \subset \langle|P(s^1, s^2, ..., s^k)|\rangle \in \mathcal{F}$ $(\Leftarrow)$Se aplica la implicación anterior suponiendo ahora que $\langle|P(s^1, s^2, ..., s^k)|\rangle \in \mathcal{F}$. $\square$

Observación. De esa cuenta, relaciones entre elementos de $^*\mathbb{R}$ pueden ser bien definidas heredándolas de $\mathbb{R}$ como en la primera observación de la proposición 3.3. Un ejemplo de esto es la relación $<$ definida entre elementos de $^*\mathbb{R}$ en dicha observación. Otro ejemplo es el que sigue, si se define la relación ternaria sándwich en $\mathbb{R}$ como $P = \{(a, b, a) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, se pueden relacionar elementos $[r], [s], [t] \in {}^*\mathbb{R}$ diciendo que $[r], [s], [t]$ cumplen con la relación sándwich si y sólo si $\langle|P(r, s, t)|\rangle \in \mathcal{F}$. La proposición 3.4 asegura la buena definición de esta relación entre elementos de $^*\mathbb{R}$, que además está ligada de forma especial con la relación sándwich de $\mathbb{R}$.

Proposición 3.5. *La relación módulo ultrafiltro* $\equiv$ *es una congruencia del anillo* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \otimes)$*, es decir, si* $r, r', s, s' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *y* $r \equiv r'$ *,* $s \equiv s'$ *entonces* $r \oplus s \equiv r' \oplus s'$*, y* $r \otimes s \equiv r' \otimes s'$

Demostración. Si $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ entonces $\langle|r = r'|\rangle \in \mathcal{F}$ y $\langle|s = s'|\rangle \in \mathcal{F}$, pero $\langle|r = r'|\rangle \cap \langle|s = s'|\rangle \subset \langle|r \oplus s = r' \oplus s'|\rangle$, esto último debido a que $r \oplus s$ será igual a $r' \oplus s'$ al menos en los componentes n, m donde $r_n = r'_n$ y $s_m = s'_m$, dado que en ellas la suma por componentes será la misma, de esa cuenta por porpiedad de intersección y superconjunto de $\mathcal{F}$ tenemos que $\langle|r \oplus s = r' \oplus s'|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $r \oplus s \equiv r' \oplus s'$. De forma análoga se concluye que $r \otimes s \equiv r' \otimes s'$.

$\square$

Observación.

- Si $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$, se define $[r] + [s] = [r \oplus s] = [\langle r_n + s_n \rangle]$. Debido a la proposición anterior se sabe que dicha operación está bien definida en $^*\mathbb{R}$ dado la clase de $r \oplus s$ es la misma sin importar los representantes que se escojan de las clases de equivalencia $[r]$ y $[s]$.
- Si $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$, se define $[r] \cdot [s] = [r \otimes s] = [\langle r_n \cdot s_n \rangle]$. Debido a la proposición anterior se sabe que dicha operación está bien definida en $^*\mathbb{R}$ dado la clase

de $r \otimes s$ es la misma sin importar los representantes que se escojan de las clases de equivalencia $[r]$ y $[s]$.

- Se puede notar que al igual que como se hizo en la observación de la proposición 3.4 se están heredando objetos de $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$, en este caso una suma y un producto. Más adelante se verá que este proceso al igual que como se hizo con las relaciones se puede generalizar, después de todo la suma y el producto son funciones $k-arias$, que a su vez son relaciones.

Proposición 3.6. $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\rangle \not\equiv \langle 0, 0, 0....\rangle$

Demostración. $\langle |\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\rangle = \langle 0, 0, 0, ...\rangle|\rangle = \phi \notin \mathcal{F}$ entonces $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\rangle \not\equiv \langle 0, 0, 0....\rangle$. □

Teorema 3.7. *La estructura* $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$*, es un campo ordenado con cero* $[\mathbf{0}]$ *y unidad* $[\mathbf{1}]$*.*

Demostración. Dado que $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ es la estructura cociente de una congruencia sobre el anillo conmutativo con cero y unidad $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, entonces $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ es a su vez un anillo conmutativo con cero $[\mathbf{0}]$ y unidad $[\mathbf{1}]$, e inverso aditivo $-[r] = [-r] = [\langle -r_n : n \in \mathbb{N}\rangle]$. Sea $[r] \in {}^*\mathbb{R}$, tal que $[r] \neq [\mathbf{0}]$[5]. Como $[r] \neq [\mathbf{0}]$ entonces $\langle |r = \mathbf{0}|\rangle \notin \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro y como $\mathbb{N} \setminus \langle |r = \mathbf{0}|\rangle = \langle |r \neq \mathbf{0}|\rangle$ entonces $A = \langle |r \neq \mathbf{0}|\rangle \in \mathcal{F}$. Considérese la sucesión $r'_n = \begin{cases} r_n & \text{si } n \in A \\ 1 & \text{si } n \notin A \end{cases}$, por lo que $\langle |r = r'|\rangle = \langle |r \neq \mathbf{0}|\rangle \in \mathcal{F}$, entonces $r \equiv r'$. Por otro lado considérese la sucesión $s_n = \frac{1}{r_n}$ está bien definidad dado que r' no tiene ceros en sus componentes. Además nótese que $r' \otimes s = s \otimes r' = \mathbf{1}$, de donde $[r] \cdot [s] = [r'] \cdot [s] = [r' \otimes s] = [\mathbf{1}] = [s \otimes r'] = [s] \cdot [r'] = [s] \cdot [r]$, por lo que $[s]$ es el inverso multiplicativo de r, por lo tanto $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo.

Por otro lado nótese que dados $[p], [q] \in {}^*\mathbb{R}$, $\langle |p < q|\rangle \cup \langle |p = q|\rangle \cup \langle |q < p|\rangle = \mathbb{N}$, como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro entonces por la proposición 2.17 entonces exactamente uno de los tres conjuntos pertenece a $\mathcal{F}$ por lo que exactamente una de las siguientes se cumple: $[p] < [q]$, $[p] = [q]$, $[q] < [p]$.

Finalmente se probará que el conjunto de los "positivos" $P' = \{[r] \in^* \mathbb{R} : [\mathbf{0}] < [r]\}$ es cerrado bajo la suma y el producto. Sean $[p], [q] \in P'$ entonces $[\mathbf{0}] < [p]$ y $[\mathbf{0}] < [q]$ por lo que $\langle |\mathbf{0} < p|\rangle \in \mathcal{F}$ y $\langle |\mathbf{0} < q|\rangle \in \mathcal{F}$, como $\langle |\mathbf{0} < p|\rangle \cap \langle |\mathbf{0} < q|\rangle \subset \langle |\mathbf{0} < p \oplus q|\rangle \cap \langle |\mathbf{0} < p \otimes q|\rangle$ entonces por propiedad de intersección y superconjunto $\langle |\mathbf{0} < p \oplus q|\rangle \cap \langle |\mathbf{0} < p \otimes q|\rangle \in \mathcal{F}$ de donde $\langle |\mathbf{0} < p \oplus q|\rangle \in \mathcal{F}$ y $\langle |\mathbf{0} < p \otimes q|\rangle \in \mathcal{F}$ por lo que $[\mathbf{0}] < [p \oplus q] = [p] + [q]$, y $[\mathbf{0}] < [p \otimes q] = [p] \cdot [q]$, de esa cuenta P' es cerrado bajo suma y producto. □

[5]Existe por la porposición 3.6

Como se mencionó al inicio del capítulo es importante notar que la relación de equivalencia inducida sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nos permite obtener un conjunto cociente con propiedades interesantes tales como las de campo ordenado, como se demostró en el teorema anterior. Corresponde ahora estudiar qué relación tiene este conjunto cociente con $\mathbb{R}$.

Teorema 3.8. *Existe un ismorfismo de campo que preserva orden cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y codominio un subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{r} = \langle r, r, r, ...\rangle$ $* : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ un mapeo tal que , $r \to {}^*r = [\mathbf{r}] = [\langle r, r, r....\rangle]$. Nótese que ${}^*r = {}^*s \iff [\mathbf{r}] = [\mathbf{s}] \iff \mathbf{r} \equiv \mathbf{s} \iff \phi \neq \langle|\mathbf{r} = \mathbf{s}|\rangle \in \mathcal{F} \iff \langle r, r, ...\rangle = \langle s, s, ...\rangle \iff r = s$, con lo que se sabe que $*$ está bien definida y además es inyectiva. Considere ahora ${}^*(r + s) = [\mathbf{r} + \mathbf{s}] = [\langle r + s, r + s, ...\rangle] = [\langle r, r, r...\rangle \oplus \langle s, s, s, ...\rangle] = [\langle r, r, ...\rangle] + [\langle s, s, ...\rangle] = [\mathbf{r}] + [\mathbf{s}] = {}^*r + {}^*s$. De la misma forma ${}^*(r \cdot s) = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}] = [\langle r \cdot s, r \cdot s, ...\rangle] = [\langle r, r, r...\rangle \otimes \langle s, s, s, ...\rangle] = [\langle r, r, ...\rangle] \cdot [\langle s, s, ...\rangle] = [\mathbf{r}] \cdot [\mathbf{s}] = {}^*r \cdot {}^*s$. De esa cuenta $*$ es un isomorfismo de campo. Finalmente, ${}^*r < {}^*s \iff [\mathbf{r}] < [\mathbf{s}] \iff \phi \neq \langle|\mathbf{r} < \mathbf{s}|\rangle = \mathbb{N} \in \mathcal{F} \iff$ existe un natural para el cual $r_n < s_n \iff r < s$. Entonces $*$ es un isomorfismo de campos que preserva el orden. □

Observación. El teorema anterior permite asegurar que existe una copia isomorfa de $\mathbb{R}$, como campo ordenado, en ${}^*\mathbb{R}$. Por lo tanto de ahora en adelante se considerará a $\mathbb{R}$ como un subcampo ordenado de ${}^*\mathbb{R}$. En particular se identificará a $[\mathbf{0}]$ con 0 y a $[\mathbf{1}]$ con 1.

