

TC
268

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

**BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

ESPACIOS UNIFORMES

ISABEL COFIÑO DE CORDON

Guatemala

1979

ESPACIOS UNIFORMES

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

ESPACIOS UNIFORMES

ISABEL COFIÑO DE CORDON

Trabajo de investigación presentado para optar
al grado académico de

Licenciado en Matemática

Guatemala

1979

Vo. Bo.:

(f) _____
Licenciado Angel Arévalo
Asesor

Tribunal:

(f) _____
Doctor Bernardo Morales

(f) _____
Licenciado Leonel Morales

(f) _____
Licenciado Angel Arévalo

Fecha de Aprobación: 20 de noviembre de 1979

A mis padres y
a mi esposo

CONTENIDO		Páginas
§0.	INTRODUCCION	VII
§1.	UNIFORMIDADES DIAGONALES	1
§2.	UNIFORMIDADES COBERTORAS	7
§3.	PRODUCTOS Y SUBESPACIOS UNIFORMES UNIFORMIDADES DEBILES	16
§4.	ESPACIOS UNIFORMES COMPLETOS	19
§5.	CONVERGENCIA PUNTUAL Y CONVERGENCIA UNIFORME	22
§6.	LA TOPOLOGIA COMPACTO-ABIERTO Y LA TOPOLOGIA DE CONVERGENCIA UNIFORME SOBRE COMPACTOS	30
§7.	BIBLIOGRAFIA	38
	APENDICE	
	CUBIERTAS Y REFINAMIENTOS	39

§0. Introducción

Con el advenimiento del Cálculo Diferencial e Integral (Newton, Leibnitz, 1687 aproximadamente) se empezó a usar la noción de convergencia, la cual estuvo restringida por mucho tiempo (hasta alrededor de 1915) al contexto de los espacios métricos, utilizados de una manera no formalizada. Con la introducción del concepto formal de espacio métrico, fue posible describir, mediante el uso de vecindades, los problemas de convergencia de una manera más clara y amplia. Esto último permitió el acceso a una nueva noción de convergencia que tuviera sentido en un contexto más amplio que los anteriores: el de la topología. En ella el problema de la convergencia puede ser descrito a través del uso de los conceptos de sistemas de vecindades y redes (o filtros).

En general, en los espacios topológicos se puede definir el concepto de sistemas de vecindades equivalentes, mediante el uso de homeomorfismos. Esto nos permite tratar de manera similar los problemas de convergencia de redes que convergen a puntos con sistemas de vecindades equivalentes. En los espacios metrizable se presenta una definición parecida a la antedicha, la cual puede ser considerada como una particularización de la misma, aunque, de acuerdo con los antecedentes históricos, esta última precedió a la primera. En estos espacios sucede que

la proposición "los sistemas de vecindades de todos los puntos del espacio son equivalentes" es verdadera. Pero ocurre que dicha situación no se presenta en todos los espacios topológicos. A aquellos espacios en los cuales sí ocurre se les llama espacios uniformes y, por esto es que, algunos dicen, haciendo abuso de lenguaje, que en estos espacios la forma de las vecindades no depende de la localización del punto en el espacio.

§1. Uniformidades Diagonales

Recordatorio:

Ya que estaremos manejando subconjuntos de un producto cartesiano, recordemos que, si X es un conjunto cualquiera, $\forall D \subset X \times X$,

$$D^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in D\} \text{ y } \forall D, E \subset X \times X, D \circ E = \{(x, y) \mid \exists z \in X, (x, z) \in D \wedge (z, y) \in E\}.$$

1.1. Definición

Se define una uniformidad diagonal como una colección \mathcal{D} de subconjuntos de $X \times X$, que cumple con las siguientes condiciones:

$$a) D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Delta \subset D \text{ con } \Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

$$b) D_1, D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$$

$$c) D \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{D} \ni E \circ E \subset D$$

$$d) D \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{D} \ni E^{-1} \subset D$$

$$e) D \in \mathcal{D} \wedge D \subset E \Rightarrow E \in \mathcal{D}$$

El espacio X con la estructura de uniformidad diagonal es un espacio uniforme que se denota (X, \mathcal{D}) . Un elemento $D \in \mathcal{D}$ es un alrededor.

Las condiciones c) y d) de la definición anterior pueden ser reemplazadas por la condición equivalente: $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists E \in \mathcal{D} \ni E \circ E^{-1} \subset D$

1.2. Observaciones

a) Una base de \mathcal{D} es el conjunto $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} = \{D \subset X \times X \mid \exists E \in \mathcal{E} \Rightarrow E \subset D\}$, es decir, una colección de subconjuntos de $X \times X$ que satisface las condiciones a, c y d anteriores y una forma modificada de la condición b:

$$b') D_1, D_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists D_3 \in \mathcal{E} \Rightarrow D_3 \subset D_1 \cap D_2.$$

b) La uniformidad se dice separante si $\bigcap \{D \mid D \in \mathcal{D}\} = \Delta$.

c) El conjunto $\mathcal{E}_1 = \{E \in \mathcal{D} \mid E = E^{-1}\} = \{E \in \mathcal{D} \mid E \text{ es simétrico}\}$ forma una base para \mathcal{D} .

d) El conjunto $\mathcal{E}_2 = \{E \in \mathcal{D} \mid E = E^{-1} \wedge E \text{ es abierto}\}$ forma una base de \mathcal{D} .

Un espacio uniforme es siempre un espacio topológico pues una uniformidad define una topología de la siguiente manera.

1.3. Teorema

El conjunto $\mathcal{U}_x = \{D[x] \mid D \in \mathcal{D}\}$, con $D[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in D\}$, es una base de vecindades de $x \in X$.

Demostración.

Las siguientes condiciones definen una base de vecindades \mathcal{B}_x en un punto

$x \in X$: a) $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in V$; b) $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists V_3 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow V_3 \subset V_1 \cap V_2$; y

c) $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists V_0 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow y \in V_0 \Rightarrow \exists W_0 \in \mathcal{B}_y \Rightarrow W_0 \subset V$

\mathcal{U}_x satisface las tres condiciones:

$$a) x \in D[x] \quad \forall D \in \mathcal{D}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } D_1[x] \cap D_2[x] &= \{y \in X \mid (x,y) \in D_1\} \cap \{y \in X \mid (x,y) \in D_2\} = \{y \in X \mid (x,y) \in D_1 \cap D_2\} \\ &= (D_1 \cap D_2)[x] \therefore \text{Dados } D_1[x], D_2[x] \in \mathcal{U}_X, \exists (D_1 \cap D_2)[x] \in \mathcal{U}_X \Rightarrow \\ &(D_1 \cap D_2)[x] \subset D_1[x] \cap D_2[x]. \end{aligned}$$

iii) Sea $D[x] \in \mathcal{U}_X$. Consideremos $E \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E \subset D$. Si $y \in E[x] \Rightarrow (x,y) \in E$
 $\wedge \therefore \exists z \in E[y], (y,z) \in E \therefore (x,z) \in E \circ E \subset D \therefore z \in D[x] \Rightarrow E[y] \subset D[x]$.
 \therefore dado $D[x] \exists E[x] \Rightarrow y \in E[x] \Rightarrow \exists E[y] \Rightarrow E[y] \subset D[x]$. //

1.4. Observaciones

a) La base de vecindades del teorema anterior define una topología que llamaremos topología uniforme $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ generada por \mathcal{D} .

b) Un espacio topológico uniformizable es aquel cuya topología coincide con una topología uniforme.

c) la topología uniforme $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ es Hausdorff si la uniformidad \mathcal{D} es separante.

Cuando tratamos con una función entre espacios topológicos, podemos hablar de continuidad. Ahora que tratamos con espacios uniformes tiene sentido hablar de continuidad uniforme, según la siguiente definición.

1.5. Definición

Sean (X, \mathcal{D}) y (Y, \mathcal{E}) espacios uniformes y $f: X \rightarrow Y$ una función.

Decimos que f es uniformemente continua ssi $\forall E \in \mathcal{E} \exists D \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$$(x,y) \in D \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E.$$

Se puede definir una uniformidad en un espacio topológico X , sea \mathcal{T} .
 $\mathcal{D} = \{U \mid U \in \mathcal{D}, U \text{ genera } \mathcal{T}\}$
 - es base (cumple con ii)
 - genera a μ
 - pero μ genera a la topología \mathcal{T} que en un espacio topológico...

1.6. Observación

Toda función uniformemente continua es continua.

