

# UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Brazo de Robot

Guatemala  
1990

BRAZO DE ROBOT

# UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Brazo de Robot

BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Trabajo presentado para optar al grado académico  
de Licenciado en Ingeniería Electrónica

Guatemala  
1990

A mis amigos

# UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Guatemala, Guatemala, C. A.

## ACTA DE GRADUACION

Nº. de orden: 1098

En la ciudad de Guatemala, a las diecinueve horas del día siete  
de junio de mil novecientos noventa, reunidos los infrascritos  
Ingeniera Kari Campos de Fremme, Ingeniero Juan Carlos Campo, Ingeniero Ricardo Cordón

,  
miembros del tribunal nombrado por el Consejo Directivo de la Universidad del Valle de  
Guatemala para practicar a

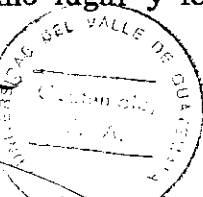
JOSÉ ROLANDO MATA SÁNCHEZ

el EXAMEN DE GRADUACION previo a optar al título de  
INGENIERO ELECTRÓNICO EN EL GRADO DE LICENCIADO,

procedieron, conforme a los Estatutos y Reglamentos vigentes, a hacer al sustentante las  
preguntas que estimaron pertinentes a la calidad del examen y lo aprobaron  
(aprobaron - reprobaron)  
otorgándole, en forma individual y secreta, las notas de tres aprobados

No habiendo nada más que hacer constar, se da por terminado el acto a las  
veinte treinta horas, en el mismo lugar y fecha.

[Signature]  
[Signature]  
Ante mí:

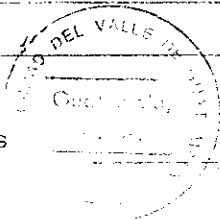


[Signature]  
[Signature]  
Daniel Contreras E.  
Secretario

Observaciones: El señor Mata Sánchez presentó para su examen de graduación el trabajo  
titulado "Brazo de robot".

Vo.Bo.

[Signature]  
Ing. Miguel A. Canga-Argüelles  
Rector



[Signature]  
Daniel Contreras E.  
Secretario

## PREFACIO

La Robótica es una tecnología producto de la necesidad de automatización y eficiencia de la producción industrial. Es necesario agrupar conocimientos de diferentes ramas de ingeniería y ciencia para el desarrollo de un autómeta. El avance tecnológico actual ha favorecido el desarrollo de sistemas de control cada vez más precisos y de menor costo.

El presente modelo de trabajo profesional consiste en el diseño de un brazo de robot teleoperado, incluido dentro de la clasificación de robots industriales, contando con la opción de aprendizaje.

El diseño consiste de un brazo con cinco articulaciones giratorias y una prismática. La fuente de energía es eléctrica transformada por medio de motores de corriente directa. El control de cada motor es independiente y realizado por medio de un circuito específicamente desarrollado para el efecto. La opción de aprendizaje ha sido diseñada empleando un sistema digital basado en un microprocesador Z-80. Se emplea multiplexación en tiempo

para el control de los seis diferentes circuitos de control de cada articulación. La teleoperación en tiempo real, al igual que el aprendizaje, se realizan por medio de una estructura acoplable externa y, temporalmente, al brazo del usuario. La retroalimentación se ha diseñado empleando potenciómetros en el eje de las articulaciones del brazo de robot y de la estructura de control.

## CONTENIDO

PREFACIO.....	VII
LISTA DE FIGURAS.....	IX
LISTA DE GRÁFICAS.....	XV
LISTA DE TABLAS.....	XVII
LISTA FOTOGRAFÍAS.....	XIX

### Capítulos

I.	INTRUDUCCIÓN .....	1
II.	BRAZO DE ROBOT .....	3
	A. Visión general de la investigación en robótica .....	3
	B. Generalidades del proyecto desarrollado .....	5
	1. Definiciones generales.....	5
	2. Proyecto desarrollado .....	6
	3. Capacidades Generales .....	11
III.	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA UN MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA CON CARGA	
	A. Notación y símbolos.....	13
	B. Terminología de la representación por Medio de diagrama de bloque.....	15
	C. Conocimientos previos.....	16
	D. Desarrollo de dos modelos matemáticos para Motores de corriente directa.....	18
	1. Reducción de velocidad angular.....	19
	2. Análisis del sistema.....	28
	3. Obtención de la matriz de la función de transferencia directa.....	39
	E. Control y observación .....	48

	Páginas
F. Análisis por el método del lugar de las raíces (root locus)	58
1. Determinación del punto de fuga	67
2. Determinación de la sensibilidad de bucle K para el punto de fuga calculado	68
3. Determinación de la sensibilidad de bucle K para un valor $\zeta=0.7$	68
4. Determinación del valor de $\zeta$ para K=6	70
G. Aplicación del criterio de estabilidad de Routh	79
H. Análisis en el dominio de la frecuencia	80
IV. ESTABILIDAD DE LAS ARTICULACIONES DEL SISTEMA	93
V. DESARROLLO DE HARDWARE	107
VI. DESARROLLO DE SOFTWARE	118
A. Forma de grabación	119
B. Capacidades generales del algoritmo desarrollado	122
C. Definición de términos utilizados en el algoritmo desarrollado	124
D. Diagrama de Flujo del algoritmo desarrollado	125
VII. VALIDACION DE DISEÑO	136
A. Circuito de control	136
B. Software	153

	Páginas
VIII. BIBLIOGRAFIA	159
APENDICES	160
A. Especificaciones de circuitos integrados utilizados	160

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 Brazo de robot	7
2.2 Angulos de giro de las articulaciones	8
2.3 Dimensiones del brazo de robot	9
2.4 Estructura de control	10
2.5 Dimensiones de la estructura de control	10
3.1 Diagrama de bloques de un sistema retroalimentado	15
3.2 Configuración del sistema de engranajes	20
3.3 Circuito equivalente del sistema de engranajes	20
3.4 Sistema mecánico de motor D.C. con carga y fuerza de fricción	28
3.5 Circuito eléctrico equivalente de un motor D.C. controlado por el inducido	28
3.6 Velocidad tangencial y velocidad angular	30
3.7 Diagrama de bloques para la representación primera	34
3.8 Diagrama de bloques para la representación segunda	38
3.9 Diagrama de bloques simplificado para la representación primera	44
3.10 Diagrama de bloques simplificado para la representación segunda	47

Figura		página
4.1	Longitudes de los segmentos móviles de las estructura	93
4.2	Cargas para la articulación 2 para máxima inercia rotacional estructural	94
4.3	Inercia rotacional estructural mínima para la articulación 2	96
5.1	Definición de ángulo máximo y ángulo mínimo para la articulación 3	108
5.2	Descripción de la brecha diferencial	109
5.3	Círculo desarrollado para control de motores D.C.	112
5.4	Diagrama de la forma de interconexión de los circuitos de control de los motores con la unidad lógica	114
5.5	Forma de conexión del ADC-0808	115
5.6	Forma de conexión del circuito integrado 74154	115
5.7	Forma de conexión del DAC-08	116
5.8	Forma de conexión del bloque llamado circuito de fijación	117
6.1	Forma cualitativa de apilamiento de un estado	121
6.2	Forma cualitativa de apilamiento de los estados de una ruta	121
6.3	Forma cualitativa de apilamiento de rutas en el stack de rutas	122
6.4	Diagrama de flujo de algoritmo total	126
6.5	Diagrama de flujo de subrutina grabar	127

Figura		página
6.6	Diagrama de flujo de subrutina grabar continuación (2)	128
6.7	Diagrama de flujo de subrutina grabar continuación (3)	129
6.8	Diagrama de flujo de subrutina orden para salir	130
6.9	Diagrama de flujo de subrutina ejecutar	131
6.10	Diagrama de flujo de subrutina preparar para grabar o ejecutar	132
6.11	Diagrama de flujo de subrutina ubicar en ruta deseada	133
6.12	Diagrama de flujo de subrutina ejecute	134
6.13	Diagrama de flujo de subrutina ejecute (continuación)	135
7.1	Diagrama de bloques para el modelo matemático primero	137
7.2	Diagrama para computadora analógica	138
7.3	Diagrama para computadora analógica con nueva escala	139
7.4	Forma de conexión con el circuito de control real	140
7.5	Diagrama de bloques de la salida de la computadora analógica	141
7.6	Circuito de computadora analógica	143
7.7	Forma de conexión del circuito con el osciloscopio para la obtención de fotografías	144
7.8	Hardware de teclado utilizado	154

Figura		página
7.9	Hardware para indicaciones visuales de ejecución y grabación de ruta	154
7.10	Hardware de display utilizado	155
7.11	Opciones en el teclado	155
7.12	Forma de conmutación manual para opciones de grabación y ejecución	156

## LISTA DE GRAFICAS

Gráfica	página
3.1 Ubicación de polos y ceros para el caso en que el sistema es no controlable	57
3.2 Lugar de las raíces cualitativo para la ecuación 3.103	65
3.3 Comportamiento cualitativo de los polos dominantes del sistema	66
3.4 Gráfica para la obtención de $\eta$	70
3.5 Lugar de las raíces para diferentes cargas aplicadas al motor U9M4T	78
3.6 Respuesta a frecuencia del polo dominante $P = -10246.6$	88
3.7 Magnitud de logaritmo en decibeles para $J_L = (7, 5, 3) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	89
3.8 Angulo de fase en grados $J_L = (7, 5, 3) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	90
3.9 Magnitud de logaritmo en decibeles para $J_L = (8, 6, 4) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	91
3.10 Angulo de fase en grados para: $J_L = (8, 6, 4) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	92
4.1 Magnitud de logaritmo en decibeles para $J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	98
4.2 Angulo de fase en grados para $J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	99
4.3 Magnitud de logaritmo en decibeles para $J_L = (0, 3) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	103
4.4 Angulo de fase en grados para $J_L = (0, 3) \text{ Kg-m}^2$ ; $W_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$	104

Gráfica	página
4.5 Polos dominantes para $J_L = 3 \text{ Kg-m}^2 ; K = 6$	105
4.6 Polos dominantes para $J_L = 0 \text{ Kg-m}^2 ; K = 6$	106

## LISTA TABLAS

Tabla	página
3.1 Constantes para motores de corriente directa. (U9M4T y U12M4T)	61
3.2 Resultados para U9M4T para diferentes valores de inercia rotacional de carga	72
3.3 Resultados para U9M4T para diferentes valores de inercia rotacional de carga (2)	73
3.4 Resultados para U9M4T para diferentes valores de inercia rotacional de carga (3)	74
3.5 Resultados para U12M4T para diferentes valores de inercia rotacional de carga	75
3.6 Resultados para U12M4T para diferentes valores de inercia rotacional de carga (2)	76
3.7 Resultados para el análisis de frecuencia para el motor U9M4T con diferentes cargas	83
3.8 Resultados para el análisis de frecuencia para el motor U9M4T con diferentes cargas (2)	84
3.9 Resultados para el análisis de frecuencia para el motor U9M4T con diferentes cargas (3)	85
3.10 Resultados para el análisis de frecuencia para el motor U9M4T con diferentes cargas (4)	86
4.1 Cargas estructurales mínimas y máximas para cada articulación del sistema	101

Tabla		página
4.2	Características de ejecución para cada articulación del sistema	102
5.1	Especificaciones de transistores utilizados	110
5.2	Dispositivos utilizados por cada circuito de control	111

## LISTA DE FOTOGRAFIAS

Fotografía	página
7.1 Excitación con señal cuadrada (1)	146
7.2 Excitación con señal cuadrada (2)	147
7.3 Excitación con señal cuadrada (3)	148
7.4 Excitación con señal triangular	149
7.5 Excitación con señal senoidal (1)	150
7.6 Excitación con señal senoidal (2)	151
7.7 Señal de controlado restada a la señal de control al aplicarse excitación con onda cuadrada	152

## I. INTRODUCCION

El presente modelo de trabajo profesional se ha dividido en dos etapas. Una es la parte de diseño teórico y la restante es la parte de la implementación de modelos para la validación y observación del comportamiento de la parte teórica.

En el capítulo II se presenta una serie de conocimientos elementales de robótica, necesarios para la ubicación del diseño desarrollado dentro de la investigación de vanguardia de la tecnología mencionada. Se presenta en forma general las capacidades del sistema diseñado.

El capítulo III consiste en la presentación del desarrollo detallado de dos diferentes modelos matemáticos en espacio de estado para un motor de corriente directa con carga. El análisis de estabilidad, incluyendo análisis de control, observación y respuesta a la frecuencia, se ha efectuado empleando uno de los dos modelos matemáticos antes mencionados. Este capítulo es de vital importancia para comprender el desarrollo del sistema de control de cada motor y del sistema total por medio de la unidad lógica. Existe la posibilidad de emplearse como

soporte para el desarrollo de otros tipos de proyectos de automatización que incluyan el control de motores de corriente directa.

En el capítulo IV se presenta la aplicación al proyecto de los conocimientos presentados en el capítulo III.

En el capítulo V y VI se presenta el hardware y el software diseñados.

En el capítulo VII se incluye el desarrollo de un modelo eléctrico equivalente a un motor de corriente directa basado en una de las matrices de función de transferencia directa desarrolladas en el capítulo III. Se incluye una serie de fotografías de la respuesta del sistema de control real acoplado al equivalente eléctrico. Para la validación de la parte de los algoritmos desarrollados se presenta el hardware y el software implementados en una unidad lógica basada en un microprocesador Z-80.

## II. BRAZO DE ROBOT

### A. Visión general de la investigación en robótica

Una de las más recientes tecnologías es la robótica, la cual es el resultado del ancestral anhelo humano de facilitar el trabajo. Una rama de la robótica incluye el estudio de los llamados robots industriales que son utilizados en labores de manipulación de piezas o herramientas en la industria.

Con el desarrollo de la tecnología actual, la capacidad creativa del hombre se ha visto favorecida para suplir la necesidad de automatización de labores, tanto para obtener más tiempo libre como para favorecer precisión, calidad y eficiencia en el volumen de producción industrial.

Es cierto que un robot puede ser funcional, si es de bucle abierto, si se tiene especial cuidado en la parte de programación y se asume que el ambiente que le rodea está perfectamente definido. En la actualidad, la mayoría de robots industriales instalados son de éste tipo. Sin embargo, en el campo de la investigación en robótica, la tendencia que predomina es la de utilizar retroalimentación, para lo cual se cuenta con la presencia dentro del sistema de sensores para la obtención de

información referente al ambiente que rodea al robot industrial, teniendo como ventaja inmediata el no tener un ambiente perfectamente definido alrededor del mismo. Entre estos sensores se cuenta con cámaras de televisión para el procesamiento de imágenes, sensores de presión, ultrasonido y detección infrarroja para obtener información de la proximidad de objetos u obstáculos, potenciómetros para el conocimiento de la ubicación segmentos móviles.

En la actualidad, también se cuenta con una especialización en el desarrollo de técnicas de programación de computadoras para el manejo de señales de retroalimentación y control de robots, que con la disponibilidad de un poder computacional barato y altamente compacto se podrá contar con una unidad lógica total por cada articulación giratoria o prismática de un brazo de robot. Esta debe ser lo suficientemente poderosa para procesar todas las señales de retroalimentación presentes y controlar, bajo la supervisión de una computadora especialmente diseñada, cada articulación.

Otro de los objetivos de la investigación actual es que, teniendo un brazo de robot con un número determinado de articulaciones, generalmente 6, la capacidad de procesamiento de datos sea lo suficientemente poderosa para

pensar, únicamente, en coordenadas externas del sistema. Para lo anterior es claro que se necesita que se efectúen, en forma simultánea al control y procesamiento de señales de retroalimentación, las transformaciones necesarias para obtener ángulos de cada una de las articulaciones presentes, además de generar en forma automática, con base en criterios previamente definidos, la ruta óptima .

## B. Generalidades del proyecto desarrollado

### 1. Definiciones generales.

Robot Industrial: Robot que realiza trabajos de manipulación de piezas o herramientas en el área industrial.

Robot de Aprendizaje: Robot capaz de almacenar secuencias de movimientos para luego poder ejecutarlas de forma automática. En el proceso de grabación es necesario conocer todos los puntos de la trayectoria a grabar.

Robot de control numérico: Robot capaz de almacenar secuencias de movimientos en el que el proceso de grabación se realiza por medio de la introducción de coordenadas externas al sistema. La generación de la secuencia de movimientos se efectúa por interpolación y con base en criterios, previamente definidos, para la optimización. Es necesario hacer transformaciones para

obtener los ángulos de cada una de las articulaciones partiendo de las coordenadas externas del sistema.

Robot inteligente: Robot con bucles de retroalimentación utilizados para conocer el ambiente que lo rodea.

Robot teleoperado: Robot capaz de ser controlado a distancia y en tiempo real.

2. Proyecto desarrollado. Se ha efectuado el diseño para un brazo de robot con seis articulaciones. El diseño total no ha sido implementado. Se ha utilizado el método de simulación aplicado a un motor de corriente directa, con carga y fricción, para observar la forma de comportamiento de los circuitos de control y de los algoritmos desarrollados para la etapa de grabación y ejecución de diferentes secuencias de movimientos. Los algoritmos han sido implementados en lenguaje ensamblador para el microprocesador Z-80. La simulación se realizó en una unidad lógica basada en el microprocesador Z-80, interconectada con los circuitos reales de control del motor de corriente directa. A continuación se presentan los diagramas del brazo mecánico diseñado y de la estructura que servirá para el control del mismo.

Figura 2.1  
Diagrama de Brazo de Robot

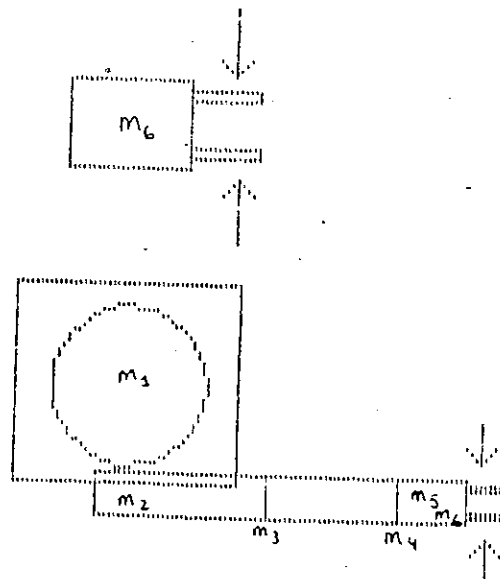
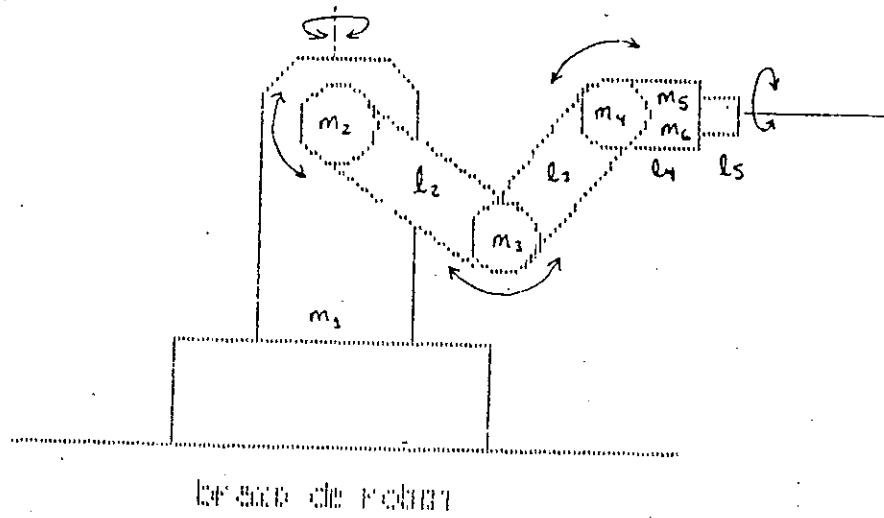


Figura 2.2

Diagrama de ángulos de giro de las articulaciones

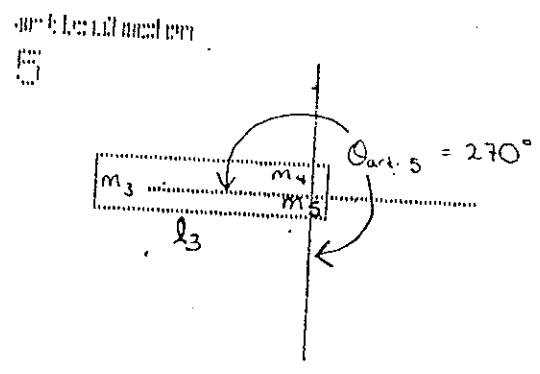
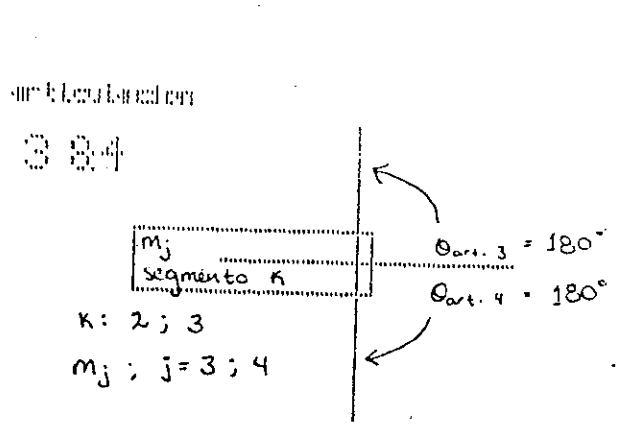
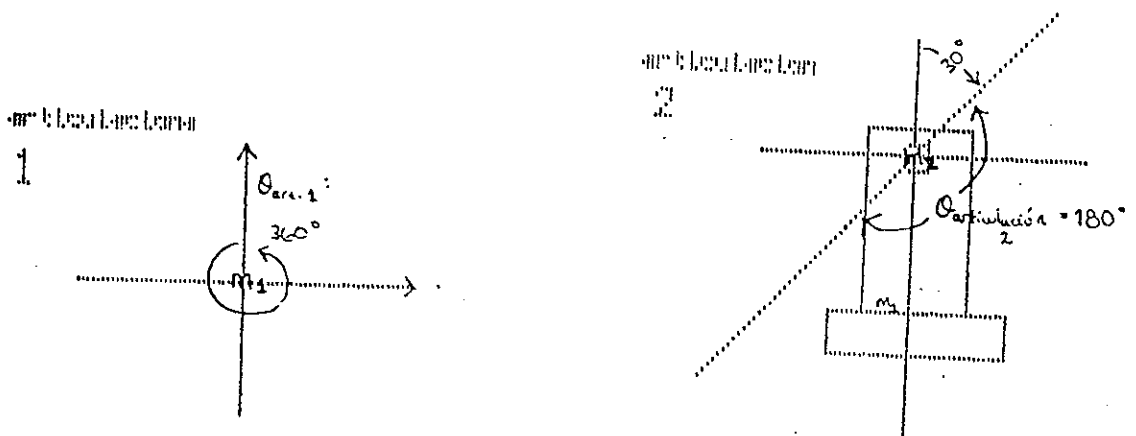
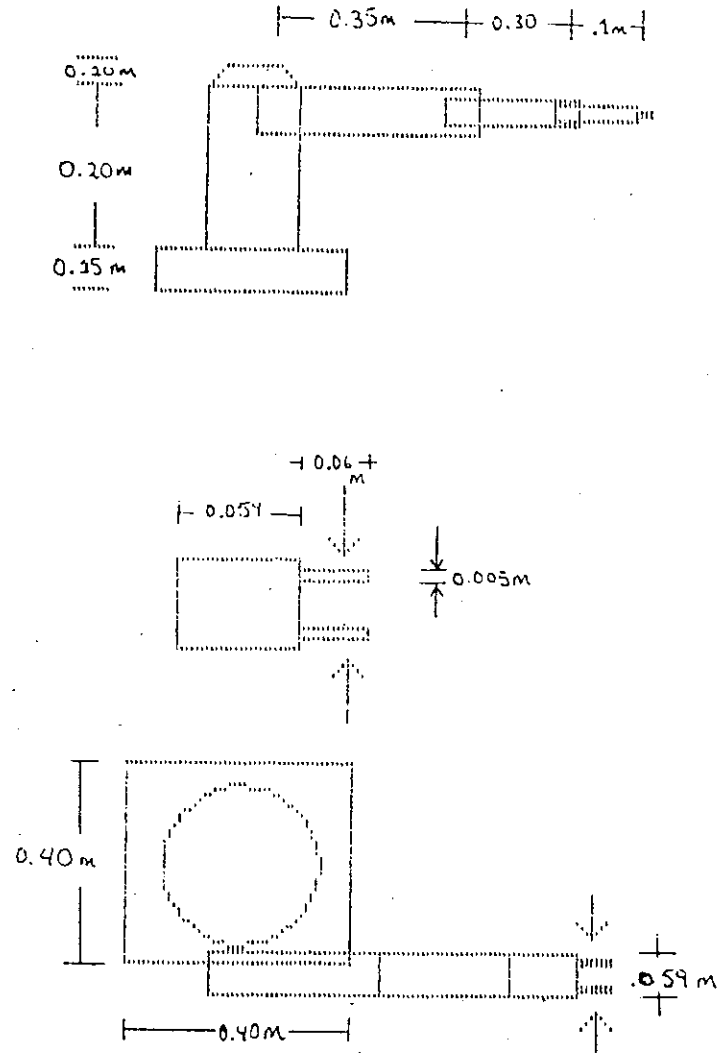


Figura 2.3

Dimensiones del brazo de robot

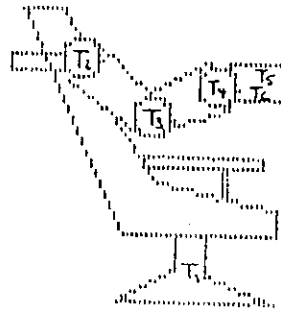


En base a la figura 2.1 se observa que:

$m_x$  = motor que acciona la articulación número x.

