

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Interacciones débiles y la posible existencia de una nueva
fuerza**

Trabajo de graduación presentado por María Teresa Corzo López para
optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



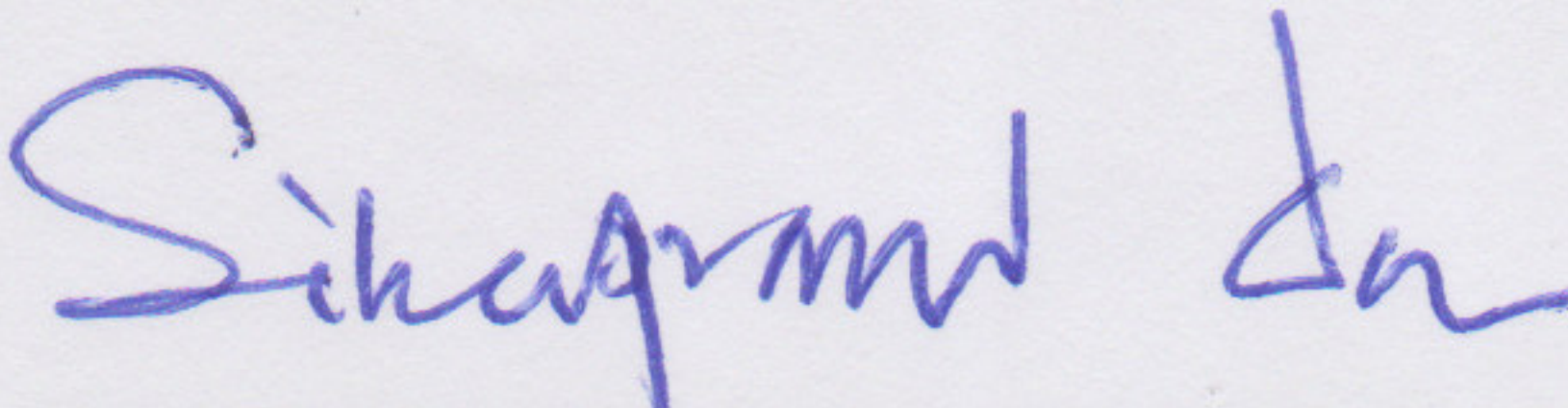
**Interacciones débiles y la posible existencia de una nueva
fuerza**

Trabajo de graduación presentado por María Teresa Corzo López para
optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,

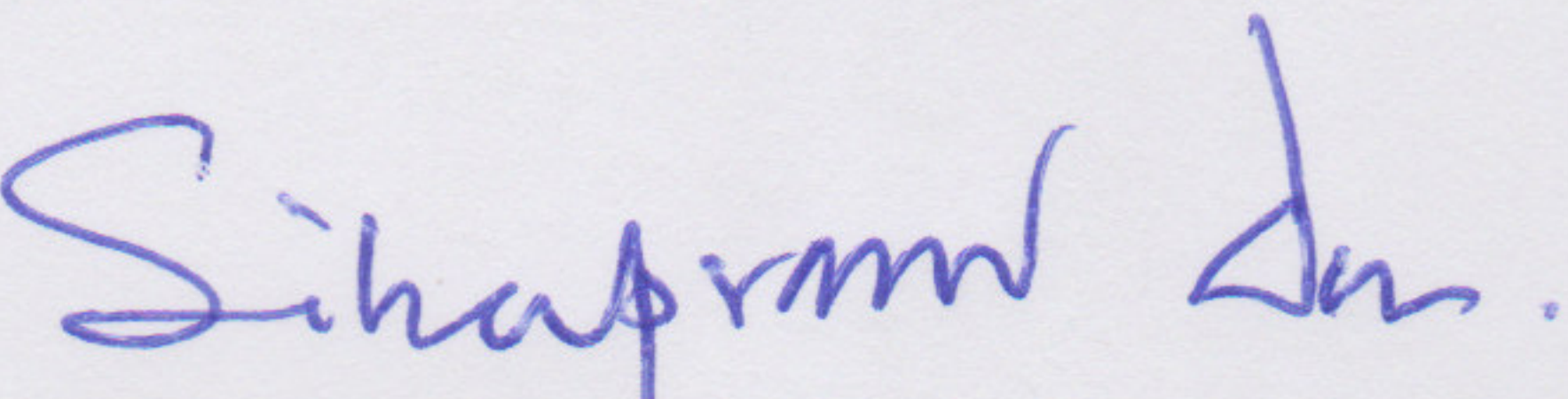
2019

Vo.Bo.:

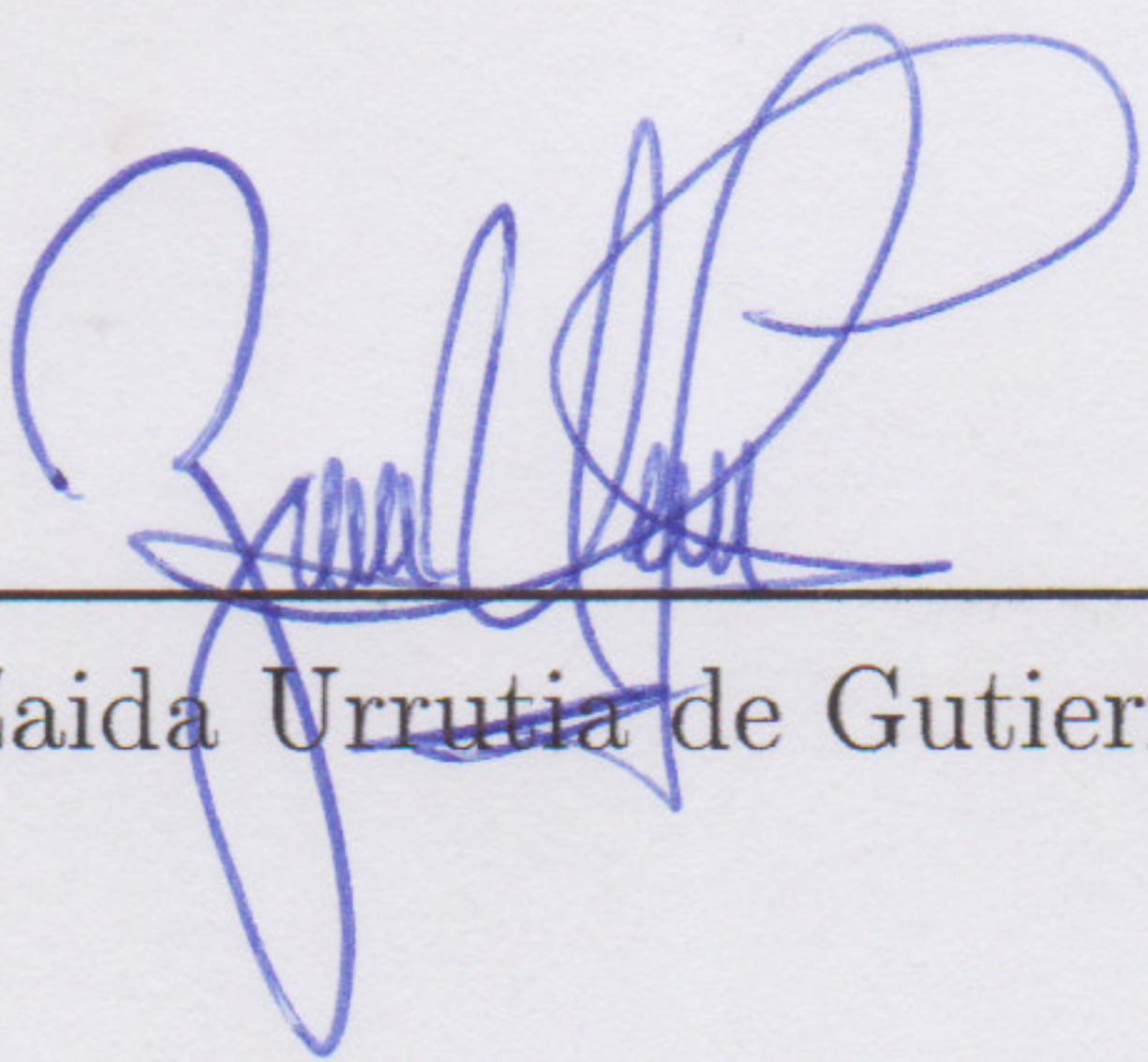
(f) 

PhD. Siba Prasad Das

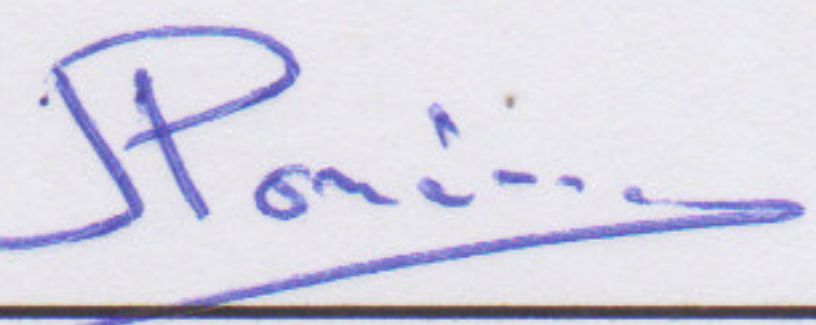
Tribunal Examinador:

(f) 

PhD. Siba Prasad Das

(f) 

MSc. Zaida Urrutia de Gutierrez

(f) 

PhD. Juan Adolfo Ponciano

Fecha de aprobación: Guatemala, 25 de octubre de 2019.

Este trabajo es producto de muchos años de esfuerzo y de estudio que culminan en esta recta final. Después de cuatro años de estudio en esta carrera, que no fueron fáciles, puedo decir que es una de las experiencias más gratificantes que he vivido. Crecí mucho como persona tanto educativamente como moralmente.

Todo esto no hubiera sido posible sin personas que siempre estuvieron a mi lado, quiero agradecer principalmente a mis padres, Álvaro Hugo Corzo Rivera y Yanira del Rosario López de Corzo, ya que siempre me apoyaron tanto financieramente como emocionalmente a cumplir este logro, también agradezco su paciencia en el tiempo de este trabajo y en todos los aspectos de mi vida. Este trabajo está dedicado a ellos y también a Dios que también gracias a Él tuve la constancia para poder trabajar en esto.

Agradezco a la Licda. Zaida de Urrutia por habernos guiado desde el primer día de hasta las últimas vueltas de esta carrera, también a Olga Castellanos por ayudarme en los trámites. Este trabajo no hubiera sido posible sino por la Dra. Maria Eugenia Cabrera que fue quien me aceptó y dio el tema para este trabajo, aunque no logré terminar esto con ella, se lo agradezco, siguiendo esto agradezco profundamente al Dr. Siba Prasad Das quien aceptó ser mi asesor y me ayudó a lo largo de este trayecto.

Por último, y ciertamente no menos importante, quiero agradecer a mis compañeros de carrera con quienes compartí todos estos años, a mis amigos, principalmente a Lucía Isabel Illescas Brol y a Sergio Penagos Samayoa quienes me dieron ánimos cuando lo necesitaba y me empujaron a dar lo mejor de mi en este trabajo, y a Christian Jensen, Juan Diego Robles y Alvaro Torres que son parte importante de mi vida y cada uno en su manera me ayudó en algún momento.

Prefacio	V
Lista de figuras	IX
Lista de cuadros	XI
Resumen	XIII
1. Introducción	1
2. Objetivos	3
2.1. Objetivos generales	3
3. Marco teórico	5
3.1. Modelo estándar	5
3.1.1. Leptones	6
3.1.2. Quarks	6
3.2. Interacción de partículas en el modelo estándar	7
3.2.1. Interacciones débiles	7
4. Teoría cuántica de campos para fermiones	9
4.1. Teoría cuántica de campos I: Campo escalar libre	9
4.1.1. El campo cuántico descriptivo	9
4.1.2. El campo cuántico: Formulación Lagrange-Hamilton	15
4.1.3. Generalizaciones	27
4.2. Teoría de perturbación para campos que interactúan	29
4.2.1. La representación de interacción	30
4.2.2. La matriz S y la expansión de Dyson	32
4.2.3. Ejemplo de scattering de nucleones	33
5. Características de las interacciones débiles	35
5.1. Covariantes bilineales	35
5.2. Fermiones sin masa: Los neutrinos de dos componentes	36

5.3.	Fuerza débil	37
5.3.1.	Decaimiento β	37
5.3.2.	La interacción débil	37
5.3.3.	La interacción de 4 puntos	37
5.3.4.	Propagador débil	38
5.3.5.	Violación de paridad	39
5.3.6.	Violación CP	41
5.4.	La interacción VA	42
5.5.	La interacción VA y neutrinos	43
6.	Teoría con un nuevo bosón Z	45
6.1.	Lagrangiano efectivo y eigenestados Z'	46
6.2.	El portal Z' : Búsquedas directas	46
6.2.1.	Detección directa	47
7.	Conclusiones	49
8.	Bibliografía	51

Lista de figuras

1.	Sistema vibracional con dos grados de libertad	9
2.	Movimiento de dos modos normales	11
3.	Interacción de 4 puntos de Fermi [5]	38
4.	Ejemplo de conservación de paridad [5]	41

1. Todas las posibles combinaciones bilineales covariantes de matrices γ [4] . . . 36
2. Operadores efectivos para scattering de nucleones en materia oscura. v es la velocidad de la materia oscura en el marco del laboratorio. M_n es la masa del nucleón y $\Delta \Sigma$ está definido como $\langle N | \sum_q \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 q | N \rangle = \Delta \Sigma \bar{U}_N \gamma_\mu \gamma^5 U_N$ con U_N como la función de onda del nucleón[11]. Los acoplamientos de g_V y g_A son determinados por (237)[10]. 47

La interacción débil es una fuerza física fundamental que gobierna las interacciones entre hadrones y leptones como el caso de emisión y absorción de los neutrinos y además es la responsable por el proceso de decaimiento de partículas en radioactividad que es 10^{-15} veces más pequeña que la interacción fuerte y actúa en distancias más pequeñas que la distancia entre los nucleones en un átomo. Este trabajo provee una breve inspección y descripción bibliográfica a este tema tan amplio.

Primero se introdujo la teoría cuántica de campos por medio de una descripción clásica de campos libres y luego su formalización a la teoría cuántica. Se trabajó con la representación de Heisenberg y sus otras derivaciones. Después se trabajó con un ejemplo de scattering de nucleones en el cual serán útiles diferentes herramientas como la expansión de Dyson.

Después se describió por medio de revisión de distintas fuentes bibliográficas, las características de una fuerza débil incluyendo covariantes bilineales y helicidad, las distintas violaciones como la de paridad y CP y las posibles interacciones.

Finalmente, se describe una teoría nueva que puede ser posible con un nuevo bosón Z' que se acopla débilmente y puede ser ligado, tanto al modelo estándar como a la materia oscura.

Para poder estudiar física de partículas se deben saber cuáles son los constituyentes principales de la materia. ¿Cómo estos están categorizados? ¿Cómo interactúan entre ellos? Estas preguntas son hechas debido al rango tan grande que existe de partículas subatómicas. Estas mismas son las que nos ayudan a entender la naturaleza del universo. Por eso es que la física de partículas se enfoca en el estudio de esto, la resolución de estas dudas.

