

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA.

Facultad de Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemática

La Factorización del Operador de Reflexión de la Onda Sísmica.

David Anibal Monterroso Juárez.



**Guatemala
1996**

La Factorización del
Operador de Reflexión de
la Onda Sísmica

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades
Departamento de Matemática

La Factorización del Operador de Reflexión de la Onda Sísmica


David Aníbal Monterroso Juárez

**Trabajo de graduación presentado para optar
al grado académico de Licenciado en Matemática.**

Guatemala

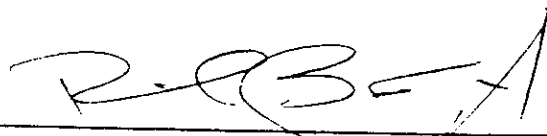
1996

Do. Bo. :

(f) 

Dr. Raúl González
Asesor.

Tribunal:

(f) 

Dr. Raúl González

(f) 

Ms. Franklin Matzdorf

(f) 

Dr. Juan Carlos Dillagrán

Fecha de aprobación: Noviembre de 1996.

**A MIS PADRES
A QUIENES LES DEBO MÁS
DE LO QUE PUEDO EXPRESAR,**

**A MIS HERMANOS
POR ACOMPAÑARME EN EL CAMINO
Y APOYARME,**

**Y A MIS AMIGOS
ESAS PERSONAS QUE HICIERON
LA UNIVERSIDAD MÁS AMENA
Y QUE FORTALECEN EL ESPÍRITU.**

Prefacio

La sismología es una ciencia física matemática aplicada. Como tal, a partir de desarrollos matemáticos rigurosos, se deducen propiedades físicas importantes.

Una de las aplicaciones de la sismología es la exploración sísmica. Esta consiste en la utilización de explosiones controladas para analizar las propiedades de una localidad determinada en la corteza terrestre.

Cuando se analizan datos de exploración sísmica, se puede utilizar, entre otros métodos, el de migración. Este método supone que un reflector de la onda sísmica presente debido a la heterogeneidad de la corteza, puede ser considerado como una fuente sísmica, es decir migrar, teóricamente, la fuente sísmica hacia el reflector. Es posible estudiar esta migración al utilizar el llamado "*operador de reflexión de onda sísmica*".

En el presente trabajo se presenta al operador de reflexión de onda sísmica y se expone cómo factorizar la ecuación de la onda sísmica. Esto con el fin de facilitar la comprensión de algunos métodos de migración y de ofrecer una herramienta para el análisis de datos sísmicos de exploración. Este trabajo además representa una contribución a la fundamentación de la teoría matemática que envuelve la investigación de exploración sísmica y, en forma general, a la sismología.

Se presenta una introducción a la teoría de la mecánica del medio continuo en el marco sismológico. Los enfoques de Lagrange y Euler para analizar un problema en un medio continuo. Se incluyen también definiciones fundamentales como: el tensor de deformaciones, el tensor de esfuerzos, fuerzas de tracción y de cuerpo, la ecuación de movimiento en un medio continuo, medios elásticos, la ley generalizada de Hooke.

Esto proporciona a los parámetros más importantes de la exploración sísmica, su representante en la teoría matemática de la elasticidad.

Una vez en el dominio de las matemáticas, se prueban teoremas fundamentales como unicidad y representación, y se introduce el tensor de Green para probar el teorema de reciprocidad, que es fundamental para los métodos de migración para el análisis de datos de exploración sísmica. Es

aquí donde la factorización es acoplada con la teoría básica de la elasticidad para obtener un método de análisis de datos del tipo de migración. La factorización es alcanzada por medio de la resolución de ecuaciones integrales e integrodiferenciales y se deducen propiedades importantes del operador de reflexión que contribuyen a su acoplamiento con el método de análisis.

Con la declaración de la década internacional de reducción de desastres naturales, la instrucción universitaria en el campo de la sismología se hace necesaria. Sin embargo, la bibliografía disponible para la fundamentación de los conceptos básicos es muy limitada. Uno de los propósitos de este trabajo es hacer accesibles algunos resultados fundamentales en sismología que se obtienen de un desarrollo matemático riguroso, así como abrir el camino para investigaciones que requieran de un fundamento matemático para la implementación de métodos de solución de los problemas que envuelven la estructura de la corteza terrestre, la descripción de la fuente sísmica, la respuesta del suelo ante los eventos sismológicos y la solución de la ecuación de la onda sísmica.

La educación universitaria sobre la sismología es necesaria además, pues la propia ciudad capital (así como gran parte del territorio nacional), no se encuentra libre de los efectos de los fenómenos sismológicos, como lo muestra el terremoto de hace 20 años. Así, otro de los objetivos de este trabajo es incitar a estudiantes e investigadores a seguir el camino que aquí se empieza a abrir: implementando, por ejemplo, algoritmos para la aplicación a los datos de campo, basados en la formulación matemática aquí desarrollada. Es brindar una herramienta para que luego, en el campo de la ingeniería, sea pulida y puesta en práctica en el estudio de las propiedades y características de nuestro medio.

CONTENIDO

Páginas

PREFACIO	IX
I. INTRODUCCIÓN	1
A. LA DESCRIPCIÓN DE LA DEFORMACIÓN EN MEDIOS CONTINUOS.	3
1. <i>Desplazamiento</i>	3
B. LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN MEDIOS CONTINUOS	6
1. <i>Tracción</i>	6
2. <i>Fuerzas de Cuerpo</i>	6
3. <i>El Tensor de Esfuerzos</i>	10
4. <i>La Ecuación de movimiento</i>	10
C. LA SIMETRÍA DEL TENSOR DE ESFUERZOS	12
D. LA LEY GENERALIZADA DE HOOKE	15
1. <i>Medio Elástico</i>	15
2. <i>Ley generalizada de Hooke</i>	15
II. EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN	17
A. EL TEOREMA DE UNICIDAD	18
B. LA RELACIÓN DE BETTI	24
C. EL TENSOR DE GREEN	27
D. UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN	29
E. EL TEOREMA DE RECIPROCIDAD	31
III. EL OPERADOR DE REFLEXIÓN DE ONDA SÍSMICA	34
A. DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO A LA ECUACIÓN DE ONDA	35
B. LOS POTENCIALES ELASTODINÁMICOS	39
C. LA FACTORIZACIÓN EN UNA DIMENSIÓN	40
D. INTRODUCCIÓN DEL OPERADOR DE REFLEXIÓN DE ONDA SÍSMICA	42
IV. LA FACTORIZACIÓN DE LA ONDA SÍSMICA	44
A. EL CASO DE LA VELOCIDAD CONSTANTE	45
B. MEDIOS ESTRATIFICADOS	49
C. EL OPERADOR DE REFLEXIÓN DE ONDA SÍSMICA	52
V. CONCLUSIONES	59
VI. BIBLIOGRAFÍA	62



I. Introducción

La geofísica moderna envuelve el estudio de deformaciones de una gran variedad de materiales. La corteza, el océano, etc. Algunos estudios geológicos necesitan dinámica de fluidos. La sismología¹ necesita la teoría matemática de la elasticidad.

Para analizar el comportamiento de las ondas sísmicas en el interior de la tierra, debemos comenzar con una descripción de la Mecánica del Continuo aplicada a la Sismología. En parte porque será útil para el mejor entendimiento de los capítulos subsiguientes y, en parte porque esto se encuentra rara vez en libros de sismología.

El medio por el cual viajan las ondas sísmicas, el interior de la tierra, será tratado como un medio continuo, es decir su estructura molecular no tiene consecuencias y hablaremos de un *elemento de material* que es infinitamente pequeño. La hipótesis del continuo nos permite expresar leyes físicas que están formuladas en términos de cuerpos de tamaño finito, como ecuaciones diferenciales que se aplican a un elemento del continuo.

El movimiento y la deformación de un medio continuo, pueden describirse matemáticamente de dos formas: el enfoque de Lagrange y el enfoque de Euler. En el enfoque de Lagrange se describe el comportamiento de un elemento de material que está especificado por su posición original en algún tiempo de referencia. En el enfoque de Euler se describe el comportamiento de una localización espacial particular sin

¹ El estudio de las ondas sísmicas (también conocidas como ondas elásticas) tanto en su generación como en su transmisión en el interior de la tierra y su recopilación en registros en la superficie de la tierra. Es bajo el alcance de esta ciencia, una ciencia fisico-matemática aplicada, que se encuentra el estudio del operador de reflexión de la onda sísmica.

importar qué elemento de material ocupe este espacio. En general el formalismo de Lagrange es más útil en la teoría matemática de la elasticidad y el formalismo de Euler es comúnmente usado en la dinámica de fluidos. Para deformaciones pequeñas las dos descripciones son indistintas en muchos aspectos.

El desplazamiento de un material no es tan importante como la *deformación*. Esta última, en un medio de tres dimensiones, consta de nueve componentes que corresponden a las tres direcciones de movimiento por cada una de las tres dimensiones de *longitud unitaria*. La deformación será representada utilizando un tensor, pero sólo seis componentes independientes del tensor simétrico de deformación son necesarias para la teoría de la elasticidad.

Las fuerzas que actúan en el medio son de dos tipos: Fuerzas de Cuerpo y Tracciones. La fuerza de gravedad es un ejemplo de una fuerza de cuerpo, sin embargo podemos despreocupar su efecto en las ondas sísmicas de período corto, que son las ondas que se estudiarán en el presente desarrollo.

Las fuerzas de tracción serán representadas por medio del *tensor de esfuerzos*. Este aparecerá de forma natural cuando hagamos una descripción matemática de la deformación de cierto elemento de espacio (región del espacio). Para hacerlo, tomemos una partícula que se encuentra inicialmente en la posición \mathbf{x} (i.e. $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$) y una partícula que se encuentre inicialmente en la vecindad de radio ϵ , con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. La segunda partícula se encuentra en la posición $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$.

De esta forma, La ley de conservación de momentum angular desembocará en una ecuación de movimiento especializada para sólidos elásticos que más tarde será transformada en una ecuación de onda. De esta última se desprende el operador de onda sísmica, que será factorizado para facilitar el análisis de los datos sismológicos y el estudio de la propagación de la onda sísmica a través del interior de la tierra. Por esto es importante definir los conceptos fundamentales preliminares para luego atacar el problema de la factorización del operador de onda sísmica, partiendo de la utilización del teorema de reciprocidad (éste y otros teoremas fundamentales que se refieren a la solución de la ecuación de movimiento²

² La ecuación de movimiento es una ecuación diferencial de segundo grado en el desplazamiento sometida a condiciones de frontera, por tanto debemos justificar la unicidad de la solución para el desplazamiento. Además, como es usual, serán necesarios para el desarrollo matemático posterior, teoremas de representación y reciprocidad.

serán presentados en el capítulo II). En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos y teoremas fundamentales.

A. La descripción de la deformación en medios continuos.

1. Desplazamiento

El desplazamiento es una función del tiempo y del espacio, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, que representa el vector distancia de la posición de una partícula a un tiempo t , desde la posición \mathbf{x} que ocupaba en cierto tiempo t_0 .

Pero nuestro interés está centrado en las deformaciones de los elementos de materia y no en el desplazamiento en sí. Por tanto enfoquemos ahora nuestra atención al elemento de línea que las une y expresemos matemáticamente la deformación que sufre este elemento de línea cuando la partícula en \mathbf{x} se mueve hacia la nueva posición $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en un tiempo t . En el instante t , la otra partícula se encontrará en la posición $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t)$. La figura 1 muestra la situación.

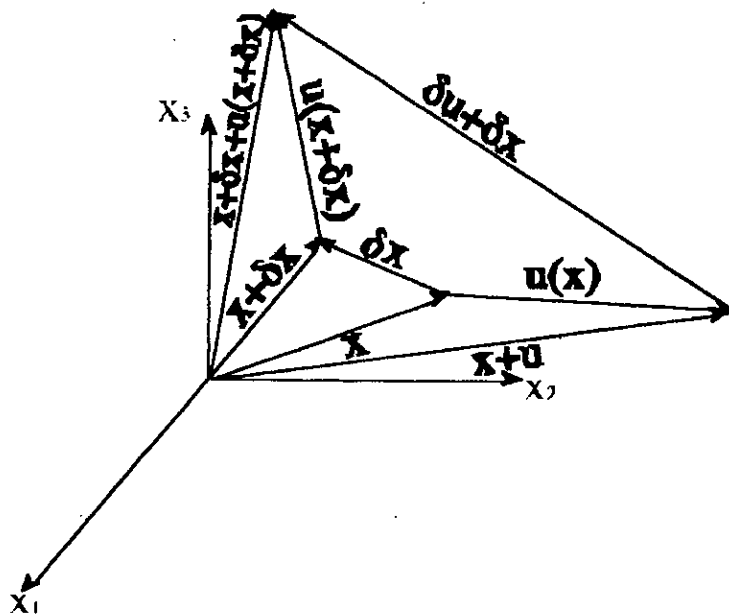


Fig. 1

De la figura 1, se extrae la siguiente información:

$$\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t) - \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

El tercer término de la derecha puede ser aproximado por medio de una expansión de Taylor alrededor del punto \mathbf{x} . Dado que ϵ es arbitrariamente pequeño, se tiene que $|\delta \mathbf{x}| \ll 1$. De esta forma se tiene:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} + o(\delta x^2) \quad (2)$$

Al introducir la ecuación (3) en la ecuación (2) se obtiene:

$$\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} + o(\delta x^2) \quad (3)$$

Para expresar la ecuación (3) en una forma en que podamos interpretarla físicamente, haremos uso de la función Delta de Dirac, δ , del tensor alternante, ϵ_{ijk} , y sus propiedades. También usaremos constantemente la notación de Einstein en la que, índices repetidos significan sumatorias y comas significan derivaciones espaciales.