Figura 2.4

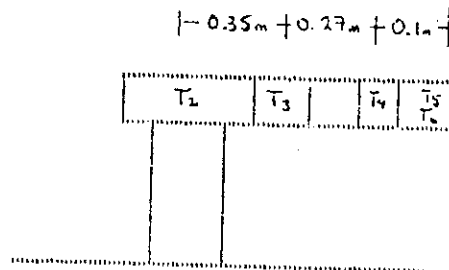
Diagrama de la estructura de control



$T_x$  : transductor de articulación  $x$ .

Figura 2.5

Dimensiones de la estructura de control



El brazo de robot diseñado se incluye dentro del área de robots industriales. Cuenta con cinco articulaciones giratorias y una articulación prismática. La fuente de energía es eléctrica, transformada por medio de motores de corriente directa. Es un robot teleoperado, de aprendizaje e inteligente.

### 3. Capacidades generales del proyecto desarrollado.

El brazo de robot diseñado es un manipulador con tres grados de libertad.

Es capaz de funcionar como esclavo del brazo de control, utilizando, para el efecto, un circuito de control por cada motor de corriente directa. Lo anterior proporciona la ventaja que cada articulación puede efectuar movimientos independientes entre ellas, además de no ser necesaria la intervención del microprocesador en la modalidad de ejecución simultánea al control.

Cuenta con la opción de almacenar en memoria RAM diez secuencias de movimientos o rutas diferentes, controlando las seis diferentes articulaciones.

Es capaz de ejecutar cualquiera de las diez rutas que se encuentren almacenadas en memoria RAM; con opción a ordenar la ejecución de la misma de una a noventa y nueve veces, o en modalidad de ejecución sin número definido de repeticiones de la secuencia total.

El programa cuenta con facilidades de inicialización, tres tipos diferentes de reset y dos opciones de abort.

La comunicación entre la unidad lógica del sistema y el usuario se efectúa mediante un teclado y un display para la parte de ejecución de una ruta almacenada en memoria RAM, agregándose la estructura de control para la opción de grabación de ruta.

### III. ANALISIS DE ESTABILIDAD PARA UN MOTOR DC CON CARGA

Para el análisis se han desarrollado dos diferentes vectores de estado que representan a un sistema compuesto por un motor de corriente directa controlado por armadura y acoplado a una carga con fricción por medio de engranajes no ideales.

#### A. Notación y símbolos

Se define el sistema de ecuaciones de estado como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu \\ y &= C\bar{x} + Du\end{aligned}$$

Donde:

- A : Matriz de estado o del sistema
- x : Vector de estado
- B : Matriz de control
- C : Matriz de salida
- D : Matriz de alimentación directa
- u : Vector de control
- y : Vector de salida
- $I_{n \times n}$  : Matriz identidad n x n
- $\Phi(s)$  : Matriz de transición de estado o matriz fundamental en el dominio de la frecuencia

- $\Phi(t)$  : Matriz de transición de estado o matriz fundamental en el dominio del tiempo  
 $\mathcal{L}\{f(t)\}$  : Transformada de Laplace de la función  $f(t)$   
 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  : Transformada inversa de Laplace de la función  $F(s)$   
 $Q(\lambda)$  : Ecuación característica o polinomio característico de la matriz de estado  
 $T$  : Matriz no singular de transformación  
 $z$  : Vector de estado transformado  
 $\Gamma$  : Matriz modal  
 $B'$  : Matriz de modo de controlabilidad  
 $C'$  : Matriz de modo de observabilidad  
 $\omega_n$  : Frecuencia natural no amortiguada  
 $\omega_d$  : Frecuencia natural amortiguada  
 $r$  : Coeficiente de amortiguamiento  
 $\zeta$  : Razón de amortiguamiento

Sea:

$$b_2 m^2 + b_1 m + b_0 = 0$$

Eq. 3.00

Donde

$$\zeta = b_1 / 2 \sqrt{b_2 b_0} = \cos \eta$$

$$\omega_n = \sqrt{b_0 / b_2}$$

Entonces, la ecuación 3.00 se convierte en:

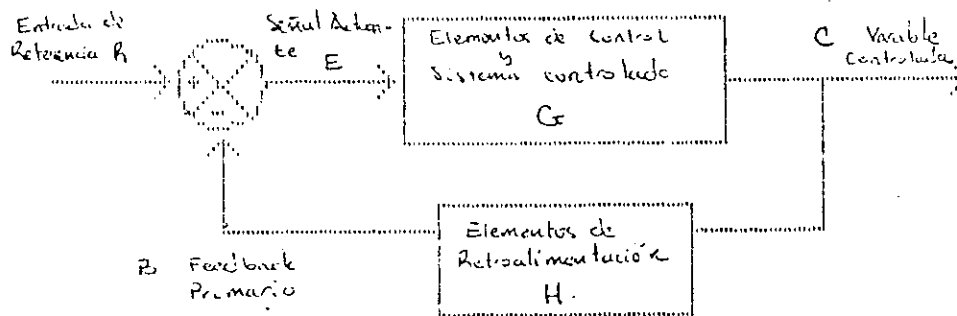
$$m^2 = 2 \zeta \omega_n m + \omega_n^2$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

B. Terminología de la representación por medio de diagrama de bloques

Figura 3.1

Diagrama de bloques de un sistema con retroalimentación



$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$M(s)$  : Función de transferencia total o razón de control

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Se define como el polinomio característico del sistema de lazo cerrado

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

Se definirá como función de transferencia de lazo abierto

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Función de transferencia directa

Sea:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + a_1) \cdots (s + a_h) \cdots (s + a_w)}{s^m (s + b_1) \cdots (s + b_c) \cdots (s + b_u)}$$

$K$  : Sensibilidad de bucle

### C. Conocimientos previos

La estabilidad en un sistema es fundamental para evitar el daño parcial o destrucción total del mismo. Se debe

recordar que los criterios de estabilidad son distintos para los sistemas lineales utilizados para los sistemas variables en el tiempo o los no lineales.

En un sentido cualitativo, se puede describir la estabilidad de los sistemas lineales como la habilidad del mismo para obtener un estado de equilibrio después de haber sido excitado. También se considera estable a un sistema en el cual sus variables controladas se desplazan en una región finita, del espacio respectivo, cuando sus variables de control son acotadas. Para la estabilidad de un sistema completo es necesario que las variables internas también cumplan con los criterios de estabilidad. Estos criterios se encuentran determinados por las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema  $Q(\lambda)$ . Un sistema es asintóticamente estable cuando todas las raíces de  $Q(\lambda)$  poseen parte real menor que cero, observándose claramente el comportamiento correspondiente descrito con anterioridad en forma cualitativa. El criterio restante ocurre cuando una o más de las raíces poseen parte real igual a cero, llamando a estos sistemas estables o BIBO. Es claro que la inestabilidad ocurrirá en los casos en que el polinomio posea una o más raíces con parte real mayor que cero. Se recuerda que existen casos especiales en que, al existir raíces con parte real cero repetidas, una o más de las variables internas o

controladas pueden tender al infinito ante la presencia de estados iniciales determinados, con lo que el sistema se vuelve inestable.

En general, se definirá el estado de un sistema como el conjunto mínimo de variables necesarias para poder especificar el comportamiento del sistema en  $\tau > t$  cuando se conozcan las entradas del sistema para  $\tau > t$ .

Se dice que un sistema es observable cuando se puede determinar el estado inicial basándose en mediciones de la salida. En forma más clara es cuando se puede determinar el vector de estado a partir del vector de salida. La definición implica que cada cambio del vector de estado afecta al vector de salida.

Un sistema es controlable cuando el vector de estado se puede situar en un punto final cualquiera en un tiempo finito con un vector de control correcto. La definición implica que el vector de control es capaz de afectar cada variable de estado.

#### D. Desarrollo de dos modelos matemáticos para motores de corriente directa

A continuación se presenta el desarrollo del modelo matemático para motores de corriente directa controlados por el inducido.

Se tomará en cuenta la presencia de carga acoplada por medio de engranajes no ideales.

Se plantean dos diferentes representaciones en el espacio de estado de la dinámica del sistema.

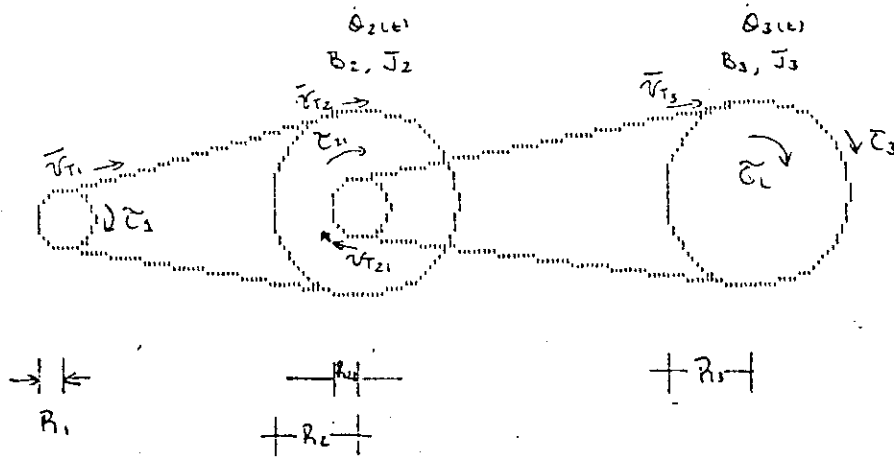
Finalmente, se presenta la obtención de la matriz de estado de la función de transferencia directa para los dos modelos.

1. Reducción de velocidad angular A continuación se procederá a la determinación de la función de transferencia de un sistema de tres engranajes no ideales.

La configuración y la definición de la inercia rotacional de los engranajes se puede observar en la figura 3.2.

Figura 3.2

Configuración del sistema de engranajes



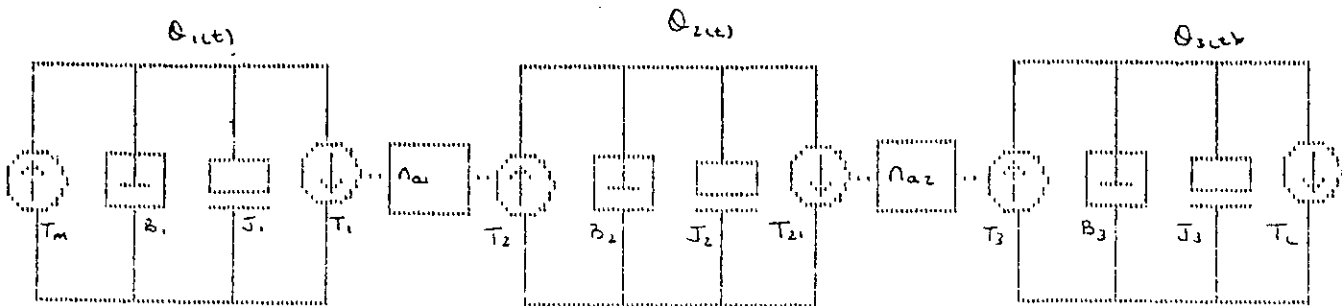
$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$$

$$J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

$$J_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$$

Figura 3.3

Circuito equivalente del sistema de engranajes



Sea:

- $T_m$  : torque de motor  
 $T_L$  : torque entregado a la carga  
 $J_x$  : inercia rotacional del engranaje x  
 $B_x$  : coeficiente de fricción del engranaje x  
 $Q_x$  : desplazamiento angular del engranaje x  
 $n_{a1}$  : relación de radios del engranaje 2 al engranaje 1  
 $n_{a2}$  : relación de radios del engranaje 3 al engranaje 21

Análisis del sistema:

i) Se sabe que:

$$\bar{v}_T = \bar{\omega} R = \dot{Q}_{(t)} R$$

$$\bar{a}_T = \bar{\alpha} R = \ddot{Q}_{(t)} R$$

se define

$$n_{a1} = R_2 / R_1 \quad \text{Eq. 3-1}$$

$$n_{a2} = R_3 / R_{21} \quad \text{Eq. 3-2}$$

Asumiendo que no habrá pérdida de energía por acoplamiento.

Entonces:

$$\tau_1 \dot{\theta}_1 = \tau_2 \dot{\theta}_2$$

$$\tau_{21} \dot{\theta}_{21} = \tau_3 \dot{\theta}_3$$

Por tanto:

$$\tau_2 = \tau_1 (\dot{\theta}_1 / \dot{\theta}_2) \quad \text{Eq. 3-3}$$

$$\tau_3 = \tau_{21} (\dot{\theta}_{21} / \dot{\theta}_3) \quad \text{Eq. 3-4}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\bar{V}_{1T}}{R_1} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\bar{V}_{2T}}{R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{R_2}{R_1} = n_{a1} \quad \text{Eq. 3-5}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{21} &= \bar{V}_{T21} / R_{21} \\ \dot{\theta}_3 &= \bar{V}_{T3} / R_3 \end{aligned} \right\} \text{ya que : } \bar{V}_{T1} = \bar{V}_{T2} \quad \text{Eq. 3-6}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{21}}{\dot{\theta}_3} = \frac{R_3}{R_{21}} = n_{a2}$$

$$\text{ya que: } \bar{V}_{T21} = \bar{V}_{T3}$$

Los radios de los engranajes utilizados son independientes del tiempo, entonces:

$$n_{a1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{\ddot{\theta}_1}{\ddot{\theta}_2} \quad \text{Eq. 3-7}$$

$$n_{a2} = \frac{\theta_{21}}{\theta_3} = \frac{\dot{\theta}_{21}}{\dot{\theta}_3} = \frac{\ddot{\theta}_{21}}{\ddot{\theta}_3} \quad \text{Eq. 3-8}$$

Substituyendo las ecuaciones 3-7 y 3-8 en las ecuaciones 3-3 y 3-4

Se obtiene:

$$\tau_2 = \tau_1 n_{a1} \quad \text{Eq. 3-9}$$

$$\tau_3 = \tau_{21} n_{a2} \quad \text{Eq. 3-10}$$

Analizando el sistema mecánico con ayuda del circuito equivalente:

$$T_m = [J_1 D^2 + B_1 D] \theta_1 + T_1 \quad \text{Eq. 3-11}$$

$$T_2 = [J_2 D^2 + B_2 D] Q_2 + T_{21}$$

Eq. 3-12

$$T_3 = [J_3 D^2 + B_3 D] Q_3 + T_L$$

Eq. 3-13

Ahora se puede observar que

$$\dot{Q}_{21} = \dot{Q}_2$$

$$\dot{Q}_3 = \dot{Q}_L$$

Además

$$Q_{21} = Q_2$$

Eq. 3-14

$$\dot{Q}_{21} = \dot{Q}_2$$

Eq. 3-15

$$\ddot{Q}_{21} = \ddot{Q}_2$$

Eq. 3-16

&

$$Q_3 = Q_L$$

Eq. 3-17

$$\dot{Q}_3 = \dot{Q}_L$$

Eq. 3-18

$$\ddot{Q}_3 = \ddot{Q}_L$$

Eq. 3-19

Teniendo en cuenta lo anterior,  
se puede utilizar la ecuación 3-8

$$\frac{Q_{z1}}{Q_3} = \frac{Q_2}{Q_3} n_{az} \quad \text{Eq. 3-20}$$

Utilizando la ecuación 3-10

$$\tau_3 = \tau_{z1} n_{az} \Rightarrow \tau_{z1} = \tau_3 / n_{az}$$

Ahora se puede substituir la ecuación 3-13 en la ecuación  
3-12

$$T_2 = [J_2 D^2 + B_2 D] Q_2 + [J_3 D^2 + B_3 D] \frac{Q_3}{n_{az}} + \frac{T_L}{n_{az}}$$

Utilizando la ecuación 3-20

$$Q_3 = Q_2 / n_{az}$$

$$T_2 = [J_2 D^2 + B_2 D] Q_2 + [J_3 D^2 + B_3 D] \frac{Q_2}{n_{az}} + \frac{T_L}{n_{az}}$$

$$T_2 = \left[ \left( J_2 + \frac{J_3}{n_{az}^2} \right) D^2 + \left( B_2 + \frac{B_3}{n_{az}} \right) D \right] Q_2 + \frac{T_L}{n_{az}} \quad \text{Eq. 3-21}$$

Utilizando la ecuación 3-9

$$\tau_2 = \tau_1 n_{a1}$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 / n_{a1}$$

Por tanto, se puede sustituir  
la ecuación 3-21 en la ecuación 3-11,  
convirtiéndose la ecuación 3-11 en:

$$T_m = \left[ J_1 D^2 + B_1 D \right] Q_1 + \left[ \left( J_2 + \frac{J_3}{n_{a2}^2} \right) D^2 + \left( B_2 + \frac{B_3}{n_{a2}^2} \right) D \right] \frac{Q_2}{n_{a1}} + \frac{T_L}{n_{a2} n_{a1}}$$

Utilizando la ecuación 3-7

$$\frac{Q_1}{Q_2} = n_{a1} \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{[Q] n_{a1}}$$

Entonces

$$T_m = \left[ \left( J_1 + \frac{J_2}{n_{a1}^2} + \frac{J_3}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right) D^2 + \left( B_1 + \frac{B_2}{n_{a1}^2} + \frac{B_3}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right) D \right] Q_1 + \frac{T_L}{n_{a2} n_{a1}}$$

Se define a la inercia rotacional equivalente como:

$$J_{eq} = \left( J_1 + \frac{J_2}{n_{a1}^2} + \frac{J_3}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right)$$

Y al coeficiente de fricción equivalente como:

$$B_{eq} = \left( B_1 + \frac{B_2}{n_{a1}^2} + \frac{B_3}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right)$$

Ahora se hace notar que:

$$T_L = [J_L D^2 + B_L D] \theta_3$$

Utilizando ecuaciones 3-7, 3-8, 3-14, 3-17

$$\theta_L = \theta_3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{\theta_2}{n_{a2}} = \frac{\theta_1}{n_{a2}}$$

$$\theta_3 = \frac{\theta_1/n_{a1}}{n_{a2}} ; \theta_3 = \frac{\theta_1}{n_{a1} n_{a2}}$$

$$T_L = \left[ \frac{J_L}{n_{a2} n_{a1}} D^2 + \frac{B_L}{n_{a2} n_{a1}} D \right] \theta_1$$

Por tanto, se puede ver que:

$$J_{Ea} = \left( J_1 + \frac{J_2}{n_{a1}^2} + \frac{J_3 + J_L}{n_{a2}^2 n_{a1}^2} \right)$$

$$B_{Ea} = \left( B_1 + \frac{B_2}{n_{a1}^2} + \frac{B_3 + B_L}{n_{a2}^2 n_{a1}^2} \right)$$

$$T_m = [J_{Ea} D^2 + B_{Ea} D] \theta_1$$

Donde  $\theta_1(t)$  es el desplazamiento angular en el engranaje acoplado al eje del motor.

2. Análisis del sistema.

Figura 3.4

Sistema mecánico de motor D.C. con carga  
y fuerza de fricción

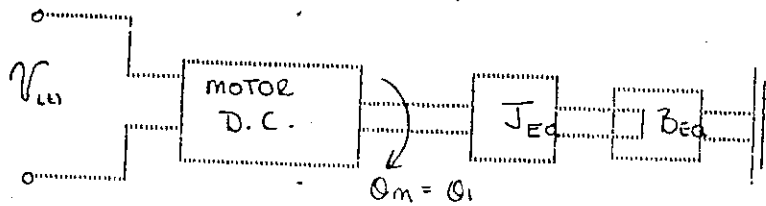
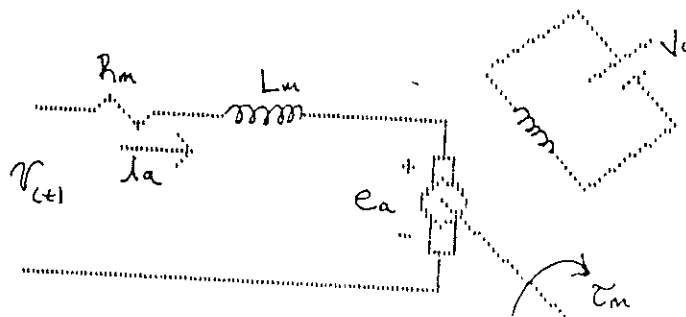


Figura 3.5

Circuito eléctrico equivalente de un motor D.C.  
controlado por el inducido



Se tiene un flujo magnético constante en el inductor. Entonces:

$$T_{(t)} = K_T i_{a(t)} \quad \text{Eq. 3.22}$$

Y un voltaje inducido

$$e_{a(t)} = K_b \dot{\theta}_m(t) \quad \text{Eq. 3.23}$$

Se analiza el circuito de armadura, y se obtiene que:

$$L_m \dot{I}_{a(t)} + R_m I_{a(t)} + e_{a(t)} = e_{u1} = V_{u1} \quad \text{Eq. 3.24}$$

Del análisis efectuado para el torque entregado por el motor a la carga se obtiene:

$$J_{eq} = J = \left( J_1 + \frac{J_2}{n_{a1}^2} + \frac{J_3 + J_L}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right)$$

$$B_{eq} = B = \left( B_1 + \frac{B_2}{n_{a1}^2} + \frac{B_3 + B_L}{n_{a1}^2 n_{a2}^2} \right)$$

$$T_{m(t)} = J D^2 \theta_{1(t)} + B D \theta_{1(t)} \quad \text{Eq. 3.25}$$

Notar que:  $\theta_{1(t)} = \theta_m(t)$

Según las ecuaciones 3.22 y 3.25

$$T_m(t) = K_T i_a(t) = J D^2 \theta_1(t) + B D \theta_1(t) \quad \text{Eq. 3.26}$$

también

$$L_m D i_a(t) + R_m i_a(t) + K_b \dot{\theta}_m(t) = e(t) \quad \text{Eq. 3.27}$$

$$\frac{L_m}{K_T} J D^3 \theta_1(t) + \frac{L_m B + R_m J}{K_T} D^2 \theta_1(t) + \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T} D \theta_1(t) = e(t) \quad \text{Eq. 3.28}$$

La ecuación 3.28 se transforma al dominio de frecuencia por medio de la transformada de Laplace y se obtiene:

$$\frac{L_m}{K_T} J \Phi(s) s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{K_T} \Phi(s) s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T} s \Phi(s) - e(s) = 0$$

Luego:

$$\Phi(s) = \frac{1}{B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s} e(s)$$

Donde:

$$B_1 = \frac{L_m J}{K_T}$$

$$B_2 = \frac{L_m B + R_m J}{K_T}$$

$$B_3 = \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T}$$

**Representación primera:** De la ecuación 3.28 se obtiene:

$$D^3 \theta_1(t) = - \left( \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} \right) D^2 \theta_1(t) - \left( \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \right) D \theta_1(t) + \frac{e(t)}{L_m J} K_T$$

Eq. 3.29

Se define:

$$E_1 = - \left( \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \right)$$

Eq. 3.30

$$E_2 = - \left( \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} \right)$$

Eq. 3.31

Según la definición efectuada en la parte 1 de la sección D de éste capítulo se tiene que  $n_{a1}$  y  $n_{a2}$  son la relación de radios de los engranajes correspondientes.

