

---

# Teorema de Riemann-Hurwitz

---

Ana Sofía Escobar Rivera





UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Teorema de Riemann-Hurwitz**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Ana Sofía Escobar Rivera  
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática Aplicada

Guatemala  
2025



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Teorema de Riemann-Hurwitz**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Ana Sofía Escobar Rivera  
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática Aplicada

Guatemala  
2025

Vo.Bo..



(f)

Alan Gerardo Reyes Figueroa

Tribunal Examinador:



(f)

Alan Gerardo Reyes Figueroa



(f)

Dorval José Carias Samayoa



(f)

Juan Fernando Valdes Cruz

Fecha de aprobación: Guatemala, 3 de julio del 2025.

---

## Agradecimientos

---

Gracias a mi papá, Mariana, Juan, familia, amigos y a mis dos ángeles que sé que velaron por mí todos mis años de U.

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.1.1. Objetivo general . . . . .	2
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	3
<b>2. Teoría de superficies de Riemann</b>	<b>4</b>
2.1. Teoría de superficies de Riemann . . . . .	4
2.1.1. Superficies de Riemann . . . . .	4
2.1.2. Complejos simpliciales . . . . .	11
2.1.3. Género y característica de Euler . . . . .	16
2.1.4. Mapeos ramificados . . . . .	20
<b>3. Teorema de Riemann-Hurwitz</b>	<b>28</b>
3.1. Teorema de Riemann-Hurwitz . . . . .	28
3.1.1. Enunciado del teorema . . . . .	28
3.1.2. Interpretación geométrica . . . . .	29
3.2. Demostración del teorema de Riemann-Hurwitz . . . . .	31
<b>4. Aplicaciones del teorema de Riemann-Hurwitz</b>	<b>34</b>
4.1. Aplicaciones del teorema de Riemann-Hurwitz . . . . .	34
4.1.1. Aplicaciones simples . . . . .	35

4.1.2. Clasificación de superficies de Riemann . . . . .	40
4.1.3. Determinación del género en curvas algebraicas . . . . .	43
<b>5. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>47</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	47
5.2. Recomendaciones . . . . .	48
<b>6. Bibliografía</b>	<b>50</b>

---

---

Lista de figuras

---

1.	Ejemplo esquemático de una variedad de dimensión $n$ . . . . .	6
2.	Ejemplo de un atlas con sus cartas . . . . .	6
3.	Esquema de un mapa holomorfo entre superficies de Riemann . . . . .	8
4.	Esfera de Riemann . . . . .	9
5.	Toro complejo . . . . .	10
6.	Retículo en $\mathbb{C}$ generado por $\omega_1$ y $\omega_2$ . . . . .	10
7.	Ejemplo de un complejo simplicial y su estructura básica . . . . .	12
8.	Ejemplo de triangulaciones de una esfera . . . . .	15
9.	Superficies con género 0, 1 y 2, respectivamente . . . . .	17
10.	Estructura local de un mapa ramificado entre superficies de Riemann [7] . . . . .	22
11.	Representación local de un mapa ramificado con índice $k = 4$ . . . . .	23
12.	Mapa de recubrimiento no ramificado en $f(z) = z^2$ [17] . . . . .	26
13.	Recubrimiento de grado $d$ con ramificación total en 0 y $\infty$ . . . . .	26

Este trabajo tiene como propósito exponer de manera clara y rigurosa la fórmula de Riemann-Hurwitz en el contexto de superficies de Riemann compactas. A través de una construcción cuidadosa de los conceptos fundamentales, como mapeos ramificados, triangulaciones y la característica de Euler, se busca proporcionar una demostración accesible del teorema, resaltando la relación entre el comportamiento local de los puntos críticos y las propiedades topológicas globales de las superficies. Asimismo, se pretende destacar el papel esencial que juegan los invariantes topológicos en la comprensión de los mapeos entre superficies de Riemann, y motivar el interés por continuar el estudio en áreas relacionadas como la geometría algebraica y el análisis complejo. El enfoque adoptado busca facilitar la comprensión del teorema a estudiantes en formación, proporcionando una base sólida para futuros desarrollos en la teoría de superficies.

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

Las superficies de Riemann fueron introducidas en el siglo XIX con el objetivo de proporcionar un marco adecuado para el estudio de funciones multivaluadas de variable compleja [7]. Al considerar espacios en los que tales funciones se vuelven inyectivas, se logra extender de manera natural las herramientas del análisis complejo a entornos donde la estructura global presenta mayor complejidad que la del plano o la esfera. Esta construcción abrió el camino a desarrollos posteriores en topología, geometría y teoría de funciones.

Una superficie de Riemann es, en términos generales, una variedad de dimensión uno sobre los números complejos, dotada de una estructura local compatible con la de  $\mathbb{C}$  [10]. A pesar de su simplicidad local, su estructura global puede ser muy diversa, y capturar estas diferencias requiere herramientas topológicas adecuadas. El estudio de las superficies de Riemann, por tanto, implica un análisis conjunto de su estructura analítica local y de sus propiedades topológicas globales.

Dentro de este contexto, los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann constituyen un objeto de estudio fundamental. Estos mapeos respetan la estructura compleja en cada punto, pero en general pueden presentar comportamientos singulares en ciertos lugares, conocidos como puntos críticos. En ellos, el mapa deja de ser localmente un biholomorfismo, y se introduce un fenómeno denominado ramificación. Para describir la forma en que un mapa ramificado altera la topología de las superficies, se asocia a cada punto crítico un número entero positivo, llamado índice de ramificación, que mide la multiplicidad local del mapa.

La fórmula de Riemann–Hurwitz ofrece una relación precisa entre el comportamiento local de un mapa holomorfo ramificado y las características topológicas globales de las superficies involucradas [14]. Esta fórmula establece una conexión explícita entre el género de las superficies, el grado del mapa y sus índices de ramificación. De este modo, proporciona un mecanismo efectivo para calcular invariantes topológicos a partir de información local, y revela cómo fenómenos analíticos influyen directamente sobre la topología de las superficies de Riemann.

El presente trabajo tiene como propósito desarrollar de manera detallada los conceptos necesarios para comprender y demostrar la fórmula de Riemann-Hurwitz. Para ello, se introducen los elementos básicos sobre mapeos ramificados, índices de ramificación, características de Euler y triangulaciones de superficies. Asimismo, se busca establecer claramente el vínculo entre las propiedades locales de los mapeos y los invariantes topológicos de las superficies, ilustrando estas ideas mediante ejemplos concretos y aplicaciones relevantes.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivo general

Desarrollar una demostración detallada del teorema de Riemann-Hurwitz y sus aplicaciones en la geometría de superficies de Riemann, con el fin de hacer más accesible su comprensión para los estudiantes y fomentar el interés en temas avanzados de geometría y topología.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Exponer las bases teóricas necesarias para entender el teorema de Riemann-Hurwitz, entre ellas, el concepto de superficies de Riemann y sus invariantes topológicos como el género de una superficie y la característica de Euler.
- Realizar una demostración rigurosa del teorema de Riemann-Hurwitz, facilitando la comprensión de cada uno de sus elementos, de manera que sea accesible a estudiantes de pregrado, con una formación básica en análisis complejo, álgebra lineal y topología.
- Proporcionar ejemplos que ilustren cómo el teorema de Riemann-Hurwitz es utilizado, incluyendo aplicaciones clásicas en la determinación del género de curvas algebraicas y la clasificación de superficies de Riemann.

## 1.2. Justificación

La justificación de este trabajo radica en la necesidad de facilitar el acceso al teorema de Riemann-Hurwitz, un resultado fundamental en la geometría de superficies de Riemann, tanto para estudiantes como para el entorno académico en general. La escasez de recursos en español y la complejidad técnica de los materiales disponibles hacen que su aprendizaje sea un desafío. Al desarrollar una demostración detallada y proporcionar ejemplos, este proyecto busca reducir esa dificultad. El trabajo no solo beneficiará a los estudiantes de la universidad al proporcionarles una herramienta valiosa para profundizar en la geometría y la topología, sino que también contribuirá al avance académico al ofrecer un recurso más accesible para la comprensión de estos conceptos.

### 1.3. Antecedentes

La teoría de superficies de Riemann surgió a mediados del siglo XIX como una respuesta innovadora a la necesidad de comprender funciones multivaluadas en el plano complejo, como la raíz cuadrada y el logaritmo. Bernhard Riemann propuso la idea de construir superficies especiales sobre las cuales estas funciones pudieran definirse de manera inyectiva, eliminando así los problemas asociados a la multivaluación [7]. Esta propuesta no solo transformó la teoría de funciones de variable compleja, sino que también impulsó una interacción entre el análisis, la topología y la geometría, marcando el inicio de una nueva etapa en el desarrollo matemático [10].

La aparición de puntos de ramificación, donde el mapa deja de comportarse localmente como un recubrimiento trivial, planteó preguntas esenciales sobre cómo estas singularidades locales afectan las propiedades globales de las superficies, tales como su conectividad y su género. A partir de estas inquietudes, Riemann esbozó una relación que conecta el género de las superficies, el grado del mapa y los datos de ramificación, estableciendo las bases de lo que posteriormente sería conocido como la fórmula de Riemann–Hurwitz [14].

Hacia finales del siglo XIX, Adolf Hurwitz retomó y refinó las ideas de Riemann. A través de una formulación rigurosa, logró establecer la fórmula en términos precisos, considerando mapeos de recubrimiento ramificados entre superficies compactas [16]. Esta formalización no solo corrigió ciertas imprecisiones iniciales, sino que amplió el alcance del resultado, abriendo el camino para su aplicación en la clasificación de curvas algebraicas y en el estudio de la estructura de superficies complejas [7].

Desde su formulación, la fórmula de Riemann–Hurwitz se ha consolidado como una herramienta indispensable en diversas ramas de la matemática. Su capacidad para vincular información local, como los índices de ramificación, con propiedades topológicas globales ha permitido avances significativos en la geometría compleja, la topología de baja dimensión y la teoría de recubrimientos.

Este trabajo se inscribe dentro de esta línea de desarrollo, con el objetivo de construir una exposición detallada y accesible del teorema de Riemann-Hurwitz. Se busca destacar no solo la importancia teórica de este resultado en el contexto de las superficies de Riemann, sino también su relevancia en aplicaciones actuales en distintas áreas de la matemática.

## 2.1. Teoría de superficies de Riemann

En este capítulo se abordará una introducción detallada a la teoría básica de las superficies de Riemann, la cual es indispensable para comprender los conceptos claves de la geometría y el análisis complejo. Este desarrollo teórico tiene como propósito principal sentar las bases necesarias para alcanzar el objetivo central de este trabajo, el cual es la demostración del importante teorema de Riemann-Hurwitz.

Además, se incluirán representaciones visuales diseñadas para ilustrar de manera clara y accesible las definiciones y conceptos principales, con el fin de facilitar la comprensión de una teoría que, aunque profunda y abstracta, puede ser explicada de manera más intuitiva. Este enfoque busca no solo demostrar el teorema, sino también dotar al lector de una visión más clara y completa de los fundamentos que lo sustentan.

### 2.1.1. Superficies de Riemann

La teoría de superficies de Riemann proporciona herramientas esenciales para estudiar y comprender estructuras complejas que integran elementos de la geometría, la topología y el análisis complejo. Estas superficies, definidas como variedades diferenciables de dimensión dos equipadas con una estructura compleja, constituyen un marco natural para conectar diferentes áreas de las matemáticas [10]. Su desarrollo requiere establecer previamente conceptos fundamentales que permitan una formalización rigurosa de su estructura.

La teoría de superficies de Riemann se fundamenta en principios topológicos que aseguran una estructura bien definida y coherente para su estudio. La propiedad de ser un espacio de Hausdorff asegura la separación local de puntos, permitiendo la construcción de una estructura adecuada en términos de continuidad [15]. La compactitud garantiza que las propiedades locales puedan extenderse globalmente mediante cubrimientos finitos, mientras que la conexión establece que las superficies son objetos indivisibles, posibilitando un análisis global coherente [12].

**Definición 2.1.1. (Espacio de Hausdorff).** *Un espacio topológico  $M$  es un espacio de Hausdorff si, para cualesquiera dos puntos  $p, q \in M$  con  $p \neq q$ , existen vecindades abiertas  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $q$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ .*

La compactitud garantiza que las propiedades locales puedan extenderse globalmente mediante cubrimientos finitos, mientras que la conexión establece que las superficies son objetos indivisibles, posibilitando un análisis global coherente.

**Definición 2.1.2. (Compacto).** *Un espacio topológico  $M$  es compacto si cada cubierta abierta de  $M$  tiene una subcubierta finita. Es decir, si  $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  con  $U_i$  abiertos, entonces existe un subconjunto finito  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$  tal que  $M \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ .*

**Definición 2.1.3. (Conexo).** *Un espacio topológico  $M$  es conexo si no puede representarse como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. Equivalentemente, cualquier función continua  $f : M \rightarrow \{0, 1\}$  es constante.*

Estas propiedades topológicas permiten avanzar hacia la definición formal de variedades. Las variedades, entendidas como espacios topológicos localmente homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ , proporcionan un entorno ideal para describir objetos geométricos complejos [7].

**Definición 2.1.4. (Variedad topológica).** *Una variedad topológica de dimensión  $n$  es un espacio conexo de Hausdorff  $M$  para el cual cada punto tiene una vecindad  $U$  que es homeomorfa a un subconjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . Tal homeomorfismo  $f : U \rightarrow V$  se denomina carta o coordenada local.*

Esta definición corresponde al concepto de variedad topológica. Si se requiere que las funciones de transición entre cartas sean diferenciables de clase  $C^k$ , se obtiene una variedad diferenciable. Si además se sustituye  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{C}^n$  y se exige que las funciones de transición sean holomorfas, se obtiene una variedad compleja.

En el caso particular de las variedades de dimensión 2, si están equipadas con una estructura compleja que preserva la diferenciabilidad y las propiedades conformes, se denominan superficies de Riemann [14]. Más adelante se continuará con una serie de definiciones más completas al respecto.

Para formalizar estas superficies, es indispensable introducir el concepto de carta, atlas y atlas conforme, este último que organiza las coordenadas locales de manera coherente a través de mapeos de transición holomorfos.

**Definición 2.1.5. (Carta).** *Una carta es un par  $(U, \phi)$ , donde  $U$  es un conjunto abierto de una variedad  $M$  y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo entre  $U$  y un conjunto abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$ .*

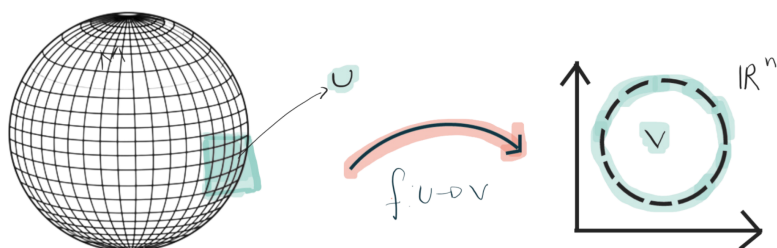


Figura 1: Ejemplo esquemático de una variedad de dimensión  $n$

**Definición 2.1.6. (Atlas).** Un atlas de una superficie es una colección de pares  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ , donde  $U_\alpha$  son conjuntos abiertos que cubren la superficie y  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  son homeomorfismos. Si las funciones de transición  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  entre cartas que se intersectan son holomorfas, el atlas se denomina atlas conforme.

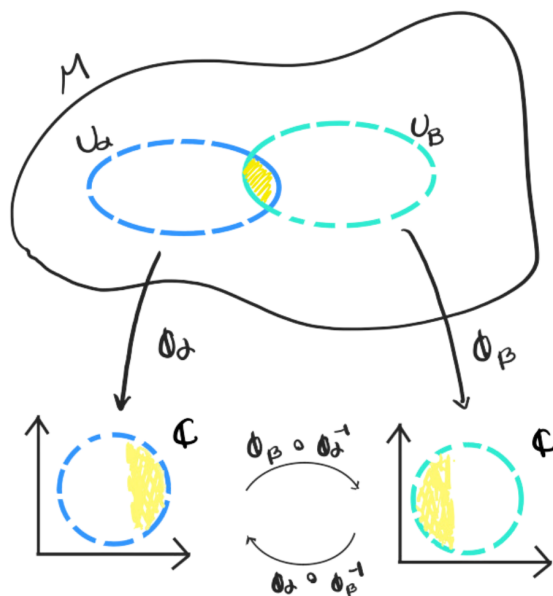


Figura 2: Ejemplo de un atlas con sus cartas

Un atlas está compuesto por varias cartas, cada una de las cuales describe localmente una parte de la variedad. Cuando dos cartas se intersectan, es necesario que haya una forma consistente de pasar de una a otra, asegurando que la información entre ellas sea compatible. Si todas las cartas en un atlas están relacionadas mediante funciones de transición adecuadas, entonces el atlas proporciona una descripción coherente de la estructura de la variedad.