Teorema 1:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k = u_{i,j} \delta x_j - u_{j,i} \delta x_j$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} \\ &\Rightarrow \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k &= -\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k \\ &= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) u_{m,l} \delta x_k \\ &= \delta_{im} \delta_{kl} u_{m,l} \delta x_k - \delta_{il} \delta_{km} u_{m,l} \delta x_k \\ &= u_{i,k} \delta x_k - u_{k,i} \delta x_k \\ &= u_{i,j} \delta x_j - u_{j,i} \delta x_j \\ &\Rightarrow \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k &= u_{i,j} \delta x_j - u_{j,i} \delta x_j \end{aligned}$$

Teorema 2:

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\delta x_j + \frac{1}{2}[(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{x}]_i$$

Demostración:

De la ecuación (3) tenemos

$$\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

En notación de Einstein:

$$\begin{aligned} \delta u_i &= u_{i,j} \delta x_j = u_{i,j} \delta x_j + (u_{j,i} \delta x_j - u_{j,i} \delta x_j) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \mathbf{u})_j \delta x_k \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{x}]_i \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{x}]_i$$

2. El Tensor de Deformación.

El tensor de deformación, e_{ij} , es el término de deformación pura de $\delta \mathbf{u}$ y se define matemáticamente por la relación siguiente:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

B. La Ecuación de Movimiento en Medios Continuos

(i). Tracción

La tracción, \mathbf{T} , o fuerza de tracción, es un vector que representa la fuerza por unidad de área que actúa a través de la superficie interna dentro de un medio continuo. Esta cuantifica la fuerza por unidad de área que una partícula que se encuentra de un lado de la superficie ejerce sobre otra que se encuentra del otro lado. Matemáticamente se define como:

$$\mathbf{T} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta S}$$

(ii). Fuerzas de Cuerpo

Las fuerzas de cuerpo son todas aquellas fuerzas que actúan sobre las partículas de un medio sólido o líquido y, que resultan de la interacción con partículas no adyacentes o, que se deben a la aplicación de procesos físicos externos al medio.

Denotaremos las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen por \mathbf{f} .

Propiedad:

Si asumimos el formalismo de Lagrange, entonces

$$\text{a) } \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{b) } \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Demostración:

$$\text{a) } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

$$\text{b) } \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)}{dt} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Teorema 3:

La segunda ley de Newton, aplicada al volumen V , de un medio continuo, delimitado por la superficie ∂V , puede ser escrita, en términos de las tracciones y de las fuerzas de cuerpo como:

$$\iiint_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS$$

Demostración:

Si \mathbf{P} es la cantidad de movimiento lineal y, \mathbf{F} , la fuerza externa total que actúa sobre el volumen V , la cual se puede separar en las fuerzas que actúan sobre la superficie que delimita a V y las fuerzas que actúan sobre las partículas del interior de V . Esto es, las fuerzas de tracción y las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el volumen V ; entonces tenemos, para el Volumen V :

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV \\ \Rightarrow d\mathbf{P} &= \mathbf{v} dm = \rho \mathbf{v} dV \\ \Rightarrow \mathbf{P} &= \iiint_V \rho \mathbf{v} dV \end{aligned}$$

La segunda ley de Newton es:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$$

Por lo que

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \mathbf{v} dV \right] = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS$$

Sin embargo, el volumen V no cambia con el tiempo (de acuerdo con el formalismo lagrangiano), así como la ley de conservación de la masa es aplicable ($\rho dV = dm$, permanece constante), por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \mathbf{v} dV \right] &= \iiint_V \frac{d}{dt} [\rho \mathbf{v} dV] \\
&= \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \\
&= \iiint_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dV \\
&= \iiint_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right) dV \\
&= \iiint_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) dV \quad 3
\end{aligned}$$

Como el segundo término es cuadrático en \mathbf{v} , al tomar desplazamientos y velocidades pequeños⁴ podemos despreciarlo, para así obtener

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \mathbf{v} dV \right] = \iiint_V \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_{\delta V} \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS$$

³ Al introducir la derivada temporal dentro del signo de la integral, obtuvimos la llamada Derivada de Stokes (también llamada por algunos autores Derivada Material):

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

Físicamente, esta derivada representa la razón de cambio de una variable medida por un observador que se mueve con el volumen V .

⁴ En Sismología esto se justifica ya que tanto los desplazamientos como las velocidades son despreciables comparadas con la longitud de la onda sísmica.

Teorema 4:

La tracción , $\mathbf{T}(\mathbf{n})$, puede ser expresada en términos de componentes en los ejes principales de un sistema coordenado, i.e.

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)n_i$$

Demostración:

Sabemos que

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{\overline{OBC}}{\overline{ABC}}, \frac{\overline{OAC}}{\overline{ABC}}, \frac{\overline{OAB}}{\overline{ABC}} \right)$$

Donde \overline{ABC} representa el área del plano delimitado por las rectas que unen los puntos A, B, C . Similarmente, \overline{OBC} , \overline{OAC} , \overline{OAB} representan el área delimitada por los planos delimitados por las rectas que unen los puntos O, B, C ; O, A, C ; O, A, B ; respectivamente (Ver la figura 2).

Tenemos que cuando δV tiende a cero, $\langle \mathbf{T} \rangle = 0$ ⁵.

Tomemos ahora el volumen mostrado en la Figura 2, entonces

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{\mathbf{T}(\mathbf{n})\overline{ABC} + \mathbf{T}(-\mathbf{x}_1)\overline{OBC} + \mathbf{T}(-\mathbf{x}_2)\overline{OAC} + \mathbf{T}(-\mathbf{x}_3)\overline{OAB}}{\overline{ABC} + \overline{OBC} + \overline{OAC} + \overline{OAB}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n})\overline{ABC} = -\mathbf{T}(-\mathbf{x}_1)\overline{OBC} - \mathbf{T}(-\mathbf{x}_2)\overline{OAC} - \mathbf{T}(-\mathbf{x}_3)\overline{OAB}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n})\overline{ABC} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1)\overline{OBC} + \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)\overline{OAC} + \mathbf{T}(\mathbf{x}_3)\overline{OAB}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1)\frac{\overline{OBC}}{\overline{ABC}} + \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)\frac{\overline{OAC}}{\overline{ABC}} + \mathbf{T}(\mathbf{x}_3)\frac{\overline{OAB}}{\overline{ABC}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1)n_1 + \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)n_2 + \mathbf{T}(\mathbf{x}_3)n_3$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)n_i$$

⁵ El promedio de las fuerzas de tracción en el área es cero debido a la continuidad de las fuerzas de Tracción.

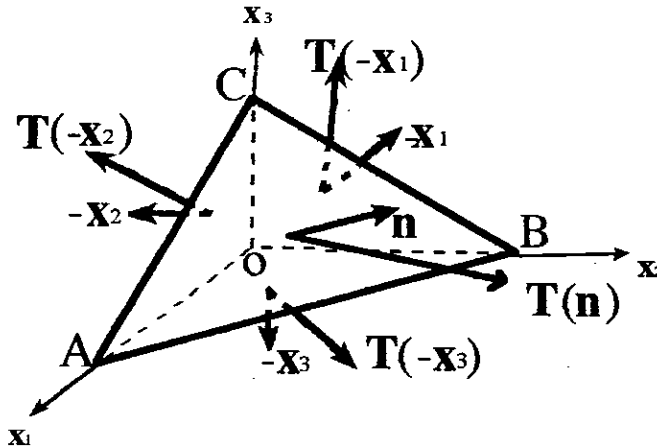


Fig 2

(iii). El Tensor de Esfuerzos

La componente τ_{kl} del tensor de esfuerzos se define como la l -ésima componente de la tracción que actúa sobre el plano normal al k -ésimo eje (x_k). i.e

$$\tau_{kl} = T_l(x_k) \quad \text{ó} \quad T_i = \tau_{ji}n_j$$

(iv). La Ecuación de movimiento

Las ondas sísmicas viajan en el interior de la tierra, la cual es tratada aquí como un medio continuo. Para ser estrictos debemos tener presente que en el tiempo t , la partícula en estudio ya no está en la posición \mathbf{x} sino que se ha movido a la nueva posición $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$. Por lo tanto, las derivadas espaciales deben tomarse con respecto de \mathbf{x} , de lo contrario estaríamos asumiendo el formalismo de Euler. Sin embargo, para deformaciones pequeñas, el formalismo de Lagrange conduce a los mismos resultados que el formalismo de Euler. Por lo tanto, siempre que las deformaciones son pequeñas el resultado será válido para aplicaciones basadas en el formalismo Lagrangiano.

En la ecuación de movimiento se presenta una relación entre la aceleración de un elemento de volumen del medio continuo y las fuerzas que actúan sobre él. Las fuerzas de cuerpo se representan como fuerzas por unidad de volumen, mientras que para representar a las tracciones (fuerzas superficiales) empleamos el tensor de esfuerzos. Esto para especificar no

sólo la fuerza por unidad de área, sino también la orientación de las superficies sobre las cuales actúan.

Dentro del volumen, las fuerzas intermoleculares se cancelan (siguiendo la tercera ley de Newton), por lo que la totalidad de las fuerzas que actúan sobre el volumen V ya han sido especificadas.

El siguiente teorema es la ecuación de movimiento.

Teorema 5:

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ji,j}$$

Donde u_i es la i -ésima componente del desplazamiento, f_i es la i -ésima componente de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y, τ_{ji} es una componente del tensor de esfuerzos.

Demostración:

Partimos de la segunda ley de Newton (Teorema 3) expresada en la i -ésima componente.

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV &= \iiint_V f_i dV + \iint_{\partial V} T_i(\mathbf{n}) dS \\ &\Rightarrow \\ \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV &= \iiint_V f_i dV + \iint_V \tau_{ji} n_j dS \\ &= \iiint_V f_i dV + \iiint_V \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dS \\ &= \iiint_V f_i dV + \iiint_V \tau_{ji,i} dS \\ &\Rightarrow \iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \tau_{ji,i}) dV = 0 \end{aligned}$$

Como el volumen escogido es arbitrario, el integrando debe ser cero para que la ecuación se satisfaga, entonces

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ji,j}$$

C. La Simetría del Tensor de Esfuerzos

Teorema 6:

El tensor de esfuerzos es simétrico. i.e. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Demostración:

Probaremos esto utilizando la ley de la conservación del momentum angular:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{x} \times d\mathbf{P} = \mathbf{T}_{\text{ext}}$$

Donde \mathbf{L} es la cantidad de movimiento angular, \mathbf{P} es la cantidad de movimiento lineal, \mathbf{T}_{ext} es el torque externo neto que actúa sobre el volumen V .

$$d\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{P} = \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v} dV) = \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV \right]$$

(5)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV \right] = \iiint_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \iint_{\partial V} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}) dS$$

El término del lado izquierdo de la ecuación (5) puede ser escrito de una forma diferente al escribirse por componentes y utilizando la derivada de Stokes⁶ para introducir la derivación en la integral .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v})_i dV \right] &= \iiint_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v})_i dV \\
 &= \iiint_V \rho \frac{D}{Dt} [\varepsilon_{ijk} x_j v_k] dV \\
 &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \left[\frac{Dx_j}{Dt} v_k + \frac{Dv_k}{Dt} x_j \right] dV \\
 &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \left[v_j v_k + \frac{Dv_k}{Dt} x_j \right] dV \\
 &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} v_j v_k dV + \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \frac{Dv_k}{Dt} x_j dV \\
 &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) dV + \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \frac{Dv_k}{Dt} x_j dV \\
 &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \frac{Dv_k}{Dt} x_j dV \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v})_i dV \right] &= \iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \frac{Dv_k}{Dt} x_j dV
 \end{aligned}$$