De la definición antes mencionada se obtiene que:

$$Q_3 = \frac{Q_{L(t)}}{n_{az} n_{ax}} = Q_{L(t)}$$

Entonces:

$$D^3 Q_{L(t)} = -\left(\frac{L_m B + R_m J}{L_m J}\right) D^2 Q_{L(t)} - \left(\frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J}\right) D Q_{L(t)} + \frac{K_T}{L_m J n_{ax} n_{az}} e(t)$$

Ahora se definirá el sistema en su representación en el espacio de estado.

$$X = \begin{bmatrix} Q_{L(t)} \\ \dot{Q}_{L(t)} \\ \ddot{Q}_{L(t)} \end{bmatrix}$$

Eq. 3.32

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J}\right) & -\left(\frac{L_m B + R_m J}{L_m J}\right) \end{bmatrix}$$

Eq. 3.33

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (K_T / (L_m J_{m, \text{rot}})) \end{bmatrix}$$

Eq. 3.34

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.35

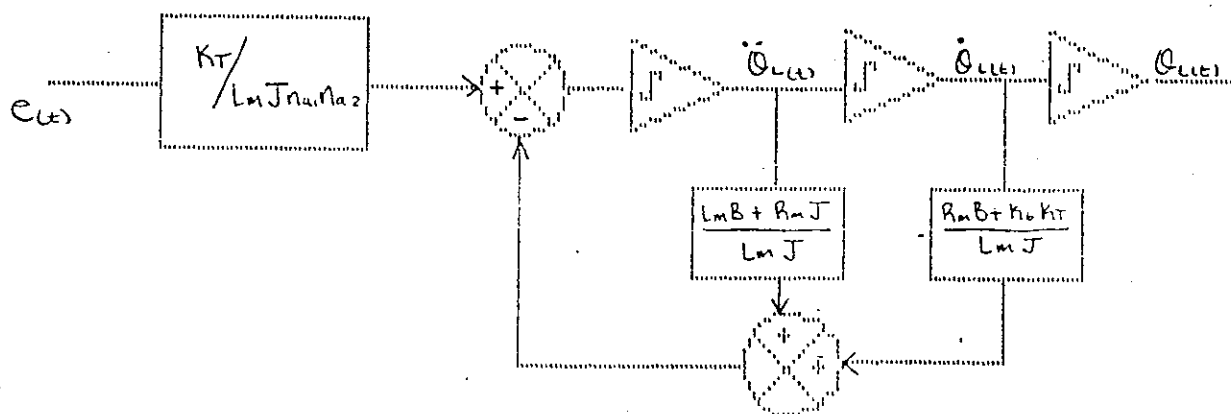
$$D = \bar{0}$$

Eq. 3.36

En la figura 3.7 se presenta el diagrama de bloques que describe la dinámica del sistema.

Figura 3.7.

Diagrama de bloques para la representación primera



Representación segunda: De la ecuación 3.26 se obtiene:

$$D^2 Q_2(t) = -\frac{B}{J} D Q_2(t) + \frac{K_T}{J} j_a(t) \quad \text{Eq. 3.37}$$

De la ecuación 3.27 se obtiene:

$$D j_a(t) = -\frac{K_b}{L_m} D Q_2(t) - \frac{R_m}{L_m} j_a(t) + \frac{e(t)}{L_m} \quad \text{Eq. 3.38}$$

Se sabe que:

$$Q_3(t) = \frac{Q_2(t)}{N_{a1} N_{a2}} = Q_L(t)$$

Entonces la ecuación 3.37 se puede transformar en:

$$D^2 Q_L(t) = -\frac{B}{J} D Q_L(t) + \frac{K_T}{J N_{a1} N_{a2}} j_a(t) \quad \text{Eq. 3.39}$$

Y la ecuación 3.38 se transforma en:

$$D j_a(t) = -\frac{K_b}{L_m} N_{a1} N_{a2} D Q_L(t) - \frac{R_m}{L_m} j_a(t) + \frac{e(t)}{L_m} \quad \text{Eq. 3.40}$$

Ahora se definirá el sistema en su representación en el espacio de estado.

$$X = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_L(t) \\ \ddot{\theta}_L(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}$$

Eq. 3.41

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & K_T/Jn_mN_aZ \\ 0 & -\frac{K_b}{L_m} n_mN_aZ & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix}$$

Eq. 3.42

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_m \end{bmatrix}$$

Eq. 3.43

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.44

$$D = \bar{0}$$

Eq. 3.45

Donde:

$$K_1 = -B/J$$

$$K_2 = K_r / J n_{a1} n_{a2}$$

$$K_3 = -\left(\frac{K_o}{L_m}\right) n_{a1} n_{a2}$$

$$K_4 = -R_{a1} / L_m$$

Se recuerda que el sistema en espacio de estado es:

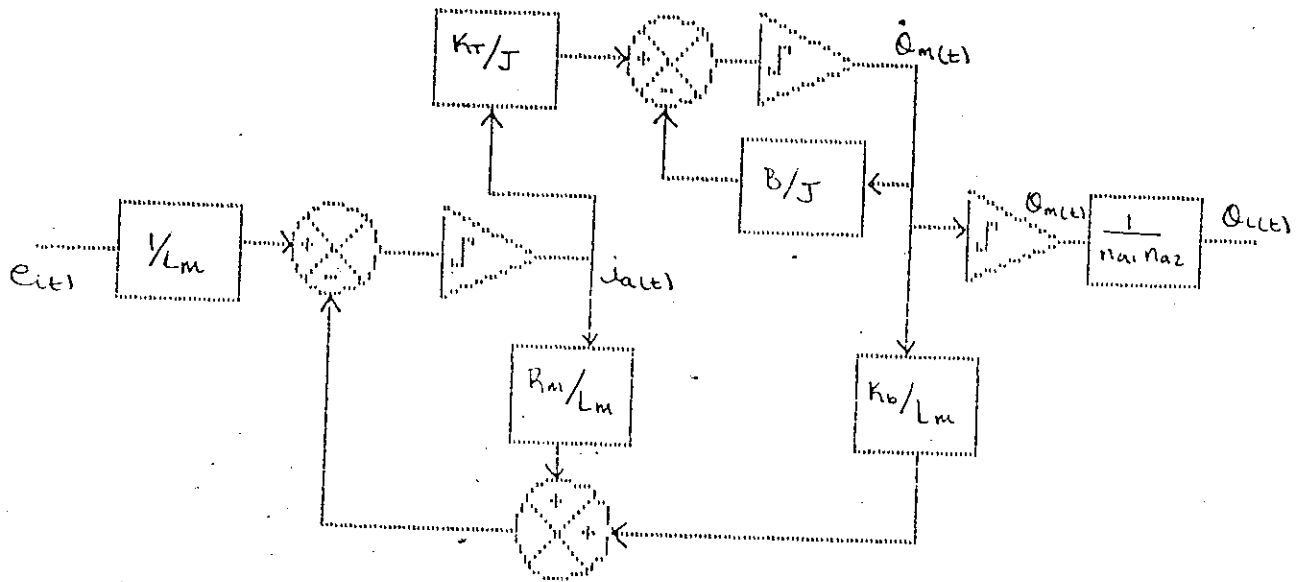
$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

En la figura 3.8 se muestra el diagrama de bloques de la representación segunda.

Figura 3.8

Diagrama de bloques de representación segunda



1. Obtención de la matriz de la función de transferencia directa. Representación primera: Se utiliza la matriz de estado definida por la ecuación 3.33.

Se sabe que:

$$\bar{\Phi}(s) = [sI - A]^{-1} \quad \text{Eq. 3.46}$$

Donde  $\bar{\Phi}$  es la matriz de transición de estado.

Entonces:

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -E_1 & (s - E_2) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.47}$$

Se sabe que:  $[sI - A]^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} \text{ADJ}[sI - A]$

$$\text{ADJ}[sI - A] = \begin{bmatrix} s(s - E_2) - E_1 & 0 & 0 \\ s - E_2 & s(s - E_2) & E_1 s \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{ADJ}[sI-A] = \begin{bmatrix} s(s-E_2)-E_1 & s-E_2 & 1 \\ 0 & s(s-E_2) & s \\ 0 & E_1 s & s^2 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.48

$$\text{DET}[sI-A] = s^3(s-E_2) - E_1 s$$

$$\text{DET}[sI-A] = s^3 - E_2 s^2 - E_1 s$$

$$\text{DET}[sI-A] = s(s^2 - E_2 s - E_1)$$

Eq. 3.49

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{E_2 \pm \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2}$$

Se define:

$$r_1 = \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2}$$

Eq. 3.50

$$r_2 = \frac{E_2 - \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2}$$

Eq. 3.51

$$\text{DET}[sI-A] = s(s-r_1)(s-r_2)$$

Eq. 3.52

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{1}{s(s-r_1)(s-r_2)} \begin{bmatrix} s(s-E_2)E_1 & s-E_2 & 1 \\ 0 & s(s-E_2) & s \\ 0 & E_1 s & s^2 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.53

Evaluando la matriz de la función de transferencia total

$$Y(s) = M(s)U(s) \quad \text{Eq. 3.54}$$

$$M(s) = C\bar{\Phi}(s)B + D \quad \text{Eq. 3.55}$$

$$M(s) = \frac{K_T / J L_m N_a N_z}{s(s-r_1)(s-r_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.56}$$

Donde:

$$r_1 = \left( \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \right) \quad \text{Eq. 3.50}$$

$$r_2 = \left( \frac{E_2 - \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \right) \quad \text{Eq. 3.51}$$

$$E_1 = - \left( \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \right) \quad \text{Eq. 3.30}$$

$$E_2 = - \left( \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} \right) \quad \text{Eq. 3.31}$$

Se sabe que:

$$\text{DET}[SI - \Delta] = s(s^2 - E_2 s - E_1) \quad \text{Eq. 3.49}$$

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ s\theta(s) \\ s^2\theta(s) \end{bmatrix} = \frac{K_T/J L_m N_a N_z}{s(s-r_1)(s-r_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\text{Eq. 3.57}$$

Se obtiene:

$$\frac{K_T / J L m N_{a1} N_{a2}}{s(s-r_1)(s-r_2)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Se define:

$$H(s) = 1$$

Entonces:

$$G(s) = \frac{K_T / J L m N_{a1} N_{a2}}{s(s-r_1)(s-r_2) - 1} \quad \text{Eq. 3.58}$$

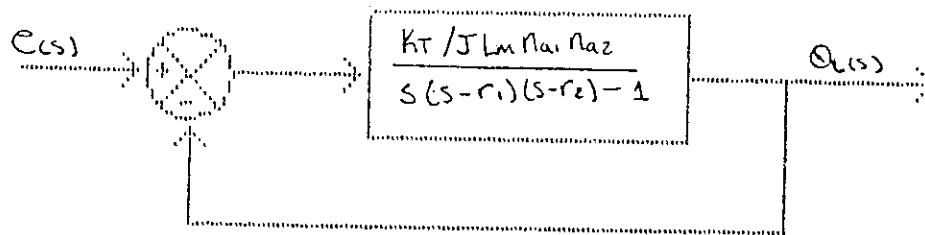
Donde:

$$r_1 = \left( \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \right) \quad \text{Eq. 3.50}$$

$$r_2 = \left( \frac{E_2 - \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \right) \quad \text{Eq. 3.51}$$

Figura 3.9

Diagrama de bloques simplificado para  
la representación primera



Representación segunda: Utilizando Eq. 3.46 se  
obtendrá:

$$[SI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & (s - k_1) & -k_2 \\ 0 & -k_3 & (s - k_4) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.60}$$

$$\text{ADJ}[SI-A] = \begin{bmatrix} (s-k_1)(s-k_4) - k_3 k_2 & 0 & 0 \\ (s-k_4) & s(s-k_4) & k_3 s \\ k_2 & k_2 s & s(s-k_1) \end{bmatrix}$$

$$|[SI-A]| = s(s-k_1)(s-k_4) - k_3 k_2 s$$

$$[SI-A]^{-1} = \frac{1}{|[SI-A]|} \begin{bmatrix} (s-k_1)(s-k_4) - k_3 k_2 & (s-k_4) & k_2 \\ 0 & s(s-k_4) & k_2 s \\ 0 & k_3 s & s(s-k_1) \end{bmatrix}$$

Eq. 3.61

Utilizando Eq. 3.55:

$$M(s) = \frac{1/L_m}{s(s-k_1)(s-k_4) - k_3 k_2 s} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 s \\ s(s-k_1) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.62}$$

Donde:

$$K_1 = -B/J \quad \text{Eq. 3.63}$$

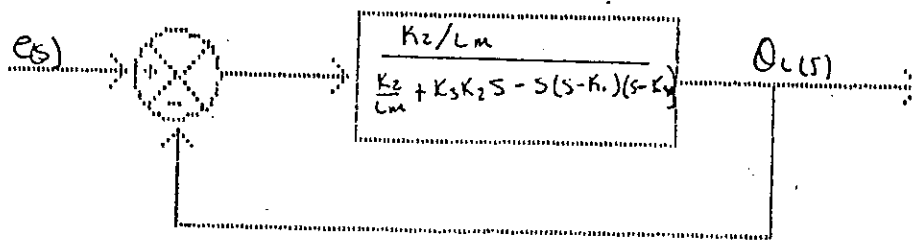
$$K_2 = K_T / J N_{a1} N_{a2} \quad \text{Eq. 3.64}$$

$$K_3 = -\left(\frac{K_0}{L_m}\right) N_{a1} N_{a2} \quad \text{Eq. 3.65}$$

$$K_4 = -\frac{R_m}{L_m} \quad \text{Eq. 3.66}$$

$$\begin{bmatrix} 0(s) \\ s 0(s) \\ i(s) \end{bmatrix} = \frac{1/L_m}{s(s-K_1)(s-K_4) - K_3 K_2 s} \begin{bmatrix} K_2 \\ K_2 s \\ s(s-K_1) \end{bmatrix} u(s) \quad \text{Eq. 3.67}$$

Figura 3.10  
Diagrama de bloques simplificado  
para la representación segunda



### E. Controlabilidad y observabilidad

Se efectuará el análisis de controlabilidad y observabilidad para el modelo primero, en el cual su vector de estado es:

$$x = \begin{bmatrix} Q(t) \\ \dot{Q}(t) \\ \ddot{Q}(t) \end{bmatrix}$$

La matriz de estado para este modelo fue definida en 3.33 como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J}\right) & -\left(\frac{L_m B + R_m J}{L_m J}\right) \end{bmatrix}$$

Se puede observar que esta matriz se encuentra en la forma llamada escalera (Companion form), por lo que se puede utilizar la matriz de Vandermonde para su diagonalización.

Se procede a la evaluación del polinomio característico de la matriz de estado para la obtención de los eigenvalores.

$$Q(\lambda) = |\lambda I - A|$$

Se definen

$$\beta_1 = - \left( \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \right)$$

$$\beta_2 = - \left( \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} \right)$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -\beta_1 & \lambda - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Eq 3.68

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 [\lambda - \beta_2] - \beta_2 \lambda$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_1 \lambda$$

Eq. 3.68A

$$|\lambda I - A| = \lambda [\lambda^2 - \beta_2 \lambda - \beta_1]$$

Determinación de los eigenvalores:

$$\lambda(\lambda^2 - \beta_2 \lambda - \beta_2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 0$$

Eq. 3.69

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_2}}{2}$$

Eq. 3.70

$$\lambda_3 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_2}}{2}$$

Eq. 3.71

Se procede a la construcción de la matriz de Vandermonde.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.72

Inversión de la matriz de  
Vandermonde.

$$T^{-1} = \frac{\text{ADJ } T}{|T|}$$

Eq. 3.73

A continuación se presenta el  
cálculo de los cofactores de la  
matriz de Vandermonde.

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_2^2 - \lambda_3^2$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^2$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = -\lambda_2^2$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3 - \lambda_2$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = -\lambda_3$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2$$

$$\text{ADJ } T = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

Eq. 3.74

$$\text{ADJ } T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ 0 & C_{22} & C_{32} \\ 0 & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Eq. 3.75

$$\text{DET } T = \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\text{DET } T} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ 0 & C_{22} & C_{32} \\ 0 & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Eq. 3.76

Después de efectuar la transformación se obtiene:

$$X = Tz$$

Eq. 3.77

$$\dot{X} = T \dot{z}$$

Eq. 3.78

$$T \dot{z} = ATz + Bu$$

Eq. 3.79

Ahora:

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

Eq. 3.80

$$\& \quad y = CTz + Du$$

Eq. 3.81

Que es el nuevo sistema de matrices de estado:

Para este caso se sabe que:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Eq. 3.82

Por tanto, según las ecuaciones 3.69, 3.70, 3.71, se obtiene:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Donde :

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2}$$

con

$$\beta_2 = - \left( \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} \right)$$

$$\beta_1 = - \left( \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \right)$$

Evaluando la matriz de modo de controlabilidad  $B'$ .

Donde:

$$B' = T^{-1}B$$

Eq. 3.83

De la ecuación 3.34 se

sabe que:

$$B' = \frac{1}{\text{DET } T} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ 0 & C_{22} & C_{32} \\ 0 & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_T / L_m J n_{a1} n_{a2} \end{bmatrix}$$

$$B' = \frac{1}{\text{DET } T} \left( \frac{K_T}{L_m J n_{a1} n_{a2}} \right) \begin{bmatrix} \lambda_3 - \lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET } T = \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2}$$

$$\beta_1 = -\left( \frac{K_m B + K_b K_T}{L_m J} \right)$$

$$\beta_2 = -\left( \frac{L_m B + K_m J}{L_m J} \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2}$$

En función de la matriz de modo de controlabilidad obtenida es necesario saber cuando  $(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2} - \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1} - \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta_2^2 + 4\beta_1} = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0$$

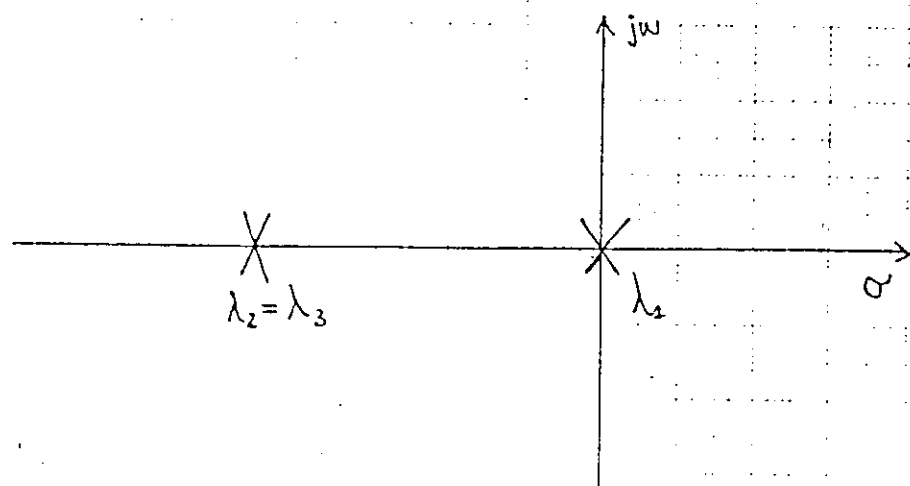
$$\frac{L_m B + R_m J}{L_m J} - 4 \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} = 0$$

Cuando esta condición se presente el sistema será no controlable. Esto sucederá cuando:

$$\lambda_2 = \lambda_3$$

Gráfica 3.1

Diagrama de polos y ceros para el caso  
en que el sistema es no controlable



Evaluando la matriz de modo de  
observabilidad  $C'$ .

Donde:

Eq.3.84

Se recuerda que:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Eq.3.85

De lo anterior se ve claramente que el sistema es controlable para cualquier combinación de eigenvalores.

F. Análisis por el método del lugar de las raíces (root locus)

Se sabe que:

$$M(s) = \frac{C(s)}{L(s)} = \frac{K_T / J L_m n_{a1} n_{a2}}{s^3 - E_2 s^2 - E_1 s} \quad \text{Eq.3.86}$$

$$E_2 = - \frac{L_m B + K_m J}{L_m J} \quad \text{Eq.3.87}$$

$$E_1 = - \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} \quad \text{Eq.3.88}$$

Para el análisis es necesaria la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s)$ . Se define  $H(s) = 1$

Se sabe que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

De lo anterior se obtiene:

$$G(s) = \frac{K_T / J L_m N_{a1} N_{a2}}{s^2 - E_2 s - E_1} - 1 \quad \text{Eq. 3.89}$$

$$G(s) = \frac{K_T / J L_m N_{a1} N_{a2}}{s(s-r_1)(s-r_2)} - 1 \quad \text{Eq. 3.90}$$

$$r_1 = \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \quad \text{Eq. 3.91}$$

$$r_2 = \frac{E_2 - \sqrt{E_2^2 + 4E_1}}{2} \quad \text{Eq. 3.92}$$

Luego:

$$G(s)H(s) = \frac{K_T / N_{a1} N_{a2} J L_m}{s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} s} - 1 \quad \text{Eq. 3.93}$$

De donde se puede identificar al polinomio característico  $D_1(s)$  como:

$$D_1(s) = s^3 + E_2 s^2 + E_1 s - 1 \quad \text{Eg.3.94}$$

Para este caso el análisis del método del lugar de las raíces se puede efectuar utilizando la solución de ecuaciones algebraicas para una ecuación cúbica, pudiendo obtenerse la factorización del polinomio característico con las mismas variables utilizadas hasta ahora. Como se observa, se obtendría un polinomio característico factorizado general utilizable para cualquier motor de corriente directa. Sin embargo para el presente análisis se ha decidido sustituir los valores correspondientes para los motores U9M4T y U12M4T.

Tabla 3.1  
Constantes para motores de corriente directa

Variable	U9M4T	U12M4T
$K_T$ (N-m/A)	0.04307	0.10166
$J_m$ (Kg-m )	$6 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-4}$
$B_m$ (N-m-s/rad)	$8.14 \times 10^{-5}$	$3.05 \times 10^{-4}$
$K_b$ (V-s/rad)	0.04297	0.10123
$L$ ( $\mu$ H)	100.	100.
$R$ ( $\Omega$ )	1.025	0.910
$K_{ta}$ (V-s/rad)	0.02149	0.05062
$f_m$ (N-m)	$4.26 \times 10^{-2}$	$4.26 \times 10^{-2}$
$n_{a1}n_{a2}$	100	100

Se sabe que para la relación de engranajes escogida se tiene:

$$J = J_m + \frac{J_L}{(n_1 n_2)^2} \quad \text{Eq. 3.95}$$

Donde la inercia rotacional que proporciona el fabricante incluye a la inercia rotacional de los componentes reductores de velocidad angular.

De la ecuación 3.93

$$G(s)H(s) = \frac{K_T / n_1 n_2 L_m J}{s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} s - 1}$$

Eq. 3.96

Utilizando las características del motor U9M4T, y empleando a la inercia rotacional de la carga como parámetro variable, se tiene:

$$\frac{K_T}{n_1 n_2 L_m J} = \frac{4.03}{J} = \frac{4.03}{J_m + J_L / (100)^2} \quad \text{Eq. 3.97}$$

$$\frac{L_m B + R_m J}{L_m J} = \frac{8.14 \times 10^{-5}}{J} + 10,250 = \frac{8.14 \times 10^{-5}}{J_m + J_c/100^2} + 10,250 \quad \text{Eq. 3.98}$$

$$\frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} = \frac{19.3415}{J_m + J_c/100^2} \quad \text{Eq. 3.97}$$

La inercia rotacional de la carga debe estar dada en  $\text{Kg-m}^2$ .

Para la aplicación del método del lugar de las raíces es necesario factorizar el denominador de la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s)$ , para obtener una expresión de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{4.307 / (J_m + J_c/100^2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad \text{Eq. 3.100}$$

Debido a la naturaleza del proyecto es necesario aplicar al motor de corriente directa un voltaje que puede ser descrito por :

$$V(t) = [u(t) - u(t - \tau)]$$

Es claro que en la anterior expresión la magnitud de dicho voltaje es uno. Por tanto, la sensibilidad de bucle  $K$

determinará la magnitud del voltaje de alimentación del motor.