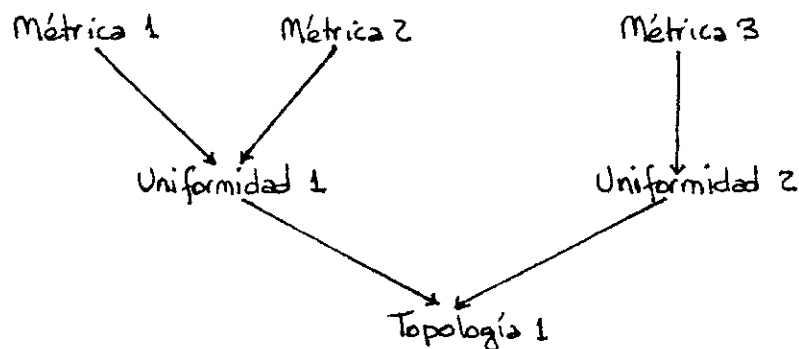
1.7. Ejemplos

a) Dado un espacio métrico (X, ρ) se define una uniformidad por medio de los conjuntos $D_\varepsilon^p = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, que constituyen la base \mathcal{E} de una uniformidad que llamamos uniformidad métrica \mathcal{D}_p , como era de esperarse. La topología uniforme asociada está descrita por la base de vecindades: $\{D_\varepsilon^p[x] \mid x \in X, D_\varepsilon^p \in \mathcal{E}\}$ donde $D_\varepsilon^p[x] = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ por lo que coincide con la topología métrica, \mathcal{T}_p . Debido a que la uniformidad métrica \mathcal{D}_p siempre genera la topología métrica \mathcal{T}_p , \mathcal{T}_p siempre es uniformizable.

b) Sobre un espacio X se pueden definir varias uniformidades. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, consideramos $\mathcal{D} = \{D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \Delta \subset D\}$, la uniformidad discreta \mathcal{D} y \mathcal{D}' ; la uniformidad cuya base es $\mathcal{E}' = \{D_a = \Delta \cup \{(x, y) \mid x > a \wedge y > a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Estas dos uniformidades generan la misma topología, la topología discreta $\mathcal{T} = \{A \mid A \subset \mathbb{R}\}$ pues: i) $\forall D \in \mathcal{D}, D[x] \in \mathcal{T} \wedge \forall A \in \mathcal{T}, A \times A \in \mathcal{D} \wedge$ ii) la base de \mathcal{T} es $\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$, y si consideramos $a \in \mathbb{R}, a \geq x$, tenemos $D_a = \{(x, x)\} \Rightarrow D_a[x] = \{x\}$. Por lo tanto, pueden existir varias uniformidades que corresponden a una misma topología, por lo que la estructura de uniformidad es más fuerte que la estructura topológica.

c) En el caso de la topología métrica también pueden haber varias uniformidades, distintas de la uniformidad métrica, que generen esta topología. Estas uniformidades no serían metrizable puesto que no coincidirían con \mathcal{D}_p . Es decir, es posible tener una topología métrica que corresponda a una uniformidad no metrizable.

d) Las métricas ρ_1 y ρ_2 , que cumplen con la condición de que $\exists m, M$ constantes $\exists 0 < m < M \wedge m\rho_1 < \rho_2 < M\rho_1$, generan la misma uniformidad. En efecto, sea \mathcal{D}_1 uniformidad sobre X con base $\mathcal{E}_1 = \{D_\varepsilon^{\rho_1} \mid \varepsilon > 0\}$ y \mathcal{D}_2 con base $\mathcal{E}_2 = \{D_\varepsilon^{\rho_2} \mid \varepsilon > 0\}$. Dada $D_\varepsilon^{\rho_1} \exists D_\delta^{\rho_2}$ con $\delta < m\varepsilon \Rightarrow D_\delta^{\rho_2} \subset D_\varepsilon^{\rho_1}$ y dada $D_\delta^{\rho_2} \exists D_\varepsilon^{\rho_1}$ con $\varepsilon < \frac{\delta}{M} \Rightarrow D_\varepsilon^{\rho_1} \subset D_\delta^{\rho_2}$. Entonces, como tenemos que $\forall D_1 \in \mathcal{D}_1 \exists \varepsilon > 0 \Rightarrow D_\varepsilon^{\rho_1} \subset D_1$ y que $\forall D_2 \in \mathcal{D}_2 \exists \delta > 0 \Rightarrow D_\delta^{\rho_2} \subset D_2$, podemos concluir que $\forall D_1 \in \mathcal{D}_1, D_1 \in \mathcal{D}_2$ y $\forall D_2 \in \mathcal{D}_2, D_2 \in \mathcal{D}_1$ y $\therefore \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$. Por lo tanto, varias métricas pueden corresponder a la misma uniformidad, por lo que la estructura de espacio métrico es más fuerte (más restringida) que la de espacio uniforme. Es decir, un diagrama como el que sigue es posible:



e) Si tratamos de definir una uniformidad $\mathcal{D} = \{D \subset X \times X \mid A \subset D\}$ con $A \subset X \times X$, es necesario y suficiente que A cumpla las siguientes condiciones: i) $\Delta \subset A$, ii) $A \circ A \subset A$ y iii) $A^{-1} \subset A$. En efecto, si A las cumple, $\forall D, D_1, D_2 \in \mathcal{D} : \Delta \subset D; A \subset D_1 \cap D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}; A \circ A \subset D; A^{-1} \subset D \wedge A \subset D, D \subset E \Rightarrow E \in \mathcal{D} . \therefore \mathcal{D}$ es una uniformidad. Si A no cumple con las condiciones, $\exists D = A \Rightarrow \forall E \in \mathcal{D}, E \circ E \not\subset A \wedge E^{-1} \not\subset A$, es decir, \mathcal{D} no es una uniformidad.

f) Al considerar una función uniformemente continua entre espacios métricos, la definición de continuidad uniforme que se dio se reduce a la conocida, pues: Si consideramos $(X, p_1) \wedge (Y, p_2)$ espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$, tenemos que, $\forall D_\varepsilon^{p_2} \in \mathcal{D}_{p_2}, \exists D_\delta^{p_1} \in \mathcal{D}_{p_1} \Rightarrow (x, y) \in D_\delta^{p_1} \Rightarrow (f(x), f(y)) \in D_\varepsilon^{p_2}$; i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow p_1(x, y) < \delta \Rightarrow p_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

§ 2. Uniformidades Cobertoras

La teoría de espacios uniformes se puede enfocar desde el punto de vista de cubiertas de X , lo cual no hace necesario trabajar en $X \times X$, y es a veces más conveniente.

2.1. Definición

Sea (X, \mathcal{D}) un espacio uniforme. Una cubierta \mathcal{U} de X es una cubierta uniforme de (X, \mathcal{D}) si $\exists D \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{U}_D = \{D[x] \mid x \in X\}$ es una cubierta que refina a \mathcal{U} .

Notese que es equivalente pedir que: $\exists D \in \mathcal{D} \Rightarrow \forall x \in X, \exists U \in \mathcal{U} \Rightarrow D[x] \subset U$, para que \mathcal{U} sea cubierta uniforme. Además es claro que \mathcal{U}_D es una cubierta pues $\bigcup_{x \in X} D[x] = X$.

2.2. Definición

Una familia de cubiertas μ sobre un espacio uniforme (X, \mathcal{D}) es una uniformidad cobertora sobre X si $\mu = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es cubierta uniforme de } (X, \mathcal{D})\}$.

Existe una manera equivalente de definir una uniformidad cobertora, que no depende de una uniformidad diagonal sino que caracteriza a la primera a través de una serie de propiedades.

2.3. Teorema

a) Sea (X, \mathcal{D}) un espacio uniforme y μ la uniformidad cobertora asociada sobre X . μ tiene las propiedades:

$$i) \forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu \exists \mathcal{U}_3 \in \mu \ni \mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_2$$

$$ii) \forall \mathcal{U} \in \mu, \mathcal{U} < \mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{U}' \in \mu$$

donde " $<$ " representa "es refinamiento de" y " $* <$ " representa "es refinamiento estrella de". (Ver Apéndice).

b) Si μ es una colección de cubiertas de X que cumple con las condiciones i) y ii) anteriores, μ es una uniformidad cobertora sobre X ; i.e., el conjunto $\{D_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mu\}$, con $D_{\mathcal{U}} = \{U \times U \mid U \in \mathcal{U}\}$, es base de una uniformidad diagonal sobre X . La uniformidad cobertora generada por $\{D_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mu\}$ coincide con μ .

Demostración

a) Consideremos el siguiente resultado previo: $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D} \exists D \in \mathcal{D}$,

D simétrico $\Rightarrow D \circ D < D \cap D_2$. En efecto: El conjunto $\{D \in \mathcal{D} \mid D \text{ es simétrico}\}$ es base de \mathcal{D} ; i.e., $\forall D \in \mathcal{D} \exists E \in \mathcal{D}, E \text{ simétrico} \Rightarrow E < D$. Además

$$\forall D \in \mathcal{D}, \exists F \in \mathcal{D} \Rightarrow F \circ F < D \wedge \forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}. \therefore \forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}$$

$$\exists E \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E < D_1 \cap D_2 \wedge \exists D \text{ simétrico} \Rightarrow D < E \therefore D \circ D < D_1 \cap D_2.$$

Ahora consideremos μ uniformidad cobertora sobre X .

i) Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu$. Por definición, $\exists D_1, D_2 \in \mathcal{D} \ni \mathcal{U}_{D_1} < \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_{D_2} < \mathcal{U}_2$

Por lo anterior, podemos encontrar $D \in \mathcal{D}, D \text{ simétrico} \Rightarrow D \circ D < D_1 \cap D_2$.

Entonces $\forall x \in X, St(x, \mathcal{U}_D) \subset D_1[x] \cap D_2[x]$. En efecto, sabemos que $St(x, \mathcal{U}_D) = \{U \mid U \in \mathcal{U}_D \mid x \in U\}$ (ver Apéndice) $\cap \{U \mid U \in \mathcal{U}_D \mid x \in U\} = \{U \mid D[y] \mid (y, x) \in D\}$. Si tomamos $z \in St(x, \mathcal{U}_D)$, $\exists y \in X \ni z \in D[y] \wedge (y, x) \in D$; i.e., $\exists y \in X \ni (y, z) \in D \wedge (y, x) \in D$. Como D es simétrico, $(x, y) \in D$. $\therefore (x, z) \in D \circ D \subset D_1 \cap D_2$. $\therefore z \in D_1[x] \cap D_2[x]$. $\therefore \forall x \in X, St(x, \mathcal{U}_D) \subset D_1[x] \cap St(x, \mathcal{U}_D) \subset D_2[x]$; i.e., $\mathcal{U}_D \Delta \mathcal{U}_D, \wedge \mathcal{U}_D \Delta \mathcal{U}_{D_2}$ donde " Δ " significa "es refinamiento baricéntrico de". (Ver Apéndice). Pero $\mathcal{U}_D \Delta \mathcal{U}_D \therefore \mathcal{U}_D^* \prec \mathcal{U}_D, \wedge \mathcal{U}_D^* \prec \mathcal{U}_{D_2}$ y $\therefore \mathcal{U}_D^* \prec \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_D^* \prec \mathcal{U}_2$ (Ver Apéndice).

ii) Sea $\mathcal{U} \in \mu \wedge \mathcal{U} < \mathcal{U}'$. $\exists \mathcal{U}_D \ni \mathcal{U}_D < \mathcal{U} \therefore \mathcal{U}_D < \mathcal{U}' \therefore \mathcal{U}' \in \mu$

b) Sea $\mu = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es cubierta de } X\}$ que cumple con: $\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu \exists \mathcal{U}_3 \in \mu$ tal que $\mathcal{U}_3^* \prec \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_3^* \prec \mathcal{U}_2$ y $\forall \mathcal{U} \in \mu, \mathcal{U} < \mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{U}' \in \mu$.