La ciencia de la física de partículas surge con la invención de aceleradores de partículas, de esta manera se descubrieron más de 100 partículas subatómicas que no se sabían si podrían ser fundamentales o no. Históricamente, se pensaba que los átomos eran las partículas más pequeñas e indivisibles, después se conocieron los protones, electrones y neutrones y ahora se sabe aún más, que estos son formados por quarks. Entonces estas 100 partículas subatómicas encontradas experimentalmente, también están formadas por las dos partículas fundamentales, quarks y leptones.

Los quarks se dividen en seis variedades; *up* (u), *down* (d), *charm* (c), *strange* (s), *top* (t) y *bottom* (b). Hoy en día el modelo estándar es una teoría relativista de campos cuánticos que describe las interacciones entre partículas (fuerte, débil y electromagnética), el rol de la física de partículas puede ser descrito como la explicación de la estructura fundamental de la materia y sus interacciones en la naturaleza. El modelo estándar sirve ya que es la teoría más precisa que mejor logra explicar estas dudas. A pesar de que sea de gran precisión siguen existiendo dudas y mediciones experimentales que siguen sin poder ser resueltas por este modelo.

El modelo estándar afirma que el material del que está hecho el universo está hecho por fermiones elementales definidos como campos, los cuales cuando son excitados forman partículas. Las partículas asociadas con la interacción de campos son llamadas bosones. Los cuantos de la interacción débil con los fermiones son W^+ y W^- , los cuales son los bosones cargados y los bosones neutrales llamados Z. Estos fueron descubiertos por el CERN en 1983. El interés principal de este trabajo es poder describir una nueva interacción entre fermiones mediada por un nuevo bosón Z' .

2.1. Objetivos generales

- Describir y entender las características y propiedades de las interacciones débiles.
- Entender la teoría para poder estudiar al bosón Z y cómo se acopla débilmente.
- Saber la introducción de la teoría cuántica de campos.
- Poder describir una posible nueva fuerza en partículas que todavía no han sido detectadas.

3.1. Modelo estándar

El objetivo principal de la física de partículas es identificar unidades de materia que parecen no tener alguna estructura definida y estudiar las fuerzas que actúan sobre ellas. Los dos elementos fundamentales en los que se enfoca esta rama de la física son: estructura y fuerza. Intuitivamente, lo que se espera de las partículas más pequeñas de la materia es que interactúen de la manera más simple por lo que implicaría una conexión o relación con las fuerza básicas.

Esta relación es en la que se basa el estudio de las fuerzas, pero se puede ver desde un inicio, por ejemplo en el descubrimiento del electrón por Thomson junto con la teoría de Maxwell sobre la existencia de un campo electromagnético. La unión de estos descubrimientos y su interacción es lo que marcan el inicio de la física de partículas moderna.

Esta teoría ha avanzado desde su descubrimiento, lo ha hecho a tal punto que ya se han encontrado un conjunto de partículas que pueden ser tomadas como análogas al electrón y a su interacción con diferentes fuerzas. Para estas nuevas partículas se han hecho varios experimentos para probar su existencia y a esta colección de partículas se les llama modelo estándar. En este modelos se incluyen 6 quarks, 6 leptones y los bosones gauge que son los portadores de una interacción; el gluón y los bosones W y Z.

La interacción débil es llevada a cabo por partículas llamadas bosones W y Z que actúan en el núcleo de los átomos y de ahí se explica el decaimiento radiactivo. La interacción fuerte es llevada a cabo por medio del gluón, la partícula responsable de la unión de quarks en hadrones; estas fuerzas se creen estar relacionadas y eso es una de las metas más grandes que se tienen en la física de partículas. Para resumir, las partículas elementales, quarks y leptones, interactúan con las fuerzas, este comportamiento está modelado por la mecánica cuántica. Además, los bosones gauge que son las partículas de fuerza, mencionados anteriormente como bosones W y Z entre otros, son los que interactúan con los fermiones.

3.1.1. Leptones

Los leptones son generalizaciones directas del electrón. Este término denota dos posibles opciones para las partículas: si están cargadas, entonces interactúan por medio de la fuerza electromagnética y débil. Si no están cargadas, i.e. carga neutra, interactúan solo débilmente.

El involucramiento del electrón en las interacciones electromagnéticas y débiles se puede observar en el decaimiento β (cuando un electrón decae a un protón), el electrón emitido está acompañado por un leptón neutro el cual lo conocimos luego como el antineutrino $\bar{\nu}_e$.

3.1.2. Quarks

En contraste, existen los quarks, los cuales son descritos como los componentes de los hadrones. Estas son partículas sensibles a la fuerza fuerte y su principal característica es que interactúan con estas tres fuerzas, junto con la electromagnética y la débil. Esta es la principal diferencia entre los dos constituyentes de la materia.

Las interacciones débiles junto con la fuerza electromagnética son descritas por la teoría llamada electrodébil que, como el nombre lo indica, unifica a esas dos fuerzas fundamentales, por otro lado, las interacciones fuertes están descritas por la teoría cromodinámica cuántica (QCD). Lo que todas tienen en común es que son interacciones gauge. Todo el modelo estándar está descrito por las simetrías de estas tres interacciones.

Cuando los quarks interactúan vía QCD se unen de tal manera que se los hadrones toman la forma de neutrones, protones y piones. La teoría cromodinámica extiende la definición de carga y se define su análogo, los colores de las partículas; son asociados tres colores a cada sabor, los gluones son los encargados de portar el *color*. Se ha visto que los gluones están confinados por medio de QCD y han sido observados como los responsables de hadronizar al ser producidos en una colisión de corta distancia [1]. Las interacciones restantes entre quarks dan como resultado las fuerzas que se observan entre neutrones y protones las cuales forman la unión de nucleones en núcleos.

Hablando específicamente de la fuerza débil, se entiende que debe tener una diferencia fundamental con la fuerte, y por su nombre se puede saber que no es lo suficientemente fuerte, en este caso, para producir algún efecto de unión entre los sistemas estudiados, comparado con la fuerte mencionada anteriormente. Además de esto, cuando las partículas interactúan por medio de la fuerza fuerte, ésta va aumentando a medida que la distancia de las partículas también lo hace; por esta razón es que los quarks están dentro de los protones y neutrones. En cuanto a la fuerza débil, ésta actúa de manera contraria, disminuye a medida que la distancia entre partículas aumenta.

Para poder comprobar la estructura de los sistemas que estudian estas fuerzas, existen tres tipos de experimentos los cuales son: scattering, espectroscopía y *breakup*, el cual es el proceso en donde se desvanece el límite de anomalía de un potencial óptico y da lugar a una nueva normalidad llamada la anomalía del límite (BTA) [1]. Estos tres experimentos son los que guían al descubrimiento de la cadena de construcción de átomos \rightarrow núcleos \rightarrow hadrones \rightarrow quarks.

3.2. Interacción de partículas en el modelo estándar

Históricamente se sabe cómo fue el descubrimiento de las fuerzas, primero con Newton como no podía encontrar un mecanismo satisfactorio para describir la relación entre dos cuerpos alejados y cuando pudo describirla guió a la ley de la fuerza de la gravitación. Después, en el siglo IX se formularon las ideas de fuerzas más intrínsecas la cual conocemos como la electromagnética, Maxwell fue quien unió estas ecuaciones que describen esta fuerza, que más adelante se vio que todas estas ecuaciones son derivadas de un Lagrangiano.

Después del descubrimiento de estas dos fuerzas fundamentales clásicas se empezaron a conocer otros efectos sin descripción en el área cuántica. Por ejemplo, el efecto Compton o el efecto fotoeléctrico, en donde a ondas se le dieron aspectos y características de partículas y viceversa, de alguna manera debía ser explicadas estas interacciones por lo que se empezó a estudiar sobre estas fuerzas.

3.2.1. Interacciones débiles

Hideki Yukawa fue uno de los físicos que empezó a formular teorías para la descripción de estas interacciones. Propuso una en la que describía las interacciones fuertes entre los protones y neutrones y propuso una extensión al decaimiento β del neutrón. Esta teoría fue creada análogamente a la teoría electromagnética en el que postuló un campo de fuerza asociado con un campo cuántico análogo al del protón. Yukawa consideró un potencial estático que podría describir la interacción n-p (neutrón-protón), se sabía que esta interacción decrecía rápidamente por la separación entre partículas por lo que postuló un potencial de energía donde propuso una constante análoga a la carga “fuerte” llamada g_s y una carga “débil” al leptón, con esto el predijo la existencia del decaimiento débil $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ [1].

Lo que se dedujo de esto es que el rango de la fuerza débil es mucho menor a las dimensiones de las fuerzas nucleares y equivalentemente, las masas con las que se trabajan son mucho mayores a la de los piones. Ahora, el decaimiento β es ahora entendido que ocurre al nivel de los quarks y ocurre por medio de procesos de intercambio de W^- . Junto con estos procesos, existen los procesos de corriente neutral los cuales trabaja con el intercambio de Z^0 . Se vio entonces, que estos cuantos, W^- y Z^0 trabajan mediante interacciones débiles.

Los campos W y Z en los que se trabaja son campos mediadores de fuerza y ambos tienen diferentes masas dados por $M_W \approx 80\text{GeV}$ y $M_Z \approx 91\text{GeV}$. El rango de fuerzas con las que se trabaja en este tipo de interacción es de ($\sim 2.5 \times 10^{-18}\text{m}$) que es tres órdenes más pequeño que las dimensiones nucleares. La naturaleza ha dado a ver que ambas fuerzas, la fuerte y la débil son teorías gauge, generalizaciones del electromagnetismo. Esto da lugar a la posibilidad que estas tres fuerzas puedan unirse.

4.1. Teoría cuántica de campos I: Campo escalar libre

4.1.1. El campo cuántico descriptivo

Los sistemas mecánicos están caracterizados por el número de grados de libertad que tienen, por ejemplo un péndulo unidimensional tiene un grado de libertad, dos péndulos unidimensionales tienen dos, etc.

Un campo escalar $\phi(x, t)$ es un sistema con un número infinito de grados de libertad ya que varía de un desplazamiento independiente que varía en el tiempo. La teoría cuántica de Campos, que llamaremos QFT, tiene dos grandes pasos:

- Descripción de sistemas continuos llamados campos que tienen infinitos grados de libertad.
- Aplicación de teoría cuántica a estos sistemas.

Para poder ilustrar esto, consideraremos un sólido pequeño que tiene solo dos átomos que se pueden mover libremente. Estos, de masa idéntica, están conectados por una cuerda y los extremos fijados en un punto con una tensión T . Este caso es ilustrado en las siguientes figuras:

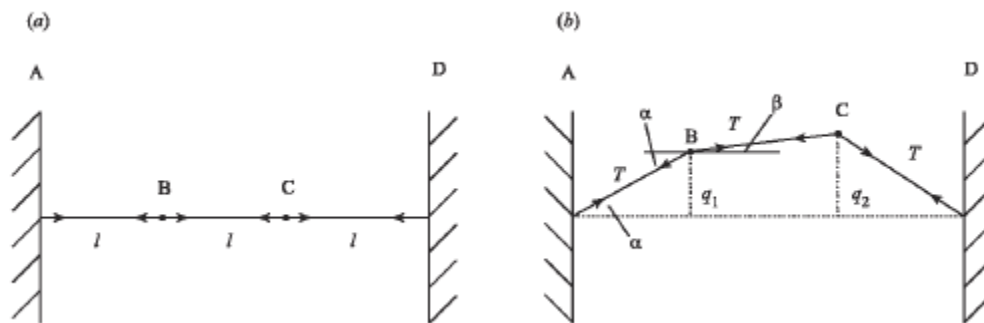


Figura 1: Sistema vibracional con dos grados de libertad

Vemos que es un sistema con 2 grados de libertad porque son dos masas puntuales en reposo con tensión en la cuerda. En la figura (b) el desplazamiento es transverso. Tomando en cuenta estas vibraciones transversas tenemos entonces $q_r(t)$ donde ($r = 1, 2$) que son los posibles desplazamientos. Estamos en la energía total del sistema, la cual sabemos que se obtiene por la suma total de todas las energías. Para la figura (b) el átomo 1 tiene una fuerza de :

$$F_1 = T \sin \alpha - T \sin \beta \quad (1)$$

Suponiendo que $q_{1,2} \ll l$ tenemos que:

$$\sin \alpha = \frac{q_1}{(l^2 + q_1^2)^{1/2}} \approx \frac{q_1}{l} \quad (2)$$

$$\sin \beta = \frac{(q_2 - q_1)}{[l^2 + (q_2 - q_1)^2]^{1/2}} \approx (q_2 - q_1)l \quad (3)$$

Por lo que:

$$F_1 = \frac{T}{l}(2q_1 - q_2) \quad (4)$$

Similarmente:

$$F_2 = \frac{T}{l}(2q_2 - q_1) \quad (5)$$

Las ecuaciones de movimiento entonces son:

$$m\ddot{q}_1 = -k(2q_1 - q_2) = -\frac{\partial V}{\partial q_1} \quad (6)$$

$$m\ddot{q}_2 = -k(2q_2 - q_1) = -\frac{\partial V}{\partial q_2} \quad , \quad \text{con} \quad k = \frac{T}{l} \quad (7)$$

Siendo T= tensión y l= longitud, por lo que:

$$V = k(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2) \quad (8)$$

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) son ecuaciones diferenciales lineales acopladas. La diferencia entre lineal y no lineal es importante en la dinámica . Lo más importante es que las soluciones de las ecuaciones lineales pueden sumarse con coeficientes constantes a lo cual llamamos superposición lineal, para poder crear nuevas soluciones igualmente válidas. Además las ecuaciones no lineales dinámicas pueden llevar a un movimiento caótico.

Esta linealidad y no linealidad también se ve en las ecuaciones de movimiento para campos. En este contexto una ecuación para un campo $\phi(x, t)$ se dice que es lineal si ϕ y las derivadas del tiempo de este aparecen en el primer orden. La linealidad es verdadera para las ecuaciones de Maxwell en el campo electromagnético y es la razón matemática detrás de toda la física de la interferencia y difracción, que precisamente puede ser entendida en términos de superposición de soluciones de estas ecuaciones. Asimismo, las ecuaciones de mecánica cuántica (ecuaciones de Schrödinger) son lineales en este sentido. Consistente con los principios de superposición de mecánica cuántica.

En este caso mecánico, fue cierto debido a la aproximación de $q_{1,2}$. Si no se hubiera tomado este supuesto, la solución sería altamente no lineal. Sin embargo se dice que la mecánica cuántica es lineal sin ninguna aproximación. La aparición de términos lineales aseguran que V de (8) tendrá únicamente términos cuadráticos.

Ahora vemos el aspecto acoplado de (4) y (5). Vemos que la ecuación de (6) depende de ambas, q_1 y q_2 , y lo mismo para (7).

Este acoplamiento tiene su origen en el término $-kq_1q_2$ en V que físicamente corresponde a la cuerda que conecta los dos átomos. Si esta parte no estuviera en las ecuaciones (4) y (5), describirían dos osciladores armónicos con frecuencia $(2k/m)^{1/2}$. Si se utilizara ese acoplamiento sería más complicado obtener las soluciones.

Para resolverla, sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 &= -k(2q_1 - q_2) - k(2q_2 - q_1) \\ m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) &= -k(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (9)$$

y

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2 &= -k(2q_1 - q_2) + k(2q_2 - q_1) \\ m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) &= -3k(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) satisfacen las ecuaciones no acopladas. La combinación de $q_1 + q_2$ oscila con una frecuencia de $\omega_1 = (k/m)^{1/2}$ mientras que $q_1 - q_2$ oscila a $\omega_2 = (3k/m)^{1/2}$.