La estructura conforme es crucial porque permite comparar las propiedades locales de la super-

ficie con las del plano complejo, asegurando que todas las transformaciones sean holomorfas. Esto garantiza una coherencia en el estudio de las superficies de Riemann, al preservar las propiedades fundamentales del análisis complejo [18].

**Definición 2.1.7. (Estructura conforme).** *Una estructura conforme sobre  $X$  es un atlas conforme maximal sobre  $X$ , o, equivalentemente, una clase de equivalencia de atlas conformes sobre  $X$ . Esta estructura garantiza que la superficie sea localmente similar al plano complejo.*

Una estructura conforme en una superficie diferenciable es una clase de equivalencia de atlas conformes. Es decir, dos atlas conformes  $\alpha$  y  $\beta$  definen la misma estructura conforme si su unión sigue siendo un atlas conforme. En otras palabras, una estructura conforme es más general que un atlas conforme, ya que describe una propiedad global de la superficie en lugar de una elección particular de coordenadas locales.

Una vez explicados estos conceptos, se puede definir de manera formal lo que es una superficie de Riemann.

Existen varias formas equivalentes de definir qué es una superficie de Riemann, algunas más abstractas o algebraizadas que otras. Sin embargo, en este trabajo se presentan dos versiones que son más intuitivas y fáciles de comprender, especialmente para quienes se acercan por primera vez al tema. Ambas capturan el sentido del objeto matemático que se quiere estudiar, y serán suficientes para el desarrollo del trabajo.

**Definición 2.1.8. (Superficie de Riemann I).** *Una superficie de Riemann es un espacio topológico conexo y segundo contable, que admite una estructura compleja compatible con su topología.*

Esta primera definición enfatiza las propiedades topológicas del espacio. Que sea conexo implica que el espacio no se puede escribir como la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. Por otro lado, la segunda contabilidad (que existe una colección numerable de abiertos que forma una base para su topología) restringe la topología a tener una estructura con una complejidad controlada. Finalmente, la estructura compleja permite definir funciones holomorfas de manera local en la superficie.

Es importante aclarar que la compatibilidad con la topología significa que los abiertos que aparecen en las cartas del atlas conforme generan la topología del espacio. Es decir, la topología original de la superficie está inducida por la estructura conforme, y no se trata de dos estructuras independientes.

**Definición 2.1.9. (Superficie de Riemann II).** *Una superficie de Riemann es una variedad topológica de dimensión 2 dotada de una estructura compleja compatible con la topología. Es decir, cada punto de la superficie tiene un entorno abierto que es homeomorfo a un abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$ , y las funciones de transición entre cartas del atlas son funciones holomorfas.*

Esta segunda definición resalta el aspecto local de las superficies de Riemann. Lo importante aquí es que, alrededor de cada punto, la superficie se puede parecer al plano complejo, y que las reglas que permiten pasar de una carta a otra son funciones holomorfas (se definirá este término más adelante). Esta compatibilidad con la estructura analítica es lo que permite hacer teoría de funciones sobre la superficie.

Antes de poder estudiar adecuadamente cómo se relacionan distintas superficies de Riemann entre sí, es necesario entender qué tipo de funciones preservan su estructura compleja. En este contexto, las funciones holomorfas no solo son funciones continuas, sino que además son diferenciables en el sentido complejo, lo cual es una condición mucho más fuerte que la diferenciabilidad real. La noción de holomorfía es central en el análisis complejo, y su preservación garantiza que las propiedades locales de las superficies se mantengan bajo estas funciones [7].

**Definición 2.1.10. (Mapa Holomorfo).** Sean  $X$  e  $Y$  superficies de Riemann. Un mapa holomorfo  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua tal que, en cualquier par de cartas  $(U, \phi)$  de  $X$  y  $(V, \psi)$  de  $Y$ , la composición  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  es holomorfa en  $\phi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{C}$ .

En esta definición intervienen varios objetos que es importante comprender. En primer lugar,  $X$  e  $Y$  son superficies de Riemann. La función  $f : X \rightarrow Y$  es un mapa continuo entre estas dos superficies. Para estudiar su comportamiento local, se introducen cartas locales: una carta  $(U, \phi)$  en  $X$  es un abierto  $U \subset X$  junto con un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{C}$ , y de forma análoga, una carta  $(V, \psi)$  en  $Y$  es un abierto  $V \subset Y$  junto con  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{C}$ . Estas cartas nos permiten traducir el comportamiento de  $f$  a coordenadas complejas locales. La expresión  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  representa el mapa  $f$  escrito en coordenadas locales: toma un punto de  $\mathbb{C}$  (a través de  $\phi^{-1}$ ), lo transforma mediante  $f$ , y luego lo lleva nuevamente a  $\mathbb{C}$  usando  $\psi$ . Requerir que esta composición sea holomorfa en su dominio garantiza que  $f$  preserve la estructura compleja de las superficies, al menos localmente.

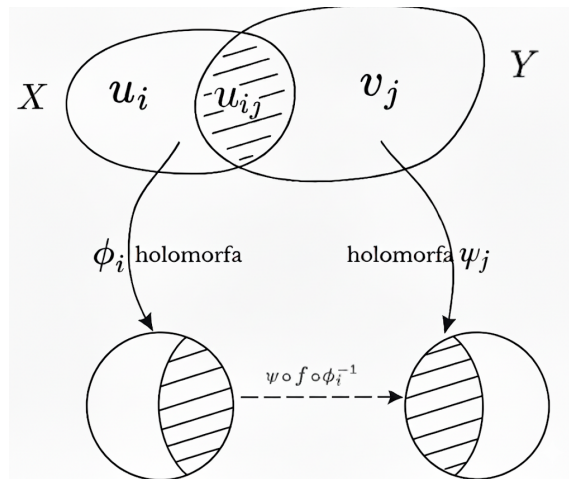


Figura 3: Esquema de un mapa holomorfo entre superficies de Riemann

En el estudio de las superficies de Riemann, una de las clasificaciones más fundamentales distingue entre aquellas que son compactas y las que no lo son. Las superficies compactas son aquellas que no tienen bordes ni se extienden infinitamente: son cerradas y acotadas en el sentido topológico. Este tipo de superficies son particularmente importantes en geometría algebraica, ya que permiten aplicar teoremas como Riemann-Roch [10], y poseen una estructura algebraica al estar relacionadas con curvas proyectivas complejas. Además, toda función holomorfa sobre una superficie de Riemann compacta es constante, como se demuestra en el Lema 2.2.1 de [10], lo que motiva el estudio de funciones meromorfas.

Una vez introducido el concepto de superficie de Riemann, es natural preguntarse por ejemplos concretos que nos permitan visualizar y entender mejor estos objetos. Entre los ejemplos más famosos de las superficies de Riemann se pueden encontrar la esfera de Riemann, el toro y una curva elíptica.

**Ejemplo 2.1.1. (La esfera de Riemann).** *La esfera de Riemann, denotada por  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , es una superficie de Riemann compacta que se obtiene al añadir un punto en el infinito al plano complejo. Se puede cubrir con dos cartas holomorfas de la siguiente manera:*

- *La primera carta es  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $U_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$  y  $\varphi_1(z) = z$ . Es decir, se identifica cada punto  $z \in \mathbb{C}$  con su coordenada usual.*
- *La segunda carta es  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ , y está dada por  $\varphi_2(z) = 1/z$ . Nótese que  $\varphi_2(\infty) = 0$ , y que  $\varphi_2$  es una función holomorfa en  $U_2$ , con  $\infty \in U_2$ .*

*En la intersección  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , las funciones de transición son:*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{y} \quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w) = \frac{1}{w},$$

*ambas holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Por tanto, las cartas son compatibles holomórficamente, lo que establece una estructura conforme en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Como esta estructura es maximal y la topología es la inducida por estas cartas, se concluye que  $\widehat{\mathbb{C}}$  es una superficie de Riemann compacta.*

*También se puede interpretar como el espacio proyectivo complejo unidimensional  $\mathbb{P}^1$ , el cual posee una estructura holomorfa equivalente a la de la esfera.*

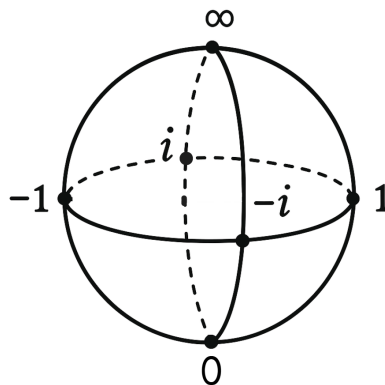


Figura 4: Esfera de Riemann

**Ejemplo 2.1.2..** *Sea  $X \subset \mathbb{C}^2$  la curva dada por la ecuación*

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda),$$

donde  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ . Esta ecuación define una curva algebraica afín que, al compactificarse y eliminar posibles singularidades, da lugar a una superficie de Riemann compacta, conocida como curva elíptica. Este tipo de superficies aparece frecuentemente como ejemplos básicos en geometría algebraica.

**Ejemplo 2.1.3..** El toro complejo se obtiene identificando lados opuestos de un paralelogramo en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Específicamente, para dos números complejos  $\omega_1, \omega_2$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , se define el toro como el cociente

$$\mathbb{C}/\langle \omega_1, \omega_2 \rangle,$$

donde  $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  es el retículo generado por estos dos números. Este cociente hereda una estructura compleja natural del plano complejo, convirtiéndolo en una superficie de Riemann compacta.

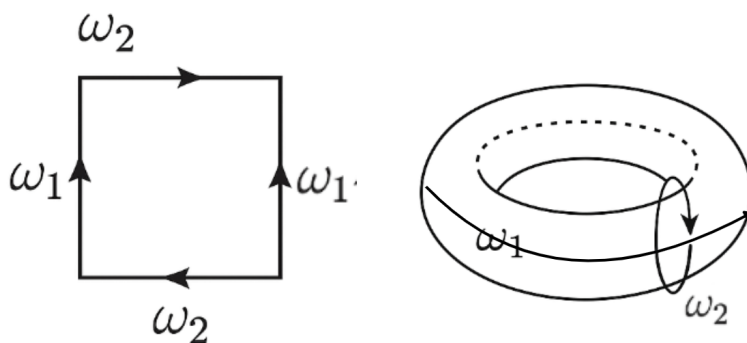


Figura 5: Toro complejo

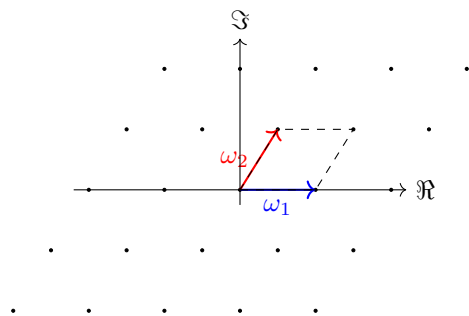


Figura 6: Retículo en  $\mathbb{C}$  generado por  $\omega_1$  y  $\omega_2$

Más adelante, se explorará cómo ciertas invariantes topológicas, como la característica de Euler, intervienen directamente en el análisis de aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. En particular, el teorema de Riemann-Hurwitz muestra cómo los puntos donde un mapa no es localmente un isomorfismo introducen correcciones precisas en la estructura topológica de la superficie origen. Este resultado establece un puente entre el comportamiento local de una función y el efecto global que induce sobre las superficies.

## 2.1.2. Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales son herramientas matemáticas fundamentales en topología algebraica y geometría combinatoria que permiten representar espacios topológicos de manera discreta. La idea principal consiste en descomponer un objeto geométrico complejo, como una superficie, en piezas elementales llamadas simplices, que generalizan el concepto de puntos, segmentos, triángulos y sus análogos en dimensiones superiores.

Este tipo de estructura resulta especialmente útil porque permite traducir preguntas geométricas y topológicas en problemas algebraicos y combinatorios. Por ejemplo, una superficie compacta puede ser modelada como un complejo simplicial finito, y sobre dicha representación es posible definir y calcular invariantes topológicos como la característica de Euler, que captura información esencial sobre la forma del espacio. Esta formalización será clave en capítulos posteriores.

Más aún, el estudio de complejos simpliciales nos proporciona una forma precisa de trabajar con triangulaciones y subdivisiones, herramientas necesarias para formular y demostrar resultados como el teorema de Riemann-Hurwitz desde un enfoque geométrico. Antes de abordar estas aplicaciones, se introduce a continuación las definiciones formales que estructuran esta teoría.

**Definición 2.1.11. (Complejo simplicial).** *Un complejo simplicial  $K$  es una colección finita de subconjuntos no vacíos de un conjunto finito de vértices  $V$ , que cumple:*

1. Si  $\sigma \in K$ , entonces cualquier subconjunto no vacío de  $\sigma$  también pertenece a  $K$ .
2. Ningún subconjunto propio de  $V$  está contenido en más de un conjunto  $\sigma \in K$ .

Después de establecer la estructura fundamental de un complejo simplicial, se puede caracterizar los elementos que lo conforman. En particular, los simplices de distintas dimensiones permiten describir la estructura combinatoria del espacio.

**Definición 2.1.12. (Símplice).** *Un símplice, simplex o  $n$ -simplex de dimensión  $n$  es un conjunto  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , donde los vértices  $v_i$  son afinmente independientes (que los vectores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$  son linealmente independientes) en un espacio euclidiano. La dimensión de un complejo simplicial  $K$  es la dimensión máxima de los simplices que lo componen [12].*

Geoméricamente, un símplice de dimensión  $n$  es la generalización de un triángulo en  $n$  dimensiones. Por ejemplo:

- Un conjunto con un solo vértice  $\{v_0\}$  es un símplice de dimensión 0, llamado vértice.
- Un conjunto con dos vértices  $\{v_0, v_1\}$ , unidos por un segmento, forma un símplice de dimensión 1, llamado arista.
- Tres vértices no colineales  $\{v_0, v_1, v_2\}$  forman un símplice de dimensión 2, es decir, un triángulo.
- Cuatro vértices no coplanares  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  generan un símplice de dimensión 3, es decir, un tetraedro.

En general, un s3mplice tiene dimensi3n  $n$  si contiene  $n + 1$  v3rtices afinmente independientes. Esto significa que ninguno de los v3rtices puede escribirse como combinaci3n afin de los otros: es decir, no est3n contenidos en un subespacio de dimensi3n menor. Por ejemplo, si tres puntos est3n sobre una misma recta, no forman un s3mplice de dimensi3n 2, sino que son afinmente dependientes y solo generan un s3mplice de dimensi3n 1 (una arista con un v3rtice adicional redundante).

Esta forma de calcular la dimensi3n nos permite determinar con precisi3n la estructura combinatoria del complejo. Dentro de un complejo simplicial, los s3mplices pueden contener subconjuntos propios llamados caras, lo que nos lleva a la siguiente definici3n.

**Definici3n 2.1.13. (Cara de un s3mplice).** Una cara de un s3mplice  $\sigma$  es cualquier subconjunto propio  $\tau \subseteq \sigma$ . Si  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ , se denomina una cara propiamente dicha [12].