Sea $\mathcal{E} = \{D_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mu\} \ni D_{\mathcal{U}} = \{U \times U \mid U \in \mathcal{U}\}$. ¿Es \mathcal{E} base de alguna uniformidad diagonal?

i) Como \mathcal{U} es cubierta de X , $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X \Rightarrow \Delta \subset D_{\mathcal{U}}$

ii) $\forall D_{\mathcal{U}_1}, D_{\mathcal{U}_2} \in \mathcal{E}, \exists \mathcal{U}_3 \in \mathcal{E} \ni \mathcal{U}_3^* \prec \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_3^* \prec \mathcal{U}_2 \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_3$

$\exists V_1 \in \mathcal{U}_1, \wedge \exists V_2 \in \mathcal{U}_2 \ni St(U, \mathcal{U}_3) \subset V_1 \wedge St(U, \mathcal{U}_3) \subset V_2 \Rightarrow$

$St(U, \mathcal{U}_3) \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow \{U' \in \mathcal{U}_3 \mid U \cap U' \neq \emptyset\} \subset V_1 \cap V_2$. En especial

$\forall U \in \mathcal{U}_3 \exists V_1 \in \mathcal{U}_1, \wedge \exists V_2 \in \mathcal{U}_2 \ni U \subset V_1 \cap V_2 \therefore \{U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3\}$ está contenida en $\{U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3\} \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3) \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3) \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3)$

$\cap (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3) \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3) \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3) \subset (U \times U \mid U \in \mathcal{U}_3)$. $\therefore D_{\mathcal{U}_3} \subset D_{\mathcal{U}_1} \cap D_{\mathcal{U}_2}$

ii) $\forall \mathcal{U} \in \mu \exists \mathcal{V} \ni \mathcal{V}^* < \mathcal{U}$ i.e. $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} \ni St(V, \mathcal{V}) \subset U$; i.e.,
 $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} \ni U \setminus \{V' \in \mathcal{V} \mid V' \cap V \neq \emptyset\} \subset U$. Sean $D_{\mathcal{U}} \wedge D_{\mathcal{V}}$. Consi-
 deremos $D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}}$. Si $(x, z) \in D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}}$ entonces $\exists y \in X \ni (x, y) \in D_{\mathcal{V}}$
 $\wedge (y, z) \in D_{\mathcal{V}} \Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V} \ni (x, y) \in V_1 \times V_1, (y, z) \in V_2 \times V_2 \wedge V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$
 $\wedge V_2 \cap V_1 \neq \emptyset$. Pero como $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V} \exists U_1, U_2 \in \mathcal{U} \ni St(V_1, \mathcal{V}) \subset U_1 \wedge$
 $St(V_2, \mathcal{V}) \subset U_2$, tenemos que $V_1 \subset U_1 \wedge V_2 \subset U_2 \therefore (x, z) \in U_1 \times U_2$
 $\therefore (x, z) \in D_{\mathcal{U}} \therefore D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}} \subset D_{\mathcal{U}}$.

iii) $\forall \mathcal{U} \in \mu \exists \mathcal{V} \ni \mathcal{V}^* < \mathcal{U}$; i.e., $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} \ni St(V, \mathcal{V}) = U \setminus \{V' \in \mathcal{V} \mid$
 $V' \cap V \neq \emptyset\} \subset U$. Sea $(x, y) \in (D_{\mathcal{V}})^{-1}$. Entonces $(y, x) \in D_{\mathcal{V}} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V} \ni$
 $(y, x) \in V \times V \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V} \ni (x, y) \in V \times V$. Pero como $\exists U \in \mathcal{U} \ni St(V, \mathcal{V}) \subset U$,
 entonces $V \subset U \wedge (x, y) \in U \times U \therefore (x, y) \in D_{\mathcal{U}} \therefore (D_{\mathcal{V}})^{-1} \subset D_{\mathcal{U}}$.

Por lo tanto, por i), ii), iii) y iv), \mathcal{E} es base de alguna uniformidad dia-
 gonal \mathcal{D} , donde $\mathcal{D} = \{D \subset X \times X \mid \exists E \in \mathcal{E} \ni E \subset D\}$. Esta \mathcal{D} generan el
 conjunto $\{\mathcal{U}_D \mid D \in \mathcal{D}\}$ con $\mathcal{U}_D = \{D[x] \mid x \in X\}$. Nótese que estos
 $\mathcal{U}_D = \{D[x] \mid x \in X\}$ son tales que $\forall D \in \mathcal{D} \exists E = U \setminus \{U \times U \mid U \in \mathcal{U}\} \ni E \subset D$.
 $E[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U \setminus \{U \times U \mid U \in \mathcal{U}\}\} = \{y \in U \mid U \in \mathcal{U}\} = U$ Por lo tan-
 to $\mathcal{U}_E = \mathcal{U}$; i.e., $\mathcal{U}_E \in \mu$. Y como $\forall \mathcal{U} \exists E \in \mathcal{E} \ni \mathcal{U}_E < \mathcal{U}$, podemos
 concluir que \mathcal{U}_E hace que $\mathcal{U} \in \mu$. Entonces μ coincide con la uniformi-
 dad cobertora generada por los $\mathcal{U}_D, D \in \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} , es a la vez, ge-
 nerada por μ . //

2.4 Definición

Una subcolección μ' de una uniformidad μ sobre X es base de μ si $\mu = \{ \mathcal{U} \text{ cubierta de } X \mid \exists \mathcal{U}' \in \mu' \ni \mathcal{U}' < \mathcal{U} \}$, es decir, μ' es una colección de cubiertas de X que cumple con la condición:

$$\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu', \exists \mathcal{U}_3 \in \mu' \ni \mathcal{U}_3 * < \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_3 * < \mathcal{U}_2.$$

$\mu'' \subset \mu$ es subbase de μ ssi $\mu' = \{ \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{U}_n \mid \mathcal{U}_i \in \mu'' \forall i = 1, \dots, n \}$ es base de μ . $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ es la intersección de las cubiertas \mathcal{U} y \mathcal{V} . (Ver Apéndice).

2.5 Teorema

a) Si \mathcal{E} es base de una uniformidad diagonal \mathcal{D} , entonces $\{ \mathcal{U}_D \mid D \in \mathcal{D} \}$ es base de alguna uniformidad cobertora μ , que a su vez, cumple con generar el conjunto $\{ D \in \mathcal{D} \mid \mathcal{U} \in \mu \}$ que es base de \mathcal{D} .

b) Si μ' es base de una uniformidad cobertora μ , entonces el conjunto $\{ D \in \mathcal{D} \mid \mathcal{U} \in \mu' \}$ es base de alguna uniformidad diagonal \mathcal{D} , que a su vez, cumple con generar el conjunto $\{ \mathcal{U}_D \mid D \in \mathcal{D} \}$ que es base de μ .

2.6 Observaciones

a) La topología uniforme puede ser generada, tanto por una uniformidad diagonal \mathcal{D} , como por una cobertora μ . En el primer caso, ya vi-

mos que $\mathcal{U}_x = \{D[x] \mid D \in \mathcal{D}\}$ es una base de vecindades de x . En el segundo caso, $\mathcal{U}_x^* = \{St(x, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \mu\}$ es base de vecindades de x .

b) Análogo al hecho de que el conjunto $\{(U \times V) \cup \Delta \mid U, V \text{ son abiertos en } X\}$ es base para la uniformidad diagonal \mathcal{D} , tenemos que el conjunto $\{\mathcal{U} \in \mu \mid \mathcal{U} \text{ cubierta abierta de } X\}$ es base de la uniformidad cobertora μ .

c) También hay equivalencia entre la propiedad de una uniformidad diagonal \mathcal{D} de que $\forall D \in \mathcal{D} \exists E \in \mathcal{D} \ni E \circ E^{-1} \subset D$ y la de una uniformidad cobertora μ de que $\forall \mathcal{U} \in \mu, \exists \mathcal{U}' \in \mu \ni \mathcal{U}'^* \subset \mathcal{U}$. La transición de una propiedad a otra se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\forall D, E \in \mathcal{D} \ni E \circ E^{-1} \subset D, \mathcal{U} \in \mathcal{D} \Delta \mathcal{U}_D \quad \wedge$$

$$\forall \mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mu \ni \mathcal{U}'^* \subset \mathcal{U}, D_{\mathcal{U}'} \circ D_{\mathcal{U}'} \subset D_{\mathcal{U}}.$$

d) La continuidad uniforme de una función $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios uniformes $(X, \mu) \wedge (Y, \nu)$ con uniformidades cobertoras, adopta la forma:

$$\forall \mathcal{U} \in \nu, \exists \mathcal{U}_0 \in \mu \ni f(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U} \text{ con } f(\mathcal{U}_0) = \{f(U) \mid U \in \mathcal{U}_0\}; \text{ que es equivalente a: } \forall \mathcal{U} \in \nu, f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mu.$$

A veces es necesario encontrar una uniformidad específica con la cual tratar cuando se estudia un espacio con una topología que sabemos es uniformizable.

