
Estudio de la perturbatividad de la electrodinámica cuántica dentro del marco del momento magnético anómalo del muon

Baptiste Henri Bauer



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades



**Estudio de la perturbatividad de la
electrodinámica cuántica dentro del marco del
momento magnético anómalo del muon**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por
Baptiste Henri Bauer
para optar al grado académico de Licenciado en Física

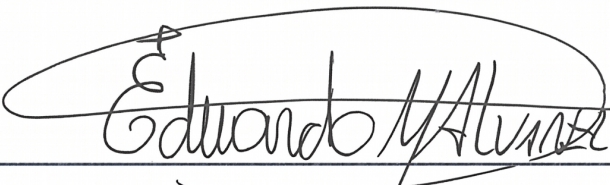
Guatemala, 2024

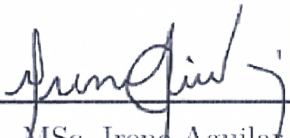
Vo.Bo.:

(f) 
Mtr. Emilio Estrada

Tribunal Examinador:

(f) 
Mtr. Emilio Estrada

(f) 
MSc. Eduardo Alvarez

(f) 
MSc. Irene Aguilar

Fecha de aprobación: Guatemala, 24 de enero 2024.

Prefacio

Desde niño, siempre he preguntado “¿por qué?” a todas las personas a mi alrededor. No había ningún fenómeno que no quisiese entender. Esta sed de lógica nunca se fue. A lo largo de mi niñez y mi adolescencia, he encontrado siempre una satisfacción en entender las cosas en mi entorno. Las ocurrencias en este mundo son regidas por reglas y, al preguntar “¿por qué?”, estas reglas se manifestaron. Entender las reglas de mi alrededor, entender las reglas del Universo, se volvió rápidamente uno de mis objetivos centrales para mi vida. Es por esta razón que decidí dedicarle mis estudios a la Física.

El Universo y su belleza no se escondieron de mí durante mi niñez. De día como de noche, siempre me fascinó observar el cielo. La Luna podía verse a veces, con formas diferentes, de día como de noche. Asistí a un eclipse solar cuando tenía seis años. Notaba la diferencia en la longitud de los días a lo largo del año. Pero, lo que más me fascinaba, eran las estrellas que brillaban en la noche. Como siempre preguntaba “¿por qué?”, mis papás me regalaron una enciclopedia cuando tenía cuatro años, y en esta vi por la primera vez las fotos del telescopio espacial Hubble.

Decidí dedicarle mi vida al estudio del espacio.

Durante mis estudios en la Universidad del Valle de Guatemala, tuve la dicha de conocer a un profesor muy peculiar: Siba Prasad Das. Un físico con un doctorado de una Universidad de la India, quien había publicado en diferentes áreas de la física del infinitamente pequeño (en particular publicó acerca de la supersimetría), fue contratado por el Departamento de Física, en el cual yo estaba matriculado. Recibí un curso con el Dr. S. P. Das: Introducción a la Física de Partículas. Su forma de enseñar era realmente diferente a todo lo que había conocido antes. No necesariamente en un buen sentido, parecía que este profesor no sabía enseñar. Este curso era muy aburrido. Esta era la opinión de todos los demás estudiantes de esta sección. Mi opinión, sin embargo, era diferente: me encantó este curso. El Dr. S. P. Das, o simplemente Siba, a pesar de su forma muy extraña de enseñar, logró comunicarme lo que a él lo definió como físico: su amor por la física del infinitamente pequeño. Siba me hizo descubrir un nuevo mundo. Cuando yo estaba siempre preocupado por observar lo más lejano que pudiese, él me enseñó a ver más cerca, mucho más cerca. El mundo de la física de partículas, de la mecánica cuántica, la electrodinámica cuántica, la teoría de campos, la cromodinámica cuántica, todo esto Siba lo manejaba a la perfección, y logró darme a entender que este mundo era aún más bello que lo que sea que se pueda observar levantando los ojos hacia arriba.

La mecánica cuántica tiene la mala fama de ser complicada, extraña, rara e incluso imposible

de entender. Muchos se recuerdan de la frase de Richard Feynman, “I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics” (“creo que puedo decir con certeza que nadie entiende la mecánica cuántica”). Pero muy pocos se recuerdan de que él dijo esta oración en una conferencia, y que pasó todo el tiempo restante explicando todas las formas en las cuales entendemos muy bien la mecánica cuántica. Previo al curso que recibí con Siba, yo era una de estas personas. No sabía nada de la mecánica cuántica. No quiero parecer engreído: salí del curso sin saber nada de la mecánica cuántica. Pero Siba me enseñó algo: la idea de que la mecánica cuántica es complicada, extraña, rara e imposible de entender, es completamente falsa. La descripción del mundo del infinitamente pequeño no es simple, pero es increíblemente bella. Las partículas que constituyen nuestro universo y las reglas por las cuales interactúan tienen una estructura linda, geométrica, artística, y, a pesar de que muchos estén en desacuerdo, *entendible*.

Decidí dedicarle mi vida al estudio del mundo cuántico.

Agradecimientos

Luego de la realización de este trabajo, hay varias personas a quienes quisiera agradecer. Son personas que han tenido un impacto en mi vida, en mis intereses o en la realización de este trabajo.

Quiero agradecer a mis papás por su apoyo constante a lo largo de los años. Quiero agradecerles por su paciencia y la confianza que me han tenido a lo largo de mi vida.

Quiero agradecer a mi novia, por su amor y su cariño. Ella me ha acompañado a lo largo de la realización de este trabajo.

Quiero agradecer a mi asesor, Emilio Estrada, por su liderazgo, su acompañamiento y sus consejos durante este trabajo. Él le dio una dirección a mi idea de estudiante ilusionado y supo darme un trabajo que fuera un reto alcanzable. He aprendido muchísimo de física gracias a él.

Quiero agradecer al doctor Siba Prasad Das, por haberme enseñado qué área de la física es la que deseo realmente estudiar. Me hizo madurar muchísimo acerca de mi entendimiento de la estructura de la física.

Este trabajo de graduación no es solo mi trabajo para mi graduación. Estoy rodeado de personas que han hecho esfuerzos, pequeños, grandes, incluso que han sacrificado bastante con el fin de verme llegar a la meta. Es cierto no solo en la realización de este documento, sino en todos los aspectos de mi vida. Tengo la dicha de tener a seres queridos, que me quieren también. Les estaré siempre agradecidos. Gracias por querer verme tener éxito: espero no decepcionarlos.

Prefacio	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Resumen	ix
1. Introducción	1
2. Objetivos	4
2.1. Objetivo general	4
2.2. Objetivos específicos	4
3. Marco teórico	5
4. Fundamentos de la teoría cuántica de campos: estudio preliminar	7
4.1. El electromagnetismo como una teoría de gauge	7
4.1.1. ¿Qué es una teoría de gauge?	7
4.1.2. Teoría electromagnética como una teoría de gauge	8
4.1.3. Invariancia de gauge en mecánica cuántica	8
4.2. Teoría cuántica relativista	9
4.2.1. Ecuación de Klein-Gordon	10
4.2.2. Ecuación de Dirac	12
4.2.3. Temas complementarios	15
4.3. Transformaciones de Lorentz	16
4.3.1. Ecuación de Klein-Gordon	17
4.3.2. Ecuación de Dirac	17
5. Momento magnético anómalo del muon	22
5.1. Primera aproximación: $g = 2$	22
5.2. El momento magnético anómalo	25
5.2.1. Correcciones en primer <i>loop</i>	26
5.2.2. Experimentos de BNL y FNAL y sus implicaciones acerca de la anomalía	26

5.2.3. Diferentes contribuciones para a_μ	28
6. Perturbatividad en teoría cuántica de campos	31
6.1. Interacción en campos cuánticos escalares y matriz S de Dyson	31
6.1.1. Introducción	31
6.1.2. Teoría de perturbaciones en interacciones de campo: expansión de la matriz S de Dyson	31
6.2. No perturbatividad de la cromodinámica cuántica	35
6.3. $g - 2$ del muon: resultados a primer orden	35
6.3.1. Primer orden de e	36
6.3.2. Primera corrección: orden e^3	36
7. Análisis perturbativo en electrodinámica cuántica	38
7.1. Diagramas de Feynman y cantidad de <i>loops</i>	38
7.2. Análisis de perturbatividad	40
7.2.1. Planteamiento de la resolución	41
7.2.2. Resultados	42
7.2.3. Discusión	44
8. Conclusiones	46
9. Bibliografía	47
Anexos	50
A. Reglas para los diagramas de Feynman	50
B. Código para el cálculo numérico	52
10. Glosario	61
11. Lista de símbolos	62

Lista de figuras

1.1. Modelo estándar. El muon es un fermión de misma carga que el electrón y de masa 207 veces mayor	1
1.2. Un trompo girando y precesando	2
1.3. Cuando un muon se encuentra en un campo magnético, su espín precede	3
5.1. Interacción de μ^+ con un fotón	26
5.2. Resultados experimentales y la desviación con el modelo estándar [1]	27
5.3. Configuración experimental, Fermilab [2]	27
5.4. Diagrama para el proceso $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$	28
5.5. Contribuciones para el valor a_μ [3]	29
5.6. Diagrama general del proceso HVP	30
5.7. Diagrama general para el proceso HLbL	30
6.1. Diagramas de Feynman contribuyendo a órdenes de e^3 después de normalización	36
(a). Primera contribución	36
(b). Segunda contribución	36
7.1. Diagrama general para la dispersión de un muon por un fotón en QED	39
7.2. Diagrama a nivel árbol	39
7.3. Diagrama en 1 <i>loop</i>	39
7.4. Uno de los siete diagramas en 2- <i>loops</i>	40
7.5. Ajuste del modelo “producto constante”	43
7.6. Ajuste del modelo exponencial en diferentes escalas	43
7.7. Predicción de los valores de $a(n)$ para $n = 10$ en diferentes escalas	44
7.8. Evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$ cuando crece n	45
A.1. Diagrama fundamental en QED.	50
B.1. Producto de número de diagramas $\times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$ vs número de <i>loops</i>	54
B.2. Ajuste de número de diagramas vs número de <i>loops</i> al primer modelo propuesto	56
B.3. Ajuste de número de diagramas vs número de <i>loops</i> al segundo modelo propuesto	58
B.4. Predicción del segundo modelo para el número de diagramas a órdenes más altos.	60

Este trabajo estudia la perturbatividad de la teoría electrodinámica cuántica a través del problema del valor del momento magnético anómalo del muon.

Se expone un desarrollo teórico rudimentario de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, necesarias en el estudio del momento magnético anómalo del muon.

Se resume la situación actual en la literatura acerca del valor de la razón giromagnética del muon, tanto en un enfoque experimental como teórico. Se evidencia la discrepancia existente entre los valores experimentales y teóricos.

Se presenta un estudio de la teoría de perturbaciones aplicada a la teoría cuántica de campos, con énfasis a la teoría electrodinámica cuántica. Se realizan cálculos explícitos en órdenes bajos del valor del momento magnético anómalo del muon en electrodinámica cuántica, utilizando la teoría de perturbaciones como herramienta.

Se plantea la serie perturbativa para obtener el valor del momento magnético anómalo del muon, y se propone una prueba de convergencia de dicha serie mediante métodos numéricos. Los límites de estos métodos numéricos se evalúan mediante la predicción de cantidad de diagramas de Feynman presentados en órdenes mayores en la serie perturbativa. Se concluye que la serie perturbativa es convergente, y que la teoría electrodinámica cuántica es perturbativa. Se proveen recomendaciones acerca del método numérico utilizado.

La física de partículas elementales se describe y estudia a través del modelo estándar. El modelo estándar fue construido desde inicios del siglo pasado y se concluyó a finales de los años 1970 con la descripción de la unificación entre el electromagnetismo y las interacciones débiles [4, 5, 6]. Este modelo describía la física de procesos nucleares y subnucleares estudiados experimentalmente y descritos teóricamente de forma efectiva desde los comienzos del siglo XX [7]. El muon, la partícula de interés a lo largo de este trabajo, se encuentra descrito dentro del contexto del modelo estándar.

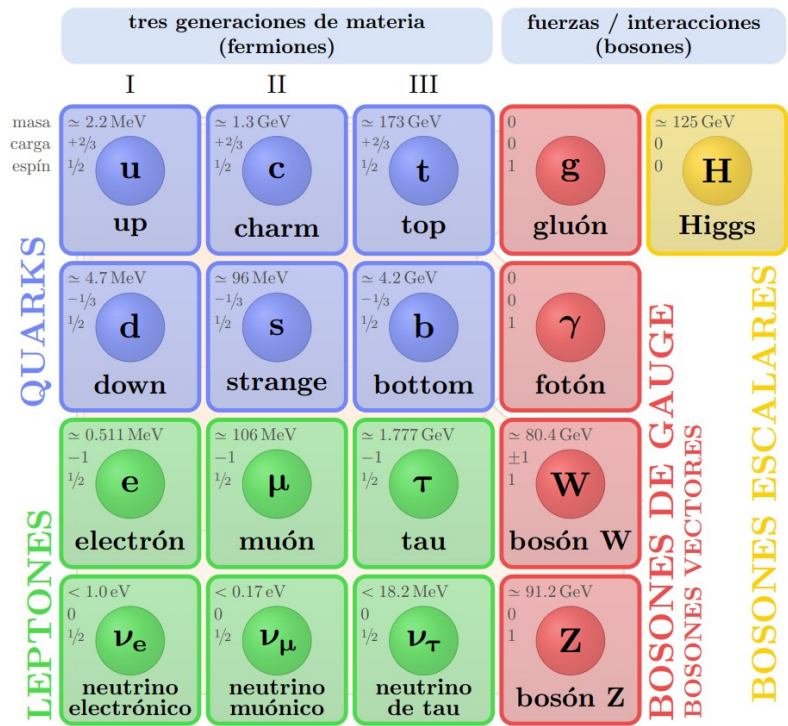


Figura 1.1: Modelo estándar. El muon es un fermión de misma carga que el electrón y de masa 207 veces mayor

En la Figura 1.1, se representa una lista de las diferentes partículas fundamentales conocidas y estudiadas dentro del modelo estándar. Nótese en particular el muon, de carga idéntica al electrón, y de masa al reposo aproximadamente 207 veces mayor a la del electrón.

Dentro de la teoría de interacciones fundamentales, que está englobada también dentro de la física de partículas, existen 4 interacciones fundamentales: electromagnetismo, interacciones débiles, interacciones fuertes y gravedad. Cada una de ellas tiene sus ventajas y complicaciones, debido a energía, fenomenología disponible, complejidad de los experimentos y compatibilidad con la teoría cuántica de campos (debido a esto, la gravedad no es incluida en los estudios generales de física de partículas, y no es descrita dentro del modelo estándar). Existen pocos fenómenos en la física de partículas que incluyan tanto a la electrodinámica cuántica (QED), teoría electrodébil (EW) y cromodinámica cuántica (QCD), y uno de los más interesantes de estos es el momento magnético anómalo del muon.

El momento magnético de una partícula, como la del muon, puede estudiarse mediante una analogía con un sistema físico. Considere un trompo girando en un campo gravitacional, como se representa en la Figura 1.2.

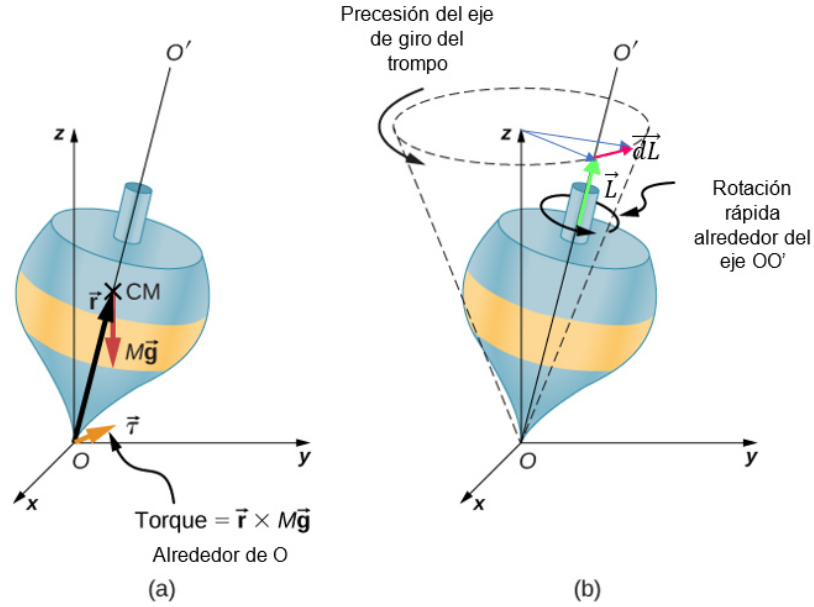


Figura 1.2: Un trompo girando y precesando

El momento angular clásico del trompo precesita al rededor del vector gravedad.

Considere ahora un muon dentro de un campo magnético, como se representa en la Figura 1.3. Al igual que un trompo en un sistema clásico, el muon precesita. Su espín, o su momento angular cuántico, precesita al rededor del vector de campo magnético. Si se considera el muon como una partícula fundamental, y se estudia su comportamiento en un campo magnético, éste se puede estudiar tanto de forma clásica que de forma cuántica. A continuación se encuentran las frecuencias de oscilación para el muon en ambos marcos de estudio:

$$\text{Momento magnético clásico: } -\frac{e}{2m}\mathbf{B} \quad \text{Momento magnético cuántico: } -g\frac{q}{2m}\mathbf{B}$$

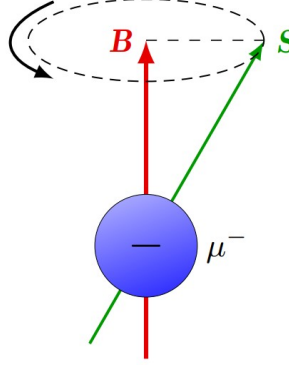


Figura 1.3: Cuando un muon se encuentra en un campo magnético, su espín precesiona

En el caso cuántico, la frecuencia de oscilación presenta un factor g , que el caso clásico no contiene. Este factor g es un número sin unidades, es nada más que un escalar que multiplica la frecuencia de oscilación con respecto a su valor clásico. El valor de g es particularmente interesante: se puede aproximar teóricamente con una alta precisión, haciendo uso del modelo estándar. Se encuentran varias correcciones más allá de la simple mecánica cuántica, el valor de estas correcciones es lo que se conoce como el momento magnético anómalo del muon. Además de su aproximación teórica, el valor de g puede encontrarse exactamente de forma experimental. El problema del “ $g - 2$ del muon” describe la discrepancia que existe luego de encontrar ambos valores para g : luego de calcular el valor teórico y obtener el valor experimental, estos no concuerdan.

Este fenómeno es el problema de estudio de este trabajo. Para que la precisión del cálculo teórico esté a la altura de la medición experimental (medido en Brookhaven [8] y en Fermilab [9, 1]), es necesario ir a altos niveles perturbativos en las teorías que así lo permitan (como es el caso del electromagnetismo y las interacciones débiles). El valor teórico actual es $a_{\mu}^{\text{Th}}{}^{20} = 0.001\,165\,918\,10\,(43)$ y el valor experimental es $a_{\mu}^{\text{Exp}}{}^{23} = 0.001\,165\,920\,59(22)$, los cuales discrepan con una significación estadística de 5.1σ . Esto podría implicar errores de cómputo teórico, o bien la evidencia que hay física más allá del modelo estándar (además de la existente en otros problemas como la masa de los neutrinos).

De todos los cálculos teóricos, la primera corrección al valor clásico fue la corrección electromagnética calculada por Schwinger en el 1948 [10]. Desde ese entonces, se ha ido a mayor profundidad en los cálculos perturbativos. La disponibilidad de estos datos [9] permite hacer un estudio de perturbatividad para el electromagnetismo, en el cual las contribuciones se pesan por el parámetro perturbativo $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$, con α siendo la constante de estructura fina del electromagnetismo. Específicamente, la cantidad de *loops* estudiada resulta ser una expansión en series en $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$, para n un entero positivo. Para este estudio, se realiza un ajuste del número de diagramas por cada orden de magnitud, contra el orden de magnitud. Para ello, un modelo exponencial es propuesto, con una constante b que da la información acerca de la perturbatividad de la electrodinámica cuántica con al información disponible de este observable. En particular, se ajusta un modelo de la forma $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{(b-1)n}$ con b entre 0 y 1 para probar la convergencia de la perturbatividad. Así, este estudio es una prueba de perturbatividad de la electrodinámica cuántica en el marco del momento magnético anómalo del muon.