⁶ Recordemos que la derivada de Stokes es $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$

Tomando este último resultado, regresamos a la ecuación (5) y usando la definición del tensor de esfuerzos:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \rho \varepsilon_{ijk} \frac{Dv_k}{Dt} x_j dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \iint_{\delta V} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{ik} n_i dS \\
&= \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \varepsilon_{ijk} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} [x_j \tau_{ik}] dV \\
&= \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \iiint_V \varepsilon_{ijk} \left[\delta_{ij} \tau_{ik} + x_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \right] dV \\
&= \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV + \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} dV \\
\Rightarrow \iiint_V \varepsilon_{ijk} \left(\rho \frac{Dv_k}{Dt} x_j \right) dV - \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV - \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV \\
\Rightarrow \iiint_V \varepsilon_{ijk} \left(\rho \frac{Dv_k}{Dt} x_j - x_j f_k - x_j \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} \right) dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV \\
\iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{Dv_k}{Dt} - f_k - \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} \right) dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV \quad (6)
\end{aligned}$$

De nuevo reducimos la derivada material a la derivada temporal parcial con lo que el paréntesis del término del lado izquierdo de la ecuación es igual que cero (la ecuación de movimiento). Así, obtenemos:

$$0 = \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV$$

Y como el volumen V es arbitrario, la ecuación anterior implica:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} + \varepsilon_{ikj} \tau_{kj} &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} &= \varepsilon_{ijk} \tau_{kj} \\ \Rightarrow \tau_{jk} &= \tau_{kj}\end{aligned}$$

D. La Ley Generalizada de Hooke

1. Medio Elástico

Un medio se llama elástico si su energía de deformación depende sólo del estado actual de la deformación y no de la historia de la deformación. Es decir que posee un estado natural (de esfuerzos y deformaciones) al cual el sistema regresa al remover las fuerzas que se le aplican.

2. Ley generalizada de Hooke

Cuando un medio es elástico, las deformaciones que sufre y los esfuerzos a los que está sometido son proporcionales⁷. En otras palabras, cada componente del tensor de esfuerzos es una combinación lineal de todas las componentes del tensor de deformación⁸.

i.e.

$$c_{ijpq} \varepsilon_{pq} = \tau_{ij} \quad (7)$$

⁷ Para un resorte, Hooke presentó la ley $F = -kx$; Para una cuerda la deformación y los esfuerzos están relacionados por medio del módulo de Young, pero en nuestro medio tri-dimensional necesitamos un tensor de cuarto orden para esta relación.

⁸ Se tiene una ecuación tensorial. El tensor de esfuerzos es un tensor de segundo rango. Así que el lado derecho de la ecuación debe ser una reducción de orden del tensor c_{ijpq} . Esto indica que el tensor de deformación debería ser un tensor contravariante. Sin embargo lo escribimos como covariante pues tanto éste como los dos restantes son tensores cartesianos.

El tensor c_{ijpq} es llamado el tensor de elasticidad. Debido a la simetría que posee el tensor de esfuerzos, el número de componentes independientes del tensor de elasticidad se reduce de 81 a 21.

La tierra es un medio anisotrópico (sus propiedades cambian cuando se cambia de orientación), pero puede ser considerado, cuando no se estudian propiedades locales de la corteza, como isotrópico (sus propiedades en cualquier posición son independientes de la orientación). En el caso de los medios isotrópicos, ha sido demostrado (Jeffreys & Jeffreys, 1972) que el tensor de cuarto orden más general que tiene las simetrías exigidas por la isotropía (invariante bajo rotaciones) tiene la forma:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8)$$

λ y μ son conocidas como los parámetros de Lamé. Estos parámetros se relacionan de forma directa con los módulos de compresibilidad volumétrica y rigidez transversal.

Así, sustituyendo en la ecuación (7), tenemos que para un medio isotrópico la ley de Hooke se reduce a:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (9)$$

II. El Teorema de Representación

En el capítulo 1 se dedujo la ecuación de movimiento de una forma especializada para medios elásticos.

$$\rho \ddot{u}_i = \dot{f}_i + \tau_{ij,j} \quad (10)$$

Una ecuación diferencial de segundo grado que se encuentra sujeta a las condiciones de frontera que le imponen, entre otras, la superficie de la tierra. La teoría matemática de las fuentes sísmicas está basada en esta ecuación y en dos teoremas fundamentales relacionados con ella, el teorema de *Unicidad* y el de *Reciprocidad*.

El primero de ellos se explica sólo: la solución de la ecuación de movimiento puede obtenerse de forma única si se conocen: las condiciones iniciales en el desplazamiento y la velocidad y, el desplazamiento o las tracciones o alguna combinación lineal de ambos en la superficie (condiciones de frontera).

El segundo establece que las fuerzas y sus consecuentes desplazamientos elásticos pueden ser intercambiados, si revertimos sus tiempos de aplicación para no entrar en conflicto con la causalidad de los eventos.

Una consecuencia es que la respuesta elástica a cualquier fuerza aplicada puede ser escrita como la superposición de desplazamientos causados por fuerzas puntuales. Este resultado se conoce como el teorema de *Representación*. Surgen entonces fuerzas ficticias como una alternativa matemática para la representación de la fuente sísmica y, el *Tensor de Green*, la respuesta de la tierra a una fuerza puntual dada. Se necesita de un tensor porque se desea relacionar un vector (la fuerza) con otro vector (el desplazamiento).

El cálculo del tensor de Green para modelos realistas de la tierra es uno de los objetivos principales de la sismología teórica. Para esto, tres

métodos principales son utilizados: La teoría del rayo (basada en la óptica geométrica y la óptica física), Sismología de Reflexión y, modos normales de oscilación. Cada método tiene sus ventajas según la aplicación.

A. El Teorema de Unicidad

El primer paso para probar el teorema de unicidad es probar un Lema que nos dice cómo podemos expresar la potencia en términos del desplazamiento, \mathbf{u} , y del tensor de esfuerzos, τ_{ij} .

Lema 1:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \left[\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \right] dV$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \iiint_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \iint_{\delta V} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS \\ &= \iiint_V \left[f_i \dot{u}_i + \left(\tau_{ij} \dot{u}_i \right)_{,j} \right] dV \\ &= \iiint_V \left[\left(\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i - \tau_{ij,j} \dot{u}_i \right) + \left(\tau_{ij,j} \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \right) \right] dV \\ &= \iiint_V \left(\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \right) dV \end{aligned}$$

Teorema 7 (Unicidad):

El campo vectorial $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ para $\mathbf{x} \in V \ni \delta V = S$, sujeto a las condiciones iniciales y de frontera:

- (i) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$; $\mathbf{x} \in \text{int}(V)$,
- (ii) $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$; $\mathbf{x} \in \text{int}(V)$,
- (iii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{x} \in V$, $t \geq t_0$,
- (iv) $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{x} \in S_1 \ni S_1 \cup S_2 = S$, $t \geq t_0$
- (v) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{x} \in S_2$, $t \geq t_0$.

está determinado en forma única después del tiempo t_0 .

Demostración:

Para demostrar unicidad, asumimos que existen dos soluciones diferentes para probar que de hecho deben ser la misma.

Sean \mathbf{u}^1 y \mathbf{u}^2 , soluciones distintas de la ecuación de movimiento bajo las condiciones iniciales y de frontera especificadas por (i)-(v).

Sea $U = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$, tenemos dos casos:

Caso 1: $\mathbf{x} \in \text{int}(V) \cup S_1$.

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{u}}_i^1 = \mathbf{f}_i + \tau_{ij,j} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^2 = \mathbf{f}_i + \tau_{ij,j} \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} \in \text{int}(V) \cup S_1$$

Ahora, recordando que para $\mathbf{x} \in \text{int}(V) \cup S_1$ se cumplen las condiciones de frontera (iii) y (iv), restamos la segunda ecuación de la primera. De lo que se desprende que

$$\ddot{U}_i = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \text{int}(V) \cup S_1. \quad (11)$$

Caso 2: $\mathbf{x} \in S_2$

Consideremos primero una de las simetrías del tensor de elasticidad⁹:

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij} &= c_{ijpq} e_{pq} = \frac{1}{2} c_{ijpq} (u_{p,q} + u_{q,p}) \\
 &= \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{p,q} + \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{q,p} \\
 &= \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{p,q} + \frac{1}{2} c_{ijqp} u_{p,q} \\
 &= \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{p,q} + \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{p,q} \\
 &= c_{ijpq} u_{p,q} \\
 \Rightarrow \tau_{ij} &= c_{ijpq} u_{p,q} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación (12) en la ecuación (10) (ecuación de movimiento) aplicada a \mathbf{u}^1 y \mathbf{u}^2 , obtenemos:

$$\left. \begin{aligned}
 \dots 1 \\
 u_i &= f_i + \left(c_{ijpq} u_{p,q} \right)_{,j} \\
 \dots 2 \\
 u_i &= f_i + \left(c_{ijpq} u_{p,q} \right)_{,j}
 \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in S_2$$

⁹ La simetría $c_{ijpq} = c_{ijqp}$ es una consecuencia de la simetría natural del tensor de deformación, el cual está relacionado con la elongación y no con la rotación.

Nuevamente restamos la segunda ecuación de la primera, así:

$$\begin{aligned}
 \ddot{U}_i &= \left(c_{ijpq} u_{p,q}^1 \right)_{,j} - \left(c_{ijpq} u_{p,q}^2 \right)_{,j} \\
 &= \left(c_{ijpq} u_{p,q}^1 - c_{ijpq} u_{p,q}^2 \right)_{,j} \\
 &= c_{ijpq} \left(u_{p,q}^1 - u_{p,q}^2 \right)_{,j} \\
 &= c_{ijpq} \left[\left(u^1 - u^2 \right)_{,q} \right]_{,j} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\ddot{U}_i = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in S_2. \quad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) nos indican que:

$$\ddot{U}_i = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in V. \quad (14)$$

La ecuación (14) sugiere que el campo del desplazamiento U es provocado por:

- a) Fuerzas de cuerpo $\mathbf{f}^* = 0$, para $\mathbf{x} \in V$,
- b) Fuerzas de tracción $\mathbf{T}^* = 0$, para $\mathbf{x} \in S_1$.

Claramente $U(\mathbf{x},t) = 0$ para $\mathbf{x} \in S_2$ (la condición de frontera (v)). Las tres condiciones anteriores implican que la potencia es cero.

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \mathbf{f}^* \cdot \dot{U} dV + \iint_{S_1} \mathbf{T}^* \cdot \dot{U} dS + \iint_{S_2} \mathbf{T}^* \cdot \dot{U} dS$$

El primer término es cero porque $\mathbf{f}^* = 0$, el segundo término es cero porque $\mathbf{T}^* = 0$ y, el tercero es cero porque $U(\mathbf{x},t) = 0$ y por tanto su derivada también lo es.

Por lo que, utilizando el Lema 1,

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \left[\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \right] dV = 0$$

Ahora integramos la ecuación anterior con respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^t \iiint_V \left[\rho \ddot{u}_i \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \right] dV dt \\ &= \iiint_V \left(\int_{t_0}^t \frac{1}{2} \rho \frac{d(\dot{u}_i)^2}{dt} \right) dV + \iiint_V \left(\int_{t_0}^t \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} dt \right) dV \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_i)^2 dV + \iiint_V \left(\int_{t_0}^t \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} dt \right) dV \quad (15) \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [U_{p,q} U_{i,j}] &= \dot{U}_{p,q} U_{i,j} + U_{p,q} \dot{U}_{i,j} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} [c_{ijpq} U_{p,q} U_{i,j}] &= c_{ijpq} \frac{d}{dt} [U_{p,q} U_{i,j}] \\
 &= c_{ijpq} \dot{U}_{p,q} U_{i,j} + c_{ijpq} U_{p,q} \dot{U}_{i,j} \\
 &= c_{pqij} \dot{U}_{i,j} U_{p,q} + c_{ijpq} U_{p,q} \dot{U}_{i,j} \\
 &= c_{ijpq} \dot{U}_{i,j} U_{p,q} + c_{ijpq} U_{p,q} \dot{U}_{i,j} \\
 &= 2c_{ijpq} \dot{U}_{p,q} U_{i,j} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [c_{ijpq} U_{p,q} U_{i,j}] &= c_{ijpq} \dot{U}_{p,q} U_{i,j} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación (16) en la ecuación (15) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{U}_i)^2 dV + \iiint_V \left(\int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [c_{ijpq} U_{p,q} U_{i,j}] dt \right) dV \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{U}_i)^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V c_{ijpq} U_{p,q} U_{i,j} dV
 \end{aligned}$$

Es claro que el primer término representa la energía cinética y, el segundo la potencial elástica. De hecho, ambas energías son positivo-definidas¹⁰. Por lo que se debe cumplir que ambas son cero para satisfacer la ecuación anterior para todo $t \geq t_0$ y $x \in V$.