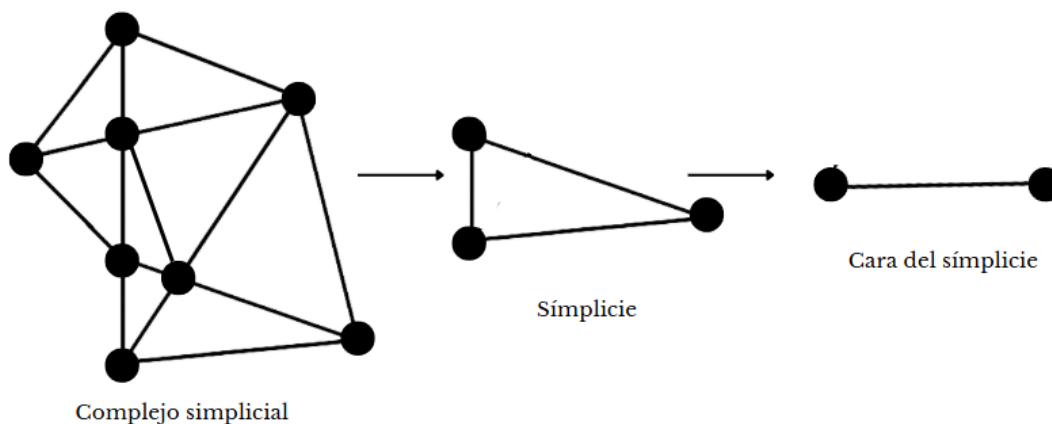


Figura 7: Ejemplo de un complejo simplicial y su estructura b3sica

La imagen anterior muestra un ejemplo concreto de un complejo simplicial bidimensional. En 3l se observan varios tri3ngulos (s3mplices de dimensi3n 2) que se ensamblan de forma coherente, compartiendo caras y v3rtices seg3n las reglas que definen un complejo simplicial. Cada tri3ngulo est3 formado por tres v3rtices y tres aristas; recordemos que una arista es simplemente un s3mplice de dimensi3n 1, es decir, un conjunto formado por dos v3rtices unidos por un segmento. A su vez, cada v3rtice es un s3mplice de dimensi3n 0. Esta descomposici3n permite representar objetos geom3tricos m3s complejos mediante combinaciones de elementos simples.

**Definici3n 2.1.14. (Realizaci3n geom3trica de un complejo simplicial).** Sea  $K$  un complejo simplicial abstracto. Su realizaci3n geom3trica  $|K|$  se define de la siguiente manera:

- Para cada s3mplice abstracto  $\sigma \in K$  de dimensi3n  $p$ , se toma una copia del s3mplice est3ndar  $p$ -dimensional:

$$\Delta^p = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^p x_i = 1 \right\}.$$

- Se identifican estas copias de símplices estándar de acuerdo con la estructura del complejo simplicial abstracto. Es decir, si un símplice abstracto  $\tau$  es una cara de otro símplice  $\sigma$ , entonces la copia correspondiente de  $\tau$  se identifica con la cara correspondiente de la copia de  $\sigma$ .

El espacio topológico resultante se denota por  $|K|$  y se llama realización geométrica del complejo simplicial abstracto  $K$  [12].

Este tipo de estructura es especialmente útil para modelar superficies, ya que permite reconstruir su forma global a partir de piezas elementales bien entendidas. Una de las aplicaciones clave de los complejos simpliciales es la construcción de triangulaciones, es decir, representaciones de superficies mediante uniones finitas de símplices que se ajustan entre sí de forma compatible. Este enfoque facilita tanto la visualización como el estudio algebraico y topológico de las superficies, permitiendo definir y calcular invariantes como la característica de Euler de manera puramente combinatoria.

**Definición 2.1.15. (Triangulación de una superficie de Riemann).** Una triangulación de una superficie de Riemann  $S$  consiste en una colección finita de triángulos (es decir, copias del triángulo estándar en  $\mathbb{R}^2$ ) pegados entre sí por sus lados de forma que:

- (i) La unión de todos los triángulos es homeomorfa a  $S$ ,
- (ii) Dos triángulos cualesquiera se intersectan solo en un vértice común, una arista común o no se intersectan,
- (iii) Cada lado de un triángulo es identificado con exactamente un lado de otro triángulo.

En esta triangulación, los vértices, aristas y caras del complejo simplicial corresponden a puntos, curvas y regiones de la superficie, respectivamente [10].

Las triangulaciones permiten trabajar con superficies desde una perspectiva puramente combinatoria, facilitando el análisis mediante herramientas discretas. Además, ofrecen un marco concreto para definir mapeos continuos entre superficies y estudiar cómo se comportan bajo subdivisiones o refinamientos.

**Teorema 2.1.1. (Teorema de existencia de Triangulación).** Sea  $X$  una superficie topológica compacta (con o sin borde). Entonces existe un complejo simplicial finito  $K$  tal que su realización geométrica  $|K|$  es homeomorfa a  $X$ . Es decir, toda superficie compacta admite una triangulación [15].

La demostración detallada de este teorema es extensa y requiere herramientas técnicas de la topología geométrica que exceden el propósito de este trabajo. Por ello, se presenta únicamente un esquema general que permite visualizar los pasos clave del argumento, sin entrar en construcciones formales que no son centrales para los objetivos de esta exposición. Una demostración completa y rigurosa puede consultarse en el libro de Edwin Moise [15, p. 60], donde se desarrolla el teorema de triangulación para superficies topológicas compactas.

*Demostración.* La demostración se puede resumir de la siguiente manera:

- Sea  $X$  un espacio topológico compacto, conexo, y de dimensión  $n$ . Por definición, cada punto  $x \in X$  tiene una vecindad abierta  $U_x$  homeomorfa a un disco abierto del plano  $\mathbb{R}^n$ .
- Como  $X$  es compacto, existe un recubrimiento finito por abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$  tales que cada  $U_i$  es homeomorfo a un disco abierto del plano, y las cerraduras  $\overline{U_i}$  están contenidas en el interior de alguna carta.
- Se construye, por pasos, una sucesión de complejos simpliciales  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m$  tales que:
  - Cada  $|K_i|$  está contenido en la unión de los abiertos  $U_1, \dots, U_i$ ,
  - Cada complejo  $K_i$  consiste en un número finito de triángulos,
  - Las intersecciones  $U_i \cap U_j$  son tratadas cuidadosamente para que las triangulaciones sean compatibles entre sí.
  - Para asegurar la compatibilidad local, se elige la triangulación de modo que cada triángulo del complejo simplicial quede completamente contenido dentro de una única carta local  $U_i$ . De esta forma, los triángulos que son comunes a dos cartas distintas quedan contenidos en la intersección  $U_i \cap U_j$ , lo que garantiza que las funciones de transición entre cartas sean holomorfas sobre cada triángulo.
- Se asegura que la frontera combinatoria de cada complejo simplicial esté alineada con la estructura topológica del espacio  $X$ , de forma que las uniones sean coherentes.
- Al ser finita la cantidad de abiertos utilizados, la construcción termina en un número finito de pasos. Se obtiene un complejo simplicial finito  $K$  tal que  $|K| \cong X$ , es decir, el espacio topológico es homeomorfo a la realización geométrica del complejo simplicial.

□

La utilidad del resultado anterior radica en que muchas de las superficies de interés en geometría y análisis complejo, en particular, las superficies de Riemann, poseen una estructura topológica que satisface las condiciones del teorema. Es decir, toda superficie de Riemann es, en particular, un espacio topológico compacto y de dimensión 2. Esto permite aplicar directamente el teorema de triangulación para deducir que estas superficies también pueden representarse mediante complejos simpliciales. Esta observación nos conduce al siguiente corolario.

**Corolario 2.1.2. (Triangulación de superficies de Riemann).** *Cualquier superficie de Riemann puede ser representada por una triangulación [10].*

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie de Riemann. Por definición,  $S$  es un espacio topológico de dimensión 2 que admite una estructura de variedad compleja (es decir, un atlas de cartas con funciones de transición holomorfas). En particular, la estructura topológica subyacente de  $S$  es la de un espacio topológico compacto, conexo y de dimensión 2.

Por el teorema anterior, existe un complejo simplicial finito  $K$  tal que su realización geométrica  $|K|$  es homeomorfa a  $S$  (como espacio topológico). Por tanto,  $S$  puede representarse mediante una triangulación.  $\square$

Un caso especial de triangulación de superficies ocurre en la esfera  $S^2$ , cuya estructura puede descomponerse en símlices de dimensión dos de diversas formas. La siguiente construcción ejemplifica este proceso.

**Ejemplo 2.1.4. (Triangulación de la esfera con 4 vértices).** *Consideremos la esfera  $S^2$ . Una manera simple de triangularla es mediante la frontera de un tetraedro en  $\mathbb{R}^3$ . Esta triangulación puede describirse como un complejo simplicial de dimensión 2 que contiene:*

- *Cuatro vértices:  $v_0, v_1, v_2, v_3$ .*
- *Seis aristas:  $[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_3]$ .*
- *Cuatro caras:  $[v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_3]$ .*

*Cada cara triangular corresponde a una de las caras del tetraedro, y las aristas y vértices son compartidos entre estas de forma coherente. Este complejo simplicial puro cubre toda la superficie del tetraedro, que es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .*

*Este ejemplo es útil para ilustrar cómo una superficie puede modelarse como un complejo simplicial finito, lo que permite aplicar herramientas combinatorias y topológicas en su estudio. Más adelante se utilizará esta triangulación para definir conceptos como el género y la característica de Euler. Otros ejemplos más visuales se pueden observar en la siguiente figura.*

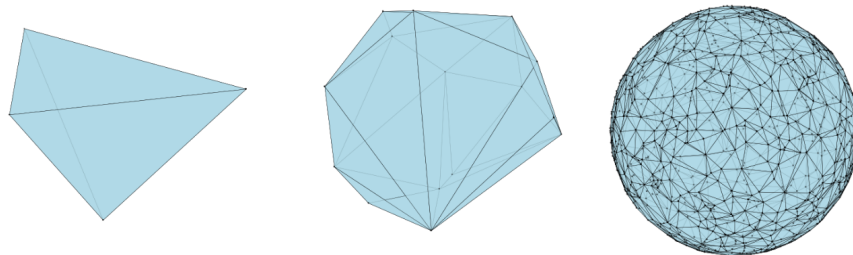


Figura 8: Ejemplo de triangulaciones de una esfera

La construcción anterior muestra cómo una superficie compacta como la esfera puede ser representada mediante un número finito de vértices, aristas y caras organizadas en forma de un complejo simplicial. Esta idea puede generalizarse: no solo la esfera, sino toda superficie de Riemann compacta admite una triangulación finita que respete su estructura topológica. A continuación, se enuncia formalmente este resultado.

**Teorema 2.1.3. (Triangulación de superficies compactas).** *Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta. Entonces existe un complejo simplicial finito  $K$  tal que  $|K|$  es homeomorfo a  $S$ ; es decir, toda superficie de Riemann compacta admite una triangulación finita [15].*

Toda superficie de Riemann es, por definición, una superficie topológica de dimensión dos que localmente es homeomorfa a un abierto del plano  $\mathbb{R}^2$ . Además, si la superficie es compacta, cualquier recubrimiento por abiertos admite un subrecubrimiento finito. Esto permite cubrir la superficie con un número finito de cartas locales que se ven como discos planos. En cada una de estas cartas es posible trazar subdivisiones triangulares, y al unirlos cuidadosamente en las zonas de intersección, se obtiene una descomposición global de la superficie en un número finito de triángulos. Por lo tanto, toda superficie de Riemann compacta admite una triangulación finita; para una prueba más formal, recomiendo leer [10, §2.3].

Una vez establecida la existencia de una triangulación finita para cualquier superficie de Riemann compacta, es posible asociar a dicha superficie ciertas cantidades topológicas que dependen del número de vértices, aristas y caras de la triangulación. Entre estas se encuentran el género y la característica de Euler, que permiten describir la estructura global de la superficie de manera combinatoria. Estos conceptos serán introducidos y analizados en la siguiente sección.

### 2.1.3. Género y característica de Euler

El estudio del género de una superficie y su característica de Euler son herramientas fundamentales en la topología y geometría de superficies. Ambos invariantes describen propiedades de superficies cerradas y orientables, particularmente en el caso de las superficies de Riemann. Estas nociones permiten distinguir superficies entre sí y relacionan su estructura topológica con otras construcciones utilizadas en geometría compleja. En el contexto de este trabajo, su relevancia radica en que dichos invariantes pueden expresarse en términos de datos combinatorios obtenidos a partir de una triangulación, lo que hace posible establecer fórmulas que los vinculen con el comportamiento de ciertos tipos de aplicaciones entre superficies, especialmente las superficies de Riemann [10].

**Definición 2.1.16. (Género).** *Sea  $S$  una superficie compacta, orientable y conexa. El género  $g$  de  $S$  es el número máximo de curvas cerradas simples, disjuntas y no contractibles que se pueden trazar en  $S$ , de modo que al removerlas la superficie resultante permanezca conexa [10].*

La definición formal del género se relaciona con el concepto de homología. Las clases de curvas cerradas simples que no son deformables a un punto generan el primer grupo de homología de la superficie  $H_1(S, \mathbb{Z})$ , el cual es un módulo libre abeliano de rango  $2g$ . Por tanto, el género se puede expresar algebraicamente como:

$$g(S) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Z}} H_1(S, \mathbb{Z}).$$

Esta formulación establece un puente entre la topología geométrica y el álgebra homológica [10].

El género de una superficie puede interpretarse intuitivamente como la cantidad de agujeros que tiene. Esta idea se visualiza fácilmente al comparar superficies comunes: una esfera no tiene agujeros,

un toro tiene uno, un doble toro tiene dos, y así sucesivamente. Aunque esta descripción es informal, permite desarrollar una intuición clara sobre cómo el género distingue superficies entre sí. En el caso de superficies de Riemann compactas, el género es un invariante topológico que permanece constante bajo deformaciones continuas.

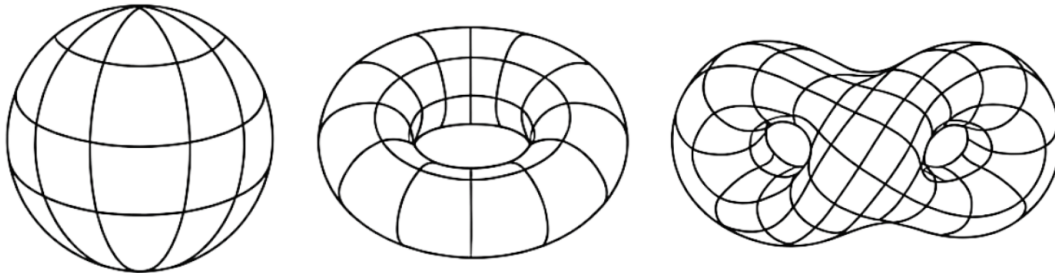


Figura 9: Superficies con género 0, 1 y 2, respectivamente

El género es una cantidad que no depende de la manera en que se represente o triangule la superficie, sino que permanece invariante bajo homeomorfismos. Esto significa que dos superficies de Riemann compactas que son topológicamente equivalentes tienen el mismo género, lo que lo convierte en una herramienta útil para clasificar superficies desde el punto de vista topológico.

La característica de Euler es otro invariante topológico asociado a superficies compactas, que puede calcularse directamente a partir de una triangulación. A diferencia del género, que está relacionado con la cantidad de curvas cerradas que no desconectan la superficie, la característica de Euler se define mediante una fórmula combinatoria basada en el número de vértices, aristas y caras del complejo simplicial. Esta cantidad entera refleja la estructura global de la superficie y permite expresar relaciones entre diferentes superficies mediante fórmulas que conectan su topología con el comportamiento de ciertas aplicaciones [12].

**Definición 2.1.17. (Característica de Euler).** Sea  $K$  un complejo simplicial que representa una superficie compacta  $S$ . La característica de Euler de  $K$  está dada por:

$$\chi(S) = V - E + F,$$

donde  $V$ ,  $E$  y  $F$  son el número de vértices, aristas y caras, respectivamente [12].

Aunque la definición de la característica de Euler depende de una triangulación particular de la superficie, su valor no varía al cambiar de triangulación. Es decir, si se consideran dos triangulaciones distintas de una misma superficie, ambas producirán el mismo valor de  $\chi$ . Esta propiedad se debe a que es posible pasar de una triangulación a otra mediante subdivisiones elementales que no alteran la cantidad total  $V - E + F$ . Por lo tanto, la característica de Euler es un invariante topológico bien definido de la superficie, y puede utilizarse para establecer relaciones entre diferentes representaciones de una misma estructura topológica [15].