Introducimos entonces:

$$Q_1 = (q_1 + q_2)/\sqrt{2} \quad Q_2 = (q_1 - q_2)/\sqrt{2} \quad (11)$$

Donde $\sqrt{2}$ se agrega por conveniencia que nos será útil más adelante.

Las soluciones de (9) y (10) son:

$$Q_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t$$

$$Q_2(t) = C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t$$

Las cuales tienen condiciones iniciales $q_1(0) = q_2(0) = a$ y $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Se resuelve esta ecuación diferencial con lo que se obtiene:

$$Q_1(t) = \sqrt{2}a \cos \omega_1 t \quad (12)$$

$$Q_2(t) = 0 \quad (13)$$

Vemos entonces que $q_1 = q_2$ en todo momento y que el sistema vibra con una frecuencia de ω_1 . Cuando un sistema se mueve como uno solo a una misma frecuencia es llamado un modo.

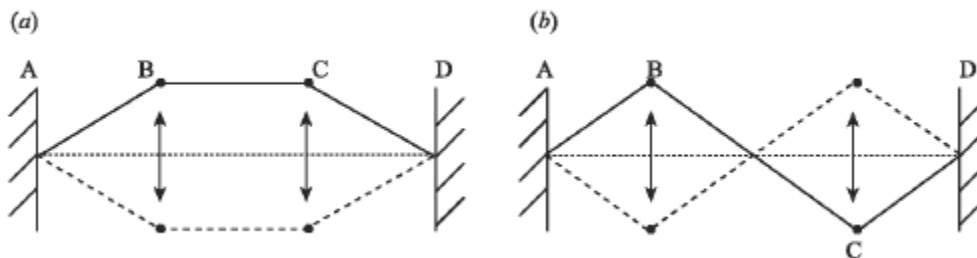


Figura 2: Movimiento de dos modos normales

La figura (a) muestra el sistema en el modo caracterizado por $q_1 = q_2$. En este modo solo $Q_1(t)$ cambia y $Q_2(t) = 0$. Otro modo existe cuando $q_1 = -q_2$ en todo momento. En este

caso $Q_1(t) = 0$ y $Q_2(t)$ oscila en la frecuencia ω_2 . La figura (b) muestra las combinaciones de las coordenadas Q_1, Q_2 cuando hay un movimiento único por frecuencia, éstas son llamadas coordenadas normales.

En general las condiciones iniciales no serán exactas. Para que sea un modo $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$ van a ser diferentes a 0. Tomando las ecuaciones de (11) tenemos que:

$$q_1 = (Q_1 + Q_2)/\sqrt{2} \quad (14)$$

$$q_2 = (Q_1 - Q_2)/\sqrt{2} \quad (15)$$

Donde q_1 y q_2 son la suma de dos términos oscilando con frecuencia ω_1 y ω_2 .

Decimos que el sistema está en una superposición de modos. La idea de modo es importante cuando se ve la energía del sistema. La energía cinética puede ser descrita en términos de Q_r

$$T = \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 \quad (16)$$

Y por la ecuación (8) sabemos que:

$$V = \frac{1}{2}m\omega_1^2 Q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 Q_2^2 = V(Q_1, Q_2) \quad (17)$$

Por lo que la energía total es:

$$E = T + V = \left[\frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 \right] + \left[\frac{1}{2}m\omega_1^2 Q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 Q_2^2 \right] \quad (18)$$

Se ve que no hay acoplamiento de Q_1, Q_2 . La energía tiene la forma de un sistema con dos elementos independientes donde cada uno tiene un movimiento armónico. Estos elementos son en realidad los modos. Estos no interactúan pero los átomos sí. Este desacoplamiento está reflejado en él mismo en las ecuaciones de movimiento para las variables Q .

$$m\ddot{Q}_r = \frac{-\partial V(Q_1, Q_2)}{\partial Q_r} \quad r = 1, 2 \quad (19)$$

Lo más importante de los modos es que no interactúan debido a que se ignoran términos mayores al cuadrático en $V(q_1, q_2)$. Esta será la base para la descripción de la Teoría cuántica de campos (QFT) para partículas interactuando. El sistema en cuestión tiene 2 grados de libertad, el primero es el desplazamiento de q_1 y q_2 . Vimos la conveniencia de escribirlos en coordenadas normales donde éstas son los grados de libertad relevantes. Lo importante es que los modos y las coordenadas normales generalizan el problema de N átomos. Para N átomos con desplazamiento 1D hay N grados de libertad. Escribiendo la energía total:

$$E = \sum_{r=1}^N \frac{1}{2}m\dot{q}_r^2 + V(q_1, \dots, q_r) \quad (20)$$

Que incluye todos los acoplamientos entre átomos, suponemos nuevamente que los q_r son lo suficientemente pequeños para solo tomar en cuenta los términos cuadráticos de V . Generalizando la ecuación (11) tenemos que:

$$Q_r = \sum_{s=1}^N a_{rs}q_s \quad (21)$$

Y podemos escribir la ecuación (20) como:

$$E = \sum_{r=1}^N \left[\frac{1}{2} m \dot{Q}_r^2 + \frac{1}{2} m \omega_r^2 Q_r^2 \right] \quad (22)$$

Q_r son las coordenadas normales y ω_r son las frecuencias normales y hay N de ellas. Si uno de los modos es distinto a cero, los N átomos se mueven en un solo modo. La suma de (22) nos permite decir que el sólido de N átomos se comporta como si fueran N osciladores armónicos simples e independientes. Sin embargo, no pueden ser identificados con las coordenadas originales, las coordenadas de los modos son los grados de libertad relevantes más que los de las partículas originales.

Ahora veremos los sistemas de la forma de la mecánica cuántica. Se sigue cumpliendo que la suma de átomos de la energía son independientes y tomados como osciladores armónicos, pero debemos tomar en cuenta que en mecánica cuántica, el oscilador sólo existe en ciertos estados definitivos, los cuales los eigenvalores de energía son cuantizados. Para cada modo de frecuencia ω_r , los valores de energía permitidos son:

$$\epsilon_r = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Es una de las diferencias con el sistema clásico donde valores arbitrarios son permitidos para energía de los osciladores. El eigenvalor de energía total es de:

$$E = \sum_{r=1}^N \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad (24)$$

Las frecuencias ω_r son determinadas por las fuerzas interatómicas y se cumple clásica y cuánticamente. Sin embargo, en teoría cuántica se tiene que los estados de energía del sistema de N cuerpos vibrando son caracterizados por los valores de un conjunto de números enteros (n_1, n_2, \dots, n_N) que determinan las energías de cada oscilador de modo.

Para cada oscilador de modo, $\hbar \omega_r$ mide el cuanto de energía vibracional; la energía de un estado de modo es determinado por n_r . Tomamos ahora una reinterpretación de este resultado, nos olvidamos de los N grados de libertad originales (q_1, q_2, \dots, q_N) y los N "átomos". En vez, nos concentramos los cuantos y los tratamos como objetos; decimos que en un estado con energía $(n_r + \frac{1}{2}) \hbar \omega_r$ hay n_r cuantos presentes. Para el estado caracterizado por (n_1, n_2, \dots, n_N) hay n_1 cuantos de modo 1 con frecuencia ω_1 , n_2 cuantos de modo dos, etc.

Vemos que a pesar que los modos en N son fijos, los valores de n_r no tienen restricción excepto si la energía total es fija. Por lo tanto nos movemos de un número fijo (N grados de libertad) a un número variable (n_r solo se restringe por la condición de energía en (5.28)). En el caso de un sólido, estos cuantos de energía vibracional son fonones, los cuales son definidos como cuantos elementales de excitación vibracional.

Regresando al modelo clásico con N grados de libertad armónicos que interactúan; es posible aumentar N al infinito y decrecer el espacio interatómico a cero para que $Na = L$ (finito). Después tenemos un sistema continuo clásico en el que es igual a L. Las vibraciones transversas están descritas por un campo $\phi(x, t)$ donde en cada punto x de la cuerda, $\phi(x, t)$ mide el desplazamiento desde el equilibrio en el tiempo t de un pedazo de cuerda alrededor de x. De tal manera pasamos de un sistema con grados de libertad discretos $(q_r(t) \text{ o } Q_r(t))$

a uno continuo, el campo de desplazamiento $\phi(x, t)$. El subíndice discreto r se vuelve el argumento continuo x .

En el problema continuo, el análogo de desplazamiento pequeño, el cual limitaba a términos cuadráticos en V , implica que $\phi(x, t)$ obedece la ecuación de onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

Suponiendo que la cuerda va de $x=0$ a $x=L$, la solución que satisface esta condición es:

$$\phi_r(x, t) = A_r(t) \text{sen} \left(\frac{r\pi x}{l} \right) \quad (26)$$

Donde $r = 1, 2, 3, \dots$ dice el número de ondas que se deben ver en el intervalo $(0, L)$. Insertando la ecuación (26) en la ecuación (25) tenemos:

$$\ddot{A}_r = -\omega_r^2 A_r \quad (27)$$

La amplitud $A_r(t)$ de (26) ejecuta un movimiento armónico simple con frecuencia ω_r . Cada movimiento de la cuerda que tiene una longitud de onda definitiva tiene una frecuencia definitiva también por lo que también es un modo. Como en el caso discreto, el movimiento general de la cuerda es una superposición de modos.

$$\phi(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \text{sen} \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \quad (28)$$

Ahora examinando la energía total. Es el análogo a la ecuación (20)

$$E = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right] dx \quad (29)$$

Donde $\rho = m/L$. Combinando (28) y (29) obtenemos:

$$E = (L/2) \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{A}_r^2 + \frac{1}{2} \rho \omega_r^2 A_r^2 \right) \quad (30)$$

Vemos que al igual que el caso discreto, la energía total se da como la suma de energía de modos. La amplitud en A_r es una coordenada normal. Notamos que las ecuaciones (22) y (30) son análogas pero la (30) es para el caso infinito con infinitos grados de libertad. Lo último que se debe hacer es aplicar mecánica cuántica a un campo clásico. Los eigenvalores de energía se extienden al infinito:

$$E = \sum_{r=1}^{\infty} \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad (31)$$

Los estados excitados de un campo cuantizado son caracterizados por el número de fonones en cada frecuencia; el estado base no tiene. Si $L \rightarrow \infty$, (30) y (31) se vuelven integrales sobre una frecuencia continua. La idea esencial de esto, cuantizando modos independientes puede ser aplicada a una variedad de oscilaciones, Lo importante es a excitación elemental, es decir, el cuanto de modo. De esta forma tenemos también plasmones que son oscilaciones de plasma y magnones (oscilaciones magnéticas). Teniendo estas ideas existe entonces una analogía que

nos ayuda a entender los campos cuánticos, como por ejemplo el campo electromagnético. Consideremos un espacio donde hay campos electromagnéticos, éstos obedecen una versión 3D de la ecuación de onda. Con condiciones iniciales, la energía total puede ser descrita como suma de energías de modo que las cuales su amplitud es: $A(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$ que es la componente de Fourier de la onda. Estos osciladores están todos cuantizados y sus cuantos son los fotones. Hasta ahora solo tenemos el fotón en el campo cuántico relativista. El electrón también es considerado una excitación del “campo del electrón”. ¿Qué es lo que oscila entonces para que un campo vibre? Postulamos un campo cuántico relativista para el electrón que obedezca alguna ecuación de onda, en este caso para electrones que no interactúan sería la ecuación de Dirac. El campo está expandido como la suma de componentes de Fourier como en el campo electromagnético. Cada componente se comporta como un oscilador independiente y los cuantos de este oscilador son electrones.

Esto está sobre simplificado ya que existe una diferencia, esta es que los fotones son clasificados como bosones de espín 1 y los electrones son fermiones de espín 1/2. Es casi imposible encontrar campos con excitaciones de espín 1/2, por lo que con los electrones, Maxwell plantea que simplemente es algo que existe. También al trabajar con fermiones debemos tomar en cuenta el principio de exclusión.

4.1.2. El campo cuántico: Formulación Lagrange-Hamilton

El principio de acción: mecánica de partículas Lagrangiana

Ahora entramos a la descripción cualitativa que debe estar descrita matemáticamente. Queremos encontrar en un mismo marco de trabajo algo que funcione en aspectos clásicos y cuánticos y este es el principio de mínima acción de Hamilton con la acción definida como el lagrangiano.

Veamos la diferencia entre mínima acción con la resolución Newtoniana. Consideremos el caso básico que es la mecánica clásica de partículas. En el caso Newtoniano, las ecuaciones de movimiento que son postuladas, involucran a la fuerza como el aporte físico esencial. A partir de esto, las trayectorias de la partícula pueden ser calculadas. En el enfoque de mínima acción, las ecuaciones de movimiento no están postuladas como básicas y la primacía de fuerzas cede a la de potenciales. El camino que una partícula viaja es determinado por el principio que debe seguir este camino particular ya que la acción es minimizada. La acción S es definida por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (32)$$

Donde $q(t)$ es la posición de las partículas como función del tiempo, $\dot{q}(t)$ es la velocidad y L es el lagrangiano. Como L está explícita en $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ podemos valorar S con cualquier posición y dos tiempos cualesquiera. ¿Qué es L ? Simplemente la resta de la energía cinética menos la energía potencial $L = T - V$.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (33)$$

Sabiendo $V(x)$ podemos poner el principio de mínima acción en marcha. Pero, ¿cómo sabemos cuál es que minimiza S ? Este problema se puede resolver con cálculo, observamos que es parecido a cuando tenemos una función $f(t)$ y buscamos un punto donde la función tienen un valor estacionario. En este caso S es una función de las función $q(t)$ por lo que es un funcional de $q(t)$ y buscamos un $q_c(t)$ que minimice S .

Análogo al caso de una variable, consideramos una pequeña variación $\delta q(t)$ en el camino de $q(t_1)$ a $q(t_2)$, el mínimo δS correspondiente a δq debe desaparecer y está dado por:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (34)$$

Usando $\delta \dot{q}(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt}$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d(\delta q(t))}{dt} \right) dt \quad (35)$$

Resolviendo la integral por medio de integración por partes, obtenemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \quad (36)$$

Como consideramos que todas las variaciones de camino empiezan en t_1 y terminan en t_2 , entonces $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Por lo que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] = 0 \quad (37)$$

Como debe ser verdadera para cualquier $\delta q(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad (38)$$

Esta es llamada la ecuación Euler-Lagrange.

Veamos como funciona en un caso simple donde $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p \quad (39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{dp}{dt} \Rightarrow F - \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow F = \frac{dp}{dt} \quad (41)$$

Vemos que efectivamente es la ecuación de Newton de movimiento. Para el caso del oscilador armónico tenemos el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (42)$$

Se puede generalizar a N osciladores independientes:

$$L = \sum_{r=1}^N \left(\frac{1}{2}m\dot{Q}_r^2 - \frac{1}{2}m\omega_r^2 Q_r^2 \right) \quad (43)$$

Se observa que para muchos sistemas dinámicos, el lagrangiano tiene la forma de T-V, ahora debemos pasarlo a la mecánica cuántica.

Mecánica cuántica con Heisenberg- Lagrange- Hamilton

Es posible que exista una correspondencia directa entre la mecánica clásica y cuántica que es la representación de Heisenberg. En la representación de Schödinger, las variables dinámicas, como las posición x , son independientes del tiempo y Ψ es dependiente del tiempo. Por esa razón utilizamos la representación de Heisenberg donde la función de onda es fija y las variables dinámicas cambian con el tiempo. Eso es lo que necesitamos para poder encontrar el análogo a $q(t)$.