¹⁰ Tanto la energía potencial elástica como la cinética resultan de la integración de términos cuadráticos. Por lo que deben ser positivas.

De lo anterior se deduce que $\dot{U}_i = 0$ para $t \geq t_0$ y $\mathbf{x} \in V$. Además, sabemos que $U_i(\mathbf{x}, t_0) = 0$ por lo tanto $U_i(\mathbf{x}, t) = 0$ para $t \geq t_0$ y $\mathbf{x} \in V$.

Así:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ para } t \geq t_0 \text{ y } \mathbf{x} \in V. \\ \Rightarrow \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 &= 0 \text{ para } t \geq t_0 \text{ y } \mathbf{x} \in V. \\ \Rightarrow \mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^2 \text{ para } t \geq t_0 \text{ y } \mathbf{x} \in V. \end{aligned}$$

Es importante insistir en el resultado que acabamos de obtener pues nos afirma que si la ecuación de movimiento especializada para medios elásticos tiene una solución, entonces ésta debe ser única. En otras palabras, el teorema de unicidad nos dice que sin importar el método que utilicemos para resolver la ecuación de movimiento, debemos obtener una solución única. Todas las representaciones son válidas e iguales entre sí siempre que el método para obtenerla sea válido.

B. La Relación de Betti

Otro resultado importante y fundamental es el llamado teorema de reciprocidad. Este teorema depende sólo de la simetría del tensor de esfuerzos y se aplica aún para medios anisotrópicos. Sin embargo, para expresarlo de una forma general para un medio arbitrario, debemos primero probar la relación de Betti y encontrar una forma de representar la reacción de un medio cualquiera para las fuerzas de cuerpo y las de tracción, el teorema de representación y el tensor de Green.

Consideremos el campo del desplazamiento sometido a diferentes cargas (fuerzas):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\text{ sometido a las cargas } \mathbf{T} \text{ en } S \text{ y } \mathbf{f} \text{ en } V \text{ y,} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &\text{ sometido a las cargas } \mathbf{T}^* \text{ en } S \text{ y } \mathbf{g} \text{ en } V. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ij,j}$$

$$\rho \ddot{v}_i = g_i + \tau_{ij,j}^*$$

Teorema 8 (Relación de Betti):

$$\iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV = \iint_{\delta V} (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dS$$

Demostración:

Multiplicando la primera ecuación por v_i y la segunda por u_i y, substrayendo los resultados obtenemos:

$$\rho \left(\ddot{u}_i v_i - \ddot{v}_i u_i \right) = f_i v_i - g_i u_i + \tau_{ij,j} v_i - \tau_{ij,j}^* u_i$$

Ahora integramos en el volumen V y en el tiempo tomando al tiempo t_0 como tiempo de referencia.

$$\int_{t_0}^t \iiint_V \rho (\ddot{u}_i v_i - \ddot{v}_i u_i) dV dt = \int_{t_0}^t \iiint_V (f_i v_i - g_i u_i) dV dt + \int_{t_0}^t \iiint_V (\tau_{ij,j} v_i - \tau_{ij,j}^* u_i) dV dt \quad (17)$$

La integral de volumen de las tracciones (segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se puede escribir:

$$\iiint_V (\tau_{ij,j} v_i - \tau_{ij,j}^* u_i) dV = \iiint_V (\tau_{ij} v_i - \tau_{ij}^* u_i)_{,j} dV - \iiint_V (\tau_{ij,j} e_{ij}^* - \tau_{ij,j}^* e_i) dV$$

Además

$$\begin{aligned} \tau_{ij} e_{ij}^* &= c_{ijpq} e_{ij} e_{ij}^* = c_{pqij} e_{pq} e_{ij}^* = \tau_{pq}^* e_{pq} \\ \Rightarrow \iiint_V (\tau_{ij,j} e_{ij}^* - \tau_{ij,j}^* e_i) dV &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (17) se transforma en:

$$\begin{aligned} \iiint_V \int_{t_0}^t \rho \frac{\partial}{\partial t} (\dot{u}_i v_i - \dot{v}_i u_i) dt dV &= \int_{t_0}^t \iiint_V (f_i v_i - g_i u_i) dV dt + \int_{t_0}^t \iiint_V (\tau_{ij,j} v_i - \tau_{ij,j}^* u_i) dV dt \\ \Rightarrow \iiint_V \rho (\dot{u}_i v_i - \dot{v}_i u_i) \Big|_{t_0}^t dV &= \int_{t_0}^t \iiint_V (f_i v_i - g_i u_i) dV dt + \int_{t_0}^t \iiint_V (\tau_{ij} v_i - \tau_{ij}^* u_i)_{,j} dV dt \\ &= \int_{t_0}^t \iiint_V (f_i v_i - g_i u_i) dV dt + \int_{t_0}^t \iint_{\partial V} (\tau_{ij} n_j v_i - \tau_{ij}^* n_j u_i) dS dt \\ &= \int_{t_0}^t \iiint_V (f_i v_i - g_i u_i) dV dt + \int_{t_0}^t \iint_{\partial V} (T_i v_i - T_i^* u_i) dS dt \quad (18) \end{aligned}$$

Ahora integramos sobre todo el tiempo para obtener el resultado de estado estacionario y asumimos que el medio se encuentra en un estado inicial no-perturbado de equilibrio de tal forma que:

$$\iiint_V \rho (\dot{u}_i v_i - u_i \dot{v}_i) \Big|_{-\infty}^{\infty} dV = 0$$

Finalmente la ecuación (18) toma la forma:

$$\int_{t_0}^t \iiint_V (\mathbf{f}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{g}_i \mathbf{u}_i) dV dt = \int_{t_0}^t \iint_{\delta V} (\mathbf{T}_i^* \mathbf{u}_i - \mathbf{T}_i \mathbf{v}_i) dS dt$$

$$\iiint_V (\mathbf{f}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{g}_i \mathbf{u}_i) dV = \iint_{\delta V} (\mathbf{T}_i^* \mathbf{u}_i - \mathbf{T}_i \mathbf{v}_i) dS$$

$$\iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV = \iint_{\delta V} (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (19)$$

La ecuación (19) es conocida como el teorema de reciprocidad de Betti o simplemente como la relación de Betti. La importancia de esta relación es la siguiente:

Sea \mathbf{u} es el desplazamiento en un punto debido a la fuerza de cuerpo \mathbf{f} aplicada en otro punto. Sea \mathbf{g} otra fuerza de cuerpo paralela a \mathbf{u} y aplicada en el mismo punto en el que \mathbf{u} está siendo medido y, \mathbf{v} el desplazamiento correspondiente a \mathbf{g} en el punto de aplicación de \mathbf{f} . La relación de Betti establece que \mathbf{v} es paralelo a \mathbf{f} . Por lo tanto \mathbf{f} y \mathbf{u} son intercambiables.

La relación de Betti es una parte central de toda la teoría de la fuente sísmica, pero no es suficiente aún para el estudio de la migración sísmica¹¹. Sin embargo es la base fundamental para que, junto con el tensor de Green, se obtenga el teorema de reciprocidad en la forma adecuada para la aplicación de los métodos de migración.

C. El Tensor de Green

Para resolver la ecuación de movimiento para medios continuos seguiremos el camino usual. Esto es, consideraremos un problema auxiliar elemental para el cual \mathbf{f} tiene una forma especial.

Asumimos una fuerza de cuerpo que es aplicada a un punto del cual el vector ξ representa su posición. Sea la variación temporal de \mathbf{f} la función

¹¹ Los métodos de migración son métodos de análisis de datos sísmológicos en el campo de la exploración sísmica. En el capítulo 4 se habla sobre estos métodos.

delta de Dirac (una variación de impulso), aplicada en el tiempo $t = \tau$ y, orientada a lo largo del n -ésimo eje coordenado.

Así la fuerza se puede representar por:

$$f_i = A \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \quad (20)$$

Donde δ_{in} es la delta de Kronecker, las δ 's son funciones delta de Dirac espacial y temporal. A es una constante unitaria con unidades Kgms^{-1} para tener una correcta unidad de \mathbf{f} al multiplicar.

Ahora introducimos la ecuación (20) en la ecuación de movimiento y dividimos la ecuación resultante por A :

$$\rho \left(\frac{1}{A} \ddot{u}_i \right) = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) + \left(c_{ijkl} \left(\frac{1}{A} u_k \right)_{,l} \right)_{,j}$$

Denotamos $\frac{1}{A} u_i(\mathbf{x}, t) = G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$, donde el subíndice n representa la orientación de la fuerza. Así, la ecuación anterior será:

$$\rho \ddot{G}_{in} = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) + \left(c_{ijkl} G_{in,l} \right)_{,j}$$

El término G_{in} , introducido arriba, es el **tensor de Green**. Representa una solución elemental de la ecuación de movimiento para medios continuos. También es conocido como la respuesta del medio al impulso unitario o respuesta elástica del medio.

Tanto el desplazamiento como la fuerza son vectores, por lo tanto una descripción completa de la respuesta del medio a una fuerza puntual impulsiva requiere de un tensor y nos referimos a él como el tensor de Green.

Debido a la causalidad del desplazamiento respecto de la fuerza, el tensor de Green debe cumplir:

$$G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_1, \tau_1) = \frac{\partial G_{in}}{\partial t} = 0, \quad \text{si } t \leq \tau_1; \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}_1 \quad (21)$$

De particular importancia son todos los tensores de Green que satisfacen condiciones homogéneas de frontera: Ya sea el desplazamiento, AG_{in} , o las tracciones, $(c_{ijkl}G_{in,l})_{,j}n_j$ son cero en δV .

D. Un Teorema de Representación

Para poder aplicar la sismología de exploración para investigar la corteza terrestre, necesitamos modelos útiles y efectivos de la fuente generadora de las ondas sísmicas, que son en la sismología el elemento más importante para estos estudios. Al construir estos modelos es importante que los detalles de la radiación elástica distante puedan ser reproducidos. Es menos importante que el modelo represente fielmente el proceso físico que de hecho gobierna el fallamiento cerca de la fuente misma. De hecho, mucho de nuestro conocimiento acerca de la fuente sísmica viene de las observaciones de la radiación elástica distante. En el presente trabajo se emplea un modelo cinemático simple de fallamiento. La dinámica del fallamiento es un área tan importante como difícil de estudiar que lidea con elementos como el fracturamiento del material bajo ciertos esfuerzos y como se propaga la fractura. Para este tipo de aplicaciones de la sismología, exploración sísmica, no es necesario.

Sin embargo, la relación de Betti puede ser utilizada para expresar el desplazamiento como una integral de volumen de las fuerzas de cuerpo e, integrales de superficie de los desplazamientos y de las tracciones.

En la relación de Betti, ecuación (19), consideremos que \mathbf{g} es el impulso unitario, de tal forma que \mathbf{v} es la respuesta elástica del medio. Las tracciones correspondientes son:

$$T_i^G(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = c_{ijkl} \left(AG_{kn,l} \right) n_j \quad (22)$$

\mathbf{f} y \mathbf{u} permanecen generales.

Teorema 9 (Representación):

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) = & \iiint_V f_i(\xi, t) * G_{in}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) dV_\xi + \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_{k,l}(\xi, t) * G_{in}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) n_j dS_\xi \\ & - \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_i(\xi, t) * G_{kn,l}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) n_j dS_\xi \end{aligned}$$

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V [f_i(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, \tau - t) - g_i(\mathbf{x}, \tau - t) u_i(\mathbf{x}, t)] dV dt \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\delta V} (T_i^G(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t), \mathbf{n}) u_i(\mathbf{x}, t) - T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) v_i(\mathbf{x}, \tau - t)) dS dt \\ & \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) dV + \iint_{\delta V} T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) dS \right] dt \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iiint_V \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(\tau - t) u_i(\mathbf{x}, t) dV + \iint_{\delta V} u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijkl} G_{kn,l}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) n_j dS \right] dt \\ & \Rightarrow u_n(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) dV + \iint_{\delta V} T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) dS \right. \\ & \quad \left. - \iint_{\delta V} u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijkl} G_{kn,l}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) n_j dS \right] dt \\ & \Rightarrow u_n(\xi, \tau) = \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) * G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) dV + \iint_{\delta V} T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) * G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) dS \\ & \quad - \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_i(\mathbf{x}, t) * G_{kn,l}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) n_j dS \end{aligned}$$

Para mayor claridad, intercambiamos \mathbf{x} con ξ ¹² para obtener el desplazamiento en el punto \mathbf{x} .

$$\Rightarrow u_n(\mathbf{x}, t) = \iiint_V f_i(\xi, t) * G_{in}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) dV_\xi + \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_{k,l}(\xi, t) * G_{in}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) n_j dS_\xi - \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_i(\xi, t) * G_{kn,j}(\xi, t; \mathbf{x}, 0) n_j dS_\xi \quad (23)$$

La ecuación (23), el teorema de representación, nos permite determinar \mathbf{u} a partir de las fuerzas de cuerpo y, los desplazamientos y tracciones en la superficie. Al igual otros muchos teoremas de representación¹³, nos permite evaluar el campo del desplazamiento para todos los puntos de V a partir de la evaluación de los valores en la frontera δV .