Se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K'}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \quad \text{Eq. 3.101}$$

$$\text{Donde } K' = \frac{4.307}{J_m + J_c / (100)^2} K \quad \text{Eq. 3.102}$$

Utilizando una carga con inercia rotacional  $J_L = 5 \text{ Kg-m}^2$

Se obtiene según Eq. 3.95 una inercia rotacional

$$J = 5.6 \times 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$$

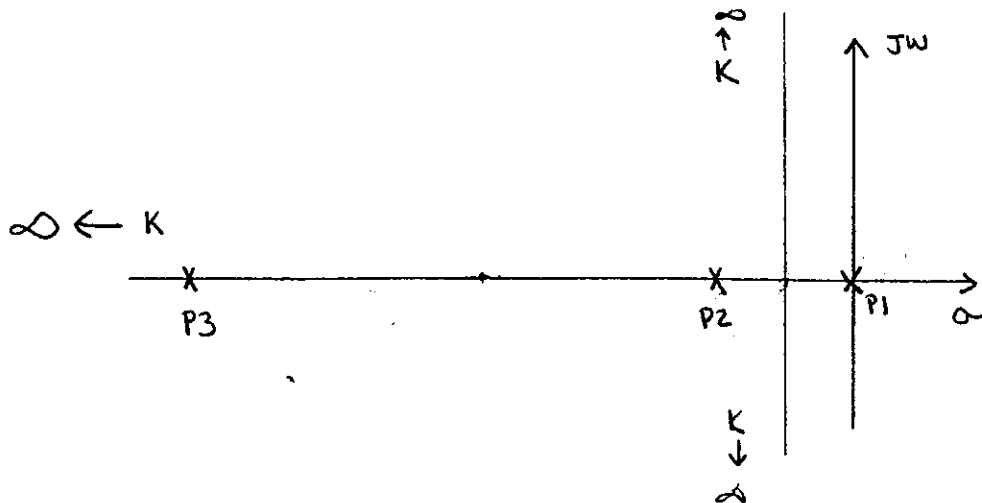
Utilizando las ecuaciones 3.97, 3.98 y 3.99 se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{7.6911 \times 10^3 K'}{s^3 + 10250s^2 + 3.4538 \times 10^4 s - 1} \quad \text{Eq. 3.103}$$

Factorizando el denominador de la función de transferencia de lazo abierto se tiene:

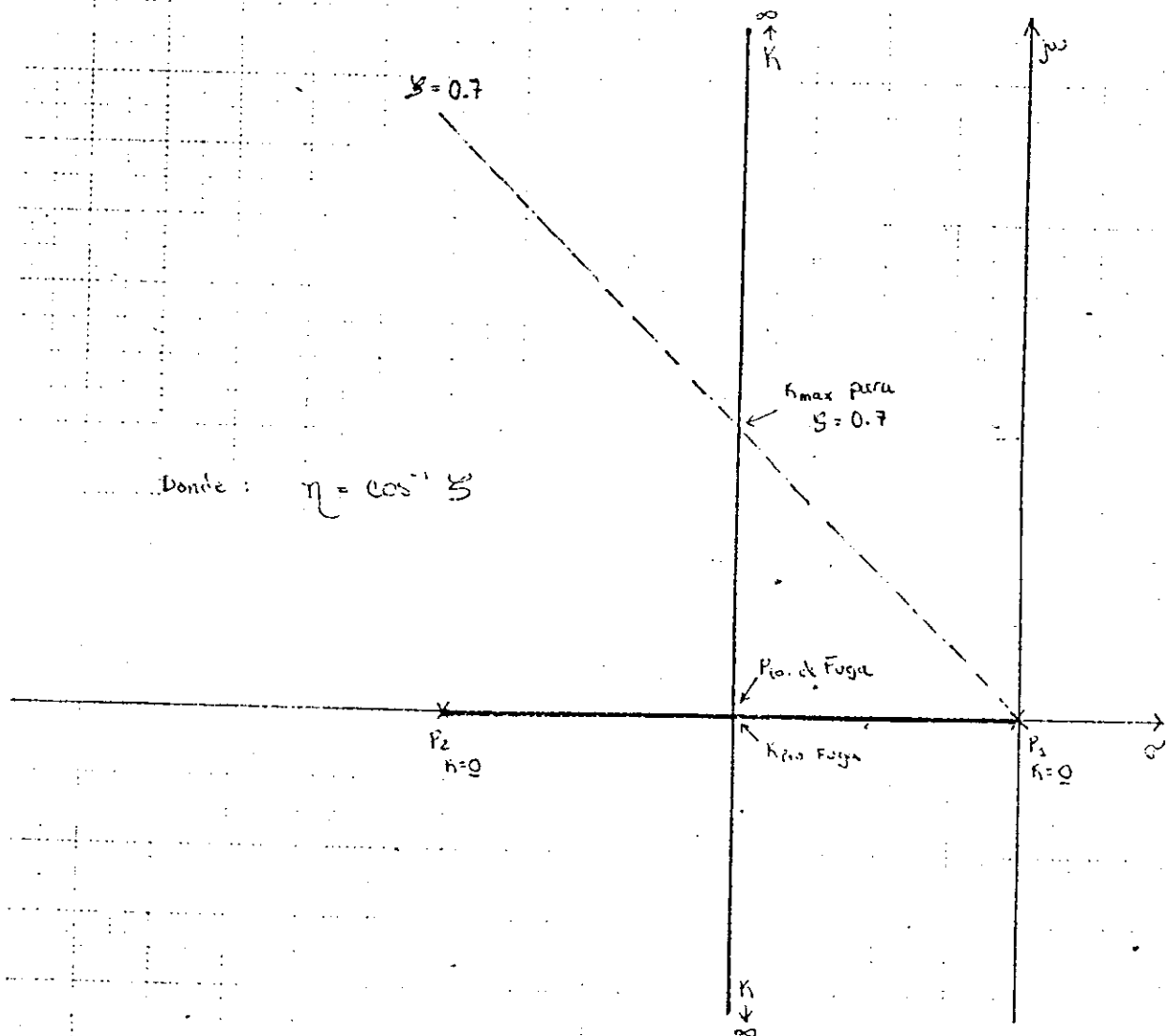
$$G(s)H(s) = \frac{7.6911 \times 10^3 K'}{(s - 2.89 \times 10^{-5})(s + 3.3707)(s + 10246.6)} \quad \left. \vphantom{\frac{7.6911 \times 10^3 K'}{(s - 2.89 \times 10^{-5})(s + 3.3707)(s + 10246.6)}} \right\}_{k=1}$$

Gráfica 3.2  
 Lugar de las raíces cualitativo  
 para la ecuación 3.103



Con base en la definición de estabilidad que se incluye en la sección C del capítulo 3, se observa claramente que cuando la sensibilidad de bucle  $K$  sea menor o igual a uno el sistema es inestable. Sin embargo se observa que el sistema tiende a ser estable para el resto de valores de  $K$ . En función del significado de  $K$ , se deberá elegir un voltaje adecuado para asegurar la estabilidad del sistema.

Gráfica 3.3  
 Gráfica cualitativa del comportamiento de  
 los polos dominantes del sistema



En la gráfica 3 se muestra el nombre de los parámetros que se calcularán a continuación.

1. Determinación del punto de fuga. Se tiene la ecuación característica de lazo cerrado del sistema:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K'}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s - 1} = -1$$

$$W(s) = s^3 + b_2 s^2 + b_1 s - 1 = -K'$$

Eq. 3.104

$$\frac{dW(s)}{ds} = 3s^2 + 2b_2 s + b_1$$

Eq. 3.105

Para el caso que se analiza se tiene:

$$s^2 + \frac{2}{3}(10,250)s + \frac{1}{3}(3.4538 \times 10^4) = 0$$

Resolviendo:

$$s_1 = -1.6852$$

$$s_2 = -6.831.64$$

Con base en el comportamiento cualitativo realizado se sabe que el punto de fuga es:  $-1.6852$

2. Determinación de la sensibilidad de bucle K para el punto de fuga calculado. Con base en la ecuación 3.104, se tiene:

$$W(s) = s^3 + 10250s^2 + 3.4538 \times 10^4 s - 1 \Bigg|_{s=-1.6852} = -7,691.1 K$$

Utilizando los valores obtenidos con las ecuaciones 3.97, 3.98, 3.99 y haciendo  $S = (\text{valor del punto de fuga})$  se obtiene:

$$K_{\text{pto. fuga}} = 3.7836$$

3. Determinación de la sensibilidad de bucle K para un valor  $\zeta \cong 0.7$ . Para un valor  $\zeta = 0.7$  se tiene:

$$\eta = 45.57^\circ$$

Conociendo el valor del punto de fuga se sabe que:

$$\sigma = -1.6852$$

Entonces :

$$j\omega = +1.6852 \tan \pi$$

$$j\omega = -1.6852 \tan \pi$$

Por tanto:

$$P_{(\zeta=0.7)_{1,2}} = -1.6852 \pm 1.6852 \tan(45.57^\circ)$$

Se escoge un valor mínimo de  $\zeta = 0.7$  para garantizar un sobretiro máximo de 0.0460 por unidad.

Se sabe que:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\Rightarrow 7,691.1 K = \left| \frac{s - 2.89 \times 10^{-5}}{s + 3.3707} \right| \left| \frac{s + 10.246}{s + 10.246} \right|$$

$$s = -1.6852 + 1.7191j$$

$$K = \frac{(2.40)(2.4077)(10,244.3)}{7,691.1}$$

$$K_{\zeta=0.7} = 7.6969$$

4. Determinación del valor de  $\zeta$  para  $K \equiv 6$ .

Según la ecuación 3.104 se tiene:

$$W(s) = s^3 + E_2 s^2 + E_1 s - 1 = -K'$$

Para este caso:

$$s^3 + 10250 s^2 + 34538 s - 1 = -7691.1 K \quad \left| \begin{array}{l} \\ K=6 \end{array} \right.$$

Resolviendo:

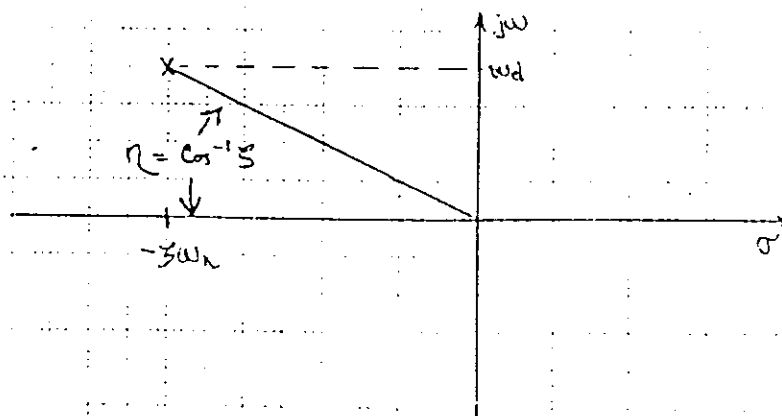
$$s_1 = -1.6851 + 1.2889 j$$

$$s_2 = -1.6851 - 1.2889 j$$

$$s_3 = -10246.62$$

Gráfica 3.4

Gráfica para la obtención de  $\pi$



De la gráfica 3.4 se obtiene:

$$\eta = \text{Tan}^{-1} \frac{1.2889}{1.6851}$$

$$\eta = 37.4117^\circ$$

$$\eta = 37.4117^\circ$$

$$\xi = \cos \eta = 0.7943$$

$$\xi_{k=6} = 0.7943$$

En las tablas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 es posible observar los resultados obtenidos para dos diferentes motores de corriente directa con diferentes valores de carga.

Tabla 3.2  
Resultados para U9M4T para diferentes  
valores de inercia rotacional de carga

Parámetros	Valores		
Inercia Rot. de la carga (Kg-m <sup>2</sup> )	2	3	4
$K_T/L_m n_{a1} n_{a2} J$	16565.4	11963.9	9363.0
$(L_m B + K_b K_T)/L_m J$	10250.0	10250.0	10250.0
$(R_m B + K_b K_T)/L_m J$	74390.4	53726.4	42046.7
Polos de $G(s)H(s)]_{K=1}$	1.3E-5	1.9E-5	2.4E-5
	-7.2628	-5.2443	-4.1038
	-10242.7	-10244.8	-10245.9
Punto de fuga	-3.6307	-2.6218	-2.0517
$K_{\text{punto de fug.}}$	8.1509	5.8995	4.6064
$K(0.7)$	12.5719	12.0096	9.3990
( K = 6 )	1.0000	0.9913	0.8805

Tabla 3.3.  
Resultados para U9M4T para diferentes  
valores de inercia rotacional de carga

Parámetros	Valores		
Inercia Rot. de la carga (Kg-m <sup>2</sup> )	5	6	7
$K_T/L_m n_a n_a J$	7691.1	6525.8	5667.1
$(L_m B + K_b K_T)/L_m J$	10250.0	10250.1	10250.1
$(R_m B + K_b K_T)/L_m J$	34538.0	29305.3	25449.3
	3E-5	3E-5	4E-5
Polos de $G(s)H(s)]_{K=1}$	-3.3707	-2.8599	-2.4835
	-10246.6	-10247.2	-10247.6
Punto de fuga	-1.6852	-1.4298	-1.2416
$K_{\text{punto de fug.}}$	3.7836	3.2103	2.7880
$K(0.7)$	7.6969	6.5505	5.6878
( K = 6 )	0.7943	0.7407	0.6900

Tabla 3.4  
Resultados para U9M4T para diferentes  
valores de inercia rotacional de carga

Parámetros	Valores
Inercia Rot. de la carga (Kg-m <sup>2</sup> )	.8
$K_T/L_m n_{a1} n_{a2}^J$	5008.1
$(L_m B + K_D K_T)/L_m J$	10250.1
$(R_m B + K_D K_T)/L_m J$	22490.1
	4E-5
Polos de $G(s)H(s)]_{K=1}$	-2.1946
	-10247.9
Punto de fuga	-1.0972
$K_{\text{punto de fuga}}$	2.4638
$K(0.7)$	5.5160
( K = 6 )	0.6425

Tabla 3.5  
Resultados para U12M4T para diferentes  
valores de inercia rotacional de carga

Parámetros	Valores		
Inercia Rot. de la carga (Kg-m <sup>2</sup> )	25	30	35
$K_T/L_m n_{a1} n_{a2} J$	3723.8	3147.3	2725.5
$(L_m B + K_b K_T)/L_m J$	9100.2	9100.2	9100.1
$(R_m B + K_b K_T)/L_m J$	38712.8	32720.1	28334.0
Polos de $G(s)H(s)]_{K=1}$	2E-5	3E-5	4E-5
	-4.2561	-3.5970	-3.1147
	-9095.9	-9096.5	-9096.9
Punto de fuga	-2.1278	-1.7983	-1.5571
$K_{\text{punto de fug.}}$	11.0592	9.3473	8.0939
$K(0.7)$	22.5649	19.0712	16.5134
( K = 12 )	0.9595	0.8825	0.8203

Tabla 3.6  
 Resultados para U12M4T para diferentes  
 valores de inercia rotacional de carga

Parámetros	Valores		
Inercia Rot. de la carga (Kg-m <sup>2</sup> )	40	45	48
$K_T/L_m n_{a1} n_{a2} J$	2403.3	2149.3	2021.1
$(L_m B + K_b K_T)/L_m J$	9100.1	9100.1	9100.1
$(R_m B + K_b K_T)/L_m J$	24984.8	22343.7	21011.1
	4E-5	4E-5	5E-5
Polos de $G(s)H(s)]_{K=1}$	-2.7464	-2.4560	-2.3095
	-9097.4	-9097.6	-9097.8
Punto de fuga	-1.3730	-1.2278	-1.1546
$K_{\text{punto de fug.}}$	7.1372	6.3826	6.0020
$K(0.7)$	14.5620	13.0213	12.2461
( K = 12 )	0.7706	0.7283	0.7063

En la gráfica 3.5 se ha incluido la línea que determinará una razón de amortiguamiento igual a 0.7. Es claro que

$$\eta = 45.57^\circ.$$

La razón de amortiguamiento es la que determina la magnitud del sobretiro que se obtendrá.

Con base en las tablas 3.2, 3.3 y 3.4 se presentan a continuación los resultados de regresiones exponenciales para la obtención del punto de fuga y del valor de su sensibilidad de bucle.

$$K_{ptofuga} = a e^{b(J_L)} ; R^2 = 0.9762$$

$$J_L = \text{Dado en Kg-m}^2 \quad (2 \leq J_L \leq 7)$$

$$a = 11.4364$$

$$b = -0.2110$$

$$P_{to \text{ de Fuga}} = -a e^{b(J_L)} ; R^2 = 0.9760$$

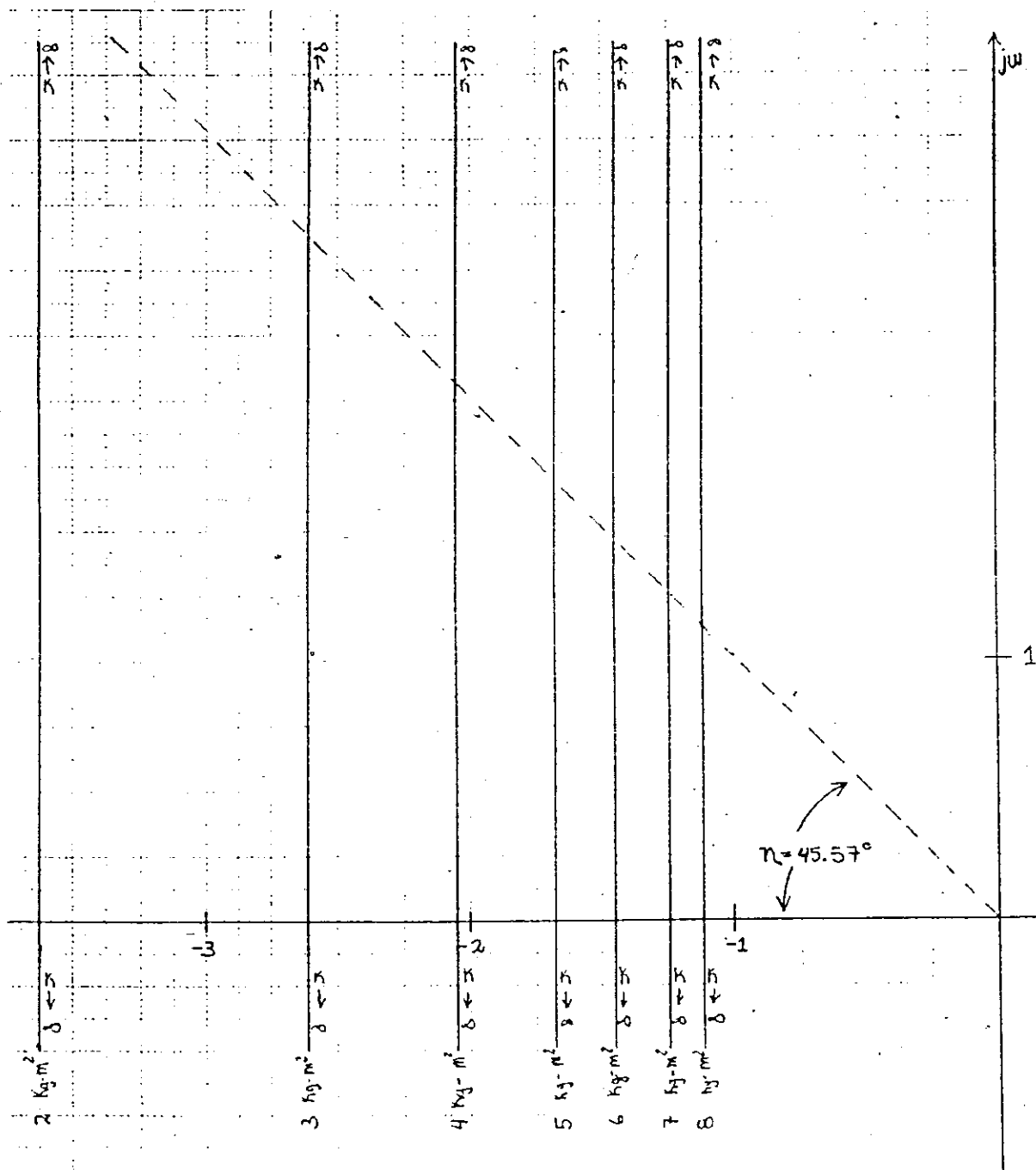
$$J_L = \text{Dado en Kg-m}^2 \quad [2 \leq J_L \leq 7]$$

$$a = 5.0882$$

$$b = -0.2109$$

Gráfica 3.5

Lugar de las raíces para diferentes cargas  
aplicadas al motor U9M4T



G. Aplicación del criterio de estabilidad de Routh

Partiendo de la ecuación 3.28 se tiene:

$$\frac{L_m J}{K_T} D^3 \theta_{1(t)} + \frac{L_m B + R_m J}{K_T} D^2 \theta_{1(t)} + \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T} D \theta_{1(t)} = e(t)$$

Eq. 3.28

Se aplica la transformada de Laplace para obtener:

$$\bar{\theta}_{1(s)} = \frac{e(s)}{\frac{L_m J}{K_T} s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{K_T} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T} s}$$

Eq. 3.108

Para la aplicación del criterio de estabilidad de Routh es necesario tener un polinomio característico de la forma:

$$Q(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$$

Después de aplicar el operador lineal correspondiente a la ecuación 3.108 se obtiene:

$$Q(s) = \frac{L_m J}{K_T} s^2 + \frac{L_m B + R_m J}{K_T} s + \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T}$$

Eq. 3.109

Entonces:

$$\begin{array}{l|l}
 s^2 & \frac{L_m J}{K_T} \quad \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T} \\
 s^1 & \frac{L_m B + R_m J}{K_T} \\
 s^0 & \frac{R_m B + K_b K_T}{K_T}
 \end{array}$$

Con base en el significado físico de los parámetros presentes se sabe que el sistema es estable.

#### H. Análisis en el dominio de la frecuencia

Se sabe que la función de transferencia total es:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para efectuar el análisis en el dominio de la frecuencia es necesario tener una expresión de la forma:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

Eq. 3.110

Para la presentación por medio de diagramas de bode se tiene:

$$L_{\text{mag}} = |G(j\omega)| = 20 \log |G(j\omega)| \text{ dB}$$

Eq. 3.111

Según la ecuación 3.96 se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{K_T / n_{a1} n_{a2} L_m J}{s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} s - 1}$$

Es necesario recordar que esta ecuación tiene una sensibilidad de bucle  $K=1$ . El análisis en frecuencia se efectuará utilizando una sensibilidad de bucle igual a seis. Entonces:

$$G(j\omega) = \frac{K_T / n_{a1} n_{a2} L_m J (6)}{s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} s - 1}$$

Analizando para el motor U9M4T:

$$J_J = 5 \text{ Kg-m}^2$$

Según la ecuación 3-104

$$W(s) = s^3 + \frac{L_m B + R_m J}{L_m J} s^2 + \frac{R_m B + K_b K_T}{L_m J} s - 1 = K'$$

$$s^3 + 10250s^2 + 34538s - 1 = -7691.1 K \quad | \quad K=6$$

Se obtiene:

$$P_1 = -1.6851 + 1.2889j$$

$$P_2 = -1.6851 - 1.2889j$$

$$P_3 = -10246.6$$

$$|P_2| = \omega_n = 2.1215 \text{ rad/seg}$$

$$\eta = \cos^{-1} \zeta = 37.4117^\circ$$

$$\zeta = 0.7943$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.2889 \text{ rad/seg}$$

$$M_0 = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad ; \text{ máximo valor de magnitud } M = \left| \frac{C(j\omega)}{P(j\omega)} \right|$$

Entonces:

$$G(j\omega) = \frac{\left( \frac{K_T}{n_{a1} n_{a2}} L_m J \right) K}{(j\omega + P_3) \left( 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right)} \quad \text{Eq. 3.112}$$

Para este caso:

$$G(j\omega) = \frac{7,691.1 (6) / 10,246.6}{\left( 1 + \frac{j\omega}{10,246.6} \right) \left( 1 + 0.7488 j\omega + 0.2222 (j\omega)^2 \right)}$$

Tabla 3.7  
 Resultados para el análisis de frecuencia  
 para el motor U9M4T con diferentes cargas

Parámetros	Valores		
	0	2	3
$J_L$ (Kg-m <sup>2</sup> )			
Polos de la función de transferencia directa	-1.4003	-1.7877	-2.62 + 0.35 j
	-30.1393	-5.4741	-2.62 - 0.35 j
$G$ (s)	-10219.4	-10242.7	-10244.8
$\omega_n$ (rad/seg)	-	-	2.64
$\eta$	0°	0°	7.5732°
$\xi$	1.0000	1.0000	0.89
$\omega_d$ (rad/seg)	-	-	0.35
$f_n$ (Hz)	-	-	0.42
$M_m$	-	-	3.83

Tabla 3.8  
 Resultados para el análisis de frecuencia  
 para el motor U9M4T con diferentes cargas

Parámetros	Valores	
$J_L$ (Kg-m <sup>2</sup> )	4	5
Polos de la función de transferencia directa	-2.05 + 1.10 j	-1.68 + 1.29 j
	-2.05 - 1.10 j	-1.68 - 1.29 j
G(s)	-10245.9	-10246.6
$\omega_n$ (rad/seg)	2.33	2.12
$\zeta$	28.2956°	37.4117°
$\zeta$	0.88	0.79
$\omega_d$ (rad/seg)	1.10	1.29
$f_n$ (Hz)	0.37	0.34
$M_m$	1.20	1.04

Tabla 3.8  
 Resultados para el análisis de frecuencia  
 para el motor U9M4T con diferentes cargas

Parámetros	Valores	
$J_L$ (Kg-m <sup>2</sup> )	6	7
Polos de la función de transferencia directa	-1.43 + 1.30 j -1.43 - 1.30 j	-1.24 + 1.30 j -1.24 - 1.30 j
G(s)	-10247.2	-10247.6
$\omega_n$ (rad/seg)	1.93	1.80
$\eta$	42.2067°	46.3688°
$\xi$	0.74	0.69
$\omega_d$ (rad/seg)	1.30	1.30
$f_n$ (Hz)	0.31	0.29
$H_m$	1.00	1.00

Tabla 3.10  
 Resultados para el análisis de frecuencia  
 para el motor U9M4T con diferentes cargas

Parámetros	Valores
$J_L$ (Kg-m <sup>2</sup> )	8
Polos de la función de transferencia directa	-1.10 + 1.30 j -1.10 - 1.30 j
$G(s)$	-10247.9
$\omega_n$ (rad/seg)	1.71
$\eta$	50.0180°
$\xi$	0.64
$\omega_d$ (rad/seg)	1.31
$f_n$ (Hz)	0.27
$M_n$	1.02

Se observa claramente que para todos los casos que aparecen en las tablas 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 existe dos polos dominantes. En la gráfica 6 se muestra el comportamiento del polo dominante para una carga de  $5 \text{ Kg-m}^2$  aplicada al motor U9M4T.