Hay que recordar una diferencia fundamental entre la mecánica cuántica y clásica; ésta es que en la cuántica las variables dinámicas son operadores que generalmente no conmutan. ¿Qué es un conmutador? Este se enuncia como:

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i \quad (44)$$

$$\hat{p} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}} \quad (45)$$

Teniendo la ecuación de movimiento de Heisenberg:

$$\dot{\hat{A}} = -i[\hat{A}, \hat{H}] \quad (46)$$

Donde el Hamiltoniano está descrito por el lagrangiano \hat{L} por:

$$\hat{H} = \hat{p}\dot{\hat{q}}^2 - \hat{L} \quad (47)$$

Y \hat{A} es cualquier observable dinámico.

Por ejemplo, en el caso del oscilador:

$$\hat{L} = \frac{1}{2}m\dot{\hat{q}}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \quad (48)$$

$$\hat{p} = m\dot{\hat{q}} \quad (49)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \quad (50)$$

Que es el operador general de energía. Nótese que \hat{p} , obtenido del Lagrangiano utilizando la ecuación(4.45) es consistente con la ecuación de Heisenberg de movimiento para el operador $\hat{A} = \hat{q}$. La ecuación de movimiento de Heisenberg para $\hat{A} = \hat{p}$ nos lleva a:

$$\dot{\hat{p}} = -m\omega^2\hat{q} \quad (51)$$

Que es un operador que sigue la ley de Newton para un oscilador. Usando la expresión para p en (4.49) encontramos:

$$\hat{p} = m\dot{\hat{q}} \quad \dot{\hat{p}} = m\ddot{\hat{q}} \quad \ddot{\hat{q}} = -\omega^2\hat{q} \quad (52)$$

Aunque se ve parecida a la ecuación clásica de momento para la posición del oscilador, debemos tener cuidado y ver que es una ecuación que enuncia cómo un operador evoluciona en el tiempo.

Cuando tengamos la ecuación (52) entre funciones, veremos que la posición promedio de la partícula sigue la trayectoria clásica. Una partícula cuántica no seguirá un camino recto sino que tendrá fluctuaciones.

En las formulaciones originales de la teoría cuántica, estas fluctuaciones implicaban que el camino ya no era útil. Sin embargo, como las ecuaciones diferenciales satisficidas por los operadores en la representación de Heisenberg son generalizaciones cuánticas de mecánica Newtoniana entonces debe existir un análogo a la contribución de enfoque “camino a la acción” en mecánica clásica.

La idea fue dada por Dirac inicialmente pero Feynman fue quien la trabajó. La pregunta que se hace es ¿Cómo una partícula se va del punto $q(t_1)$ en t_1 a $q(t_2)$ a t_2 ? Sabemos que hay un número infinito de posibles caminos pero solo uno que lo minimiza a la integral (32).

En el caso cuántico, sin embargo vemos que la partícula no sigue un camino definido por las fluctuaciones. Lo que Feynman propone es que como no es posible un único camino, que se tomen todos los caminos posibles.

Pero se sabe que no todos los caminos son igual de probables y debemos tomar en cuenta la trayectoria clásica cuando $\hbar \rightarrow 0$. Debemos entonces hacer que pesen lo mismo todos los caminos por lo que Feynman propuso hacerlo con el siguiente factor:

$$e^{iS/\hbar} \quad (53)$$

Donde S es la acción para ese camino en específico. La amplitud mecánica cuántica para ir de $q(t_1)$ a $q(t_2)$ es proporcional a:

$$\sum_{\text{todos los caminos}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt\right) \quad (54)$$

Es una generalización de QFT. No se debe hacer uso del enfoque de integral de camino para QFT en este volumen. Su uso fue decisivo para obtener las reglas de Feynman para teorías Gauge no abelianas y es su único enfoque aceptable.

Oscilador cuántico

Como vimos en la sección 4.1.1, necesitamos saber el espectro de energía y estados asociados de un oscilador armónico cuántico. Existe una forma de resolverlo que es el enfoque del operador gracias a Dirac.

El Hamiltoniano para el oscilador es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \quad (55)$$

Si \hat{q} y \hat{p} no fueran operadores podríamos factorizar el Hamiltoniano en la forma $(q+ip)(q-ip)$, en el caso cuántico, donde \hat{p} y \hat{q} no conmutan, también será útil para introducir combinaciones. Definimos entonces el operador \hat{a} .

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \quad (56)$$

Y su conjugado Hermitico sería:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \quad (57)$$

Por lo que el Hamiltoniano puede ser descrito como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \omega = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) \omega \quad (58)$$

Este Hamiltoniano se obtuvo de utilizando la relación de conmutación entre \hat{a} y \hat{a}^\dagger :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (59)$$

Al derivar usando el conmutador fundamental entre \hat{p} y \hat{q} y usando las ecuaciones (58) y (59) podemos probar las siguientes relaciones que nos serán útiles.

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega\hat{a} \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega\hat{a}^\dagger \quad (60)$$

Consideremos ahora un estado $|n\rangle$ el cual es un eigenestado de \hat{H} con energía E_n :

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (61)$$

Usando esta definición y los conmutadores en (60) podemos calcular la energía de los estados $(\hat{a}|n\rangle)$ y $(\hat{a}^\dagger|n\rangle)$.

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n + \omega)(\hat{a}|n\rangle) \quad (62)$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (E_n - \omega)(\hat{a}^\dagger|n\rangle) \quad (63)$$

Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger aumentan y disminuyen la energía de $|n\rangle$ por una unidad $\omega(\hbar = 1)$.

Ya que $\hat{H} \sim \hat{p}^2 + \hat{q}^2$ y con \hat{p} y \hat{q} siendo hermíticos podemos probar que $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle$ es positivo para cualquier estado $|\Psi\rangle$ por lo que \hat{a} no puede disminuir energía indefinidamente sino que se debe hacer hasta un estado $|0\rangle$ tal que:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (64)$$

Por lo que la energía más baja del sistema es:

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\omega|0\rangle \quad (65)$$

Que es la energía del punto cero del oscilador cuántico, y el primer estado excitado es

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle \quad (66)$$

Con energía $(1 + 1/2)\omega$.

El estado n tiene energía $(n + 1/2)\omega$ y es proporcional a $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ para obtener la normalización siguiente.

$$\langle n|n\rangle = 1 \quad (67)$$

El factor de normalización correcto se puede ver que es:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (68)$$

Por lo que:

$$\hat{H}|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle \quad (69)$$

Entonces, el estado $|n\rangle$ definido por (4.68) es un eigenestado de $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ con número entero n :

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (70)$$

Al igual que en el caso clásico (4.43), se puede generalizar a un sistema cuyo lagrangiano es la suma de N osciladores independientes.

$$\hat{L} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_r^2 - \frac{1}{2} m \omega_r^2 q_r^2 \right) \quad (71)$$

Donde las relaciones de conmutación son:

$$[\hat{q}_r, \hat{p}_s] = i\delta_{rs} \quad [\hat{q}_r, \hat{q}_s] = [\hat{p}_r, \hat{p}_s] = 0 \quad (72)$$

Como los osciladores con subíndice r y s son independientes, el Hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \left[\frac{1}{2m} \hat{p}_r^2 + \frac{1}{2} m \omega_r^2 \hat{q}_r^2 \right] \quad (73)$$

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \left(\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \frac{1}{2} \omega_r \right) \quad (74)$$

Comparado con la ecuación (22)

Con \hat{a}_r^\dagger y \hat{a}_r definidas como los análogos de (56) y (57). Como los eigenvalores de cada operador $\hat{n}_r \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r$ son n_r , los eigenvalores de \hat{H} tienen la forma (24):

$$E = \sum_{r=1}^N \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \omega_r \quad (75)$$

Los eigenvalores correspondientes son productos $|n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_N\rangle$ de N eigenestados de osciladores independientes donde $|n_r\rangle$ contiene n_r cuantos de excitación de frecuencia ω_r . El estado es abreviado usualmente como $|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$. En el estado base, cada oscilador no está excitado y este estado es $|0, 0, \dots, 0\rangle$ que se abrevia a $|0\rangle$ donde:

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad \forall \quad r \quad (76)$$

Los operadores \hat{a}_r^\dagger crean cuantos de oscilador mientras que los operadores \hat{a}_r los destruyen.

Mecánica de campos clásicos de Hamilton-Lagrange

Ahora consideramos cómo usar el enfoque de Lagrange-Hamilton para un campo, empezando con el caso clásico en una dimensión. Debemos tomar en cuenta $N \rightarrow \infty$, siendo N el número de grados de libertad.

$$q_r(t); r = 1, 2, \dots, N \rightarrow \phi(x, t) \quad (77)$$

Donde x es una variable continua, en cada punto x tenemos un grado de libertad independiente $\phi(x, t)$ por lo que el sistema de campo tiene un infinito continuo de grados de libertad. Ahora formulamos todo como la densidad lagrangiana:

$$S = \int dt L \quad (78)$$

Donde en una dimensión es:

$$L = \int dx \mathcal{L} \quad (79)$$

La ecuación (77) tiene dimensiones de longitud y como $L = T - V$, entonces \mathcal{L} tiene dimensiones de energía/longitud. Si fuera tridimensional, sería por unidad de volumen. Algo nuevo aparece y es que ϕ es una función continua de x , entonces \mathcal{L} puede depender de $\partial\phi/\partial x$ al igual que depende de ϕ y $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \dot{\phi}\right) \quad (80)$$

Postulamos nuevamente el principio fundamental.

$$\delta S = 0 \quad (81)$$

Por lo que la dinámica del campo es minimizar S y la variación está descrita como:

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} \right] dx \quad (82)$$

Obtenemos, por medio de resolución por partes la siguiente ecuación.

$$dS = \int dt \int dx \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) \right] \quad (83)$$

. Como $\delta\phi$ es una función arbitraria, el requerimiento $\delta S = 0$. Obtenemos que la ecuación de campo de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) = 0 \quad (84)$$

Y generalizándola a 3D es:

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) = 0} \quad (85)$$

Como ejemplo consideremos:

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \quad (86)$$

Donde ρ =densidad de masa y $c \rightarrow$ *velocidad* han sido introducidos para que la dimensionalidad de \mathcal{L} sea la correcta. Insertando esto en la ecuación de campo de Euler-Lagrange, tenemos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (87)$$

Que es precisamente la ecuación de onda en (4.25) y vemos que \mathcal{L} tiene la forma de densidad de energía cinética menos energía potencial.

Para el último paso, estamos interesados en el Hamiltoniano, recordamos que está formulado en términos de variables de coordenadas (q) y de momento (p). En el caso del campo continuo, H es descrito como la integral de una densidad \mathcal{H} .

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad (88)$$

Mientras que $q_r(t)$ se vuelven el campo coordinado $\phi(x, t)$ y la pregunta es: ¿Qué corresponde al campo del momento? La respuesta está dada por una versión continua del momento generalizado derivado del enfoque lagrangiano (4.39).

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (89)$$

Definimos un campo de momento $\pi(x, t)$ llamado técnicamente el conjugado canónico de momento para ϕ .

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, t)} \quad (90)$$

Donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana y π tiene dimensionales de la densidad de momento.

En la mecánica clásica de partículas definimos el Hamiltoniano como:

$$H(p, q) = p\dot{q} - L \quad (91)$$

Mientras que aquí definimos la densidad Hamiltoniana como:

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi(x, t)\dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L} \quad (92)$$

Vamos a ver cómo funciona con una dimensión con \mathcal{L} dado por:

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \quad (93)$$

Tenemos:

$$\pi(x, t) = \frac{\rho \partial \phi}{\partial t} \quad (94)$$

Y

$$\mathcal{H}_\rho = \frac{1}{\rho} \pi^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} \pi^2 - \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} \pi^2 + \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (95)$$

Por lo que:

$$H_\rho = \int \left[\frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (96)$$

Que es la forma que esperábamos comparándola con (30)

Mecánica cuántica de campos de Heisenberg-Lagrange-Hamilton

Ahora debemos cuantizar el formalismo de un campo clásico. Hemos introducido el campo coordinado $\phi(x, t)$ y el campo de momento $\pi(x, t)$. Para pasar a la versión cuantizada debemos de hacer el mismo procedimiento y poner nuestras cantidades ϕ y π a operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$. Como factor distintivo tenemos la no-conmutatividad de ciertas cantidades básicas, por ejemplo:

$$[\hat{q}_r(t), \hat{p}_s(t)] = i\delta_{rs} \quad (97)$$

Que sería en el caso discreto.

Por lo que esperamos que los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ obedezcan una relación de conmutación. El conmutador será de la forma $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)]$. Teniendo en cuenta las propiedades de la función de Dirac que son las siguientes dos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (98)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y) \quad (99)$$

Entonces podemos utilizarlas para obtener el conmutador fundamental unidimensional que será:

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)] = i\delta(x - y) \quad (100)$$

Con la generalización a 3D con $\delta^3(\bar{x} - \bar{y})$, recordando que $\hbar = 1$ vemos que las dimensiones se mantienen en ambos lados y los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ siguen tal relación de conmutación que son sus propios conjugados.

Ahora los conmutadores de ellos mismos:

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(y, t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)] = 0 \quad (101)$$

Exploraremos el efecto de estos conmutadores fundamentales. Para el lagrangiano que produjo la ecuación de onda vía la ecuación Euler-Lagrange.

$$\hat{\mathcal{L}}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 \quad (102)$$

Si quitamos ρ y $c = 1$ tenemos:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 \quad (103)$$

Lo que produce la ecuación de campo.

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} = 0 \quad (104)$$

Podemos pensar en (104) como un versión muy simplificada de la ecuación de onda en la que tiene espín 0 en una dimensión, que se satisface por potenciales electromagnéticos. Entonces podemos adivinar que los cuantos son sin masa. El lagrangiano de (103) es el prototipo del lagrangiano del campo cuántico. Aplicando la versión cuantizada de (90) tenemos:

$$\hat{\pi}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{\phi}}(x, t)} \quad (105)$$

Y la densidad Hamiltoniana es:

$$\mathcal{H} = \hat{\pi} \dot{\hat{\phi}} - \hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 \quad (106)$$

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}} dx = \int \frac{1}{2} \left[\hat{\pi}^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (107)$$

Teniendo esta forma no está claro cómo encontrar los eigenvalores y los eigenestados de \hat{H} . Pero los modos normales nos ayudan, si podemos escribir el Hamiltoniano en una clase de suma de osciladores independientes sabremos cómo proceder. Recordemos que en (1), la expansión del modo simplemente era una expansión de Fourier. En este caso no queremos un intervalo finito $(0, L)$, sino que queremos que la longitud tienda a infinito. Por lo que la serie se reemplaza por una integral.

Para la ecuación de onda clásica (25) las soluciones son:

$$\phi(x, t) \propto e^{ikx - i\omega t} \quad (108)$$

Donde $c=1$, entonces:

$$\omega = k \quad (109)$$

Que es la relación de dispersión en el vacío. El campo general puede ser expandido por Fourier en términos de estas soluciones:

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} [a(k)e^{ikx - i\omega t} - a^*(k)e^{-ikx + i\omega t}] \quad (110)$$

Donde ϕ debe ser real y similarmente $\pi = \dot{\phi}$ es expandido como:

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [a(k)e^{ikx - i\omega t} - a^*(k)e^{-ikx + i\omega t}] \quad (111)$$

Cuantizamos esta integral al volver π y ϕ operadores y suponiendo el conmutador (100).

$$\phi(\hat{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} [\hat{a}(k)e^{ikx - i\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx + i\omega t}] \quad (112)$$

$$\hat{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [\hat{a}(k)e^{ikx - i\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx + i\omega t}] \quad (113)$$

El conmutador (100) determina el conmutador de los operadores de modos \hat{a} y \hat{a}^\dagger .