2.1. Objetivo general

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio de la perturbatividad de la electrodinámica cuántica, a través del análisis del momento magnético anómalo del muon.

2.2. Objetivos específicos

- Exponer un desarrollo preliminar de la teoría electrodinámica cuántica. Particularmente, se busca presentar un estudio de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac.
- Presentar el estado actual de la literatura acerca de la razón giromagnética del muon.
- Presentar un desarrollo de la teoría de perturbaciones en el marco de la teoría cuántica de campos, y aplicarla a la electrodinámica cuántica a través de cálculos explícitos.
- Analizar la perturbatividad de la teoría electrodinámica cuántica mediante el estudio de la convergencia de la serie perturbativa para el momento magnético anómalo del muon.

El desarrollo de la cromodinámica cuántica (con su subsiguiente versión *lattice*) culminó con la predicción del valor del momento magnético anómalo del electrón [11]. Esta predicción fue corroborada experimentalmente con 13 cifras significativas de precisión experimental, todas con exactitud [12]. El electrón y el muon siendo fermiones de la misma familia en el modelo estándar, se decidió realizar el mismo experimento con el muon en 2006, dentro de las instalaciones de Brookhaven [8]. Resultó una aparente diferencia entre el valor experimental y el valor teórico. Con el fin de eliminar un posible error experimental, se repitió el experimento en Fermilab [9, 1]; la discrepancia fue confirmada. Hoy en día, la situación permanece.

La teoría cuántica de campos requiere de un formalismo relativista, el cual no existe dentro del marco de la mecánica cuántica. El desarrollo de la ecuación de Klein-Gordon es el primer intento de incorporar la dinámica relativista en la mecánica cuántica [13, 14]. La ecuación de Dirac agregó el estudio del espín a la teoría [15]. Estas dos ecuaciones permiten el estudio de la mecánica cuántica a través de la teoría de Gauges. En efecto, ambas ecuaciones cumplen con las transformadas de Lorentz, permitiendo una construcción de teoría de Gauge, además de un estudio relativista.

El momento magnético anómalo es una corrección en la razón giromagnética de una partícula. La razón giromagnética es un factor que dicta como el espín de una partícula precede al estar sometida a un campo magnético [16]. Inicialmente, el valor de la razón giromagnética se creía ser de exactamente 2 [17, 15]. Sin embargo, el valor experimental, al ganar precisión, se mostró ser de un valor estrictamente mayor a dos, con una contribución anómala, la cual fue medida experimentalmente con la extraordinaria precisión de 13 cifras significativas, son los experimentos realizados en Brookhaven [8] y Fermilab [18, 1]. A través de la electrodinámica cuántica, de la teoría electrodébil y de la cromodinámica cuántica, se calculó también un valor teórico, con una precisión comparable. Los valores experimentales y teóricos tienen una diferencia estadística, con una confianza de 5.1σ .

El estudio teórico del problema $g-2$ del muon se puede realizar mediante la teoría de perturbaciones (en la perspectiva de electrodinámica cuántica: la cromodinámica no siempre es perturbativa). Una cantidad crucial para el estudio de este problema desde una perspectiva perturbativa es la matriz S de Dyson [19]. La expansión en serie de esta matriz permite estudiar los diagramas de Feynman del proceso de dispersión del muon por un campo magnético con una cantidad de loops

arbitrariamente alta. Por este medio se realiza el cálculo en primer orden de la carga del muon, e , al igual que la primera corrección (en principio, se puede obtener un orden de e arbitrariamente alto).

Fundamentos de la teoría cuántica de campos: estudio preliminar

El estudio del momento magnético anómalo de una partícula se realiza dentro del marco de la Teoría Cuántica de Campos. Con el fin de darle al lector las herramientas necesarias para entender este trabajo, se propone un desarrollo teórico preliminar, objeto de estudio de la presente sección. Este se realiza en tres secciones. La primera propone una interpretación de la Teoría Electromagnética como una teoría de gauge. La segunda desarrolla la Teoría Cuántica Relativista, en particular se estudian las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac. Finalmente, la tercera sección estudia las transformaciones de Lorentz de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac. Este capítulo se basa sobre el libro académico de Aitchison & Hey [20].

4.1. El electromagnetismo como una teoría de gauge

4.1.1. ¿Qué es una teoría de gauge?

En 1918, Emmy Noether publicó un artículo científico exponiendo un resultado central en física teórica [21]. Su trabajo demuestra el teorema de Noether: en un sistema físico, a cualquier simetría diferenciable corresponde una ley de conservación. Se considera una “simetría” una operación matemática, o una transformación, aplicada a los objetos de la teoría de tal forma que las leyes físicas sean idénticas (o *invariantes*) antes y después de la operación. Un ejemplo de una simetría se encuentra en la traslación o la rotación de una ley fundamental. Las leyes de Newton son idénticas independientemente del lugar o la dirección que se apliquen. El teorema de Noether indica que existen entonces dos leyes de conservación, una para cada simetría: en efecto, la simetría de traslación es equivalente a la conservación del momento lineal, y la simetría de rotación es equivalente a la conservación del momento angular.

Existen dos clases de transformaciones importantes: transformaciones globales y transformaciones locales; a las cuales están asociadas invariancias globales e invariancias locales. En una invariancia global, una transformación se aplica a todos los puntos del espacio-tiempo. En una invariancia local, a cada punto del espacio-tiempo se le aplica una transformación individual.

La dinámica de un sistema físico se puede describir enteramente mediante su lagrangiano. Una teoría de gauge se define como una clase de teoría de campo en la cual el lagrangiano de un sistema es invariante bajo transformaciones locales. Es decir, el lagrangiano es invariante localmente. Cada invariancia cumple con la definición de una simetría; existen leyes de conservación asociadas. Por

regla general, estas tomarán la forma de una ecuación de continuidad, expresada como la conservación de alguna corriente j (de ser necesario, se especificará la corriente en cada caso).

4.1.2. Teoría electromagnética como una teoría de gauge

Para construir una teoría de gauge a partir del electromagnetismo clásico, es necesario preguntarse si existen cantidades físicas que se puedan transformar sin cambiar la dinámica de un sistema dado. La respuesta a esta pregunta yace en la existencia de los potenciales V y $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (4.2)$$

Los potenciales V y $\mathbf{A}$ no son únicos para campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dados. En efecto, se puede cambiar a $\mathbf{A}$. Para una función escalar arbitraria χ ,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (4.3)$$

Simultáneamente, V se transforma de la siguiente forma para preservar a $\mathbf{E}$:

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4.4)$$

Se resumen estas transformaciones en una forma compacta, introduciendo el cuadrivector potencial:

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) \quad (4.5)$$

También se define el cuadrivector

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (4.6)$$

El cual se transforma idénticamente a una transformación de Lorentz. Entonces, se escribe la ecuación:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (4.7)$$

La ecuación (4.7) es una transformación de gauge.

4.1.3. Invariancia de gauge en mecánica cuántica

Se estudia ahora la dinámica de una partícula no relativista de carga q y de velocidad v en campos eléctricos y magnéticos. El hamiltoniano clásico de este sistema es:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qV \quad (4.8)$$

La ecuación de Schrödinger para esta partícula es:

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.10)$$

Se definen los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \nabla - iq\mathbf{A} \\ D^0 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + iqV \end{aligned} \quad (4.11)$$

La función de onda ψ no es un observable, a diferencia de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. ψ no necesita ser invariante bajo la transformación de gauge descrita por las ecuaciones (4.3) y (4.4). Para que la mecánica cuántica sea consistente con las ecuaciones de Maxwell, es necesario que la transformación de gauge de A^μ sea acompañada de una ley de transformación para la función de onda $\psi \rightarrow \psi'$, de tal forma que ψ' satisfaga la ecuación:

$$\left(\frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + qV' \right) \psi'(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \psi'(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.12)$$

Que la forma de la ecuación (4.12) sea idéntica a la ecuación (4.10) cumple con la definición de covarianza de gauge: bajo una transformación de gauge, una ecuación mantiene la misma forma. (Un ejemplo pueden ser las leyes de Newton bajo una traslación lineal: en ambos casos, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.) Esta covarianza de gauge implica que la dinámica se mantendrá idéntica en ambos sistemas.

La función de onda ψ' apropiada se relaciona con ψ de la siguiente forma:

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \exp[iq\chi(\mathbf{x}, t)] \psi(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (-i\nabla - q\mathbf{A}')\psi' &= [-i\nabla - q\mathbf{A} - q(\nabla\chi)] [\exp(iq\chi)\psi] \\ &= q(\nabla\chi) \exp(iq\chi)\psi + \exp(iq\chi) \cdot (-i\nabla\psi) \\ &\quad + \exp(iq\chi) \cdot (-q\mathbf{A}\psi) - q(\nabla\chi) \exp(iq\chi)\psi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Simplificando y utilizando la notación definida en (4.11):

$$(-i\mathbf{D}'\psi') = \exp(iq\chi) \cdot (-i\mathbf{D}\psi) \quad (4.15)$$

De la misma forma,

$$(iD^0\psi') = \exp(iq\chi) \cdot (iD^0\psi) \quad (4.16)$$

Se repite este procedimiento una vez más:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (-i\mathbf{D}')^2 \psi' &= \exp(iq\chi) \cdot \frac{1}{2m} (-i\mathbf{D})^2 \psi \\ &= \exp(iq\chi) \cdot iD^0\psi && \text{Usando la ecuación (4.10)} \\ &= iD^{0'}\psi' && \text{Usando la ecuación (4.11)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

La ecuación $\frac{1}{2m} (-i\mathbf{D}')^2 \psi' = iD^{0'}\psi'$ es idéntica a (4.12); la relación (4.13) es la relación correcta entre ψ' y ψ . Esta consistencia es lo que significa la calidad de covarianza de gauge.

4.2. Teoría cuántica relativista

La Mecánica Cuántica como se estudia en Licenciatura es fundamentalmente no relativista. En efecto, la ecuación de Schrödinger no es relativista: en la ecuación $\hat{H}\psi = E\psi$, Schrödinger usó la energía no relativista para una partícula libre; es decir $E = \mathbf{p}^2/2m$. Sustituyendo

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\partial/\partial t \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\nabla \end{aligned} \quad (4.18)$$

se obtiene la conocida ecuación de Schrödinger. Esta ecuación, además de carecer de descripción relativista, también muestra una falta de consideración para el espín del objeto estudiado. En la presente sección, se presentará una introducción a las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, remedios a ambas preocupaciones respectivamente.

4.2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Para diferenciar la función de onda de Schrödinger de la de Klein-Gordon, esta última se denotará ϕ . Históricamente, esta ecuación fue obtenida por Schrödinger, de la misma forma que él obtuvo su ecuación no relativista. En vez de usar la energía no relativista de una partícula, se usa la energía relativista dentro de la ecuación de eigenvalores $\hat{H}\psi = E\psi$. Se empieza con el cuadrimomento:

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) \quad (4.19)$$

Este satisface la condición

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (4.20)$$

Se despeja E^2 para obtener la fórmula para el cuadrado de la energía relativista:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (4.21)$$

Se sustituyen las relaciones (4.18) para obtener:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \quad (4.22)$$

Esta ecuación de eigenvalores se conoce como la ecuación de Klein-Gordon [14, 13]. Se puede reescribir haciendo uso del D'Alembertiano:

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.23)$$

Nótese que la energía relativista usada es $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Las dos soluciones para E son:

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (4.24)$$

$$E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (4.25)$$

La primera se denotará como E , la segunda como $-E$; esto con el fin de mantener siempre positivo el valor de la energía.

Corriente de probabilidad para la ecuación de Klein-Gordon

Al igual que la ecuación de Schrödinger, es posible encontrar una ley de conservación para la corriente de probabilidad en la ecuación de Klein-Gordon.

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \quad (4.26)$$

Se necesitan hacer algunas manipulaciones para llegar a un resultado interesante.

$$\text{Se multiplica (4.26) por } \phi^*: \quad -\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \phi^* (-\nabla^2 + m^2)\phi \quad (4.27)$$

$$\text{Se multiplica el complejo conjugado de (4.26) por } \phi: \quad -\phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = \phi (-\nabla^2 + m^2)\phi^* \quad (4.28)$$

Al restar la ecuación (4.27) por (4.28):

$$-\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = -\phi^* \nabla^2 \phi + \phi \nabla^2 \phi^* \quad (4.29)$$

$$\mathbf{i} \cdot \left[\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] - \mathbf{i} \cdot (\phi^* \nabla^2 \phi + \phi \nabla^2 \phi^*) = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{i} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\mathbf{i}} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right] = 0 \quad (4.31)$$

Se define:

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{i} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \quad (4.33)$$

Y se sustituye en (4.33):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.34)$$

Se define

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}) = i[\phi^*(\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^*)\phi] \quad (4.35)$$

y se compacta el resultado:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.36)$$

Nótese que por la forma de (4.35), j^μ es un cuadvivector contravariante. En efecto, ϕ es un invariante de Lorentz y ∂^μ es un cuadvivector contravariante.

Si bien $\mathbf{j}$ como se indica en (4.33) es idéntico a la corriente de Schrödinger, la densidad de carga ρ (4.32) no la es. A diferencia de la ecuación de Schrödinger (que tiene forma de una ecuación de calor con un término de interacción, $\nabla^2 \psi + \kappa \psi = k^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}$ para k y κ constantes complejas), la ecuación de Klein-Gordon es una ecuación de onda, con una doble derivada temporal. En la expresión para ρ , aparecen derivadas de primer orden en el tiempo. Entonces, esta cantidad ρ , que se llama la “densidad de probabilidad”, no es positiva definida.

Esta propiedad de la ecuación de Klein-Gordon también se manifiesta al estudiar las soluciones para ϕ . Para una constante de normalización N ,

$$\phi = N e^{-ip \cdot x} \quad (4.37)$$

Con p definido como en (4.19). El complejo conjugado de (4.37) es

$$\phi^* = N e^{ip \cdot x} \quad (4.38)$$

Se sustituye a ϕ y ϕ^* en j^μ (4.35):

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = i[N e^{ip \cdot x} \partial^\mu (N e^{-ip \cdot x}) - (\partial^\mu (N e^{ip \cdot x})) N e^{-ip \cdot x}] \quad (4.39)$$

Se trabaja la corriente j^μ por componentes:

$$j^0 = i N e^{ip \cdot x} \frac{\partial}{\partial t} (N e^{-ip \cdot x}) - i \frac{\partial}{\partial t} (N e^{ip \cdot x}) N e^{-ip \cdot x} \quad (4.40)$$

$$= i N^2 e^{ip \cdot x} (-iE) e^{-ip \cdot x} - i N^2 e^{-ip \cdot x} (iE) e^{ip \cdot x} \quad (4.41)$$

$$= N^2 E + N^2 E \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow j^0 = 2|N|^2 E \quad (4.43)$$

$$\mathbf{j} = i N e^{ip \cdot x} \frac{\partial}{\partial x^i} (e^{-ip \cdot x}) - i \frac{\partial}{\partial x^i} (e^{ip \cdot x}) e^{-ip \cdot x} \quad (4.44)$$

$$= i N^2 e^{ip \cdot x} (i\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} - i N^2 e^{ip \cdot x} (-i\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (4.45)$$

$$= -N^2 \mathbf{p} - N^2 \mathbf{p} \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = -2|N|^2 \mathbf{p} \quad (4.47)$$

En resumen,

$$j^\mu = 2N^2 p^\mu \quad (4.48)$$

De particular interés es la ecuación (4.43), en la cual E puede ser positivo o negativo. Se encuentra que ρ tiene el mismo signo que la energía. Estas energías negativas fueron interpretadas por Feynman (luego del desarrollo de la ecuación de Dirac) como la descripción de antipartículas.

4.2.2. Ecuación de Dirac

En 1928, Dirac postuló una ecuación diferencial con el fin de describir la función de onda de una partícula relativista, tomando en cuenta su espín [15]. La función de onda escribiéndose ψ , la ecuación de Dirac es de la forma:

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta m \right] \psi(\mathbf{x}, t) \quad (4.49)$$

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (4.50)$$

Se definió a $\boldsymbol{\alpha}$ como $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Antes de definir a $\boldsymbol{\alpha}$ y β , es importante notar dos aspectos importantes de la ecuación de Dirac:

- Es de orden lineal en $\partial/\partial t$, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon. Esto asegura tener una ecuación de continuidad libre de derivada temporal, eliminando así “probabilidades” negativas.
- Es de orden lineal en $\boldsymbol{\nabla}$. Esto asegura la covarianza relativista de la ecuación.

Para definir a $\boldsymbol{\alpha}$ y β , Dirac requirió que su ecuación sea consistente con la ecuación de Klein-Gordon. Así, Dirac agregó la siguiente restricción sobre ψ :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \psi \quad (4.51)$$

Se definen a $\boldsymbol{\alpha}$ y β ; empezando con la ecuación de Dirac (4.50)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \psi \quad (4.52)$$

Se pone cada lado de la ecuación al cuadrado:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi &= (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)(-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \psi \\ &= - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^i)^2} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - i m \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \psi. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pero, ψ también cumple con la ecuación de Klein-Gordon (4.51) al cuadrado:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^i)^2} + m^2 \psi \quad (4.54)$$

Al igualar ambas ecuaciones, es evidente que α y β tienen que cumplir con las relaciones de anti-conmutación:

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.55)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j \quad (4.56)$$

Adicionalmente,

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (4.57)$$

Se resumen estas condiciones en notación de anticonmutador:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (4.58)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1} \quad (4.59)$$

$$\beta^2 = \mathbf{1} \quad (4.60)$$

Los objetos que cumplen con estas condiciones se pueden interpretar como matrices. Actúan sobre ψ , también multi-dimensional, cuyas componentes son espinores. La dimensión más pequeña que pueden presentar las matrices α y β es 4×4 . Se usará una notación compacta, por bloques de 2×2 . Por convención, las matrices α y β toman la forma

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

En donde σ_i son las matrices de Pauli.

Las matrices (4.61) no son únicas. En efecto, todas matrices que se puedan relacionar a α y β como se definen en (4.61), mediante una matriz unitaria $\mathbf{U}$ de dimensión 4×4 , son aceptables:

$$\alpha'_i = \mathbf{U} \alpha_i \mathbf{U}^{-1} \quad (4.62)$$

$$\beta' = \mathbf{U} \beta \mathbf{U}^{-1} \quad (4.63)$$

En particular, se usa comúnmente otra representación, dada por las relaciones:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Al menos que se mencione lo contrario, se usará la forma (4.61).

Soluciones para partículas libres

Ya que la función de onda tiene que cumplir con la restricción de Klein-Gordon (4.51), las soluciones para ψ tendrán forma de onda plana:

$$\psi = \omega e^{-ip \cdot x} \quad (4.65)$$

En esta ecuación, ω es un espinor de 4 componentes independiente de x . Ya que se usa una notación compacta (en matrices de 2×2), se representará a ω como un espinor de 2 componentes, cada una de estas dos componentes siendo bidimensionales:

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Se sustituye (4.65) en la ecuación de Dirac (4.50):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \right] = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \quad (4.67)$$

$$i(-i) E e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \quad (4.68)$$

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - \beta m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$(E \mathbf{1} - \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

La ecuación (4.70) se puede escribir como un par de ecuaciones matriciales acopladas:

$$\begin{pmatrix} (E - m) \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (E + m) \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$\begin{cases} (E - m) \phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi \\ (E + m) \chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi \end{cases} \quad (4.72a)$$

$$\begin{cases} (E - m) \phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi \\ (E + m) \chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi \end{cases} \quad (4.72b)$$

De (4.72a), se despeja a χ en función de ϕ y se sustituye en la expresión para ω (4.66):

$$\omega = \left(\frac{\phi}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi} \right) \quad (4.73)$$

Para que ψ definido en (4.65) sea una solución a la ecuación de Dirac, se necesita especificar la relación que presentan E y $\mathbf{p}$ en (4.73). Para ello, se demuestra primero primero que $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= \sigma_i p_i \sigma_j p_j \\ &= \sigma_i \sigma_j p_i p_j \\ &= (\delta_{ij} \mathbf{1} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k) p_i p_j \\ &= \delta_{ij} \mathbf{1} p_i p_j + i\epsilon_{ijk} \sigma_k p_i p_j \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{p}^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Se sustituye a χ de la ecuación (4.72b) dentro de (4.72a):

$$(E - m)\phi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi \quad (4.75)$$

$$(E + m)(E - m)\phi = \mathbf{p}^2 \phi \quad (4.76)$$

$$E^2 - m^2 = \mathbf{p}^2 \quad (4.77)$$

Se concluye entonces que

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (4.78)$$

$$E = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \quad (4.79)$$

Al igual que en la ecuación de Klein-Gordon, se admiten soluciones positivas y negativas para la energía.