Teorema 3.9. *Existe un elemento de ${}^*\mathbb{R}$ que no es elemento de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Considérese $\omega = \langle 1, 2, 3, ...\rangle$. Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces por el principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < n$, por lo que $\langle|\mathbf{r} < \omega|\rangle$ es cofinito. Como se utiliza $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$ para inducir la congruecia, entonces por la nota de la proposición 2.18, $\mathcal{F}$ contiene a todos los conjuntos cofinitos, en particular $\langle|\mathbf{r} < \omega|\rangle \in \mathcal{F}$, de donde $r < [\omega]$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $[\omega]$ es un elemento de ${}^*\mathbb{R}$ que no está en $\mathbb{R}$. Por otro lado considérese $\epsilon = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\rangle$, como ϵ es convergente a cero entonces $\langle|\mathbf{0} < \epsilon < \mathbf{r}|\rangle = \{n \in \mathbb{N} :\ 0 < \frac{1}{n} < r\}$ es cofinito, de donde $\langle|\mathbf{0} < \epsilon < \mathbf{r}|\rangle \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{R}$, por lo que $0 < [\epsilon] < r$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto $[\epsilon]$ es un elemento de${}^*\mathbb{R}$ que no está en $\mathbb{R}$.

□

Observación.

- A los elementos $[\omega]$ de ${}^*\mathbb{R}$ que cumplen que $r < [\omega]$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se les llamará íllimitados, mientras que los elementos de ${}^*\mathbb{R}$ que cumplen que $0 < [\epsilon] < r$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se les llama infinitesimales.

- Debe notarse que la prueba aterior podría aplicarse para cualquier ω que divergiera al infinito o a cualquier sucesión ϵ de términos positivos que convergiera a cero.
- También debe notarse que esta es la primera proposición en la que se utiliza el hecho de que $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$, para todas las demás bastaba con que fuera un ultrafiltro de $\mathbb{N}$. Es decir la característica de no principal asegura la existencia de elementos distintos a los de $\mathbb{R}$ en el conjunto cociente inducido por la relación módulo ultrafiltro.

Definición 3.10. A $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ se le conoce como conjunto de números hiperreales.

Observación. El anillo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un ejemplo de un producto directo resultado de un producto cartesiano más general al definido en la sección anterior, en este caso $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{N}$. Sin embargo, el proceso de contrucción de los hiperreales puede ser repetido para un producto directo de un conjunto X sobre Y, induciendo la relación módulo ultrafiltro con un ultrafiltro principal de Y. Esto se debe a que en las pruebas de los enunciados desde el 3.2 hasta el 3.9 las implicaciones eran gracias a la naturaleza del ultrafiltro no principal y el producto cartesiano. De esa cuenta el proceso llevado a cabo en esta sección permite la construcción de modelos, como los hiperreales, de estructuras matemáticas más generales.

En adelante en la presente sección se definirán objetos de ${}^*\mathbb{R}$ asociados de una forma especial a objetos de $\mathbb{R}$.

Definición 3.11. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ (una relación unaria de $\mathbb{R}$), el conjunto ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$ se define de la forma siguiente: Si $[r] \in {}^*\mathbb{R}$ entonces $[r] \in {}^*A$ si y sólo si $\langle| r \in A |\rangle = \langle| A(r) |\rangle \in \mathcal{F}$ si y sólo si $r_n \in A$ para casi todo n. Al conjunto ${}^*A$ se le llama extensión de A en ${}^*\mathbb{R}$.[6]

Observación.

- Sea $a \in A$, entonces $\langle| \mathbf{a} \in A |\rangle = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, por lo que $a = {}^*a = [\mathbf{a}] \in {}^*A$, por lo que $A \subset {}^*A$.
- A los elementos del conjunto ${}^*A \setminus A$ se les llama elementos no estándar de ${}^*A$.

Teorema 3.12. *Sea $A \in \mathbb{R}$ infinito, entonces ${}^*A$ tiene elementos no estándar.*

[6]La pertenencia de $[r]$ está bien definida por lo demostrado en la proposición 3.4, aplicándola para una relación es unaria.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ infinito, por lo tanto existe una sucesión r de elementos de A cuyos términos son todos distintos. De esa cuenta $\langle|r \in A|\rangle = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, entonces $[r] \in {}^*A$. Sea $s \in A$, $\langle|\mathbf{s} = r|\rangle$ es vacío o un conjunto con un sólo elemento, esto porque todos los términos de r son distintos, en cualquier caso dado que $\mathcal{F}$ es no principal entonces $\langle|\mathbf{s} = r|\rangle \notin \mathcal{F}$, entonces $[r] \neq [\mathbf{s}] = {}^*s = s$. Entonces $[r] \in {}^*A \setminus A$. □

Teorema 3.13. *Sea $A \in \mathbb{R}$ finito, entonces ${}^*A = A$.*

Demostración. Sea $A = \{c_1, c_2, ..., c_k\} \subset \mathbb{R}$ finito. Considérese $[r] \in {}^*A$, entonces $\langle|r \in A|\rangle \in \mathcal{F}$. Por otro lado, sin pérdida de generalidad suponer que $\langle|r = \mathbf{c_i}|\rangle \neq \phi$, con $\mathbf{c_i} = \langle c_i, c_i, ..., \rangle$. Además $\cup_{i=1}^{k}\langle|r = \mathbf{c_i}|\rangle = \langle|r \in A|\rangle \in \mathcal{F}$, y $\langle|r = \mathbf{c_i}|\rangle \cap \langle|r = \mathbf{c_j}|\rangle = \phi$ para $i \neq j$. Por la propiedad 2.17 dado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{F}$ contiene exactamente a uno de los $\langle|r = \mathbf{c_i}|\rangle$, sin pérdida de generalidad $\langle|r = \mathbf{c_1}|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $[r] = [\mathbf{c_1}] = c_1 \in A$, de donde se concluye que ${}^*A \subset A$. Pero ya se sabía que $A \subset {}^*A$, entonces $A = {}^*A$. □

Observación. Dado que los dos teoremas anteriores son uno el converso del otro, una caracterización de conjunto infinito en $\mathbb{R}$ es que su extensión en ${}^*\mathbb{R}$ tenga al menos un elemento no estándar.

En el siguiente ejemplo se investigará el comportamieto de la extensión de conjuntos en los hiperreales sobre $\mathbb{Z}^+$ para dar una idea de como actúa esta operación en los conjuntos.

Ejemplo. Si $[r] \in {}^*\mathbb{Z}^+$ entonces $[r] \in \mathbb{Z}^+$ o $[r]$ es un número ilimitado.

Demostración. (Caso 1) Los términos de r son un número finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Por teorema 3.13 se sabe que $[r] \in \{c_1, c_2, ..., c_n\} \subset \mathbb{Z}^+$. (Caso 2)La sucesión r tiene como términos a un número infinito de enteros positivos distintos. En el caso de que $[r] \in \mathbb{Z}^+$ ya se cumple una de las opciones. Entonces suponer que $[r] \neq [\mathbf{n}]$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, de esa cuenta $\langle|r \neq \mathbf{n}|\rangle \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Por otro lado nótese que $\langle|r \neq \mathbf{n}|\rangle = \langle|r < \mathbf{n}|\rangle \cup \langle|\mathbf{n} < r|\rangle \in \mathcal{F}$, y $\langle|r < \mathbf{n}|\rangle \cap \langle|\mathbf{n} < r|\rangle = \phi$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro por la proposición 2.17 exactamente uno de los dos conjuntos, $\langle|r < \mathbf{n}|\rangle$ o $\langle|\mathbf{n} < r|\rangle$ está en $\mathcal{F}$. Suponer por reducción al absurdo que $\langle|r < \mathbf{n}|\rangle \in \mathcal{F}$, pero $\langle|r < \mathbf{n}|\rangle = \langle|r = 1|\rangle \cup \langle|r < \mathbf{2}|\rangle \cup \cdots \cup \langle|r < \mathbf{n-1}|\rangle \in \mathcal{F}$, con $\langle|r = i|\rangle \cap \langle|r = j|\rangle = \phi$ cuando $i \neq j$, de nuevo por la proposición 2.17 exactamente uno de los miembros de la partición está en $\mathcal{F}$, sin pérdida de generalidad $\langle|r = i|\rangle \in \mathcal{F}$, de donde $[r] = [\mathbf{i}]$ lo que es una contradicción para el supuesto $[r] \neq [\mathbf{n}]$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. De esa cuenta $\langle|\mathbf{n} < r|\rangle \in \mathcal{F}$, como el n para el que se hizo la prueba es arbitrario y la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $[\mathbf{n}] < [r]$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $[r]$ es ilimitado. □

Observación. Se puede hacer un estudio similar para $\mathbb{Z}^-$ y utilizando argumentos similares se llega a la conclusión que los únicos elementos de su extensión son los enteros negativos y los números infinitamente pequeños. Una pregunta razonable es ¿Qué pasa con la extenxión de $\mathbb{Z}$?¿Generará algunos elementos que conjunten la información de ambos tipos de ilimitados (negativos y positivos)? Esto se contesta en la siguiente proposisión, de la cual sólo se probará un inciso en la presente sección.

Proposición 3.14. *Si* $A, B \subset \mathbb{R}$ *entonces*

1. $A \subset B$ si y sólo si ${}^*A \subset {}^*B$
2. $A = B$ si y sólo si ${}^*A = {}^*B$
3. ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$
4. ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$
5. ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$
6. ${}^*\phi = \phi$

Demostración. Se probará 3. Suponer que A y B no son ambos vacíos, el caso donde ambos son vacíos se prueba con 6. ($\subset$)Sea $[r] \in {}^*(A \cup B)$ entonces $\langle|r \in A \cup B|\rangle \in \mathcal{F}$. Considére ahora la partición $\{\langle|r \in A \setminus B|\rangle, \langle|r \in A \cap B|\rangle, \langle|r \in B \setminus A|\rangle\}$ de $\langle|r \in A \cup B|\rangle$, sin pérdida de generalidad supóngase que ninguno de los conjuntos es vacío, si lo fuera se saca de dicha clase. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro por la porpiedad 2.17 se sabe que exactamente uno de los conjuntos de dicha clase está en $\mathcal{F}$. Si $\langle|r \in A \setminus B|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $\langle|r \in A \setminus B|\rangle \subset \langle|r \in A|\rangle \in \mathcal{F}$, de donde $[r] \in {}^*A$. Si $\langle|r \in A \cap B|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $\langle|r \in A \cap B|\rangle \subset \langle|r \in A|\rangle \in \mathcal{F}$, de donde $[r] \in {}^*A$. Si $\langle|r \in B \setminus A|\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $\langle|r \in B \setminus A|\rangle \subset \langle|r \in B|\rangle \in \mathcal{F}$, de donde $[r] \in {}^*B$. En cualquier caso $[r] \in {}^*A \cup {}^*B$, por lo tanto ${}^*(A \cup B) \subset {}^*A \cup {}^*B$. ($\supset$)Sea $[r] \in {}^*A \cup {}^*B$ de donde $[r] \in {}^*A$ o $[r] \in {}^*B$, por lo que $\langle|r \in A|\rangle \in \mathcal{F}$ o $\langle|r \in B|\rangle \in \mathcal{F}$. Como $\langle|r \in A|\rangle \subset \langle|r \in A \cup B|\rangle$ y $\langle|r \in B|\rangle \subset \langle|r \in A \cup B|\rangle$, en cualquier caso dado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro por la propiedad de superconjunto $\langle|r \in A \cup B|\rangle \in \mathcal{F}$, implicando que $[r] \in {}^*(A \cup B)$ por lo tanto ${}^*(A \cup B) \supset {}^*A \cup {}^*B$ y ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$. □

Observación. El inciso 3. aplicado a conjuntos infinitos A, B implica que los elementos no estándar de ${}^*A$ y los elementos no estándar de ${}^*B$ son los mismos que se generan a partir de extender $A \cup B$. Es decir , a pesar de que en $A \cup B$ se pueden generar sucesiones con elementos de ambos conjuntos estas generan los mismos elementos no estandar que las que tienen términos de uno sólo de los conjuntos [7]. El mismo razonamiento aplica para los elementos estándar. Así en $\mathbb{Z}$ sólo se gerarán los ilimitados infinitamente grandes y los ilimitados infinitamente pequeños como elementos no estándar.