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 2\pi\delta(k - k') \quad [\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0 \quad (114)$$

Estos son análogos de los osciladores armónicos continuos.

$$[\hat{a}_r, \hat{a}_s^\dagger] = \delta_{rs} \quad [\hat{a}_r, \hat{a}_r] = [\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_s^\dagger] = 0 \quad (115)$$

El factor de 2π en (114) depende en la elección de normalización en la ecuación (4.113).

La forma de conmutación entre \hat{a} y \hat{a}^\dagger sugiere que $\hat{a}(k)$ y $\hat{a}^\dagger(k)$ son precisamente los operadores de destrucción y creación para el problema continuo. Para verificar esta interpretación y encontrar los eigenvalores de \hat{H} , insertamos la expansión para $\hat{\pi}$ y $\hat{\phi}$. Encontramos el siguiente resultado:

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} \left[\frac{1}{2} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{a}(k) \hat{a}^\dagger(k) \right] \omega \quad (116)$$

Comparando con el resultado de un oscilador simple:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger] \omega \quad (117)$$

Vemos entonces que efectivamente, cada modo clásico puede ser cuantizado y se comportan como osciladores independientes con frecuencia $\omega = k$. $\hat{a}^\dagger(k)$ crea y $\hat{a}(k)$ destruye un cuanto del modo k . El factor $(2\pi)^{-1}$ en \hat{H} surge de nuestra elección de normalizar.

Notamos que en el operador de campo $\hat{\phi}$ de (113), los términos que destruyen van con el factor $e^{-i\omega t}$ mientras que los que crean van con $e^{i\omega t}$. Esta elección es consistente con los factores de absorción y emisión $e^{\pm i\omega t}$ de perturbaciones ordinarias dependientes del tiempo de mecánica cuántica.

¿Cuál es la masa de estos cuantos? Sabemos que la frecuencia ω está relacionada con el número de onda k por (110) que es equivalente a $\hbar\omega = \hbar ck$ o $E = cp$ donde usamos las relaciones de deBroglie y Einstein que es precisamente la relación E-P para una partícula sin masa.

¿Cuál es el espectro de energía? Esperamos que el estado base sea determinado por el análogo continuo de:

$$\hat{a}_r |0\rangle = 0 \quad \forall \quad r \quad (118)$$

O sea

$$\hat{a}(k) |0\rangle = 0 \quad (119)$$

Sin embargo hay un problema con esto, si permitimos que el Hamiltoniano de (116) actúe en $|0\rangle$, el resultado no es 0 como esperamos, por el término $\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)$ (el término en (119) si da 0). En el caso del oscilador simple, reescribimos $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ en términos de $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ usando la relación de conmutación (59) y esto nos lleva al punto de energía $0, \frac{1}{2\omega}$, del estado base del oscilador. Usando la misma estrategia, escribimos (116) como:

$$\hat{H} = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega + \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k)]\omega \quad (120)$$

Ahora consideramos $\hat{H} |0\rangle$: Por definición de vacío de (119), el primer término dará 0 como es esperado pero el segundo término es infinito ya que la relación de conmutación en (114) produce la cantidad infinita $\delta(0)$ porque $k \rightarrow k'$, entonces la integral diverge.

Ese término es obviamente el análogo continuo de la energía base $\frac{1}{2\omega}$ pero como hay infinitos osciladores, esto es infinito. Podemos tomar en cuenta entonces únicamente la diferencia de energías por lo que en (120) podemos deshacernos de la constante infinita y entonces el estado base $|0\rangle$ tendrá energía 0 por definición y los eigenvalores de \hat{H} son de la forma:

$$\int \frac{dk}{2\pi} n(k)\omega \quad (121)$$

Donde $n(k)$ es el número de cuantos de energía $\omega = k$. Para cada k definido y ω , el espectro es como el de un oscilador armónico simple. el proceso de ir de (116) a (120) sin el segundo término es llamado ordenamiento normal, los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger en expresiones con un orden normal están organizados tales que todas las \hat{a}^\dagger están a la izquierda de \hat{a} con el resultado que el valor en el vacío de las expresiones por definición es cero

Es importante reconocer que solo tomar en cuenta las diferencias de energía es falso en lo que se refiere a la gravedad que acopla todas las fuentes de energía. Sería deseable tener teorías en las cuales la energía del vacío fuera finita desde el inicio (como pasa en teoría de campo supersimétrico).

Procedemos a los estados excitados; cualquier estado deseado en donde cuantos excitados están presentes puede ser formado por la aplicación apropiada de operadores $\hat{a}(k)$ del estado

base $|0\rangle$. Por ejemplo un estado de 2 cuantos conteniendo un cuanto de momento k_1 y otro de momento k_2 puede ser escrito como:

$$|k_1, k_2\rangle \approx \hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle \quad (122)$$

Un estado general contiene un número arbitrario de cuantos.

Así es como se logra cuantizar un campo clásico $\phi(x, t)$, con la expresión (113) junto con la interpretación de los operadores de creación y destrucción. De esta manera hemos mantenido el modelo mecánico inicial, por lo que nuestro campo podría describir las vibraciones cuantizadas de un sólido unidimensional en la aproximación de Debye.

Los cuantos son fonones y $|0\rangle$ es el estado base del sólido. Trabajamos sólo con QFT donde no nos preguntamos qué es lo que son las sondas sino postulamos un campo ϕ y lo cuantizamos. La excitación de cuantos son las partículas. En el caso electromagnético son los fotones.

Terminamos entonces con unos últimos comentarios sobre el formalismo y la interpretación física de nuestro campo cuántico ϕ .

I.

Sabemos que los campos $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ son operadores de la representación de Heisenberg y obedecen las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\hat{\phi}}(x, t) = -i[\hat{\phi}(x, t), \hat{H}] \quad (123)$$

$$\dot{\hat{\pi}}(x, t) = -i[\hat{\pi}(x, t), \hat{H}] \quad (124)$$

Donde \hat{H} está dado por (116). Teniendo la derivada de $\hat{\phi}$ tenemos entonces que la ecuación(124) se vuelve

$$\ddot{\hat{\phi}}(x, t) = -i[\hat{\pi}(x, t), \hat{H}] \quad (125)$$

Como consecuencia de la versión cuantizada de la ecuación Euler-Lagrange (84). Por lo que los lados derechos de (125) y (126) deben ser los mismos entre ellos. Asimismo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg son consistentes con las ecuaciones Euler-Lagrange.

II.

Este formalismo engloba los aspectos de onda y partículas de materia y radiación. La primera es evidente de la expansión de las funciones de onda plana en la expansión de la ecuación (113). Si recordamos la premisa de esta ecuación se originaba del hecho que $\hat{\phi}$ obedece la ecuación de onda en (105). La segunda sigue la naturaleza discreta del espectro de energía y los operadores asociados \hat{a}, \hat{a}^\dagger que se refiere a cuantos individuales, es decir, partículas.

III.

Podemos preguntarnos ¿Cuál es el significado del estado base $|0\rangle$ para un campo cuántico? La respuesta es que el estado con $n(\mathbf{k})=0 \forall \mathbf{k}$, es decir el estado sin cuantos en el campo entonces también es sin partículas. Es el vacío. La interpretación del vacío es fundamental para física de partículas.

IV.

Considere el estado de dos partículas en (122): $|k_1, k_2\rangle \approx \hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle$. Como \hat{a}^\dagger conmuta, (114) este estado es simétrico cuando se intercambian k_1 con k_2 . No es posible diferenciar un cuanto de energía por otro y esperamos que el estado de dos cuantos sea indiferente al orden en el que los éstos son puestos. Sin embargo, esto tiene una implicación para la interpretación de partículas; ya que el estado es simétrico bajo el intercambio de partículas k_1 k_2 debe describir bosones idénticos.

V.

Nos preguntaremos cómo conectar el formalismo de QFT a funciones de onda en mecánica cuántica. Suponemos que formamos un estado que contiene un cuanto del campo $\hat{\phi}$ con momento k'

$$|k'\rangle = N\hat{a}^\dagger(k')|0\rangle \quad (126)$$

Donde N es una constante de normalización. Consideremos ahora la amplitud $\langle 0|\hat{\phi}(x, t)|k'\rangle$ y lo expandimos como:

$$\langle 0|\hat{\phi}(x, t)|k'\rangle = \langle 0|\int \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}}[\hat{a}(k)e^{ikx-i\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx+i\omega t}]N\hat{a}^\dagger(k')|0\rangle \quad (127)$$

El término $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ dará 0 ya que $\langle 0|\hat{a} = 0$. Para el otro término, usamos la relación de conmutación (114) para escribirlo como:

$$\langle 0|\int \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}}[\hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k) + 2\pi\delta(k - k')]e^{ikx-i\omega t}|0\rangle = \frac{Ne^{ik'x-i\omega't}}{\sqrt{2\omega'}} \quad (128)$$

Usando la condición de vacío otra vez e integrando sobre la función δ usando la propiedad (99) que nos dice $k = k'$ entonces $\omega = \omega'$. El vacío es normalizado a 1. La constante de normalización N puede ser ajustado de acuerdo a la convección de normalización El resultado es una función de onda plana para una partícula en el estado $|k'\rangle$. El camino para QFT que tomamos en esta sección normalmente es llamado segunda cuantización, donde partículas unitarias son llamadas la primera cuantización.

4.1.3. Generalizaciones

Vimos entonces como la mecánica cuántica está relacionada con la QFT pero sólo hemos considerado una dimensión espacial para simplificar los cálculos. Ahora debemos generalizar para tres dimensiones e incorporar la relatividad. Con el enfoque lagrangiano es muy fácil de llegar a esto para el campo escalar $\phi(x, t)$. En este contexto, escalar significa que el campo tiene únicamente una componente independiente para cada punto (\mathbf{x}, t) , a diferencia del campo electromagnético que tiene cuatro componentes. En el caso cuántico, un campo de un componente es apropiado para partículas de espín 0[2].

Como vimos en (4.85), la ecuación de Euler-Lagrange tridimensional es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (129)$$

Que puede ser escrita en forma invariante relativista como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \right) = 0 \quad (130)$$

Donde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Similarmente, la acción es:

$$S = \int dt \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L} \quad (131)$$

Ésta será también invariante si \mathcal{L} lo es porque el elemento de volumen d^4x es invariante. Para construir entonces una teoría de campos relativista, tenemos que construir una densidad invariante \mathcal{L} y usar la ecuación covariante de Euler-Lagrange. Por lo que nuestro anterior lagrangiano:

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \quad (132)$$

Con $\rho = c = 1$ se generaliza a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \quad (133)$$

Y produce la ecuación de onda invariante:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = 0 \quad (134)$$

Todo esto funciona de la misma manera cuando los campos están cuantizados. Este lagrangiano invariante describe un campo cuyos cuantos no tienen masa. Para encontrar el lagrangiano para el caso con cuantos masivos, necesitamos hallar el lagrangiano que nos da la ecuación de Klein-Gordon.

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (135)$$

Por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange. La respuesta es una generalización de (133):

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (136)$$

Las soluciones de onda planas de la ecuación de campo, ahora la ecuación de Klein-Gordon, tienen frecuencias o energías dadas por:

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \quad (137)$$

Que es la relación correcta de energía momento para una partícula masiva.

¿Cómo cuantizamos esta teoría de campo? El análogo en 4 dimensiones de la expansión de Fourier para el campo ϕ toma la forma de:

$$\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}] \quad (138)$$

Con una expansión similar para el conjugado del momento $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$.

$$\hat{\pi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}] \quad (139)$$

En esta ecuación, $k \cdot x$ es el producto punto cuatridimensional el cual $k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ y $\omega = +(\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$. El Hamiltoniano que debe ser encontrado es entonces:

$$\hat{H}_{KG} = \int d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}_{KG} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [\hat{\pi}^2 + \nabla\phi \cdot \nabla\phi + m^2\hat{\phi}^2] \quad (140)$$

Y esto puede ser expresado en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger usando la expansión de $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ y el conmutador siguiente.

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (141)$$

Con todo lo demás volviéndose 0, el resultado como es esperado es:

$$\hat{\mathcal{H}}_{KG} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)]\omega \quad (142)$$

Por lo que llegamos a:

$$\hat{\mathcal{H}}_{KG} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega \quad (143)$$

Esto apoya a la interpretación física de los operadores de modo \hat{a}^\dagger y \hat{a} como operadores de creación y destrucción de cuantos del campo $\hat{\phi}$ como lo fueron anteriormente excepto que ahora la relación de energía momento para esas partículas es relativista para partículas de masa m .

Como $\hat{\phi}$ es real ($\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$) y no tiene grados de libertad de espín, es llamado un campo escalar real. Solo cuantos del campo de un tipo entran, esos creados por \hat{a}^\dagger y destruidos por \hat{a} . Entonces $\hat{\phi}$ corresponde físicamente a un caso donde un único estado de una partícula de masa m , por ejemplo el campo π^0 . La pregunta es si campos escalares elementales existen en la naturaleza. Ya que aprendimos como describir partículas relativistas de masa finita como los cuantos de un campo cuántico relativista, ahora debemos de ver las interacciones en QFT[1].

4.2. Teoría de perturbación para campos que interactúan

Lo que se explicó en la sección anterior fue sobre campos cuánticos que no interactúan, esto lo logramos suponiendo que la energía potencial era cuadrática en los desplazamientos de q_r . Entonces ahora debemos ver qué ocurre cuando se cuantiza sistemas no armónicos. Consideremos entonces un oscilador no armónico con un Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2 + \lambda\hat{q}^3 \quad (144)$$

Escribiendo el Hamiltoniano en términos de los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} tenemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)\omega + \frac{\lambda}{(2m\omega)^{3/2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3 \equiv \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}' \quad (145)$$

Donde \hat{H}_0 es nuestro oscilador libre armónico, mientras que \hat{H}' es el término de interacción. Teniendo este nuevo Hamiltoniano no podemos obtener las soluciones como un problema de eigenvalores, por lo que necesitamos teoría de perturbación. Para poder resolver este Hamiltoniano, se toma $\lambda\hat{H}'$ como una perturbación y se expanden los eigenestados de \hat{H} en términos de \hat{H}_0 .

$$|\bar{r}\rangle = \sum_n c_{rn} |n\rangle \quad (146)$$

$|c_{rn}|^2$ es la probabilidad de encontrar cuantos en \hat{H}_0 en el estado $|\bar{r}\rangle$. El eigenvalor de energía entonces se tiene por medio de la serie de potencias siguiente:

$$\bar{E}_r = E_r^{(0)} + \lambda E_r^{(1)} + \lambda^2 E_r^{(2)} + \dots \quad (147)$$

Donde

$$\hat{H}_0 |r\rangle = E_r^{(0)} |r\rangle \quad (148)$$

Y

$$E_r^{(1)} = \langle r | \hat{H}' | r \rangle \quad (149)$$

$$E_r^{(2)} = \sum_{s \neq r} \frac{\langle r | \hat{H}' | s \rangle \langle s | \hat{H}' | r \rangle}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} \quad (150)$$

De la misma manera con dos osciladores no lineales acoplados, tomamos un $|\hat{r}\rangle$ el cual tendrá dos valores n_1 y n_2 .

$$|\hat{r}\rangle = \sum_{n_1, n_2} |n_1\rangle |n_2\rangle \quad (151)$$

Esto se puede resumir en el hecho que la característica de modos cuantizados que interactúan es que los procesos en los que los números de los distintos cuantos no son constantes del movimiento. Esto es exactamente lo que pasa cuando tenemos colisiones entre partículas de altas energías. Cuando estas interactúan, vemos cambios en el número de cuantos. Para los ejemplos de mecánica cuántica tenemos que la interacción produce términos como: $\hat{\phi}^3$ o $\hat{\phi}^4$. Estos términos nos llevan a un scattering no trivial entre fonones. En el caso de QFT, cuando generalizamos el formalismo a fermiones y fotones, la interacción no lineal producirá scattering de e^+e^- .