Corriente de probabilidad para la ecuación de Dirac

Considere la siguiente cantidad, denotada por ρ :

$$\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x) \quad (4.80)$$

En términos de componentes, se puede apreciar cómo se define $\psi^\dagger$:

$$\rho = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Se puede reescribir a ρ como

$$\rho = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2 > 0 \quad (4.82)$$

Se menciona sin demostrar que ρ efectivamente se puede interpretar como una densidad de probabilidad. También se define a $\mathbf{j}$ como

$$\mathbf{j}(x) = \psi^\dagger(x)\boldsymbol{\alpha}\psi(x) \quad (4.83)$$

$\mathbf{j}$ siendo la corriente de probabilidad. Juntos, ρ (4.80) y $\mathbf{j}$ (4.83) cumplen con la ley de conservación (o ecuación de corriente de probabilidad)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.84)$$

Lo cual se escribe de forma invariante, definiendo a $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.85)$$

A diferencia de la corriente de probabilidad correspondiente a la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación (4.85) es aceptable. Además, por su forma, j^μ es un cuadvivector contravariante.

4.2.3. Temas complementarios

Espín

La naturaleza matemática de las α 's y β es matricial; estas matrices tienen componentes que se estudian por vectores columna. Dado que estos vectores columna cumplen con la misma ecuación de onda, corresponden todos a la misma energía. Existe entonces cierta degeneración, con un grado de libertad asociado. Este grado de libertad es el espín.

El espinor de Dirac ω (4.66) se divide en dos componentes: ϕ y χ . Cada una de estas dos componentes es un espinor bidimensional, cuya elección es completamente arbitraria. Por ejemplo, ϕ se puede elegir como la combinación lineal de dos vectores linealmente independientes:

$$\phi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

En particular, estos espinores son eigenvectores de $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$, con eigenvalores $\pm\frac{1}{2}$. De forma general, cualquier estado se puede escribir como una combinación lineal de estos dos vectores. Para a y b cualesquiera números complejos,

$$\phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\phi_\uparrow + b\phi_\downarrow \quad (4.87)$$

Nótese que hay dos soluciones linealmente independientes para un $\mathbf{p}$ dado, como se podría esperar de un sistema con $j = \frac{1}{2}$ (en general, la multiplicidad es $2j + 1$).

Soluciones de energía positiva y negativa a la ecuación de Dirac

Espinores de soluciones positivas Utilizando la notación cuadvivectorial para $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p})$,

$$p^0 = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \equiv E > 0 \quad (4.88)$$

Se repite el procedimiento que llegó a la ecuación (4.73) y se obtiene:

$$\omega^{1,2} = N \begin{pmatrix} \phi^{1,2} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi^{1,2} \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

Con $\phi^{1\dagger}\phi^1 = \phi^{2\dagger}\phi^2 = 1$. La constante de normalización debe asegurar que $\omega^\dagger\omega = 2E$. Se propone para N el valor $(E+m)^{1/2}$, para dar el vector de energía positiva $u(p, s)$:

$$u(p, s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi^s \end{pmatrix} \quad s = 1, 2 \quad (4.90)$$

Se demuestra que N es aceptable:

$$\begin{aligned}
u^\dagger u &= \begin{pmatrix} \phi^{s\dagger} \\ \phi^{s\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} (E+m)^{1/2} (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi^s \end{pmatrix} \\
&= (E+m) \left(\phi^{s\dagger} \phi^s + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E+m)^2} \phi^{s\dagger} \phi^s \right) \\
&= (E+m) \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E+m)^2} \right) \\
&= (E+m) + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E+m} \\
&= \frac{(E+m)^2}{E+m} + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{1}}{E+m} \\
&= \frac{1}{E+m} ((E+m)^2 + \mathbf{p}^2) \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Se recuerda que $(E+m)(E-m)\phi = \mathbf{p}^2 \phi$. Al sustituir la equivalencia:

$$\begin{aligned}
u^\dagger u &= \frac{1}{E+m} ((E+m)^2 + (E+m)(E-m)) \\
&= E+m+E-m \\
&= 2E
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Efectivamente, N es un valor aceptable en (4.89). La solución completa onda plana ψ para un momento positivo es

$$\psi = u(p, s) e^{-ip_+ \cdot x} \tag{4.92}$$

Espinores de soluciones negativas Se encuentran ahora los espinores para la solución:

$$p^0 = -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \equiv -E < 0 \tag{4.93}$$

Con el fin de mantener el problema consistentes con la relatividad, se cambia también el signo del momento, es decir: $-p^\mu = (-E, -\mathbf{p})$. Se define entonces:

$$\omega^{3,4} = N \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

La constante de normalización N en (4.94) es idéntica a la N estudiada en la ecuación (4.90). Así, se denotan estos espinores como $v(p, s)$:

$$v(p, s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \quad s = 1, 2 \tag{4.95}$$

La solución para ψ con cuádrimomento negativo es:

$$\psi = v(p, s) e^{-i(-p_+ \cdot x)} = v(p, s) e^{ip_+ \cdot x} \tag{4.96}$$

Las soluciones a la ecuación de Dirac en energía y momento negativos fue interpretada por Feynman como la descripción de antipartículas [22].

4.3. Transformaciones de Lorentz

Para asegurar que las leyes de la física sean idénticas en todos los marcos de referencia, se requiere que las ecuaciones de onda relativistas sean covariantes bajo una transformada de Lorentz.

4.3.1. Ecuación de Klein-Gordon

Se empieza con la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi(x) = -iq [\partial_\mu A^\mu(x) + A^\mu(x)\partial_\mu] \phi(x) + q^2 A^2(x)\phi(x) \quad (4.97)$$

Para una transformada de Lorentz, $x \rightarrow x'$. A^μ siendo un cuadrivector, se transforma respectivamente: $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x')$. De la misma forma, $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$. Entonces, la física en el sistema de coordenadas primado se describe por la ecuación:

$$(\square' + m^2)\phi'(x') = -iq [\partial'_\mu A'^\mu(x') + A'^\mu(x')\partial'_\mu] \phi'(x') + q^2 A'^2(x')\phi'(x') \quad (4.98)$$

Los productos puntos cuatridimensionales de esta última ecuación son todos invariantes bajo una transformada de Lorentz. Es decir, la ecuación (4.98) se simplifica en:

$$(\square + m^2)\phi'(x') = -iq [\partial_\mu A^\mu(x) + A^\mu(x)\partial_\mu] \phi'(x') + q^2 A^2(x)\phi'(x') \quad (4.99)$$

La ecuación de Klein-Gordon cumple con la definición de covarianza bajo una transformada de Lorentz. La condición de covarianza es:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (4.100)$$

Nótese que una fase arbitraria puede ser introducida en la función de onda. Se omite este detalle.

4.3.2. Ecuación de Dirac

A diferencia de la ecuación de Klein-Gordon, encontrar la transformación de Lorentz de la ecuación de Dirac de forma general no es trivial. Se encuentra la transformación de Lorentz de la ecuación de Dirac por partes: primero se estudian las rotaciones, luego los *boosts*. Se trabajará con la representación dada por (4.64) para las matrices de Dirac. En esta representación, ϕ y χ cumplen con:

$$\begin{cases} E\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi + m\chi & (4.101a) \\ E\chi = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi + m\phi & (4.101b) \end{cases}$$

Rotaciones Considere una rotación del sistema coordenado por un ángulo α , al rededor del eje x :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

Se escribe esta transformación como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{x} \quad (4.103)$$

Es conveniente empezar con una rotación infinitesimal; el ángulo α se sustituye por ϵ_x de tal forma que $\cos(\epsilon_x) \approx 1$ y $\sin(\epsilon_x) \approx \epsilon_x$. Se reescribe la ecuación (4.102):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon_x) & \sin(\epsilon_x) \\ 0 & -\sin(\epsilon_x) & \cos(\epsilon_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon_x \\ 0 & -\epsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y + z\epsilon_x \\ z - y\epsilon_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z\epsilon_x \\ -y\epsilon_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{x} \quad (4.104)$$

Nótese que $\mathbf{p}$ es un vector, de la misma naturaleza que $\mathbf{x}$. Su ley de transformación es idéntica:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{p} \quad (4.105)$$

La pregunta es: ¿cómo se transforman las ecuaciones (4.101) bajo (4.104)?

En el sistema coordenado primado, el sistema de ecuaciones (4.101) tiene que tomar exactamente la misma forma:

$$\begin{cases} E\phi' = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}' \phi' + m\chi' \\ E\chi' = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}' \chi' + m\phi' \end{cases} \quad (4.106a)$$

$$(4.106b)$$

La deducción formal de ϕ' y χ' en términos de ϕ y χ requiere del uso del álgebra de grupos, particularmente grupos de Lie. Esta tarea yace fuera del alcance de este trabajo. Se escribe la respuesta sin demostrarla:

$$\phi' = \left(1 + \frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\right) \phi \quad (4.107)$$

$$\chi' = \left(1 + \frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\right) \chi \quad (4.108)$$

Estas dos últimas ecuaciones son para una rotación infinitesimal. Para expresar la transformación de ϕ y χ bajo una rotación finita, se generaliza el resultado infinitesimal mediante la siguiente identidad: para una matriz A ,

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + A/n)^n \quad (4.109)$$

En donde la sumatoria está implícita. Entonces, una rotación finita se describe por:

$$\phi' = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \phi \quad (4.110)$$

$$\chi' = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \chi \quad (4.111)$$

Nótese que ambos ϕ y χ se transforman de la misma forma: así es como se transforman todos los espinores bidimensionales.

Las ecuaciones (4.110) y (4.111) implican que la densidad de probabilidad de Dirac es invariante bajo rotaciones. ¿Qué hay de la densidad de corriente de probabilidad para la partícula libre?

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi = \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi - \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi \quad (4.112)$$

Esta cantidad se transforma como un vector de dimensión 3 bajo rotaciones. Este hecho es evidente al demostrar que $\phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi$ se transforma como un vector (bajo una rotación infinitesimal es una condición suficiente): considere $(\phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi)' = \phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi'$. Se trabaja con el primer orden de ϵ . Utilizando la identidad (4.109),

$$\phi'^\dagger \approx \phi^\dagger \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) \quad (4.113)$$

Al sustituir:

$$\phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi' = \phi^\dagger \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) \boldsymbol{\sigma} \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) \phi$$

Se trabaja por componentes:

$$\begin{aligned} \phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi' &= \phi^\dagger \left(1 - \frac{i}{2} \sigma_i \epsilon_i \right) \sigma_x \left(1 + \frac{i}{2} \sigma_j \epsilon_j \right) \phi \\ &= \phi^\dagger \left[\sigma_k + \frac{i}{2} \epsilon_j \sigma_k \sigma_j - \frac{i}{2} \epsilon_i \sigma_i \sigma_k + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \phi \\ &= \phi^\dagger \left[\sigma_x + \frac{i}{2} \epsilon_i (\sigma_k \sigma_i - \sigma_i \sigma_k) \right] \phi \\ &= \phi^\dagger \left[\sigma_k + \frac{i}{2} \epsilon_i \times 2i \epsilon_{kij} \sigma_j \right] \phi \\ &= \phi^\dagger [\sigma_k - \epsilon_{kij} \epsilon_i \sigma_j] \phi \\ &= \phi^\dagger (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\sigma}) \phi \\ &= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi - \phi^\dagger \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\sigma} \phi \\ \phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi' &= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi - \boldsymbol{\epsilon} \times \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi \end{aligned} \quad (4.114)$$

Queda demostrado que $\phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi$ es un vector. Con esto, se tiene que j^μ (de Dirac) se transforma como un cuadvivector bajo rotaciones finitas.

Boosts Considere una transformación tipo boost de un marco de referencia S hacia otro marco S' , el cual se mueve con velocidad u con respecto a S a lo largo del eje x . La energía E y el momento p_x de la partícula en S se transforman en E' y p'_x en S' de acuerdo a la relación:

$$E' = \cosh(\vartheta) E - \sinh(\vartheta) p_x \quad (4.115)$$

$$p'_x = \cosh(\vartheta) p_x - \sinh(\vartheta) E \quad (4.116)$$

En donde:

$$\cosh(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \equiv \gamma(u) \quad (4.117)$$

$$\sinh(\vartheta) = \gamma(u) u \quad (4.118)$$

Al igual que con las rotaciones, se considera primero una transformación infinitesimal: sea η_x de tal forma que $\cosh(\eta_x) \approx 1$ y $\sinh(\eta_x) \approx \eta_x$. Así:

$$E' = E - \eta_x p_x \quad (4.119)$$

$$p'_x = p_x - \eta_x E \quad (4.120)$$

Al considerar un boost infinitesimal general $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$, se generaliza las relaciones anteriores trivialmente:

$$E' = E - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\eta} E \quad (4.122)$$

Procediendo como anteriormente, se busca a ϕ' y χ' de tal forma que las formas transformadas de las ecuaciones (4.101) sean:

$$(E' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')\phi' = m\chi' \quad (4.123)$$

$$(E' + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')\chi' = m\phi' \quad (4.124)$$

Nótese que esta vez, E sí se transforma.

Nuevamente, la deducción de ϕ' y χ' en términos de ϕ y χ requiere del álgebra de Lie. Se menciona el resultado sin proveer demostración.

$$\phi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \phi \quad (4.125)$$

$$\chi' = \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \chi \quad (4.126)$$

ϕ y χ presentan una ley de transformación diferente para los *boosts*. Existen dos tipos de espinores de dimensión 2, de tipo ϕ y de tipo χ .

Para un boost finito, se usa de la relación (4.109) en su primer orden, aplicada a las ecuaciones (4.125) y (4.126). Se llega así a la exponenciación de las mismas:

$$\phi' = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\right) \phi \quad (4.127)$$

$$\chi' = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\right) \chi \quad (4.128)$$

Con $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ tres parámetros reales especificando la dirección y magnitud del boost en cuestión.

En contraste con el estudio de rotaciones, las ecuaciones (4.127) y (4.128) no son unitarias. Si se denota a la $\exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta})$ como $\mathbf{A}$, entonces se tiene $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ en vez de $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$. Es decir, $\mathbf{A}$ no deja a los productos $\phi^\dagger\phi$ y $\chi^\dagger\chi$ invariantes. De hecho, tiene sentido: la cantidad $\phi^\dagger\phi + \chi^\dagger\chi$ es equivalente a ρ , la densidad de probabilidad, la cual no es un invariante de Lorentz, sino una componente del cuadvivector $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Es decir, ρ se tiene que transformar como un vector, no quedarse invariante. En efecto:

$$\begin{aligned} \rho' &= \phi'^\dagger\phi' + \chi'^\dagger\chi' \\ &= \phi^\dagger \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \phi + \chi^\dagger \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \chi \\ &= \phi^\dagger\phi + \chi^\dagger\chi - \phi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\phi \cdot \boldsymbol{\eta} + \chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi \cdot \boldsymbol{\eta} \\ &= \rho - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.129)$$

Se estudia ahora a la corriente de probabilidad $\mathbf{j}$ (nuevamente, solo el infinitesimal es suficiente):

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}' &= (\phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi - \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi)' \\
&= \phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi' - \chi'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi' \\
&= \phi^\dagger \left(1 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \boldsymbol{\sigma} \left(1 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \phi + \chi^\dagger \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \boldsymbol{\sigma} \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \chi \\
&= \phi^\dagger \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \phi + \chi^\dagger \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \chi \\
&= \phi^\dagger \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{O}(\eta^2)\right) \phi + \chi^\dagger \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(\eta^2)\right) \chi \\
&= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi - \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \phi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \chi \\
&= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi - \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \phi \cdot \boldsymbol{\eta} + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \chi \cdot \boldsymbol{\eta} \\
&= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi - \boldsymbol{\eta} \phi^\dagger \phi + \boldsymbol{\eta} \chi^\dagger \chi \\
&= \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi + \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi - \boldsymbol{\eta} (\phi^\dagger \phi - \chi^\dagger \chi)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \boldsymbol{\eta} \rho \quad (4.130)$$

Así, está demostrado que $\mathbf{j}$ se transforma como un vector. Con ello, $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ es un cuadrivector.

A pesar de la no unicidad de las matrices (4.127) y (4.128), existen cantidades invariantes bajo los *boosts*. Por la forma de las mismas ecuaciones, es evidente que $\phi^\dagger \chi$ y $\chi^\dagger \phi$ son invariantes. Esto implica que la cantidad $\omega^\dagger \beta \omega$ es un invariante de Lorentz.

Ya que se ha demostrado la covarianza de Lorentz de diferentes cantidades propias a la ecuación de Dirac, se utiliza una notación covariante. Se introducen las cuatro matrices γ , definidas por:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) \quad (4.131)$$

Con $\gamma^0 = \beta$ y $\boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}$. Se define también a $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$; esto permite reescribir a las componentes de j^μ como $\rho = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x)$ y $\mathbf{j} = \bar{\psi}(x) \boldsymbol{\gamma} \psi(x)$. La corriente de Dirac completa es:

$$j^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (4.132)$$

De forma general, se ha demostrado que j^μ se transforma como un cuadrivector bajo rotaciones y *boosts*. También se ha demostrado que $\bar{\psi} \psi$ es un invariante de Lorentz.

Para concluir este capítulo, se define la notación “slash”: para algún cuadrivector a , la cantidad $\not{a}$ se define como $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$. Bajo esta notación, la ecuación de Dirac se puede escribir como:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (4.133)$$

Además, los vectores de energía $u(p, s)$ y $v(p, s)$ cumplen con las siguientes relaciones:

$$(\not{p} - m)u(p, s) = 0 \quad (4.134)$$

$$(\not{p} + m)v(p, s) = 0 \quad (4.135)$$

Momento magnético anómalo del muon

Luego de los desarrollos del capítulo anterior, se empieza el estudio del problema del momento magnético anómalo del muon. En la electrodinámica clásica, una partícula con un momento angular diferente de cero interactúa con un campo magnético de acuerdo a una relación conocida [16]. En electrodinámica cuántica, ocurre lo mismo con una partícula de espín no cero, sin embargo la relación cuántica se diferencia de la clásica mediante un factor g [23]. Este factor g , en particular su valor para el muon, es el objeto de estudio de este capítulo.

5.1. Primera aproximación: $g = 2$

El valor de g inicialmente tenía el valor empírico de exactamente 2 [17], sin base teórica alguna. Esta predicción, debida a Landé, empieza con la ecuación de Schrödinger para una partícula de carga q , no relativista y sin espín, dentro de un campo magnético $\mathbf{B}$ descrito por un potencial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi - \frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}}\psi + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (5.1)$$

Si $\mathbf{B}$ está orientado en la dirección del eje z , el término $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ genera una degeneración $(2l+1)$ asociada con un estado l . En particular, no debería haber una separación del estado base del hidrógeno en el caso $l = 0$. Sin embargo, experimentalmente se observa una separación en dos niveles, indicando una degeneración en dos estados, pareciéndose a un grado de libertad de $j = \frac{1}{2}$.