Podemos interpretar a \mathbf{x} como la variable de la fuente sísmica y a ξ como la variable del receptor.

E. El Teorema de Reciprocidad

Supongamos ahora, que una fuerza puntual impulsiva en la dirección m -ésima aplicada en el punto $\mathbf{x} = \xi_1$ y en el tiempo $t = \tau_1$. Esta fuerza puede ser escrita como:

$$f_i = ((\mathbf{x} - \xi_1))((t - \tau_1)) \delta_{im}$$

Aplicamos la relación de Betti a \mathbf{f} con

$$g_i = ((\mathbf{x} - \xi_2))((t - \tau_2)) \delta_{in}$$

¹² Intercambiar \mathbf{x} con ξ supone, por supuesto intercambiar t con τ , lo cual deja la convolución intacta.

¹³ La fórmula integral de Cauchy en Variable Compleja, por ejemplo.

De tal manera que $u_i(\mathbf{x}, t) = G_{im}(\mathbf{x}, t; \xi_1, \tau_1)$ y $v_j(\mathbf{x}, t) = G_{jn}(\mathbf{x}, t; \xi_2, \tau_2)$
Escogemos estas fuerzas de tal forma que cumplan con condiciones de frontera homogéneas.

Teorema 10 (Reciprocidad):

$$G_{mm}(\xi_2, \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mm}(\xi_1, -\tau_1; \xi_2, -\tau_2)$$

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_V [G_{im}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi_1, \tau_1) \delta(\mathbf{x} - \xi_2) \delta(t + \tau_2) \delta_m - G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi_2, -\tau_2) \delta(\mathbf{x} - \xi_1) \delta(t - \tau_1) \delta_m] dV dt$$

Al realizar las integrales obtenemos:

$$G_{mm}(\xi_2, \tau + \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mm}(\xi_1, \tau - \tau_1; \xi_2, -\tau_2)$$

y tomando $\tau = 0$:

$$G_{mm}(\xi_2, \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mm}(\xi_1, -\tau_1; \xi_2, -\tau_2) \quad (24)$$

La ecuación (24) es la formulación matemática del teorema de reciprocidad. El lado izquierdo representa el desplazamiento en dirección n en respuesta a una fuerza en dirección m ; La fuerza se aplica en el punto ξ_1 en el instante τ_1 mientras que el desplazamiento es medido en el punto ξ_2 en el instante τ_2 . El lado derecho representa un desplazamiento en dirección m en respuesta a una fuerza en dirección n (aquella de la fuerza, en el lado izquierdo de la ecuación). La fuerza se aplica en el punto ξ_2 en el instante $-\tau_2$ mientras que el desplazamiento es medido en el punto ξ_1 en el instante $-\tau_1$. El signo negativo de los tiempos aparece debido a la causalidad¹⁴.

¹⁴ Obviamente los desplazamientos deben ser causales con respecto a las fuerzas. Es decir, el desplazamiento aparece debido a la aplicación de una fuerza y por tanto debe ocurrir después de la aplicación de la misma.

Dicho de otra forma, lo que el teorema de reciprocidad establece es que podemos intercambiar la posición del receptor (en donde medimos el desplazamiento) con la de la fuente que provoca los desplazamientos y la respuesta elástica no debe ser afectada. Es decir, podemos migrar las observaciones realizadas en la superficie de la tierra y llevarlas hasta el lugar en donde se originaron y lo único que es significativo en nuestro análisis es el comportamiento de la propagación de la onda sísmica¹⁵. Para esto, introducimos el teorema de reciprocidad en el teorema de representación (ecuación (23)) y el resultado es:

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) = & \iiint_V f_i(\xi, t) * G_{ni}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) dV_\xi + \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_{k,l}(\xi, t) * G_{ni}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) n_j dS_\xi \\
 & - \iint_{\delta V} c_{ijkl} u_i(\xi, t) * G_{nk,l}(\mathbf{x}, t; \xi, 0) n_j dS_\xi \quad (25)
 \end{aligned}$$

La representación (25) reduce la región de integración debido a que la variable de integración, ξ , es ahora la variable de la fuente en el tensor de Green.

¹⁵ Esto, por supuesto, no aplica a los problemas de la teoría de la fuente sísmica. Recordemos que todo el trabajo realizado por el presente autor está enfocado a la propagación de la onda sísmica y en especial a los métodos de migración para los cuales un simple modelo cinemático de la fuente es suficiente.

III. El Operador de Reflexión de Onda Sísmica

Habiendo presentado los conceptos fundamentales, estamos listos para empezar a hablar sobre la propagación de la onda sísmica en el interior de la tierra.

Nos interesan observaciones del movimiento del suelo que son provocadas por fuentes sísmicas que se encuentran a grandes distancias, distancias que llamamos telesísmicas. Los desplazamientos viajan desde la fuente por radiación de las ondas sísmicas. Algunas de estas ondas se atenúan muy poco en su paso a través de la tierra¹⁶.

Las deformaciones del suelo son muy pequeñas a distancias telesísmicas, sin embargo el registro del movimiento del suelo contiene una gran cantidad de información importante acerca de la fuentes sísmicas y, más importante para nuestros propósitos, acerca de la propagación de la onda sísmica dentro de la tierra.

El problema general de la teoría matemática de la elasticidad es la determinación de los esfuerzos y las deformaciones en un cuerpo de forma conocida y sujeto a ciertas condiciones en su frontera.

En el capítulo 2 encontramos que esto puede alcanzarse si conocemos el desplazamiento en una parte de la superficie y las fuerzas de tracción en la otra¹⁷.

Los registros nos proporcionan la información sobre las condiciones de frontera. Sin embargo no hemos establecido técnicas para su estudio. Estamos ahora en la posición en la que es necesario transformar la ecuación

¹⁶ De hecho, se pueden observar algunos trenes de onda que han dado vuelta a la tierra varias veces.

¹⁷ Esto asume, por supuesto, que conocemos las condiciones iniciales del sistema y las fuerzas de cuerpo, tal como está establecido en el teorema de unicidad.

de movimiento de tal forma que podamos resolver estos desplazamientos y esfuerzos. Para esto, la ecuación de movimiento será transformada, en el caso de un medio isotrópico para el cual los parámetros de Lamé poseen una variación espacial muy pequeña. Se producirá una separación en dos ecuaciones, una que gobierna la dilatación y otra que gobierna la rotación. Cada una de ellas es una ecuación de onda. Por lo que el problema será trasladado de la ecuación de movimiento a la ecuación de onda. Una de las técnicas que se utilizan para problemas relacionados con la ecuación de onda y otros problemas hiperbólicos similares, es la factorización de la onda. Esto conduce a la introducción del operador de reflexión, el cual es presentado en este capítulo como una consecuencia natural de la desviación de la velocidad de propagación de la onda de la uniformidad. Esta última consideración es necesaria pues en el interior de la tierra, la velocidad de propagación de la onda sísmica varía con la profundidad medida desde la superficie de la tierra. Por tanto, en sismología, el operador de reflexión de onda sísmica se manifiesta de forma natural como reacción a las heterogeneidades de la tierra.

A. De la Ecuación de Movimiento a la Ecuación de Onda

En esta sección se dividirá la ecuación de movimiento en dos ecuaciones de onda. Como primer paso, debemos probar un teorema que nos permite expresar la divergencia del tensor de esfuerzos de una forma conveniente para la separación. Esto, asumiendo nuevamente que las velocidades son pequeñas para que la derivada de Stokes sea igual a la derivada parcial temporal y, la ecuación 1. Además asumimos un medio isotrópico¹⁸ cuyo tensor de elasticidad tenga variaciones espaciales pequeñas. Es decir, requerimos que los parámetros de Lamé para nuestro medio varíen lentamente en el espacio.

¹⁸ La hipótesis de isotropía perfecta en la tierra es, por supuesto, una aproximación. Afortunadamente, la tierra es casi isotrópica. Si los cristales en una roca cristalina se orientan al azar, una condición de isotropía es alcanzada por volúmenes que contienen muchos cristales.

Teorema 11:

$$\tau_{ij,j} = [(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}]_i$$

Demostración:

La ecuación (9) describe el tensor de esfuerzos para medios isotrópicos.

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Su divergencia será:

$$\tau_{ij,j} = (\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij})_{,j}$$

$$\tau_{ij,j} = (\lambda e_{kk}\delta_{ij})_{,j} + 2(\mu e_{ij})_{,j}$$

$$\tau_{ij,j} = (\lambda(u_{k,k}))_{,i} + 2\mu_{,j}e_{ij} + 2\mu e_{ij,j}$$

$$\tau_{ij,j} = \lambda_{,i}(u_{k,k}) + \lambda(u_{k,k})_{,i} + 2\mu_{,j}e_{ij} + \mu(u_{i,j})_{,j} + \mu(u_{j,i})_{,j}$$

$$\tau_{ij,j} = \lambda_{,i}(u_{k,k}) + \lambda(u_{k,k})_{,i} + 2\mu_{,j}e_{ij} + \mu(u_{i,j})_{,j} + \mu(u_{j,i})_{,i}$$

$$\tau_{ij,j} = [\lambda\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]_i + [(\nabla \cdot \mathbf{u})\nabla\lambda + 2\nabla\mu \cdot \mathbf{e}]_i$$

En la última ecuación se utilizó la notación $\nabla\mu \cdot \mathbf{e}$ para denotar la contracción de \mathbf{e} con $\nabla\mu$. Esta notación no presenta ambigüedad debido a la simetría de \mathbf{e} .

Ahora utilizamos la restricción impuesta sobre los parámetros de Lamé y despreciamos los términos que incluyen los gradientes de estos parámetros.

$$\tau_{ij,j} = [\lambda\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]_i + o(\nabla\lambda) + o(\nabla\mu)$$

$$\tau_{ij,j} = [(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}]_i \quad (26)$$

La ecuación (26) puede ahora introducirse en la ecuación de movimiento. En esta última, se encuentra presente un término que representa las fuerzas de cuerpo. Para la tierra, las únicas fuerzas de cuerpo que deben ser incluidas son las fuerzas gravitatorias. Es decir, las grandes presiones hidrostáticas.

Nuestro principal objetivo es investigar los desplazamientos asociados con perturbaciones sismológicas. El principio de superposición nos indica que podemos estudiar el desplazamiento inducido por cada perturbación y luego el desplazamiento total será una combinación lineal de éstos. Por lo tanto, no consideraremos el término de las fuerzas de cuerpo.

Teorema 12:

Sea $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$, entonces

$$\rho \ddot{\theta} = (\lambda + 2\mu)\Delta\theta$$

Demostración:

Introducimos la ecuación (26) en la ecuación de movimiento para obtener:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= [(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}]_i \\ \Rightarrow \rho \ddot{\mathbf{u}} &= (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} \end{aligned}$$

Utilizamos la identidad vectorial:

$$\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

y obtenemos:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (27)$$

Ahora, tomamos la divergencia de ambos lados de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\rho \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla \cdot [(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] - \nabla \cdot [\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}] \\
\Rightarrow \rho \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla(\lambda + 2\mu) \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \mu \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \mu \nabla \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \\
&\Rightarrow \rho \ddot{\theta} = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \theta + \alpha(\nabla \lambda) + o(\nabla \mu) \\
&\Rightarrow \rho \ddot{\theta} = (\lambda + 2\mu) \Delta \theta \quad (28)
\end{aligned}$$

En donde, nuevamente, despreciamos los términos que involucran la variación espacial de los parámetros de Lamé. También se hizo uso de la identidad vectorial que establece que la divergencia de un campo rotacional es cero.