[7]Esto no es tan difícil de ver si se piensa que se puede hacer una partición de la sucesión en los términos de un conjunto y los términos del otro

Definición 3.15. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, su extensión a los hiperreales es una función ${}^*f$: ${}^*\mathbb{R}\to{}^*\mathbb{R}$ que se define de la forma siguiente: Si $r\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sea $f\circ r=\langle f(r_1),f(r_2),...\rangle$, entonces ${}^*f([r])=[f\circ r]=[\langle f(r_1),f(r_2),...\rangle]$. Debido a que $\langle|r=r'|\rangle\subset\langle|f\circ r=f\circ r'|\rangle$ entonces $r\equiv r'$ implica $f\circ r\equiv f\circ r'$, asegurando que ${}^*f$ está bien definida.

Observación. Nótese que ${}^*f$ obedece ${}^*f([r])=[s]$ si y sólo si $\langle|f\circ r=s|\rangle\in\mathcal{F}$. Además es claro que si $r\in\mathbb{R}$ entonces ${}^*f(r)=f(r)$.

Definición 3.16. Sea P una relación $k-aria$ de $\mathbb{R}$, su extensión a los hiperreales es la relación $k-aria$ ${}^*P$ en ${}^*\mathbb{R}$ que se define de la siguiente forma: Si $\left[r^1\right],\left[r^2\right],...,\left[r^k\right]\in{}^*\mathbb{R}$ entonces ${}^*P(\left[r^1\right],\left[r^2\right],...,\left[r^k\right])$ si y sólo si $\langle|P(r^1,r^2,...,r^k)|\rangle\in\mathcal{F}$.

Observación.

- ${}^*P$ está bien definida por la proposición 3.4, esta definición es sólo formalizar la observación de dicha proposición.
- La definición 3.11 y 3.15 son un caso particular de esta, sólo se dieron por separado para estudiarlas y entenderlas mejor.
- En el caso general de una función $m-aria$ f puede ser identificada como una relación $m+1-aria$, como su grafo, $Graf(f)=\{(x_1,x_2,...,x_m,y):\ y=f(x_1,x_2,...,x_m)\}$. Entonces la extensión de $Graf(f)$ se define como el grafo de la extensión de f a los hiperreales.Es decir, ${}^*(Graf(f))=Graf({}^*f)$. Es posible probar que esta definición coincide con la definición 3.15

3.2. Principio de transferencia

. En la presente sección se mostrará la herramienta lógica que permite trasladar algunos resultados obtenidos en $\mathbb{R}$ hacia ${}^*\mathbb{R}$ y viceversa. Se inicia presentado el tipo de enunciados matemáticos acerca de $\mathbb{R}$ que se pueden expresar a través de la estructura completa $\mathcal{R}=<\mathbb{R},Rel_{\mathbb{R}},Fun_{\mathbb{R}}>$ y su lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$, a su vez cada uno de estos enunciados en la estructura $\mathcal{R}$ tiene un enunciado asociado que se obtiene sustituyedo los objetos (subconjutos, funciones, relaciones) de $\mathbb{R}$ por sus respectivas extensiones[8] en ${}^*\mathbb{R}$; dicho enunciado asociado habla acerca de ${}^*\mathbb{R}$. Luego se presenta el principio de transferencia que liga el valor de verdad de los enunciados de la estructura $\mathcal{R}$ con los enunciados asociados en ${}^*\mathbb{R}$, permitiendo así trasladar propiedades de un conjuto al otro. Finalmente se discuten algunas justificaciones que sostienen este principio.

[8]las vistas en la sección anterior

El principal propósito de la subsección 2.2 es brindar un marco lógico bien definido a través del cual se puedan enunciar algunas sentencias de objetos matemáticos. En dicha subsección se logran abstraer los objetos formales, tales como conjuntos, relaciones, funciones, elementos, que son necesarios para transmitir ideas sobre una estructura matemática. Así, por ejemplo, si se desea hablar sobre el principio de Arquimedes en $\mathbb{R}$ se puede enunciar: Si x es un número real entonces hay un número natural n que lo supera. Sin embargo, la esencia del enunciado está en los objetos sobre los que habla (x y n), las propiedades que cumplen, que en esencia son las relaciones que satisfacen (como $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x < n$), y el alcance y naturaleza del enunciado que está dado por palabras como existe o cualquiera. De esa forma teniendo en cuenta la definición 2.13 y sus observaciones, este principio puede ser expresado también de la forma siguiente: $(\forall x \in \mathbb{R})[(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)]$. Se menciona la definición 2.13 porque como se desea que el sentido matemático de verdad y el sentido de la estructura $\mathcal{R}$ de verdad coincidan, para que en efecto ambas oraciones expresen el mismo significado, deben estar ligadas en verdad, es decir no pueden expresar el mismo significado y tener distintos valores de verdad. En el presente caso la oración de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$: $(\forall x \in \mathbb{R})[(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)]$ es verdadera cuando al instanciar cada x se cumple la oración interna $[(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)]$ que a su vez es verdadera si en efecto existe dicho n que cumpla la relación $(x < n)$[9]. En este sentido $(\forall x \in \mathbb{R})[(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)]$ es verdadera si y sólo si "Si x es un número real entonces hay un número natural n que lo supera" es verdadera.

Una de las habilidades que se deberá obtener de ahora en adelante es la de trasladar al lenguaje de relaciones $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ los enunciados que se conocen de $\mathbb{R}$. Por ejemplo: $A \subset \mathbb{R}$ es finito. Este es un enunciado complicado, dado que las relaciones que se pueden enunciar en $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ son sobre elementos de $\mathbb{R}$ y no sobre subconjuntos. Sin embargo, para este caso, una forma de enuciar la finitud de un subconjunto de $\mathbb{R}$ es la siguiente: A es finito si y sólo si $A = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, esto se puede trasladar al lenguaje de $\mathcal{R}$ como sigue: $(\forall x \in A)(x = r_1 \text{ o } x = r_2 \text{ o } ... \text{ o } x = r_n)$. Ahora bien al enunciado "$A \subset \mathbb{R}$ es infinito contable" no podria aplicársele el mismo procedimiento dado que las reglas para poder formar oraciones sólo se pueden aplicar un número finito de veces por lo que $(\forall x \in A)(x = r_1 \text{ o } x = r_2 \text{ o } ...)$ no sería una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$. Otro ejemplo es la forma en que se expresa la calidad discreta de $\mathbb{N}$: $(\forall x \in \mathbb{N})[(n \leqslant x \leqslant n+1) \rightarrow (x = n \text{ o } x = n+1)]$.

Por otro lado una fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ de la estructura completa $\mathcal{R} =< \mathbb{R}, Rel_{\mathbb{R}}, Fun_{\mathbb{R}} >$ tiene símbolos P y f de relaciones y funciones de $\mathcal{R}$. Esta fórmula

[9]Acá con cumplir la relación se refiere a que la pareja $(x, y) \in P$, donde P es la relación de orden $<$

puede ser convertida a una fórmula distinta si se sustiyen los símbolos de P y f por los símbolos de sus extensiones ${}^*P$ y ${}^*f$. Sin embargo, esta nueva expresión no estaría dentro de la estructura $\mathcal{R} =< \mathbb{R}, Rel_{\mathbb{R}}, Fun_{\mathbb{R}} >$, por lo que es válido preguntarse dentro de qué estructuras se encontrarían estos nuevos objetos.

Definición 3.17. La estructura ${}^*\mathcal{R} =< {}^*\mathbb{R}, \{{}^*P : P \in Rel_{\mathbb{R}}\}, \{{}^*f : f \in Fun_{\mathbb{R}}\} >$ es la estructura asociada en ${}^*\mathbb{R}$ a la estructura completa $\mathcal{R} =< \mathbb{R}, Rel_{\mathbb{R}}, Fun_{\mathbb{R}} >$.

Observación. Es importante notar que ${}^*\mathcal{R}$ no es la estructura completa de ${}^*\mathbb{R}$. Por ejemplo si se toma $A \subset \mathbb{R}$ infinito entonces $A \notin Rel_{{}^*\mathcal{R}}$. Esto porque todo conjunto infinito que esté en $Rel_{{}^*\mathcal{R}}$ tiene al menos un elemento no estándar por teoremas 3.12 y 3.13.

Es dentro de ${}^*\mathcal{R}$ que se encuentran estas nuevas fórmulas que se obtenían al sustituir relaciones y funciones de una fórmula de $\mathcal{R}$ por sus extensiones. Para formalizar la noción de estas nuevas fórmulas se dan las siguientes definiciones.

Definición 3.18. La $* - transformación$ de un término τ del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$, denotada por ${}^*\tau$ se obtiene aplicando sucesivamente las reglas siguientes:

- Si τ es una variable o un constante de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$, entonces ${}^*\tau$ es sólo τ.
- Si τ es de la forma $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ donde $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ son términos de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ entonces ${}^*\tau$ es ${}^*f({}^*\tau_1, {}^*\tau_2, ..., {}^*\tau_n)$.

Definición 3.19. La $* - transformación$ de una fórmula ψ del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$, denotada por ${}^*\psi$ se obtiene aplicando las reglas siguientes:

- Se remplaza cada término τ que aparece en ψ por ${}^*\tau$.
- Se remplaza cada símbolo de relación P de cualquier fórmula atómica que aparece en ψ por ${}^*P$.
- Se remplaza la relción unaria P que sirve de restricción en cada cuantificador $(\forall x \in P)$ o $(\exists x \in P)$ que aparezca en ψ por ${}^*P$.