Uhlenbeck y Goudsmit (1925) sugirieron que esta duplicación de estado podría explicarse al añadirle al electrón un número cuántico, con estructura de momento angular y magnitud $j = \frac{1}{2}$. Los operadores $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ representan este momento angular (el espín). Análogamente al momento angular orbital, en la ecuación de Schrödinger (5.1) existe un término extra del lado izquierdo:

$$-\frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (5.2)$$

Ahora, la función de onda ψ presenta dos componentes (espinoriales), sobre las cuales actúan las matrices 2×2 en $\mathbf{S}$. La diferencia de energía entre dos eigenvalores $S_z = \pm\frac{1}{2}$ tendría una magnitud de $qB/2m$. Experimentalmente, la magnitud era el doble de este valor. Así, el valor se modificó de la siguiente forma:

$$-g\frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (5.3)$$

Con $g \approx 2$. El factor de g acompaña al magnetón de Bohr, el cual dicta la interacción entre el campo magnético y el momento angular clásico. En otros términos, el momento angular clásico interactúa con el campo magnético con un factor de $q/2m$, mientras que el momento angular cuántico (es decir, el espín) interactúa con el campo magnético con un factor de $gq/2m$. El factor g diferencia la interacción clásica de la cuántica; el espín no es un momento angular clásico.

La primera persona en predecir teóricamente el valor de $g = 2$ fue Paul Dirac [15]. Se expone aquí una deducción similar. Se empieza reescribiendo las ecuaciones (4.11) en una forma cuadvectorial:

$$D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \quad (5.4)$$

Esta ecuación da una receta para encontrar la ecuación de onda para una partícula cargada en la presencia de un campo electromagnético, conociendo la ecuación de onda para una partícula libre: se sustituye a ∂^μ por D^μ . Hacer esta sustitución (5.4) en la ecuación de Dirac (4.50) lleva a

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + \beta m + qA^0] \psi \quad (5.5)$$

El potencial debido a A^μ es entonces $\hat{V}_D = qA^0\mathbf{1} - q\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}$. Es una matriz 4×4 actuando sobre el espinor de Dirac. La predicción deseada se evidencia al obtener el límite no relativista de la ecuación (5.5). Ya que el término (5.3) es una matriz 2×2 , se espera poder reducir la ecuación de Dirac de 4 componentes a una expresión involucrando únicamente 2 componentes. Analizando la ecuación (4.90), se puede ver que las dos componentes inferiores son de orden v con respecto a las superiores. Para obtener un límite no relativista, en la representación de α y β usada, se debería suponer que las dos componentes inferiores de ψ son pequeñas. Sin embargo, ya que la expresión (5.5) involucra el campo A^μ , esto tendrá que ser demostrado (es decir, no se puede suponer). Además, si se escribe el operador de energía total como $m + \hat{H}_1$, se espera que $\hat{H}_1$ sea el operador de energía no relativista.

Sea

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

En donde Ψ y Φ no son soluciones de partícula libre, además tienen una dependencia espacio-temporal y una característica de espinor (cada uno presenta dos componentes). Luego,

$$\hat{H}_1 = \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) + \beta m + qA^0 - m \quad (5.7)$$

Entonces:

$$\hat{H}_1 \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi \end{pmatrix} + qA^0 \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Se obtienen las dos siguientes ecuaciones:

$$\hat{H}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\Phi + qA^0\Psi \quad (5.9)$$

$$\hat{H}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\Psi + qA^0\Phi - 2m\Phi \quad (5.10)$$

De la ecuación (5.10), se obtiene

$$(\hat{H}_1 - qA^0 + 2m)\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\Psi \quad (5.11)$$

Si $\hat{H}_1$, o cualquier elemento de $\hat{H}_1$, es mucho más pequeño que m , y si A^0 es positivo (o, de ser negativo, con magnitud mucho más pequeña que m/e), se puede deducir que

$$\Phi \sim (\text{velocidad}) \times \Psi \quad (5.12)$$

Al igual que en el caso de partícula libre (dado que la energía magnética $\sim \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}$ no sea de orden m). Además, si $\hat{H}_1 \ll m$ y las condiciones sobre el campo se cumplen, se puede hacer una aproximación en (5.11) y quitar a los términos $\hat{H}_1$ y A^0 . Así,

$$\Phi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})}{2m} \Psi \quad (5.13)$$

De tal forma, en (5.9),

$$\hat{H}_1 \Psi \approx \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})]^2 \Psi + qA^0 \Psi \quad (5.14)$$

Se identifica la parte derecha de esta última ecuación con el operador de energía no relativista para una partícula de espín $\frac{1}{2}$, carga q y masa m en un campo A^μ .

Para estudiar a g , es suficiente considerar el caso $A^0 = 0$. Bajo esta premisa, se necesita evaluar el siguiente término:

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})]^2 \Psi \quad (5.15)$$

Evaluar la ecuación (5.15) no es inmediato; el siguiente análisis desarrolla una de las posibles formas de obtener el resultado esperado. Se empieza con la evaluación del cuadrado:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})]^2 \Psi &= (-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2 \Psi \\ &= [(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\nabla)^2 + iq(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) + iq(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2] \Psi \end{aligned} \quad (5.16)$$

Se trabajan los términos cruzados $iq(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})\Psi$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})\Psi &= \sigma_i \partial_i \sigma_j (A_j \Psi) \\ &= \sigma_i \sigma_j \partial_i (A_j \Psi) \\ &= (\delta_{ij} \mathbf{1} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \partial_i (A_j \Psi) \\ &= \partial_i (A_j \Psi) \delta_{ij} \mathbf{1} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \partial_i (A_j \Psi) \\ &= \partial_i (A_j \Psi) + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \partial_i (A_j \Psi) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \Psi) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \times (\mathbf{A} \Psi)] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ya que $\nabla \times (\mathbf{A} \Psi) = (\nabla \times \mathbf{A})\Psi - \mathbf{A} \times \nabla \Psi$,

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \times (\mathbf{A} \Psi)] = i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\nabla \times \mathbf{A})\Psi - \mathbf{A} \times \nabla \Psi] \quad (5.18)$$

$$= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\Psi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \Psi) \quad (5.19)$$

Repetiendo el proceso que llevó a la ecuación (5.17), se llega a

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\Psi = \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \Psi) \quad (5.20)$$

Se sustituye a (5.19) y (5.20) en (5.16):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\nabla)^2 + iq(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) + iq(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2] \Psi \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\nabla)^2 \Psi + iq[\nabla \cdot (\mathbf{A} \Psi) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\Psi - i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \Psi) \\ &\quad + \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \Psi)] + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2 \Psi \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\nabla)^2 \Psi + iq\nabla \cdot (\mathbf{A} \Psi) - q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\Psi + iq\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2 \Psi \\ &= [(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\nabla)^2 + iq\nabla \cdot \mathbf{A} + iq\mathbf{A} \cdot \nabla + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})] \Psi - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \Psi \end{aligned} \quad (5.21)$$

Se opera separadamente el primer término, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\boldsymbol{\nabla})^2$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\boldsymbol{\nabla})^2 &= (-i)^2 \sigma_i \nabla_i \sigma_j \nabla_j \\
&= -(\delta_{ij} \mathbf{1} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \nabla_i \nabla_j \\
&= -\nabla_i \nabla_j \delta_{ij} \mathbf{1} - i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \nabla_i \nabla_j \\
&= -\nabla_i \nabla_i - i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}^2 \\
&= (-i\boldsymbol{\nabla})^2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Se opera también el término $q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})$, de la misma forma:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \tag{5.23}$$

Se sustituyen estos dos resultados (5.22) y (5.23) en (5.21):

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [(\boldsymbol{\sigma} \cdot -i\boldsymbol{\nabla})^2 + iq\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + iq\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})] \Psi - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\Psi \\
&= [(-i\boldsymbol{\nabla})^2 + iq\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + iq\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2] \Psi - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\Psi \\
&= (-i\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A})^2 \Psi - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\Psi
\end{aligned} \tag{5.24}$$

La ecuación (5.24) es la evaluación de la expresión (5.15). Se sustituye el resultado en (5.14), recordando que se asume que $A^0 = 0$:

$$\hat{H}_1 \Psi = \frac{1}{2m} (-i\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A})^2 \Psi - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \Psi \tag{5.25}$$

La primera paréntesis es exactamente la ecuación (5.1). La segunda paréntesis da entonces un término de más en la ecuación de Schrödinger; concuerda con la expresión (5.3). En efecto:

$$\begin{aligned}
-g\frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} &= -g\frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&= -\frac{g}{2} \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Al comparar con el término mencionado,

$$-\frac{g}{2} \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \tag{5.26}$$

$$\frac{g}{2} = 1$$

$$\Rightarrow g = 2 \tag{5.27}$$

Para una partícula de espín $\frac{1}{2}$.

5.2. El momento magnético anómalo

La sección anterior presentó cómo la ecuación de Dirac predice un valor exacto, teórico, para g . Sin embargo, experimentalmente, se mide un valor muy cercano, pero mayor a $g = 2$. Experimentalmente, $g_{\text{exp}} = 2(1 + a)$, con a de magnitud del orden de 10^{-3} ¹. Esta anomalía a depende de la partícula en cuestión; se calcula según las interacciones de la partícula estudiada con el electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. Para el electrón (y el positrón), a

¹Para el electrón y el muon, se ha medido experimentalmente con una precisión de 11 cifras significativas y se ha calculado con una precisión comparable [18]. Como comparación, la constante gravitacional G se ha medido con una precisión de 5 cifras significativas [24].

fue medido experimentalmente con una extraordinaria precisión (del orden de 10^{-13}) y con un error de 0.13 ppt [12]. La electrodinámica cuántica logra predecir el valor obtenido con una precisión de 10^{-12} [25]. Para el muon, existen dos equipos que han medido a g_μ con precisiones del orden de 10^{-11} : el primer experimento fue realizado en Brookhaven, en 2004 [8], y el segundo en Fermilab, en 2020 [9]. Ambas medidas concuerdan entre sí, sin embargo muestran una diferencia con el valor teórico predicho por la electrodinámica cuántica [9]. El equipo de Fermilab realizó más experimentos y publicó sus resultados en 2023, reduciendo errores de medición, estadísticos y sistemáticos: el valor actual es de 5.1σ para la significación estadística de la diferencia entre el promedio experimental mundial y el valor teórico [1]. Esta discrepancia, con un valor de 5.1σ , indica la posible existencia de nueva física, más allá de los modelos existentes actualmente, lo cual motiva los esfuerzos en mejorar la precisión de la diferencia estadística para confirmarla [26].

5.2.1. Correcciones en primer *loop*

El observable interesante es la diferencia entre el valor de Dirac y la predicción de la electrodinámica cuántica (o QED, de sus siglas en inglés). Se define el momento magnético anómalo del muon como

$$a_\mu = \frac{1}{2}(g - 2)_\mu \quad (5.28)$$

En donde los subíndices indican la partícula μ .

La primera corrección al valor $g = 2$ proviene de la contribución QED de primer *loop*, la cual se encuentra en la Figura 5.1.

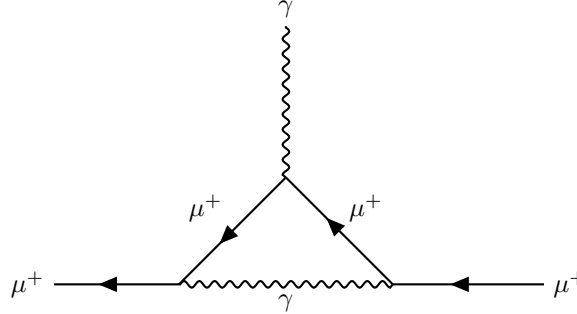


Figura 5.1: Interacción de μ^+ con un fotón

Al igual que esta contribución, existen tres más en la teoría electrodébil (EW, de sus siglas en inglés) al nivel de 1-loop, involucrando bosones Z , H y neutrino. Ya que las teorías QED y EW son perturbativas, al incrementar las correcciones, se incrementará la precisión de las predicciones teóricas (con una convergencia rápida).

5.2.2. Experimentos de BNL y FNAL y sus implicaciones acerca de la anomalía

Se presenta un resumen de los experimentos de la colaboración $g - 2$ del muon. En 2004 se realizó el primer experimento en Brookhaven (BNL) [8] con una precisión nunca antes obtenida, con una discrepancia sobre a_μ dentro del rango de 2.2 a 2.7σ con respecto a la predicción del modelo estándar² (SM, siglas en inglés). En 2020, el resultado experimental vio su confianza incrementarse con la medida del Fermi National Lab (FNAL) [9]: la anomalía se incrementó hasta 4.2σ , reforzando

²El valor máximo de la confianza obtenida fue de 3.7σ con los valores de Brookhaven.

(pero no confirmando) la idea de nueva física. Finalmente, en 2023, Fermilab publicó dos nuevos experimentos, subiendo el valor de la confianza hasta 5.1σ [1]. Los resultados publicados por ambos grupos se comparan con el valor del SM en la Figura 5.2.

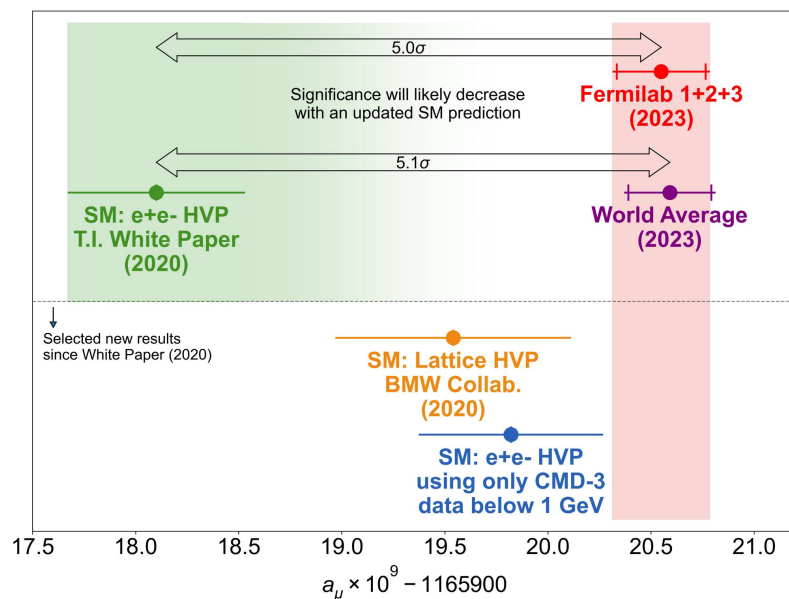


Figura 5.2: Resultados experimentales y la desviación con el modelo estándar [1]

Configuración experimental

Ambos experimentos usan una configuración idéntica. La precisión experimental (tanto sistemática como estadística) es lo que se mejora entre BNL y FNAL. Una foto de la configuración experimental se puede apreciar en la Figura 5.3.

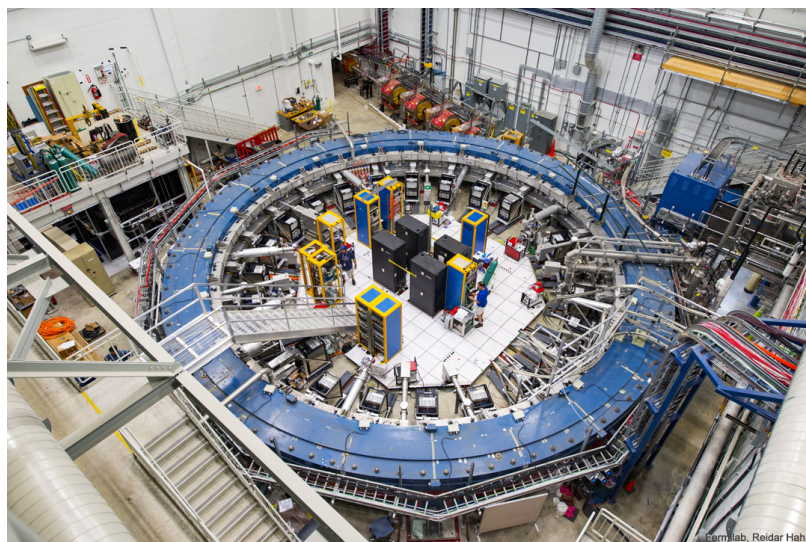


Figura 5.3: Configuración experimental, Fermilab [2]

El experimento estudia a μ^+ al entrar un solenoide con campo magnético constante, inmediatamente después del decaimiento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (este ocurre en 99.99 % de los casos). Luego, μ^+

decae en $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$. El solenoide se rodea de detectores sensibles a los positrones e^+ . Los decaimientos de π^+ son ideales: en efecto, siendo de dos cuerpos, todas sus cantidades están definidas.

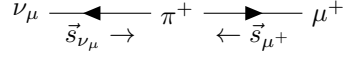


Figura 5.4: Diagrama para el proceso $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

La Figura 5.4 muestra la dirección de los momentos de cada partícula y las flechas inferiores denotan la dirección de proyección de espín. Ya que π^+ tiene espín nulo, la conservación del momento angular asegura que los espines sean antiparalelos. Además, la conservación del momento lineal garantiza que la dirección de las partículas sea opuesta. Los neutrinos se pueden aproximar a partículas sin masa, implica que tienen una helicidad izquierda: su proyección de espín es antiparalela a la dirección de su momento. Por lo tanto, se tiene una especificación completa de la proyección de espín de π^+ : es antiparalela a su trayectoria.

Inicialmente, μ^+ está totalmente polarizado, pero al moverse con respecto a un campo magnético B , el espín muestra una precesión con una frecuencia de

$$\omega_0 = g_\mu \frac{B}{2m_\mu} \quad (5.29)$$

Al llegar al decaimiento $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+$, ha precedido el espín del muon. La energía máxima de los positrones e^+ se detecta, al igual que su dirección. Ya que la energía máxima del e^+ tiene la misma dirección que el antimuon, también tiene la misma polarización; además tiene una helicidad derecha. La energía máxima del positrón se detecta, en cualquier punto del solenoide: la polarización del antimuon se puede medir en cualquier punto. La detección del positrón se compara con la frecuencia de oscilación de los antimuones dentro del solenoide, la cual se da por:

$$\omega_c = \frac{Be}{m_\mu} \quad (5.30)$$

El campo magnético B necesita ser calibrado muy precisamente. Con ello, se puede expresar directamente a a_μ :

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} = \frac{1}{2}(g - 2)_\mu \equiv a_\mu \quad (5.31)$$

Así, los datos indican el valor de ω_0 ; se conoce ya a ω_c . Se obtiene muy precisamente un valor para a_μ .

5.2.3. Diferentes contribuciones para a_μ

Las diferentes contribuciones para a_μ se encuentran en la Figura 5.5. Se puede observar que las principales contribuciones proveen de QED, particularmente los cálculos en primeros 3 *loops*. Las correcciones en 4 y 5 *loops* son comparables con las contribuciones hadrónicas y electrodébiles.

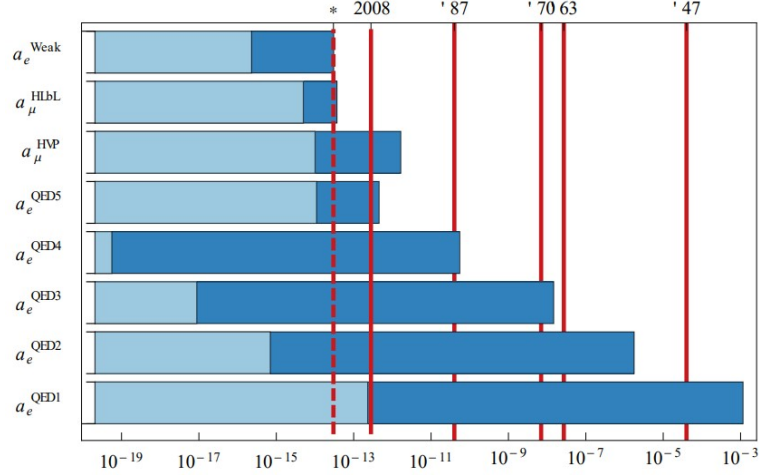


Figura 5.5: Contribuciones para el valor a_μ [3]

El estado actual de la predicción teórica y la medida experimental son [27, 1]:

$$a_\mu^{\text{Th '20}} = 116591810(43) \times 10^{-11}, \quad (5.32)$$

$$a_\mu^{\text{Exp '23}} = 116592059(22) \times 10^{-11} \quad (5.33)$$

La tensión actual entre el experimento y la teoría es [9]:

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{Exp}} - a_\mu^{\text{Th}} = 251(59) \quad (5.34)$$

Con una significación estadística de 4.2σ .