2.7. Teorema

$\forall (X, \tau)$ espacio topológico uniformizable, $\exists \mu \in \mathcal{U}_F$ uniformidad sobre

X y la topología generada por μ_F coincide con la topología original τ y μ_F es la uniformidad más fina que se puede definir sobre X .

Demostración

Sea $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\}$ la colección de uniformidades que se pueden definir sobre $(X, \tau) \ni \tau_{\mu_\alpha} = \tau$. Sabemos que $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\} \neq \emptyset$ pues (X, τ) es uniformizable. Consideremos $\bigcup_{\alpha \in A} \mu_\alpha$. Sabemos que es una familia normal de cubiertas pues $\forall \mu_\alpha, \forall \mathcal{U} \in \mu_\alpha \exists \mathcal{U}' \in \mu_\alpha \ni \mathcal{U}' \star \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. (Ver Apéndice). Además tenemos que $\forall \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ familia normal de cubiertas, $\exists \mu \ni \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es subbase de μ . $\therefore \exists \mu_F$ uniformidad $\ni \bigcup_{\alpha \in A} \mu_\alpha$ es subbase de μ_F . Ahora, μ_F es la uniformidad más fina pues $\bigcup_{\alpha \in A} \mu_\alpha \subset \mu_F$. Además $\tau = \tau_{\mu_F}$ pues: i) $\tau_{\mu_F} \subset \tau$ claramente, y ii) $\tau \subset \tau_{\mu_F}$ ya que $\exists \mu \ni \tau_\mu = \tau \wedge \mu \subset \mu_F \Rightarrow \tau_\mu \subset \tau_{\mu_F}$ //

2.8. Observaciones

a) μ_F tiene como base a $\mu' = \{\mathcal{U} \text{ cubierta de } X \mid \mathcal{U} \text{ es normalmente abierta}\}$. (Ver Apéndice). Si X es paracompacto, μ_F tiene como base a $\mu' = \{\mathcal{U} \text{ cubierta de } X \mid \mathcal{U} \text{ es abierta}\}$. En el lenguaje de uniformidades diagonales, la base de \mathcal{D}_F es $\mathcal{E} = \{D \in X \times X \mid D \text{ es abierto, } \Delta \subset D \wedge \exists \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset D, \text{ sucesión de abiertos, } \ni \Delta \subset E_i \forall i \wedge \forall n > 1 E_n \circ E_n \subset E_{n-1} \wedge D \subset E_1\}$. Si X es paracompacto, la base de \mathcal{D}_F se con-

vierste en $\mathcal{E} = \{D \subset X \times X \mid D \text{ es abierto} \wedge \Delta \subset D\}$

b) Si tenemos dos espacios uniformes $(X, \mu_F) \wedge (Y, \mu)$ y una función continua $f: X \rightarrow Y$, entonces f es uniformemente continua.

c) En un espacio X , compacto y Hausdorff, la única uniformidad compatible con su topología es μ_F . En este caso, cualquier función continua $f: X \rightarrow Y$ es uniformemente continua.

2.9. Ejemplos

a) En el §1 se estudio la uniformidad métrica [diagonal] cuya base está constituida por los conjuntos $D_\epsilon^p = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \epsilon\}$. Los elementos de la base de la uniformidad métrica [cobertora] son de la forma $\mathcal{U}_\epsilon^p = \{U_\epsilon^p(x) \mid x \in X\}$ donde $U_\epsilon^p(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \epsilon\}$. Se observa que una cubierta \mathcal{U}_ϵ^p tiene componentes que son "discos del mismo tamaño."

b) $\mu' = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es base de la uniformidad discreta [cobertora] sobre X . De acuerdo con el Teorema 2.5, la base de la uniformidad diagonal asociada es $\{D_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mu'\} = D_{\{\{x\} \mid x \in X\}} = \{(x, x) \mid x \in X\} = \Delta$, como ya se había mencionado.

c) La union y la intersección de uniformidades no son necesariamente uniformidades, pero el conjunto de uniformidades sobre X forma una "lattice" completa, ya que $\forall A$, familia de uniformidades sobre X ,

i) $\exists \mu_c \in A \Rightarrow \forall \mu \in A, \mu_c \subset \mu$ $[\mu_c = \{\{x\}\}] \wedge$ ii) $\exists \mu_F \in A \Rightarrow$
 $\forall \mu \in A, \mu \subset \mu_F.$

§ 3. Productos y Subespacios Uniformes

Uniformidades Débiles

Para que el concepto de uniformidad sea más utilizable es necesario definir uniformidades sobre subespacios y sobre productos.

3.1. Definición

Sea (X, \mathcal{D}) un espacio uniforme y A un subconjunto de X . Llamamos uniformidad relativa inducida por \mathcal{D} sobre A a la colección $\mathcal{D}' = \{ D \cap (A \times A) \mid D \in \mathcal{D} \}$. (A, \mathcal{D}') constituye un subespacio uniforme de (X, \mathcal{D}) .

3.2. Observaciones

- a) La base de la uniformidad relativa [cobertora] inducida por (X, μ) sobre A consiste de cubiertas de la forma $\mathcal{U}' = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \}$ donde $\mathcal{U} \in \mu$. Una cubierta de este tipo recibe el nombre de traza de \mathcal{U} sobre A .
- b) La topología uniforme sobre A , inducida por la uniformidad relativa, coincide con la topología relativa sobre A .

La uniformidad sobre un espacio producto se construye de la única manera posible para que su topología corresponda con la topología producto.

3.3. Teorema

Sean (X_i, \mathcal{D}_i) espacios uniformes y $X = \prod X_i$ un espacio topológico producto. El conjunto $\mathcal{E} = \{P_{\alpha_i}^{-1}(D_{\alpha_i}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(D_{\alpha_n}) \mid D_{\alpha_i} \in \mathcal{D}_{\alpha_i}, i=1, \dots, n\}$, con $P_{\alpha}(x, y) = (\pi_{\alpha}(x), \pi_{\alpha}(y))$ es base para una uniformidad \mathcal{D} sobre X . La topología uniforme asociada a \mathcal{D} coincide con la topología producto sobre X .

\mathcal{D} es la uniformidad producto sobre X y (X, \mathcal{D}) es el espacio producto.

3.4. Observaciones

- a) La base de la uniformidad producto [cobertora] está formada por cubiertas $\mathcal{U} = \{\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \mid U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}, i=1, \dots, n\}$, donde $\mathcal{U}_{\alpha_i} \in \mu_{\alpha_i}$, uniformidad cobertora sobre X_{α_i} .
- b) Al igual que hay una relación importante entre una topología débil y la topología producto sobre un espacio, encontramos que la uniformidad producto es una "uniformidad débil" especial, en la que los $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ que generan esta última son reemplazados por $\{\pi_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$. Como es de esperarse, la uniformidad débil sobre X , generada por los $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, tiene como base a $\{F_{\alpha_i}^{-1}(D_{\alpha_i}) \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{-1}(D_{\alpha_n}) \mid D_{\alpha_i} \in \mathcal{D}_{\alpha_i}, i=1, \dots, n\}$, donde $F_{\alpha}(x, y) = (f_{\alpha}(x), f_{\alpha}(y))$. La topología débil, que coincide con la topología asociada a la uniformidad débil, es la más débil que hace a los $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ continuos. Análogamente, la uniformidad débil

es la más débil que hace a los $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uniformemente continuos. La transición de topología débil a uniformidad débil comprende re-escribir algunos teoremas en términos de continuidad uniforme; por ejemplo, i) $f: Y \rightarrow X$ es continua ssi $f_\alpha \circ f: Y \rightarrow X_\alpha$ es continua $\forall \alpha \in A$, se convierte en i') $f: Y \rightarrow X$ es uniformemente continua ssi $f_\alpha \circ f: Y \rightarrow X_\alpha$ es uniformemente continua; y ii) $e: X \rightarrow \prod X_\alpha$ es una inmersión ssi $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ separa puntos, se convierte en ii') $e: X \rightarrow \prod X_\alpha$ es una inmersión uniforme ssi $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ separa puntos. Es claro que en estos teoremas, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es la colección de funciones que genera la topología débil sobre X y la uniformidad débil sobre X .

e) Consideremos (X, μ_X) un espacio uniforme y Y un conjunto. Sea $f: X \rightarrow Y$ una sobreyección. $\exists \mu = \{ \mathcal{U} \text{ cubierta de } Y \mid f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mu_X \}$ uniformidad sobre Y . μ es la mayor uniformidad que hace a f uniformemente continua. Llamamos a μ uniformidad cociente sobre Y inducida por f , y (Y, μ) es entonces el cociente uniforme de X por medio de f . μ no necesariamente genera la topología cociente sobre Y .

§4. Espacios Uniformes Completos

Al generalizar el concepto de sucesión de Cauchy en espacios métricos al de red de Cauchy en espacios uniformes, se logra establecer una noción de completitud en estos últimos.

4.1. Definición

Sea (X, \mathcal{D}) un espacio uniforme. Una red $(x_\lambda) \subset X$ es \mathcal{D} -Cauchy o Cauchy uniforme ssi $\forall D \in \mathcal{D} \exists \lambda_0 \in \Lambda \ni \lambda_1, \lambda_2 \gg \lambda_0 \rightarrow (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in D$

4.2. Definición

Sea (X, \mathcal{D}) un espacio uniforme. X es un espacio uniforme completo ssi $\forall (x_\lambda) \subset X \ni (x_\lambda)$ es Cauchy uniforme, $\exists x \in X \ni x_\lambda \rightarrow x$.