Continuamos ahora con el campo simple $\hat{\phi}$ y su interacción $\lambda\hat{\phi}^3$, descrito por el siguiente lagrangiano:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - \lambda \hat{\phi}^3 \equiv \hat{\mathcal{L}}_{KG} - \lambda \hat{\phi}^3 \quad (152)$$

Su Hamiltoniano asociado es entonces:

$$\hat{H} = \hat{H}_{KG} + \hat{H}' \quad (153)$$

Tenemos el Hamiltoniano separado en una parte exacta que es el Hamiltoniano de Klein-Gordon y el que debemos tratar por medio de teoría de perturbación.

$$\hat{H}_{KG} = \int d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}_{KG} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [\hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2] \quad (154)$$

$$\hat{H}' = \int d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}' = \lambda \int d^3\mathbf{x} \hat{\phi}^3 \quad (155)$$

4.2.1. La representación de interacción

En la introducción de QFT trabajamos con la representación de Heisenberg, donde se trabajó únicamente con campos libres que no interactuaban. La dependencia del tiempo de los operadores dados por la expansión de modos en (138) es generada por el Hamiltoniano libre de (154). Pero, en el momento en el que se agrega la interacción del término \hat{H}' , no se puede hacer ningún progreso en la representación de Heisenberg porque no tenemos la dependencia del tiempo de los operadores que son generados por el hamiltoniano completo $\hat{H} = \hat{H}_{KG} + \hat{H}'$. En cambio, consideremos utilizar la representación de Schrödinger la cual los estados cambian acorde al tiempo por medio de:

$$\hat{H} = |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad (156)$$

Donde los operadores son independientes al tiempo. Nótese que aunque la ecuación (156) es una representación de Schrödinger, es relativista. En este enfoque, los operadores del campo que aparecen en la densidad $\hat{\mathcal{H}}$ son evaluados en un tiempo fijo. En este tiempo, las expansiones de la forma (4.138) con $t = 0$ son posibles. El problema con esta formulación es que no será invariante respecto a Lorentz, o covariante porque un tiempo específico ha sido elegido. Por esa razón necesitamos una tercera representación que tenga lo que nos conviene de ambas, la de Heisenberg y Schrödinger, llamada la representación de interacción que llamaremos RI[1].

En la representación de Heisenberg, la dependencia del tiempo está en los operadores y ninguna por el estado y en la de Schrödinger es lo contrario. En RI, ambos, los estados y operadores serán dependientes al tiempo, pero en un modo que esté adaptado a la teoría de perturbación, especialmente en QFT. Los operadores tienen la dependencia del tiempo generado por el Hamiltoniano libre \hat{H}_0 , por lo que la expansión de modos de una partícula libre sobrevive intacta. Los estados tienen una dependencia del tiempo generada por la interacción \hat{H}' . Formalmente podemos ver en términos de un operador de la representación de Schrödinger que es independiente al tiempo y llamaremos \hat{A} , al cual le asignaremos un operador RI $\hat{A}_I(t)$.

$$\hat{A}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (157)$$

Tenemos entonces que la dependencia del tiempo de \hat{A}_I es:

$$\frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = -i[\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (158)$$

Como fue aplicado en nuestro modelo en (152), entonces nuestro campo $\hat{\phi}$ ahora será especificado como parte de RI, $\hat{\phi}_I(\mathbf{x}, t)$. El conjugado de ese campo, como no contiene derivadas respecto al tiempo, permanece igual al caso del campo libre:

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t)} = \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) \quad (159)$$

Vemos entonces que en el caso de campos que interactúan, se siguen las mismas ecuaciones de movimiento y relaciones de conmutación como los operadores de campos libres.

Ahora trabajamos con los estados en RI. Definimos un vector correspondiente:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle \quad (160)$$

que está escrito en términos de la representación de Schrödinger. Entonces buscamos la ecuación de movimiento de $|\psi(t)\rangle$ donde:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t} \left[-\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right] \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} [-\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + (\hat{H}_0 + \hat{H}') |\psi(t)\rangle] \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' |\psi(t)\rangle \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (161)$$

O

$$\boxed{i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I} \quad (162)$$

Donde:

$$\hat{H}'_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (163)$$

es la interacción Hamiltoniana en la RI.

4.2.2. La matriz S y la expansión de Dyson

Ahora que ya tenemos una representación de interacción, la aplicamos a procesos de decaimiento y scattering en QFT. Se introduce entonces una cantidad crucial para estos problemas que es la matriz de scattering o matriz S. Un proceso de scattering puede ser descrito de la siguiente manera; en un tiempo $t \rightarrow -\infty$, mucho antes que una interacción ocurran esperamos el efecto de \hat{H}'_I sea despreciable para que $|\psi(-\infty)\rangle_I$ sea un vector de estado constante $|i\rangle$, que es, de hecho, una eigenestado de \hat{H}_0 . $|i\rangle$ contendrá entonces, un cierto número de partículas que no interactúan con un momento definitivo. Cuando el tiempo evoluciona, las partículas se empiezan a aproximar unas a otras y otras se dispersarán a otro estado constante $|\psi(\infty)\rangle_I$ que también contiene partículas que no interactúan. A este estado le llamaremos $|f\rangle$. El operador \hat{S} es definido vía;

$$|\psi(\infty)\rangle_I = \hat{S} |\psi(-\infty)\rangle_I = \hat{S} |i\rangle \quad (164)$$

Un elemento particular de la matriz S es entonces la amplitud para encontrar un estado final $|f\rangle$ en $|\psi(\infty)\rangle_I$.

$$\langle f | \psi(\infty) \rangle_I = \langle f | \hat{S} | i \rangle \equiv S_{fi} \quad (165)$$

Por lo que podemos escribir:

$$|\psi(\infty)\rangle_I = \sum_f |\mathbf{f}\rangle \langle \mathbf{f} | \psi(\infty) \rangle_I = \sum_f S_{fi} |\mathbf{f}\rangle \quad (166)$$

Está claro que los elementos S_{fi} son los que debemos calcular y sus probabilidades asociadas[1]. Consideremos entonces una propiedad importante de \hat{S} . Suponiendo que $|\psi(\infty)\rangle_I$ y $|i\rangle$ están normalizados, entonces:

$$1 = \langle \psi(\infty) | \psi(\infty) \rangle_I = \langle i | \hat{S}^\dagger \hat{S} | i \rangle = \langle i | i \rangle \quad (167)$$

Por lo que sabemos que \hat{S} es unitario; $\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{I}$. Tomando los elementos de la matriz, nos da el resultado:

$$\sum_k S_{kf}^* S_{ki} = \delta_{fi} \quad (168)$$

Intercambiando $i = f$ en (168), se produce $\sum_k |S_{ki}|^2 = 1$, que confirma que la expansión de coeficientes en (166) debe obedecer la condición que la suma de probabilidades parciales debes sumar 1.

Ahora, establecemos un enfoque de teoría de perturbación para calcular \hat{S} . Integrando (162):

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I(t') |\psi(t')\rangle_I dt' \quad (169)$$

Resolvemos esta ecuación iterativamente, si \hat{H}'_I es descartado, entonces la solución es:

$$|\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |i\rangle \quad (170)$$

Para obtener el primer orden de corrección, insertamos (170) en lugar de $|\psi(t')\rangle_I$ en el lado derecho de (169) para obtener:

$$|\psi(t)\rangle_I^{(1)} = \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1))dt_1 |i\rangle \quad (171)$$

Recordando que $|i\rangle$ es un vector de estado constante. Obtenemos entonces el segundo orden:

$$|\psi(t)\rangle_I^{(2)} = \left[1 + \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1))dt_1 + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) \right] |i\rangle \quad (172)$$

Tendiendo t al infinito, nos da nuestra serie perturbativa para el operador \hat{S} .

$$\hat{S} = 1 + \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1))dt_1 + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) + \dots \quad (173)$$

Recordando que:

$$\hat{H}'_I(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'_I(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad (174)$$

podemos escribir el segundo término de (4.173):

$$\int \int_{t_1 > t_2} d^4x_1 d^4x_2 (-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1))(-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) \quad (175)$$

Que mejora la simetría pero aún existe una asimetría debido a $t_1 > t_2$. Las integrales de t pueden convertirse de $-\infty$ a ∞ sin ninguna condición por medio de las integrales de x. Se puede hacer lo mismo para x para que nos de la expansión de Dyson para el operador $\hat{S}[1]$.

$$\boxed{\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_N T[\mathcal{H}'_I(x_1)\mathcal{H}'_I(x_2)\dots\mathcal{H}'_I(x_N)]} \quad (176)$$

Donde T está definido como:

$$T(\mathcal{H}'_I(x_1)\mathcal{H}'_I(x_2)) = \mathcal{H}'_I(x_1)\mathcal{H}'_I(x_2) \quad \text{para } t_1 > t_2 \quad (177)$$

$$= \mathcal{H}'_I(x_2)\mathcal{H}'_I(x_1) \quad \text{para } t_1 < t_2 \quad (178)$$

4.2.3. Ejemplo de scattering de nucleones

Veamos el ejemplo de scattering de $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$. Tenemos los estados iniciales y finales:

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} b_{p_1}^\dagger b_{p_2}^\dagger |0\rangle \equiv |p_1, p_2\rangle$$

$$|f\rangle = |i\rangle = \sqrt{2E_{p'_1}} \sqrt{2E_{p'_2}} b_{p'_1}^\dagger b_{p'_2}^\dagger |0\rangle \equiv |p'_1, p'_2\rangle \quad (179)$$

Podemos entonces tomar la expansión de $\langle s|\hat{S}|i\rangle$, específicamente la expansión de $\langle f|\hat{S} - 1|i\rangle$ ya que no estamos interesados en las situaciones donde no ocurre scattering. En el orden $n = 2$ tenemos entonces:

$$\frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T(\psi^\dagger(x_1)\psi(x_1)\phi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\psi(x_2)\phi(x_2)) \quad (180)$$

Ahora, utilizando el teorema de Wick[3], vemos que tiene la forma:

$$: \psi^\dagger(x_1)\psi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\psi(x_2) : \phi(x_1)\phi(x_2) \quad (181)$$

Que contribuye al scattering porque los dos campos ψ aniquilan las partículas ψ mientras que los campos ψ^\dagger crean partículas ψ . Cualquier otra forma de ordenar estos dos campos no nos va a dar otra contribución. Esto significa que tenemos:

$$\begin{aligned} & \langle p'_1, p'_2 | \psi^\dagger(x_1)\psi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\psi(x_2) | p_1, p_2 \rangle \\ &= \langle p'_1, p'_2 | \psi^\dagger(x_1)\psi^\dagger(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \psi(x_1)\psi(x_2) | p_1, p_2 \rangle \\ &= (e^{ip'_1 \cdot x_1 + ip'_2 \cdot x_2} + e^{ip'_1 \cdot x_2 + ip'_2 \cdot x_1})(e^{-ip'_1 \cdot x_1 - ip'_2 \cdot x_2} + e^{-ip'_1 \cdot x_2 - ip'_2 \cdot x_1}) \\ &= e^{ix_1 \cdot (p'_1 - p_1) + ix_2 \cdot (p'_2 - p_2)} + e^{ix_1 \cdot (p'_2 - p_1) + ix_2 \cdot (p'_1 - p_2)} + e^{ix_2 \cdot (p'_2 - p_1) + ix_1 \cdot (p'_1 - p_2)} \end{aligned} \quad (182)$$

Donde en la tercera línea, lo que utilizamos fue la normalización de estados:

$$\langle 0 | \psi(x) | p \rangle = e^{-ip \cdot x} \quad (183)$$

Insertando esto en (180):

$$\begin{aligned} & \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 [e^{ix_1 \cdot (p'_1 - p_1) + ix_2 \cdot (p'_2 - p_2)} + e^{ix_1 \cdot (p'_2 - p_1) + ix_2 \cdot (p'_1 - p_2)} + \dots \\ & \quad + e^{ix_2 \cdot (p'_2 - p_1) + ix_1 \cdot (p'_1 - p_2)}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (184)$$

Donde la última integral es el propagador de ϕ que viene de a contracción de (4.181). La integral de x_1 y x_2 son funciones delta por lo que quedamos con la expresión:

$$(-i)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(2\pi)^8}{k^2 - m^2 + i\epsilon} [\delta^{(4)}(p'_1 - p_1 + k)\delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + k) + \delta^{(4)}(p'_2 - p_1 + k)\delta^{(4)}(p'_1 - p_2 + k)] \quad (185)$$

Finalmente podemos resolver la integral de d^4k usando las funciones delta para obtener:

$$i(-i)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \quad (186)$$

De hecho, para ese proceso podemos eliminar $+i\epsilon$ ya que el denominador nunca es cero. Para poder ver esto podemos ir al marco de centro de masa donde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ y por conservación de momento $|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_1|$. Esto asegura que el cuadrimomento del mesón sea $k = (0, \vec{p} - \vec{p}')$, entonces $k^2 < 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

$$i(-i)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \quad (187)$$

Características de las interacciones débiles

5.1. Covariantes bilineales

Para poder construir la forma general de corrientes consistentes con la covarianza de Lorentz, necesitamos tabular cantidades bilineales de la forma:

$$(\bar{\psi})(4 \times 4)(\psi) \quad (188)$$

que tiene propiedades definitivas bajo las transformaciones de Lorentz, donde la matriz de 4×4 es el producto de matrices λ . Para simplificar la notación introducimos:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (189)$$

De esto, sabemos que:

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad (\gamma^5)^2 = I \quad \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad (190)$$

En la representación de Dirac-Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (191)$$

Estamos interesados en el comportamiento de cantidades bilineales bajo las transformaciones de Lorentz que incluyen rotaciones y *boosts*, y bajo la operación de paridad. Existe una lista de probabilidades. Debido a relaciones de anticonmutación, el tensor es antisimétrico:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (192)$$

La lista está ordenada incrementalmente del número de las matrices γ^μ que están operadas entre $\bar{\psi}$ y ψ . El pseudoescalar es el producto de cuatro matrices (189). Si las cinco matrices fueran usadas, por lo menos dos serían la misma y en ese caso el producto sería reducido a tres que ya están incluidas en el vector axial. Es útil ver como las propiedades del Cuadro 1

		No. de Componentes	Inversión en el espacio P
Escalar	$\bar{\psi}\psi$	1	+
Vector	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	-
Tensor	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	
Vector axial	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	+
Pseudoescalar	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	-

Cuadro 1: Todas las posibles combinaciones bilineales covariantes de matrices γ [4]

son establecidas. Para hacer eso, necesitamos considerar la ecuación de Dirac en dos marcos (x y x') relacionados por una transformación de Lorentz Λ .