**Definición 2.1.18. (Conector topológico).** *Un conector topológico es una construcción que permite unir dos superficies topológicas mediante la operación de suma conexa. Consiste en eliminar un disco abierto de cada superficie y luego identificarlas a lo largo de sus fronteras circulares mediante un homeomorfismo. El espacio resultante es una nueva superficie conectada, cuya topología refleja la combinación de ambas [12].*

Esta construcción permite combinar dos superficies en una sola, enlazándolas mediante un cilindro delgado que actúa como túnel entre ambas. Desde el punto de vista topológico, el conector introduce una conexión que no altera localmente la estructura de las superficies, pero sí modifica su topología global, disminuyendo la característica de Euler en dos unidades [12].

**Ejemplo 2.1.5. (Característica de Euler de una esfera.)** *Consideremos la esfera  $S^2$ . En la Figura 8 se presentan tres distintas triangulaciones posibles de esta superficie.*

*Cada una de estas triangulaciones corresponde a una descomposición simplicial diferente, con diferente número de vértices  $V$ , aristas  $E$  y caras triangulares  $F$ . A continuación se muestran sus valores, así como la característica de Euler asociada a cada una:*

- *Primera triangulación:  $V = 4, E = 6, F = 4 \Rightarrow \chi = 4 - 6 + 4 = 2.$*
- *Segunda triangulación:  $V = 15, E = 39, F = 26 \Rightarrow \chi = 15 - 39 + 26 = 2.$*
- *Tercera triangulación:  $V = 900, E = 2694, F = 1796 \Rightarrow \chi = 900 - 2694 + 1796 = 2.$*

*En todos los casos se obtiene  $\chi(S) = 2$ , lo cual es coherente con el hecho de que todas estas triangulaciones representan a la esfera. La característica de Euler es un invariante topológico: su valor no depende de la triangulación particular, sino de la topología de la superficie subyacente.*

*Este ejemplo ilustra cómo distintas descomposiciones finitas de una misma superficie pueden usarse para estudiar propiedades topológicas invariantes.*

La aparición constante del valor  $\chi = 2$  en todos los ejemplos anteriores no es una coincidencia. Este número refleja una propiedad topológica fundamental de la esfera, independiente de la forma particular en que se triangule. En general, existe una relación profunda entre la característica de Euler de una superficie y su tipo topológico, específicamente su género. Para superficies cerradas, compactas y orientables, dicha relación está expresada por la siguiente fórmula:

$$\chi = 2 - 2g,$$

donde  $g$  representa el género de la superficie, que corresponde al número máximo de curvas simples cerradas disjuntas que se pueden trazar en ella sin desconectarla. A continuación, se presenta el resultado teórico que fundamenta esta expresión [10].

**Teorema 2.1.4. (Característica de Euler para superficies orientables).** *Sea  $S$  una superficie cerrada, compacta y orientable de género  $g$ . Entonces su característica de Euler está dada por la fórmula:*

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Esta fórmula puede comprenderse desde una perspectiva combinatoria, partiendo del hecho de que toda superficie cerrada y orientable admite una triangulación finita. Supongamos que se tienen dos superficies trianguladas  $M$  y  $N$ , con características de Euler  $\chi(M)$  y  $\chi(N)$  respectivamente. Si se construye una nueva superficie  $S = M \# N$  mediante la suma conexa esto es, eliminando un disco de cada superficie y uniendo ambas a lo largo de las fronteras circulares resultantes, entonces la cantidad total de vértices, aristas y caras de la triangulación se ve modificada.

Entonces, al eliminar un disco de cada superficie, se pierde una cara por cada una (es decir, dos en total). Además, al pegar las fronteras, se identifican ciertos vértices y aristas, lo cual reduce el número total de vértices y aristas del complejo combinado. Este proceso produce una disminución neta de exactamente 2 en la característica de Euler, es decir:

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2.$$

Si se aplica este procedimiento sucesivamente  $g$  veces, comenzando con una esfera  $S^2$  (que tiene  $\chi = 2$ ) y añadiendo  $g$  conectores topológicos (cada uno disminuye la característica en 2), se obtiene una superficie de género  $g$  con:

$$\chi = 2 - 2g.$$

Este razonamiento muestra que el género de una superficie afecta directamente la estructura combinatoria de cualquier triangulación sobre ella. Aunque los valores individuales de  $V$ ,  $E$  y  $F$  dependen de la elección de la triangulación, la característica de Euler permanece invariante y cumple esta relación universal para toda superficie orientable cerrada.

Este resultado permite determinar el género de una superficie a partir de cualquier triangulación que se le haga, simplemente calculando  $\chi = V - E + F$  y despejando  $g$ . Por ejemplo, en el caso de una esfera, al sustituir la característica de Euler y despejar  $g$ , obtenemos que el grado de esta sería 0; este mismo comportamiento puede observarse con el toro.

**Ejemplo 2.1.6. (Toro  $T$ ).** *El toro tiene característica de Euler  $\chi(T) = 0$ . Por lo tanto, su género es:*

$$g = 1 - \frac{\chi}{2} = 1 - 0 = 1.$$

*Esto refleja la presencia de una única asa en el toro.*

En topología, un invariante es una propiedad de un espacio que permanece constante bajo homeomorfismos. Es decir, si dos espacios topológicos son equivalentes desde el punto de vista topológico, entonces comparten los mismos invariantes. Estas cantidades permiten distinguir clases de espacios, detectar diferencias estructurales y formular resultados generales con independencia de la representación específica del objeto. En el estudio de superficies, los invariantes topológicos como el género o la característica de Euler juegan un papel esencial, ya que codifican información global sobre la forma y la conectividad del espacio.

La característica de Euler posee varias propiedades fundamentales. Es un invariante topológico, es decir, no cambia bajo homeomorfismos, lo que la hace ideal para clasificar superficies.

**Teorema 2.1.5. (Invariancia de la característica de Euler).** *Sea  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos finitos con homotopía entre sí. Entonces la característica de Euler es invariante bajo homotopía, es decir,*

$$\chi(X) = \chi(Y).$$

La demostración de este resultado se basa en el hecho de que toda superficie compacta admite una triangulación finita, y que cualquier par de triangulaciones de una misma superficie pueden relacionarse mediante una sucesión finita de transformaciones locales llamadas subdivisiones elementales. Estas operaciones permiten pasar de una triangulación a otra agregando o reordenando vértices, aristas y caras sin alterar la topología del espacio, esto puede leerse más a detalle en [15, p. 148].

Por ejemplo, una subdivisión puede consistir en dividir una cara triangular en tres subtriángulos al insertar un nuevo vértice en su interior, o en subdividir una arista al insertar un nuevo vértice en ella. Aunque estas modificaciones cambian los valores individuales de  $V$ ,  $E$  y  $F$ , lo hacen de manera tal que la expresión combinatoria  $V - E + F$  se conserva. Esto puede comprobarse caso por caso para cada tipo de subdivisión elemental.

Como consecuencia, la característica de Euler obtenida a partir de una triangulación no depende de la elección particular de la misma. Y como los homeomorfismos preservan la estructura topológica del espacio, si dos superficies compactas son homeomorfas, entonces cualquier triangulación de una se puede transferir a la otra mediante el homeomorfismo, y se obtiene el mismo valor de  $\chi$ .

Por lo tanto, la característica de Euler es una cantidad que permanece constante bajo equivalencias topológicas, y constituye un verdadero invariante topológico de superficies compactas.

En el contexto de las superficies de Riemann, estos invariantes desempeñan un papel crucial. Por ejemplo, el espacio de funciones meromorfas sobre una superficie y los divisores asociados dependen del género, como se establece en el teorema de Riemann-Roch [14]. Además, los mapeos ramificados entre superficies de Riemann están estrechamente relacionados con la característica de Euler y el género, como se describe en el teorema de Riemann-Hurwitz [7].

#### 2.1.4. Mapeos ramificados

El estudio de mapeos holomorfos entre superficies de Riemann es una herramienta fundamental en geometría compleja, y los mapeos ramificados constituyen una clase particularmente rica, donde el comportamiento local de la función no siempre es inyectivo. Estos mapeos permiten entender cómo se relacionan globalmente dos superficies complejas a través de la teoría de recubrimientos y singularidades. Son, además, indispensables para la formulación y demostración del teorema de Riemann-Hurwitz, ya que en dicho contexto se cuantifica cómo la topología (a través de la característica de Euler) se ve afectada por la presencia de puntos críticos. A continuación formalizamos las nociones básicas asociadas a estos mapeos [7].

Antes de abordar la definición de mapa ramificado, es esencial introducir el concepto de aplicación bi-holomorfa, ya que servirá como criterio local para identificar la ramificación. Las aplicaciones bi-holomorfas son aquellas funciones holomorfas que, además de ser biyectivas, poseen inversas también holomorfas. En otras palabras, son isomorfismos en la categoría de variedades complejas. Esta noción es central en el estudio de superficies de Riemann, pues permite comparar localmente dichas superficies mediante coordenadas complejas. Cuando un mapa entre superficies de Riemann deja de ser localmente bi-holomorfo, es decir, cuando falla en ser un isomorfismo holomorfo local, decimos que ocurre un fenómeno de ramificación. Esta descripción será formalizada a continuación al definir el concepto de mapa ramificado [14].

**Definición 2.1.19. (Mapa ramificado).** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa holomorfo entre superficies de Riemann. Diremos que  $f$  es un mapa ramificado si existe al menos un punto  $x \in X$  donde  $f$  no es localmente holomorfo. La imagen  $y = f(x)$  se denomina un punto de ramificación, y el conjunto de estos puntos se llama el locus de ramificación [7].*

La definición de mapa ramificado establece el criterio por el cual se identifica formalmente la presencia de ramificación: un mapa se considera ramificado si existen puntos donde no es localmente un isomorfismo holomorfo. Esta condición será fundamental en la teoría de recubrimientos ramificados, y se reflejará en la forma en que se modifican los invariantes topológicos globales de las superficies bajo dichos mapeos.

**Definición 2.1.20. (Recubrimiento).** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapeo continuo y suprayectivo entre espacios topológicos. Decimos que  $f$  es un recubrimiento si para todo  $y \in Y$  y cada  $x_i \in f^{-1}(y)$ , existe un entorno abierto  $U_y \subset Y$  de  $y$  tal que  $f^{-1}(U_y)$  es la unión disjunta de abiertos  $V_{x_i} \subset X$ , cada uno conteniendo a  $x_i$ , y la restricción  $f : V_{x_i} \rightarrow U_y$  es un homeomorfismo [12].*

Esta definición describe una situación en la que el espacio  $X$  se comporta localmente como múltiples copias del espacio  $Y$ , dispuestas de manera disjunta. Intuitivamente, cerca de cada punto  $y \in Y$ , la preimagen  $f^{-1}(U_y)$  se fragmenta en varios abiertos disjuntos  $V_{x_i} \subset X$ , cada uno de los cuales es enviado de forma homeomorfa a  $U_y$ . Esto permite estudiar el espacio total  $X$  a partir de la base  $Y$ , y es fundamental para entender cómo se construyen superficies más complejas a partir de otras más simples mediante recubrimientos.

**Definición 2.1.21..** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un recubrimiento (posiblemente ramificado) entre superficies de Riemann compactas  $X$  y  $Y$ . Sea  $p_1 \in X$  y sea  $f(p_1) = p_2$ . El índice de ramificación de  $f$  en  $p_1$  es el entero positivo  $e_{p_1}(f)$  tal que existe una vecindad abierta  $U$  de  $p_1$  en la que  $p_2$  tiene una única preimagen, es decir,*

$$f^{-1}(p_2) \cap U = \{p_1\},$$

*y para todos los demás puntos  $z \in f(U)$  se cumple que*

$$|f^{-1}(z) \cap U| = e_{p_1}(f).$$

El índice de ramificación nos permite medir de forma precisa el grado de fallo de la bi-holomorfía local. Cuando  $e_x = 1$ , el mapa  $f$  es localmente inyectivo y su derivada no se anula; en consecuencia, el comportamiento es localmente holomorfo. En cambio, cuando  $e_x > 1$ , la función presenta una ramificación de orden  $e_x$ , indicando que la estructura local se ha modificado de forma significativa respecto a un recubrimiento regular [7].

Este valor entero captura cuántas veces el dominio se enrolla localmente sobre la imagen en torno al punto en cuestión, y cuantifica la singularidad en términos holomorfos. El índice de ramificación cumple entonces un papel central en la contabilidad global de estos comportamientos irregulares, particularmente en el contexto del teorema de Riemann-Hurwitz, donde contribuye de forma explícita a la corrección topológica en la característica de Euler [14].

**Definición 2.1.22. (Índice de ramificación).** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa holomorfo entre superficies de Riemann. Sea  $p \in X$  un punto. Se define el índice de ramificación  $e_p$  de  $f$  en  $p$  como el entero positivo tal que existen coordenadas locales  $(U, z)$  alrededor de  $p$  en  $X$  y  $(V, w)$  alrededor de  $f(p)$  en  $Y$ , con  $f(U) \subseteq V$ , bajo las cuales  $f$  se expresa localmente como  $w = z^{e_p}$ . El entero  $e_p \geq 1$  es único y mide el grado de no-inyectividad de  $f$  en  $p$  [14].

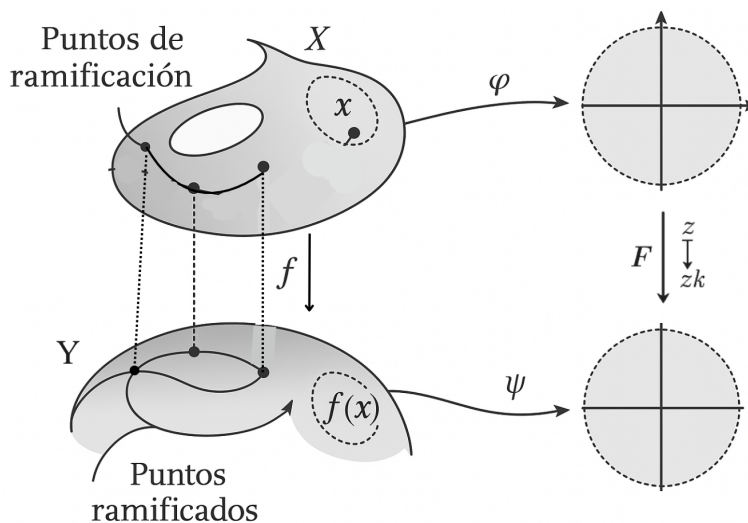


Figura 10: Estructura local de un mapa ramificado entre superficies de Riemann [7]

Este tipo de mapeos generaliza la noción de recubrimiento holomorfo permitiendo comportamientos singulares en ciertos puntos. En particular, un mapa holomorfo que no es localmente holomorfo en un punto puede, en coordenadas adecuadas, adoptar la forma  $f(z) = z^{k_x}$  con  $k_x \geq 2$ , lo que constituye el prototipo de una ramificación local. Este fenómeno ocurre precisamente cuando la derivada holomorfa se anula en un punto, y el mapa deja de ser localmente invertible. La expresión local  $z \mapsto z^k$  muestra cómo varias hojas de la superficie de partida se pegan en una sola imagen. El número  $k_x$  indica cuántas veces se enrolla la superficie alrededor del punto imagen, y representa una medida local de la singularidad [7].

**Ejemplo 2.1.7..** Un ejemplo local de mapa ramificado es la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = z^4.$$

Este mapa tiene un punto crítico en  $z = 0$ , ya que su derivada  $f'(z) = 4z^3$  se anula en ese punto. En coordenadas locales,  $f$  se comporta como un recubrimiento ramificado: para un punto  $w$  cercano

a cero, la ecuación  $z^4 = w$  tiene cuatro soluciones distintas. Esto significa que, salvo en  $z = 0$ , el mapa es localmente cuatro-a-uno: hay cuatro preimágenes distintas de cada punto cercano a la imagen.

Geoméricamente, se puede visualizar como si el plano se enrollara cuatro veces alrededor del origen, de modo que cuatro sectores disjuntos en el dominio se envían a la misma región en la imagen. El punto  $z = 0$  es el único lugar donde esta estructura se “colapsa” y la multiplicidad local es mayor a uno.