Se tiene:

$$J_L = 5 \text{ Kg-m}^2$$

$$\zeta = 0.7943$$

$$\omega_n = 2.1215 \text{ rad/seg}$$

$$G_c(j\omega) = \frac{6(7691.1)/(10246.6)}{(1 + j\omega/10246.6)(1 + 0.7943j\omega + 0.2222j^2\omega^2)}$$

Para el término constante:

$$L_{\text{mag}_{kce}} = 20 \log \frac{6(7691.1)}{10246.6} \text{ dB}$$

$$L_{\text{mag}_{kce}} = 13.0712 \text{ dB}$$

Para los 2 polos dominantes se tiene:

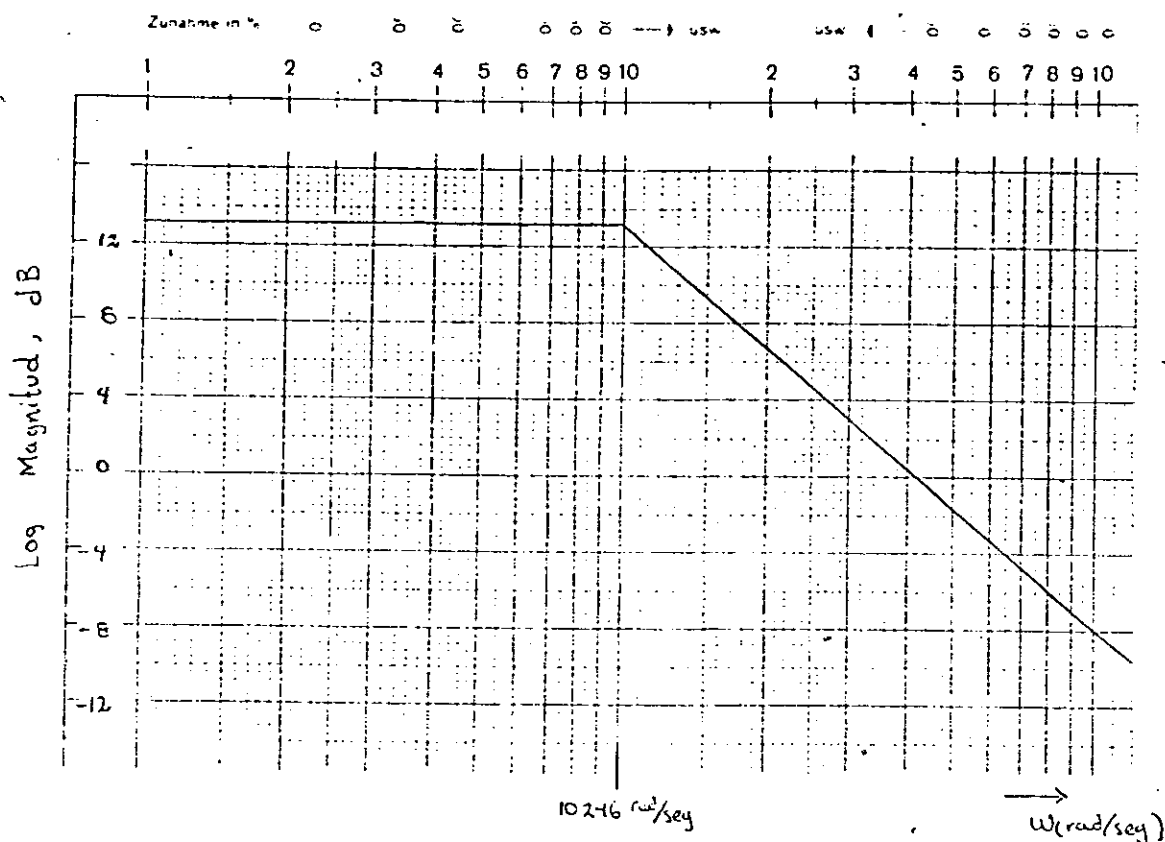
$$L_{\text{mag}_{p_1, p_2}} = -20 \log \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Delta \text{ngulo}_{p_1, p_2} = -\text{Tan}^{-1} \left[ \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \right]$$

Gráfica 3.6

Respuesta en frecuencia del polo no dominante

$$P = -10246.6$$



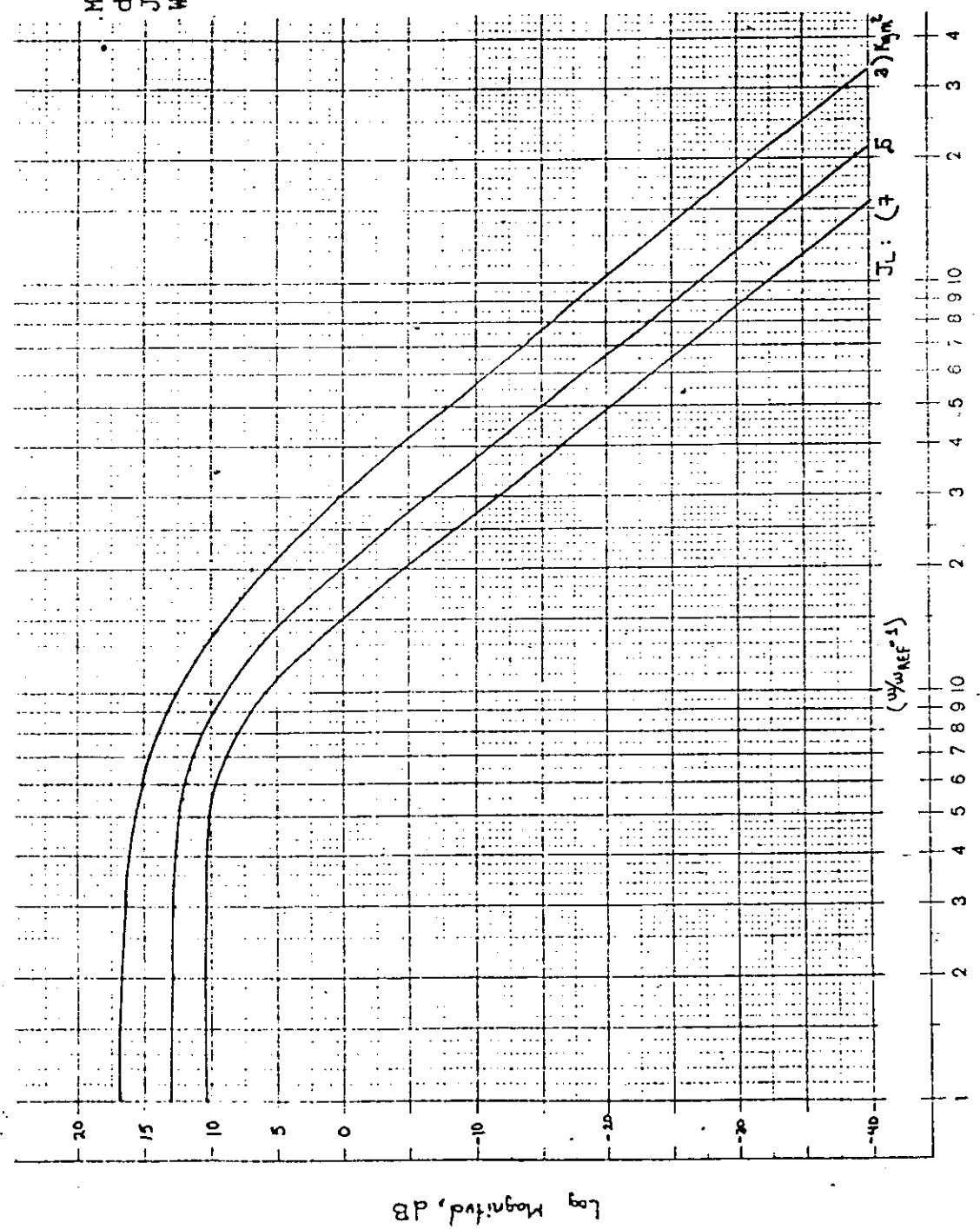
Se sabe que los polos dominantes empezarán a ejercer decaimiento en magnitud a la frecuencia natural, en el modelo aproximado, ya que son conjugados.

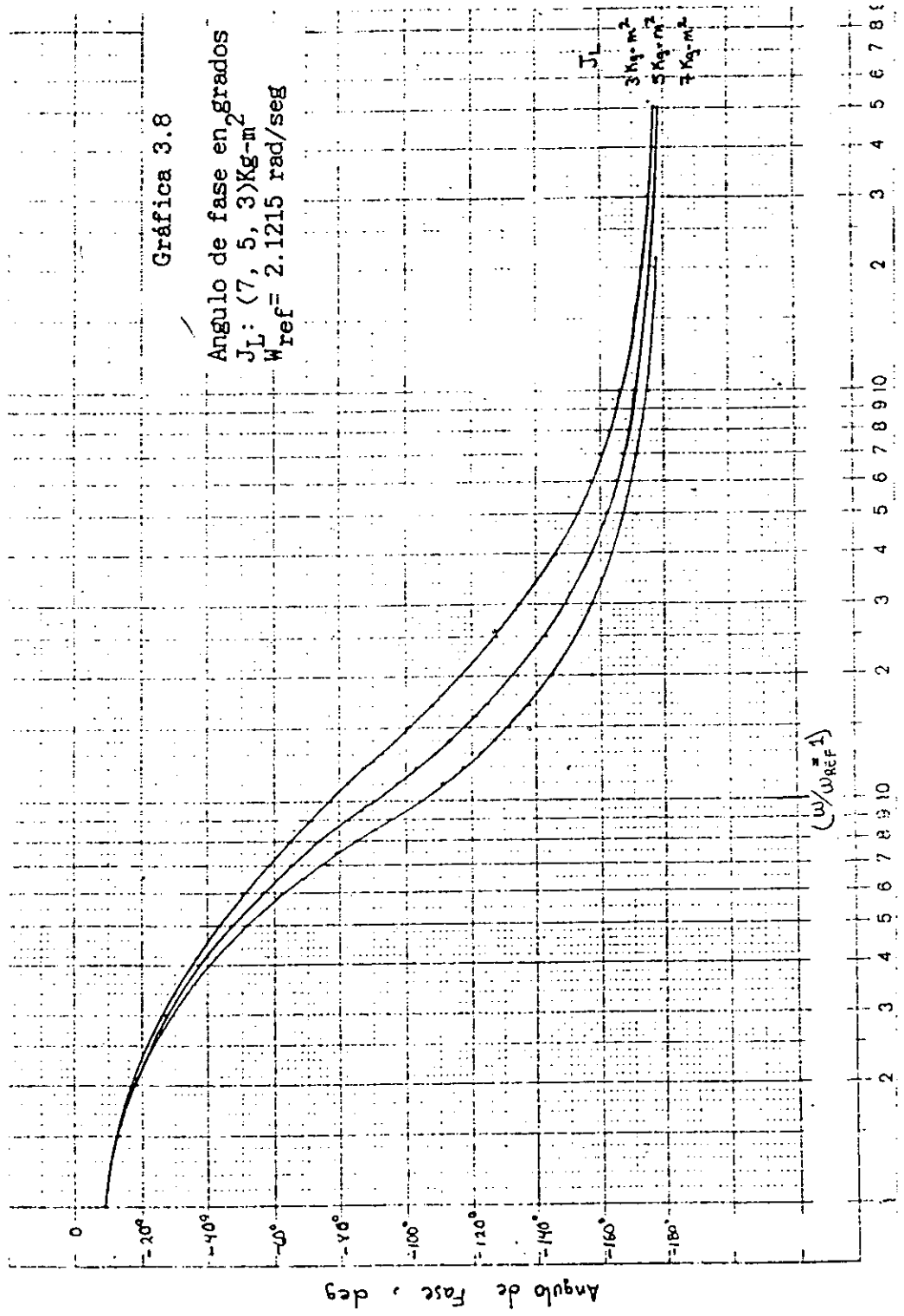
Se observa que para todos los casos a analizar se tiene:

$$W_n \ll W \text{ polo dominante}$$

En función de lo anterior, el polo dominante no se tomará en cuenta para la graficación de la respuesta a frecuencia.

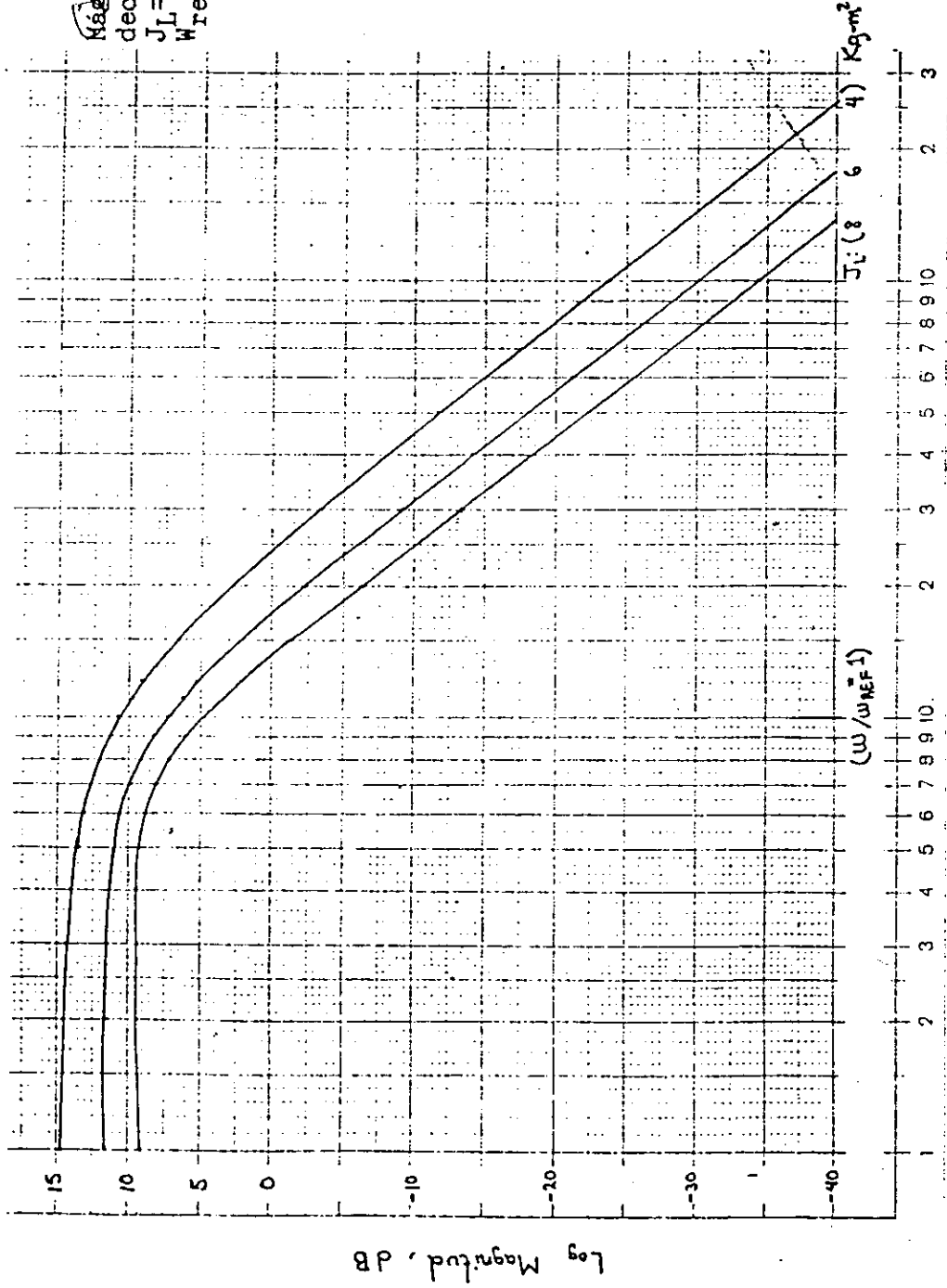
Gráfica 3.7  
Mágnitud de logaritmo en decibeles para:  
JL: (7, 5, 3)Kg-m<sup>2</sup>  
W<sub>ref</sub>= 2.1215 rad/seg





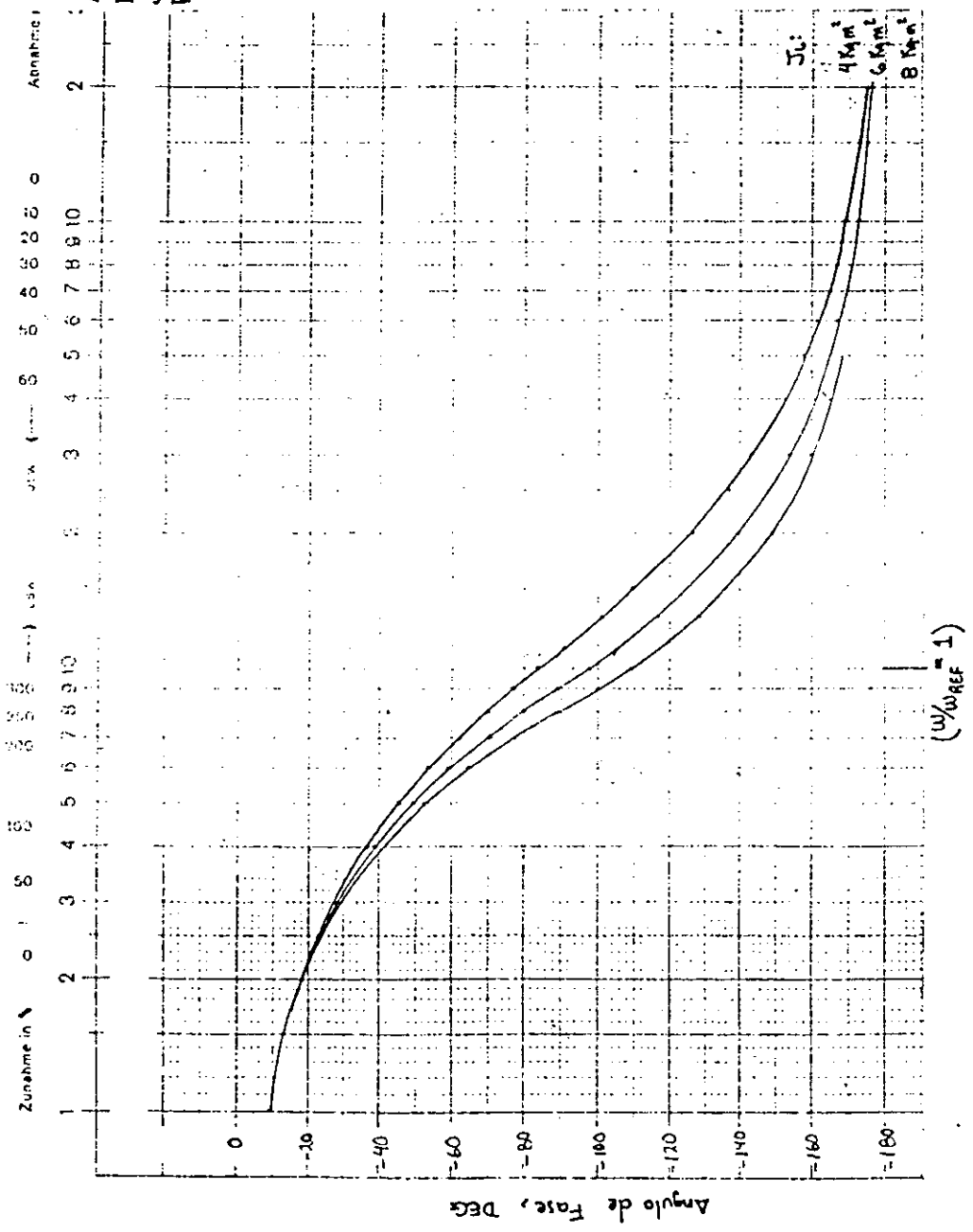
Gráfica 3.8

Magnitud de logaritmo en decibeles para:  
 $J_L = (8, 6, 4) \text{ Kg-m}^2$   
 $\omega_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$



Gráfica 3.10

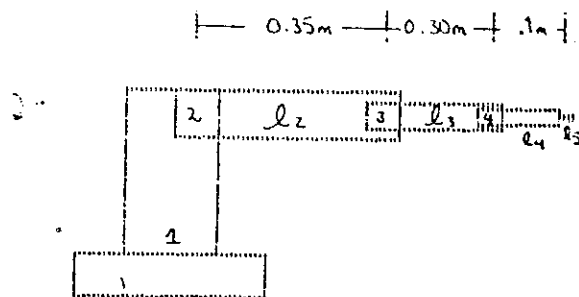
Angulo de fase en grados  
para:  
 $J_L = (8, 6, 4) \text{ Kg-m}^2$   
 $\omega_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$



IV. ESTABILIDAD DE LAS ARTICULACIONES  
DEL SISTEMA

Se parte del diagrama 2.1 y 2.2 para el análisis.

Figura 4.1  
Longitudes de los segmentos móviles  
de la estructura



Se procede al análisis del sistema motor-carga de la articulación denominada 2.

Para la estructura se asume una densidad lineal

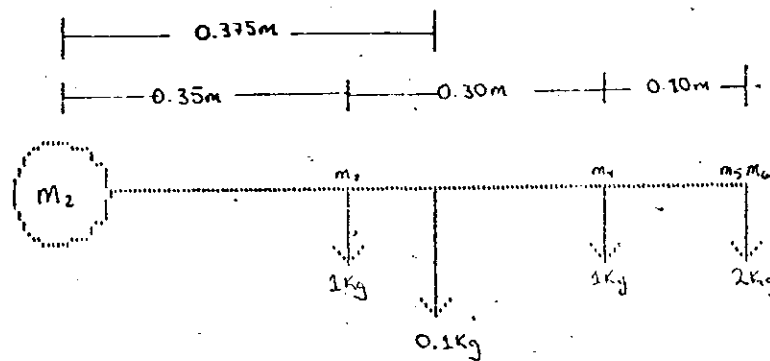
$$\lambda = 0.1408 \text{ Kg/m}^2$$

perteneciente a tubería PVC de 2 1/3 ".

Los motores que accionan cada articulación serán: U9M4T.  
 Cada motor U9M4T con la base necesaria para acoplarlo a la estructura: 1Kg

Figura 4.2

Cargas para la articulación 2  
 para máxima inercia rotacional estructural



En la figura 4.2 se ilustra el peor de los casos, en el cual la inercia rotacional acoplada al motor debido a la propia estructura es máxima.

Radio del centro de masa:

$$r_{cm} = \frac{1kg(0.35m) + 1kg(0.65m) + 2kg(0.75m) + 0.1kg(0.375m)}{4.1kg}$$

$$r_{cm} = 0.62m$$

$$J_{Lmax} = 1.58 \text{ Kg-m}^2$$

De lo obtenido en el análisis de estabilidad para el motor U9M4T se sabe que cuando es alimentado con 6V, y garantizando un sobretiro máximo de 0.0460 por unidad es necesario que la inercia rotacional de la carga no exceda  $7 \text{ Kg-m}^2$ .

Para asegurar  $\zeta > 0.7$  se utiliza el criterio que la carga máxima sea  $6.5 \text{ Kg-m}^2$ .

$$J_{max} = J_{ESTRUCTURA} + J_{CARGA MAX}$$

En la cual  $J_{max} = J_L$  para emplear la notación utilizada en el capítulo III.

$$\Rightarrow 6.5 \text{ Kg-m}^2 - 1.58 \text{ Kg-m}^2 = 4.92 \text{ Kg-m}^2$$

$$J_{carga máxima} = 4.92 \text{ Kg-m}^2$$

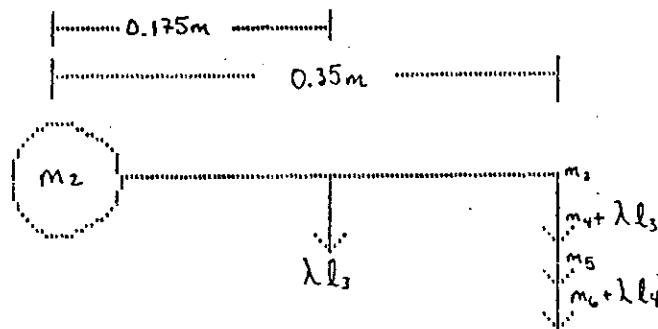
Se entiende que  $4.92 \text{ Kg-m}^2$  también será la carga máxima del sistema, puesto que se ha establecido el criterio de que:

$$\zeta > 0.7$$

Para al cálculo de la inercia rotacional mínima producida por la estructura se emplea la figura 2.2.