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0 \quad (193)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'^\mu} - m\psi'(x) = 0 \quad (194)$$

Donde $x' = \Lambda x$. Entonces sabemos que existe una relación:

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad (195)$$

Es claro que S es independiente de x y actúa únicamente en el espinor u . Sustituyendo las ecuaciones (194) con (195), y manteniendo la idea de (193), obtenemos:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (196)$$

5.2. Fermiones sin masa: Los neutrinos de dos componentes

Comenzamos con la ecuación de Dirac escrita de la siguiente manera.

$$H\psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \quad (197)$$

Debemos encontrar relaciones que satisfagan matrices de 4×4 , pero debemos de tomar en cuenta que β no está involucrado en el caso de partículas sin masa, por lo que debemos únicamente satisfacer:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i = \alpha_i^\dagger \quad (198)$$

Estas relaciones pueden ser cumplidas con las matrices de Pauli de 2×2 . Podemos tomar $\alpha_i = -\sigma_i$ y $\alpha_j = \sigma_j$. La ecuación de Dirac sin masa se puede dividir en dos ecuaciones independientes para dos espinores de dos componentes $\chi(\mathbf{p})$ y $\phi(\mathbf{p})$:

$$E\chi = -\sigma \cdot \mathbf{p}\chi \quad (199)$$

$$E\phi = +\sigma \cdot \mathbf{p}\phi \quad (200)$$

Cada ecuación está basada en la relación energía momento relativista $E^2 = \mathbf{p}^2$, que tienen una solución positiva y otra negativa.

Supongamos que (199) es la ecuación de onda de un fermión sin masa, un neutrino. La solución de energía positiva tiene $E = |\mathbf{p}|$ y satisface:

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\chi = -\chi \quad (201)$$

Eso significa que χ describe un neutrino de izquierda con helicidad $\lambda = -\frac{1}{2}$ de energía E y momento \mathbf{p} . El resto de la solución tiene una energía negativa. Para interpretar esto, consideremos una solución de neutrino con energía negativa $-E$ y momento $-\mathbf{p}$.

$$\sigma(-\dot{\mathbf{p}})\chi = \chi \quad (202)$$

Con helicidad positiva, por lo que describe un antineutrino derecho ($\lambda = +\frac{1}{2}$) de energía E y momento \mathbf{p} . Simbólicamente decimos que (199) describe ν_L y $\bar{\nu}_R$ y (200) describe los otros estados de helicidad ν_R y $\bar{\nu}_L$.

Un vasto número de experimentos indican que los leptones entran a las interacciones débiles en una corriente cargada con una combinación de covariantes bilineales. Sólo los neutrinos izquierdos y antineutrinos derechos son acoplados a leptones cargados por la interacción débil[4].

5.3. Fuerza débil

5.3.1. Decaimiento β

El decaimiento Beta siempre ha sido un interés entre los físicos. Ambos rayos α y γ son emitidos por medio de un espectro discreto, simplemente por la conservación de energía. La energía de la partícula emitida es la misma que la diferencia de energías entre el estado inicial y final del núcleo. Es mucho más difícil ver que es lo que pasa con el decaimiento β , debido a la emisión de electrones desde el núcleo. Chadwick reportó que el espectro de energía de electrones es continuo, la energía puede tomar cualquier valor entre 0 y su máximo. Este resultado no satisfizo a muchos por lo que hubo varios experimentos luego de esta declaración[5].

Otto Han y Lise Meitner, quienes descubrieron la fisión nuclear, estudiaron el mismo espectro y concluyeron que era discreto. Argumentaron que el espectro parece continuo debido a que los electrones pierden energía rápidamente. El máximo de energía observada es en un espectro discreto y vemos energías menores debido a esa pérdida. La controversia siguió por más de una década.

Por último hubo un experimento definitivo hecho por Charles Ellis y Nevill Mott el cual demostró que el espectro sí es continuo. El neutrón de Pauli se convirtió en lo que conocemos ahora como neutrino y el proceso de decaimiento β es:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (203)$$

5.3.2. La interacción débil

La interacción débil es la responsable de los decaimientos radiactivos. Está caracterizada por largas vidas y pequeñas secciones eficaces. Todos los fermiones sienten la interacción débil. Sin embargo, cuando las fuerzas fuerte y electromagnética están presentes, éstas dominan. Los neutrinos sienten únicamente la interacción débil y eso es lo que los hace difíciles de estudiar, ya que son la única partícula que experimenta únicamente una fuerza. No tienen color y son eléctricamente neutrales[5].

5.3.3. La interacción de 4 puntos

El primer intento para construir una teoría de la interacción débil fue creada por Fermi en 1932. Utilizando de análogo la fuerza electromagnética, Fermi se imaginó una interacción

de cuatro puntos que ocurre en un punto en el espacio tiempo. Su idea del decaimiento β se puede observar en la siguiente figura.

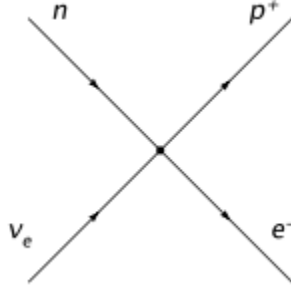


Figura 3: Interacción de 4 puntos de Fermi [5]

En analogía a la interacción electromagnética, Fermi propuso el siguiente elemento de la matriz:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e] \quad (204)$$

Notamos varias cosas en esta ecuación

- El cambio de carga: La corriente hadrónica tiene $\Delta Q = +1$, mientras que la corriente del leptón tiene $\Delta Q = -1$. Hay una carga neta transferida desde la corriente hadrónica hasta la leptónica y esto es llamado la interacción de corriente cargada.
- Universalidad: Como se ve en la ecuación, existe un factor de acoplamiento G_F que es la constante de Fermi que es igual a $1.166 \times 10^{-5} GeV^{-2}$. Fermi postuló que el factor de acoplamiento débil es el mismo para todos los vértices débiles, sin importar el sabor del leptón. Por esta razón, la universalidad es uno de los conceptos más importantes de la ecuación.
- No existe propagador en esta ecuación, más adelante se hablará de él.
- Las corrientes son de carácter vectorial, por lo que coincide nuevamente con la analogía de la fuerza electromagnética donde se sabe que las corrientes son vectoriales en la naturaleza.

La sección eficaz para la interacción $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$, generada por medio de la interacción de 4 puntos de Fermi fue calculada por Bethe. Se encontró que:

$$\sigma(n + \nu_e \rightarrow e^- + p) \sim E_\nu (MeV) \times 10^{-43} cm^2 \quad (205)$$

Esta cantidad lo que significa es la cantidad necesaria para poder parar 1 MeV de neutrinos. Esta sección eficaz también tiene un problema el cual es que crece linealmente con la energía. Esto es incorrecto por lo que vemos que el modelo de Fermi no es apto para altas energías por lo que necesitamos una modificación a la teoría por lo que se le agrega un propagador.

5.3.4. Propagador débil

Sabemos que las interacciones ocurren gracias a dos bosones de gauge masivos: El bosón cargado W^\pm y el neutral Z^0 . El término de propagación para el bosón masivo es:

$$\frac{1}{M_{W,Z}^2 - q^2} \quad (206)$$

Si suponemos que la teoría de Fermi es el límite de la energía más baja de la interacción débil, entonces podemos estimar el acoplamiento intrínseco a energías altas. En el límite de Fermi, el factor de acoplamiento es $G_f/\sqrt{2}$. A bajas energías, con $M_{W,Z}^2 \gg q^2$, el término del propagador se reduce a $1/M_W^2$ por lo que podemos hacer la siguiente igualación.

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{M_W^2 8} \quad (207)$$

El factor de 8 lo postulamos únicamente por convención, para poder tener el factor del vértice del diagrama de Feynman como $g_W/2\sqrt{2}$. Esto nos permite comparar los acoplamientos intrínsecos de la interacción débil con la electromagnética. La masa del bosón W es de 80.4 GeV y la constante de Fermi es de $1.166 \times 10^{-5} GeV^{-2}$. Insertando esto en la ecuación (207), tenemos un factor de acoplamiento $g_w = 0.65$. Ahora recordemos que el factor de acoplamiento de la interacción electromagnética es:

$$\text{Acoplamiento EM} : \propto_{EM} = \frac{1}{137} \quad (208)$$

Y el factor de acoplamiento débil es:

$$\text{Acoplamiento debil} : \propto_W = \frac{g_w^2}{4\pi} = \frac{1}{30} \quad (209)$$

Vemos entonces, que la interacción débil, aparentemente es cuatro veces más fuerte que la electromagnética. Lo que la vuelve tan débil es el tamaño tan masivo de los bosones gauge. De hecho, en energías muy altas donde $q^2 \sim M_W^2$, la interacción débil puede ser comparada con la fuerza de la interacción electromagnética.

¿Qué ocurre entonces en las altas energías? La masa del bosón W sobrepasa la sección eficaz total y la detiene de ir al infinito. Por lo que el propagador también resuelve ese problema

5.3.5. Violación de paridad

Paridad y el operador de paridad

La operación de paridad está definida como la inversión espacial alrededor del origen.

$$t' \equiv t \quad x' \equiv x \quad y' \equiv y \quad z' \equiv z \quad (210)$$

Consideremos un espinor de Dirac $\psi(t, x, y, z)$. Una transformación de paridad transformaría este espinor a:

$$\hat{P}\psi(t, x, y, z) = \psi(t, -x, -y, -z) = \psi'(t', x', y', z') \quad (211)$$

Podemos probar que el operador relevante es γ^0 .

$$\psi'(t', x', y', z') = \psi(t, -x, -y, -z) = \pm \gamma^0 \psi(t, x, y, z) \quad (212)$$

Consideremos ahora un espinor $\psi(t, x, y, z)$ que obedezca la ecuación de Dirac:

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = 0 \quad (213)$$

Bajo la transformación de paridad: $\psi'(x', y', z', t') = \hat{P}\psi(x, y, z, t) = \gamma^0\psi(x, y, z, t)$. Como $(\gamma^0)^2 = 1$, esto significa que:

$$\psi(x, y, z, t) = \gamma^0\psi'(x', y', z', t') \quad (214)$$

Sustituyéndolo en la ecuación de Dirac:

$$i\gamma^0\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial t} + i\gamma^1\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial x} + i\gamma^2\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial y} + i\gamma^3\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial z} - m\gamma^0\psi' = 0 \quad (215)$$

Usamos entonces la regla de la cadena para poder expresar la derivada en términos de coordenadas primadas.

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial\psi'}{\partial x'} = -\frac{\partial\psi'}{\partial x'} \quad (216)$$

Como estamos trabajando con paridad sabemos que $x' = -x$, entonces la ecuación de Dirac la convertimos.

$$i\gamma^0\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial t'} - i\gamma^1\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial x'} - i\gamma^2\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial y'} - i\gamma^3\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\psi' = 0 \quad (217)$$

Y como γ^0 anticonmuta con γ^i para $i = 1, 2, 3$:

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t'} + i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial\psi'}{\partial x'} + i\gamma^0\gamma^2\frac{\partial\psi'}{\partial y'} + i\gamma^0\gamma^3\frac{\partial\psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\psi' = 0 \quad (218)$$

Multiplicando en la izquierda por γ^0 , y recordando que $(\gamma^0)^2 = 1$, tenemos que:

$$i\gamma^0\frac{\partial\psi'}{\partial t'} + i\gamma^1\frac{\partial\psi'}{\partial x'} + i\gamma^2\frac{\partial\psi'}{\partial y'} + i\gamma^3\frac{\partial\psi'}{\partial z'} - m\psi' = 0 \quad (219)$$

Que es la ecuación de Dirac para coordenadas primadas. Entonces, bajo transformaciones de paridad, la ecuación de Dirac no cambia (como debería de ser).

$$\psi \rightarrow \hat{P}\psi = \gamma^0\psi \quad (220)$$

Si aplicamos el operador de paridad dos veces debemos regresar a la ecuación de onda original $\hat{p}^2 = (\gamma^0)^2 = 1$. Los eigenvalores del operador, son ± 1 y los hadrones son los eigenestados de \hat{P} . La paridad de un fermión es opuesta a la de un anti-fermión mientras que la paridad de un bosón, es la misma que la de su anti-bosón. Tomamos entonces arbitrariamente partículas para tener una paridad positiva o par y la antipartícula (si es un fermión), será negativa o impar. La paridad de un sistema combinado es el producto de paridades la sus partes.

Violación de paridad

En 1956, T.D. Lee y C.N. Yang estaban tratando de resolver un problema llamado el problema $\tau - \theta$; dos mesones desconocidos, llamados tauón τ y mesón theta θ , parecieron ser idénticos en masa, espín, carga, etc. La única diferencia es que τ decaía a tres piones $\pi^+\pi^+\pi^-$ o $\pi^+\pi^0\pi^0$. El otro mesón decae en dos piones $\pi^+\pi^0$. Ambas son partículas de espín cero. El análisis del estado final mostraba que τ decaía en un estado impar mientras que θ decaía en un estado par. Esto parecía imposible ya que ambas partículas eran idénticas. Lee y Yang después de estudiar esto, hicieron notar que podían ser la misma partícula, esto siendo posible únicamente si la paridad no estaba preservada en el decaimiento. Encontraron evidencia que

si existía la conservación de paridad en las interacciones fuerte y electromagnética y ninguna en la débil. Propusieron varios métodos en los cuales la no conservación de paridad podía ser examinada experimentalmente en la interacción débil[5].

C.S. Wu hizo un experimento para probar la posibilidad de violación de paridad en el decaimiento β . Propuso un sistema de ^{60}Co átomos los cuales todos decayeron vía emisión β a ^{60}Ni . Alineó estas partículas en el campo magnético para que los vectores de espín se alinearan y decayeran, midiendo la dirección del electrón de salida. Si la paridad estuviera conservada, se esperaría ver los electrones emitidos isotrópicamente.

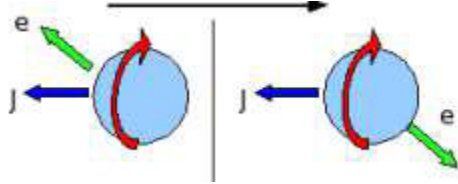


Figura 4: Ejemplo de conservación de paridad [5]

El espín vectorial del átomo de cobalto, etiquetado como J en la Figura 4 apunta a la izquierda en el mundo real en el de espejo. Este es un ejemplo de un vector axial, que no cambian de dirección bajo una inversión covariante. La conservación de paridad implica que la probabilidad de una interacción que ocurre en este mundo es la misma que en el espejo de éste. Vemos también que el número de eventos donde el electrón fue emitido antiparalelo al espín es el mismo de los que fueron emitidos paralelos al espín vectorial. Lo que Wu resalta, entonces es que los electrones son emitidos preferencialmente en la dirección del espín vectorial, una violación clara de la conservación de paridad. Concluyó que la violación fue máxima. La paridad, la cual se creyó como una simetría fundamental de la naturaleza, se prueba no verdadera para todos los casos.

5.3.6. Violación CP

Sabemos que la paridad es violada en la interacción débil que se puede ver en el decaimiento:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (221)$$

en el cual el neutrino siempre es emitido en la helicidad izquierda.