Observación.

- La definición anterior puede expresarse en forma inductiva sobre la formación de ψ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
{}^*(P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)) &:= {}^*P({}^*\tau_1, {}^*\tau_2, ..., {}^*\tau_n). \\
{}^*(\psi \wedge \varphi) &:= ({}^*\psi \wedge {}^*\varphi) \\
{}^*(\psi \vee \varphi) &:= ({}^*\psi \vee {}^*\varphi) \\
{}^*(\psi \rightarrow \varphi) &:= ({}^*\psi \rightarrow {}^*\varphi) \\
{}^*(\psi \leftrightarrow \varphi) &:= ({}^*\psi \leftrightarrow {}^*\varphi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^*[(\forall x \in P)\psi] &:= (\forall x \in {}^*P)^*\psi \\
{}^*[(\exists x \in P)\psi] &:= (\exists x \in {}^*P)^*\psi
\end{aligned}
$$

- En adelante la notación que se utilizará en las $* - transformación$ de fórmulas tratará de usar el símbolo $*$ lo menos posible. Así para extensiones de las relaciones $=, <, >$ se utilizarán los mismos símbolos, comprendiendo que en la transformada la notación se refiere a la relación en ${}^*\mathcal{R}$. Lo mismo se hará con la notación para funciones bien conocidas como $sen(x), cos(x), e^x$, cada una en la $* - transformación$ hará referencia a las funciones extendidas en ${}^*\mathcal{R}$. Las constantes reales se denotarán por el mismo símbolo como se indica en la definición 3.18. Por ejemplo ${}^*((x \in \mathbb{R}) \to (0 < sen(x-4))) := ((x \in {}^*\mathbb{R}) \to (0 < sen(x-4)))$, donde en el lado derecho de la expresión $<, sen()$ se refieren a las extensiones de la relación y función usual. Con esta observación en mente se puede notar que la $* - transformación$ de un término quedará igual escrita aunque su significado es el que ya discutimos en este inciso. Así para poder escribir la $* - transformación$ de una fórmula se debe remplazar solamente

$$
\begin{gathered}
P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \text{ por } {}^*P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n), \\
(\forall x \in P) \text{ por } (\forall x \in {}^*P), \\
(\exists x \in P) \text{ por } (\exists x \in {}^*P)
\end{gathered}
$$

Ejemplo.

- La $* - transformación$ del principio de Arquímides es: $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})[(\exists n \in {}^*\mathbb{N})(x < n)]$
- La $* - transfromación$ del enunciado $(\forall x \in A)(x = r_1 \text{ o } x = r_2 \text{ o } ... \text{ o } x = r_n)$ es: $(\forall x \in {}^*A)(x = r_1 \text{ o } x = r_2 \text{ o } ... \text{ o } x = r_n)$
- La $*-transformación$ de $(\forall x \in \mathbb{N})[(n \leqslant x \leqslant n+1) \to (x = n \text{ o } x = n+1)]$ es: $(\forall x \in {}^*\mathbb{N})[(n \leqslant x \leqslant n+1) \to (x = n \text{ o } x = n+1)]$

Observación. En cada una de las $* - transformación$ es importante leer las relaciones $=, <, \leqslant, \in$ como las relaciones de ${}^*\mathcal{R}$ que denotan.

A continuación se presenta el teorema que relaciona el valor de verdad de ψ en la estructura $\mathcal{R}$ al valor de verdad de ${}^*\psi$ en la estructura ${}^*\mathcal{R}$.

Teorema 3.20. *(Principio de Transferencia) Una oración ψ en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ es verdadera si y sólo si ${}^*\psi$ es verdadera en $\mathcal{L}_{{}^*\mathcal{R}}$*

Observación.

- Es importante resaltar que cuando se habla de ψ y ${}^*\psi$ verdaderas en el anterior enunciado se hace en el sentido de la definición 2.13, para sus respectivas estructuras $\mathcal{R}$ y ${}^*\mathcal{R}$. De esa cuenta el enunciado dice que bajo las reglas definidas para obtener la $* - transformasión$ de una oración, el valor de verdad de las oraciones se preserva aunque se encuentren en estructuras distintas.
- El principio de transferencia es también una herramienta muy fuerte para trasladar propiedades del conjunto de los números reales, al conjunto de los números hiperreales. Ejemplos de las propiedades que pueden ser transmitidas son las mostrados en 3.2, así se sabe que en ${}^*\mathbb{R}$ existe una especie de principio de Arquímides, que la extensión de un subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es él mismo, y que en los hipernaturales (${}^*\mathbb{N}$) tambien tienen una naturaleza discreta. A pesar de la gran cantidad de propiedades que pueden ser transmitidas a través de este principio vale la pena también reconocer sus limitaciones. La primera limitación es la propia de la estructura del tipo $< \mathcal{E}, Rel_{\mathcal{E}}, Fun_{\mathcal{E}} >$ que como se observó anteriormente no puede transmitir todos los tipos de enunciados sobre el conjuto $\mathcal{E}$, por ejemplo no se puede hablar sobre relaciones entre subconjuntos de $\mathcal{E}$; de esa cuenta los resultados o propiedades que se transmiten con el principio de transferencia están limitados al tipo que se pueden enunciar en las estructuras con las que trata. La segunda limitación es que dado que ${}^*\mathcal{R}$ no es la estructura completa de ${}^*\mathbb{R}$ los enunciados que se pueden expresar a través de ella son aún más limitados que si se tuviera la estructura completa, como en el caso de $\mathcal{R}$; por ejemplo el enunciado $x \in \mathbb{N}$ no tiene lugar en ${}^*\mathcal{R}$, como se observó en 3.17, de esa cuenta no se puede a partir de cualquier enunciado sobre ${}^*\mathbb{R}$, incluso los que se pueden expresar en su estructura completa, llegar a concluir resultados de $\mathbb{R}$ a través del principio de tranferencia .
- Este principio abstrae lo realizado en cada prueba a través de las propiedades y naturaleza de la relación modulo ultrafiltro, como en 3.14 y permite generalizar el resultado obtenido en cada caso.

Ejemplo.

- Para probar que cada hiperreal distinto a cero tiene un inverso y con ello demostrar que ${}^*\mathbb{R}$ es un campo se puede hacer lo siguiente. Se sabe que $(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \to (\exists y \in \mathbb{R})xy = 1)$, por el principio de transferencia se sabe que $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \neq 0 \to (\exists y \in {}^*\mathbb{R})xy = 1)$ es cierto, lo que significa que para cada hiperreal x distinto de cero, existe un hiperreal y que es su inverso.

- Para probar enunciados del tipo de 3.14 se puede hacer lo siguiente. Dado que la definición de unión de conjuntos está dada por $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in B))$ entonces por el principio de transferencia se sabe que $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \in {}^*(A \cup B) \leftrightarrow (x \in {}^*A \text{ o } x \in {}^*B))$, de donde se concluye que ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$. El resto de incisos de dicha propiedad se pueden probar en forma análoga.

- A partir de $(\forall x \in \mathbb{R})(sen^2(x) + cos^2(x) = 1)$, se puede concluir que $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(sen^2(x) + cos^2(x) = 1)$, sin importar que x sea un infinitesimal o un ilimitado. Este ejemplo sirve para ilustrar que se puede transferir a través del principio de transferencia propiedades que usualmente conocemos, y luego ver que significan en el conjunto al que se transfieren, así por ejemplo se podrían transferir las propiedades de la aritmética, de la divisibilidad, etc.

- Es importante recordar que a través del principio de transferencia también es posible probar propiedades de $\mathbb{R}$ si se conoce ya un resultado en ${}^*\mathbb{R}$, después de todo es esto lo que se desea hacer en esta tesis, probar algunos resultados en los hiperreales para demostrar así el teorema fundamental del cálculo. Así por ejemplo, si se tiene una sucesión $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y de alguna forma se sabe que su extensión ${}^*s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ nunca toma valores ilimitados, entonces se puede probar que s debe ser acotada. Sea $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Por el supuesto que se hizo se sabe que $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(|s(n)| < \omega)$, sin embargo este enunciado no está en la estructura ${}^*\mathcal{R}$ por lo que no se puede usar principio de transferencia. En cambio si se escribe el supuesto de la forma siguiente: $(\exists y \in {}^*\mathbb{R})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(|s(n)| < y)$ entonces se tiene un resultado en ${}^*\mathcal{R}$ que enuncia nuestra hipótesis. Por principio de transferencia se sabe que $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|s(n)| < y)$ por lo que se concluye que s es acotada. Es importante entonces la forma en que se escriban los supuestos, para poder utilizar el principio de transferencia.

Finalmente acerca de la prueba del principio de transferencia se puede decir que este teorema es un caso particular del teorema de Los', nombrado así por el matemático polaco que lo probó. Esta prueba está fuera de los alcances de la presente tesis, sin embargo, la prueba debería proceder por inducción sobre la formación de fórmulas y sus criterios de verdad.

3.3. Artmética y naturaleza de los hiperreales

. A continuación se presenta, utilizando el principio de transferencia, la deducción de algunas propiedades en la aritmética hiperreal, principalmente la forma en que se comportan las operaciones entre distintos tipos de hiperreales como por ejemplo infinitesimales e ilimitados. Luego se enuncia un resultado de gran importancia para conocer la naturaleza del conjunto de los hiperreales, este habla acerca de todos los tipos de hiperreales que existen y los caracteriza de alguna forma.

Definición 3.21. Un número hiperreal b es:

- **Limitado** si $r < b < s$ para algún $r, s \in \mathbb{R}$.
- **Ilimitado positivo** si $r < b$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
- **Ilimitado negativo** si $b < r$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
- **Ilimitado** si es ilimitado negativo o ilimitado positivo.
- **Infinitesimal positivo** si $0 < b < r$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.
- **Infinitesimal negativo** si $r < b < 0$ para todo $-r \in \mathbb{R}^+$.
- **Infinitesimal** si es infinitesimal negativo, o infinitesimal positivo, o cero.
- **Estimable** si es límitado y no es infinitesimal. Es decir $r < |b| < s$ para algún $r, s \in \mathbb{R}^+$

Observación.