La ecuación (27) es una ecuación de onda donde la perturbación, θ , se propaga con una velocidad igual a:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Teorema 13:

Sea $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, entonces

$$\rho \ddot{\omega} = \mu \Delta \omega$$

Demostración:

Se procede de manera similar que en la demostración anterior, con la diferencia de que en lugar de tomar la divergencia, tomamos el rotacional de ambos lados de la ecuación (27) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\rho \nabla \times \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla \times [(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] - \nabla \times [\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}] \\
\Rightarrow \rho \ddot{\omega} &= \nabla(\lambda + 2\mu) \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \mu \times \nabla \times \omega - \mu \nabla \times \nabla \times \omega \\
&\Rightarrow \rho \ddot{\omega} = -\mu \nabla \times \nabla \times \omega + \alpha(\nabla \lambda) + \alpha(\nabla \mu) \\
&\Rightarrow \rho \ddot{\omega} = \Delta \omega + \nabla(\nabla \cdot \omega) + \alpha(\nabla \lambda) + o(\nabla \mu) \\
&\Rightarrow \rho \ddot{\omega} = \mu \Delta \omega \quad (29)
\end{aligned}$$

La ecuación (29) es otra ecuación de onda en la cual, la nueva perturbación, ω , viaja con una velocidad igual a:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

B. Los Potenciales Elastodinámicos

Es una práctica común en muchas aplicaciones de la física, por ejemplo en electrodinámica, el separar una cantidad vectorial en un campo escalar y un campo vectorial.

Para explicar los modelos de la realidad, es útil hacer dicha separación. Por tanto, escribimos el desplazamiento como:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi ; \text{ Con } \nabla \cdot \Psi \quad (30)$$

Φ y Ψ son llamados los potenciales elastodinámicos.

Si introducimos la ecuación (30) en θ tenemos que:

$$\theta = \Delta\Phi.$$

De esta forma, es claro que la contribución al desplazamiento del potencial escalar envuelve sólo dilatación. Es una onda que se propaga, con velocidad $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, produciendo desplazamientos sólo en la dirección de propagación. Esta onda se conoce como *Onda Primaria* o simplemente onda P.

Si ahora introducimos la ecuación (30) en ω , tenemos que:

$$\omega = -\Delta\Psi .$$

También está claro que la contribución del potencial vectorial envuelve sólo rotación. Es una onda que se propaga, con velocidad $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, produciendo desplazamientos en las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación. Esta onda se conoce como *Onda Secundaria* o simplemente onda S.

$\alpha > \beta$, lo que indica que las perturbaciones longitudinales, onda P, viajan más rápido que las perturbaciones transversales, onda S.

C. La Factorización en una dimensión

Para estudiar el desplazamiento inducido por perturbaciones sísmológicas, podemos estudiar los desplazamientos correspondientes a los potenciales elastodinámicos. Esto quiere decir que el problema de resolver el desplazamiento a partir de la ecuación de movimiento se ha transformado a resolver la ecuación de onda.

Una de las técnicas que se ha utilizado para problemas relacionados con la ecuación de onda para medios no homogéneos se basa en la factorización de la onda.

En el caso lineal de la ecuación de onda en una dimensión, la factorización de la onda reduce la ecuación de onda a un sistema acoplado de dos ecuaciones de primer grado.

A manera de ejemplo, la factorización de la ecuación de onda en una dimensión:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, t) = \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z, t)$$

puede obtenerse al re-escribir la ecuación anterior de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\left(\frac{1}{c}\right) \partial_t\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

Si ahora definimos las componentes:

$$\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\left(\left(\frac{1}{c}\right)\partial_t\right)^{-1} \\ 1 & \left(\left(\frac{1}{c}\right)\partial_t\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_z \end{bmatrix},$$

donde

$$\partial_t^{-1}v = \int_0^t v(z, \tau) d\tau$$

Expresado en términos de las componentes ϕ^+ y ϕ^- , el sistema (31) toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c}\partial_t & -\frac{c_z}{2c} \\ -\frac{c_z}{2c} & \frac{1}{c}\partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} \quad (32)$$

Como se puede apreciar, en el caso en el que la velocidad, c , es constante, el sistema se desacopla y las componentes toman la forma:

$$\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z-t) \\ f(z+t) \end{bmatrix}.$$

En este caso, ϕ^+ y ϕ^- son las soluciones conocidas para la ecuación de onda en el caso unidimensional más simple.

En sismología, las variaciones de la velocidad de onda con la profundidad son predominantes. De tal suerte que la coordenada z será asignada a la profundidad, medida desde la superficie de la tierra. Por esta razón, las componentes ϕ^+ y ϕ^- serán denominadas: la onda ascendente y la onda descendente, respectivamente.

Sin embargo, la velocidad de las ondas depende de los parámetros de Lamé para medios isotrópicos. Se ha comprobado experimentalmente que

la velocidad de la onda sísmica (ambos tipos, P y S), aumenta con la profundidad.

Por lo tanto, el modelo simple de velocidad constante no es aplicable a la propagación de la onda sísmica.

D. Introducción del Operador de Reflexión de Onda Sísmica

Una alternativa para medios heterogéneos, es deducir el comportamiento de los llamados *operadores de reflexión de onda sísmica*, los cuales nos brindan una conexión entre los potenciales de la onda ascendente y la onda descendente y las propiedades del medio en el borde de la discontinuidad en la que la onda sísmica es reflejada.

Para introducir al operador de reflexión de onda sísmica, tomemos el caso particular de la descomposición que conduce al sistema (32).

Sea R el operador de reflexión de onda sísmica para el sistema (32), de tal forma que:

$$\phi^- = \mathbf{R} \phi^+ = \int_0^t R(z, t-s) \phi^+(z, s) ds$$

Llamamos el Kernel del operador \mathbf{R} a R en la ecuación anterior.

Para que el sistema (32) sea satisfecho por ϕ^- así definido, el Kernel debe satisfacer:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(z, t) - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} R(z, t) - \frac{c_z}{2c} R * R = 0$$

$$R(z, 0^+) = \frac{1}{4} c_z$$

El concepto de la factorización de la ecuación de onda y el operador de reflexión asociado han sido usados extensamente para una gran variedad de problemas de una dimensión. Entre ellas el problema electromagnético inverso para medios dispersivos, el problema inverso de medios

viscoelásticos y, el problema inverso de medios elásticos con incidencia oblicua.

En el presente trabajo se examinan las ondas ascendente y descendente para el caso tridimensional.

El Principio de Huygens es usado esencialmente para definir las ondas ascendente y descendente. Esto conduce a la introducción de un operador, que aquí llamaremos el operador de reflexión de onda sísmica.

La introducción de este operador nos permite desarrollar una relación lineal entre el desplazamiento y su derivada con respecto a la profundidad, la variación significativa en sismología, en un plano ($z=\text{constante}$) que envuelve al operador en cuestión.

Con la escogencia adecuada del signo, esta relación lineal especifica si la onda es ascendente o descendente en el plano.

Es necesario notar que la factorización de la ecuación de onda es un proceso distinto a la descomposición de los desplazamientos debidos a una perturbación sísmica. El desplazamiento puede ser descompuesto de acuerdo con un potencial escalar y uno vectorial. Los desplazamientos resultante son la onda P y la onda S. Cada una es una perturbación que viaja por el interior de la tierra con una velocidad distinta a la otra.

La factorización de la onda sísmica aplica tanto para la onda P como para la onda S, puesto que ambos tipos de perturbaciones cumplen con la ecuación de onda. Esto si nos limitamos a medios isotrópicos en los que los parámetros de Lamé varían suavemente con la posición¹⁹.

De esta manera, la utilización del operador de reflexión de onda sísmica será útil para el modelaje de la estructura de la corteza terrestre en los casos mencionados.

¹⁹ Recordemos que una condición necesaria para que las perturbaciones, tanto longitudinal como transversal, cumplan con la ecuación de onda es que los gradientes de los parámetros de Lamé sean despreciables.

IV. La Factorización de la Onda Sísmica

Una de la técnicas que está desarrollándose fuertemente para problemas directos e inversos dependientes del tiempo asociados con la ecuación de onda para medios no homogéneos, está basada en factorizar la ecuación de onda. Por factorización de la ecuación de onda debemos entender la descomposición de $u(z,t)$ en ondas ascendentes (en el sentido positivo de z) y ondas descendentes (en el sentido negativo de z).

Para estudiar problemas que relacionan la estructura de la corteza terrestre en forma local, podemos considerar a la corteza como un medio elástico estratificado. Es decir que está compuesto de varias capas, en cada una de ellas la velocidad de la onda sísmica (ya sea la transversal o la longitudinal) es constante. Es por esto que aquí se presenta la factorización de la ecuación de la onda sísmica para el caso de medios estratificados.

Es necesario resolver la ecuación de onda para estudiar la estructura de la corteza. Para esto el operador de reflexión de onda nos proporciona una forma para describir las propiedades de los planos de las discontinuidades en los cuales la onda sísmica se refleja. Por tanto, al obtener el operador de reflexión para cierto plano, físicamente estamos describiendo las propiedades del reflector de la onda sísmica. Esta técnica es muy útil para analizar datos sísmicos.

Este tipo de análisis de los datos sísmicos, es conocido como *migración sísmica*. Así, la migración sísmica puede verse como una solución a la ecuación de la onda sísmica en la cual observaciones sísmicas en la superficie son valores conocidos de frontera.

Desde el punto de vista de un ingeniero o un geólogo, la migración puede verse como una operación que transforma datos recopilados en la superficie de la tierra a datos recopilados en una superficie hipotética más profunda.

A. El Caso de la Velocidad Constante

Sea $u(x,y,z,t)$ una solución de la ecuación de onda con velocidad constante $c=c_0$. Una relación entre u y u_z será establecida sobre un plano con vector normal en la dirección de z . Sin pérdida de generalidad, tomamos el plano $z=0$. Por lo tanto, las ondas ascendentes, en el plano $z=0$, quedan definidas como aquellas que son generadas por fuentes sísmicas en la región $z < 0$. Esto se hace para considerar un espacio ($z \geq 0$) sin fuentes sísmicas²⁰. Correspondientemente, ondas descendentes serán aquellas generadas en la región $z > 0$. Una relación entre las ondas ascendente y descendente en el plano $z = 0$ puede ser establecida considerando las condiciones iniciales y de frontera apropiadas.

Para alcanzar esto, necesitamos probar el siguiente Lema.

Lema 2:

La solución para el problema:

$$(i) \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, z > 0,$$

$$(ii) \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}_t(x, y, z, 0) = 0, \quad z \geq 0,$$

$$(iii) \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} (x, y, z, t) \right|_{z=0} = \mathbf{v}(x, y, t), \quad t \geq 0,$$

Donde \mathbf{v} es continua en $\mathfrak{R}^2 \times [0, \infty)$,

con $\mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{v}_t(x, y, 0) = 0$.

²⁰ Para que los desplazamientos cumplan la ecuación de onda en todo el espacio, necesitamos que la fuente no esté presente. Esto porque en la fuente, la ecuación de movimiento no es válida. Esto se debe a que en estos puntos, las tracciones son discontinuas. Así como los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Está dada por :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D(x, y, \sigma)} \mathbf{v}(x', y', t - r/c_0) dx' dy' \quad (33)$$

Donde $D(x, y, \sigma)$ representa el disco con centro en (x, y) y radio σ .

$$\sigma = (c_0^2 t^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

y

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 \quad (35)$$

La solución se hace cero para $z > c_0 t$.

Demostración:

Claramente, para x' y y' , $\mathbf{v}(x', y', t - r/c_0)/r$ satisface la ecuación de onda para todos los puntos (x, y, z) tales que $r \neq 0$. Por lo que la ecuación (33) satisface la ecuación de onda.

Las condiciones iniciales son fácilmente establecidas usando la condición $\mathbf{v} = 0$ en $t = 0$.

La condición de frontera se establece usando la condición de salto de la derivada normal.

Lema 3:

Las condiciones de onda ascendente y onda descendente en el plano $z = 0$ está dada por:

$$\mathbf{u} = \pm \kappa \mathbf{u}_z \quad (36)$$

Donde el operador κ está definido como:

$$\kappa \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \iint_{D(x, y; c_0 t)} \frac{\mathbf{v}(x', y', t - R/c_0)}{R} dx' dy'$$

Los signos positivo y negativo se refieren a la onda ascendente y descendente, respectivamente.

Queremos mostrar ahora que la condición (36) puede ser expresada de la forma $\kappa^{-1}\mathbf{v} = \pm\mathbf{u}_z$. Para esto es necesario mostrar el siguiente lema.