La interacción débil no es invariante bajo la conjugación de carga. El decaimiento de esta es:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (222)$$

en el cual el antineutrino sigue teniendo una helicidad izquierda. El antineutrino en el mundo real siempre debe ser derecho. Sin embargo, si combinamos las dos operaciones, simetría de carga y paridad, podemos convertir un neutrino izquierdo a un anti-neutrino derecho que es lo que ocurre en la naturaleza. Pero, la operación CP también se encontró que puede ser violada. Mostrado por Cronin y Fitch en 1964. Alrededor del 0.3% de las interacciones débiles violan CP.

5.4. La interacción VA

Buscamos entonces un modelo que pueda describir la teoría de las interacciones débiles. Para hacer esto tomamos nuestras corriente. La matriz más general que podemos escribir es:

$$M \approx [u_{\bar{\psi},f} \hat{O} u_{\psi,i}] \frac{1}{M^2 - q^2} [u_{\bar{\phi},f} \hat{O} u_{\phi,i}] \quad (223)$$

Donde \hat{O} es la combinación de matrices γ .

Sabemos que hay únicamente cinco expresiones bilineales covariantes que podemos formar de las matrices γ que están descritas en el Cuadro 1. Para el tensor, se definió $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$.

Ahora veamos como cada una de estas corrientes se comporta bajo la transformación de paridad. ignorando la corriente tensorial y notando que la transformación de paridad es:

$$\psi' = \gamma^0 \psi \quad (224)$$

$$\bar{\psi}' = (\psi')^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0 \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \gamma^0 = \psi^\dagger \quad (225)$$

donde usamos las propiedades $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ y $(\gamma^0)^2 = 1$. Utilizando este mismo método para nuestras cuatro combinaciones tenemos:

- Escalar

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi \quad (226)$$

- Vector

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi (\mu = 0) \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi (\mu > 0) \end{aligned} \quad (227)$$

- Vector axial

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \rightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad (228)$$

- Pseudoescalar

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \rightarrow \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (229)$$

Buscamos una combinación en la cual la interacción débil cargada sólo acople partículas izquierdas idénticas tanto en el mundo real como en su espejo. El operador de proyección de estas partículas es:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (230)$$

Por lo tanto queremos que la corriente tenga la siguiente forma:

$$\bar{\psi}\hat{O}\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\phi \quad (231)$$

El operador \hat{O} es simplemente el operador γ^μ por lo que la interacción puede ser descrita como:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\phi \quad (232)$$

Si lo expandimos tenemos:

$$\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\phi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\phi) \quad (233)$$

Comparándolo con el cuadro 1, vemos que el vector (V) y el vector axial (A) son las corrientes responsables por la violación de paridad de la interacción débil.

Este es la famosa interacción VA, la violación de paridad viene del hecho que el comportamiento de las corrientes del vector y el vector axial bajo una transformación de paridad son diferentes. Como vemos en el cuadro, la corriente vectorial cambia signos bajo paridad mientras que el vector axial no lo hace. La interferencia entre estos dos términos es lo que crea la violación.

5.5. La interacción VA y neutrinos

La inclusión del operador de proyección izquierdo implica que la interacción débil cargada sólo se acopla a partículas izquierdas o antipartículas derechas.

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\phi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu\phi_L = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\phi_L \quad (234)$$

¿Qué significa esto para los neutrinos? Sabemos que los neutrinos tienen helicidad izquierda y los anti-neutrinos derecha. Como estas partículas son relativistas, esto significa que tiene quiralidad izquierda (donde quiralidad se define como simétricas en el mundo real y en su espejo) porque sólo pueden ser creadas por la interacción débil, ya que ésta solo puede crear partículas quirales izquierdas o antipartículas quirales derechas. Como los neutrinos son considerados casi sin masa, se puede decir que la helicidad y quiralidad son prácticamente lo mismo por lo que los neutrinos son creados siempre por medio de helicidad izquierda. Es posible entonces para el bosón Z acoplar dos partículas quirales derechas y los neutrinos son creados por medio de bosones W^\pm [5].

Teoría con un nuevo bosón Z

Las interacciones no gravitacionales entre partículas del modelo estándar (SM) y las partículas de la materia negra (DM), es un punto clave para la física ya que de esta manera se puede inferir el sector oscuro del universo. La idea simplemente es localizar el contenido SM y DM en diferentes sectores de tal manera que la única interacción posible sea la gravitacional. Sin embargo, por diferentes razones como la existencia de la densidad de DM, sabemos que debe haber una conexión entre los dos sectores. Esto se puede lograr mediante la idea de portales [6][7][8]. La definición de portal es simple, una partícula o conjunto de partículas que pueden vivir en dos distintos sectores conectados por medio de las interacciones entre partículas de ambos sectores, los dos más importantes siendo el portal de Higgs y el portal Z' [9]. El portal de Higgs ha sido estudiado vastamente en la literatura basada en el nuevo bosón escalar encontrado en el LHC y el portal Z' ha sido también estudiado y es el que interesa en esta sección ya que está la posibilidad que se conecte a una teoría completa. El portal Z' puede ser construido en el sector SM con un número n de bosones gauge de la simetría $U(1)$ y el sector DM puede ser descrito con un número m de bosones gauge de un semi grupo de Lie G_h también en la simetría $U(1)$.

En general hay términos cinéticos o de masa entre estos bosones de gauge en ambos sectores ($A_\nu^n A_\nu^m$) que pueden originar la conexión entre partículas del modelo estándar y la materia negra. El origen de los términos de masa es el mecanismo de Stückelberg que da las masas para los bosones en $U(1)$ por medio de una matriz de masa con entradas relativamente grandes y no diagonales asegurando esta mezcla. Este tipo de modelos con el mecanismo de Stückelberg son fácilmente introducidos a modelos de teoría de cuerdas. Una vez el lagrangiano sea diagonalizado, el Z' menos masivo será el cual tomará un rol en fenomenología ya que los otros son muy pesados para tener un efecto en ellos. La forma en la que este bosón ligero Z' se acopla a las partículas del modelo estándar es determinado por la diagonalización de la matriz de masa y también define la interacción entre las partículas de DM con las de SM. Lo más importante de notar aquí es el hecho que en general el bosón Z' se acopla diferente a partículas izquierdas y derechas induciendo a una violación del isospin en la conexión con DM. Esta propiedad afecta directamente con la fenomenología de una partícula de materia oscura y también a su búsqueda. Por ejemplo, para la detección directa, una materia oscura que viola el isospin evadería los límites impuestos por los experimentos y

tendrían que ser simulados. La materia oscura podría ser producida en colisionadores donde la violación de isospin surge.

6.1. Lagrangiano efectivo y eigenestados Z'

El portal de Stückelberg consiste en la mezcla de bosones gauge masivos en U(1) de diferentes sectores. La construcción general en términos de una teoría de campo efectiva, puede ser descrita en términos del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{F}^T \cdot f \cdot \vec{F} - \frac{1}{2}\vec{A}^T \cdot M^2 \cdot \vec{A} + \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}(i\not{\partial} + \vec{Q}_{\alpha}^T \cdot \vec{A})\psi_{\alpha} \quad (235)$$

Donde $\vec{F} = d\vec{A}$ es el campo de fuerza del bosón de gauge en U(1) codificados en el vector $\vec{A}^T = (A_1 \dots A_{n+m})$. [9]. Las matrices f y M son las matrices cinéticas y de masa y en general son no diagonales, sin embargo para simplicidad se considerará M no diagonal y f diagonal. Para un campo de materia dado ψ_{α} , la carga vectorial \vec{Q}_{α} tendrá entradas diferentes a cero para ya sea el sector visible o escondido.

Para poder conseguir las masas para los bosones gauge Abelianos, \vec{A} está acoplado a un conjunto de campos periódicos axionicos $\phi^i \sim \phi^i + 2\pi$ en el siguiente lagrangiano.

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}G_{ij}(\partial\phi^i - k_a^i A^a)(\partial\phi^j - k_b^j A^b) \quad (236)$$

Donde G_{ij} es la métrica en el espacio de ϕ^i campos y es una matriz definida positivamente. Los factores k_a^i son las cargas axionicas bajo la normalización apropiada y pueden ser supuestos como enteros. Después de que las simetrías U(1) ya hayan sido cambiadas bajo la teoría de gauge, los bosones del grupo abeliano absorben los axiones y obtienen su masa por medio del mecanismo de Stückelberg.

6.2. El portal Z' : Búsquedas directas

En esta sección se verá la detección directa. Para poder trabajar con esto tomamos otra forma del lagrangiano, en este caso lo escribimos como:

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{2C_W} \left[\sum_i \bar{q}_i \gamma^{\mu} (a \cdot g_V^i - b \cdot g_A^i \gamma^5) q_i \right] Z'_{\mu} + g_{\chi} [\bar{\chi} \gamma^{\mu} (1 - \gamma^5) \chi] Z'_{\mu} \quad (237)$$

Donde q_i denota los quarks del modelo estándar, a y b son factores constantes que son iguales a u si se supone que el portal Z' se acopla equivalentemente al bosón Z , mientras que χ y g_{χ} son las partículas de la materia negra y el acoplamiento de materia negra con el portal. Por último g_V^i y g_A^i son los acoplamientos vectoriales y axiales de los quarks Z , que se pueden leer como:

$$g_V^i = t_{3L}(i) - 2 \cdot Q_i S_W^2 \quad (238)$$

$$g_A^i = t_{3L}(i) \quad (239)$$

Donde Q_i es la carga del quark i , t_{3L} es el isospin débil de los quarks con $t_{3L} = +\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$ para quarks up (down)[10]. Por medio de la ecuación (237) vemos tres cosas importantes:

	Operador	Estructura	Sección eficaz de scattering
\mathcal{O}_1	$\bar{q}\gamma^\mu q\bar{\chi}\gamma_\mu\chi$	Independiente del espín	$\frac{9g_V^2 g_X^2 M_n^2 M_\chi^2}{\pi M_{Z'}^4 (M_n + M_\chi)^2}$
\mathcal{O}_2	$\bar{q}\gamma^\mu q\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma^5\chi$	Independiente del espín	$\sim v^2$
\mathcal{O}_3	$\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q\bar{\chi}\gamma_\mu\chi$	Dependiente del espín	$\sim v^2$
\mathcal{O}_4	$\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma^5\chi$	Dependiente del espín	$\frac{3g_A^2 g_X^2 (\Delta \Sigma)^2 M_n^2 M_\chi^2}{Z' (M_n + M_\chi)^2}$

Cuadro 2: Operadores efectivos para scattering de nucleones en materia oscura. v es la velocidad de la materia oscura en el marco del laboratorio. M_n es la masa del nucleón y $\Delta \Sigma$ está definido como $\langle N | \sum_q \bar{q}\gamma_\mu\gamma^5 q | N \rangle = \Delta \sum \bar{U}_N \gamma_\mu \gamma^5 U_N$ con U_N como la función de onda del nucleón[11]. Los acoplamientos de g_V y g_A son determinados por (237)[10].

- Z' es leptofóbico, es decir que no sólo acopla a leptones por construcción. Este es el escenario más restringido por búsquedas de colisionador sobre un bosón nuevo neutral ya que Z' sólo puede decaer en parejas de materia oscura. Por otro lado, las interacciones de nucleones en DM no dependen del sector leptónico.
- Como será descrito en el cuadro 6.1, el portal Z' oscuro podría dar cuatro diferentes operadores cuando χ es un fermión de Dirac[11]. En este caso tomaremos esa suposición con un acoplamiento vectorial y axial a los fermiones como está descrito en la ecuación (6.3).
- Bosones gauge en Z' están predichos a existir en teorías gauge extendidas como $U(1)$. El montaje investigado aquí, supone extra fermiones incluidos para cancelar las anomalías inducidas por $U(1)$.

6.2.1. Detección directa

En la detección directa, los observables relevantes son: la sección eficaz de los nucleones de la materia oscura y la masa de las partículas de la materia oscura. En general, en el límite de velocidad bajo, el scattering de la interacción débil puede ser independiente del espín o dependiente de él. Dependiendo qué tipo de acoplamientos están involucrados. Como se ve en el cuadro 6.1, los operadores \mathcal{O}_3 y \mathcal{O}_4 incluyen interacciones dependientes al espín mientras que \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 son independientes. Por lo tanto el portal Z' está sujeto a estas dos condiciones.

La condición de dependencia de espín es generalmente más débil que la independiente ya que esta es proporcional a A^2 a no ser que ocurra una interferencia destructiva. Lo que importa de la detección directa, es que solo los operadores vectoriales y vector-axiales son relevantes, porque la mezcla de estos dos como se describe en \mathcal{O}_2 y \mathcal{O}_3 suprimen la velocidad[10].

Por medio de la descripción del campo escalar libre en la teoría clásica, fue posible entender el campo cuántico descriptivo. Se trabajó clásicamente por medio de la representación de Lagrange-Hamilton y luego se hizo lo mismo para poder cuantizar el formalismo clásico, en este caso se utilizó la representación de Heisenberg. Se logró también describir la teoría de perturbación de campos que interactúan que dio lugar a la matriz S y expansión de Dyson que fueron útiles para poder describir la fuerza débil.

Se logró también poder describir las características de las interacciones débiles como las covariantes bilineales, se tomaron los fermiones sin masa como las partículas para este estudio. Fue posible entender la teoría tanto la interacción de 4 puntos como el propagador débil.

Por último, se analizaron dos artículos que mencionan la posible existencia de un portal Z' en el cual el bosón gauge es relativamente ligero y no interactúa con leptones. Se menciona el método de detección directa para la búsqueda de dicho portal.

- [1] I. Aitchison y H. A.J.G, *Gauge Theories in Particle Physics*, 3era. Institute of Physics, 2004.
- [2] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, 1era. Dover Publications, 2009.
- [3] D. Tong, *Lectures on Quantum Field Theory*, 2006. dirección: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/oh4.pdf>.
- [4] F. Halzen y A. D. Martin, *Quarks and Leptons: Introductory course in Modern Particle Physics*, 1era. Nueva York: John Wiley & sons, 1984.
- [5] A. Boyd, *The weak Interaction*, 2016. dirección: https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/warwick_week/neutrino_physics/weak.pdf.
- [6] A. Falkowski, J. Juknevich y J.Shelton, *Dark Matter Through the Neutrino Portal*. dirección: [arXiv:0908.1790](https://arxiv.org/abs/0908.1790)[hep-ph].
- [7] D.Feldman, Z.Liu y P.Nath, «The Stueckelberg Z-prime Extension with Kinetic Mixing and Mili-Charged Dark Matter form de hidden sector», *Phys. Rev*, vol. [hep-ph/0702123 [HEP-PH]], pág. 10, 2007.
- [8] B. Patt y F. Wilczek, *Higgs-field portal into hidden sectors*. dirección: [hep-ph/0605188](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0605188).
- [9] V. M. Lozano, «Dark Matter phenomenology of intersecting D6-branes with a Stückelberg portal», *FTUAM-15-33 IFT-UAM/CSIC-15-109*, vol. [arXiv:1510.03424v1[hep-ph]], pág. 10, 2015.
- [10] A. Alves, S. Profumo y F. Queiroz., «The dark Z' portal: direct, indirect and collider searches», *JHEP 1404 (2014) 063*, vol. [arXiv:1312.5281[hep-ph]], pág. 29, 2013.
- [11] S. Profumo, W. Shepherd y T. Tait, *The Pitfalls od Dark Crossings*. dirección: [arXiv:1307.6277](https://arxiv.org/abs/1307.6277)[hep-ph].