Figura 4.3

Inercia rotacional estructural mínima  
para la articulación 2



$$r_{cm} = 0.3484 \text{ m}$$

$$\Rightarrow J_{Emin} = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$$

Ahora se asume que en el caso extremo restante el sistema no estará manejando ninguna carga extra. Entonces:

$$J_{carga \text{ min.}} = 0 \text{ Kg-m}^2$$

$$\text{Se sabe que: } J_E + J_{carga} = J_L$$

$$\text{Entonces: } J_{Lmin} = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$$

Para el cálculo de  $\omega_{-3db \text{ min}}$  se utilizan las ecuaciones 3.97, 3.98 y 3.99 para obtener:

$$J_L = 5 \times 10^{-6} + \frac{0.4977 \text{ Kg-m}^2}{(100)^2}$$

$$K_T / n_a n_m J_L = 4.03 / 109.8 \times 10^{-6} = 36713$$

$$(L_m B + R_m J) / L_m J = 10250$$

$$(R_m B + K_v K_T) / L_m J = 176150$$

Se aplica la ecuación 3.104 para obtener:

$$W(s) = s^3 + 10250 s^2 + 176150 s - 1 = 36713 (6)$$

Se resuelve para obtener:

$$P_1 = -15.848$$

$$P_2 = -1.3641$$

$$P_3 = -10232.8$$

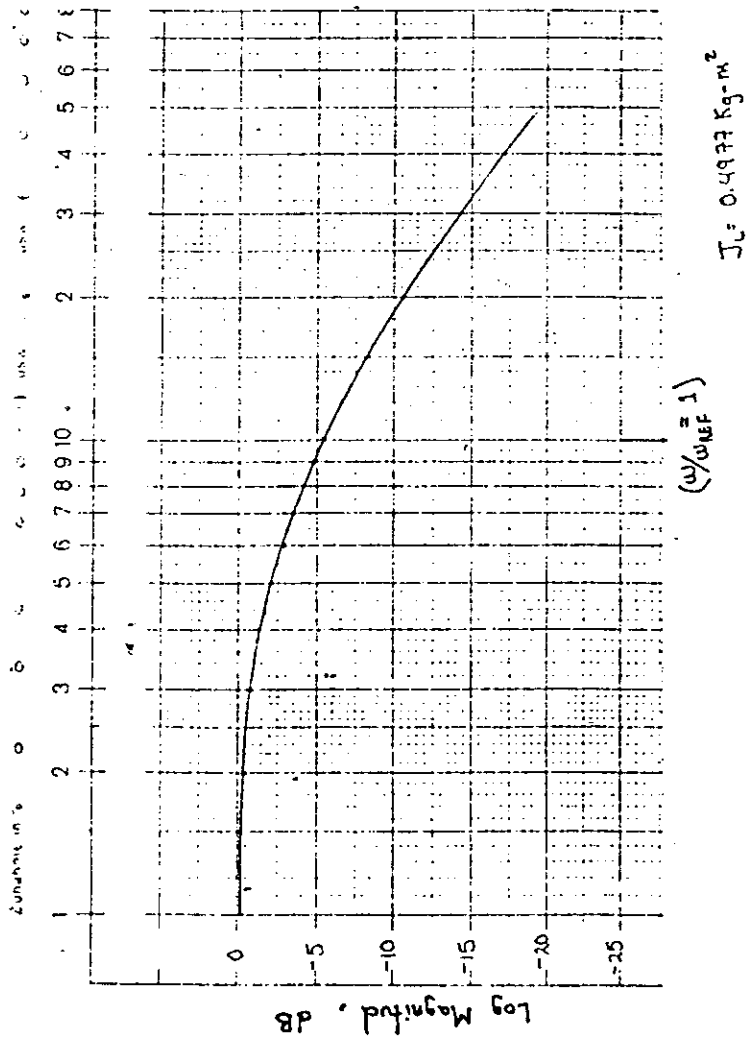
Entonces:

$$G(j\omega) = \frac{0.9958}{\left(1 + \frac{j\omega}{10232}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{15.848}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{1.3641}\right)}$$

En las gráficas 4.1 y 4.2 se muestra el diagrama de Bode para la anterior ecuación.

Gráfica 4.1

Magnitud de logaritmo en decibeles para:  
 $J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$   
 $\omega_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$



$J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$

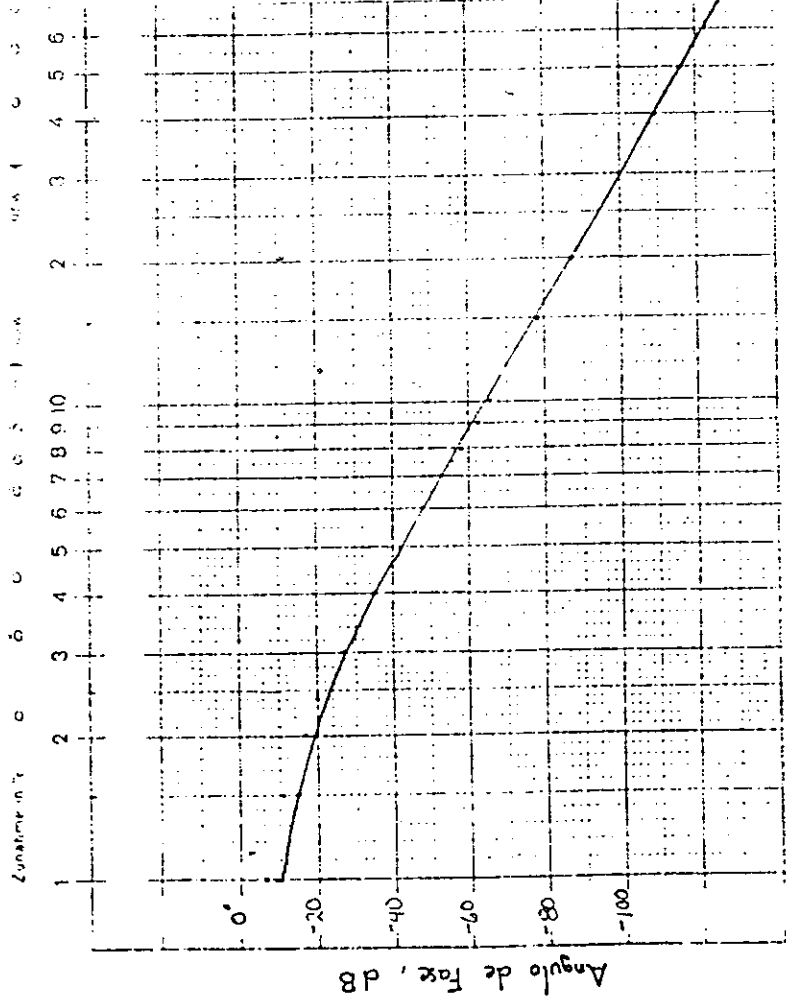
Gráfica 4.2

Angulo de fase en grados

para:

$J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$

$\omega_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$



( $\omega_{REF} = 1$ )

$J_L = 0.4977 \text{ Kg-m}^2$

Según los diagramas de Bode se observa que la frecuencia de menos tres decibeles mínima es:

$$\omega_{-3dB_{min}} = 0.6 \omega_{REF} = 0.6 (2.1215 \text{ rad/seg})$$

$$\omega_{-3dB_{min}} = 1.2729 \text{ rad/seg}$$

De los resultados obtenidos en el capítulo tres se sabe que la máxima frecuencia de menos tres decibeles ocurre cuando al motor U9M4T se le aplica una carga con inercia rotacional  $J_L = 3 \text{ Kg-m}^2$ .

$$\omega_{-3dB_{max}} = 0.85 \omega_{REF}$$

Por tanto:

$$\omega_{-3dB_{max}} = 1.8033 \text{ rad/seg}$$

En la tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos para cada una de las articulaciones del sistema.

Tabla 4.1  
Cargas estructurales mínimas y máximas  
para cada articulación del sistema

Articulación	$J_{Emin.} (Kg-m^2)$	$J_{Emax.} (Kg-m^2)$
1	0.4977	1.58
2	0.4977	1.58
3	0.2722	0.4034
4	0.0200	0.0200
5	0.0006	0.0006
6	0.0006	0.0006

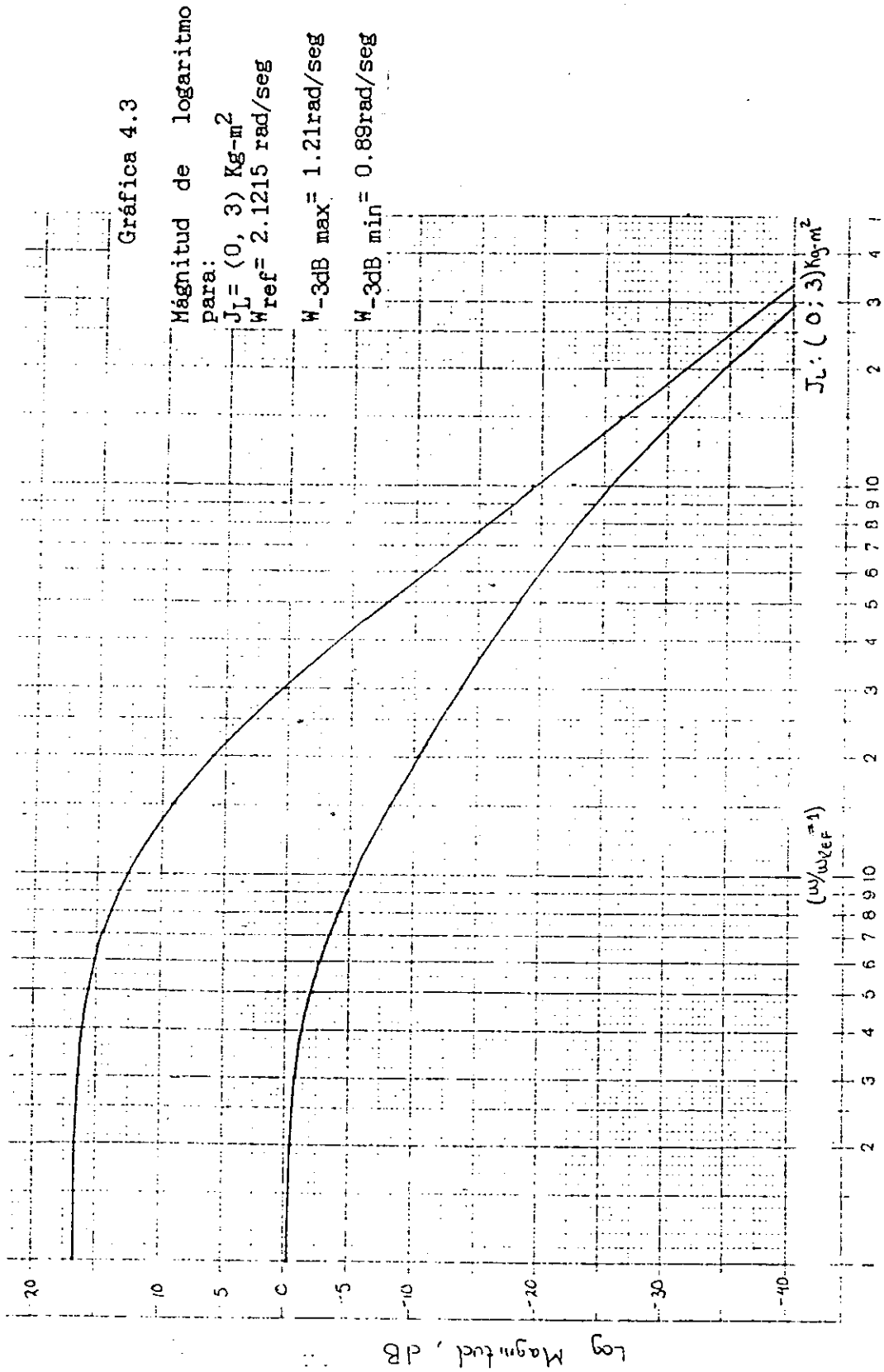
Tabla 4.2

Características de ejecución para cada articulación

Articulación	(Kg-m <sup>2</sup> )		(rad/seg)	
	J <sub>max</sub>	J <sub>min</sub>	w <sub>-3dbmax</sub>	w <sub>-3dbmin</sub>
1	6.5	1.58	1.80	1.27
2	6.5	1.58	1.80	1.27
3	5.32	0.27	1.80	1.23
4	4.92	0.02	1.80	1.20
5	4.92	0.00	1.80	1.19
6	4.92	0.00	1.80	1.19

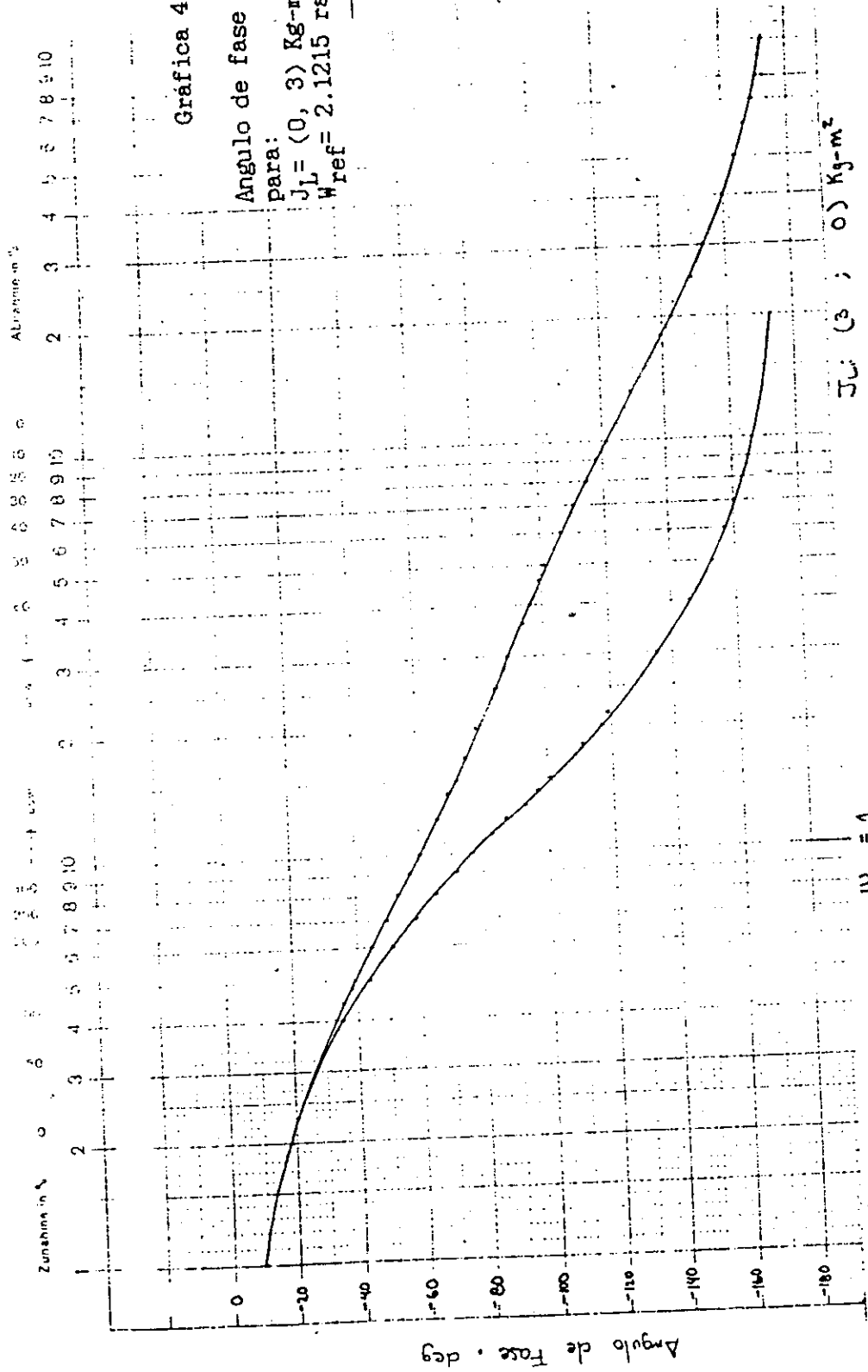
La frecuencia de -3dB máxima ha permanecido constante para todas las articulaciones del sistema, ya que en todas existe la posibilidad que la carga tenga una inercia rotacional igual a 3 Kg-m<sup>2</sup>.

En las gráficas 4.3 y 4.4 se muestra el diagrama de Bode para los casos extremos. En las gráficas 4.5 y 4.6 se presenta el diagrama de polos para los dos casos extremos.



Gráfica 4.4

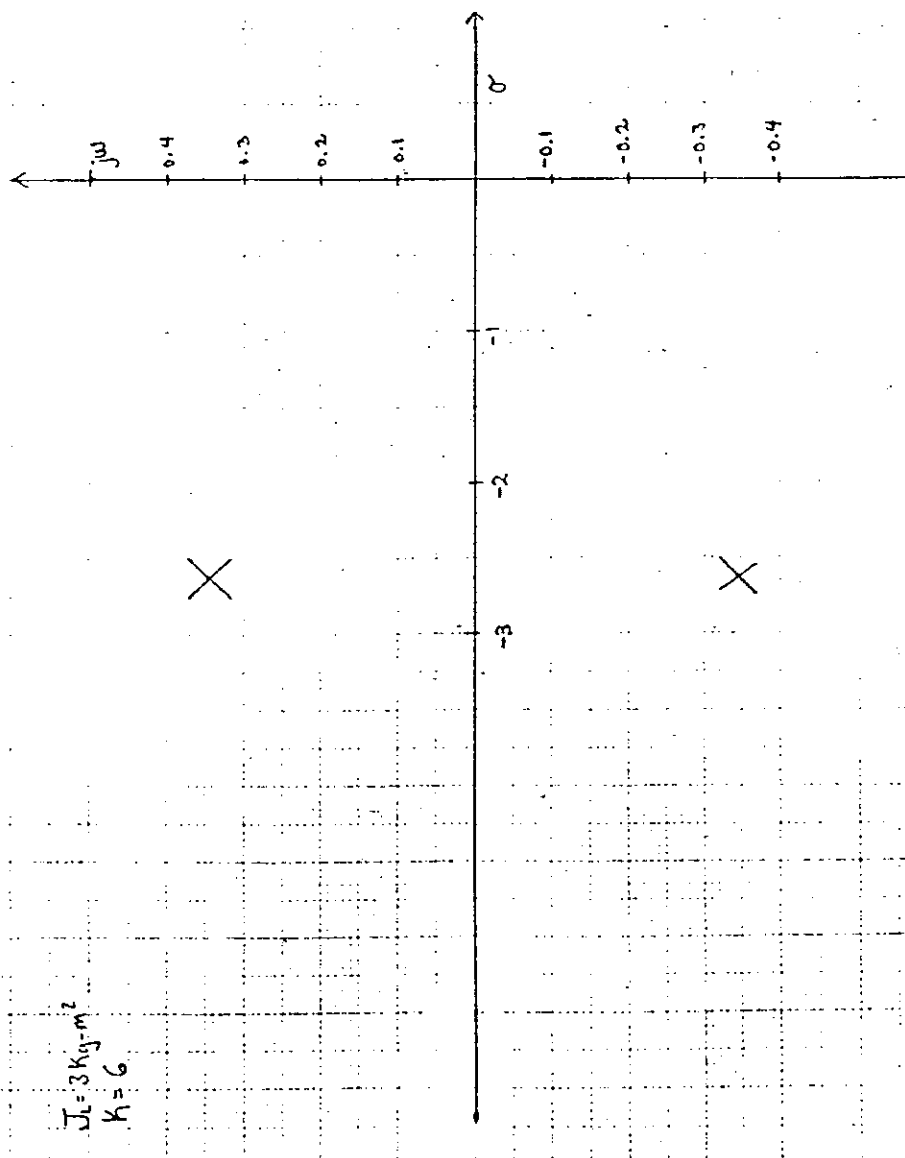
Angulo de fase en grados  
 para:  
 $J_L = (0, 3) \text{ Kg-m}^2$   
 $\omega_{ref} = 2.1215 \text{ rad/seg}$



$\frac{\omega}{\omega_{ref}} = 1$

Gráfica 4.5

Polos dominantes para:  
 $J_L = 3 \text{ Kg-m}^2$   
 $K = 6$



$J_L = 3 \text{ Kg-m}^2$   
 $K = 6$

Gráfica 4.6

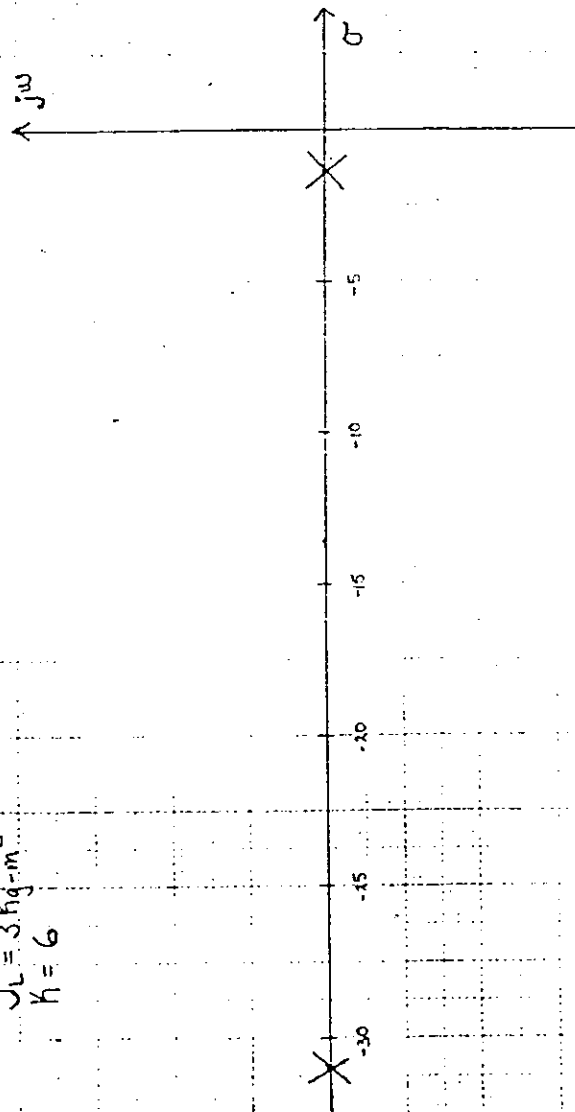
Polos dominantes para:

$$J_L = 0 \text{ Kg-m}^2$$

$$K = 8$$

$$J_L = 3 \text{ Kg-m}^2$$

$$K = 6$$



## V. DESARROLLO DE HARDWARE

El circuito de control desarrollado e implementado es capaz de efectuar posicionamientos angulares  $\theta$  en la estructura de cada una de las articulaciones del brazo de robot. Es necesario tener un circuito de control por cada una de las articulaciones presentes. Para el efecto se utilizan transductores en los ejes de rotación de cada segmento móvil de la estructura de control y de la del brazo de robot. Los transductores utilizados son potenciómetros lineales.

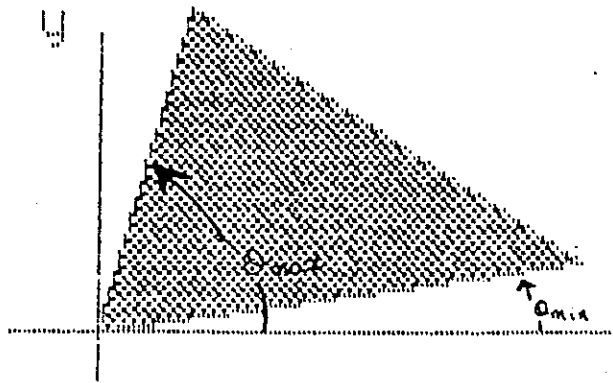
Para el funcionamiento del circuito de control no es necesaria la intervención del microprocesador.

El voltaje que alimenta al motor de corriente directa utilizado para el movimiento de los segmentos móviles del brazo de robot es posible describirlo por:

$$V(t) = i u(t) - u(t-t') \delta$$

El circuito es capaz de admitir la fijación del ángulo máximo y del ángulo mínimo al que puede ser posicionada la estructura controlada.

Figura 5.1  
Definición de ángulo máximo y ángulo mínimo  
para la articulación 3

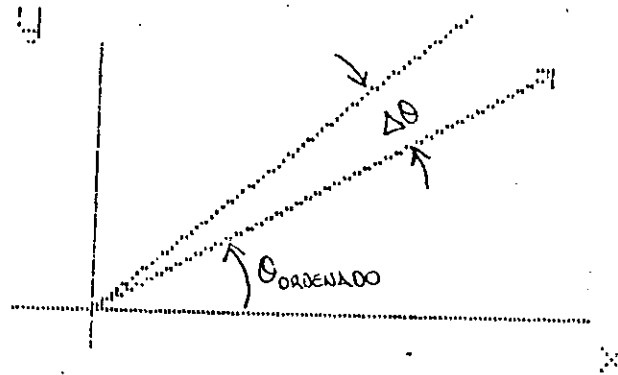


En la figura 5.1, la parte sombreada es el espacio permitido en el cual la estructura controlada se podrá desplazar. Al ordenarse un ángulo no permitido a la estructura controlada, el circuito corta, automáticamente, la alimentación del motor y ubica a la articulación en el ángulo máximo correspondiente. Lo anterior evita el daño de los potenciómetros utilizados como transductores en la estructura controlada (Brazo de robot).