- Todos los números reales e infinitesimales son limitados.
- El único infinitesimal que es un número real es cero.
- Todos los números reales distintos de cero son estimables.
- Nótese que se pueden reescribir algunas de las condiciones de la definición como sigue, b es:
  - Limitado si y sólo si $|b| < n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
  - Ilimitado si y sólo si $|b| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
  - Infinitesimal si y sólo si $|b| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
  - Estimable si y sólo si $\frac{1}{n} < b < n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- Se denotará al conjunto $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de los hipernaturales infinitos por $^*\mathbb{N}_\infty$, Similarmente $^*\mathbb{R}_\infty$ denotará al conjunto de hiperreales ilimitados positivos. Para un conjunto de hiperreales general X, $X_\infty = \{x \in X : \ x \text{ es ilimitado}\}$ y $X^+ = \{x \in X : \ x > 0\}$.
- A los números limitados se les denotará por $\mathbb{L}$, y al conjunto de los números infinitesimales se les denotará por $\mathbb{I}$.

Es importante resaltar que a través del principio de transferencia se pueden heredar inmediatamente muchas de las propiedades de $\mathbb{R}$ a $^*\mathbb{R}$, como se ejemplificó en la sección previa. Unas de estas propiedades heredables son las de desigualdades. Es fácil observar que la suma y producto de desigualdades en ${}^*\mathbb{R}$ puede efectuarse bajo las mismas premisas que en $\mathbb{R}$, de ahí se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 3.22. *Sean ϵ, δ infinitesimales, b, c hiperreales estimables, y H, K ilimitados, entonces.*

- **Sumas**
  - $\epsilon + \delta$ es infinitesimal
  - $b + \epsilon$ es estimable
  - $b + c$ es limitado
  - $H + \epsilon$ y $H + b$ son ilimitados
- **Inversos Aditivos**
  - $-\epsilon$ es infinitesimal
  - $-b$ es estimable
  - $-H$ es ilimitado
- **Productos**
  - $\epsilon \cdot \delta$ y $\epsilon \cdot b$ son infinitesimales
  - $b \cdot c$ es estimable
  - $b \cdot H$ y $H \cdot K$ son ilimitados
- **Recíprocos**
  - $\frac{1}{\epsilon}$ es ilimitado si $\epsilon \neq 0$
  - $\frac{1}{b}$ es estimable
  - $\frac{1}{H}$ es infinitesimal
- **Cocientes**
  - $\frac{\epsilon}{b}, \frac{\epsilon}{H}, \frac{b}{H}$ son infinitesimales
  - $\frac{b}{c}$ es estimable si $c \neq 0$
  - $\frac{b}{\epsilon}, \frac{H}{\epsilon}, \frac{H}{b}$ son ilimitados para $\epsilon, b \neq 0$
- **Raíces**
  - Si $\epsilon > 0$, $\sqrt[n]{\epsilon}$ es un infinitesimal
  - Si $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ es un estimable
  - Si $H > 0$, $\sqrt[n]{H}$ es un ilimitado
- **Formas Indeterminados**
  - No se puede concluir de manera general que tipo de números son: $\frac{\epsilon}{\delta}, \frac{H}{K}, \epsilon \cdot H, H + K$

Observación.

- Se puede notar a partir de estas reglas que $\mathbb{L}$ e $\mathbb{I}$ son subanillos de ${}^*\mathbb{R}$. Además se cumple que $\mathbb{I}$ es un ideal en el anillo de los números limitados.

- Con respecto a las raíz $n - simas$, esta existe dado que la función $x \to \sqrt[n]{x}$ está definida para los reales no negativos y se extiende a los hiperreales no negativo.

Definición 3.23. Un número hiperreal b está infinitamente cerca de un hiperreal c, denotado por $b \simeq c$, si $b - c$ es un infinitesimal.

Observación.

- La relación infinitamente cerca es de equivalencia. (Reflexividad) Nótese que $b - b = 0 \in \mathbb{I} \implies b \simeq b$.(Simetría) Si $b \simeq c \implies b - c \in \mathbb{I} \implies c - b \in \mathbb{I} \implies c \simeq b$. (Transitividad) Si $b \simeq c$ y $c \simeq d \implies (b - c), (c - d) \in \mathbb{I} \implies (b - c) + (c - d) = b - d \in \mathbb{I} \implies b \simeq d$.
- A la clase de equivalencia de un número hiperreal b se le llama halo de b y de denota por $hal(b) = \{c \in {}^*\mathbb{R} : \; b \simeq c\}$.
- Nótese que $hal(0) = \{c \in {}^*\mathbb{R} : \; c \simeq 0\} = \{c \in {}^*\mathbb{R} : \; c \in \mathbb{I}\} = \mathbb{I}$.
- Además $hal(b) = \{c \in {}^*\mathbb{R} : \; c \simeq b\} = \{c \in {}^*\mathbb{R} : \; b - c \in \mathbb{I}\} = \{c \in {}^*\mathbb{R} : c - b = \epsilon \in \mathbb{I}\} = \{b + \epsilon : \; \epsilon \in \mathbb{I}\}$

Proposición 3.24. *Si $b \simeq x \leqslant y \simeq c$ con $b, c \in \mathbb{R}$, muestre que $b \leqslant c$.*

Demostración. Como $b \simeq x$ y $c \simeq y$ entonces exiten $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{I}$ tal que $x = b + \epsilon_1$ y $y = c + \epsilon_2$, entonces $b + \epsilon_1 \leqslant c + \epsilon_2 \implies b \leqslant c + (\epsilon_2 - \epsilon_1) = c + \epsilon$, con $\epsilon \in \mathbb{I}$. Por reducción al absurdo suponer que $b > c$ por lo tanto $b - c > 0$ con $b - c \in \mathbb{R}$, entonces $0 < b - c < \epsilon$, lo cual es una contradicción dado que $\epsilon \in \mathbb{I}$.De esa cuenta $b \leqslant c$.

□

Observación. La proposición anterior implica un principio general que se utilizará a menudo para comparar dos númros reales b, c. Si $b > c$ entonces los halos de ambos números son disjuntos y cumplen que cualquier elemento de $hal(b)$ es mayor a cualquier elemento de $hal(c)$. Así para mostrar que $b \leqslant c$ es suficiente mostrar que un elemento de $hal(b)$ es menor o igual a un elemento de $hal(c)$.

Teorema 3.25. *Cada número hiperreal limitado b está infinitamente cerca de exactamente un número real al que se lle llama sombra de b, y es denotado por $sh(b)$.*

Demostración. Sea $A = \{r \in \mathbb{R} : \; r < b\}$. Como b es limitado existen $r, s \in \mathbb{R}$ con $r < b < s$, de esa cuenta A es un conjunto no vacío y acotado por arriba en $\mathbb{R}$ por s. Por el principio del supremo de $\mathbb{R}$, existe una mínima cota superior de A en $\mathbb{R}$, sea dicha cota c. Ahora se probará que $b \simeq c$. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Dado que c es una cota superior de A, entonces $c+\epsilon$ no puede estar en A, de esa cuenta $b \leqslant c+\epsilon$. Por otro lado suponer por reducción al absurdo que $b \leqslant c-\epsilon$, entonces $c-\epsilon$ sería cota superior de A y sería menor que c que es el supremo de A, lo cual es una contradicción, de esa cuenta $c-\epsilon < b < c+\epsilon$, por lo que $|b-c| < \epsilon$. Como esto es verdadero para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^{+}$ entonces $(b-c) \in \mathbb{I}$, y con ello $b \simeq c$. Para probar la unicidad de la sombra de b, suponer que existe $c' \in \mathbb{R}$ tal que $b \simeq c'$, por transitividad $c \simeq c'$, pero dado que ambos son números reales $c = c'$.

□

Observación. Este teorema caracteriza la naturaleza de los números estimables. Estos resultan ser infinitesimales "corridos", es decir, son el resultado de sumar a un número real un infinitesimal. De esa cuenta los números limitados resultan ser los reales, los infinitesimales, y las sumas de estos dos.

Otra reflexión acerca del teorema anterior involucra recordar la forma en que se construyó ${}^{*}\mathbb{R}$. Supóngase que se tiene $r = \{r_n\}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si r es acotada entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass tiene al menos un punto de acumuluación, es decir existe al menos una subsucesión de r tal que dicha subsucesión converge a un número real. Sin embargo, este punto de acumulación no tiene por qué ser único, de hecho, para cualquier conjunto cerrado acotado de $\mathbb{R}$, puede construirse una sucesión cuyo conjunto de puntos límites sea dicho conjunto cerrado acotado[10]. Entonces la forma en que actúa la relación de equivalencia módulo ultrafiltro es tal que al considerar $[r]$ este número estará infinitamente cerca del número real $sh([r])$. Además no es muy difícil ver que $sh([r])$ debe estar en el conjunto de puntos límite de r, de lo contrario $sh([r])$ seria un punto aislado de la sucesión y $[r]$ estaria a una distancia real de $sh([r])$. De esa cuenta podemos concluir que la relación módulo ultrafiltro de alguna forma discrimina entre los puntos de acumulación de r y escoge exactamente uno para que $[r]$ esté infinitamente cerca de él. Una pregunta interesante es ¿Que hará esta relación con otros conjuntos cuyas topologías sean distintas a las de $\mathbb{R}$?

Proposición 3.26. *Si $b, c \in \mathbb{L}$, entonces:*

- $sh(b+c) = sh(b) + sh(c)$
- $sh(b \cdot c) = sh(b) \cdot sh(c)$
- Si $b \leqslant c$ entonces $sh(b) \leqslant sh(c)$

Demostración. Si $b, c \in \mathbb{L}$ entonces por teorema 3.25, $b = sh(b)+\epsilon_1$, y $c = sh(c)+\epsilon_2$, con $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{I}$ entonces $b+c = sh(b)+sh(c)+\epsilon_1+\epsilon_2$ como $sh(b), sh(b) \in \mathbb{R}$, por

[10] Para esto último ver [?]

unicidad de la sombra de un número limitado tenemos que $sh(b+c) = sh(sh(b) + sh(c) + \epsilon_1 + \epsilon_2) = sh(b) + sh(c)$. Utilizado las reglas aritmeticas del producto de hiperreales se obtiene de forma análoga el segundo inciso. El tercer inciso es una consecuencia de la proposición 3.24. $\square$

Observación. Esta propiedad implica que el mapeo sombra, $sh : b \to sh(b)$ es un homomorfismo del anillo $\mathbb{L}$ de números limitados sobre $\mathbb{R}$, que preserva el orden. Su kernel es el ideal de los números infintesimales $\mathbb{I}$. De esa cuenta podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.27. *El anillo conciente* $\mathbb{L}/\mathbb{I}$ *es un isomorfo al campo de los números reales* $\mathbb{R}$*, con la correspondencia* $hal(b) \to sh(b)$*. Por lo tanto* $\mathbb{I}$ *es un ideal maximal del anillo* $\mathbb{L}$*.*

4. Cálculo no estándar

Una vez construida y formalizada la noción de infinitesimal es posible construir un nuevo cálculo sobre dicha base. Este cálculo que surgirá mantiene la intuición del concepto de infinitamente cercano y permite a la vez redefinir algunas de las nociones básicas del estudio analítico de las funciones. Es así como a continuación se presentan los puntos centrales del cálculo no estándar. Se expondrán solamente los teoremas y resultados indispensables para probar el teorema fundamental del cálculo para funciones continuas, dado que ese es el objetivo del actual trabajo, sin embargo es posible extenderse ampliamente en otros temas, como sucesiones, series, continuidad uniforme, regla de la cadena, topologia de los números reales, etc. En primera instancia se provee de la definición no estándar de continuidad y se prueba la equivalencia con la definición estándar; también se presenta una prueba del teorema del valor extremo utilizando la definición no estándar. En la segunda sección se presenta la definición no estándar de diferenciabilidad y se prueba su equivalencia con la definición estándar, a su vez se prueban algunas propiedades de la derivada para evidenciar la utilidad de esta nueva definición. En la tercera sección se menciona la definición estándar de integral que utilizaremos y se prueba su equivalencia con la definicion no estándar proveída para funciones continuas, luego se deducen algunas propiedades básicas de la integral. Finalmente en la cuarta sección se prueba el teorema fundamental del cálculo utilizando la metodología no estándar desarrollada en las secciones previas.