Como es de esperarse, este concepto de completitud y el que ya conocíamos coinciden dentro de un espacio métrico.

4.3. Teorema

Sea (X, ρ) un espacio métrico y sea \mathcal{D}_ρ la uniformidad métrica sobre X . (X, \mathcal{D}_ρ) es un espacio uniforme completo ssi (X, ρ) es un espacio topológico completo.

Demostación

i) \Rightarrow Supongamos que (X, \mathcal{D}_p) es completo. Esto sucede ssi $\forall (x_\lambda)$ Cauchy uniforme $\exists x \in X \ni x_\lambda \rightarrow x$; i.e., si $\forall D_\varepsilon^p \in \mathcal{D}_p \exists \lambda_0 \in \Lambda \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_0 \Rightarrow (x_\lambda, x_{\lambda'}) \in D_\varepsilon^p$, entonces $\exists x \in X \ni x_\lambda \rightarrow x$; lo cual equivale a que, si $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 \in \Lambda \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_0 \Rightarrow \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \varepsilon$, entonces $\exists x \in X \ni x_\lambda \rightarrow x$. Entonces, si consideramos una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ésta es un caso especial de una red Cauchy uniforme en un espacio métrico. $\therefore \exists x \in X \ni x_n \rightarrow x$. $\therefore (X, \rho)$ es completo.

ii) \Leftarrow Supongamos que (X, ρ) es completo y consideremos (x_λ) Cauchy uniforme en (X, \mathcal{D}_p) . Queremos fabricar una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converja al punto al que converge (x_λ) . Entonces, sea $\varepsilon = 1$. $\exists \lambda_1 \in \Lambda \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_1 \Rightarrow \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\exists \lambda_2' \in \Lambda \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_2' \Rightarrow \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{2}$. Por ser Λ un conjunto dirigido $\exists \lambda_2 \geq \lambda_2' \wedge \lambda_2 \geq \lambda_1$. Ahora, sea $\varepsilon = \frac{1}{3}$. $\exists \lambda_3' \in \Lambda \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_3' \Rightarrow \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{3}$. Por ser Λ un conjunto dirigido $\exists \lambda_3 \geq \lambda_3' \wedge \lambda_3 \geq \lambda_2$ Escogemos así un conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \ni \forall \lambda, \lambda' \geq \lambda_n, \rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{n} \wedge \lambda_n \geq \lambda_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \ni m, m' \geq n \Rightarrow \lambda_m, \lambda_{m'} \geq \lambda_n$. $\therefore \rho(x_{\lambda_m}, x_{\lambda_{m'}}) < \frac{1}{n}$. $\therefore \rho(x_m, x_{m'}) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ determina una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, que es de Cauchy. Como ρ es completa, $\exists x \in X \ni x_i \rightarrow x$, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \ni m \geq n \Rightarrow \rho(x_m, x) < \varepsilon$. Ahora, sea $\varepsilon > 0$. i) $\exists n \in \mathbb{N} \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_n \Rightarrow$

$\rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{k} < \varepsilon$ [en especial, $\rho(x_\lambda, x_{\lambda_n}) < \varepsilon$] y ii) $\exists m \in \mathbb{N}, k \gg m$
 $\Rightarrow \rho(x_{\lambda_k}, x) < \varepsilon$ [en especial, $\rho(x_{\lambda_m}, x) < \varepsilon$]. Consideremos λ_0 y
 $\lambda_m \leq \lambda_0 \wedge \lambda_n \leq \lambda_0$. $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\rho(x_\lambda, x) < \rho(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + \rho(x_{\lambda_0}, x) < \varepsilon + \varepsilon$
 $= \delta$. $\therefore \forall \delta > 0 \exists \lambda_0, \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \rho(x_\lambda, x) < \delta$. $\therefore (X, \mathcal{D}_\rho)$ es completo. //

4.4. Observaciones

- a) Toda red (x_λ) convergente en la topología uniforme es Cauchy uniforme.
- b) Un espacio uniforme completo tiene muchas de las propiedades de un espacio topológico completo. Por ejemplo:
 - i) Un subconjunto cerrado A de un espacio uniforme completo (X, \mathcal{D}) es completo. ["cerrado" y "completo" respecto de la topología uniforme].
 - ii) Un subconjunto completo A de un espacio uniforme Hausdorff (X, \mathcal{D}) es cerrado.
 - iii) Un espacio producto uniforme es completo ssi cada espacio factor uniforme es completo.

§ 5. Convergencia Puntual y Convergencia Uniforme

Existe toda una gama de estructuras sobre una colección de funciones que la convierten en espacio de funciones. En un extremo del espectro está la estructura de convergencia puntual y en el otro la de convergencia uniforme.

5.1. Definición

Sean X y Y espacios topológicos. Sea $\mathcal{F} \subset Y^X$ una subcolección de funciones de X en Y . Sea τ la topología producto de Tychonoff sobre Y^X , en donde la proyección i -ésima $\pi_x: \mathcal{F} \rightarrow Y$ se reduce a la evaluación en un punto x ; i.e., $\pi_x(f) = f(x)$. La topología relativa, inducida por τ sobre \mathcal{F} , se llama topología de convergencia puntual sobre \mathcal{F} y se denota τ_p .

5.2. Observaciones

- Una base de τ_p es el subconjunto de τ_p que consta de elementos de la forma $A = \bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}(A_i) = \bigcap_{i=1}^n \{f \in \mathcal{F} \mid f(x_i) \in A_i\}$, donde A_i es abierto de Y .
- La estructura puntual sobre \mathcal{F} depende exclusivamente de la de Y .
- Como estamos trabajando con una topología producto, sabemos que la net (red) $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a f ssi la net $(\pi_x(f_\lambda))$ converge a $\pi_x(f)$, $\forall x \in X$. Es decir que $(f_\lambda) \rightarrow f$ ssi $(f_\lambda(x)) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$. Por lo

tanto, la convergencia en \mathcal{T}_p se reduce a la convergencia puntual. Esto explica el nombre asociado a \mathcal{T}_p .

d) La topología puntual es bastante pequeña; es decir, consiste de "pocos" abiertos, cada uno de los cuales contiene "muchas" funciones.

Sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ los abiertos de esta topología son de la forma $U(g, \epsilon, F) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |f(x) - g(x)| < \epsilon \ \forall x \in F\}$ donde $\epsilon > 0$ y F es un subconjunto finito de \mathbb{R} . Ya que la condición $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ debe cumplirse sólo para una cantidad finita de puntos, los $U(g, \epsilon, F)$ constan de "muchas" funciones. Para construir una topología que nos describa con más detalle las propiedades del espacio, es decir, que contenga un número mayor de abiertos "más pequeños", es necesario restringir las funciones que pueden pertenecer a una vecindad dada, haciendo los conjuntos F más extensos.

La compacidad y la completitud de una estructura sobre un espacio de funciones es de gran relevancia. En este caso contamos con que la topología producto tiene la propiedad de trasladar la compacidad de los espacios factores al espacio producto.

5.3. Teorema

Sea (Y, τ) un espacio Hausdorff y $\mathcal{F} \subset Y^X$ con la topología \mathcal{T}_p

$(\mathcal{F}, \mathcal{T}_p)$ es compacto ssi: i) \mathcal{F} es cerrado en (Y^X, \mathcal{T}_p) y

ii) $\overline{\pi_x(\mathcal{F})}$ es compacto en (Y^X, \mathcal{T}_p) , $\forall x \in X$.

5.4. Observaciones

a) Consideraremos "interesante" a una topología τ sobre $\mathcal{F} \ni T_p \subset T$. Entonces la compacidad sobre τ se lleva a cabo en las siguientes condiciones: si tomamos Y Hausdorff y τ interesante, (\mathcal{F}, τ) es compacto ssi (\mathcal{F}, T_p) es compacto y τ es homeomorfa a T_p . En efecto: T_p compacta y T_p homeomorfa a $\tau \Rightarrow \tau$ compacta. Por otro lado, Y Hausdorff $\Rightarrow Y^*$ Hausdorff $\Rightarrow (\mathcal{F}, T_p)$ Hausdorff, por ser \mathcal{F} subespacio de Y^* . Si consideramos $i: (\mathcal{F}, \tau) \rightarrow (\mathcal{F}, T_p)$, la identidad, tenemos un mapeo biyectivo continuo de un espacio compacto a un espacio Hausdorff. Por lo tanto, i es un homeomorfismo, y $\therefore \tau$ es compacto. Se concluye, entonces, que las condiciones necesarias y suficientes para que τ sea compacta son las condiciones para que T_p sea compacta junto con las condiciones para que τ sea equivalente a T_p .

Ahora presentamos una uniformidad que corresponde adecuadamente a la topología puntual.

5.5. Definición

La uniformidad asociada a la topología puntual sobre $\mathcal{F} \subset Y^*$ es precisamente la uniformidad producto sobre Y^* relativa a \mathcal{F} . La llamamos uniformidad de convergencia puntual o uniformidad puntual y la denotamos por \mathcal{D}_p o μ_p , según convenga.