Se utiliza el principio de brecha diferencial para la fijación de la precisión de la ubicación del ángulo ordenado.

Figura 5.2

Descripción de la brecha diferencial



En la figura 5.2 se muestra la brecha diferencial que, en este caso, se denomina  $\Delta\theta$ , variable. Lo anterior permite la compensación a la inercia.

El potenciómetro que se denomina controlado será el transductor utilizado en cada articulación del brazo de robot para la retroalimentación de la posición angular a la que se encuentre el segmento móvil correspondiente.

El potenciómetro denominado control será el potenciómetro ubicado en la articulación correspondiente en la estructura de control a la que estará controlando en el brazo de robot.

La interconexión del sistema con el microprocesador se ha diseñado utilizando un convertidor analógico digital en el transductor denominado control, y un convertidor digital analógico que en la modalidad de ejecución de una secuencia previamente grabada sustituirá al potenciómetro denominado control.

### 1. Especificaciones de transistores utilizados.

Tabla 5.1

Especificaciones de transistores utilizados

Parámetros	ECG 152	ECG 153	ECG 123A
	NPN	PNP	NPN
$I_{cm\max}$ (A)	7	7	0.8
$P_D$ (W)	50	50	0.5
$h_{FE}(LVP)$	60	60	200
$BV_{CBO}$ (V)	60	60	75
$BV_{CEO}$ (V)	60	60	40
$BV_{EBO}$ (V)	5	5	6

Tabla 5.2  
Dispositivos utilizados  
por cada circuito de control

Cantidad	Componente
4	Amplificadores Operacionales NTE 859
4	Diodos ECG 116 (Si)
2	Diodos Zener NTE 138A (7.5V)
6	Transistores ECG 123A
2	Transistores ECG 152
2	Transistores ECG 153
2	Potenciómetros Lineales de 100K
1	Compuerta AND TTL 7408
1	Compuerta NOT TTL 7404
1	Compuerta NOR TTL 7402
6	Resistencias 1/4 W 100 K
4	Resistencias 1/4 W 122 K
6	Resistencias 1/4 W 1 K
2	Resistencias 1/4 W 150 K

Figura 5.6

Circuito desarrollado para el control de motores de corriente directa

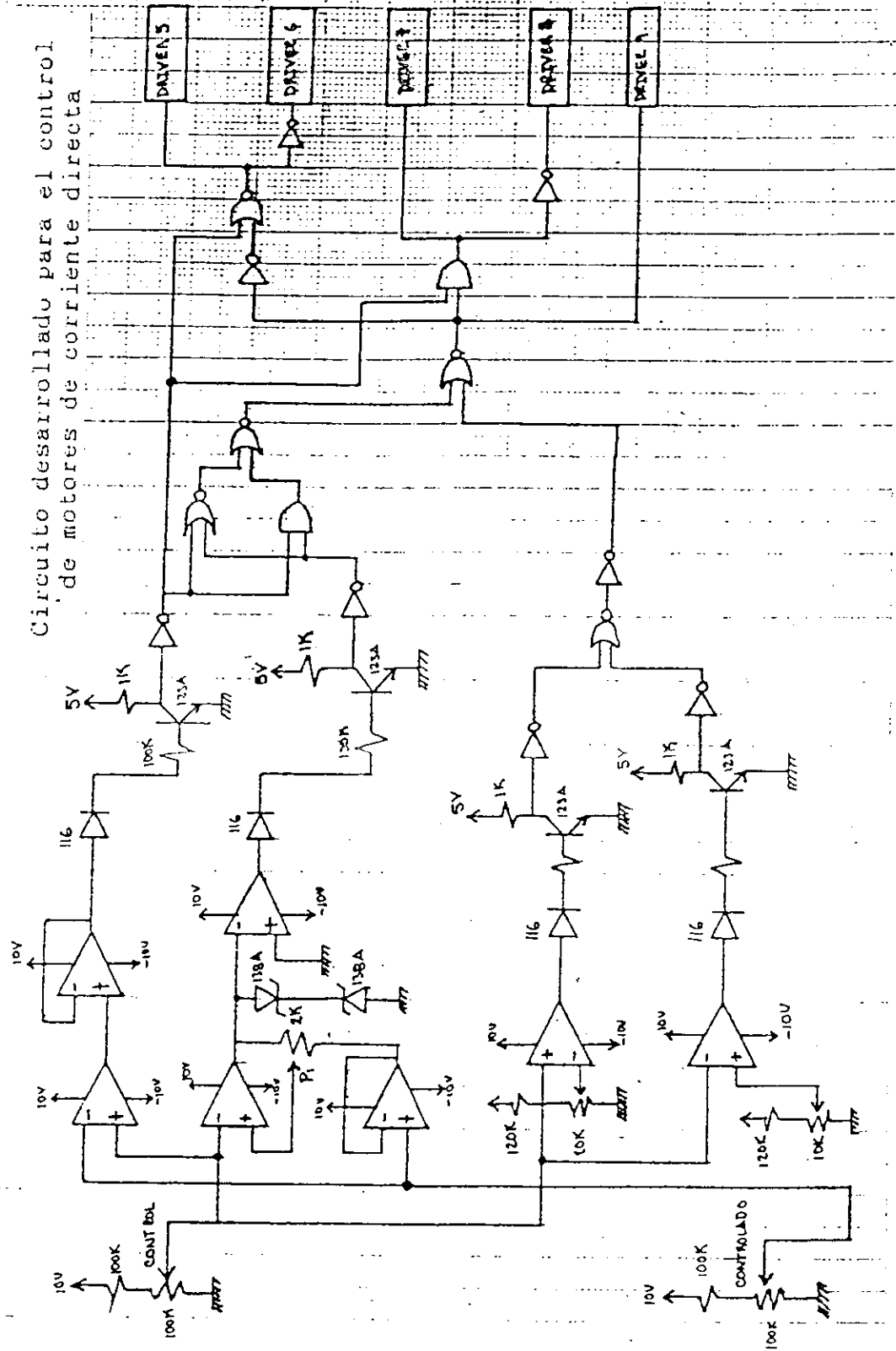
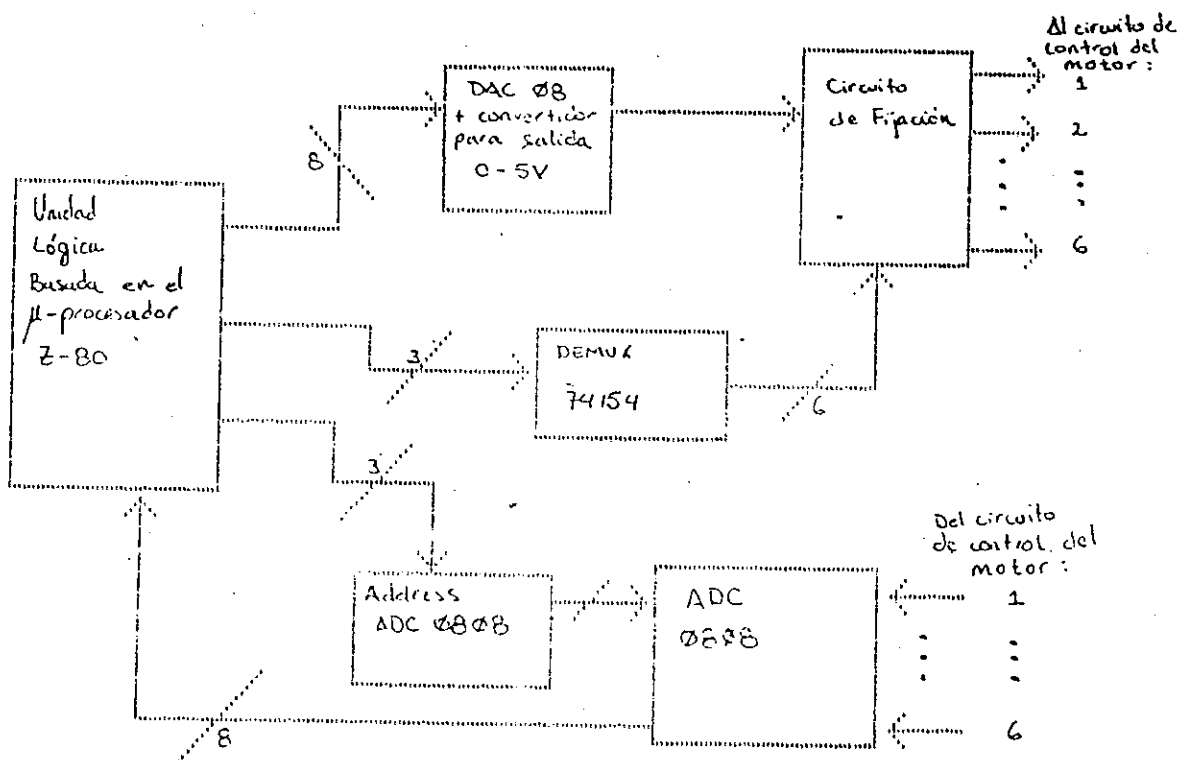




Figura 5.4  
 Diagrama de la forma de interconexión  
 de los circuitos de control de los motores con la  
 unidad lógica



Se observa, claramente, que el circuito de fijación proporciona salida de información para los circuitos de control de cada motor de corriente directa. Para el proceso de grabación es necesario ingresar la información de cada motor a través del ADC-0808. Ambas funciones se realizan por medio de multiplexación en tiempo. A continuación se presenta la forma de conexión de cada bloque.



Figura 5.7

Forma de conexión del DAC-08

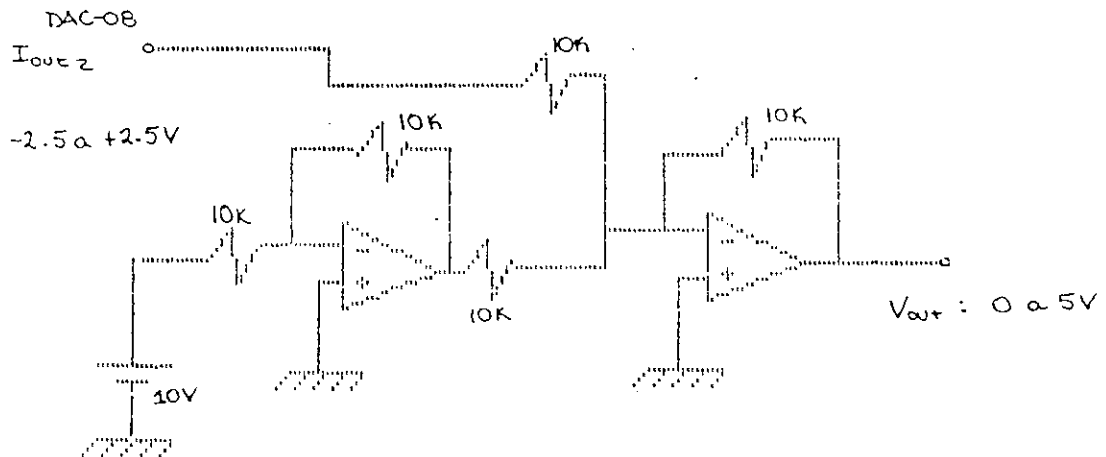
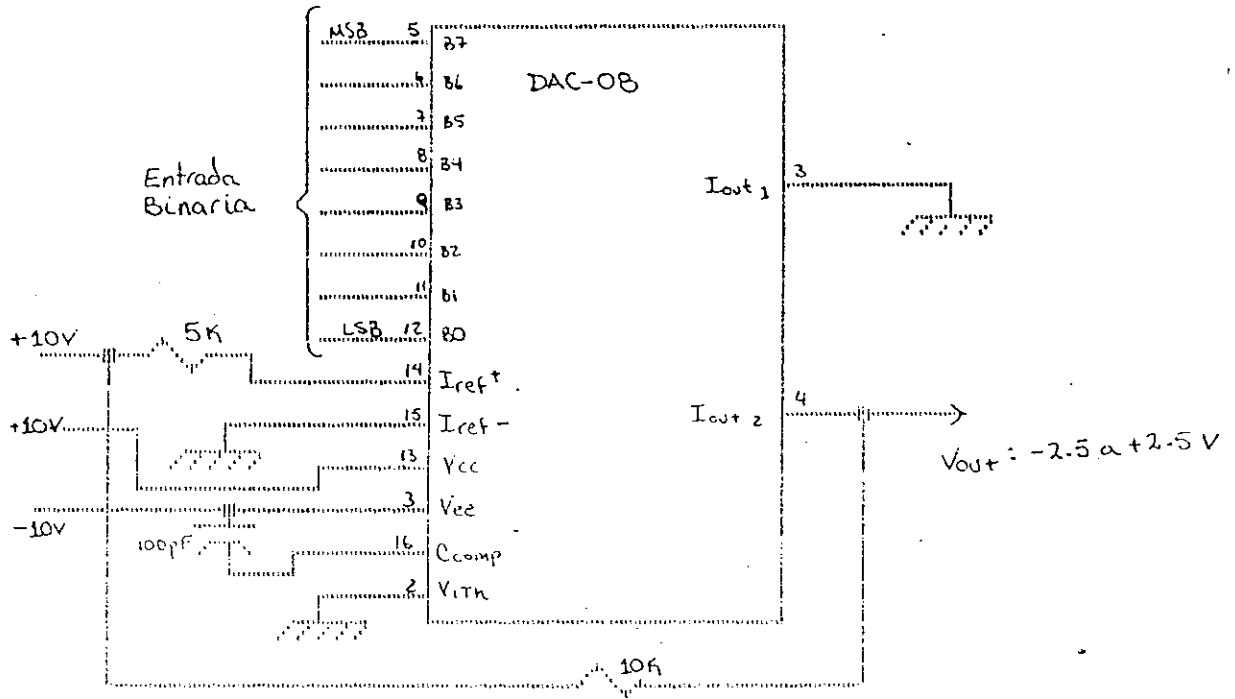
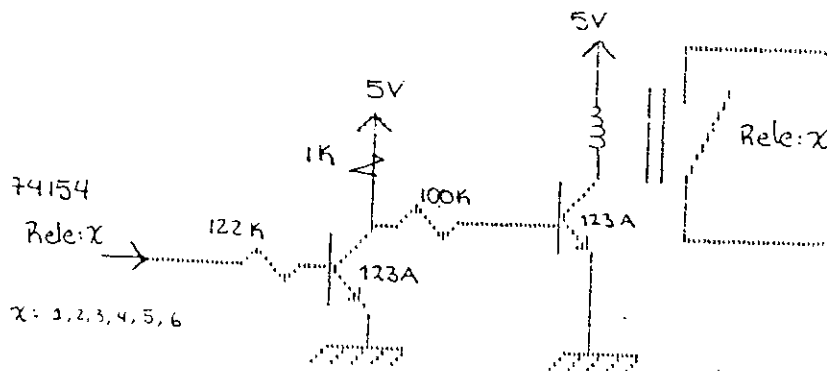
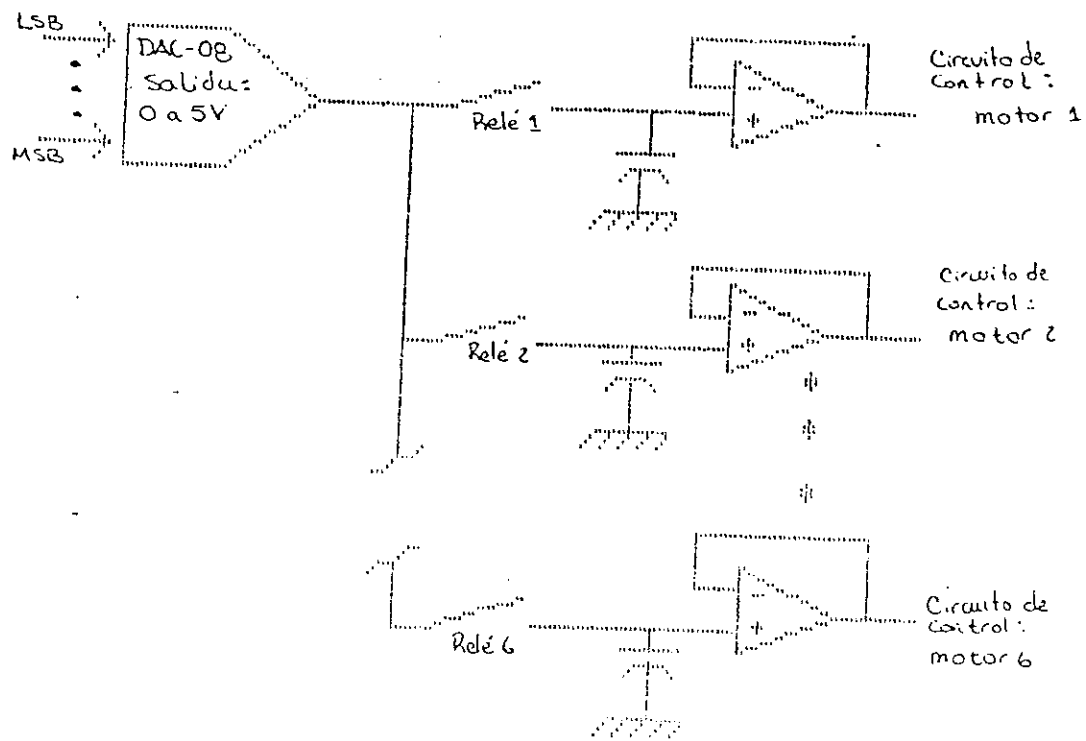


Figura 5.8

Forma de conexión del bloque circuito de fijación



## VI. DESARROLLO DE SOFTWARE

La forma general de almacenamiento de rutas ha sido diseñada utilizando un solo microprocesador trabajando en multiplexación de tiempo. De los resultados obtenidos en el capítulo IV se puede saber que la máxima frecuencia de -3dB se presenta cuando la inercia rotacional de la carga es  $3 \text{ Kg-m}^2$ .

Es posible observar de los diagramas de bode que la máxima frecuencia con un desfase de  $-90^\circ$  se presenta cuando la inercia rotacional de la carga es  $0 \text{ Kg-m}^2$ .

$$\omega_{-90} = 3\omega_{\text{ref}}$$

$$\omega_{-90} = 6.3645 \text{ rad/seg}$$

Partiendo de los resultados anteriores, se escoge una frecuencia de muestreo de:

$$f_{\text{muestreo}} = 2(6.3645/2 \text{ PI})$$

$$f_{\text{muestreo}} = 3.1 \text{ Hz}$$

Se hace notar que esta frecuencia de muestreo es necesaria para cada articulación del sistema, ya que estará siendo ordenada por un solo microprocesador.

En función del hardware desarrollado se sabe que será necesario almacenar muestras de voltaje efectuadas sobre el transductor denominado control.

#### A. Forma de grabación.

Se parte del hecho que estará almacenando la información de la posición angular de seis diferentes articulaciones. El programa conoce, únicamente, voltajes en forma digital, por lo que no puede determinar el ángulo de cada segmento móvil, como tampoco es capaz de determinar la posición en coordenadas externas del sistema.

Se utiliza un sistema de apilamiento de datos para guardar la información del sistema. Cada voltaje se almacena en 1 byte. La forma de apilamiento es por estado del sistema. Esto significa que se ha implementado un contador de períodos de muestreo que determinará el tiempo en que el sistema permanece en un estado determinado. En la figura 6.1 se muestra en forma visual cualitativa la forma de apilamiento en memoria de un estado. El tiempo requerido por un período de muestreo se implementa por medio de una rutina de retardo. Este sistema de grabación se desarrollo para economizar espacio en memoria. Es posible ver que al estar controlando  $n$ -motores, cada estado necesitará  $n+1$  bytes de memoria para ser almacenado.

La forma de grabación de una secuencia total se efectúa por medio de estados. En la Figura 6.2 se muestra, esquemáticamente, la forma de apilamiento de una secuencia de movimientos (ruta).

La forma en que se ha elegido diferenciar en la pila de memoria el final de una ruta es asignando el valor de 00H al contador de períodos de muestreo que permanece el estado ya que para que el estado exista debe permanecer por lo menos un periodo de muestreo. En la figura 6.3 se muestra la forma de diferenciación de cada ruta en la pila de memoria.

Para la asignación del nombre de cada ruta se crea, en memoria, una tabla en la cual se le asigna al nombre de la ruta que está grabando la posición en memoria en que se encuentra su primer estado grabado. La forma de apilamiento es secuencial. Es decir, la primera ruta grabada para el caso mostrado en la figura 6.3 ha sido la ruta S. La tercera ruta grabada ha sido la ruta H.

Figura 6.1

Forma cualitativa de apilamiento de estado

Código Posición	motor 6	byte
Código Posición	motor 5	byte
Código Posición	motor 4	byte
Código Posición	motor 3	byte
Código Posición	motor 2	byte
Código Posición	motor 1	byte
# de Periodos de muestreo que permanece este estado.		byte

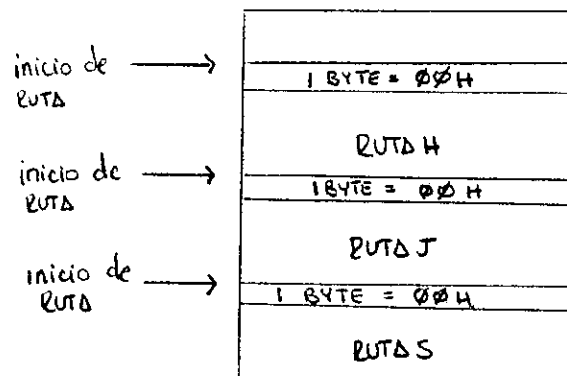
Figura 6.2

Forma cualitativa de apilamiento de los estados para una ruta

1er Estado (Ruta B)
1 byte : $\emptyset \emptyset H$
(k)º Estado (Ruta A)
(k-1)º Estado (Ruta A)
⋮
2º Estado (Ruta A)
1er Estado (Ruta A)

Figura 6.3

Forma cualitativa de apilamiento de rutas  
en el stack de rutas



#### B. Capacidades generales del algoritmo desarrollado.

Capaz de grabar  $k$  rutas diferentes de un sistema que posee  $n$  motores diferentes que utilizan el circuito de control desarrollado. Se utiliza para el efecto multiplexación en tiempo.

Durante el proceso de grabación existe la posibilidad de abortar la orden de grabación. Al ordenar un aborto en este punto, la ruta que actualmente se estaba grabando queda borrada. La posibilidad de ordenar este comando existe cada período de muestreo.

En la etapa de grabación de una ruta se controla la memoria disponible para la introducción de rutas. Al detectarse que la memoria se ha terminado; el programa, automáticamente, deja de grabar los estados de los motores.

Cuando se elige grabación o ejecución de una ruta, existe indicación visual para el usuario. La comunicación usuario-sistema se realiza a través de un teclado.

En la modalidad de ejecución, el programa es capaz de aceptar un número determinado de veces que deberá ejecutar la ruta completa. Además, también cuenta con la opción de ordenar una ejecución de la ruta total sin número determinado.

Durante el proceso de ejecución, independientemente del número de veces ordenado para ejecutar la ruta, proporciona las siguientes opciones:

Cada período de muestreo efectúa una búsqueda de orden que permite ordenar que la ejecución de ruta termine al momento que se culmine la ejecución actual de la misma. Con lo anterior, el programa retornará a la posición en que se encuentra esperando orden de función (ejecutar o grabar). Existe indicación visual que, actualmente, es la última vez que se ejecutara la ruta.

Cada período de muestreo acepta la orden de abortar la ejecución de la ruta. Al momento de recibir esta orden el programa detiene los motores en el estado en

que se encuentran y espera una nueva orden. Existen dos opciones para la nueva orden. Una es que la ejecución continúe en el mismo punto en que fue introducida la orden de abort. Con ésta no se afecta el contador del número de veces ordenado a ejecutar la ruta. La otra opción para concluir el aborto es que todos los motores se ubiquen en el estado cero del sistema y el programa se ubique en la posición en que espera una orden de ejecución o grabación de rutas.

Al solicitar que se ejecute una ruta no grabada, el programa presenta indicación visual de la no existencia de la misma y regresa a esperar una nueva orden de grabación o ejecución.

### C. Definición de términos utilizados en el algoritmo.

Stack de ruta: Es la porción de memoria disponible para el almacenamiento de las rutas grabadas.

Voltaje actual: Porción de memoria en el cual es posible guardar, temporalmente, un estado del sistema.

Voltaje temporal: Porción de memoria en el cual es posible guardar temporalmente un estado del sistema.

Contador de estado: Es el contador que guarda el número de periodos de muestreo que permanece el sistema en un estado determinado.