Contribuciones de QED

Las diferentes contribuciones en QED fueron calculadas en diferentes momentos de la historia. La primera contribución fue calculada por Schwinger en 1948 [10] y consistía de 1 diagrama. El cálculo en 2 *loops* fue realizado por Petermann y por Sommerfield en 1956 [28, 29] e incluía 7 diagramas. La computación en 3 *loops* fue hecha por Laporta y Remiddi [30] y presentaba 72 diagramas. Laporta luego realizó el cálculo en 4 *loops* [31], consistiendo de 891 diagramas. Finalmente, el cálculo en 5 *loops* fue realizado numéricamente dentro de un error de 3 % por el grupo de Kinoshita [18], con una cantidad de 12 672 diagramas. El valor teórico actual para la contribución total de QED es:

$$a_\mu^{\text{QED}} = 116584718.931(104) \times 10^{-11} \quad (5.35)$$

Contribuciones de EW

Las contribuciones EW fueron actualizadas en 2013 por Gnendiger, Stöckinger y Stöckinger-Kim, hasta dos *loops*, tomando en cuenta la masa recientemente calculada del boson de Higgs [32]. La contribución total en EW es:

$$a_\mu^{\text{EW}} = 153.6(1.0) \times 10^{-11} \quad (5.36)$$

Contribuciones de QCD

La cromodinámica cuántica (QCD, de sus siglas en inglés) contribuye de dos formas diferentes al valor de a_μ . La primera contribución es la *hadronic vacuum polarization* (HVP), y la segunda es la *hadronic light by light scattering* (HLbL).

Hadronic vacuum polarization La HVP es una contribución QCD en 2 *loops*, cuya topología general se presenta en la Figura 5.6.

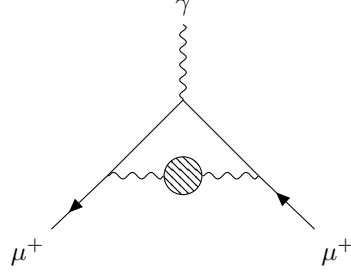


Figura 5.6: Diagrama general del proceso HVP

En la Figura 5.6, el círculo achurado representa todos los posibles estados hadrónicos intermedios. La línea intermedia puede ser conectada con la amplitud $e^+e^- \rightarrow$ hadrones a través del teorema espectral.

EL valor actualmente aceptado para la contribución HVP es [9]:

$$a_\mu^{\text{HVP}} = 6845(4) \times 10^{-11} \quad (5.37)$$

Hadronic light by light scattering El cálculo HLbL es el más difícil de realizar, ya que no puede ser conectado a resultados experimentales sin ambigüedad. El diagrama general del proceso HLbL se encuentra en la Figura 5.7. En la Figura 5.7, el círculo achurado representa todos los posibles

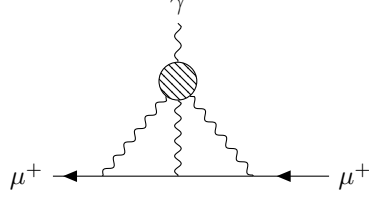


Figura 5.7: Diagrama general para el proceso HLbL

estados hadrónicos intermedios. El proceso es suprimido a orden α con respecto a la contribución principal en HVP.

El valor actualmente aceptado para la contribución HLbL es [9]:

$$a_\mu^{\text{HLbL}} = 92(18) \times 10^{-11} \quad (5.38)$$

Lo cual es consistente con la cota máxima expresada en [33]: $a_\mu^{\text{HLbL}} < 159 \times 10^{-11}$.

Perturbatividad en teoría cuántica de campos

6.1. Interacción en campos cuánticos escalares y matriz S de Dyson

6.1.1. Introducción

Las interacciones en un sistema se modelan usualmente a través de términos de orden mayor a 2 en las expansiones polinomiales de las expresiones asociadas. Al cuantificar problemas de interacción de campos, aparecen cantidades que en general no conmutan con el operador hamiltoniano del sistema. Usualmente es imposible encontrar una solución algebraica exacta a los problemas de eigenvalores involucrados. Existen dos posibilidades para resolverlos: métodos numéricos y teoría de perturbaciones. Se trabajará con la última. La teoría de perturbaciones resuelve problemas con interacciones, tratando dichas interacciones como una perturbación respecto a las soluciones de partículas libres.

6.1.2. Teoría de perturbaciones en interacciones de campo: expansión de la matriz S de Dyson

Considere el siguiente lagrangiano:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - \lambda \hat{\phi}^3 \equiv \hat{\mathcal{L}}_{\text{KG}} - \lambda \hat{\phi}^3 \quad (6.1)$$

El hamiltoniano asociado es

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{KG}} + \hat{H}' \quad (6.2)$$

En donde se ha separado el hamiltoniano en una parte que se puede resolver exactamente ($\hat{H}_{\text{KG}}$), y otra parte que se tratará de forma perturbativa ($\hat{H}'$):

$$\hat{H}_{\text{KG}} = \int d^3 \mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \left[\hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (6.3)$$

$$\hat{H}' = \int d^3 \mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}' = \lambda \int d^3 \mathbf{x} \hat{\phi}^3 \quad (6.4)$$

El marco de interacción

Para trabajar con campos libres, es conveniente usar el marco de Heisenberg (MH). Sin embargo, se está estudiando un problema en el que hay una interacción: el marco de Heisenberg no permite seguir adelante. Podría entonces ser utilizado el marco de Schrödinger (MS), en el cual los estados cambian en el tiempo de acuerdo a

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \quad (6.5)$$

Con operadores independientes del tiempo. Nótese que a pesar de usar el marco de Schrödinger, la ecuación cumple con la relatividad: $\hat{H}$ es el hamiltoniano relativista. En este enfoque, los operadores de campo en $\hat{\mathcal{H}}$ se evalúan en un tiempo fijo (por convención, $t = 0$), en el cual el MH y el MS coinciden.

El problema con esta formulación no reside en una falta de relativismo, sino en la falta de cualidad de covarianza de Lorentz: en efecto, un solo tiempo $t = 0$ es estudiado. De relajar esta condición, se pierde la relatividad. Así, es conveniente trabajar en un tercer marco, que se llamará el marco de interacción (MI). En el MH, la dependencia temporal está en los operadores, no en los estados. En el MS, los estados llevan la dependencia temporal y no los operadores. En el MI, tanto los estados como los operadores llevan alguna dependencia temporal. La parte libre del hamiltoniano genera una dependencia temporal en los operadores, mientras que la parte perturbativa (o de interacción) genera una dependencia en los estados. En el límite $H' \rightarrow 0$, se regresa al caso de una partícula libre (en MH).

En términos del operador independiente del tiempo en MS, $\hat{A}$, se define el operador asociado en MI $\hat{A}_I(t)$ como

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (6.6)$$

La dependencia temporal de $\hat{A}_I(t)$ se encuentra al derivar la expresión (6.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{A}_I(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \right) \\ &= i\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} - e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} i\hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= i\hat{H}_0 \hat{A}_I(t) - \hat{A}_I(t) i\hat{H}_0 \end{aligned}$$

Al sustituir por el conmutador,

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_I(t) = -i[\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (6.7)$$

En efecto, la dependencia temporal $\hat{A}_I(t)$ es generada de la parte libre del hamiltoniano.

En el estudio de (6.1), el campo $\hat{\phi}$ está especificado dentro del MI: $\hat{\phi}_I(\mathbf{x}, t)$. ¿Qué hay del campo conjugado canónico a $\hat{\phi}_I(t)$, cuando la interacción está incluida? En el MH, mientras la interacción no contenga derivadas en el tiempo (es el caso aquí), el campo conjugado canónico al campo de interacción se mantiene idéntico al caso de campo libre:

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t)} = \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) \quad (6.8)$$

Así, se sigue usando la relación de conmutación de mismo tiempo:

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.9)$$

Para los campos de Heisenberg. Pero los campos de MI se relacionan con los campos de MH mediante una transformación unitaria $\hat{U}$:

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} \hat{A}(t) e^{i\hat{H} t} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (6.10)$$

$$= \hat{U} \hat{A}(t) \hat{U}^{-1} \quad (6.11)$$

En donde $\hat{U} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t}$, y trivialmente $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}$. Al multiplicar la ecuación (6.9) por $\hat{U}$ por la izquierda y por $\hat{U}^{-1}$ por la derecha, se obtiene:

$$[\hat{\phi}_I(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_I(\mathbf{x}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.12)$$

Se acaba de demostrar que en caso de interacciones, los campos MI $\hat{\phi}_I$ y $\hat{\pi}_I$ obedecen la relación de conmutación de campo libre.

Se consideran ahora los estados en MI. Con el fin de preservar la consistencia entre los elementos matriciales en el MS y el MI, se definen los estados vectoriales en MI como

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle \quad (6.13)$$

En términos del estado MS $|\psi(t)\rangle$. Se usa la ecuación (6.13) para encontrar la ecuación de movimiento de $|\psi(t)\rangle_I$:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t} \left[-\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \right] \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \left[-\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + (\hat{H}_0 + \hat{H}') |\psi(t)\rangle \right] \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' |\psi(t)\rangle \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (6.14)$$

Es decir:

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (6.15)$$

Se ha definido a $\hat{H}'_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t}$. Este es el hamiltoniano en el marco de la interacción.

La matriz S y la expansión de Dyson

Se aplica ahora el formalismo MI a procesos generales de dispersión y procesos de decaimientos, dentro de la teoría de perturbaciones. Se sigue a Dyson [19]. La cantidad crucial necesitada es la matriz de dispersión, o matriz S (S siendo la primera letra de *scattering*, de su nombre en inglés). Un proceso de dispersión se puede describir de la siguiente forma: en algún tiempo $t \rightarrow -\infty$, mucho antes de que ocurra alguna interacción, se espera que $\hat{H}'_I$ sea despreciable. Así, en (6.15), $|\psi(t)\rangle_I$ será un vector de estado constante $|i\rangle$, el cual es un eigenestado de $\hat{H}_0$. Entonces, $|i\rangle$ contendrá una cierta cantidad de partículas que no interactúan con momento definido, y $|\psi(-\infty)\rangle_I = |i\rangle$. A medida que evolucione el tiempo, las partículas se acercan una a la otra y quizás se dispersen; el futuro distante $t \rightarrow \infty$ se acercará a otro estado contante $|\psi(\infty)\rangle_I$ con partículas que nuevamente no interactúan. En general, $|\psi(\infty)\rangle_I$ presentará diferentes componentes, con diferentes cantidades de partículas (y de diferente clase). Se denotarán estas diferentes componentes como $|f\rangle$. El operador $\hat{S}$ se define ahora como:

$$|\psi(\infty)\rangle_I = \hat{S} |\psi(-\infty)\rangle_I = \hat{S} |i\rangle \quad (6.16)$$

Algún elemento particular de la matriz S es la amplitud para encontrar algún estado final $|f\rangle$ en $|\psi(\infty)\rangle_I$:

$$\langle f | \psi(\infty) \rangle_I = \langle f | \hat{S} | i \rangle \equiv S_{fi} \quad (6.17)$$

Se puede escribir:

$$|\psi(\infty)\rangle_I = \sum_f |f\rangle \langle f | \psi(\infty) \rangle_I = \sum_f S_{fi} |f\rangle \quad (6.18)$$

Está claro que se necesita calcular los elementos S_{fi} de la matriz S con las probabilidades $|S_{fi}|^2$ asociadas¹. Se calculan los elementos de $\hat{S}$ mediante un enfoque de teoría de perturbaciones. Se integra a (6.15), sujeta a la condición $t \rightarrow -\infty$:

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I(t') |\psi(t')\rangle_I dt' \quad (6.19)$$

Nótese que el integrando depende de $|\psi(t)\rangle_I$, el cual no aparece explícitamente. Se resuelve la integral de forma iterativa. Si se desprecia a $\hat{H}'_I$, la solución es

$$|\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |i\rangle \quad (6.20)$$

Para obtener un resultado de primer orden en $\hat{H}'_I$, se inserta a (6.20) en (6.19), en el integrando:

$$|\psi(t)\rangle_I^{(1)} = |i\rangle + \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1)) dt_1 |i\rangle \quad (6.21)$$

Se recuerda que $|i\rangle$ es un vector estado constante. Se puede repetir este proceso para tener a la expansión de $|\psi(t)\rangle_I$ en segundo orden de $\hat{H}'_I$:

$$|\psi(t)\rangle_I^{(2)} = \left[1 + \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1)) dt_1 + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1)) (-i\hat{H}'_I(t_2)) \right] |i\rangle \quad (6.22)$$

El segundo orden es suficiente para generalizar la totalidad de la expansión. Si se deja que $t \rightarrow \infty$, se obtiene la serie perturbativa para el operador $\hat{S}$:

$$\hat{S} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} (-i\hat{H}'_I(t_1)) dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1)) (-i\hat{H}'_I(t_2)) + \dots \quad (6.23)$$

Se resume con la serie entera:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n) \quad (6.24)$$

Antes de seguir, se desea escribir a (6.24) de una forma más práctica: en efecto, los índices temporales se dan por algún t_k con k un entero de 1 a n . Las integrales van de $-\infty$ a t_k (hasta $k = n - 1$); es posible cambiar el dominio de las integrales a todos los reales. Nótese que:

$$\hat{H}'_I(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'_I(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad (6.25)$$

Se puede entonces reescribir el segundo término de (6.23) como

$$\iint_{t_1 > t_2} d^4x_1 d^4x_2 (-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)) (-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) \quad (6.26)$$

Lo cual se ve más simétrico en $\mathbf{x} - t$. Sin embargo, existe todavía cierta asimetría por la condición $t_1 > t_2$. Las integrales temporales tienen a dos $\hat{\mathcal{H}}'_I$ en su integrando, con un orden particular: los tiempos más “tempranos” aparecen antes que los tiempos más “tardes”. Con el fin de preservar esta propiedad al generalizar el dominio a $[-\infty, \infty]$, se introduce un nuevo operador T , definido de la siguiente forma:

$$T(\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) = \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \quad \text{para } t_1 > t_2 \quad (6.27)$$

$$= \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \quad \text{para } t_1 < t_2 \quad (6.28)$$

¹Si se supone que $|\psi(\infty)\rangle$ y $|i\rangle$ son normalizados, además de suponer que $\hat{S}^\dagger \hat{S}$ es unitario, es trivial demostrar que $\sum_k |S_{ki}|^2 = 1$.

Se procede de forma análoga para demás productos y operadores arbitrarios. De esta forma, (6.26) se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T[(-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1))(-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_2))] \quad (6.29)$$

Las integrales están ahora sobre todo el dominio. Si se aplica un análisis similar a los términos generales, se obtiene la expansión de Dyson del operador $\hat{S}$:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \left\{ \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \dots \hat{\mathcal{H}}'_I(x_n) \right\} \quad (6.30)$$

6.2. No perturbatividad de la cromodinámica cuántica

La teoría de la cromodinámica cuántica (o QCD) presenta características que la rinden incompatibles con la teoría de perturbaciones en ciertos rangos de energía (de 0 GeV a 2 GeV, aproximadamente) [34]. La QCD estudia la interacción nuclear fuerte (INF). La no perturbatividad de la teoría se debe a la naturaleza de la INF. Primero, se recuerda cómo funciona la teoría de perturbaciones: se necesita un problema analítico, usualmente el caso “libre”, en el cual se introduce una pequeña perturbación. La palabra clave es “pequeña”: el orden de la perturbación tiene que permitir una expansión en series. Para determinar si una teoría es perturbativa, se necesita entonces responder las siguientes dos preguntas. ¿Existe un caso analítico en el cual se puede introducir una perturbación? Si sí, ¿es esta perturbación de orden suficientemente pequeño para permitir un desarrollo en series? se presenta una respuesta a estas dos preguntas en el caso de la INF.

La interacción nuclear fuerte se realiza entre quarks mediante un gluon [35]. Los gluones son bosones de masa nula, al igual que los fotones en el caso de la interacción electromagnética. Por lo tanto, los gluones viajan a la velocidad de la luz. También actúan a larga distancia, al igual que los fotones. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre la interacción electromagnética y la nuclear fuerte: si aumenta la distancia entre dos quarks, aumenta también la fuerza de restitución debida a la INF [36]. Una consecuencia de este fenómeno es el confinamiento: no existen quarks libres. Los quarks usualmente se presentan en dobletes (mesones) o en tripletes (hadrones). Cuando se separan dos quarks (en un mesón, por ejemplo), a medida que incrementa la distancia entre ellos, aumenta también la fuerza de restitución y con ella, la energía potencial. Esta energía está contenida en los gluones que cargan la información entre los dos quarks. Con suficientemente energía, el gluon puede decaer en un par de quark anti-quark y dos gluones nuevos, formando así dos nuevos estados: un doblete de quarks que se intentó separar, reaccionó para formar dos nuevos dobletes. Así, nunca se puede aislar un quark. La teoría de perturbaciones no puede usar a un caso libre como caso analítico simple. Para usar un caso libre, es necesario que se puedan despreciar estas interacciones inherentes entre los quarks. Existen dos configuraciones en las que las interacciones son despreciables: a distancias cortas (porque la fuerza de restitución disminuye con la distancia; se puede disminuir hasta niveles despreciables) y a altas energías (para que la energía del quark sea mucho mayor a la energía de interacción inherente). En estos dos casos, es posible estudiar la QCD desde una perspectiva perturbativa.

Entre 0 GeV y 2 GeV, es decir, a bajas energías; la QCD no es perturbativa. Entre estas energías, existen diferentes métodos para estudiar la QCD. Uno de ellos es la Lattice QCD [37] entre 1 GeV y 2 GeV, y entre 0 GeV y 1 GeV se puede usar la Teoría de Perturbaciones Chiral [38].

6.3. $g - 2$ del muon: resultados a primer orden

Se presentan los resultados del análisis perturbativo dentro de la Electrodinámica Cuántica del problema $g - 2$ del muon.

6.3.1. Primer orden de e

Considere una dispersión de un muon por un campo electromagnético externo $A_\mu(\mathbf{x})$ (véase Figura ??)

6.3.2. Primera corrección: orden e^3

Las correcciones en primer orden de α para este proceso son representadas por los diagramas de Feynman en la Figura 6.1.

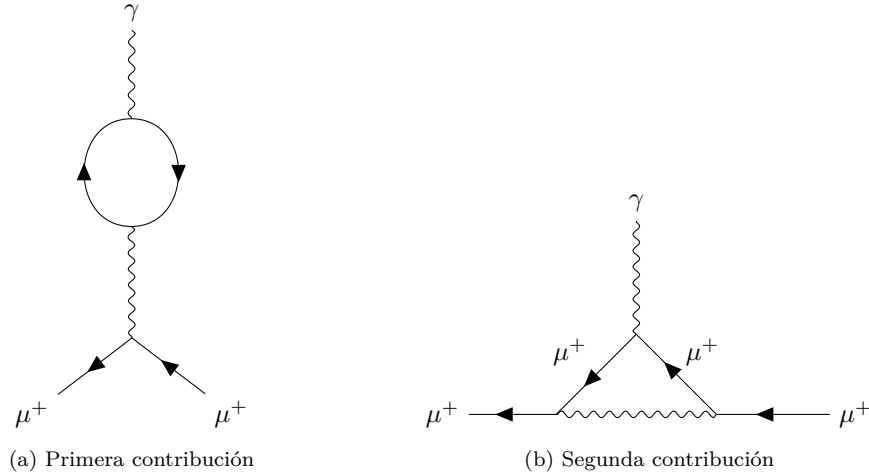


Figura 6.1: Diagramas de Feynman contribuyendo a órdenes de e^3 después de normalización

Nótese que en la Figura 6.1, están únicamente representados los diagramas que tienen una contribución luego de renormalizar². Se han omitido 4 diagramas.