Lema 4:

La solución para el problema:

$$(i) \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, z > 0,$$

$$(ii) \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}_t(x, y, z, 0) = 0, \quad z \geq 0,$$

$$(iii) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(x, y, 0, t) = \mathbf{w}(x, y, t), \quad t \geq 0,$$

Donde \mathbf{w} es continua en $\mathfrak{R}^2 \times [0, \infty)$,

con $\mathbf{w}(x, y, 0) = \mathbf{w}_t(x, y, 0) = 0$.

Está dada por :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D(x, y, \sigma)} \left\{ \mathbf{w}(x', y', t - r/c_0) + \frac{r}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(x', y', t - r/c_0) \right\} \frac{z}{r^3} dx' dy' \quad (37)$$

La solución se hace cero para $z > c_0$ y σ está dado por (34).

Demostración:

Claramente, para x' y y' , $(\partial/\partial z)\{\mathbf{w}(x', y', t-r/c_0)/r\}$ satisface la ecuación de onda para todos los puntos (x, y, z) tales que $r \neq 0$. Por lo que el integrando en la expresión anterior satisface la ecuación de onda para $z > 0$.

Las condiciones en \mathbf{w} en $t = 0$ aseguran que no hay contribución de los límites de la integral cuando la ecuación (37) se introduce en la ecuación de onda. Al mismo tiempo, estas condiciones aseguran que las condiciones iniciales son satisfechas.

La condición de frontera se establece usando la condición de salto de la derivada normal.

La relación (37) puede ser usada ahora para obtener la forma alternativa de la onda ascendente. Primero, $\mathbf{w}(x, y, t)$ se reemplaza por la función $C^2: \mathbf{u}(x, y, 0, t)$ y, después en la expresión resultante para $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, el orden de integración y derivación se intercambia para obtener para $z > 0$:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{D(x, y, \sigma)} \frac{\mathbf{u}(x', y', 0, t - r/c_0)}{r} dx' dy' \quad (38)$$

Con $\sigma = (c_0^2 t^2 - z^2)^{1/2}$.

Como es fácil verificar, la integral (38) es una solución de la ecuación de onda para $z > 0$ (usando $\mathbf{u}(x, y, 0, 0) = 0$, $\mathbf{u}_t(x, y, 0, 0) = 0$), tenemos que:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(x, y, z, t) = -\Theta \frac{1}{2\pi} \iint_{D(x, y, \sigma)} \frac{\mathbf{u}(x', y', 0, t - r/c_0)}{r} dx' dy' \quad (39)$$

Donde

$$\Theta = \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Así, al tomar el límite $z \rightarrow 0^+$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(x, y, 0, t) = \Theta \kappa \mathbf{u} \quad (40)$$

De la ecuación (36) y la ecuación (40) concluimos que:

$$\kappa^{-1} = \Theta \kappa \quad (41)$$

Un resultado similar se obtiene para las ondas descendentes.

Aplicando la ecuación (36) a cualquier plano con $z = \text{const.}$, descomponemos la solución de la ecuación de onda $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ en términos de las ondas ascendente y descendente. Partimos de la siguiente identidad:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} + \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} - \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right),$$

Así, el desplazamiento puede ser descompuesto en:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}^+(x, y, z, t) + \mathbf{u}^-(x, y, z, t) \quad (42)$$

Donde

$$\mathbf{u}^\pm(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} \pm \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)$$

Se puede ver fácilmente que $\mathbf{u}^+(x, y, z, t)$ representa la onda ascendente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ - \kappa \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} + \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{u} + \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{u} + \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \kappa \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{1}{2} \kappa^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \kappa^2 \Theta \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \kappa \kappa^{-1} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que \mathbf{u}^+ satisface la condición de la onda ascendente (ecuación (36), tomando el signo positivo).

De manera análoga, se muestra que \mathbf{u}^- satisface la condición de la onda descendente (ecuación (36), tomando el signo negativo).

B. Medios Estratificados

La descomposición ascendente y descendente será aplicada a la factorización de la ecuación de onda para un medio estratificado. Usando el procedimiento inicial presentado para el caso uno dimensional (espacial),

donde \mathbf{u} es una función sólo de z y de t . La ecuación de onda será escrita entonces de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (43)$$

La descomposición ascendente y descendente de la onda, (42), será expresada en forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde Ξ es el operador matricial

$$\Xi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 1 & -\kappa \end{bmatrix} \quad (45)$$

cuya inversa está dada por :

$$\Xi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \kappa^{-1} & -\kappa^{-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Introducimos ahora la relación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \Xi^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix}$$

En la ecuación (43) y multiplicamos la ecuación resultante por el operador matricial (45) y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \Xi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Theta & 0 \end{bmatrix} \Xi^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} - \Xi \frac{\partial \Xi^{-1}}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} \quad (47)$$

Se puede concluir de las ecuaciones (45) y (46) que:

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Theta & 0 \end{bmatrix} \mathbb{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\kappa^{-1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

y

$$\mathbb{E} \frac{\partial \mathbb{E}^{-1}}{\partial z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \kappa \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} \quad (49)$$

Con las ecuaciones anteriores y recordando que $\kappa\kappa^{-1} = I$, se tiene que, \mathbf{w} como se presenta a continuación, se hace cero en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} \mathbf{w} &= -\frac{\partial \kappa}{\partial z} \kappa^{-1} \mathbf{w} = -\frac{\partial \kappa}{\partial z} \kappa \Theta \mathbf{w} \\ \Rightarrow \kappa \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} \mathbf{w} &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial c}{\partial z} \left\{ t \kappa^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \Theta \mathbf{w} \right) - \kappa^2 \left(t \frac{\partial}{\partial t} \Theta \mathbf{w} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial c}{\partial z} \left\{ t \kappa^2 \Theta \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \kappa^2 \left(\Theta t \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - 2 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \kappa^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) \\ \Rightarrow \kappa \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} \mathbf{w} &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \kappa^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) \quad (50) \end{aligned}$$

Pero utilizando la relación:

$$\begin{aligned} \kappa^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) &= \kappa^2 \left[\Theta \mathbf{w} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{w} \right] \\ &= \mathbf{w} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \kappa^2 \mathbf{w} \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\kappa \left(\frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} \right) \mathbf{w} = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \left[\mathbf{w} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \kappa^2 \mathbf{w} \right] \quad (50)$$

El sistema de la ecuación (47) puede ahora ser expresado en una forma explícita utilizando las ecuaciones (48)-(50) de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\kappa^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} - \frac{1}{2c} c_z \begin{bmatrix} (1+\Lambda) & -(1+\Lambda) \\ -(1+\Lambda) & (1+\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{bmatrix} \quad (51)$$

Donde Λ es el operador :

$$\Lambda \mathbf{w} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \kappa^2 \mathbf{w}$$

Algunas simplificaciones pueden ser obtenidas si, al igual que en el caso unidimensional, utilizamos las componentes ϕ^\pm :

$$\mathbf{u}^\pm = c^{1/2} \phi^\pm.$$

Con el sistema (51) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\kappa^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2c} c_z \begin{bmatrix} \Lambda & -(1+\Lambda) \\ -(1+\Lambda) & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} \quad (52)$$

El sistema (52) puede utilizarse para derivar el operador de reflexión y sus propiedades.

C. El Operador de Reflexión de Onda Sísmica

En esta sección, el operador de reflexión (que relaciona la onda ascendente y la onda descendente), definido en la sección 3.3 para el caso unidimensional, será generalizado para el caso multidimensional. En particular, la ecuación y las condiciones iniciales que debe satisfacer el kernel del operador de reflexión serán propuestos.

Para el caso multidimensional, el operador de reflexión toma la forma²¹:

$$\phi^-(x, y, z, t) = \mathbb{R}\phi^+ = (I + \Lambda)\mathbb{R} * \phi^+ \quad (53)$$

Donde Λ es el operador dado por la ecuación (51)

y $\mathbb{R} * \phi^+$ es la convolución :

$$\mathbb{R} * \phi^+ = \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^2} R(x-x', y-y', z, t-s) \phi^+(x', y', z, s) dx' dy' ds \quad (54)$$

$R(x, y, z, t)$ es el kernel del operador de reflexión.

Para lograr esto, varias identidades deben ser probadas, entre ellas la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z} [(I + \Lambda)\psi] = (I + \Lambda) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{c_z}{c} \Lambda \psi \right], t > 0. \quad (55)$$

Donde $\Psi(x, y, z, t)$ es una función suficientemente suave tal que

$$\Psi = \Psi_t = 0 \text{ en } t=0.$$

Para obtener la expresión (55), la relación²²:

$$\Theta \kappa^2 \chi = \chi(x, y, z, t), t > 0$$

con $\chi(x, y, z, t)$ tal que $\chi = \chi_t = 0$ en $t = 0$, se deriva con respecto a z , dando como resultado:

$$-2 \frac{c_z}{c} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \kappa^2 \chi \right) + \Theta \left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa^2 \right) \chi = 0.$$

²¹ La razón de que el operador de reflexión tome esa forma aparecerá más tarde.

²² Esta ecuación es válida en virtud de la ecuación (41).

Usando la ecuación (41) y de la ecuación (51), lo anterior se reduce a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa^2\right) \chi = 2 \frac{c_z}{c} \kappa^2 (I + \Lambda) \chi$$

Usando la ecuación anterior puede verse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda \psi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa^2 \right) \psi + \Lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \Lambda \left\{ \frac{2c_z}{c} (I + \Lambda) \psi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \end{aligned}$$

La identidad (55) es una consecuencia directa de la ecuación anterior.

El próximo resultado necesario es el siguiente lema.

Lema 5:

La única solución $C^2(\mathcal{R}^3)(C^2[0, \infty))$, $\Psi(x, y, z, t)$ del sistema:

$$(I + \Lambda)\Psi = 0, \quad t > 0. \quad (56)$$

Es la solución trivial.

Demostración:

La ecuación (56) puede ser escrita de la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\kappa^2 \psi) = 0$$

Pues $\Psi = \Theta \kappa^2 \Psi$.

Como $\kappa^2 \Psi$, $\frac{\partial}{\partial t} (\kappa^2 \Psi)$ se hacen cero en $t = 0$, se debe cumplir que

$$\kappa^2 \Psi = 0, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Aplicamos a esta última el operador Θ y, haciendo uso de la ecuación (41) obtenemos que Ψ debe ser la solución trivial para $t \geq 0$.

Con esto en mano, procederemos a obtener una ecuación para el operador de reflexión de onda sísmica. Para hacer esto más fácil, escribiremos el sistema (44) en forma explícita. Así, dicho sistema toma la forma:

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial z} = \left\{ \kappa^{-1} + \frac{c_z}{2c} \Lambda \right\} \phi^+ - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^-, \quad (57)$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial z} = \left\{ -\kappa^{-1} + \frac{c_z}{2c} \Lambda \right\} \phi^- - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^+. \quad (58)$$

Recordemos ahora que, en el caso de la ecuación de onda sísmica, debemos asumir que los potenciales elastodinámicos son funciones suficientemente suaves y esto implica que la componente ϕ^+ sea también una función suficientemente suave tal que $\phi^+ = \phi^+_{,z} = 0$ en $t = 0$. Es evidente que tanto $R^* \phi^+$ como $(\partial/\partial t)R^* \phi^+$ se hacen cero en $t = 0$. Por lo que :

$$\begin{aligned} \kappa^{-1}(I + \Lambda)(R^* \phi^+) &= \kappa^{-1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \kappa^2 (R^* \phi^+) \\ &= \kappa \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (R^* \phi^+) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \kappa (R^* \phi^+) \\ &= (I + \Lambda) \kappa^{-1} (R^* \phi^+) \end{aligned}$$

Ahora, para la componente ϕ^- , introducimos la ecuación (53) en la ecuación (58) y empleamos la relación (55) junto con la conmutatividad de los operadores mostrada arriba. y obtenemos:

$$\begin{aligned}
(I + \Lambda) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (R * \phi^+) + \frac{2c_z}{c} \Lambda (R * \phi^+) \right] &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [(I + \Lambda)(R * \phi^+)] \\
&= \left\{ -\kappa^{-1} + \frac{c_z}{2c} \Lambda \right\} \phi^- - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^+ \\
&= \left\{ -\kappa^{-1} + \frac{c_z}{2c} \Lambda \right\} (I + \Lambda)(R * \phi^+) - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^+ \\
\Rightarrow (I + \Lambda) \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (R * \phi^+) + \left(\kappa^{-1} + \frac{3c_z}{2c} \Lambda \right) (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^+ \right\} &= 0
\end{aligned}$$

Ahora usamos el lema 5 para obtener la siguiente ecuación:

$$R_z * \phi^+ + R * \phi_z^+ + \left(\kappa^{-1} + \frac{3c_z}{2c} \Lambda \right) (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) \phi^+ = 0 \quad (59)$$

Introduciendo la ecuación (57) en la ecuación (59) obtenemos:

$$\begin{aligned}
R_z * \phi^+ + R * \left(\kappa^{-1} \phi^+ + \frac{c_z}{2c} \Lambda \phi^+ \right) - \frac{c_z}{2c} R * (I + \Lambda)^2 (R * \phi^+) \\
+ \left(\kappa^{-1} + \frac{3c_z}{2c} \Lambda \right) (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} \phi^+ = 0 \quad (60)
\end{aligned}$$

Ahora utilizamos algunas propiedades básicas de la convolución²³, de la forma que se definió en la ecuación (54), para reducir la expresión (60). Así, obtenemos:

23 Más específicamente utilizaremos las siguientes propiedades:

a) $f * (\kappa^p g) = (\kappa^p f) * g = \kappa^p (f * g)$, $p = 1, 2$

b) $f * (\partial^2 g / \partial x^2) = (\partial^2 f / \partial x^2) * g = \partial^2 (f * g) / \partial x^2$.

c) $\partial^2 (f * g) / \partial t^2 - (\partial^2 f / \partial t^2) * g = f * (\partial^2 g / \partial x^2) - (\partial^2 f / \partial x^2) * g = \iint_{\mathbb{R}^2} f_t(x - x', y - y', 0) g(x', y', t) dx' dy'$.

válida para las funciones f y g tales que en $t = 0$, $f = g = \partial g / \partial t = 0$.