4.1. Continuidad no estándar

. La continuidad de una función f se presenta intuitivamente como, *puntos cercanos se mapean en puntos cercanos*, de esa cuenta no es muy complicado imaginar que en la metodología no estándar los puntos cercanos de un punto $c \in \mathbb{R}$ son los que están en $hal(c)$, y que por tanto al aplicar f a dichos puntos, para que f sea continua, los resultados deberían todos de quedar cercanos entre sí, en particular, todos deberían de residir en $hal(f(c))$.

Teorema 4.1. *Una función f es continua en un punto $c \in A \subset \mathbb{R}$ si y sólo si $f(x) \simeq f(c)$ para todo $x \in {}^*A$ con $x \simeq c$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como f es continua en $c \in A$ tenemos $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta_\epsilon \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$. Lo cual puede escribirse, dando $\delta_\epsilon, \epsilon$ fijos como: $(\forall x \in A)(0 < |x - c| < \delta_\epsilon \to |f(x) - f(c)| < \epsilon)$, cuya $* - transformasión$ es $(\forall x \in {}^*A)(0 < |x - a| < \delta_\epsilon \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$. Si $x \in {}^*A$ y $x \simeq c$, entonces $x - c \in \mathbb{I}$, por lo que $0 < |x - c| < \delta_\epsilon$ de donde $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Como esto se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, entonces $|f(x) - f(c)|$

es un infinitesimal, y tenemos que $f(x) \simeq f(c)$. ($\Leftarrow$) Suponer ahora que $f(x) \simeq f(c)$ para todo $x \in {}^*A$ con $x \simeq c$. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, y sea $d \in \mathbb{I}$, $d > 0$, entonces si $x \in {}^*A$ y $|x-c| < d$ entonces $x \simeq c$ y por lo tantdo $f(x) \simeq f(c)$, por lo que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, dado que ϵ es un real. De esa cuenta se sabe que $(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*A)(0 < |x-c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \epsilon)$, aplicando principio de transferencia se obtiene $(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)(0 < |x-c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \epsilon)$, como ϵ es arbitrario, entonces se cumple para cualquier escogencia real positiva del mismo, con lo que se concluye que f es continua en $c \in A$. $\square$

Observación. De ahora en adelante cuando se hable de continuidad de una función f en un punto real se utilizará la definición no estándar.

Definición 4.2. Sea f una función acotada en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Teorema 4.3. *(Teorema del Valor Extremo) Si una función de valores reales es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$, es decir, existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Si se supone que f sólo toma un número finito de valores entonces la prueba del teorema no sería complicada, dado que se procedería a sacar el máximo de ese conjunto de valores (existe por ser un número finito) y se propondría un elemento de la preimagen de dicho máximo como d; el verdadero problema (el que plantea solucionar este teorema) surge cuando la función toma un valor infinito de valores. Sin embargo se puede pensar en transferir este mecanismo de existencia de un máximo sobre un número entero de valores a través del principio de transferencia, en cuyo caso se tendría la existencia de un máximo sobre un número hiperentero (posiblemente ilimitado) de valores. Utilizando este hecho, aunado a la continuidad de f probar lo que pide del teorema. Así pues se procede de la forma siguiente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede hacer una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud cuyos puntos frontera sean $p_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ con $0 \leqslant k \leqslant n$. Sea $s_n \in [a, b]$ el p_k para el cual f toma el valor más grande, éste existe dado que se trata de un número finito de puntos de partición p_k. Es decir $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists s_n \in [a, b])([(k \in \mathbb{N}) \wedge (0 \leqslant k \leqslant n)] \to f(a + \frac{k(b-a)}{n}) \leqslant f(s_n))$. Aplicando el principio de transferencia se obtine

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\exists s_n \in {}^*[a, b])([(k \in {}^*\mathbb{N}) \wedge (0 \leqslant k \leqslant n)] \to f(a + \frac{k(b-a)}{n}) \leqslant f(s_n)) \quad (1)$$

Sea N un hipernatural ilimitado y $s_N \in [a,b]$ el respectivo hiperreal que existe por la conclusión del párrafo anterior, además como s_N es limitado entonces sea $d = sh(s_N)$, dicha sombra existe por teorema 3.25. Como f es continua en d y $d \simeq s_N$ entonces

$$f(d) \simeq f(s_N) \quad (2)$$

Por otro lado se desea probar que la partición inducida por el hipernatural ilimitado N, cuyos puntos de partición son $a + \frac{k(b-a)}{n}$ para $(k \in {}^*\mathbb{N})$ y $(0 \leqslant k \leqslant n)$ tiene la propiedad de que dichos puntos de partición están infinitamente cerca de cualquier elemento real de $[a,b]$, es decir que el halo de un $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ contiene puntos de esta partición. Para probar esto procedemos como sigue.

Sea $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, y sea $n \in \mathbb{N}$, en la partición inducida por los puntos partición $p_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leqslant k \leqslant n$, existe un natural $k < n$ tal que: $a + \frac{k(b-a)}{n} \leqslant x \leqslant a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}$, reescribiendo esto $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(k \leqslant n \ \wedge \ a + \frac{k(b-a)}{n} \leqslant x \leqslant a + \frac{(k+1)(b-a)}{n})$. Por principio de transferencia se sabe que $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\exists k \in {}^*\mathbb{N})(k \leqslant n \ \wedge \ a + \frac{k(b-a)}{n} \leqslant x \leqslant a + \frac{(k+1)(b-a)}{n})$, para un x real en $[a,b]$. En el caso particular del hipernatural ilimitado N, entonces existe K hipernatural $K < N$, tal que x real en $[a,b]$ está en el intervalo $[a + \frac{K(b-a)}{N}, \frac{(K+1)(b-a)}{N}]$, cuyo ancho es $\frac{(b-a)}{N}$ un infinitesimal, por lo que $x \simeq a + \frac{K(b-a)}{N}$, entonces se cumple que en efecto un real x está infinitamente cerca de un punto partición, como f es continua entonces en x entonces

$$f(x) \simeq f(a + \frac{K(b-a)}{N}) \quad (3)$$

Pero por la ecuación (1), para $K < N$

$$f(a + \frac{K(b-a)}{N}) \leqslant f(s_N) \quad (4)$$

Entonces $(2), (3)$ y (4) tenemos:

$$f(x) \simeq f(a + \frac{K(b-a)}{N}) \leqslant f(s_N) \simeq f(d)$$

Por proposición 3.24 se concluye que para todo $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant f(d)$, dado que $f(x), f(d) \in \mathbb{R}$. De esa cuenta f alcanza un máximo en el valor d.

La prueba de que f alcanza un mínimo se hace en forma análoga. □

Observación. Es importante resaltar que en la demostración del teorema anterior se expone un método de prueba que se podrá replicar en varias ocasiones. Es decir se propone extender una propiedad de un conjunto finito a un conjunto "hiperfinito" y luego bajo alguna otra condición comprobar que se puede extender al conjunto que nos interesa. En este caso la construcción de la partición es vital dado que nos da un conjunto de números infinitamente cercanos a números reales y a través de la propiedad de continuidad se logra extender el resultado del conjunto hiperfinito al conjunto de nuestro interés.

4.2. Diferenciabilidad no estándar.

Teorema 4.4. *Si f está definida en $x \in \mathbb{R}$, entonces el número real $L \in \mathbb{R}$ es la derivada de f en x si y sólo si para cada infinitesimal $h \neq 0$, $f(x+h)$ está definido y además*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \simeq L$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Como f es derivable en x tenemos $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que si $0 < |h| < \delta_\epsilon \implies |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon$, esto asegura que f está definida para un intervalo abierto con centro en x por lo que su extensión estará definida para puntos infinitamente cercanos a x. Lo anterior puede escribirse, dando $\delta_\epsilon, \epsilon$ fijos como: $(\forall h \in \mathbb{R})(0 < |h| < \delta_\epsilon \rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon)$, cuya $* - transformasión$ es $(\forall h \in {}^*\mathbb{R})(0 < |h| < \delta_\epsilon \rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon)$. Si $h \in {}^*\mathbb{R}$ y $h \simeq 0$, con $h \neq 0$ entonces $h \in \mathbb{I}$, por lo que $0 < |h| < \delta_\epsilon$ de donde $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon$. Como esto se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, entonces $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L|$ es un infinitesimal, y tenemos que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq L$. ($\Leftarrow$) Suponer ahora que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq L$ para todo $h \in \mathbb{I}$ con $h \neq 0$. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, y sea $d \in \mathbb{I}$, $d > 0$, entonces si $h \in {}^*\mathbb{R}$ y $|h| < d$ entonces $h \simeq 0$ y por lo tantdo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq L$, por lo que $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon$, dado que ϵ es un real. De esa cuenta se sabe que $(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall h \in {}^*\mathbb{R})(0 < |h| < \delta \rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon)$, aplicando principio de transferencia se obtiene $(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall h \in \mathbb{R})(0 < |h| < \delta \rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L| < \epsilon)$, como ϵ es arbitrario, entonces se cumple para cualquier escogencia real positiva del mismo, con lo que se concluye que f es derivable en $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Observación.