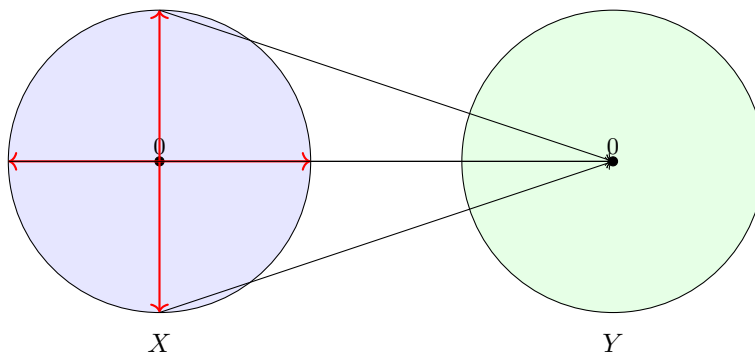


Figura 11: Representación local de un mapa ramificado con índice  $k = 4$

Una noción fundamental en el estudio de mapeos ramificados entre superficies de Riemann es la del grado del mapa. Esta cuantifica, en términos globales, cuántas veces la superficie fuente cubre a la superficie destino bajo el mapa holomorfo. Para formalizar esta idea, introducimos a continuación la definición del grado de una cubierta holomorfa.

**Definición 2.1.23. (Grado de una cubierta).** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. El grado de la cubierta  $f$ , denotado por  $\deg(f)$  o  $d$ , se define como el número de puntos de la fibra  $f^{-1}(q)$ , contados con multiplicidad, para un punto regular  $q \in Y$ , es decir, un punto que no es imagen de un punto crítico.

Más precisamente, si  $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\}$  y  $e_{p_i}$  denotan la multiplicidad de ramificación en  $p_i$ , entonces:

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^r e_{p_i}.$$

Este número es constante para todo  $q \in Y$  fuera del conjunto finito de imágenes de puntos críticos, y representa el número total de hojas de la cubierta [14].

**Teorema 2.1.6..** En coordenadas locales alrededor de un punto crítico  $x$ , el mapa se puede escribir como

$$f(z) = z^{k_x},$$

donde  $k_x \geq 2$  es el índice de ramificación de  $f$  en  $x$  [7, p. 51].

**Definición 2.1.24..** Decimos que un punto  $p \in X$  es un punto de ramificación si se cumple que  $e_p > 1$ . En tal caso,  $f(p)$  se denomina un punto ramificado [14].

Es importante distinguir entre un punto de ramificación y un punto ramificado. Un punto de ramificación es un punto  $p \in X$  en la superficie de partida donde el mapa  $f : X \rightarrow Y$  no es localmente bi-holomorfo, es decir, el índice de ramificación  $e_p > 1$ . En términos geométricos, es un punto donde el mapa deja de comportarse como un recubrimiento local trivial.

Por otro lado, un punto ramificado es la imagen  $f(p) \in Y$  de un punto de ramificación. Estos puntos corresponden a los valores en la superficie de llegada donde se observa que la cantidad de preimágenes disminuye, reflejando la presencia de singularidad estructural en la correspondencia entre las superficies. Se trata del lugar donde se percibe el efecto de la ramificación desde el codominio. Por tanto, los puntos de ramificación están en la superficie de dominio y los puntos ramificados están en la superficie imagen.

A continuación se establece un resultado crucial sobre el comportamiento del número de preimágenes fuera del locus de ramificación.

**Teorema 2.1.7..** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa holomorfo de grado  $d$  entre superficies de Riemann compactas. Para todo punto  $y \in Y$  que no sea imagen de un punto crítico, la preimagen  $f^{-1}(y)$  consiste exactamente en  $d$  puntos distintos [14].

*Demostración.* Por definición, el grado de un mapa holomorfo  $f : X \rightarrow Y$  entre superficies de Riemann compactas es el número entero  $d$  tal que, para casi todo punto  $y \in Y$ , la suma de los índices de ramificación en la preimagen cumple:

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} e_x = d.$$

El conjunto de puntos  $y \in Y$  que son imágenes de puntos críticos (es decir, donde  $e_x > 1$  para algún  $x \in f^{-1}(y)$ ) forma un conjunto finito, ya que el conjunto de puntos críticos es finito por compacidad (como se demuestra a continuación).

Sea  $y \in Y$  un punto que no es imagen de un punto crítico. Entonces, para todo  $x \in f^{-1}(y)$ , se tiene  $e_x = 1$ . La fórmula anterior se convierte entonces en:

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 = d,$$

lo cual implica que la fibra  $f^{-1}(y)$  contiene exactamente  $d$  puntos distintos.

Además, como  $e_x = 1$  en cada uno de estos puntos, se sigue que  $f$  es localmente un isomorfismo en cada vecindad de  $x \in f^{-1}(y)$ , es decir, no hay multiplicidad ni ramificación en esas preimágenes.  $\square$

Este resultado garantiza que, fuera del conjunto de puntos donde el mapa pierde su comportamiento localmente holomorfo, la aplicación actúa como un recubrimiento regular de grado  $d$ : cada punto en la superficie objetivo tiene exactamente  $d$  preimágenes distintas. Esta regularidad en la

cardinalidad de las preimágenes es esencial para entender el comportamiento global del mapa, y justifica el uso del lenguaje de recubrimiento en el contexto de funciones holomorfas finitas [14].

En el resultado anterior se asumió que el punto considerado no es imagen de un punto crítico. Para que esta suposición sea manejable desde el punto de vista global, es necesario asegurar que los puntos críticos, es decir, aquellos donde el mapa no es localmente holomorfo, forman un conjunto suficientemente controlado. A continuación se demuestra que este conjunto es siempre finito cuando la superficie de partida es compacta, lo cual justifica plenamente el análisis previo y permite aplicar razonamientos topológicos y combinatorios sin restricciones adicionales [10].

**Teorema 2.1.8. (Finitud del conjunto de ramificación).** *Si  $X$  es una superficie de Riemann compacta y  $f : X \rightarrow Y$  es un mapa holomorfo no constante, entonces el conjunto de puntos críticos de  $f$  es finito [10].*

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa holomorfo entre superficies de Riemann compactas. En coordenadas locales,  $f$  se comporta como una función holomorfa  $f(z)$  de una variable compleja. Los puntos críticos son aquellos donde la derivada  $f'(z)$  se anula.

Cada carta local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  induce una función  $f \circ \varphi^{-1}$ , cuya derivada se anula en un conjunto discreto de puntos. Como los ceros de una función holomorfa no constante son aislados, en cada carta solo hay un número finito de puntos críticos.

La compacidad de  $X$  implica que se puede cubrir con un número finito de cartas, y por tanto, la unión de todos los puntos críticos en esas cartas es finita.  $\square$

Este teorema establece que, en el caso en que la superficie de partida sea compacta, los puntos donde el mapa pierde su comportamiento localmente holomorfo son necesariamente en número finito. Esta propiedad es fundamental, ya que permite tratar la ramificación como un fenómeno puntual, localizado en un subconjunto discreto de la superficie, lo cual simplifica sustancialmente el análisis global.

Una vez establecidas las propiedades fundamentales de los mapeos ramificados, es útil considerar ejemplos concretos que ilustren los distintos comportamientos posibles de estos mapeos. En particular, examinaremos modelos locales y globales donde la estructura de ramificación es completamente explícita. Estos ejemplos no solo permiten visualizar el fenómeno, sino que también proporcionan casos prototípicos sobre los cuales se construyen argumentos generales en la teoría de recubrimientos ramificados y en la formulación del teorema de Riemann-Hurwitz [7].

**Ejemplo 2.1.8..** *Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  el mapa  $f(z) = z^2$ . Este mapa es un recubrimiento no ramificado sobre  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , pero presenta ramificación en  $z = 0$ . La preimagen de cualquier  $y \neq 0$  está compuesta por dos puntos, mientras que la preimagen de 0 es un punto con multiplicidad dos. Este ejemplo permite visualizar con claridad el comportamiento de la función cerca del punto de ramificación y sirve como modelo local para comprender situaciones más generales [14].*

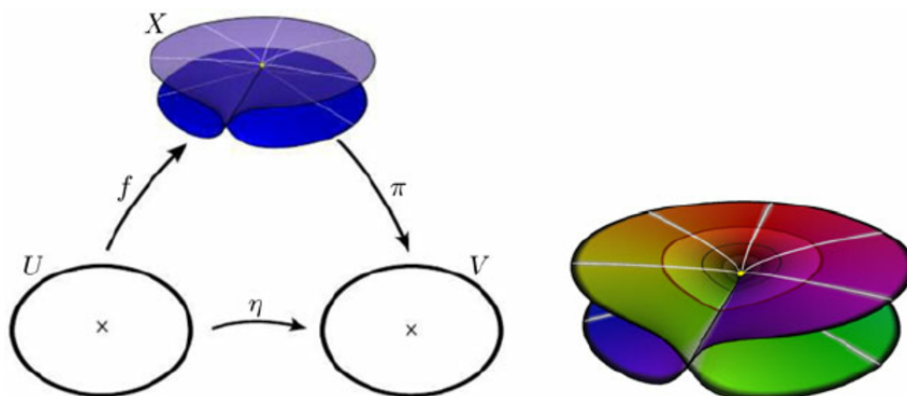


Figura 12: Mapa de recubrimiento no ramificado en  $f(z) = z^2$  [17]

**Ejemplo 2.1.9..** Sea  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dado por  $f(z) = z^d$ . Este es un mapa holomorfo de grado  $d$  con dos puntos críticos en  $z = 0$  y  $z = \infty$ , ambos de índice  $d$ , y sin ramificación en el resto del dominio. Esta construcción ejemplifica un caso global de ramificación total en dos puntos, ampliamente utilizado en el análisis de cubiertas [14].

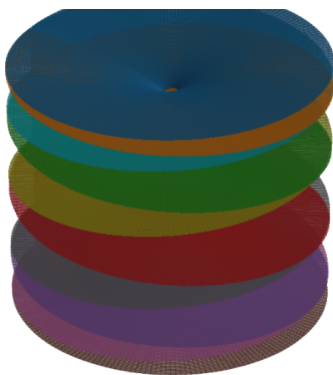


Figura 13: Recubrimiento de grado  $d$  con ramificación total en  $0$  y  $\infty$

Al estudiar el comportamiento global de un mapa holomorfo entre superficies de Riemann, resulta útil contar con estructuras discretas que permitan controlar cómo se distribuyen los puntos críticos y su imagen. En particular, es conveniente asegurar que los valores de ramificación estén adecuadamente representados dentro de una descomposición finita de la superficie. En este contexto, la siguiente construcción permite incorporar los puntos críticos como vértices de una triangulación adecuada de la superficie objetivo [10].

**Lema 2.1.9. (Triangulación compatible con la ramificación).** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un recubrimiento (posiblemente ramificado) entre superficies de Riemann compactas. Entonces existe una triangulación finita  $T_Y$  de  $Y$  tal que todos los valores críticos  $f(p)$ , con  $p \in X$  punto crítico de  $f$ , son vértices de  $T_Y$ . En consecuencia, la preimagen  $f^{-1}(T_Y)$  define una triangulación  $T_X$  de  $X$  que respeta la estructura ramificada del mapa [10].

*Demostración.* Como  $Y$  es una superficie de Riemann compacta, admite una triangulación finita. Sea  $B = f(\text{Crit}(f))$  el conjunto de valores críticos de  $f$ , el cual es finito. Se puede entonces refinar la triangulación de  $Y$  para que todos los puntos de  $B$  sean vértices. Denotemos esta triangulación refinada por  $T_Y$ .

Dado que  $f$  es finito, la preimagen de cada cara de  $T_Y$  se descompone en un número finito de regiones conexas en  $X$ , y en coordenadas locales alrededor de un punto crítico  $p \in X$ , el mapa  $f$  se comporta como  $z \mapsto z^e$  para algún  $e \geq 1$ . En esas coordenadas, es posible construir subdivisiones radiales que dividan los sectores en triángulos cuya imagen sea compatible con la triangulación original en  $Y$ .

Repitiendo este procedimiento en cada región de  $X$  correspondiente a una cara de  $T_Y$ , se obtiene una triangulación de  $X$ , denotada  $T_X$ , en la que los puntos críticos pertenecen al conjunto de vértices y que refleja adecuadamente la estructura local del mapa  $f$ .  $\square$

Este tipo de triangulación será fundamental en el desarrollo posterior, donde se buscará relacionar las características de Euler de ambas superficies mediante una fórmula que incorpore las contribuciones locales de la ramificación.

Este resultado asegura que es posible adaptar la triangulación de la superficie imagen para incorporar la información de la ramificación dentro de la estructura combinatoria. Esta compatibilidad permite inducir la triangulación por el mapa a la superficie del dominio, y usar la fórmula de Euler para obtener una relación explícita entre las características topológicas de ambas superficies, ajustada por los índices de ramificación [7].

El análisis realizado en este capítulo proporciona las herramientas básicas para comprender la estructura local y global de los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann cuando se permite la presencia de ramificación. La noción de mapa ramificado, junto con la definición precisa del índice de ramificación y la caracterización de las preimágenes fuera del locus crítico, permite interpretar estas funciones como recubrimientos modificados por una cantidad finita de singularidades controladas. Esta perspectiva será fundamental en los capítulos siguientes, donde se establecerá una relación cuantitativa entre la topología de las superficies involucradas y los datos de ramificación, mediante el teorema de Riemann-Hurwitz [14].

### 3.1. Teorema de Riemann-Hurwitz

En este capítulo se presentará una exposición detallada del teorema de Riemann-Hurwitz, un resultado importante en la teoría de superficies de Riemann que establece una relación entre el género de dos superficies conectadas por un mapa holomorfo ramificado. Este teorema es esencial para comprender la interacción entre la topología y la geometría compleja, proporcionando una herramienta clave para analizar la estructura de cubrimientos ramificados y su influencia en los invariantes topológicos de las superficies involucradas. El objetivo principal de este capítulo es enunciar y demostrar el teorema, detallando cada uno de los conceptos y elementos matemáticos necesarios para su formulación.

Además, se incluirán representaciones visuales diseñadas para ilustrar de manera clara la estructura de los mapeos ramificados y su impacto en la topología de las superficies de Riemann. Este enfoque busca facilitar la comprensión del teorema y dotar al lector de una visión más clara y precisa de su demostración. Se prestará especial atención a los argumentos topológicos y analíticos que sustentan la prueba, asegurando una exposición rigurosa y accesible que sirva como base sólida para el estudio de sus aplicaciones en capítulos posteriores.

#### 3.1.1. Enunciado del teorema

El teorema de Riemann-Hurwitz surge en el estudio de cubrimientos entre superficies de Riemann, proporcionando una fórmula que relaciona el género de dos superficies conectadas por un mapa holomorfo con la cantidad de ramificación presente en dicho mapa. Este resultado tiene su origen en el trabajo de Bernhard Riemann, quien a mediados del siglo XIX introdujo el concepto de

superficie de Riemann para extender el análisis complejo a contextos más generales. Posteriormente, Adolf Hurwitz formalizó la expresión que lleva su nombre, estableciendo una herramienta útil para analizar cómo se transforma la estructura topológica de una superficie bajo un cubrimiento ramificado.

El teorema tiene una conexión directa con la topología de superficies, ya que permite determinar cómo se modifican ciertos invariantes, como el género y la característica de Euler, cuando una superficie es obtenida como imagen de otra a través de un mapa holomorfo. En el contexto de la geometría algebraica, este resultado es particularmente útil en el estudio de curvas algebraicas complejas, ya que permite calcular su género a partir de información sobre una curva relacionada. Desde el punto de vista del análisis complejo, el teorema se vincula con el comportamiento local de funciones holomorfas y la forma en que sus ramificaciones influyen en la estructura global de las superficies sobre las que están definidas [7].

En términos formales, el teorema permite cuantificar cómo la estructura de una superficie de Riemann cambia bajo un cubrimiento ramificado, estableciendo una relación precisa entre la topología de la superficie de partida y la de su imagen mediante el mapa de cubrimiento. Esta relación toma en cuenta no solo el género de ambas superficies, sino también el grado del mapa y la cantidad de puntos donde ocurre ramificación. La formulación matemática del teorema se expresa de la siguiente manera:

$$2g_1 - 2 = d(2g_2 - 2) + \sum_{p \in S_1} (e_p - 1)$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son los géneros de las superficies  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente,  $d$  es el grado del mapa  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , y  $e_p$  representa el índice de ramificación en cada punto  $p$  de  $S_1$ , indicando cuánto se distorsiona la cubierta en ese punto. Este enunciado establece cómo el género de una superficie de Riemann se modifica bajo la acción de un mapa de cubrimiento, permitiendo analizar su estructura topológica en términos de la información aportada por la superficie imagen y los puntos de ramificación.