Que pueden verificarse en cualquier libro que contenga el tema de convolución.

$$\begin{aligned}
& R_z * \phi^+ + R * \left(\kappa^{-1} \phi^+ + \frac{c_z}{2c} \Lambda \phi^+ \right) - \frac{c_z}{2c} R * (I + \Lambda)^2 (R * \phi^+) \\
& \quad + \left(\kappa^{-1} + \frac{3c_z}{2c} \Lambda \right) (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} \phi^+ = 0 \\
\Rightarrow & R_z * \phi^+ + R * (\kappa^{-1} \phi^+) + R * \left(\frac{c_z}{2c} \Lambda \phi^+ \right) - \frac{c_z}{2c} R * (I + \Lambda)^2 (R * \phi^+) \\
& \quad + \left(\kappa^{-1} + \frac{3c_z}{2c} \Lambda \right) (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} \phi^+ = 0 \\
\Rightarrow & R_z * \phi^+ + 2R * (\kappa^{-1} \phi^+) - \frac{2}{c} \iint_{\mathbb{R}^2} R(x-x', y-y', z, 0) \phi^+(x', y', z, t) dx' dy' \\
& \quad + 2 \frac{c_z}{c} \Lambda (R * \phi^+) + \frac{c_z}{2c} \phi^+ - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) R * (I + \Lambda) R * \phi^+ = 0 \\
\Rightarrow & R_z * \phi^+ + 2(\kappa^{-1} R) * \phi^+ - \frac{2}{c} \iint_{\mathbb{R}^2} R(x-x', y-y', z, 0) \phi^+(x', y', z, t) dx' dy' \\
& \quad + \left(2 \frac{c_z}{c} \Lambda R \right) * \phi^+ + \frac{c_z}{2c} \phi^+ - \frac{c_z}{2c} [(I + \Lambda) R * (I + \Lambda) R] * \phi^+ = 0 \\
\Rightarrow & \left[R_z + 2(\kappa^{-1} R) + \left(2 \frac{c_z}{c} \Lambda R \right) - \frac{c_z}{2c} [(I + \Lambda) R * (I + \Lambda) R] \right] * \phi^+ \\
& \quad + \frac{c_z}{2c} \phi^+ - \frac{2}{c} \iint_{\mathbb{R}^2} R(x-x', y-y', z, 0) \phi^+(x', y', z, t) dx' dy' = 0
\end{aligned}$$

Sea $\Gamma R = R_z + 2\kappa^{-1} R + 2 \left(\frac{c_z}{c} \right) \Lambda R - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) R * (I + \Lambda) R$, entonces la ecuación anterior se escribe en forma más breve como:

$$(\Gamma R) * \phi^+ + \frac{c_z}{2c} \phi^+ - \frac{2}{c} \iint_{\mathbb{R}^2} R(x-x', y-y', z, 0) \phi^+(x', y', z, t) dx' dy' = 0 \quad (61)$$

Ahora, imponemos la condición inicial siguiente en el Kernel del operador de reflexión de la onda sísmica, R:

$$R(x, y, z, 0) = \frac{c_z}{4} \delta(x) \delta(y) \quad (62)$$

Con lo anterior, la ecuación (61) se reduce a:

$$(\Gamma R)^* \phi^+ = 0$$

Como ϕ^+ es una función arbitrariamente suave, puede ser tratada como una función de prueba tal que $\phi^+ = \phi^+_t = 0$. Esto nos proporciona la ecuación para el Kernel del operador de reflexión de la onda sísmica:

$$\frac{\partial R}{\partial z} + 2 \left(\kappa^{-1} + \left(\frac{c_z}{c} \right) \Lambda \right) R - \frac{c_z}{2c} (I + \Lambda) R^* (I + \Lambda) R = 0 \quad (63)$$

La ecuación (63) y la condición inicial (62) constituyen el sistema que debe satisfacer el operador de reflexión de onda sísmica. Como se puede apreciar, la forma del sistema es una generalización del caso unidimensional²⁴.

²⁴ El caso unidimensional fue presentado en la sección 3.3 para introducir al operador de reflexión de onda sísmica.

II. Conclusiones

En el presente trabajo se han deducido conceptos básicos importantes para la Sismología. Desde la definición básica de desplazamiento se ha logrado llegar hasta la prueba de los teoremas de unicidad y representación. En el caso de un medio homogéneo se dedujo una expresión que depende sólo de dos parámetros. Para este caso, el caso homogéneo, se transformó la ecuación de movimiento en dos ecuaciones de onda. La ecuación de onda de las perturbaciones longitudinal y transversal que en sismología se conocen como las ondas P y S. Arribamos a una conclusión muy utilizada en sismología y esta es que para estudiar la propagación de los disturbios sismológicos es suficiente con estudiar a la onda P dado que las propiedades de propagación de la onda S deben ser similares a las de la onda P, esto sin tomar en cuenta la velocidad que también se probó era mayor para la onda P que para la onda S. En pocas palabras se estudian las propiedades tanto de la onda P como las de la S como soluciones de la ecuación de onda. Por esto es suficiente con deducir las propiedades para la onda P y éstas se satisfarán por la onda S.

Es importante hacer notar que le damos su nombre a la ecuación de onda sísmica no porque sea distinta a la ecuación de onda, sino porque se desea que al referirse a ella, se tome en cuenta que se habla de la propagación de las ondas sísmicas y las restricciones que esto implica respecto de las propiedades del medio. Esto es, que podemos referirnos a la propagación de las perturbaciones sísmicas utilizando la ecuación de onda sólo en los casos en los que el medio puede ser descrito por medio de los parámetros de Lamé y más aún, que estos últimos sean tengan variaciones espaciales tan leves que puedan ser despreciadas. De tal suerte que los términos que involucran los gradientes de los parámetros de Lamé dejen de ser importantes en la ecuación de movimiento para que ésta pueda ser transformada en las ecuaciones de la onda P y de la onda S.

La verdadera estructura del interior de la tierra es bastante complicada y, en muchos aspectos desconocida. Cualquier heterogeneidad estructural (discontinuidades en la velocidad o en la densidad o en los parámetros de Lamé) reflejará y refractará la onda sísmica incidente.

En contraste con las ondas de sonido y las electromagnéticas, que están compuestas sólo de ondas longitudinales y transversales, respectivamente, para las ondas sísmicas es necesario lidiar con ambos tipos de onda simultáneamente. Obviamente el problema de reflexión y refracción de la onda sísmica se hace más complicado.

Para hacer el procedimiento matemáticamente más tratable es que se han introducido las simplificaciones del medio. Esto es, el medio es isotrópico y en el caso más complicado es un medio estratificado separado por interfaces horizontales. Esto se puede asumir en virtud de que la longitud de onda de la onda sísmica es mucho menor que la curvatura de la superficie terrestre.

En seguida se procede a la factorización de la onda sísmica. De nuevo este proceso es válido sólo en el caso en el que se tiene una variación espacial suficientemente suave para desprestigiar los gradientes de los parámetros de Lamé.

Se obtuvo la factorización de la ecuación de onda sísmica para medios en los que la velocidad varía sólo con la profundidad, coordenada z en la derivación de la factorización.

La factorización de la ecuación de onda sísmica, nos conduce hacia el estudio del operador de reflexión de onda sísmica. Finalmente se presenta la ecuación cuadrática integro-diferencial que debe satisfacer el Kernel del operador de reflexión. La existencia de la solución para el sistema que satisface el Kernel no fue examinada aquí²⁵ pero debido a la función delta en la condición inicial, se debe buscar la solución que pertenezcan al espacio de las distribuciones suaves. El término cuadrático no debería presentar problema ya que es una convolución y el operador (es también una convolución).

En la práctica, el sistema formado por las ecuaciones (62) y (63) puede ser usado para el problema directo y para el problema inverso.

En el problema inverso, se puede utilizar en los métodos de migración. $R(x,y,z,t)$ es una función conocida en el plano $z = 0$, debido a

²⁵ Sin se desea leer sobre esto, una buena fuente para buscar sobre la existencia de este operador es [9].

que se tienen los datos de la superficie en los experimentos de exploración. La ecuación (63) puede ahora ser empleada para construir numéricamente $R(x,y,z,t)$ paso a paso (migrando capa a capa en un medio estratificado) en la región $z > 0$, y el valor de la velocidad, $c(z)$, se puede ahora recuperar de la condición (62).

En conclusión, se ha deducido un método para facilitar la migración de los datos sísmicos de exploración. O sea, transformar los datos obtenidos en la superficie de la tierra a una superficie hipotética más profunda. Esta transformación es de naturaleza de convolución.

La ventaja de la ecuación (63) es que puede ser solucionada por métodos numéricos simples. Existen trabajos previos para solucionar el problema de la migración de los datos sísmicos pero estos requieren métodos de solución que son computacionalmente difíciles de implementar.

Con la ecuación (63) se presenta una alternativa que puede ser trabajada con más facilidad pues envuelve el cálculo de el Kernel en una ecuación simple.

Bibliografía

1. Aki & Richards, Quantitative Seismology: Theory and Methods, Freeman & Co. , San Francisco, U.S.A.
2. Bartle, Introducción al Análisis Matemático, Limusa, México D. F.
3. Båth, Introduktion till Seismologin, Birkhäuser Verlag, Natur och Kultur, Stockholm, Sweden.
4. Bremmer, The W.K.B. Approximation as the First Term of a Geometric-Optimal Series, Puere Applied Methematics, 4, 1951.
5. Claerbout, Toward a Unified Theory of Reflector Mapping, Geophysics, 36, 1976
6. Courant & Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Interscience, New York, U.S.A.
7. Fatemi, Engquist and Osher, Numerical Solution of the High Frequency Asymptotic Expansion for the Scalar Wave Equation, Journal of Computational Physics, 120, 1995.
8. French, Two and Three Dimensional migration of model-experiment reflection profiles, Geophysics, 40, 1975.
9. Gubbins, Seismology and Plate Tectonics, Cambridge University Press, New York, U.S.A.

10. Jeffreys, Cartesian Tensors, Cambridge University Press, U.S.A.
11. Keller, Calculus of Variations and its applications, McGraw-Hill, New York, U.S.A.
12. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Spinger, New York, U.S.A.
13. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, London, United Kingdom.
14. Malvern, Introduction to Mechanics of a Continuous Medium, Prentic-Hall, New York, U.S.A.
15. Royden, Real Analysis, MacMillan Poublishing Co. Inc, New York, U.S.A.
16. Scales, Seismic Imaging, Samizdat Publications, Colorado, U.S.A.
17. Schneider, Integral Formulation for Migration in Two and Three Dimensions, 6th. Annual International SEG Meeting, 1976.
18. Temme, A Comparison of Common-midpoint, Single Shot, and Plane-wave Depht Migration, Geophysics, 49, 1984.
19. Vladimirov, Equations of Mathematical Physics, Dekker, New York, U.S.A.
20. Weston, Factorization of the Wave Equation in Higher Dimensions, Journal of Mathematical Physics, 28, 1987.

21. Weston, Wave Splitting and The Reflection Operator for the Wave Equation in \mathbb{R}^3 , Journal of Mathematical Physics, 30, 1989.
22. Yale & Levy, A layer-stripping Solution of the Inverse Problem for a One-dimensional Elastic Medium, Geophysics, 50, 1985.