- Por lo tanto si f es diferenciable en x, se tiene $f'(x) = sh(\frac{f(x+h)-f(x)}{h})$ para todos los infinitesimales $h \neq 0$.
- Es posible a partir de esta definición de diferenciabilidad probar todas las propiedades de derivadas con las que usualmente se cuenta, por ejemplo, las reglas de suma, resta, multiplicación, división, regla de la cadena, etc. Más adelante se dará un ejemplo de esto.
- Si $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq L$ se cumple para todos los infinitesimales h positivos, entonces L es la derivada derecha de f en x. Que en forma estándar se definie como $Lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- Si $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq L$ se cumple para todos los infinitesimales h negativos, entonces L es la derivada izquierda de f en x. Que en forma estándar se definie como $Lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Sea $\Delta x \in \mathbb{I}$, $\Delta x \neq 0$ un infintesimal cualquiera, representando un *incremento* en el valor de una variable x. El correspondiente *incremento en la funcion f en x* es:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

En realidad Δf depende tanto de x y de el Δx escogidos, es decir el incremento de f debería ser denotado por $\Delta f(x, \Delta x)$, sin embargo la notación abreviada utilizada es conveniente bastante conveniente como se ve a continuación.

Teorema 4.5. *Si f es diferenciable en $x \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en x.*

Demostración. Si f es diferenciable en $x \in \mathbb{R}$, por el teorema 4.4 entonces $\frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x)$, de donde $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ es limitado. Por lo tanto $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x$ es infintesimal. Es decir $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \simeq 0 \implies f(x + \Delta x) \simeq f(x)$, por lo tanto f es continua.

$\square$

Ejemplo. Si f y g son diferenciables en $x \in \mathbb{R}$, entonces fg es diferenciable con $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Demostración. Sea $\Delta x \neq 0$ un infintesimal, entonces por teorema 4.4, $f(x + \Delta x)$ y $g(x + \Delta x)$ están ambos definidos y además $(fg)(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x - \Delta x)$.

Por lo tanto el incremento de fg en x correspondiente a Δx es:

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x)\\ &= (\Delta f)g(x) + f(x)(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g)\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) + f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \Delta f\frac{\Delta g}{\Delta x}\\ &\simeq f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + 0\end{aligned}$$

Dado que $\frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x)$, $\frac{\Delta g}{\Delta x} \simeq g'(x)$, y $\Delta f \simeq 0$ y $\frac{\Delta g}{\Delta x}$ es limitado. Entonces como se comprobó para Δx infinitesimal arbitrario distinto de cero y $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ es un número real, entonces por teorema 4.4 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ es la derivada de fg en x. $\square$

4.3. Integrabilidad no Estándar.

4.3.1. Integrabidad Estándar. En la actual sección se recuerdan algunas definiciones y propiedades relacionadas con la integrabiliad estándar que se utilizarán en adelante.

Sea f una función acotada en $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sean M_i y m_i el sumpremo y el ínfimo de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ respectivamente. Sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Definición 4.6. Se definen:

- La suma superior de Riemman como $U_a^b(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$
- La suma inferior de Riemman como $L_a^b(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$
- La suma ordinaria de Riemman como $S_a^b(f,P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$

Proposición 4.7. *Si M y m son el supremo y el ínfimo de f en el intervalo $[a,b]$ entonces*

$$m(b-a) \leqslant L_a^b(f,P) \leqslant S_a^b(f,P) \leqslant U_a^b(f,P) \leqslant M(b-a)$$

Proposición 4.8. *Para cualquier partición P_1 y P_2 del intervalo $[a,b]$*

$$L_a^b(f,P_1) \leqslant U_a^b(f,P_2)$$

Definición 4.9. Se dice que f es Riemman integrable en $[a,b]$ con integral $\int_a^b f(x)dx$ si se cumplen las dos siguientes condiciones

1. $L_a^b(f,P) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant U_a^b(f,P)$ para todas las particiones P del intervalo $[a,b]$
2. Para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ con $U_a^b(f,P) - L_a^b(f,P) < \epsilon$

4.3.2. Integrabilidad no Estándar. En esta sección se define la integral no estándar y se muestra que las funciones continuas en particular tienen integral no estándar. Sin embargo, es importante resaltar que no solamente a las funciones continuas se les puede calcular la integral no estándar, de hecho todas las funciones Riemman integrables (en el sentido estándar) llenan las condiciones para calcularles la integral no estándar. Sin embargo, en esta tesis se trabajará con las funciones continuas solamente dado que se busca probar el teorema fundamental del cálculo para este tipo de función. Como referencia para comprobar los resultados para funciones no continuas se puede buscar en [3].

Para poder asegurar la buena definición de la integral no estándar es necesario probar algunos resultado previamente.

A continuación se transfieren las propiedades estándar de particiones al conjunto de los hiperreales. Sea Δx un real positivo considérese la partición $P_{\Delta x} = \{x_0, ..., x_n\}$ que divide al intervalo $[a,b]$ en subintervalos $[a, a+\Delta x], [a+\Delta x, a+2\Delta x], ..., [a+(n-1)\Delta x, b]$ de igual largo Δx (posiblemente con el último subintervalo de menor longitud). El número de subintervalos está dado por el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + n\Delta x \geqslant b$. Se tiene entonces que $x_k = a + k\Delta x$ para $k < n$. Nótese que la partición $P_{\Delta x}$ está completamente determinada por Δx.

Se denotará a las sumas de Riemman superiror, inferior y ordinaria de la partición $P_{\Delta x}$ por $U_a^b(f,\Delta x), L_a^b(f,\Delta x), S_a^b(f,\Delta x)$ respectivamente. Cada una de estas sumas puede ser vista como una función de $\Delta x \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto estas funciones pueden ser extendidas a ${}^*\mathbb{R}^+$. En particular estarán definidas para infinitesimales positivos, haciendo alución, estas funciones, a una suma sobre una partición de ancho infinitesimal. En el caso de $\Delta x \in \mathbb{I}$, por principio de transferencia n estará definido como el menor hiperentero tal que $a + n\Delta x \geqslant b$, dada la naturaleza infinitesimal de Δx, en este caso n será ilimitado.

Por otro lado si $\Delta x \in \mathbb{R}^+$ por la proposición 4.7 se cumple que:

$$m(b-a) \leqslant L_a^b(f, \Delta x) \leqslant S_a^b(f, \Delta x) \leqslant U_a^b(f, \Delta x) \leqslant M(b-a)$$

Aplicando principio de transferencia entonces dicha propiedad también se cumple para cualquier hiperreal positivo Δx incluyendo los infinitesimales positivos. De manera similar a partir de la proposición 4.8 se concluye que para cualquier $\Delta x, \Delta y \in {}^*\mathbb{R}^+$ se cumple lo siguiente

$$L_a^b(f, \Delta x) \leqslant U_a^b(f, \Delta y)$$

El siguiente teorema es importante para asegurar la buena definición de la integral no estándar.

Teorema 4.10. *Si f es continua en $[a, b] \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier infinitesimal positivo Δx, $L_a^b(f, \Delta x) \simeq U_a^b(f, \Delta x)$.*

Demostración. Nótese que $U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i$. Para demostrar el teorema se probará la existencia de números c y d que generen una cota superior de $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i$ que tenga la forma $|f(c) - f(d)|(b-a)$, donde $|c - d| < \Delta x$. Con ello al hacer la transferencia de este resultado a los hiperreales y hacer Δx infinitesimal, por la continuidad de f se tendrá que $f(c) \simeq f(d)$, haciendo a $|f(c) - f(d)|(b-a)$ un infintesimal y por tanto a $U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x)$.

Sea $\Delta x \in \mathbb{R}^+$ y sea $\mu(\Delta x)$ el máximo valor de los números $M_i - m_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ en la partición inducida por Δx. Nótese que $M_i - m_i$ es la lo que varía f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por lo que $\mu(\Delta x)$ es la más grande de dichas variaciones. Suponer sin pérdida de generalidad que $\mu(\Delta x) = M_j - m_j$, entonces sea $c(\Delta x)$, $d(\Delta x)$ los puntos en $[x_{j-1}, x_j]$ para los cuales f alcanza los valores de M_j y m_j. La existencia de $c(\Delta x)$, $d(\Delta x)$ está asegurada por el teorema del valor extremo 4.3, dado que f es continua en $[x_{j-1}, x_j]$. De esa cuenta

$$\mu(\Delta x) = f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x)),$$

y

$$|c(\Delta x) - d(\Delta x)| < \Delta x.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\mu(\Delta x)\Delta x_i \\ &= \mu(\Delta x)\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\ &= \mu(\Delta x)(b-a) \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b-a).$$

De esa cuenta se acaba de probar que $(\forall \Delta x \in \mathbb{R}^+)(\exists c(\Delta x), d(\Delta x) \in [a,b])[(U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b-a)) \wedge (|c(\Delta x) - d(\Delta x)| < \Delta x)$, por el principio de transferencia se sabe que su $* - transformación$ se cumple por lo que se tiene $(\forall \Delta x \in {}^*\mathbb{R}^+)(\exists c(\Delta x), d(\Delta x) \in {}^*[a,b])[(U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b-a)) \wedge (|c(\Delta x) - d(\Delta x)| < \Delta x)$. Tomando Δx un infinitesimal positivo entonces se sabe que $c(\Delta x) \simeq d(\Delta x)$ en ${}^*[a,b]$, entonces dado que ambos son acotados tienen una sombra real $r \in [a,b]$ con $c(\Delta x) \simeq r \simeq d(\Delta x)$. Por la continuidad de f, $f(c(\Delta x)) \simeq f(r) \simeq f(d(\Delta x))$, de donde $f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))$ es infinitesimal. Dado que $(b-a)$ es limitado y que $(U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b-a))$ entonces $U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x)$ es infintesimal, por lo que $U_a^b(f,\Delta x) \simeq L(f,\Delta x)$.

□

Observación. Es importante notar que se puede probar que una función f Riemman integrable en $[a,b]$ cumple tambien con $L_a^b(f,\Delta x) \simeq U_a^b(f,\Delta x)$ para cualquier Δx infinitesimal positivo [3]. Como se verá a continuación la condición $L_a^b(f,\Delta x) \simeq U_a^b(f,\Delta x)$ es la que permite calcular a f la integral no estándar. De esa cuenta la siguiente definición puede ser extendida a funciones f Riemman integrables.