### 3.1.2. Interpretación geométrica

El teorema de Riemann-Hurwitz establece una relación precisa entre el género de dos superficies de Riemann conectadas mediante un cubrimiento ramificado. Esta relación no solo es de interés algebraico, sino que también posee una interpretación geométrica clara que permite visualizar cómo se modifica la estructura topológica de una superficie cuando se aplica un mapa de cubrimiento.

Geoméricamente, un cubrimiento  $f : S_1 \rightarrow S_2$  de grado  $\deg(f)$  o  $d$  puede concebirse como una superposición de  $d$  copias de  $S_2$  distribuidas sobre  $S_1$ , en la cual la función  $f$  proyecta localmente de forma biyectiva, salvo en un conjunto finito de puntos llamados puntos de ramificación. En los puntos regulares,  $f$  actúa localmente como una función invertible: para un punto  $q \in S_2$ , existen  $d$  puntos distintos en  $S_1$  que son enviados a  $q$ . Sin embargo, en los puntos de ramificación, varias hojas del cubrimiento se identifican sobre un mismo punto de la superficie base.

Este fenómeno de ramificación puede imaginarse como una deformación local en la que múltiples capas de la superficie  $S_1$  se pliegan sobre un solo punto de  $S_2$ . Estas deformaciones introducen alteraciones en la conectividad de la superficie y, por tanto, modifican su topología. La fórmula del teorema incluye una suma de términos de la forma  $(e_p - 1)$ , donde  $e_p$  es el índice de ramificación en un punto  $p \in S_1$ , y esta suma representa el aporte total de estos plegamientos al cambio de topología.

Desde el punto de vista topológico, el género  $g$  de una superficie compacta orientable está relacionado con su característica de Euler mediante la expresión  $\chi(S) = 2 - 2g$ . Esta relación permite reinterpretar el teorema de Riemann-Hurwitz en términos de la característica de Euler, haciendo explícito cómo el proceso de ramificación afecta dicha cantidad.

En particular, si el cubrimiento fuera regular, sin ramificación, entonces la característica de Euler de la superficie cubriente se obtendría simplemente multiplicando la característica de Euler de la base por el grado del cubrimiento. La aparición de ramificación introduce una corrección positiva en esta relación, aumentando el género de la superficie cubriente respecto al que tendría sin ramificación.

Localmente, en torno a un punto de ramificación  $p \in S_1$ , con  $f(p) = q \in S_2$ , el mapa se comporta como  $z \mapsto z^{e_p}$  en coordenadas locales. Este tipo de mapeo no es inyectivo en un entorno de  $p$ , y cada valor cercano a  $q$  tiene exactamente  $e_p$  preimágenes contadas con multiplicidad. Este comportamiento se puede ver como una cobertura cónica de orden  $e_p$ , donde las hojas de la superficie se enrollan alrededor de  $q$ .

Este efecto local se replica en todos los puntos de ramificación y, en conjunto, altera la estructura global de  $S_1$ . Desde un punto de vista más visual, puede pensarse que cada punto de ramificación actúa como un lugar donde la superficie  $S_1$  se pliega sobre sí misma, generando una conexión adicional entre diferentes partes de la superficie. Esta nueva conectividad se traduce topológicamente en un mayor número de ciclos independientes, lo cual incrementa el género de  $S_1$ .

La fórmula

$$2g_1 - 2 = d(2g_2 - 2) + \sum_{p \in S_1} (e_p - 1)$$

puede interpretarse como una relación entre la topología de la superficie base, la complejidad introducida por el mapa de recubrimiento y la forma en que los puntos de ramificación contribuyen a aumentar la complejidad de la superficie total. Si no existieran puntos de ramificación, la superficie  $S_1$  consistiría simplemente en  $d$  hojas conectadas de manera trivial, y su género estaría determinado por el de  $S_2$  a través del factor de grado.

La ramificación, en cambio, añade complejidad adicional, y se refleja en los términos que ajustan esta fórmula. De forma equivalente, esta relación puede expresarse en términos de la característica de Euler como

$$\chi(S_1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{p \in S_1} (e_p - 1),$$

lo cual ofrece una perspectiva combinatoria útil para ciertos contextos.

Finalmente, esta interpretación geométrica del teorema permite entender de manera visual y conceptual cómo un mapa aparentemente local, definido por funciones holomorfas, puede afectar

profundamente la estructura global de una superficie de Riemann. Al analizar el comportamiento de la ramificación, se obtienen herramientas geométricas para describir cómo varía el género de las curvas y cómo se relacionan distintas superficies dentro de una misma familia de cubrimientos. En ese sentido, el teorema de Riemann-Hurwitz ofrece una perspectiva natural que une la geometría local con la topología global de las superficies complejas.

### 3.2. Demostración del teorema de Riemann-Hurwitz

Luego de haber discutido la interpretación geométrica del teorema de Riemann-Hurwitz y presentado su enunciado, corresponde establecer rigurosamente su validez. La estrategia se basa en comparar las características de Euler de las superficies involucradas, utilizando una triangulación adecuada que permita controlar la forma en que se comporta el cubrimiento, en particular en torno a los puntos de ramificación.

**Teorema 3.2.1. (Teorema de Riemann-Hurwitz).** *Sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un recubrimiento (posiblemente ramificado) entre superficies de Riemann compactas. Entonces se cumple la fórmula:*

$$\chi(S_1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{p \in S_1} (e_p - 1),$$

donde  $\chi(S_i)$  denota la característica de Euler de  $S_i$  y  $e_p$  es el índice de ramificación en  $p$ .

*Demostración.* Nótese que el conjunto de puntos de ramificación es finito, ya que  $S_1$  es compacto. Por lo tanto, la suma

$$\sum_{p \in S_1} (e_p - 1)$$

es finita.

Consideramos una triangulación  $\mathcal{T}_2$  de  $S_2$  tal que todos los puntos de ramificación de  $f$  están contenidos en el conjunto de vértices de  $\mathcal{T}_2$ . Sean  $v$ ,  $e$  y  $t$  la cantidad de vértices, aristas y triángulos de  $\mathcal{T}_2$ , respectivamente. Tomamos la triangulación preimagen  $\mathcal{T}_1 = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$  en  $S_1$ , con cantidades correspondientes  $v'$ ,  $e'$ ,  $t'$ . Por construcción, cada punto de ramificación de  $f$  es un vértice en  $\mathcal{T}_1$ .

Dado que los puntos de ramificación solo aparecen como vértices, cada triángulo de  $\mathcal{T}_2$  se levanta exactamente a  $\deg(f)$  triángulos en  $S_1$ , es decir:

$$t' = d \cdot t.$$

De manera análoga, cada arista se levanta también  $d$  veces:

$$e' = d \cdot e.$$

Para determinar el número de vértices en  $\mathcal{T}_1$ , fijamos  $q \in V(\mathcal{T}_2)$ . Por definición del grado de un cubrimiento se tiene que:

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} e_p,$$

y entonces el número de preimágenes distintas de  $q$  se puede expresar como:

$$|f^{-1}(q)| = \sum_{p \in f^{-1}(q)} 1 = \deg(f) - \sum_{p \in f^{-1}(q)} e_p + \sum_{p \in f^{-1}(q)} 1 = d + \sum_{p \in f^{-1}(q)} (1 - e_p).$$

Sumando sobre todos los vértices  $q$  de  $\mathcal{T}_2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{q \in V(\mathcal{T}_2)} |f^{-1}(q)| = \sum_{q \in V(\mathcal{T}_2)} \left( d + \sum_{p \in f^{-1}(q)} (1 - e_p) \right) \\ &= d \cdot v + \sum_{q \in V(\mathcal{T}_2)} \sum_{p \in f^{-1}(q)} (1 - e_p) = d \cdot v - \sum_{p \in V(\mathcal{T}_1)} (e_p - 1). \end{aligned}$$

Esto se debe a que el doble sumatorio simplemente recorre todos los vértices en la preimagen de los vértices de  $\mathcal{T}_2$ , que son justamente los vértices de  $\mathcal{T}_1$  por construcción.

Ahora, usamos la fórmula de la característica de Euler en términos de una triangulación:

$$\chi(S_1) = v' - e' + t'.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} \chi(S_1) &= \left( dv - \sum_{p \in V(\mathcal{T}_1)} (e_p - 1) \right) - de + dt, \\ &= d(v - e + t) - \sum_{p \in V(\mathcal{T}_1)} (e_p - 1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{p \in V(\mathcal{T}_1)} (e_p - 1). \end{aligned}$$

Lo que prueba que

$$\chi(S_1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{p \in S_1} (e_p - 1),$$

como se quería demostrar.  $\square$

La demostración del teorema de Riemann-Hurwitz muestra cómo una fórmula algebraica precisa puede construirse entendiendo bien la topología de las superficies y cómo esta se ve influida por los mapeos holomorfos. La estrategia empleada se basa en el uso de triangulaciones: al construir una descomposición de la superficie imagen  $S_2$  en vértices, aristas y triángulos, y considerar su levantamiento a la superficie fuente  $S_1$  mediante el cubrimiento  $f$ , se obtiene una forma concreta de contar cómo cambian las cantidades combinatorias involucradas.

Este enfoque permite visualizar con claridad la acción del mapa: cada arista y cada triángulo de la triangulación de  $S_2$  se multiplica por el grado del mapa, ya que fuera de los puntos críticos  $f$  actúa localmente como una función biyectiva. Sin embargo, los vértices requieren un tratamiento más cuidadoso, ya que en torno a los puntos de ramificación la multiplicidad del mapa impide

contar preimágenes de forma uniforme. Es justamente aquí donde aparece el término de corrección  $\sum_{p \in S_1} (e_p - 1)$ , que cuantifica cuánto excede la multiplicidad en cada punto crítico respecto al caso regular.

Este término refleja con precisión el aporte local de cada punto de ramificación al cambio global en la estructura de la superficie. La diferencia entre los vértices esperados en un cubrimiento regular y los efectivamente obtenidos debido a la ramificación se convierte en la clave para ajustar la fórmula de Euler. Al expresar la característica de Euler en función del número de vértices, aristas y triángulos, y compararla entre las dos superficies, se llega finalmente a la fórmula que relaciona los géneros y el comportamiento de la ramificación. En este sentido, el teorema logra condensar en una sola expresión numérica una gran cantidad de información geométrica y topológica sobre la interacción entre las dos superficies.

A través de este resultado, se puede analizar el impacto que tiene un mapa holomorfo, incluso definido por expresiones locales como  $z \mapsto z^e$ , sobre la forma completa de una superficie. Esta capacidad de pasar de lo local a lo global es una característica central en la matemática moderna, y Riemann-Hurwitz es un ejemplo paradigmático de este principio.

Desde el punto de vista práctico, la fórmula permite calcular el género de una superficie complicada si se la conoce como cubierta de otra superficie más sencilla, como la esfera de Riemann  $\mathbb{P}^1$ . En geometría algebraica, esto se traduce en la posibilidad de calcular el género de una curva proyectiva dada por una ecuación, al interpretarla como un cubrimiento ramificado de otra curva. De este modo, se convierte en una herramienta fundamental para clasificar curvas y construir ejemplos con propiedades controladas [14].

Por otra parte, desde un punto de vista conceptual, el teorema muestra que la ramificación no es un fenómeno superficial ni local en su alcance. Aunque cada punto crítico modifica el mapa en una vecindad pequeña, la suma total de estas modificaciones altera la conectividad de la superficie completa. De hecho, cada índice de ramificación  $e_p$  indica cuántas veces se pliega la superficie sobre sí misma en ese punto, y el total de estos plegamientos altera la cantidad de agujeros o ciclos independientes en la superficie es decir, su género.

Esta interpretación también aporta una intuición geométrica potente: sin ramificación, un cubrimiento simplemente superpone varias copias desconectadas localmente de la base. La ramificación, en cambio, une esas copias de forma más compleja, generando mayor conectividad y aumentando el género. Así, el teorema de Riemann-Hurwitz no solo da una fórmula, sino que explica con claridad cómo los efectos locales de una función compleja afectan a gran escala la topología de las superficies. Es por esto que sigue siendo una herramienta clave tanto en contextos computacionales como teóricos, y su importancia se refleja en muchas ramas modernas de la matemática, desde la geometría compleja y la teoría de funciones hasta la aritmética de curvas [10].

---

## Aplicaciones del teorema de Riemann-Hurwitz

---

### 4.1. Aplicaciones del teorema de Riemann-Hurwitz

El teorema de Riemann-Hurwitz constituye una herramienta central en el estudio de superficies de Riemann y curvas algebraicas complejas. Una vez comprendida su formulación y demostración, resulta natural explorar sus múltiples aplicaciones dentro de la geometría compleja, la topología de superficies y la teoría de funciones. Este capítulo está dedicado a ilustrar cómo dicho teorema permite deducir propiedades topológicas fundamentales a partir de la información local codificada en los índices de ramificación de un mapa holomorfo.

A lo largo de esta sección, se examinarán diversos contextos en los que el teorema de Riemann-Hurwitz interviene de manera decisiva: desde ejemplos básicos hasta resultados estructurales profundos como la clasificación de superficies compactas, el cálculo del género de curvas algebraicas, y el análisis de acciones de grupos sobre superficies. Estas aplicaciones, además de reforzar la intuición geométrica detrás del teorema, muestran su poder en la caracterización de morfismos entre superficies y en la construcción de recubrimientos ramificados con propiedades deseadas.

El capítulo se organiza en tres partes. Primero se presentan ejemplos elementales que permiten visualizar directamente los efectos de la ramificación sobre la topología. En la segunda parte, se discute la aplicación del teorema en la clasificación de superficies de Riemann compactas, conectándola con la característica de Euler y los invariantes topológicos asociados. Finalmente, se aborda su uso en el cálculo del género de curvas algebraicas definidas como recubrimientos de la esfera proyectiva, mostrando cómo la ramificación controla el comportamiento global de las curvas.

### 4.1.1. Aplicaciones simples

El teorema de Riemann-Hurwitz tiene aplicaciones inmediatas que, si bien son conceptualmente accesibles, resultan fundamentales para afianzar la comprensión de su contenido geométrico. En esta sección presentamos ejemplos en los que el teorema se aplica de forma directa al estudiar mapeos holomorfos entre superficies conocidas, como la esfera de Riemann, el toro complejo o cubrimientos clásicos ramificados en un número reducido de puntos. Tales aplicaciones permiten no solo realizar cálculos explícitos del género de la superficie de partida, sino también verificar la consistencia de la fórmula en contextos donde los datos son completamente controlables. Los ejemplos a continuación están diseñados para ilustrar cómo la suma de los excesos de ramificación compensa la diferencia topológica entre la superficie fuente y la imagen.

**Ejemplo 4.1.1. (Cubierta ramificada de la esfera sobre sí misma).** Sea  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definido por  $f(z) = z^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Este mapa es un morfismo holomorfo de grado  $n$ , que induce un recubrimiento ramificado de la esfera de Riemann sobre sí misma.

Para encontrar los puntos críticos de  $f$ , procedemos de la siguiente manera:

Calculamos la derivada:

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Determinamos los puntos donde la derivada se anula:

$$f'(z) = 0 \implies nz^{n-1} = 0 \implies z = 0.$$

Por tanto,  $z = 0$  es un punto crítico.

Para analizar el punto en el infinito, hacemos el cambio de variable  $w = \frac{1}{z}$ , y escribimos:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \left(\frac{1}{w}\right)^n = w^{-n}.$$

Calculamos la derivada respecto a  $w$ :

$$\frac{d}{dw} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{d}{dw} w^{-n} = -nw^{-n-1}.$$

Evaluamos la derivada en  $w = 0$  (es decir,  $z = \infty$ ) y observamos que la derivada es indefinida, lo que indica que  $z = \infty$  también es un punto crítico.

En consecuencia, los únicos puntos críticos de  $f$  son  $z = 0$  y  $z = \infty$ .

El índice de ramificación  $e_p$  en un punto crítico  $p$  se calcula como el orden del cero de la derivada más 1. Para ambos puntos:

$$e_0 = e_\infty = n,$$

y por tanto los valores de ramificación son:

$$v_f(0) = e_0 - 1 = n - 1, \quad v_f(\infty) = e_\infty - 1 = n - 1.$$

Finalmente, aplicando la fórmula de Riemann–Hurwitz para  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , donde  $g_X = g_Y = 0$  y  $d = n$ , se tiene:

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \sum_{p \in \mathbb{P}^1} (e_p - 1),$$

$$-2 = n(-2) + [(n - 1) + (n - 1)] = -2n + 2(n - 1) = -2,$$

lo que confirma que la fórmula se cumple en este caso.