5.6. Observaciones

- a) Los conjuntos $E_{F,D} = \{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid (f(x), g(x)) \in D \ \forall x \in F\}$, con $D \in \mathcal{D}$ uniformidad sobre Y y \mathcal{F} subconjunto finito de X , forman una base de \mathcal{D}_p .
- b) El nombre asociado a \mathcal{D}_p se justifica por el hecho de que, al igual que en \mathcal{T}_p , una red de Cauchy (f_α) en \mathcal{D}_p es tal que la red $(f_\alpha(x))$ es Cauchy en \mathcal{D} , $\forall x \in X$.
- c) Al trabajar con el concepto de completitud, hace falta un teorema que demuestre que la imagen uniformemente continua de un espacio completo es completa. En espacios compactos, la existencia de un teorema análogo permite demostrar el teorema 5.3.. En este caso, sólo es posible demostrar que las condiciones que siguen, similares a las de compacidad, son necesarias pero no suficientes para la completitud de $(\mathcal{F}, \mathcal{D}_p)$:
- i) \mathcal{F} es cerrado en (Y^X, \mathcal{T}_p) y ii) $\overline{\Pi_X(\mathcal{F})}$ es completo en (Y, \mathcal{D}) , $\forall x \in X$.

La estructura "más grande" sobre una colección de funciones, aquella cuya topología contiene el mayor número de abiertos, es la que sigue.

5.7. Definición

Sea (Y, \mathcal{D}) espacio uniforme. Los conjuntos $E_D = \{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid (f(x), g(x)) \in D, \forall x \in X\}$ forman una base para una uniformidad sobre $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ que llamamos uniformidad de convergencia uniforme y denotamos \mathcal{D}_u o μ_u , según convenga. La topología generada por \mathcal{D}_u

es la topología de convergencia uniforme \mathcal{T}_u . Dada $(f_\lambda) \subset \mathcal{F}$, si $f_\lambda \rightarrow f$ en \mathcal{T}_u , decimos que f_λ converge uniformemente a f . Si $(f_\lambda) \subset \mathcal{F}$ es Cauchy en \mathcal{D}_u , decimos que (f_λ) es Cauchy-uniforme o uniformemente Cauchy.

Además de la relación que hemos notado entre la base de \mathcal{D}_p y la de \mathcal{D}_u (la sustitución del subconjunto finito F por todo X), tenemos la siguiente correspondencia:

5.8. Teorema

Dada $(f_\lambda) \subset \mathcal{F} \wedge f \in \mathcal{F}$. $f_\lambda \rightarrow f$ uniformemente $\Leftrightarrow f_\lambda \rightarrow f$ puntualmente y (f_λ) es Cauchy uniforme.

Demostración

i) \Rightarrow Si suponemos $f_\lambda \rightarrow f$ uniformemente, $\forall D \in \mathcal{D}$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda \gg \lambda_0 \Rightarrow (f_\lambda, f) \in E_D$; i.e., $(f_\lambda(x), f(x)) \in D$, $\forall x \in X$. $\therefore f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$. $\therefore f_\lambda \rightarrow f$ puntualmente. Y como (f_λ) es una red convergente en \mathcal{D}_u , (f_λ) es Cauchy uniforme.

ii) \Leftarrow Sea (f_λ) Cauchy uniforme. Entonces $\forall D' \in \mathcal{D}_u$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda, \lambda' \gg \lambda_0 \Rightarrow (f_\lambda, f_{\lambda'}) \in D'$. Escojamos $T \in \mathcal{D}$, simétrico y cerrado, $\Rightarrow T \subset D$, para $D \in \mathcal{D}$. De nuevo tenemos que $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda, \lambda' \gg \lambda_0 \Rightarrow (f_\lambda, f_{\lambda'}) \in E_T$; i.e., $(f_\lambda(x), f_{\lambda'}(x)) \in T$, $\forall x \in X$; i.e., $\lambda, \lambda' \gg \lambda_0 \Rightarrow f_{\lambda'}(x) \in T[f_\lambda(x)]$, $\forall x \in X$. Ahora, sabemos que $f_\lambda \rightarrow f$ puntualmente. Por

lo tanto, la subnet $(f_\mu)_{\mu \geq \lambda'}$ converge puntualmente a f ; i.e., $f_\mu(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X$. Pero todos los miembros de la subnet $(f_\mu(x))$ están en $T[f_\lambda(x)]$ y T es cerrado. Entonces $T[f_\lambda(x)]$ es cerrado. $\therefore f(x) \in T[f_\lambda(x)], \forall x \in X$. Como T es simétrico, $f_\lambda(x) \in T[f(x)], \forall x \in X$. $\therefore \forall \lambda_0, \lambda \gg \lambda_0 \Rightarrow (f(x), f_\lambda(x)) \in T, \forall x \in X$. $\therefore \forall D \in \mathcal{D}, \exists \lambda_0 \in \Lambda, \lambda \gg \lambda_0 \Rightarrow (f(x), f_\lambda(x)) \in D, \forall x \in X$. "

5.9. Observaciones

a) Como se hace notar en la observación 5.4., para caracterizar la compacidad en \mathcal{T}_u , hace falta tener que $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$, lo cual es claro, y además hace falta encontrar restricciones que reduzcan \mathcal{T}_u a \mathcal{T} . Sin embargo, esto ocurre para una clase tan limitada de espacios (p.ej.: X compacto y discreto) que no vale la pena tratar de formular un planteamiento general.

b) La completitud en \mathcal{D}_u , es por al contrario simple de describir. Si tenemos (Y, \mathcal{D}) completo, (Y^X, \mathcal{D}_u) es completo. En efecto, una red (f_λ) que sea Cauchy uniforme es "Cauchy puntual", es decir, $(f_\lambda(x))$ es Cauchy en $Y, \forall x \in X$. Como Y es completo, cada $(f_\lambda(x))$ converge a un punto y_x . La red (f_λ) converge a la función definida por $f(x) = y_x$.

5.10. Ejemplos

a) $\mathcal{F} = \{f \in I^I \mid f(0) = 0\}$ es compacto en la topología puntual sobre I^I ;

donde $I = [0, 1]$. De acuerdo con el teorema 5.3, \mathcal{F} es cerrado en $(I^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_p)$ pues: sea g punto de acumulación de \mathcal{F} . $\exists (f_\lambda) \subset \mathcal{F} \ni f_\lambda \rightarrow g$ puntualmente; es decir, $f_\lambda(x) \rightarrow g(x) \forall x \in X$. En particular $f_\lambda(0) \rightarrow g(0)$.

Pero $f_\lambda \in \mathcal{F} \Rightarrow f_\lambda(0) = 0 \forall \lambda$; i.e., $f_\lambda(0) \rightarrow 0$. Pero I es Hausdorff.

Entonces $g(0) = 0 \therefore g \in \mathcal{F}$. Además $\overline{\{f(x) | f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en $(I^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_p)$, $\forall x \in X$. En efecto: I es compacto y $\overline{\{f(x) | f \in \mathcal{F}\}}$ es cerrado.

b) La colección de funciones $Y^{\mathbb{R}}$ con $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completa en \mathcal{D}_p . Consideremos la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^{\mathbb{R}}$, donde $f_n(x) = \frac{1}{n}$. (f_n) es una sucesión de Cauchy puntual $\wedge f_n \rightarrow f$ donde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Claramente $f \notin Y^{\mathbb{R}}$.

c) Consideremos $C(I, I)$ la colección de funciones continuas $f: I \rightarrow I$. Este conjunto no es completo en \mathcal{D}_p puesto que podemos encontrar una sucesión de funciones, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(I, I)$, donde $f_n(x) = x^n$, que es claramente de Cauchy y converge a la función $f: I \rightarrow I$, $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$, la cual no es continua. En general $(C(X, Y), \mathcal{D}_p)$ no es completo.

d) $(C(X, Y), \mathcal{D}_u)$ es completo si (Y, \mathcal{D}) es completo. Como $C(X, Y) \subset Y^X$ y (Y^X, \mathcal{D}_u) es completo, basta demostrar que $C(X, Y)$ es cerrado en (Y^X, \mathcal{T}_u) .

Consideremos $f \notin C(X, Y)$; i.e., $\exists x_0 \in X \ni f$ no es continua en $x_0 \therefore \exists D \in \mathcal{D}$ tal que $\forall U_{x_0} \subset X$, $f(U_{x_0}) \not\subset D[f(x_0)]$, i.e., $\forall U_{x_0}$, $U_{x_0} \not\subset f^{-1}(D[f(x_0)])$.

Consideremos $T \in \mathcal{D}$ simétrico $\ni T \circ T \subset D$. Sea $E_T[f] = \{g \in Y^X | (f(x), g(x)) \in T \forall x \in X\}$. $\forall g \in E_T[f]$, $x \in g^{-1}(T[f(x_0)]) \Rightarrow g(x) \in T[f(x_0)] \Rightarrow$

$(f(x_0), g(x_0)) \in T$. Pero como $(f(x), g(x)) \in T$, lo cual implica $(g(x), f(x)) \in T$,
 tenemos que $(f(x_0), f(x_0)) \in T \circ T \subset D \therefore f(x_0) \in D[f(x_0)] \therefore x_0 \in f^{-1}(D[f(x_0)])$
 $\therefore g^{-1}(T[f(x_0)]) \subset f^{-1}(D[f(x_0)]) \therefore \forall U_{x_0} \subset X, U_{x_0} \not\subset g^{-1}(T[f(x_0)])$; i.e.,
 $\exists T \in \mathcal{D} \ni \forall U_{x_0}, g(U_{x_0}) \not\subset T[f(x_0)]$; es decir, g no es continua en
 $x_0 \therefore f \notin C(X, Y) \Rightarrow \exists E_T[f] \ni E_T[f] \not\subset C(X, Y) \therefore C(X, Y)$ es
 cerrado.

e) Si \mathcal{F} es completo en \mathcal{D}_p sobre X , \mathcal{F} es completo en \mathcal{D}_u sobre X . Sea
 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Cauchy-Uniforme. Esto implica que (f_λ) es Cauchy puntual. Como
 estamos suponiendo que \mathcal{F} es completo en \mathcal{D}_p , $\exists f \in \mathcal{F} \ni f_\lambda \rightarrow f$ pun-
 tualmente. Por el Teorema 5.8., $f_\lambda \rightarrow f$ uniformemente $\therefore \mathcal{F}$ es com-
 plete en \mathcal{D}_u .