En las siguientes líneas se definirá la integral no estándar de una función continua. Sean $\Delta x_1, \Delta x_2$ infinitesimales positivos, y sean $L_1 = L_a^b(f,\Delta x_1)$, $L_2 = L_a^b(f,\Delta x_2)$, $U_1 = U_a^b(f,\Delta x_1)$, $U_2 = U_a^b(f,\Delta x_2)$ para una función continua f en $[a,b]$. Por propiedades de particiones[11] se tiene, $L_1 \leqslant U_1$ y $L_2 \leqslant U_2$, además $L_2 \leqslant U_1$, $L_1 \leqslant U_2$. De donde las posibles relaciones entre las sumas superiores e inferiores son las siguientes:

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant U_1 \leqslant U_2,$$

[11]Por transferencia de las proposiciones 4.7 y 4.8

o

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant U_2 \leqslant U_1,$$

o los enunciados correspondientes de intercambiar los subíndices de los dos anteriores. Pero por el teorema 4.10, se sabe que $L_1 \simeq U_1$ y $L_2 \simeq U_2$, por lo que en cualquier caso $L_1 \simeq L_2 \simeq U_1 \simeq U_2$. Dado que $S_a^b(f, \Delta x_1)$ y $S_a^b(f, \Delta x_2)$ están siempre entre sus respectivas sumas superiores e inferiores, podemos concluir que $S_a^b(f, \Delta x_1) \simeq S_a^b(f, \Delta x_2)$.

Se puede concluir entonces que las sumas Riemman determinadas arbitrariamente por infinitesimales positivos están todas infinitamente cerca unas de las otras, más aún todas están acotadas inferiormente por $m(b-a)$ y superioremente por $M(b-a)$, por lo que son limitadas y todas tienen la misma sombra. Es así como procedemos a dar la siguiente definición.

Definición 4.11. Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces la integral no estádar de f está dada por, $\int_a^b f(x)dx = sh(S_a^b(f, \Delta x))$, para cualquier infinitesimal Δx.

Observación. Se utiliza la misma notación que para la integral de Riemman dado que estas integrales coinciden. En el siguiente teorema se probará la equivalencia entre la definición no estándar y la estándar de integral para funciones continuas. Sin embargo, para evitar confusiones, en adelante, cuando se hable de $\int_a^b f(x)dx$ se estará haciendo referencia a la definición no estándar de la integral de f.

Teorema 4.12. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces es Riemman integrable con integral $\int_a^b f(x)dx$.*

Demostración. Se probará (1) y (2) de la definición 4.9. Sea P una partición estándar del intevalo $[a, b]$, y sea Δx un infinitesimal positivo. Entonces por transferencia de propiedades de particiones tenemos que

$$L_a^b(f, P) \leqslant U_a^b(f, \Delta x) \simeq \int_a^b f(x)dx \simeq L_a^b(f, \Delta x) \leqslant U_a^b(f, P),$$

donde $L_a^b(f, P)$ y $U_a^b(f, P)$ son números reales, por proposición 3.24,

$$L_a^b(f, P) \leqslant \int f(x)dx \leqslant U_a^b(f, P),$$

para una partición P arbitraria, cumplendo así (1).

Por otro lado, sea $\epsilon \in \mathbb{R}$ entonces por el teorema 4.10 existe $\Delta x \in {}^*\mathbb{R}^+$ (en este caso se toma un infinitesimal positivo) tal que $U_a^b(f, P) - L_a^b(f, P) < \epsilon$. Es decir se tiene que:

$$(\exists \Delta x \in {}^*\mathbb{R}^+)(U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) < \epsilon),$$

aplicando el principio de transferencia se obtiene

$$(\exists \Delta x \in \mathbb{R}^+)(U_a^b(f,\Delta x) - L_a^b(f,\Delta x) < \epsilon),$$

donde la partición inducida por Δx es una partición real. De esa cuenta se cumple que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ con $U_a^b(f,P) - L_a^b(f,P) < \epsilon$.

Por lo tanto f es Riemman integrable. $\square$

Teorema 4.13. *Sea f continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, si $a \leqslant c \leqslant b$.*

Demostración. Sea $\Delta x = \frac{(c-a)}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que

$$S_a^b(f,\Delta x) = S_a^c(f,\Delta x) + S_c^b(f,\Delta x).$$

Entonces

$$(\forall n \in \mathbb{N})(S_a^b(f,\Delta x) = S_a^c(f,\Delta x) + S_c^b(f,\Delta x)),$$

aplicando principio de transferencia obtenemos

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(S_a^b(f,\Delta x) = S_a^c(f,\Delta x) + S_c^b(f,\Delta x)),$$

con $\Delta x = \frac{(c-a)}{n}$. En particular si se toma un hipernatural ilimitado N, se tiene que Δx es infinitesimal y $S_a^b(f,\Delta x) = S_a^c(f,\Delta x) + S_c^b(f,\Delta x)$. Por proposición 3.26, $sh(S_a^b(f,\Delta x)) = sh(S_a^c(f,\Delta x)) + sh(S_c^b(f,\Delta x))$. Dado que f es continua, se reescribe lo anterior en términos de integrales y se obtiene $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. $\square$

4.4. Prueba del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 4.14. *Sea f una función continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es diferenciable en $[a,b]$, y su derivada es f.*

Observación. La clave de la relación entre diferenciación e integración se encuentra al examinar la función de área $F(x)$ en el presente teorema. A continuación se da una explicación intuitiva del sustento de este teorema. El incremento de F en x para cierto infinitesimal positivo Δx está dado por $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$. Dicho incremento es "cercanamente aproximado" por el área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho Δx, es decir $f(x)\Delta x$. Es importante preguntarse si "cercanamente aproximado" en este caso significa lo mismo que $\Delta F \simeq f(x)\Delta x$. Nótese que $f(x_1)\Delta x \leqslant \Delta F \leqslant f(x_2)\Delta x$, donde x_1 y x_2 son puntos en los que f alcanza un mínimo y un máximo en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ (la existencia de estos será probada dentro del teorema por transferencia). De esa cuenta $f(x_1) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x} \leqslant f(x_2)$, pero $x_1 \simeq x_2$ dado que ambos están sobre el intervalo $[x, x+\Delta x]$. Por la continuidad de f entonces $f(x_1) \simeq f(x_2) \simeq f(x)$, de donde $\frac{\Delta F}{\Delta x} \simeq f(x)$, lo que probaría el teorema.

Demostración. Sea $\Delta x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\Delta x < b - x$, entonces por teorema 4.13,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Dado que f es continua en $[x, x+\Delta x]$, por el teorema del valor extremo existen $x_1, x_2 \in [x, x+\Delta x]$ tales que f alcanza un máximo y un mínimo en dichos puntos para el intervalo $[x, x+\Delta x]$, de esa cuenta por la proposición 4.7, tenemos que

$$f(x_2)\Delta x \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leqslant f(x_1)\Delta x,$$

de donde

$$f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1).$$

Se acaba de mostra que $(\forall \Delta x \in (0, b-x))(\exists x_1, x_2 \in [x, x+\Delta x])(f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1))$. Aplicando principio de trasferencia obtenemos $(\forall \Delta x \in {}^*(0, b-x))(\exists x_1, x_2 \in {}^*[x, x+\Delta x])(f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1))$. En particular, si Δx es un infinitesimal positivo, existen $x_1, x_2 \in [x, x+\Delta x] \subset {}^*\mathbb{R}$ para los cuales se cumple $f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1)$. Como Δx es infinitesimal, entonces $x_1 \simeq x \simeq x_2$, y por la continuidad de f se tiene que $f(x_1) \simeq f(x) \simeq f(x_2)$. Además como $f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1)$ entonces $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \simeq f(x)$.

Por otro lado Sea $\Delta x \in \mathbb{R}^-$ tal que $a - x < \Delta x$, entonces por teorema 4.13,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt.$$

Dado que f es continua en $[x+\Delta x, x]$, por el teorema del valor extremo existen $x_1, x_2 \in [x+\Delta x, x]$ tales que f alcanza un máximo y un mínimo en dichos puntos para el intervalo $[x+\Delta x, x]$, de esa cuenta por la proposición 4.7, tenemos que

$$-f(x_2)\Delta x \leqslant \int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt \leqslant -f(x_1)\Delta x,$$

de donde

$$f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1).$$

Se acaba de mostra que $(\forall \Delta x \in (a-x,0))(\exists x_1, x_x \in [x+\Delta x, x])(f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1))$. Aplicando principio de trasferencia obtenemos $(\forall \Delta x \in {}^*(a-x,0))(\exists x_1, x_x \in {}^*[x+\Delta x, x])(f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1))$. En particular, si Δx es un infinitesimal negativo, existen $x_1, x_2 \in [x+\Delta x, x] \subset {}^*\mathbb{R}$ para los cuales se cumplen $f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1)$. Como Δx es infinitesimal, entonces $x_1 \simeq x \simeq x_2$, y por la continuidad de f se tiene que $f(x_1) \simeq f(x) \simeq f(x_2)$. Además como $f(x_2) \leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1)$ entonces $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \simeq f(x)$.

De esa cuenta, para cualquier infinitesimal Δx se cumple que $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \simeq f(x)$, por teorema 4.4, $f(x)$ es la derivada de F en $x \in [a,b]$.[12] □

Teorema 4.15. *Si una función G tiene una derivada continua f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$*

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces por el teorema anterior en $[a,b]$ tenemos $(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$, por lo que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) - F(x) = c$. Por lo tanto $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ □

[12]En los puntos límite del intervalo el teorema se refiere a la derivada por la derecha y por la izquierda respectivamente, esto se probó en la demostración en la parte donde Δx es postivo y donde Δx es negativo, respectivamente.

Referencias

[1] Dauben J. 1985. *Abraham Roinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Fundations of Mathematics*, en el libro History and Philosophy of Modern Mathematics: Vol IX. p. 177-200

[2] Gelbaum B, Olmsted J.1964. *Counterexamples in Analysis*. Dover, San Francisco. 195 págs.

[3] Goldblatt, R. 1998. *Lectures on the Hyperreals: An introduction to Nonstandard Analysis Springer*. Springer. Nueva York. 289 págs.

[4] Henson, W. 2009. Notas de clase de: *Nonstandard Analysis*. Versión digital obtenida en http://www.math.uiuc.edu/~henson/Math595/Spring2009/index.html

[5] Keisler J. 2011. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Versión digital obtenida en http://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html

[6] Kleiner I. 2001. *History of the Infinitely small and the infinitely large calculus*. Educational Studies in Mahtematics vol 48 (2001) p. 137-174. Netherlands.

[7] Medvedev, F. 1998. *The Evolution of Nonstandard Analysis and the History of Classical Analysis*. The American Mathematical Monthly, vol 105 (1998) p. 659-664.