Este ejemplo permite visualizar de manera precisa cómo actúa el teorema de Riemann–Hurwitz en una situación donde el comportamiento del mapa es completamente determinable. El mapa  $f(z) = z^n$  es de grado  $n$  y está definido entre esferas de Riemann, con ramificación concentrada únicamente en los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$ , donde el índice de ramificación es  $n$ . En el resto del dominio, el mapa es localmente biholomorfo y cada punto de la imagen tiene exactamente  $n$  preimágenes distintas.

La fórmula del teorema contabiliza el efecto de los puntos de ramificación sobre la topología de la superficie cubierta. En este caso, la suma total de los excesos de ramificación es  $2(n - 1)$ , ya que hay dos puntos críticos, cada uno con exceso  $n - 1$ . Al sustituir en la fórmula de Riemann–Hurwitz, se verifica que esta suma compensa el cambio en la característica de Euler inducido por el grado del mapa.

El ejemplo es útil para comprobar que la fórmula se cumple en un caso concreto donde las superficies involucradas son racionales y donde el comportamiento local del mapa es uniforme. Además, el hecho de que se trate de un cubrimiento ramificado simple permite utilizarlo como referencia para analizar situaciones más generales con múltiples puntos críticos o superficies de mayor género.

**Ejemplo 4.1.2. (Cubrimientos hiperbólicos [14]).** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un cubrimiento ramificado de grado  $d$ , donde  $Y \cong \mathbb{P}^1$  y  $X$  es una superficie de Riemann compacta y conexa de género  $g_X \geq 2$ . Este tipo de cubrimientos permite construir superficies hiperbólicas como cubrimientos ramificados de la esfera de Riemann.

Supóngase que  $f$  tiene  $r$  puntos de ramificación  $\{P_1, \dots, P_r\} \subset X$ , con respectivos índices de ramificación  $e_i \geq 2$ . Aplicando el teorema de Riemann–Hurwitz:

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \sum_{i=1}^r (e_i - 1)$$

Dado que  $g_Y = 0$ , la fórmula se simplifica como:

$$2g_X - 2 = -2d + \sum_{i=1}^r (e_i - 1)$$

Este tipo de relación permite calcular el género de  $X$  en términos del grado del cubrimiento y los datos de ramificación.

Este ejemplo describe una construcción explícita de superficies hiperbólicas a partir de cubrimientos ramificados de la esfera. La hipótesis  $g_X \geq 2$  implica que la superficie  $X$  admite una métrica de curvatura constante negativa, es decir, una estructura hiperbólica. Desde el punto de vista geométrico, estas superficies pueden entenderse como cocientes del plano hiperbólico por grupos de Fuchs, pero también pueden obtenerse a partir de una esfera proyectiva con puntos de ramificación, lo cual ofrece una vía algebraico-geométrica complementaria.

El ejemplo permite observar cómo el término de ramificación  $\sum(e_i - 1)$  actúa compensando el crecimiento negativo de la característica de Euler inducido por la multiplicación del grado. Si el total de exceso de ramificación es suficientemente grande, se puede obtener una superficie de género arbitrariamente alto.

**Ejemplo 4.1.3. (Número de automorfismos de una superficie de Riemann [6]).** *Sea  $X$  una superficie de Riemann compacta de género  $g_X \geq 2$ , y sea  $G$  un grupo finito de automorfismos holomorfos de  $X$ . El cociente  $Y = X/G$  es nuevamente una superficie de Riemann compacta, y el morfismo natural de proyección*

$$f : X \rightarrow Y = X/G$$

*es un recubrimiento ramificado de grado  $|G|$ .*

*Los puntos en  $X$  donde existen automorfismos no triviales que fijan al punto corresponden a los puntos críticos de  $f$ . Sea  $r$  el número total de puntos críticos (contados con multiplicidad) y denotemos por  $e_i \geq 2$  el índice de ramificación en cada uno de ellos. Aplicando el teorema de Riemann–Hurwitz a  $f$ , se obtiene:*

$$2g_X - 2 = |G|(2g_Y - 2) + \sum_{i=1}^r (e_i - 1).$$

*La cota máxima para  $|G|$  se alcanza cuando el género del cociente es mínimo, es decir,  $g_Y = 0$ , lo que corresponde a que  $Y$  es conforme a la esfera de Riemann. Además, para que la suma*

$$\sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{e_i}\right)$$

*sea estrictamente mayor que 1 (condición necesaria para que el lado derecho de la fórmula sea positivo y se obtenga una cota finita para  $|G|$ ), es necesario que haya al menos tres puntos de ramificación, es decir,  $r \geq 3$ . Esto se debe a que con menos de tres puntos la suma no excede 1, lo cual no permite obtener la desigualdad deseada.*

*El caso extremo que maximiza el valor de  $|G|$  ocurre cuando:*

$$\sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{e_i}\right) = 1 + \varepsilon,$$

*para el triplete  $(e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 7)$ . Este conjunto produce la menor suma posible mayor que 1 y conduce a la cota clásica:*

$$|G| \leq 84(g_X - 1).$$

*Este resultado es conocido como el teorema de Hurwitz sobre automorfismos de superficies de Riemann compactas.*

La estimación obtenida en el ejemplo anterior muestra que el número de automorfismos holomorfos de una superficie de Riemann compacta de género al menos 2 está acotado por una constante lineal en función del género. La constante 84 proviene del análisis de la contribución mínima posible del término de ramificación compatible con la presencia de puntos con estabilizadores no triviales, utilizando los enteros (2, 3, 7). Estos están relacionados con el grupo fuchsiano de tipo (2, 3, 7), que actúa sobre el plano hiperbólico.

Geoméricamente, el cociente  $X/G$  representa la superficie base sobre la que se despliega la superficie  $X$  como un recubrimiento ramificado. El grupo  $G$  actúa como un grupo de simetrías de  $X$ , y la estructura de ramificación codifica las obstrucciones locales a que esta acción sea libre. El caso extremo en el que  $|G| = 84(g - 1)$  ocurre precisamente cuando  $X$  admite una estructura uniforme proveniente del grupo (2, 3, 7), y en ese caso se dice que  $X$  es una superficie de Hurwitz.

Este resultado tiene consecuencias tanto en geometría compleja como en teoría de grupos y geometría hiperbólica. Por ejemplo, permite entender cuán simétrica puede ser una curva algebraica de género alto, y juega un papel clave en la clasificación de superficies según su grupo de automorfismos. En particular, la existencia de una cota universal implica que los espacios de módulos de curvas de género fijo tienen dimensión finita y bien controlada, lo cual es esencial para el estudio de la geometría de estos espacios.

**Ejemplo 4.1.4. (Verificación directa con mapeos racionales [10]).** *Consideremos el mapa racional*

$$f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}.$$

*El grado  $d$  de un mapa racional se define como el máximo entre los grados del numerador y del denominador. En este caso, tanto el numerador  $z^2 - 1$  como el denominador  $z^2 + 1$  son polinomios de grado 2, por lo que*

$$d = \max(\deg(z^2 - 1), \deg(z^2 + 1)) = 2.$$

*Supongamos inicialmente que los puntos de ramificación del mapa son cuatro:  $0, \infty, i$  y  $-i$ , y que en cada uno el índice de ramificación es  $e_p = 2$ . Si aplicamos la fórmula de Riemann-Hurwitz para un recubrimiento ramificado  $f : X \rightarrow Y$  entre superficies de Riemann compactas,*

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} (e_p - 1),$$

*donde  $g_X$  y  $g_Y$  son los géneros de  $X$  e  $Y$  respectivamente, obtenemos con  $X = Y = \mathbb{P}^1$  y  $g_{\mathbb{P}^1} = 0$ ,*

$$-2 = 2(-2) + 4 \cdot (2 - 1) = -4 + 4 = 0,$$

*lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la suposición de que hay cuatro puntos de ramificación con índice dos es incorrecta.*

Para identificar correctamente los puntos críticos, calculamos la derivada de  $f$ :

$$f'(z) = \frac{N'(z)D(z) - N(z)D'(z)}{(D(z))^2},$$

con

$$N(z) = z^2 - 1, \quad D(z) = z^2 + 1,$$

y

$$N'(z) = 2z, \quad D'(z) = 2z,$$

de modo que

$$f'(z) = \frac{2z(z^2 + 1) - (z^2 - 1)(2z)}{(z^2 + 1)^2} = \frac{4z}{(z^2 + 1)^2}.$$

Los puntos donde la derivada se anula son precisamente los ceros del numerador, es decir,  $z = 0$ .

Para analizar el comportamiento en el punto  $\infty$ , efectuamos el cambio de variable  $w = \frac{1}{z}$  y definimos

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{(1/w)^2 - 1}{(1/w)^2 + 1} = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}.$$

Su derivada es

$$g'(w) = \frac{-2w(1 + w^2) - (1 - w^2)(2w)}{(1 + w^2)^2} = \frac{-4w}{(1 + w^2)^2},$$

la cual se anula en  $w = 0$ , que corresponde a  $z = \infty$ . Por lo tanto,  $\infty$  es también un punto crítico de ramificación.

Es importante destacar que, aunque los puntos  $z = i$  y  $z = -i$  anulan el denominador y por tanto son polos del mapa  $f$ , no son puntos de ramificación. Esto se debe a que la ramificación está determinada por la anulación de la derivada del mapa, que en estos puntos no ocurre. En efecto, el numerador de  $f'(z)$  es  $4z$ , que no se anula en  $z = \pm i$ . Por lo tanto, localmente cerca de  $i$  y  $-i$ , el mapa  $f$  se comporta como un cociente simple con polos simples y no presenta multiplicidad mayor a uno. Así,  $i$  y  $-i$  no contribuyen a la suma de índices de ramificación en la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Finalmente, localmente el índice de ramificación en los puntos críticos se determina por la multiplicidad con que el mapa se comporta alrededor de esos puntos, siendo

$$e_0 = 2, \quad e_\infty = 2.$$

Al aplicar la fórmula de Riemann-Hurwitz con estos datos,

$$2g_{\mathbb{P}^1} - 2 = d(2g_{\mathbb{P}^1} - 2) + (e_0 - 1) + (e_\infty - 1),$$

se obtiene

$$-2 = 2(-2) + (2 - 1) + (2 - 1) = -4 + 1 + 1 = -2,$$

confirmando la validez de la fórmula para este mapa racional.

Este ejemplo destaca la importancia de verificar rigurosamente los puntos de ramificación y sus respectivos índices antes de aplicar el teorema de Riemann-Hurwitz. La correcta identificación de los puntos críticos requiere, en general, el estudio de la anulación del derivado  $f'(z)$  y el comportamiento local del mapa en torno a esos puntos. Una asignación incorrecta de los datos locales puede llevar a errores en los cálculos globales, como se observa en este caso.

#### 4.1.2. Clasificación de superficies de Riemann

Las superficies de Riemann compactas presentan una diversidad de estructuras complejas que, sin embargo, pueden clasificarse topológicamente de manera precisa mediante invariantes como el género. Cada superficie compacta orientable admite una descripción única hasta homeomorfismo basada en su número de asas o agujeros, lo que permite organizar su estudio en familias bien definidas. Esta clasificación se fundamenta en el entendimiento de cubrimientos ramificados y en la aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz, que proporciona una conexión explícita entre los datos locales de ramificación y las características globales de la superficie. Para ilustrar estos conceptos, se presentan ejemplos representativos que muestran cómo distintas superficies de Riemann se agrupan de acuerdo a su estructura topológica.

**Ejemplo 4.1.5. (Cubrimiento doble ramificado en seis puntos [7]).** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  un cubrimiento de grado  $d = 2$ , donde  $X$  es una superficie de Riemann compacta, y supongamos que  $f$  está ramificado en exactamente seis puntos de  $\mathbb{P}^1$ , cada uno con índice de ramificación  $e_P = 2$ .

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

Dado que  $g(\mathbb{P}^1) = 0$  y hay seis puntos de ramificación con exceso  $e_P - 1 = 1$  en cada uno, sustituimos:

$$2g(X) - 2 = 2(2 \times 0 - 2) + 6 = 2(-2) + 6 = -4 + 6 = 2,$$

de donde se deduce que  $g(X) = 2$ . Por tanto,  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género 2.

En este caso se considera un cubrimiento de grado dos de la esfera de Riemann, en el cual la totalidad de la ramificación está concentrada en seis puntos distintos. Cada punto de ramificación tiene un índice  $e_P = 2$ , lo que significa que localmente el mapa se comporta como  $z \mapsto z^2$  en coordenadas apropiadas.

La aplicación de la fórmula de Riemann-Hurwitz muestra que el exceso total de ramificación es suficiente para alterar la característica de Euler de la superficie cubierta de forma que el género resultante es  $g = 2$ . Este cálculo permite concluir que  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género dos, es decir, una superficie orientable cuya topología corresponde a la de una esfera con dos asas.

Este tipo de construcciones es característico en la teoría de cubrimientos de curvas hiperbólicas, donde la ramificación controlada en un número finito de puntos genera superficies de género mayor que uno. En particular, cubrimientos dobles ramificados en un número par de puntos de la esfera constituyen una fuente natural de ejemplos en la clasificación de superficies de Riemann de bajo género.

**Ejemplo 4.1.6. (Cubrimiento de la esfera por una curva hiperbólica [14]).** *Consideremos un polinomio de grado  $d = 3$  que define un mapa  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ , ramificado de manera simple en exactamente cuatro puntos distintos de  $\mathbb{P}^1$ . En cada uno de estos puntos, el índice de ramificación es  $e_P = 2$ .*

*Aplicamos el teorema de Riemann-Hurwitz:*

$$2g(X) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

*Sustituyendo los valores conocidos:*

$$2g(X) - 2 = 3(2 \times 0 - 2) + 4(2 - 1) = 3(-2) + 4(1) = -6 + 4 = -2,$$

*lo que implica que  $g(X) = 0$ . Por tanto,  $X$  es una superficie de Riemann de género cero, es decir, otra esfera de Riemann.*

Este ejemplo ilustra una situación en la cual un cubrimiento no trivial de la esfera de Riemann resulta en una superficie que es topológicamente otra esfera. El polinomio de grado tres considerado induce un mapa de grado tres con ramificación simple en cuatro puntos, donde cada punto crítico contribuye con un exceso de ramificación igual a uno.

La aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz revela que, a pesar de la presencia de ramificación, el género de la superficie cubierta  $X$  permanece igual a cero. Esto refleja el hecho de que la ramificación, aunque altera localmente la estructura del mapa, no introduce suficiente complejidad topológica para modificar el tipo global de la superficie.

Desde el punto de vista de la clasificación, este ejemplo muestra que no toda ramificación produce un aumento en el género de la superficie. La cantidad y el tipo de ramificación deben ser suficientemente grandes para que se genere una superficie de género positivo. En este caso, el número total de excesos de ramificación no es suficiente para alterar la característica de Euler de forma que produzca una superficie de mayor complejidad.

**Ejemplo 4.1.7. (Cocientes del disco hiperbólico [10]).** *Sea  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  un subgrupo discreto, libre de torsión, que actúa de manera propia y discontinua sobre el disco hiperbólico  $\mathbb{D}$ . Consideremos el cociente*

$$X = \mathbb{D}/\Gamma,$$

*el cual hereda una estructura de superficie de Riemann compacta.*

*En este caso, no hay puntos de ramificación, ya que la acción es libre. Sin embargo, el teorema de Riemann-Hurwitz se puede aplicar para describir cómo la topología de  $X$  está determinada por el comportamiento del grupo  $\Gamma$ .*

Puesto que el mapa de proyección  $\mathbb{D} \rightarrow X$  es un cubrimiento no ramificado de grado igual al índice de  $\Gamma$  en el grupo fundamental, la fórmula de Riemann-Hurwitz se reduce a:

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(\mathbb{D}) - 2),$$

y dado que  $\mathbb{D}$  es simplemente conexo (su género es cero), resulta:

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(-2).$$

Así, el género  $g(X)$  es directamente proporcional al grado del cubrimiento, y en particular, satisface  $g(X) \geq 2$ . Esto permite construir superficies de Riemann de género arbitrariamente grande a partir de la elección de subgrupos  $\Gamma$  adecuados.