La amplitud de Feynman de orden e^3 se da por [39] :

$$ie\bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) A_\mu(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) [-e^2 \Pi_c(q^2)] A_\mu(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(p', s') [e^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] u(p, s) A_\mu(\mathbf{q}) \quad (6.31)$$

No se presentará una evaluación completa de este término. Se menciona sin demostrar que el factor $\Lambda_c^\mu(p', p)$ se puede evaluar de tal forma que el tercer término de (6.31) contenga la siguiente expresión:

$$ie\bar{u}(p', s') \left(\frac{i\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p, s) A_\mu(\mathbf{q}) \quad (6.32)$$

Esta contribución particular (6.32) es la que se desea interpretar.

Se puede reescribir a $\mathcal{M}$ en (??) (i.e. en primer orden de e) como

$$\frac{ie}{2m} \bar{u}(p', s') [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p, s) A_\mu(\mathbf{q}) \quad (6.33)$$

En el límite no relativista, el segundo término en (6.33) es la amplitud de dispersión de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ con momento magnético $-\frac{e}{2m}$, es decir, con razón giromagnética $g = 2$. La expresión (6.32) (i.e. en orden de e^3) tiene la misma forma, pero un coeficiente diferente. Este coeficiente representa una corrección al valor del momento magnético del muon con respecto al valor de orden menor. Así, la corrección en el factor g se puede escribir como

$$-\frac{e}{2m} \rightarrow -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (6.34)$$

²En la Figura 6.1, solo el diagrama b contribuye al valor de a_μ . El diagrama a contribuye a la amplitud total, pero no a a_μ .

El valor de la corrección es el siguiente:

$$a_\mu \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00116 \quad (6.35)$$

Este es el valor de la primera corrección en QED. Se puede comparar con la contribución completa en QED, dada por la ecuación (5.35).

Análisis perturbativo en electrodinámica cuántica

Este capítulo estudia la teoría de perturbaciones en la teoría de campos aplicada a la contribución QED al valor del momento magnético anómalo del muon. Como se mencionó en el capítulo 3 con el ejemplo de la cromodinámica cuántica, existen regímenes de energía para los cuales una teoría puede no ser perturbativa. Entonces, ¿qué asegura que un enfoque perturbativo dentro de QED será adecuado para obtener un valor exacto del momento magnético anómalo del muon?

Se presenta en este capítulo un estudio de la perturbatividad de QED en el problema del momento magnético anómalo del muon. Particularmente, es interesante la convergencia de una potencial serie perturbativa en $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$.

7.1. Diagramas de Feynman y cantidad de *loops*

En QED, las únicas interacciones posibles son entre fermiones (en este caso, muones) y fotones. Siguiendo las reglas explicitadas en el anexo A, todos los posibles procesos en QED se pueden describir mediante diagramas de Feynman. Cada diagrama de Feynman tiene una amplitud asociada. En el caso del problema del valor a_μ del muon, en QED, el proceso estudiado consiste en la dispersión del muon por un fotón (véase el capítulo 2, particularmente la sección 5.2.2: el muon interactúa con un campo magnético). Este proceso puede estudiarse completamente mediante diagramas de Feynman, su topología general se encuentra en la Figura 7.1. En esta figura, el círculo achurado representa todos los posibles procesos intermedios. La magnitud total de este diagrama se puede calcular sumando las magnitudes de todos los posibles diagramas representados por 7.1. Sin embargo, existe una cantidad infinita de posibles procesos intermedios, y con ello, una infinita cantidad de diagramas. Implica que la magnitud total del diagrama en 7.1 es una suma infinita de magnitudes parciales asociadas a diagramas representados dentro de la topología general de la dispersión de un muon por un fotón.

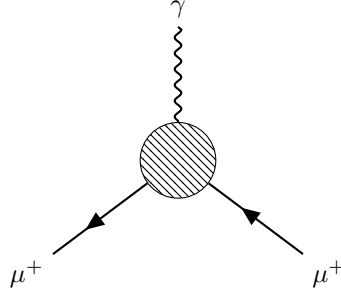


Figura 7.1: Diagrama general para la dispersión de un muon por un fotón en QED

Esta discusión lleva a la siguiente pregunta: ¿qué asegura que esta suma infinita de magnitudes de diagramas, o esta serie, converge a un valor finito? La respuesta a esta pregunta es el objeto de estudio de la próxima sección.

Por ahora, es conveniente contentarse de un estudio introductorio a estos diagramas de Feynman y se presentará una forma de clasificarlos. Este esfuerzo se realiza con el fin de proveer un camino para solucionar el problema de la convergencia de la magnitud del proceso de dispersión representado en la Figura 7.1.

Los procesos contenidos en 7.1 se pueden clasificar mediante su cantidad de *loops*. Cada posible proceso intermedio en 7.1 tendrá una cantidad de bucles (o *loops*) contable; para cada cantidad de *loops* dada, habrá una cantidad contable de diagramas que presentarán esta cantidad de *loops*. A continuación se presentan algunos diagramas conteniendo cantidades pequeñas de *loops*:

- Diagrama en nivel árbol: 1 diagrama

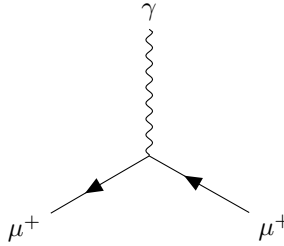


Figura 7.2: Diagrama a nivel árbol

- Diagrama en 1 *loop*: 1 diagrama

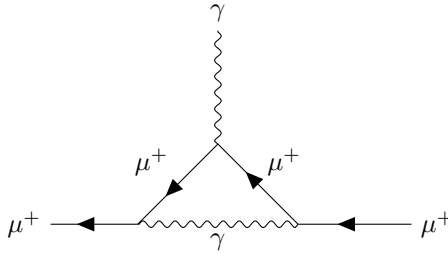


Figura 7.3: Diagrama en 1 *loop*

- Diagramas en 2 *loops*: 7 diagramas

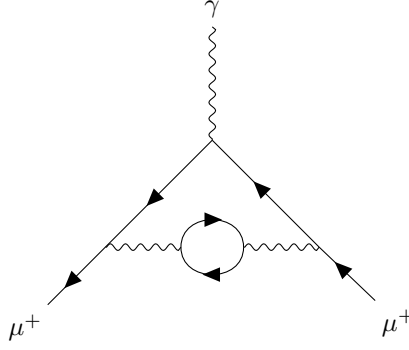


Figura 7.4: Uno de los siete diagramas en 2-loops

En el siguiente cuadro se encuentran las cantidades de diagramas que presentan una cantidad n de *loops*, para n de 0 a 10:

n	a(n)
0	1
1	1
2	7
3	72
4	891
5	12672
6	202770
7	3602880
8	70425747
9	1503484416
10	34845294582

Tabla 7.1: Cantidad de diagramas de Feynman con n *loops*, hasta $n = 10$ [40]

La importancia de esta clasificación de los diagramas de Feynman por cantidad de *loops* que presentan reside en la magnitud de la contribución de cada *loops*. La contribución de los diagramas en $n = 1$ es un factor de $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$. La contribución de los diagramas en $n = 2$ es un factor de $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$. Este patrón sigue: de forma general, la contribución de los diagramas con una cantidad de *loop* n es un factor de $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$. Recordando que la magnitud de la dispersión de un muon por un fotón es la suma (infinita) de todos estos diagramas, se puede escribir la serie perturbativa de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \quad (7.1)$$

Con c_n coeficientes reales.

7.2. Análisis de perturbatividad

La ecuación (7.1) es la serie perturbativa de la magnitud del proceso general 7.1. Como se ha visto en el capítulo 3 (véase la sección 6.3.2), al encontrar la magnitud de la contribución en una cantidad n de *loops*, se puede agregarle correcciones al valor a_μ en orden de $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$. De forma general,

se estudia la siguiente serie perturbativa para a_μ :

$$a_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n \quad (7.2)$$

Con C_n coeficientes reales, con dependencia de los coeficientes c_n de la ecuación (7.1).

Se regresa a la pregunta antes mencionada: ¿qué asegura que la serie perturbativa (7.2) es convergente?

Los coeficientes C_n de la serie perturbativa no tienen en principio ninguna cota superior sobre su valor. Sin embargo, es posible aplicarles un rango de valores en base a la información que se tiene sobre ellos. Los coeficientes C_n se obtienen sumando las magnitudes de cada diagrama de Feynman de orden n , las cuales se obtienen mediante integrales. Estas se tienen que renormalizar con el fin de eliminar de la teoría las interacciones de la partícula con sus propias propiedades (como su carga o su masa). A través de este proceso, está asegurado de que el orden del resultado sea de $\sim 10^0$. Es decir, un diagrama de Feynman contribuye a C_n en un orden de $\sim 10^0$. Se puede deducir que si hay una cantidad $a(n)$ de diagramas de Feynman para el orden n , entonces C_n será aproximadamente $a(n) \times 10^0$, o simplemente $a(n)$. En conclusión, los coeficientes C_n se pueden aproximar a la cantidad de diagramas de Feynman en este orden n . Los valores de $a(n)$ (o la cantidad de diagramas de Feynman en orden n) se representan en el Cuadro 7.1.

Así, es posible estudiar la perturbatividad de la serie (7.2) mediante la versión simplificada:

$$a_\mu \approx \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n \quad (7.3)$$

La forma de estudiar esta serie es comparando el valor de los productos a orden n . Se estudia la nueva pregunta: ¿cómo evoluciona el valor producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n$ a medida que crece n ?

Con el fin de responder esta pregunta, se realizó un programa en el lenguaje de programación Python (usando la herramienta Jupyter) para estudiar la evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n$ según aumenta n . El código se puede encontrar en el anexo B.

7.2.1. Planteamiento de la resolución

Ya que solo se han realizado los cálculos de las contribuciones a a_μ hasta el orden $n = 5$, la resolución únicamente estudia este orden. Se consideraron dos casos:

- La evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n$ es constante. Es un primer enfoque del cual no se espera un resultado satisfactorio.
- La evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n$ es exponencial. Si el resultado es satisfactorio, se podría estudiar su validez haciendo una predicción acerca de órdenes más altos de n .

Se estudian separadamente.

Evolución constante

Si el producto es constante, entonces se tiene la siguiente igualdad: para un c constante,

$$a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n = c \quad (7.4)$$

$$a(n) = c \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^n \quad (7.5)$$

Si el valor de c se encuentra entre 0 y 1 (particularmente si está muy cercano a 0), entonces se puede concluir acerca de la convergencia de la serie.

Evolución exponencial

El valor del producto puede tener una evolución exponencial, de la forma:

$$a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^a \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{bn} \quad (7.6)$$

$$a(n) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{a+(b-1)n} \quad (7.7)$$

El exponente asegura una supresión no constante del valor del producto. Si b es menor a 1, entonces el valor de $a(n)$ crece de forma exponencial. Se recuerda que $\alpha = \frac{1}{137}$, entonces $\frac{\alpha}{\pi}$ es menor a 1.

7.2.2. Resultados

Evolución constante

Si se plantea al producto como un valor c constante, se debería poder calcular independientemente en cada orden de n . El siguiente cuadro reporta los valores de c obtenidos con respecto a n :

n	c
1	2.3234×10^{-3}
2	3.7788×10^{-5}
3	9.0307×10^{-7}
4	2.5965×10^{-8}
5	8.5801×10^{-10}

Tabla 7.2: Valores de c según n

Comparando los órdenes de magnitud, es evidente que c decrece rápidamente a medida que crece n . Este enfoque es una primera propuesta de resolución; por su sencillez, no se esperaba un resultado satisfactorio.

Otra forma en la cual se evidencian las limitaciones de este primer modelo es intentando realizar un ajuste de la función (7.5). El ajuste se realizó utilizando la librería de Python `scipy.optimize`, particularmente la función `curve_fit()`. Este resultado se aprecia en la Figura 7.5.

En la Figura 7.5, se ve que el perfil de la curva es exponencial, sin embargo, no parece ajustarse adecuadamente a los puntos. Particularmente, la predicción en orden $n = 4$ es inaceptable.

Este primer enfoque justifica la metodología del siguiente modelo. Al tener un ajuste que a primera vista parece exponencial, se puede plantear un modelo de ajuste exponencial al valor de la cantidad de diagramas en orden n .

Ajuste exponencial

Este modelo, al igual que el anterior, intenta predecir el valor de $a(n)$ (es decir, la cantidad de diagramas de Feynman que presentarán n loops para el proceso de dispersión de un muon por un fotón en QED) con respecto al valor de n mediante un ajuste exponencial en términos de $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$. Nuevamente, se utilizó la función `curve_fit()` de la librería `scipy.optimize`. El ajuste se realizó a la función (7.7), tanto al valor de a (el cual dicta el valor de la asíntota horizontal de la función exponencial) como a b (el valor de mayor interés). Se obtuvieron los siguientes valores:

$$a = 0.62978 \pm 0.00443 \quad (7.8)$$

$$b = 0.56250 \pm 0.00089 \quad (7.9)$$

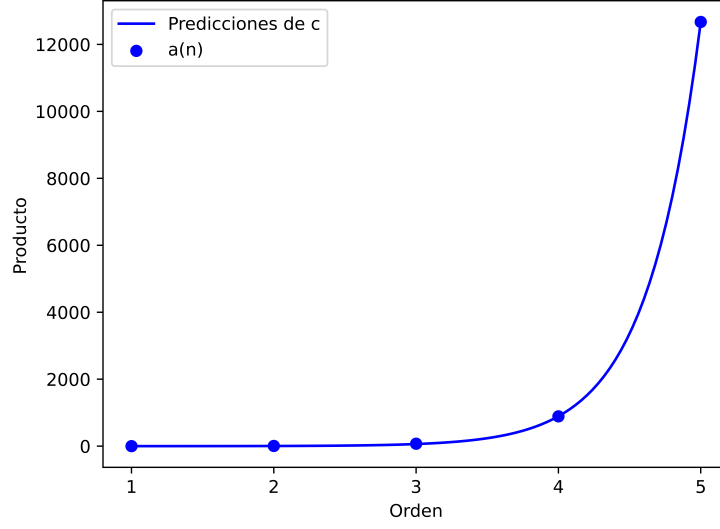
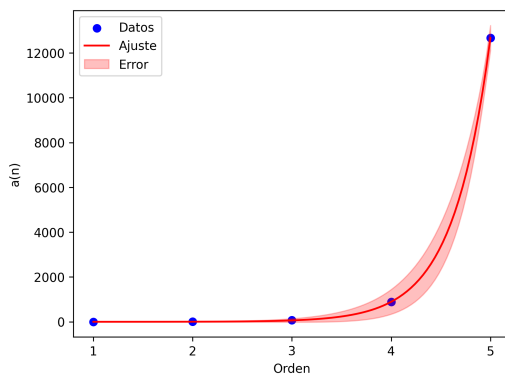


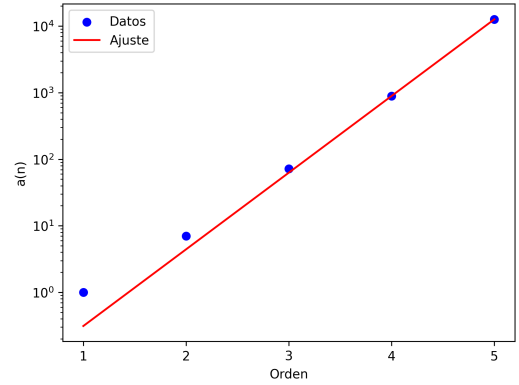
Figura 7.5: Ajuste del modelo “producto constante”

Nótese que el valor de b se encuentra entre 0 y 1. Implica que el valor de $a(n)$ sigue un ajuste exponencial creciente con n .

Al igual que con el enfoque anterior, es posible estudiar el ajuste del modelo a los valores de $a(n)$ conocidos. Este hallazgo se representa en la Figura 7.6a. Ya que este ajuste parece predecir correc-



(a) Ajuste del modelo exponencial



(b) Ajuste del modelo exponencial, escala logarítmica

Figura 7.6: Ajuste del modelo exponencial en diferentes escalas

tamente todos los puntos, es conveniente presentar los mismos resultados en una escala logarítmica (véase la Figura 7.6b).

El ajuste parece excelente. En efecto, solo se pueden apreciar diferencias entre el ajuste y los valores teóricos en los puntos más bajos; el orden del error es 10^0 . Además, todos los puntos están contenido dentro del rango de error.

Predicciones en base al ajuste exponencial

El modelo exponencial logró ajustarse exitosamente a los primeros 5 valores de n . Con el fin de explorar sus limitaciones, se usan los parámetros a y b encontrados en el modelo exponencial (véase las ecuaciones (7.8) y (7.9)) para predecir la cantidad de diagramas de Feynman en órdenes hasta $n = 10$. Los valores teóricos se encuentran en 7.1. A continuación se presentan los resultados.

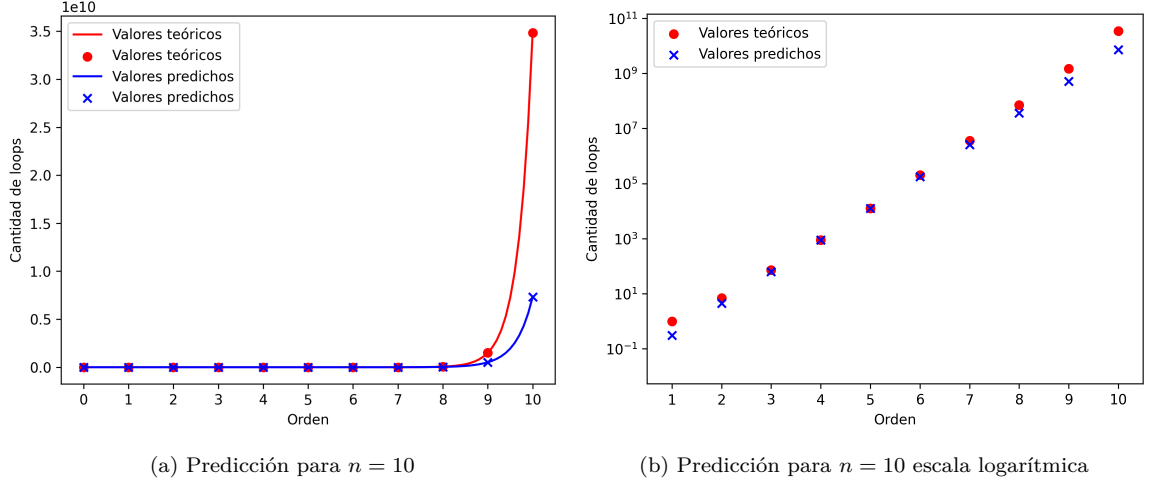


Figura 7.7: Predicción de los valores de $a(n)$ para $n = 10$ en diferentes escalas

Al estudiar la primera gráfica, en la Figura 7.7a, está claro que el modelo fracasa al predecir la cantidad de diagramas en órdenes mayor a $n = 8$. La razón por la cual sucede este fracaso se evidencia al estudiar la segunda gráfica, en la Figura 7.7b. En el modelo exponencial, se planteó la hipótesis que la cantidad de diagramas sube exponencialmente al incrementarse n . Si este fuera el caso, entonces la cantidad de diagramas debería caer en una línea recta al representarse en una escala logarítmica. En la Figura 7.7b, es evidente que esto no ocurre: los valores teóricos parecen tener alguna curvatura hacia arriba. Como comparación, los valores predichos por el modelo, al ser un ajuste exponencial, trazan una línea perfectamente recta.

Evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$

Finalmente, se estudia directamente la evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$ a medida que crece n . Un análisis de $n \leq 5$ es suficiente.

La Figura 7.8 indica un comportamiento en exponencial inversa del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$.

7.2.3. Discusión

El objetivo de este esfuerzo es de evaluar la convergencia de la serie perturbativa expresada en (7.2). Los coeficientes C_n se aproximaron a $a(n)$. Luego, se estudió la evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$ mediante dos modelos, los cuales fueron reescritos con el fin de predecir la cantidad $a(n)$, que se conoce (véase el Cuadro 7.1).