§6. La Topología Compacto - Abierto y la Topología de Convergencia Uniforme sobre Compactos

Antes de entrar en el estudio de estas dos topologías sobre colecciones de funciones, es necesario formular las definiciones que siguen y conocer algunas de las propiedades de los espacios que han quedado definidos.

6.1. Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. X es un k-espacio o espacio compactamente generado ssi satisface la condición:

$A \subset X$ es abierto en $(X, \tau) \iff A \cap K$ es abierto en (K, τ_K) , $\forall K \subset X$ compacto.

6.2. Definición

Sea (X, τ) espacio topológico y (Y, \mathcal{D}) espacio uniforme.

$\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es equicontinua en $x \in X$ ssi $\forall D \in \mathcal{D} \exists U_x \subset X$,

$f(U_x) \subset D[f(x)]$, $\forall f \in \mathcal{F}$. \mathcal{F} es equicontinua si es equicontinua en x , $\forall x \in X$.

6.3. Observaciones

a) La condición que define un k-espacio es siempre válida en el sen-

tido de que A abierto en (X, τ) implica $A \cap K$ abierto en (K, τ_K) , $\forall K$ compacto, puesto que K tiene la topología relativa inducida por τ , la topología de X . Por otro lado, si suponemos que $A \cap K$ es abierto en (K, τ_K) , $\forall K$ compacto, sabemos que $\exists G_K \subset X$ abierto $\ni A \cap K = G_K \cap K$, pero no necesariamente $G = A$.

b) En la definición 6.1, es válido sustituir "cerrado" por "abierto" pues: A cerrado en $X \iff A^c$ abierto en $X \iff A^c \cap K$ abierto en $K, \forall K$
 $\iff (A^c \cap K) \cup \emptyset = (A^c \cap K) \cup (K^c \cap K) = (A^c \cup K^c) \cap K$ abierto en $K, \forall K$
 $\iff A^c \cup K^c$ abierto en $K, \forall K \iff (A \cap K)^c$ abierto en $K, \forall K \iff A \cap K$ cerrado en $K, \forall K$.

c) Todo espacio localmente compacto es un k -espacio. Por consiguiente, todo espacio compacto y Hausdorff es un k -espacio y $\therefore \mathbb{R}$ con la topología usual también lo es.

d) Todo espacio primero-countable (en particular, un espacio métrico) es un k -espacio.

e) Si X es un k -espacio, $f: X \rightarrow Y$ es continua $\iff f|_K$ es continua $\forall K \subset X$, compacto.

f) Si $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ en $(C(X, Y), \tau_p)$ es equicontinua.

Ahora podemos definir una topología que resulta "más grande" que la

puntual, pero "más pequeña" que la uniforme.

6.4. Definición

Sean X y Y espacios topológicos. La topología compacto-abierta o K -topología sobre $\mathcal{F} \subset Y^X$ es la topología cuya subbase consta de los conjuntos $(K, U) = \{f \in \mathcal{F} \mid f(K) \subset U\}$, donde $K \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ es abierto. La denotamos T_c .

6.5 Observaciones

a) En la observación 5.2.a), ya habíamos hecho notar que el conjunto $\{f \in \mathcal{F} \mid f(x) \in A\}$, con $x \in X$ y A abierto en Y , es un elemento de la subbase de T_p . De manera análoga a la definición anterior, podemos denotar los elementos de la subbase de T_p como (x, A) y llamar a T_p la topología punto-abierta. Al sustituir K compacto por x en (x, A) , estamos haciendo "más pequeños" nuestros abiertos y, por consiguiente, haciendo "más grande" nuestra topología. La topología compacto-abierta ocupa un lugar intermedio en el espectro que va de T_p a T_u . Es interesante notar que T_u coincide con la topología generada por los $(X, U) = \{f \in \mathcal{F} \mid f(X) \subset U\}$ con U abierto en Y .

b) Si (Y, τ) es T_0, T_1 o T_2 , entonces (Y^X, T_c) es T_0, T_1 o T_2 respectivamente.

c) Si (Y, τ) es regular, entonces (Y^X, T_c) es regular.

d) Para poder demostrar que τ_c se reduce a τ_p sobre \mathcal{F} equicontinua, lo cual significa tener condiciones necesarias y suficientes para la compacidad en τ_c , es necesario introducir algunos conceptos previamente, que permiten desarrollar la demostración del Teorema 6.9.

No existe una uniformidad que corresponda perfectamente con τ_c , pero sí hay una que le corresponde sobre colecciones de funciones continuas.

6.6. Definición

Sea (Y, \mathcal{D}) un espacio uniforme. Los conjuntos $E_{K,D}$ tal que $E_{K,D} = \{ (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid (f(x), g(x)) \in D, \forall x \in K \}$, con $D \in \mathcal{D}$ y $K \subset X$ compacto, constituyen una subbase para \mathcal{D}_K , la uniformidad de convergencia uniforme sobre compactos o uniformidad de convergencia compacta. La topología asociada a \mathcal{D}_K es la topología de convergencia compacta, τ_K .

La comparación entre los $E_{K,D}$ mencionados y los $E_{F,D}$ que generan a \mathcal{D}_p establece una relación evidente entre (τ_K, \mathcal{D}_K) y (τ_p, \mathcal{D}_p) . Por otra parte, la relación entre (τ_K, \mathcal{D}_K) y (τ_u, \mathcal{D}_u) es una relación de convergencia descrita por el teorema que sigue.

6.7. Teorema

Sea $(f_\alpha) \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \subset Y^X$.

- i) $f_\lambda \rightarrow f$ en $\mathcal{T}_K \Leftrightarrow f_\lambda|_K \rightarrow f|_K$ en \mathcal{T}_U sobre K , $\forall K \subset X$, compacto; y
- ii) (f_λ) Cauchy en $\mathcal{D}_K \Leftrightarrow (f_\lambda|_K)$ Cauchy en \mathcal{D}_U sobre K , $\forall K \subset X$, compacto.

Demostración

- i) $f_\lambda \rightarrow f$ en $\mathcal{T}_K \Leftrightarrow \forall K \subset X$, compacto, $\forall D \in \mathcal{D}$, $\exists \lambda_0 \ni \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow (f, f_\lambda) \in E_{K,D} \Leftrightarrow (f(x), f_\lambda(x)) \in D, \forall x \in K \Leftrightarrow f_\lambda|_K \rightarrow f|_K$ en \mathcal{T}_U sobre K , $\forall K \subset X$, compacto.
- ii) (f_λ) Cauchy en $\mathcal{D}_K \Leftrightarrow \forall K \subset X$, compacto, $\forall D \in \mathcal{D}$, $\exists \lambda_0 \ni \lambda, \lambda' \geq \lambda_0 \Rightarrow (f_\lambda, f_{\lambda'}) \in E_{K,D} \Leftrightarrow (f_\lambda(x), f_{\lambda'}(x)) \in D, \forall x \in K \Leftrightarrow (f_\lambda|_K, f_{\lambda'}|_K) \in D, \forall x \in K \Leftrightarrow \forall K \subset X$, compacto, $(f_\lambda|_K)$ Cauchy en \mathcal{D}_U sobre K . //

El teorema anterior justifica el apelativo "convergencia uniforme sobre compactos." Ahora podemos establecer la relación entre \mathcal{T}_K y \mathcal{T}_C que ya se mencionó.

6.8. Teorema

$$\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_C \text{ sobre } C(X, Y).$$

La relación entre \mathcal{T}_C y \mathcal{T}_p es la siguiente.

6.9. Teorema

$$\mathcal{T}_C = \mathcal{T}_p \text{ sobre } \mathcal{F} \text{ equicontinua.}$$

Demostración

Basta demostrar que E cerrado en $(\mathcal{F}, \tau_c) \Leftrightarrow E$ cerrado en (\mathcal{F}, τ_p) . Y como sabemos que $f \in E$ cerrado $\Leftrightarrow \exists (f_\lambda) \subset E \rightarrow f_\lambda \rightarrow f$; entonces es suficiente demostrar que $f_\lambda \rightarrow f$ en $\tau_c \Leftrightarrow f_\lambda \rightarrow f$ en τ_p .

i) \Rightarrow Supongamos que $f_\lambda \rightarrow f$ en τ_c . Como estamos sobre $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$, por el teorema anterior, $f_\lambda \rightarrow f$ en τ_k . Según el Teorema 6.7, esto equivale a que $f_\lambda|_K \rightarrow f|_K$ en τ_u sobre K , $\forall K \subset X$, compacto. Por el Teorema 5.8. del párrafo 1, tenemos que $f_\lambda|_K \rightarrow f|_K$ en τ_p sobre K , $\forall K \subset X$, compacto; i.e., $\forall K$, $(f_\lambda|_K)(x) \rightarrow (f|_K)(x)$, $\forall x \in K$. Pero como $X = \bigcup \{K \subset X \mid K \text{ es compacto}\}$ porque, en último caso, cada punto de X es compacto, entonces $\forall x \in X$, $\exists K \subset X$, compacto, $\ni x \in K$. Por lo tanto, $\forall x \in X$, $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$; i.e., $f_\lambda \rightarrow f$ en τ_p .

ii) \Leftarrow Supongamos que $f_\lambda \rightarrow f$ en τ_p . En vez de considerar una vecindad cualquiera de f en τ_c , consideremos el elemento (K, U) de la subbase de $\tau_c \ni f \in (K, U)$. Recordemos, entonces, que $f(K) \subset U$ con K compacto en X y U abierto en Y . Queremos encontrar $\lambda_0 \ni \lambda \gg \lambda_0 \Rightarrow f_\lambda \in (K, U)$. Como $f_\lambda \rightarrow f$ en τ_p , en particular, $\forall x \in K$, $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$.