Este ejemplo presenta una construcción diferente a los anteriores: se trata de un cubrimiento no ramificado, donde la complejidad topológica de la superficie cubierta se origina únicamente en la estructura global del grupo  $\Gamma$  que actúa sobre el espacio hiperbólico  $\mathbb{D}$ .

La ausencia de puntos críticos simplifica la aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz, ya que la fórmula depende únicamente del grado del cubrimiento. Como el disco hiperbólico es simplemente conexo, su característica de Euler es 2, y el cubrimiento introduce la corrección necesaria para obtener una superficie de mayor género.

Este tipo de cocientes es fundamental en la teoría de superficies hiperbólicas y muestra cómo, a través de la acción de grupos discretos, se pueden construir de manera sistemática superficies de Riemann de género arbitrariamente grande. En la clasificación de superficies, las superficies de género  $g \geq 2$  representan el caso hiperbólico, caracterizado por una curvatura negativa constante, y este procedimiento proporciona un método explícito para su obtención.

**Ejemplo 4.1.8..** Consideremos un cubrimiento holomorfo  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grado  $d = 7$ , donde  $X$  es una superficie de Riemann compacta. Supongamos que el mapa  $f$  está ramificado en exactamente 12 puntos de  $\mathbb{P}^1$ , con ramificación simple en cada uno, es decir,  $e_P = 2$  para cada punto crítico.

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_P (e_P - 1),$$

donde  $g(\mathbb{P}^1) = 0$  y cada exceso de ramificación es  $e_P - 1 = 1$ .

Sustituyendo:

$$2g(X) - 2 = 7(2 \times 0 - 2) + 8(2 - 1) = 7(-2) + 8(1) = -14 + 12 = -2,$$

por lo que  $g(X) = 0$ . Se concluye que  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género 0.

La aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz muestra que el exceso total de ramificación compensa parcialmente la multiplicación de la característica de Euler por el grado del mapa, resultando

en una superficie de género tres. Este cálculo confirma que, a pesar de la alta ramificación, la superficie cubierta no es hiperbólica extrema, sino que corresponde a una superficie con la complejidad topológica de una esfera.

Los ejemplos analizados permiten observar cómo el teorema de Riemann-Hurwitz interviene de manera precisa en la clasificación de superficies de Riemann compactas. En cada caso, el cálculo del género a partir de datos de ramificación proporciona información suficiente para determinar el tipo topológico de la superficie: esferas cuando el género es cero, toros cuando el género es uno, y superficies hiperbólicas para géneros mayores o iguales a dos.

### 4.1.3. Determinación del género en curvas algebraicas

Las curvas algebraicas suaves, cuando se consideran como variedades proyectivas complejas, adquieren de manera natural la estructura de superficies de Riemann compactas. En muchos casos, dichas curvas se presentan como cubrimientos ramificados de la recta proyectiva, lo que permite emplear el teorema de Riemann-Hurwitz para determinar su género. El cálculo del género proporciona información clave sobre la topología de la curva y su comportamiento geométrico. A través de ejemplos específicos, se analizarán diversas familias de curvas algebraicas y se ilustrará cómo obtener su género a partir de la estructura de su ramificación.

**Ejemplo 4.1.9. (Curva de género dos  $y^2 = x^5 + x + 1$  [14]).** Sea  $X$  la superficie de Riemann asociada a la curva afín definida por

$$y^2 = x^5 + x + 1.$$

Consideramos el mapa

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x, y) \mapsto x,$$

el cual proyecta un punto de  $X$  sobre su coordenada  $x$ . El grado del cubrimiento es  $d = 2$ , ya que para un valor genérico de  $x$  existen exactamente dos soluciones para  $y$ .

Los puntos críticos del mapa corresponden a las raíces del polinomio  $x^5 + x + 1$  y al punto  $x = \infty$ . En cada uno de estos puntos, el cubrimiento es ramificado de manera simple, es decir, el índice de ramificación es  $e_P = 2$ .

El número total de puntos de ramificación es  $r = 6$ .

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = 2(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + r,$$

sustituyendo los valores conocidos:

$$2g(X) - 2 = 2(-2) + 6 = -4 + 6 = 2,$$

lo que implica:

$$g(X) = 2.$$

Por tanto, la curva  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género dos.

En este ejemplo se analiza una curva hiperbólica definida por una ecuación de grado impar en la variable  $x$ . La elección del mapa de proyección hacia la primera coordenada permite describir la curva como un cubrimiento doble de la esfera de Riemann, donde la ramificación ocurre en los ceros del polinomio y en el infinito. Cada ramificación es de tipo simple, como corresponde al caso en que la derivada del polinomio no se anula en las raíces.

El método utilizado en este ejemplo es representativo de la técnica general para determinar el género de curvas algebraicas dadas por ecuaciones de la forma  $y^2 = P(x)$ . En tales casos, el comportamiento de la función de proyección  $x$  permite trasladar el problema al conteo de los puntos de ramificación y su análisis local. La identificación precisa del número y tipo de ramificación es esencial para aplicar correctamente el teorema, y refleja la interacción entre la estructura algebraica de la curva y su topología como superficie de Riemann.

**Ejemplo 4.1.10. (Curva de Fermat  $y^n = x^n - 1$  para  $n = 3$ ).** Consideremos la curva afín definida por la ecuación

$$y^3 = x^3 - 1.$$

Definimos el mapa

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x, y) \mapsto x,$$

donde  $X$  es la superficie de Riemann asociada a la curva proyectivizada. El grado del cubrimiento es  $d = 3$ , ya que para un valor genérico de  $x$  existen exactamente tres soluciones distintas para  $y$ .

Los puntos de ramificación corresponden a las raíces del polinomio  $x^3 - 1$ , es decir,  $x = 1, \omega, \omega^2$ , donde  $\omega$  es una raíz primitiva cúbica de la unidad, y al punto en  $x = \infty$ . En cada uno de estos puntos, el índice de ramificación es  $e_P = 3$ .

Así, el número total de puntos de ramificación es 4.

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_P (e_P - 1),$$

sustituyendo:

$$2g(X) - 2 = 3(-2) + 4(3 - 1) = -6 + 8 = 2,$$

lo que implica:

$$g(X) = 2.$$

Por tanto,  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género dos.

En este ejemplo se estudia una curva de tipo Fermat de grado tres, que puede interpretarse como una curva hiperbólica al analizar su estructura como superficie de Riemann. El mapa de proyección hacia la primera coordenada  $x$  define un cubrimiento de la esfera de Riemann de grado tres, donde la ramificación se concentra en las raíces del polinomio  $x^3 - 1$  y en el infinito.

Cada punto de ramificación presenta un índice  $e_P = 3$ , generando un exceso de ramificación suficiente para modificar de manera significativa la característica de Euler de la superficie cubierta. La aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz permite determinar que el género de la curva es dos, situándola dentro de la clase de superficies compactas de tipo hiperbólico [14].

**Ejemplo 4.1.11. (Curva definida por  $y^3 = x^4 - 1$ ).** Sea  $X$  la superficie de Riemann asociada a la curva afín definida por

$$y^3 = x^4 - 1.$$

Definimos el cubrimiento

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x, y) \mapsto x,$$

que proyecta un punto de  $X$  sobre su coordenada  $x$ . El grado del cubrimiento es  $d = 3$ , ya que para un valor genérico de  $x$  existen exactamente tres soluciones distintas para  $y$ .

Los puntos de ramificación corresponden a las raíces del polinomio  $x^4 - 1$ , es decir,  $x = 1, -1, i, -i$ , junto con el punto en  $x = \infty$ . En cada uno de ellos, el índice de ramificación es  $e_P = 3$ .

La suma total de los excesos de ramificación es:

$$\sum_P (e_P - 1) = 5(3 - 1) = 5(2) = 10.$$

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = d(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_P (e_P - 1),$$

sustituyendo los valores:

$$2g(X) - 2 = 3(-2) + 10 = -6 + 10 = 4,$$

por lo que:

$$g(X) = 3.$$

Así,  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género tres.

La curva analizada en este ejemplo proporciona un caso en el que la combinación de un polinomio de mayor grado en  $x$  y un exponente fijo en  $y$  da lugar a una superficie de género superior. La

proyección hacia la coordenada  $x$  define un cubrimiento de la esfera de Riemann de grado tres, en el cual la ramificación ocurre en los cuatro puntos finitos correspondientes a las raíces de  $x^4 - 1$  y en el infinito [14].

Cada punto de ramificación presenta un exceso de ramificación de dos unidades, y la aplicación del teorema de Riemann-Hurwitz permite calcular directamente que la superficie tiene género tres. El resultado refleja cómo el número de puntos de ramificación y sus índices afectan la topología global de la superficie asociada a una curva algebraica.

El análisis de ramificación y la aplicación sistemática del teorema de Riemann-Hurwitz constituyen herramientas fundamentales para comprender y clasificar este tipo de superficies dentro del marco general de la teoría de curvas algebraicas.

## 5.1. Conclusiones

Este trabajo logró alcanzar los objetivos propuestos, que consistieron en desarrollar una exposición accesible y rigurosa de la fórmula de Riemann-Hurwitz en el contexto de superficies de Riemann compactas. A través de una construcción progresiva de los conceptos necesarios y de una presentación clara de las herramientas topológicas, geométricas y analíticas involucradas, se consiguió construir una demostración sólida que permite comprender cómo el comportamiento local de un mapa holomorfo ramificado afecta la estructura global de las superficies.

El análisis realizado a lo largo del trabajo permitió evidenciar la importancia de los puntos críticos y sus índices de ramificación como elementos fundamentales que regulan la transformación topológica de las superficies mediante cubrimientos. Esta conexión entre los datos locales y el género de las superficies destaca una de las ideas centrales en geometría y topología: que las propiedades globales pueden ser comprendidas a través del estudio preciso de fenómenos locales. La fórmula de Riemann-Hurwitz constituye así un testimonio de la profunda interacción entre topología y análisis complejo.

Una aportación importante de este trabajo radica en haber expuesto el contenido de manera que resalte la interacción entre métodos de diferentes áreas matemáticas, como la teoría de recubrimientos, la característica de Euler, los complejos simpliciales y la estructura de mapeos holomorfos. Este enfoque no solo facilita la comprensión del teorema, sino que también pone en evidencia la riqueza conceptual que surge al integrar distintas perspectivas en el estudio de superficies.

Asimismo, el trabajo refuerza la importancia de los invariantes topológicos, como el género y la característica de Euler, en la clasificación de superficies y en el control del comportamiento de los mapeos entre ellas. La capacidad de la fórmula de Riemann-Hurwitz para predecir, de manera

precisa, cómo los mapeos ramificados alteran el género demuestra su relevancia como herramienta en la comprensión de la geometría de curvas y en la construcción de nuevas superficies a partir de recubrimientos.

La exposición minuciosa y el enfoque didáctico adoptados en este trabajo permiten que no solo sea una introducción rigurosa al teorema, sino también un recurso de apoyo para estudiantes que posean una base sólida en análisis complejo, topología y geometría diferencial, y deseen profundizar en el estudio de las superficies de Riemann, la geometría algebraica y el análisis complejo. La claridad en el desarrollo teórico y la estructura progresiva en la presentación de los conceptos fundamentales fueron pensadas para favorecer la comprensión y motivar un acercamiento más natural hacia temas de mayor complejidad.

Además, el análisis de la fórmula de Riemann-Hurwitz abre posibilidades para futuras investigaciones que involucren el estudio de espacios de módulos, superficies hiperbólicas, y ramificaciones en geometrías más generales. La comprensión detallada de los cubrimientos ramificados constituye un paso fundamental para abordar problemas de clasificación de superficies y para la exploración de estructuras complejas en dimensiones superiores.

Finalmente, este trabajo proporciona una base sólida para futuras exploraciones en áreas más avanzadas, como recubrimientos más generales en geometría compleja y aplicaciones en teoría de campos de funciones. La construcción cuidadosa de los fundamentos, la exposición clara de las ideas, y el enfoque integrador adoptado buscan no solo facilitar el acceso al teorema de Riemann-Hurwitz, sino también fomentar el interés por la geometría de superficies de Riemann y su papel central en diversas áreas de la matemática contemporánea.

## 5.2. Recomendaciones

A partir del trabajo realizado, surgen diversas líneas de investigación que podrían ser exploradas para profundizar en el estudio del teorema de Riemann-Hurwitz y su contexto dentro de la teoría de superficies de Riemann. Una dirección natural sería extender el análisis hacia la clasificación de cubrimientos ramificados de mayor complejidad, considerando no solo mapeos de grado bajo, sino también cubrimientos de grado arbitrario y sus correspondientes implicaciones en el género de las superficies. El estudio sistemático de diferentes tipos de ramificación podría revelar patrones generales que complementen y amplíen los resultados clásicos.

Otra posible ampliación consiste en integrar la teoría de espacios de módulos de curvas de género fijo, analizando cómo la fórmula de Riemann-Hurwitz se relaciona con la estructura y propiedades de estos espacios. La comprensión de las familias de cubrimientos y de su parametrización ofrece un puente hacia áreas de investigación más avanzadas, como la geometría algebraica; en particular, el texto *Riemann Surfaces and Algebraic Curves* [7] constituye un punto de partida para abordar estos temas desde una perspectiva accesible y rigurosa.

Desde el punto de vista didáctico, podría desarrollarse material complementario que incluya una colección más amplia de ejemplos, ejercicios resueltos y visualizaciones geométricas, con el objetivo de facilitar la comprensión del teorema y de sus aplicaciones para estudiantes que se aproximan por primera vez a la teoría de superficies de Riemann.

Finalmente, sería valioso explorar generalizaciones del teorema de Riemann–Hurwitz en otros contextos, como el de superficies de Riemann abiertas o no compactas, o en entornos de geometría compleja de mayor dimensión. Estas extensiones permiten vincular los resultados clásicos con estructuras más generales y ofrecen una vía para adentrarse en teorías globales del análisis complejo; una guía con amplia cobertura sobre estos desarrollos se encuentra en el libro *Compact Riemann Surfaces* [10].

- [1] N. A'Campo. *Topological, Differential and Conformal Geometry of Surfaces*. Springer, 2021.
- [2] L. V. Ahlfors y L. Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1960.
- [3] E. Arbarello, M. Cornalba y P. A. Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves, Volume II*. Springer, 2011.
- [4] W. P. Barth et al. *Compact Complex Surfaces*. 2nd ed. Springer, 2004.
- [5] A. Block. *Riemann–Hurwitz and Applications*. Lecture notes. 2017.
- [6] S. Bosch. “The Riemann–Hurwitz Formula”. Bachelor’s thesis. Utrecht University, 2016.
- [7] R. Cavalieri y E. Miles. *Riemann Surfaces and Algebraic Curves: A First Course in Hurwitz Theory*. London Mathematical Society Student Texts 87. Cambridge University Press, 2016.
- [8] H. M. Farkas e I. Kra. *Riemann Surfaces*. 2nd ed. Springer, 1992.
- [9] W. Fulton. *Algebraic Topology: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics 153. Springer, 1995.
- [10] J. Jost. *Compact Riemann Surfaces: An Introduction to Contemporary Mathematics*. Springer, 2006.
- [11] S. Lang. *Complex Analysis*. 4th ed. Graduate Texts in Mathematics 103. Springer, 1999.
- [12] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 202. Springer, 2011.
- [13] A. M. Macbeath. “On a Theorem of Hurwitz”. En: *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association* 5.1 (1961), <pp.-pp>.
- [14] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics 5. American Mathematical Society, 1995.
- [15] E. E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics 47. New York: Springer, 1977.

- [16] A. Nerode y N. Greenberg. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces for Undergraduates: The Theory of the Donut*. Springer, 2023.
- [17] M. Nieser, K. Poelke y K. Polthier. “Automatic Generation of Riemann Surface Meshes”. En: *Mathematics and Visualization*. Springer, 2010.
- [18] J. Wehler. *Riemann Surfaces*. Lecture notes, LMU Munich, Winter Term 2019/20. 2019.
- [19] K. Yang. *Compact Riemann Surfaces and Algebraic Curves*. World Scientific, 1988.