El primer modelo, si bien fracasó en predecir correctamente los valores de $a(n)$, indica que la cantidad de diagramas de Feynman crecen con un ritmo exponencial a medida que incrementa n . Este enfoque sencillo tenía como objetivo fallar con el fin de guiarnos con la construcción del segundo modelo.

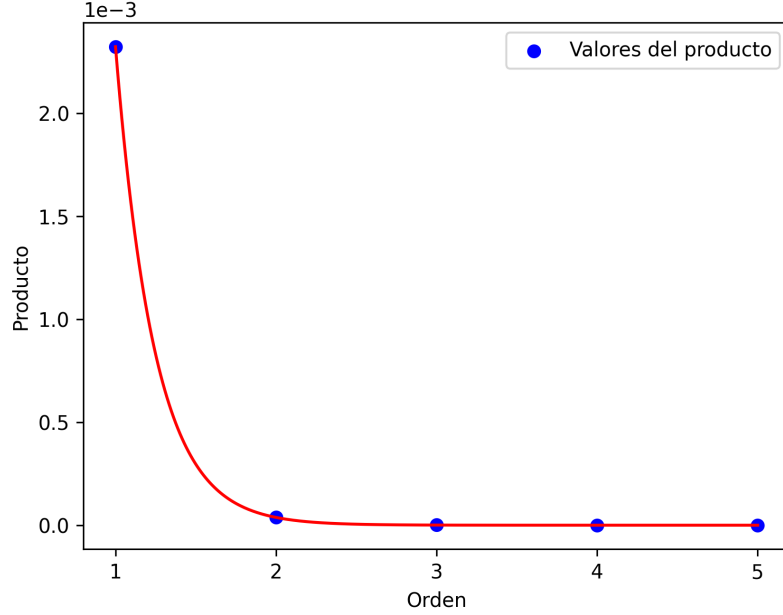


Figura 7.8: Evolución del producto $a(n) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$ cuando crece n

El segundo modelo le dio a b la libertad de ajustarse de acuerdo a los datos. Se encontró un $b = 0.56250 \pm 0.00089$, fijando al valor entre 0 y 1. El valor del exponente b carga un significado importante para la teoría electrodinámica cuántica. En efecto, que b se encuentre entre 0 y 1 es fundamental para tener una teoría QED perturbativa. Un valor del exponente mayor o igual a 1 implica que no pueden converger las series perturbativas: en resumen, la teoría no puede ser perturbativa. No es el caso de QED: en base al análisis numérico, se concluye que QED es una teoría perturbativa.

Acerca de la serie perturbativa, el Cuadro 7.2 y la Gráfica 7.8 indican que hay una supresión en orden a orden de la serie perturbativa. En particular, se tiene un orden de magnitud de la contribución de cada término de la serie perturbativa. La supresión empieza en $n = 2$.

La debilidad de esta conclusión, al menos a través de este análisis, yace en los órdenes considerados para n . Al considerarse únicamente los órdenes entre $n = 0$ y $n = 5$, no se tiene una evolución completa de la cantidad de diagramas de Feynman. En particular, a medida que crece n , la Figura 7.6b indica que $a(n)$ no necesariamente crece exponencialmente. La referencia [40] provee la secuencia necesaria para generar a todos los valores de $a(n)$; se recomienda realizar el análisis presentado aquí con mayores órdenes de n y un ajuste adecuado.

Conclusiones

El presente trabajo ha abordado de manera exhaustiva el estudio de la perturbatividad de la electrodinámica cuántica (QED) en el contexto del momento magnético anómalo del muon. A lo largo del desarrollo de este trabajo, se han obtenido resultados significativos que permiten avanzar en la comprensión de la precisión teórica y experimental de este fenómeno físico.

En primer lugar, se ha presentado un marco teórico sólido que incluye el desarrollo de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, fundamentales para la descripción relativista de partículas con espín. Estas ecuaciones, junto con la teoría de Gauge, constituyen la base conceptual para el estudio de las interacciones fundamentales en QED.

El análisis del momento magnético anómalo del muon ha revelado una discrepancia significativa entre los valores teóricos y experimentales. Esta discrepancia, cuantificada en 5.1σ , sugiere la posible existencia de fenómenos físicos más allá del modelo estándar. El estudio de las contribuciones de primer orden y las correcciones de órdenes superiores mediante técnicas perturbativas ha demostrado la importancia de considerar términos de alta precisión para acercar los resultados teóricos a las mediciones experimentales.

Además, el análisis perturbativo realizado mediante la expansión en series en $(\frac{\alpha}{\pi})^n$ ha permitido evaluar la convergencia de la serie perturbativa para el momento magnético anómalo del muon. Los resultados obtenidos indican que la electrodinámica cuántica es perturbativa y que la serie convergente propuesta es una herramienta efectiva para mejorar las predicciones teóricas.

Este estudio también ha puesto de manifiesto las limitaciones de los métodos numéricos empleados en la predicción y cálculo de diagramas de Feynman en órdenes superiores. A pesar de estas limitaciones, se ha demostrado que es posible ajustar modelos exponenciales para predecir la cantidad de diagramas necesarios en cálculos perturbativos de alto orden.

En resumen, el trabajo ha proporcionado una comprensión más profunda de la perturbatividad en QED y ha subrayado la necesidad de continuar explorando nuevas técnicas y enfoques para reducir la discrepancia entre los valores teóricos y experimentales del momento magnético anómalo del muon. Este estudio no solo contribuye al campo de la física de partículas, sino que también sienta las bases para futuras investigaciones en la búsqueda de fenómenos físicos más allá del modelo estándar.

- [1] D. Aguillard, T. Albahri, D. Allspach, A. Anisenkov, K. Badgley, S. Baeßler, I. Bailey, L. Bailey, V. Baranov, E. Barlas-Yucel *et al.*, “Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm,” *Physical Review Letters*, vol. 131, no. 16, p. 161802, 2023.
- [2] F. N. Lab. (2021) First results from fermilabs muon g-2 experiment strengthen evidence of new physics. [Online]. Available: <https://news.fnal.gov/2021/04/first-results-from-fermilabs-muon-g-2-experiment-strengthen-evidence-of-new-physics/>
- [3] P. Sanchez-Puertas, “Current progress in the muon g-2,” 2021. [Online]. Available: <https://indico.nucleares.unam.mx/event/1717/session/39/material/0/0.pdf>
- [4] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of all elementary-particle forces,” *Physical Review Letters*, vol. 32, no. 8, p. 438, 1974.
- [5] A. Salam and J. C. Ward, “Weak and electromagnetic interactions,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 11, pp. 568–577, 1959.
- [6] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Physical review letters*, vol. 19, no. 21, p. 1264, 1967.
- [7] E. Fermi, “Tentativo di una teoria dell’emissione dei raggi beta,” *Ric. Sci.*, vol. 4, pp. 491–495, 1933.
- [8] G. W. Bennett *et al.*, “Final report of the e821 muon anomalous magnetic moment measurement at bnl,” *Phys. Rev. D*, vol. 73, p. 072003, Apr 2006. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.072003>
- [9] T. Aoyama *et al.*, “The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model,” *Physics Reports*, vol. 887, pp. 1–166, 2020, the anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157320302556>
- [10] J. Schwinger, “On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, Feb 1948. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.416>

- [11] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, “Tenth-order qed contribution to the electron g-2 and an improved value of the fine structure constant,” *Physical Review Letters*, vol. 109, no. 11, Sep. 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.111807>
- [12] X. Fan, T. G. Myers, B. A. D. Sukra, and G. Gabrielse, “Measurement of the electron magnetic moment,” *Physical Review Letters*, vol. 130, no. 7, Feb. 2023. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.071801>
- [13] W. Gordon, “Der comptoneffekt nach der schrödingerschen theorie,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 40, no. 1-2, pp. 117–133, 1926.
- [14] O. Klein, “Elektrodynamik und wellenmechanik vom standpunkt des korrespondenzprinzips,” *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, vol. 41, no. 6-7, pp. 407–442, 1927.
- [15] P. A. M. Dirac and R. H. Fowler, “The quantum theory of the electron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 117, no. 778, pp. 610–624, 1928. [Online]. Available: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1928.0023>
- [16] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 2021. [Online]. Available: <https://books.google.com.gt/books?id=6VV-EAAAQBAJ>
- [17] A. Landé, “Über den anomalen zeemaneffekt,” *Naturwissenschaften*, vol. 9, pp. 926–928, 1921. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:39924309>
- [18] T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio, “Revised and improved value of the qed tenth-order electron anomalous magnetic moment,” *Physical Review D*, vol. 97, no. 3, p. 036001, 2018.
- [19] F. J. Dyson, “The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman,” *Phys. Rev.*, vol. 75, pp. 486–502, Feb 1949. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.486>
- [20] I. Aitchison and A. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Fourth Edition - 2 Volume set*. Taylor & Francis, 2012. [Online]. Available: <https://books.google.com.gt/books?id=BBf5MAAACAAJ>
- [21] E. Noether, “Invariante variationsprobleme,” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1918, pp. 235–257, 1918. [Online]. Available: <http://eudml.org/doc/59024>
- [22] R. Feynman, *The reason for antiparticles*, 01 2014, pp. 1–60.
- [23] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2020. [Online]. Available: <https://books.google.com.gt/books?id=GdX7DwAAQBAJ>
- [24] P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, “Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2014,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 88, no. 3, Sep. 2016. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035009>
- [25] T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio, “Theory of the anomalous magnetic moment of the electron,” *Atoms*, vol. 7, no. 1, p. 28, 2019.
- [26] E. J. Estrada, “ π^0 transition form factor with two meson resonance multiplets within the resonance critical theory, and its contributions to the hadronic light by light piece of a_μ ,” México City, 2023.

- [27] P. D. Group *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2020, no. 8, p. 083C01, 08 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>
- [28] A. Petermann, “On the anomalous magnetic moments,” *Nuclear Physics*, vol. 1, no. 5, pp. 357–359, 1956. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558256900086>
- [29] C. M. Sommerfield, “Magnetic dipole moment of the electron,” *Phys. Rev.*, vol. 107, pp. 328–329, Jul 1957. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.107.328>
- [30] S. Laporta and E. Remiddi, “Status of the qed prediction of the electron ($g - 2$),” *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 181-182, pp. 10–14, 2008, proceedings of the International Workshop on e+e- Collisions from to . [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563208001205>
- [31] S. Laporta, “High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron $g-2$ in qed,” *Physics Letters B*, vol. 772, pp. 232–238, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317305324>
- [32] C. Gnendiger, D. Stöckinger, and H. Stöckinger-Kim, “The electroweak contributions to $(g-2) \mu$ after the higgs-boson mass measurement,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 5, p. 053005, 2013.
- [33] J. Erler and G. T. Sánchez, “Upper bound on the hadronic light-by-light contribution to the muon $g-2$,” *Physical review letters*, vol. 97, no. 16, p. 161801, 2006.
- [34] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. world scientific, 1998.
- [35] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [36] D. Griffiths, “Introduction to elementary particles. 2. enl. and rev,” 2008.
- [37] F. Knechtli, M. Günther, and M. Peardon, *Lattice quantum chromodynamics: practical essentials*. Springer, 2017.
- [38] S. Scherer and M. R. Schindler, *A primer for chiral perturbation theory*. Springer Science & Business Media, 2011, vol. 830.
- [39] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- [40] R. J. Martin and M. J. Kearney, “An exactly solvable self-convolutive recurrence,” *Aequationes mathematicae*, vol. 80, no. 3, p. 291318, Oct. 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-010-0051-0>

Reglas para los diagramas de Feynman

El capítulo 6, presentamos un desarrollo de la matriz S de Dyson (6.30), además del cálculo teórico del momento magnético anómalo en su primera corrección (6.35). Presentamos aquí el formalismo de los diagramas de Feynman, y relacionamos el formalismo perturbativo de la matriz de Dyson con los diagramas de Feynman (en QED).

En QED, todos los fenómenos electromagnéticos se pueden reducir al siguiente proceso elemental:

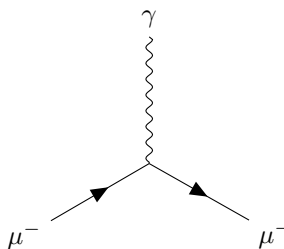


Figura A.1: Diagrama fundamental en QED.

En la figura A.1, la elección de la partícula es irrelevante. La dispersión podría ser de cualquier partícula cargada. Elegimos el muon por consistencia con el estudio de este trabajo.

Para calcular la amplitud $\mathcal{M}$ de un diagrama de Feynman general, podemos seguir las siguientes reglas (conocidas como las Reglas de Feynman):

1. *Notación:* a cada línea externa está asociado un momento $p_1, p_2, \dots, p_n$. A cada línea interna está asociado un momento $q_1, q_2, \dots, q_n$.

2. *Líneas externas*: las líneas externas contribuyen con los siguientes factores:

$$\text{Muones: } \begin{cases} \text{Entrando } (m) : \epsilon_\mu \\ \text{Saliendo } (m) : \epsilon_\mu^* \end{cases}$$

$$\text{Antimuones: } \begin{cases} \text{Entrando } (m) : \epsilon_\mu \\ \text{Saliendo } (m) : \epsilon_\mu^* \end{cases}$$

$$\text{Fotones: } \begin{cases} \text{Entrando } (m) : \epsilon_\mu \\ \text{Saliendo } (m) : \epsilon_\mu^* \end{cases}$$

3. *Factores de vértice*: cada vértice contribuye con un factor $ig_e\gamma^\mu$, con $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$. La constante adimensional g_e depende de la carga electrónica e , la cual se encuentra dentro de la expresión para α .

4. *Propagadores*: cada línea interna contribuye con uno de los siguientes factores:

$$\begin{aligned} \text{Muones y antimuones: } & i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \\ \text{Fotones: } & -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \end{aligned}$$

5. *Conservación de la energía y del momento*: para cada vértice, se escribe una función delta de Dirac de la forma

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \quad (\text{A.1})$$

En donde las k 's son los tres cuadrimomentos entrando al vértice.

6. *Integrar sobre momentos internos*: para cada momento interno q , se integra sobre un factor

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

7. *Cancelar las funciones delta*: el resultado incluirá un factor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$. Al cancelarlo y multiplicar por i , el resultado es la amplitud $\mathcal{M}$.

8. *Antisimetrización*: se incluye un signo negativo entre diagramas que únicamente difieren por un intercambio de dos muones (o antimuones) saliendo (o entrando), o por un muon entrando con un antimuon saliendo (o viceversa).

Los diagramas de Feynman para describir un proceso pueden contener una cierta cantidad de *loops*. Los diagramas que contienen una cantidad k de *loops* contribuyen en orden k a la expansión de Dyson (6.30).

Código para el cálculo numérico

Para el cálculo numérico de los ajustes mencionados en el capítulo 4, se utilizó el cuaderno de Jupyter que se incluye en este anexo. Las gráficas en escala logarítmica se generaron quitándole el comentario a las funciones `plt.yscale('log')`. Todos los códigos presentados en esta sección fueron creados por el autor del presente trabajo.

$g - 2$ del muon: análisis perturbativo en QED

Parte 1: exponente constante

Contribuciones QED:

- Schwinger: 1 diagrama, 1 loop, $\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi})^1$
- Petermann & Sommerfeld: 7 diagramas, 2 *loops*, $\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi})^2$
- Laporta & Remiddi: 72 diagramas, 3 *loops*, $\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi})^3$
- Laporta: 891 diagramas, 4 *loops*, $\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi})^4$
- Kinoshita: 12,672 diagramas, 5 *loops*, $\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi})^5$

Cantidad de diagramas $\times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n = c$, con c algún número entre 0 y 1.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.optimize import curve_fit
4
```

```

5 pi = 3.14159265358979323846
6 e = 2.71828182845904523536
7 alpha=1/137
8 #loop_0=1
9 loop_1=1
10 loop_2=7
11 loop_3=72
12 loop_4=891
13 loop_5=12672
14 loop_n=[loop_1,loop_2,loop_3,loop_4,loop_5]
15 orden = [1,2,3,4,5]
16
17 producto=[]
18 for i in range(len(loop_n)):
19     producto.append(loop_n[i]*(alpha/pi)**orden[i])
20
21 def exponente_fit(x, a, b):
22     return a * np.exp(b * x)
23
24 # Fit exponencial inversa
25 params, cov = curve_fit(exponente_fit, orden, producto)
26
27 # gráfica de los parámetros con una línea smooth
28 orden_smooth = np.linspace(orden[0], orden[-1], 300)
29 producto_smooth = exponente_fit(orden_smooth, *params)
30
31 # gráfica de los parámetros con una línea smooth
32 orden_smooth = np.linspace(orden[0], orden[-1], 300)
33 producto_smooth = exponente_fit(orden_smooth, *params)
34
35 # Graficando
36 fig, ax = plt.subplots(1)
37 plt.scatter(orden, producto, label='Valores del producto', color='blue')
38 plt.plot(orden_smooth, producto_smooth, color='red')
39 plt.xlabel('Orden')
40 plt.ylabel('Producto')
41 x = [1,2,3,4,5]
42 xi =[1,2,3,4,5]
43 plt.xticks(xi,x)
44 plt.ticklabel_format(axis='y', style='sci',scilimits=(0,0))
45 #plt.yscale('log')
46 plt.legend()
47 plt.show()

```

Listing B.1: Inicialización del programa modelo de producto constante

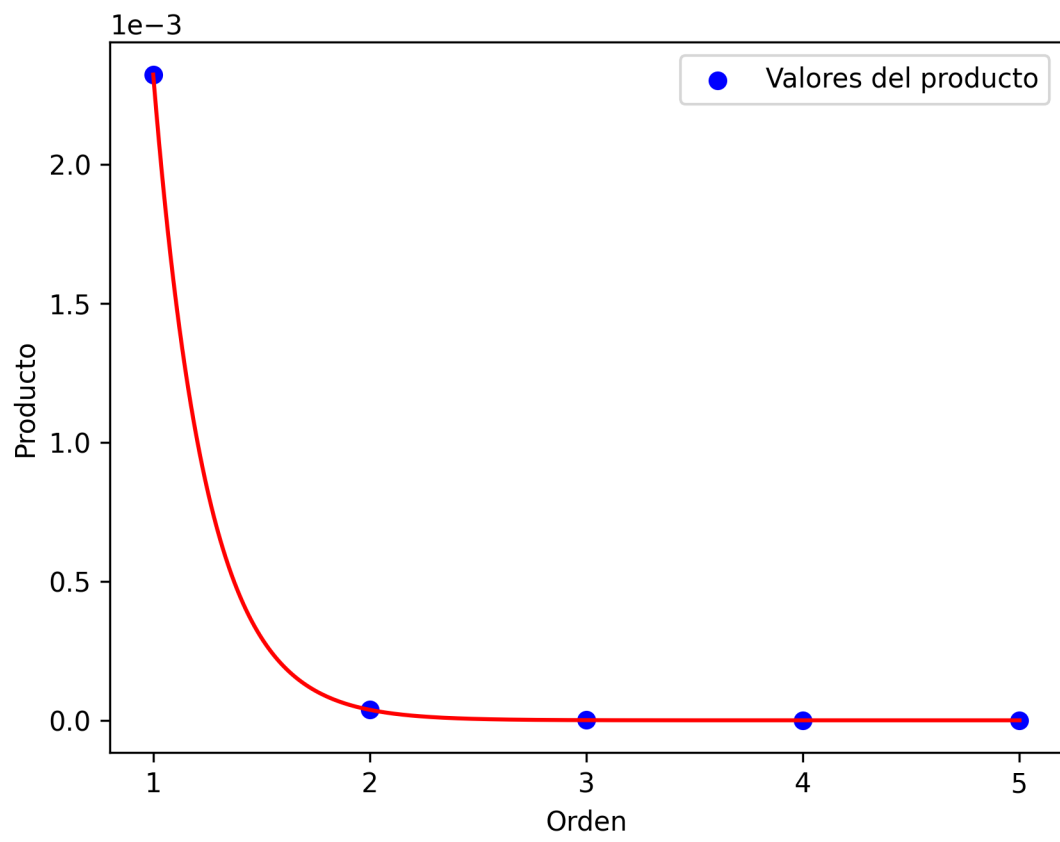


Figura B.1: Producto de número de diagramas $\times (\frac{\alpha}{\pi})^n$ vs número de *loops*