Ahora, como f es continua, $f(K)$ es compacto, y como $f(K) \subset U$, se puede encontrar $D \in \mathcal{D}_Y \ni D[f(K)] \subset U$. Consideremos $E \in \mathcal{D}_Y \ni E \circ E \subset D$. Entonces:

1) Por convergencia puntual, $\forall x \in K$, $\exists \lambda_x \ni \lambda \gg \lambda_x \Rightarrow (f(x), f_\lambda(x)) \in E$

2) Por equicontinuidad, $\forall x \in K$, $\exists U_x \ni f_\lambda(U_x) \subset E[f_\lambda(x)]$, $\forall \lambda \in \mathcal{L}$. Tene-

mos que $\lambda \gg \lambda_x \Rightarrow E[f_\lambda(x)] \subset (E \circ E)[f(x)]$ pues:

si $y \in E[f_\lambda(x)]$, $(f_\lambda(x), y) \in E$ y como $(f(x), f_\lambda(x)) \in E$, $(f(x), y) \in E \circ E$.

Entonces, $\lambda \gg \lambda_x \Rightarrow f_\lambda(U_x) \subset E[f_\lambda(x)] \subset (E \circ E)[f(x)] \subset D[f(x)] \subset D[f(K)] \subset U \therefore f_\lambda(U_x) \subset U$.

Los conjuntos U_x , $\forall x \in K$, forman una cubierta abierta de K . Pero K compacto $\Rightarrow \exists \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K \Rightarrow K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Escogamos $\lambda_0 \gg \lambda_{x_i}$, $i=1, \dots, n$.

Entonces $x \in K \Rightarrow \exists i \ni 0 \leq i \leq n \Rightarrow x \in U_{x_i}$. Entonces $\forall \lambda \gg \lambda_{x_i}$, $f_\lambda(x) \in U$.

Si consideramos $\lambda \gg \lambda_0$, tenemos que $\forall x \in K$, $f_\lambda(x) \in U$. $\therefore \forall \lambda \gg \lambda_0$,

$f_\lambda(K) \subset U$. $\therefore \forall \lambda \gg \lambda_0$, $f_\lambda \in (C(K, U))$. Por lo tanto, $f_\lambda \rightarrow f$ en T_c . //

6.10 Observaciones

a) Al encontrar condiciones (\mathcal{F} equicontinua) bajo las cuales T_c se reduce a T_p , podemos hablar de compacidad en T_c . Esta se enuncia seguidamente bajo el Teorema de Ascoli. La compacidad en T_K viene dada por las mismas condiciones, ya que, sobre $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$, $T_K = T_c$.

b) No tiene sentido hablar de completitud asociada a T_c pues ésta no cuenta con una uniformidad que le corresponda en todos los casos, ya que la topología uniforme T_K , generada por \mathcal{D}_K , sólo coincide con T_c sobre $C(X, Y)$. La completitud en \mathcal{D}_K , en cambio, adopta una forma simple, descrita en el Teorema 6.12.

6.11 Teorema (de Ascoli)

Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, regular o un k -espacio; (Y, \mathcal{D}) un espacio uniforme Hausdorff y $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.

\mathcal{F} es compacto en $\tau_{\mathcal{F}}$ si:

- i) \mathcal{F} es cerrado en $\tau_{\mathcal{F}}$.
- ii) $\forall x \in X, \overline{\pi_x(\mathcal{F})}$ es compacto en τ_p .
- iii) \mathcal{F} es equicontinua sobre $K, \forall K \subset X$, compacto.

6.12. Teorema

Sea (X, τ) un k -espacio, (Y, \mathcal{D}) un espacio uniforme. (Y, \mathcal{D}) es completo $\Rightarrow (C(X, Y), \mathcal{D}_k)$ es completo.

Demostración.

Sea $\{f_n\} \subset C(X, Y)$ Cauchy en \mathcal{D}_k . $\exists f \in C(X, Y) \Rightarrow f_n \rightarrow f$ en \mathcal{D}_k . Según el Teorema 6.7 y la observación 6.3. e), $\{f_n|_K\}$ es Cauchy en $(C(K, Y), \mathcal{D}_u)$ $\forall K$ compacto. Por el ejemplo 5.10. d), (Y, \mathcal{D}) completo $\Rightarrow (C(K, Y), \mathcal{D}_u)$ es completo $\forall K$ compacto. $\therefore \exists \{f_k: K \rightarrow Y$ continua $\Rightarrow f_n|_K \rightarrow f_k$ en $\tau_u, \forall K$ compacto. Definamos $f: X \rightarrow Y \ni f(x) = f_k(x), \forall x \in K$. f está bien definida, pues $X = \bigcup_{K \text{ compacto}} K$ y $\forall K_1, K_2$ compactos, $x \in K_1 \cap K_2 \Rightarrow f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) = f(x)$. Además f es continua pues $f_k = f|_K$ es continua, $\forall K$ compacto. Y finalmente, $f_n \rightarrow f$ en τ_k pues: $f_n|_K \rightarrow f_k$ en $\tau_u, \forall K$ compacto. $\therefore (C(X, Y), \mathcal{D}_k)$ es completo. //

6.13 Ejemplos

a) Si X es discreto, Y^X es una colección equicontinua de funciones; pues, para cualquier uniformidad que se asocie a Y , tenemos que:
 $\forall x \in X, \forall D \in \mathcal{D}, \exists \{x\}$ abierto en $X, f(\{x\}) \subset D[f(x)], \forall f \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, sobre Y^X con X discreto, la topología compacto-abierta se reduce a la puntual.

b) El Teorema de Arzela se presenta como una aplicación de la compacidad en una topología compacto-abierta: $\mathcal{F} \subset C[a,b]$ es compacto en $\tau_c \iff \mathcal{F}$ es uniformemente acotada y equicontinua.

BIBLIOGRAFIA

Wail, A. "Sur les Espaces a Structure Uniforme, et Sur la Topologie
1937 Generale". Act. Sci. et Ind. 551. (Paris) Hermann

Willard, S. General Topology. Philippines: Addison - Wesley Pub. Co.
1970

Apéndice

Cubiertas y Refinamientos

Definiciones

1. Una cubierta de X es una colección \mathcal{A} de subconjuntos de X \rightarrow

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

2. Una subcubierta de una cubierta \mathcal{A} es una subcolección \mathcal{A}' de \mathcal{A} \rightarrow

\mathcal{A}' es una cubierta de X .

3. Una cubierta abierta de X es una cubierta que consiste de conjuntos abiertos.

4. Una cubierta abierta \mathcal{U} es encogible ssi $\exists \mathcal{V}$ cubierta abierta \rightarrow

$\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V}, \bar{V} \subset U$. \mathcal{V} es un encogimiento de \mathcal{U} .

5. Una cubierta \mathcal{U} es punto-finita ssi $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} \rightarrow$

$$\text{Card} \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\} = n.$$

6. Una cubierta \mathcal{U} refina a una cubierta \mathcal{V} ssi $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V} \rightarrow$

$U \subset V$. \mathcal{U} es un refinamiento de \mathcal{V} . Se denota: $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

7. La estrella de un subconjunto A de X respecto de una cubierta \mathcal{U} es

$$\mathcal{U} \{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}. \text{ Se denota } \text{St}(A, \mathcal{U}).$$

8. Una cubierta \mathcal{U} es refinamiento estrella de una cubierta \mathcal{V} ssi

$$\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V}, \text{St}(U, \mathcal{U}) \subset V. \text{ Se denota: } \mathcal{U}^* \prec \mathcal{V}.$$

9. Una cubierta \mathcal{U} es refinamiento baricéntrico de una cubierta \mathcal{V} ssi $\{St(x, \mathcal{U}) \mid x \in X\} \prec \mathcal{V}$. Se denota $\mathcal{U} \Delta \mathcal{V}$.
10. La intersección de las cubiertas \mathcal{U} y \mathcal{V} es $\{U \cap V \mid U \in \mathcal{U} \wedge V \in \mathcal{V}\}$. Se denota $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$.
11. Una sucesión normal de cubiertas $(\mathcal{U}_i)_{i=1}^{\infty}$ es aquella en la que $\mathcal{U}_{n+1} \prec \mathcal{U}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
12. \mathcal{U} es una cubierta normal ssi $\exists (\mathcal{U}_i)_{i=1}^{\infty}$ sucesión normal de cubiertas $\ni \mathcal{U} = \mathcal{U}_1$.
13. \mathcal{D} es una familia normal de cubiertas ssi $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{D}, \exists \mathcal{V} \in \mathcal{D} \ni \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.
14. Una cubierta \mathcal{U} es normalmente abierta ssi $\exists (\mathcal{U}_i)_{i=1}^{\infty}$ sucesión normal de cubiertas abiertas $\ni \mathcal{U} = \mathcal{U}_1$.

Propiedades

$\forall \mathcal{U}, \mathcal{V}$ y \mathcal{W} cubiertas de X , se tiene que:

1. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \Delta \mathcal{V}$
2. $\mathcal{U} \Delta \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{V}$
3. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$
4. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{W}$
5. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{U} \wedge \mathcal{W}$
6. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{W}$

$$7. u < v \wedge v^+ < w \rightarrow u^+ < w$$

$$8. u \Delta v \wedge v \Delta w \rightarrow u^+ < w$$

$$9. u \Delta v \wedge v \Delta w \rightarrow u \Delta w$$