```

1 def n_diag(o,c):
2     diagramas=c*pow(pi/alpha,o)
3     return(diagramas)
4 initial_guess=[0.5]
5 parameters,cov=curve_fit(n_diag,orden,loop_n,initial_guess)
6
7 orden_fit=np.linspace(1,len(orden),101)
8 loop_n_fit=[]
9 for i in range(len(orden_fit)):
10     loop_n_fit.append(n_diag(orden_fit[i],*parameters))
11
12 plt.plot(orden_fit,loop_n_fit, label='Predicciones de c', color='blue')
13 plt.scatter(orden,loop_n, label='a(n)', color='blue')
14 x = [1,2,3,4,5]
15 xi =[1,2,3,4,5]
16 plt.xticks(xi,x)
17 #plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
18 #plt.rcParams['savefig.dpi'] = 300
19
20 plt.legend()
21 plt.xlabel('Orden')
22 plt.ylabel('Producto')
23 #plt.savefig('Codigo_Parte_A.png',format='png',dpi=2500)
24 #plt.yscale('log')

```

Listing B.2: Resultados del primer ajuste

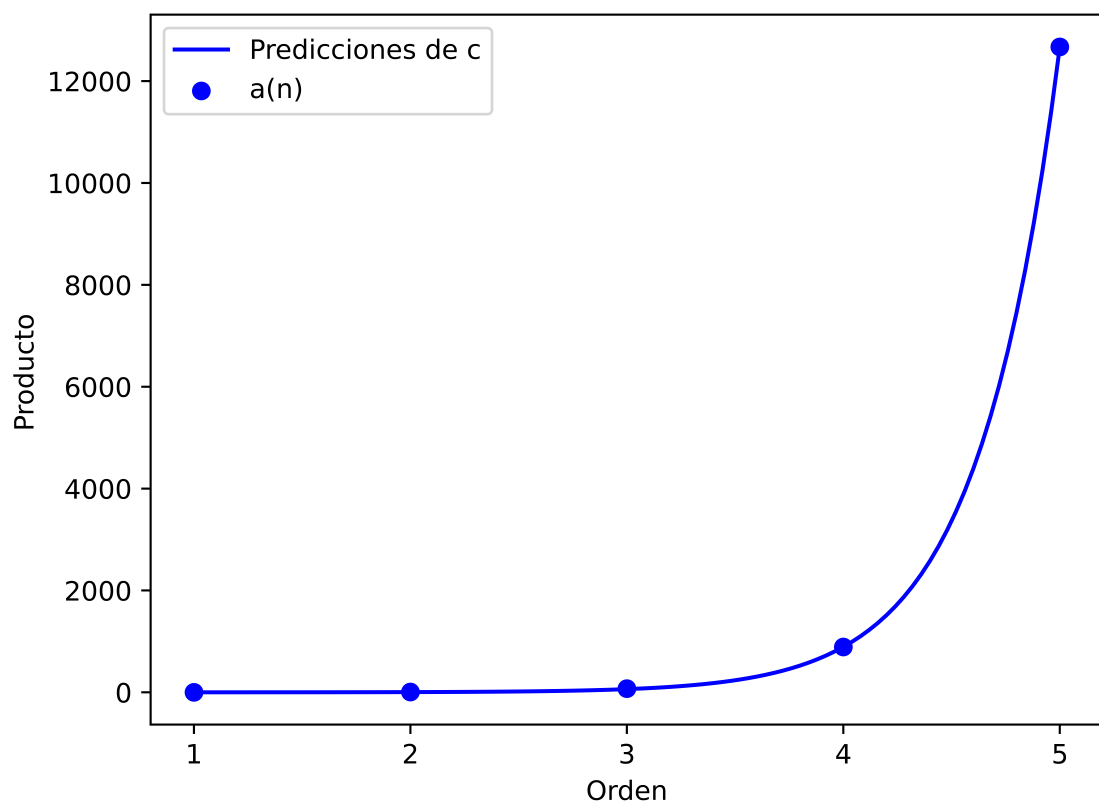


Figura B.2: Ajuste de número de diagramas vs número de *loops* al primer modelo propuesto

```

1 valores_c=[]
2 for n in range(1,6):
3     c=loop_n[n-1]*(alpha/pi)**n
4     valores_c.append(c)
5 print(valores_c)
6
7 #OUTPUT
8 # [0.002323429826159056, 3.778828309959852e-05, 9.030695043389079e-07,
9     2.596545544076171e-08, 8.58011215941258e-10]
10
11 n_diagramas=[]
12 for n in range (1,6):
13     n_diagramas.append(valores_c[n-1]*(pi/alpha)**n)
14 print(n_diagramas)
15
16 #OUTPUT
17 # [1.0, 7.000000000000002, 72.00000000000003, 891.0000000000003, 12672.000000000005]

```

Listing B.3: Predicciones para C

Parece que c no es un valor constante (su orden decrece conforme aumenta el orden perturbativo).

Parte 2: exponente no constante - ajuste exponencial

Cantidad de diagramas $\times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^a \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{bn}$, con b positivo: implica una supresión no constante.

Así, Cantidad de diagramas $= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{a+(b-1)n}$. Hay que encontrar a y b .

```

1 #INSTALACIÓN Y CARGA DE PAQUETES DE PROPAGACIÓN DE ERRORES
2 !pip install jacobi
3 from jacobi import propagate
4 from scipy.optimize import curve_fit
5
6 def new_n_diag(o,a,b):
7     return (alpha/pi)**(a+(b-1) * o)
8
9 initial_guess_ab=[0.5,0.5]
10 parameters, cov = curve_fit(new_n_diag, orden, loop_n, initial_guess_ab)
11
12 orden_fit = np.linspace(1, len(orden), 101)
13 loop_n_fit = new_n_diag(orden_fit, *parameters)
14 print(parameters,"+-",np.sqrt(np.diag(cov)))
15
16 #OUTPUT
17 # [0.62977544 0.56250009] +- [0.0050975 0.00102042]
18
19 #cl for confidence limits
20 cl_n_diag,cl_n_diag_cov=propagate(lambda p: new_n_diag(orden_fit,*p),parameters,cov)
21 cl_n_diag_err=np.diag(cl_n_diag_cov)**0.5
22 cl=1e2
23
24 # Graficando
25 fig,ax = plt.subplots(1)
26 #plt.xlim(1,5)
27 #plt.ylim(0,100)
28 plt.scatter(orden, loop_n, label='Datos', color='blue')
29 plt.plot(orden_fit, loop_n_fit, label='Ajuste', color='red')

```

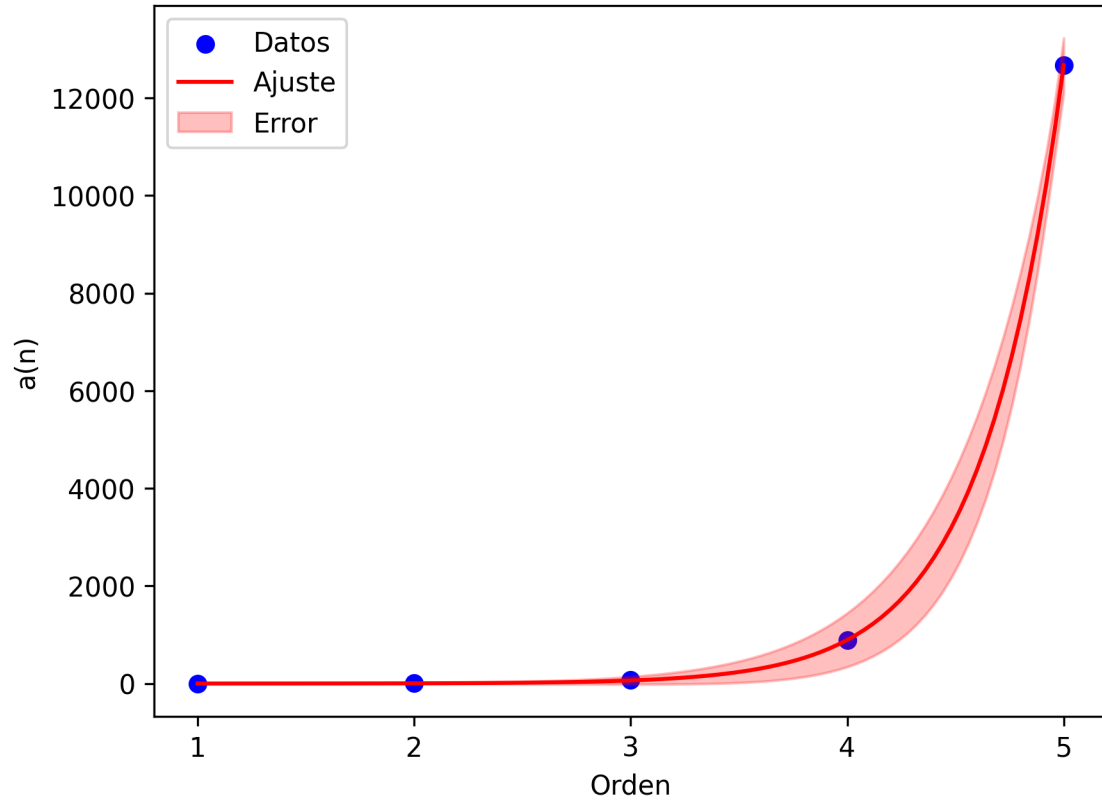


Figura B.3: Ajuste de número de diagramas vs número de *loops* al segundo modelo propuesto

```

30 x = [1,2,3,4,5]
31 xi = [1,2,3,4,5]
32 plt.xticks(xi,x)
33 plt.xlabel('Orden')
34 plt.ylabel('a(n)')
35 ax.fill_between(ordn_fit,cl_n_diag-cl*cl_n_diag_err,cl_n_diag+cl*cl_n_diag_err,color
    ='red',alpha=0.25, label='Error')
36 #plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
37 #plt.rcParams['savefig.dpi'] = 300
38 #plt.yscale('log')
39 plt.legend()
40 plt.show()

```

Listing B.4: Ajuste de Segundo Modelo y propagación numérica de errores

Parte 3: predicción de cantidad de *loops* en orden mayor a 5

Lista de valores en orden 10 [40]: [1, 1, 7, 72, 891, 12672, 202770, 3602880, 70425747, 1503484416, 34845294582]

Queremos usar los valores encontrados en la parte 2 para predecir los siguientes valores en la lista.

```

1 from scipy.interpolate import make_interp_spline
2

```

```

3 # Usando los modelos encontrados en la parte 2, queremos predecir la cantidad de
  diagramas para orden n > 5.
4 loop_n_th = [1,1,7,72,891,12672,202770,3602880,70425747,1503484416,34845294582] #
  Orden 10
5
6 # Predicción de loop_n_th
7 orden_th = np.arange(len(loop_n_th))
8 loop_n_th_fit = new_n_diag(orden_th, *parameters) #usamos los parámetros para hacer
  un fit sobre loop_n_th
9
10 # Haciendo línea smooth para la predicción
11 orden_th_smooth = np.linspace(orden_th.min(), orden_th.max(), 101)
12 loop_n_th_smooth = new_n_diag(orden_th_smooth, *parameters)
13
14 print("Fitted Parameters:", parameters)
15 print("Predicted loop_n_th:", loop_n_th_fit)
16
17 #OUTPUT
18 #Fitted Parameters: [0.62977544 0.56250009]
19 #Predicted loop_n_th: [2.19408313e-02 3.11581147e-01 4.42475537e+00 6.28358302e+01
20 # 8.92329911e+02 1.26719527e+04 1.79954055e+05 2.55552262e+06
21 # 3.62909070e+07 5.15366180e+08 7.31870105e+09]
22
23 # Haciendo líneas smooth para los valores teóricos con el fit
24 initial_guess_ab_10 = [0.5,0.5]
25 parameters2,cov2 = curve_fit(new_n_diag,orden_th,loop_n_th,initial_guess_ab_10)
26
27 #orden_fit_th = np.linspace(0, len(orden_th)-1, 101)
28 loop_n_fit_th = new_n_diag(orden_th_smooth, *parameters2)
29 print(parameters,"+-",np.sqrt(np.diag(cov2)))
30
31 #OUTPUT
32 #[0.62977544 0.56250009] +- [0.00203754 0.00020379]
33
34 # Graficando
35 fig, ax = plt.subplots(1)
36 plt.scatter(orden, loop_n, label='Data')
37 plt.plot(orden_fit, loop_n_fit, label='Fit', color='red')
38 plt.plot(orden_th_smooth,loop_n_fit_th, label='Valores teóricos', color='red')
39 plt.scatter(orden_th, loop_n_th, color='red', marker='o',label='Valores teóricos')
40 plt.plot(orden_th_smooth, loop_n_th_smooth, label='Valores predichos', color='blue')
41 plt.scatter(orden_th, loop_n_th_fit, color='blue', marker='x',label='Valores
  predichos')
42 plt.plot(orden_th_smooth, loop_n_th_smooth, label='Valores teóricos', color='red',
  linestyle='dashed')
43 plt.xlabel('Orden')
44 plt.xlim(0.5,10.5)
45 plt.ylabel('Cantidad de \textit{loops}')
46 x_axis=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
47 x_label=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
48 plt.xticks(x_axis,x_label)
49 plt.yscale('log')
50 plt.legend()
51 plt.show()

```

Listing B.5: Predicción del segundo modelo y comparación con literatura disponible

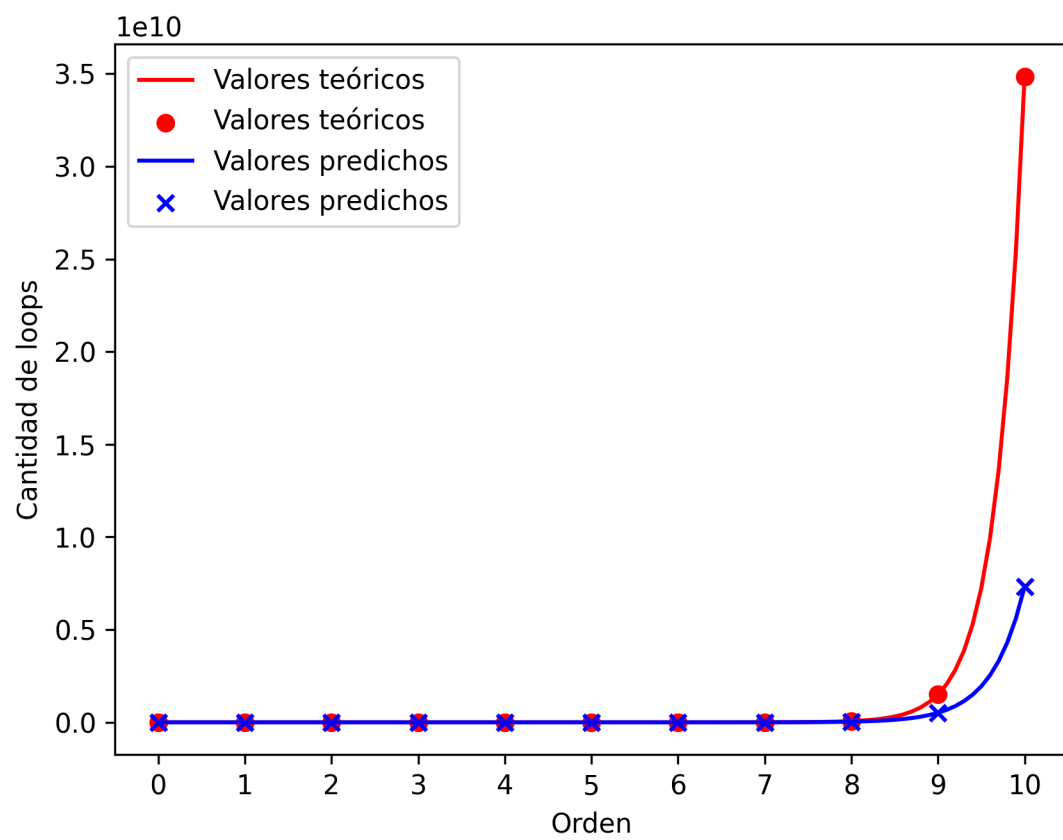


Figura B.4: Predicción del segundo modelo para el número de diagramas a órdenes más altos.

CAPÍTULO 10

Glosario

Densidad de probabilidad Función que permite determinar la probabilidad de encontrar una partícula en algún estado. 11, 14, 19, 20

Fotón Partícula elemental mediadora de la interacción electromagnética. viii, 26, 38, 39, 40, 42

Función de onda Descripción matemática del estado cuántico de una partícula. 9, 10, 12, 13, 17, 22

Hamiltoniano Operador correspondiente a la energía total de un sistema en mecánica cuántica. 8, 31, 32, 33

Lagrangiano Función que describe la dinámica de un sistema físico. 7, 31

Matriz de dispersión Herramienta matemática utilizada en teoría de la dispersión para relacionar estados iniciales con estados finales. 33

Momento angular Magnitud vectorial que representa la cantidad de movimiento rotacional de un objeto. 7, 22, 23, 28

Momento lineal Magnitud vectorial que representa la cantidad de movimiento lineal de un objeto. 7, 28

Momento magnético anómalo Corrección al momento magnético de una partícula debido a efectos cuánticos, que provoca una desviación respecto al valor predicho por la teoría clásica. 7, 22, 26, 38

Muon Partícula elemental de carga idéntica al electrón, y de masa al reposo aproximadamente 207 veces mayor. vi, vii, viii, 22, 25, 26, 28, 35, 36, 38, 39, 40, 42

Neutrino Partícula elemental, de masa extremadamente pequeña y carga neutra, que interactúa débilmente y gravitacionalmente con la materia. 26, 28

Potencial Cuadrivector compuesto del potencial eléctrico V y del potencial vectorial magnético $\mathbf{A}$. 22, 23

CAPÍTULO 11

Lista de símbolos

α	Constante de estructura fina, que caracteriza la intensidad de la interacción electromagnética.
α_i	Representación de tres de las matrices de Dirac
β	Cuarta matriz de Dirac.
$\mathbf{A}$	Potencial vectorial, campo vectorial cuya rotación es el campo magnético.
$\mathbf{B}$	Campo magnético, campo que resulta de las cargas en movimiento y ejerce fuerzas sobre otras cargas en movimiento.
$\mathbf{E}$	Campo eléctrico, campo que rodea a las partículas cargadas y ejerce fuerzas sobre otras partículas cargadas.
$\mathbf{p}$	Momento lineal, producto de la masa y la velocidad de una partícula.
$\mathbf{S}$	Matriz S de Dyson.
Δ	Cambio o diferencia, símbolo que denota la diferencia entre dos valores.
δ	Función delta de Dirac, utilizada para modelar distribuciones de masa, carga, etc.
δ_{ij}	Delta de Kronecker; su valor es 1 cuando $i = j$, y 0 cuando $i \neq j$
γ	Fotón, cuanto de luz o partícula mediadora de la interacción electromagnética. También puede representar las matrices γ .
λ	Longitud de onda, distancia entre dos puntos equivalentes consecutivos en una onda.
μ	Muon, partícula subatómica similar al electrón pero con una masa mayor.
∇	Operador nabra, operador vectorial que representa el gradiente.
ν	Neutrino, partícula subatómica muy ligera que interactúa débilmente y gravitacionalmente con la materia.
ϕ	Función de onda de Klein-Gordon.

$\phi^\dagger$	Conjugado hermitiano de la función de onda ϕ .
ψ	Función de onda de Schrödinger o de Dirac, descripción matemática del estado cuántico de una partícula.
$\psi^\dagger$	Conjugado hermitiano de la función de onda ψ .
ρ	Densidad de probabilidad, función que describe la probabilidad de encontrar una partícula en una determinada posición.
σ	Sección eficaz de dispersión, medida de la probabilidad de que ocurra una determinada interacción entre partículas.
θ	Ángulo en coordenadas polares.
c	Velocidad de la luz en el vacío
e	Carga electrónica
h	Constante de Planck
V	Potencial eléctrico, energía potencial por unidad de carga en un punto en un campo.