Contador de veces de ruta: El contador donde se encuentra el número de veces que se ordena ejecutar una ruta determinada.

Período de muestreo:  $1/f$  (frecuencia de muestreo). Se asigna en función del motor más estable que se este controlando.

Banco ruta  $h$ :  $h = 0, 1, 2, \dots, k$  Ocupa 2 bytes de memoria por cada  $h$  diferente. Recordar que  $h$  se ha definido como el número de rutas diferentes que es posible grabar. Esta será la porción de memoria donde encontraremos la dirección de memoria stack de ruta donde se ubica el primer estado de la ruta  $h$ . Es decir, el punto en la memoria donde deberá empezar a grabar o ejecutar.

### C. Diagrama de flujo del algoritmo desarrollado.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del algoritmo desarrollado.

Figura 6.4

Diagrama de flujo de algoritmo total

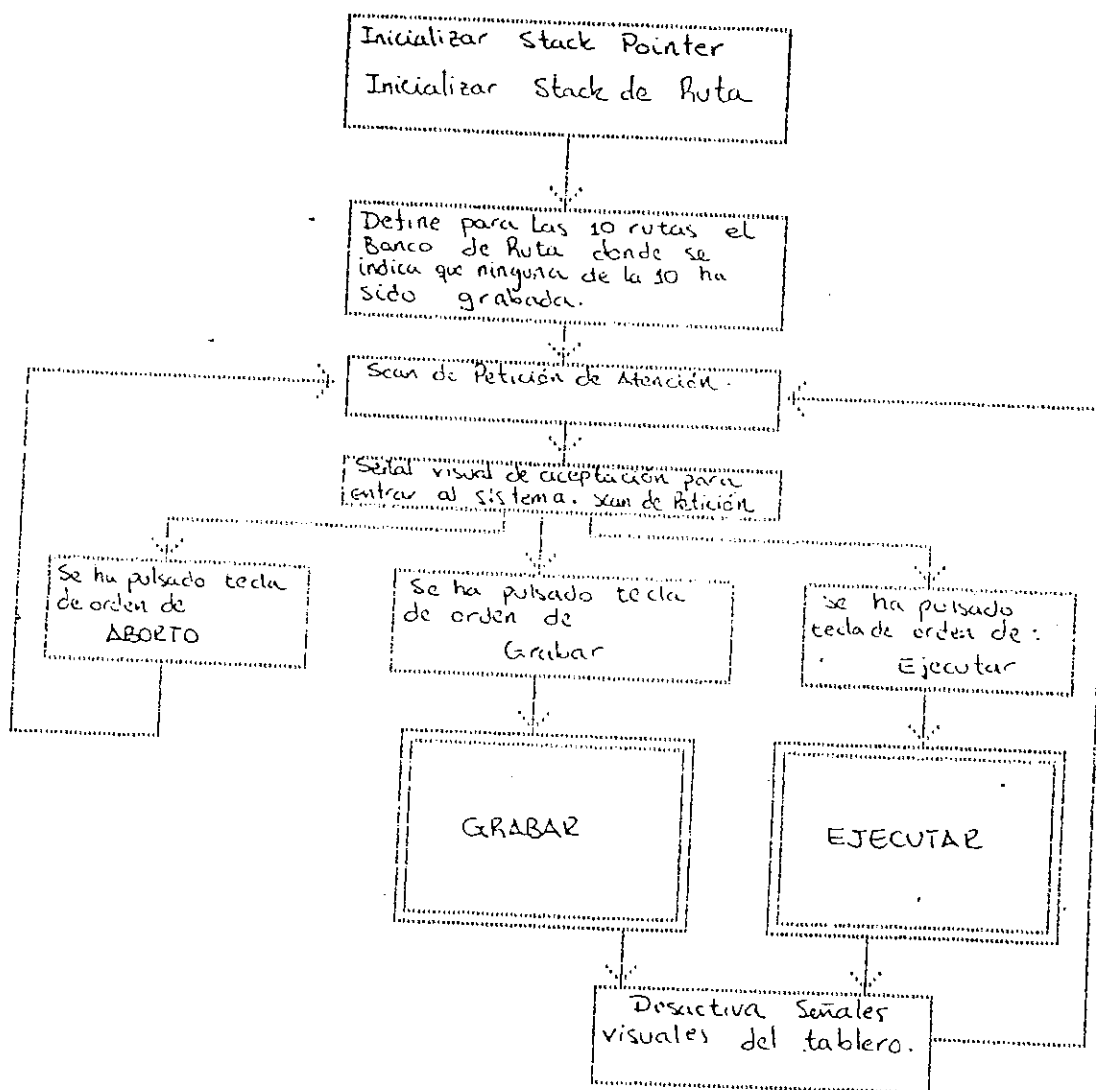


Figura 6.5

Diagrama de flujo de subrutina grabar.

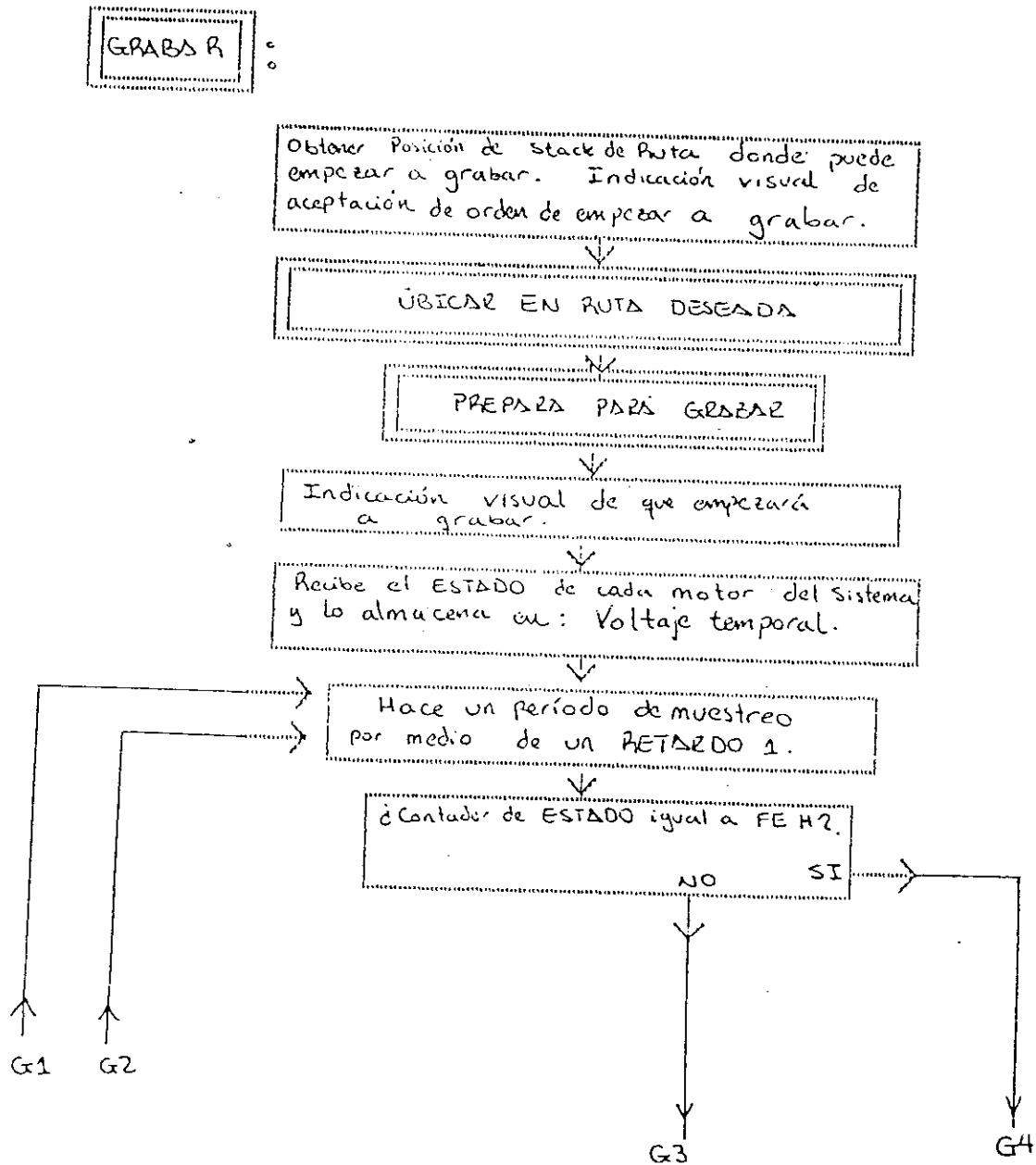


Figura 6.6  
 Diagrama de flujo de subrutina grabar.  
 Continuación (2)

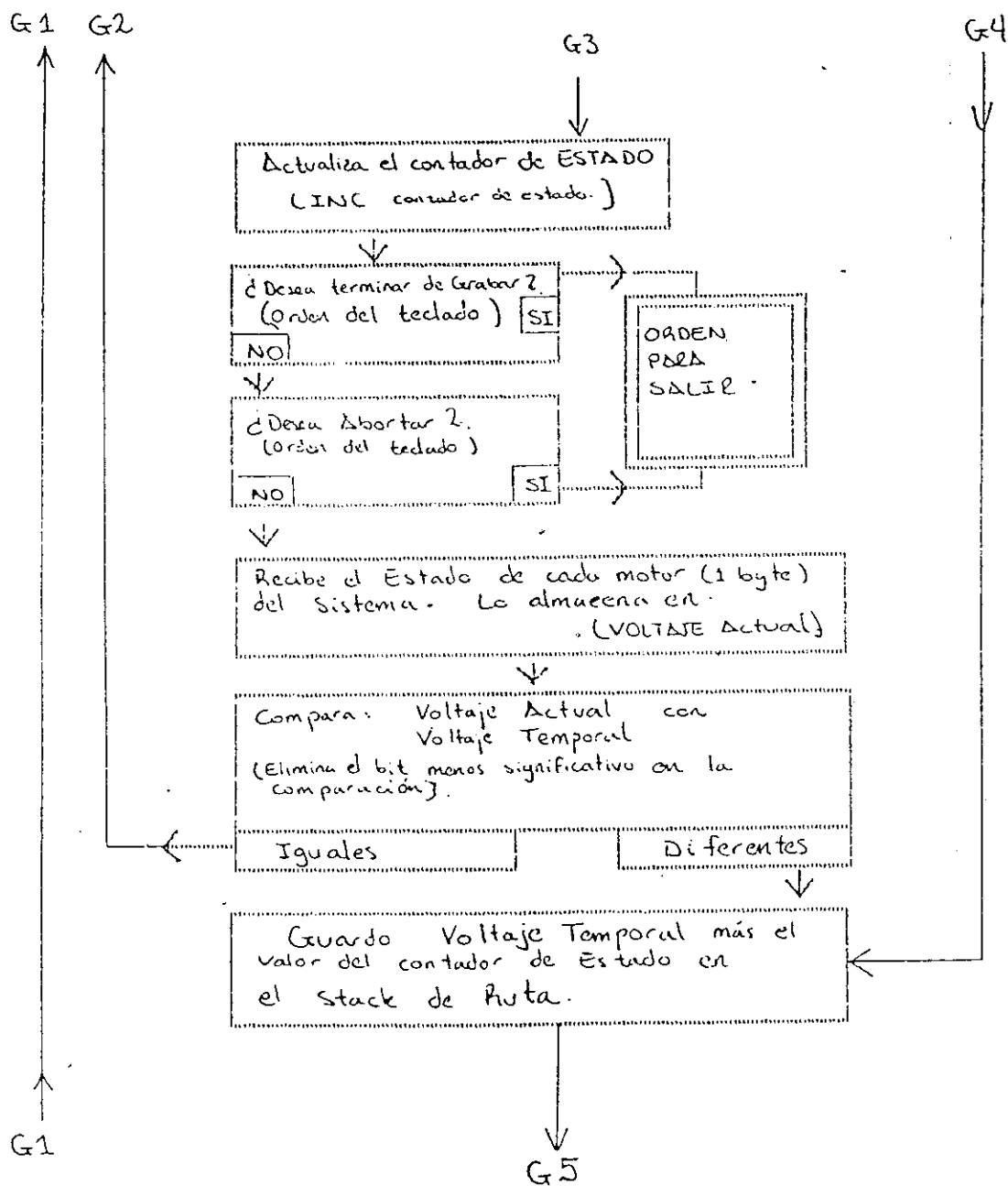


Figura 6.7

Diagrama de flujo de subrutina grabar.

Continuación (3)

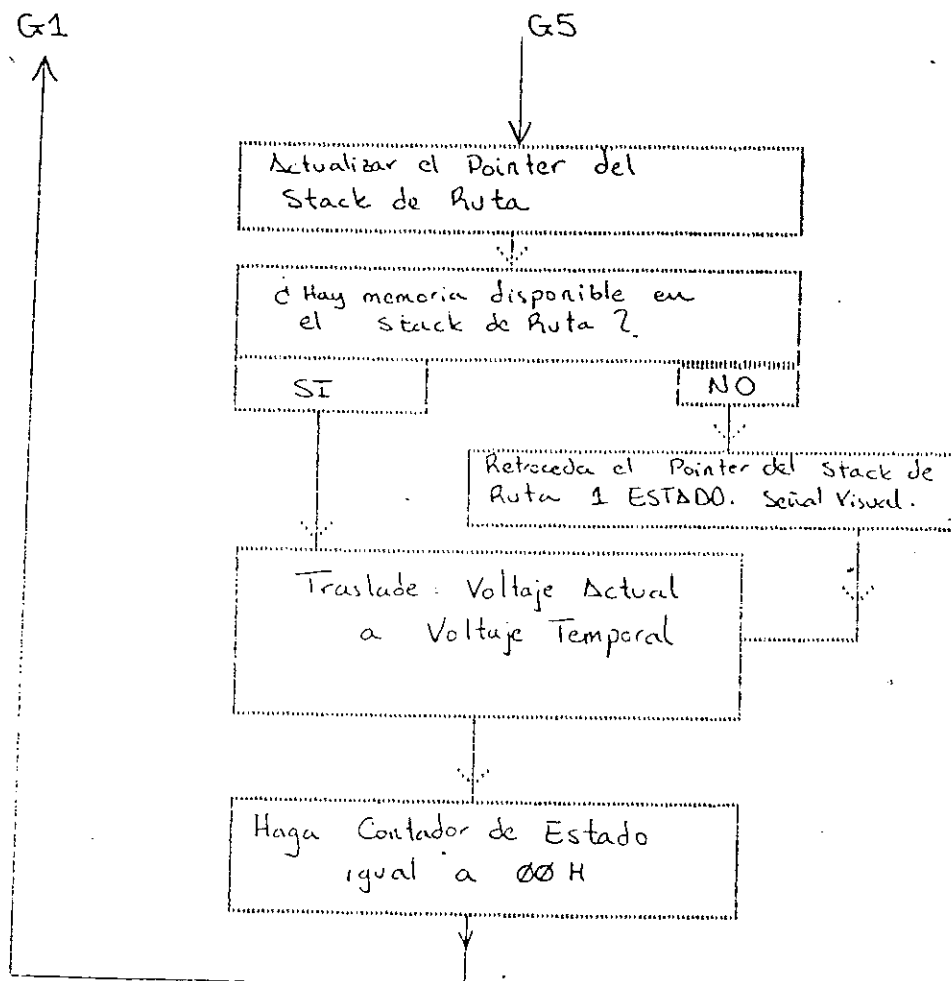


Figura 6.8  
 Diagrama de flujo de subrutina  
 Orden para salir

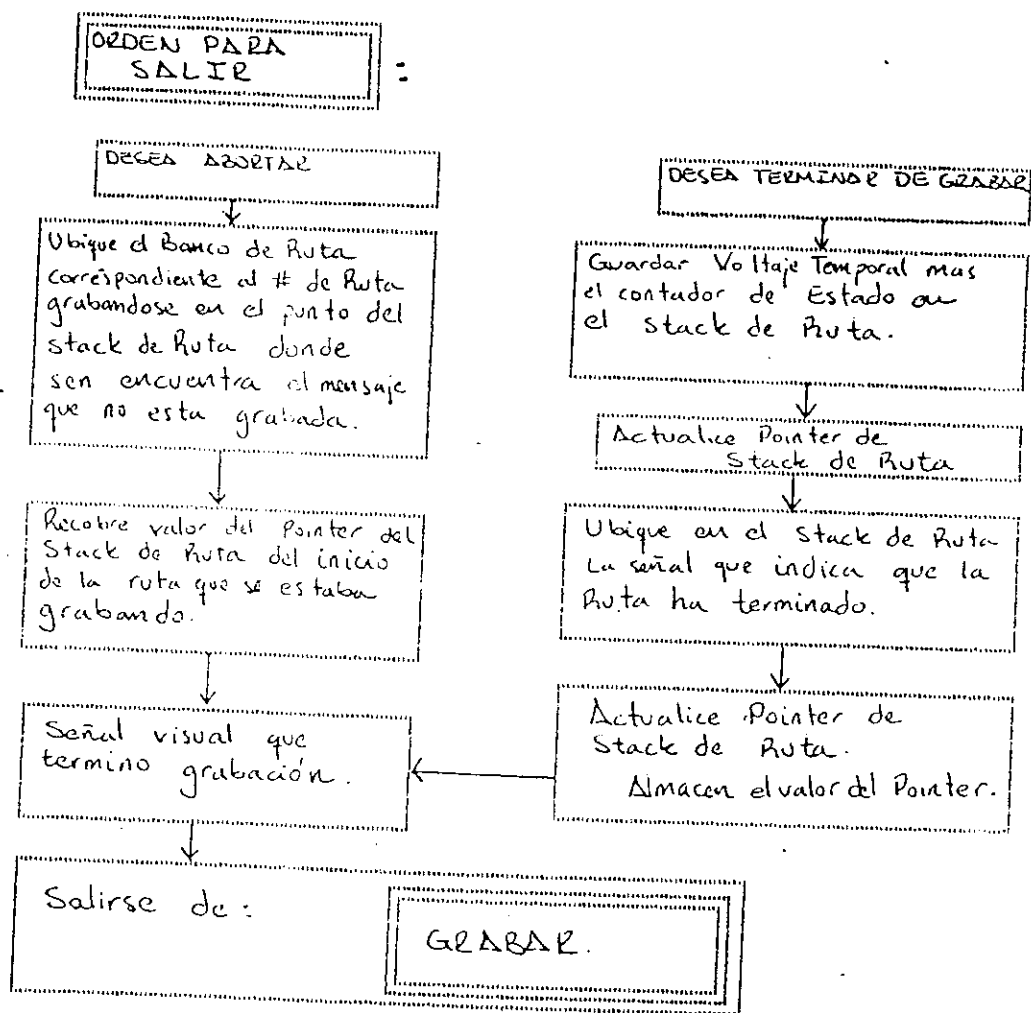


Figura 6.9

Diagrama de flujo de la subrutina  
ejecutar

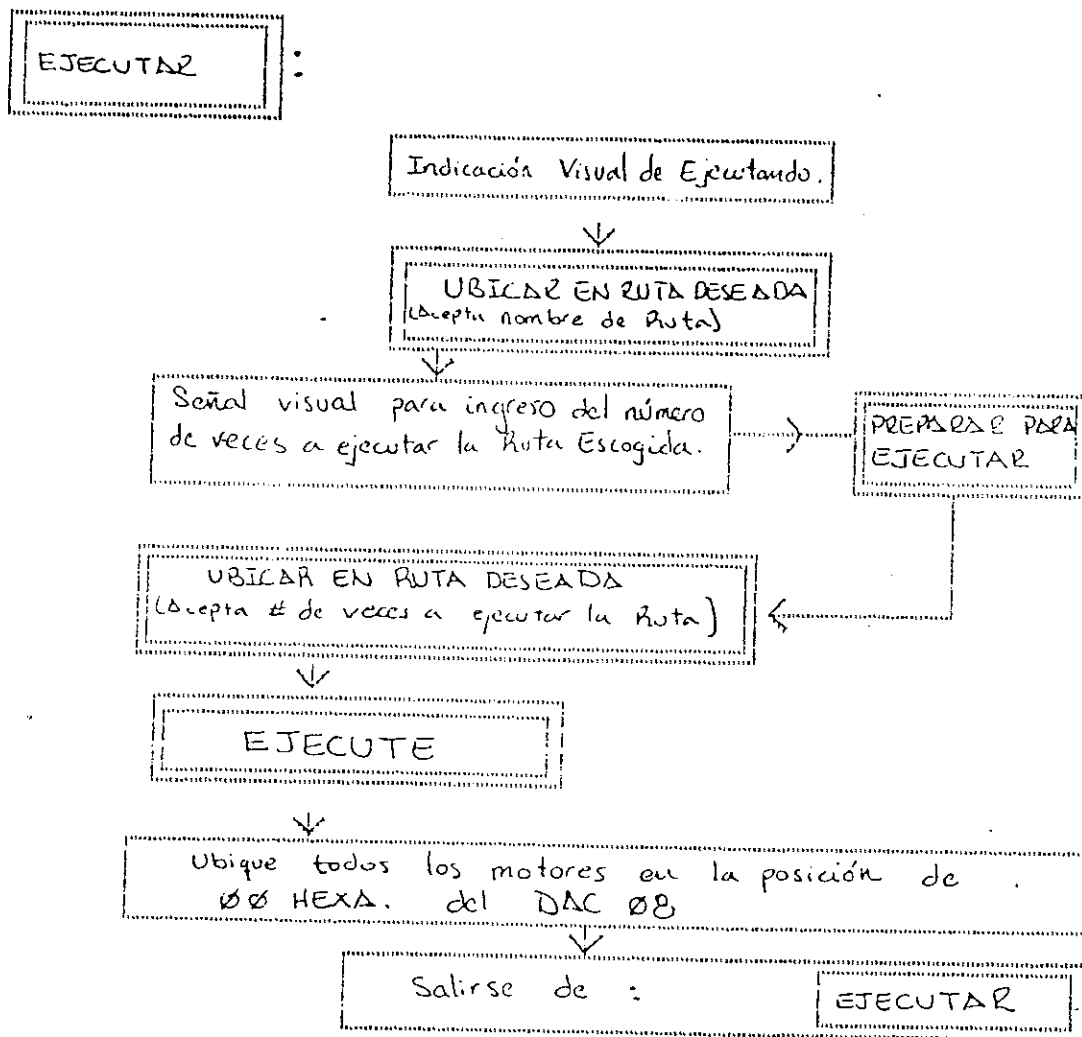


Figura 6.10

Diagrama de flujo de la subrutina

Preparar para grabar o ejecutar

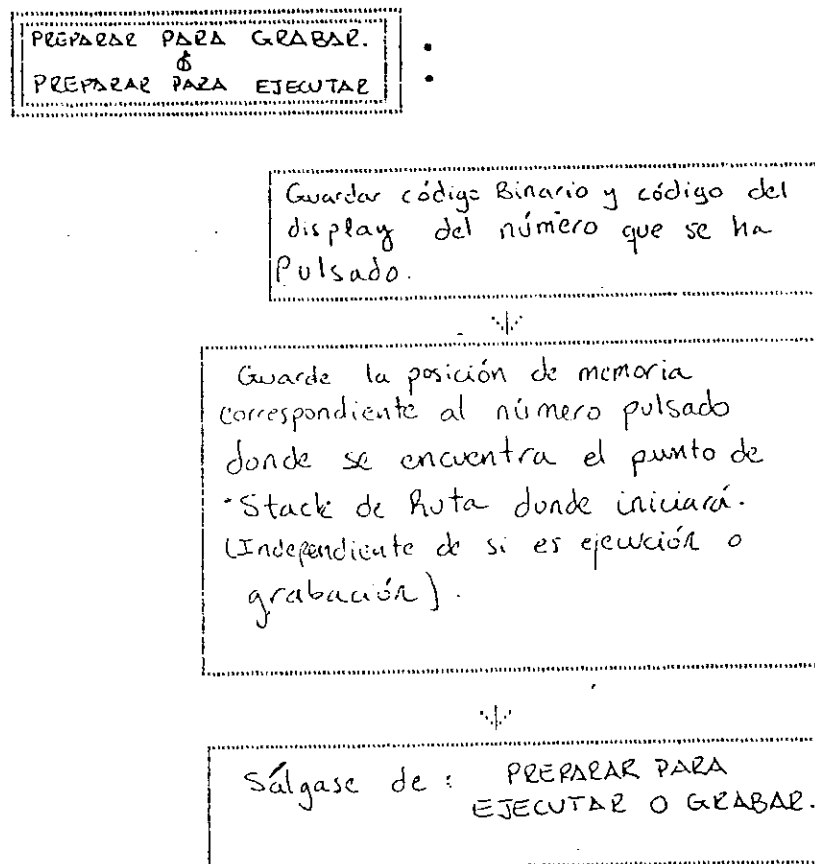


Figura 6.11  
 Diagrama de flujo para subrutina  
 ubicar en ruta deseada

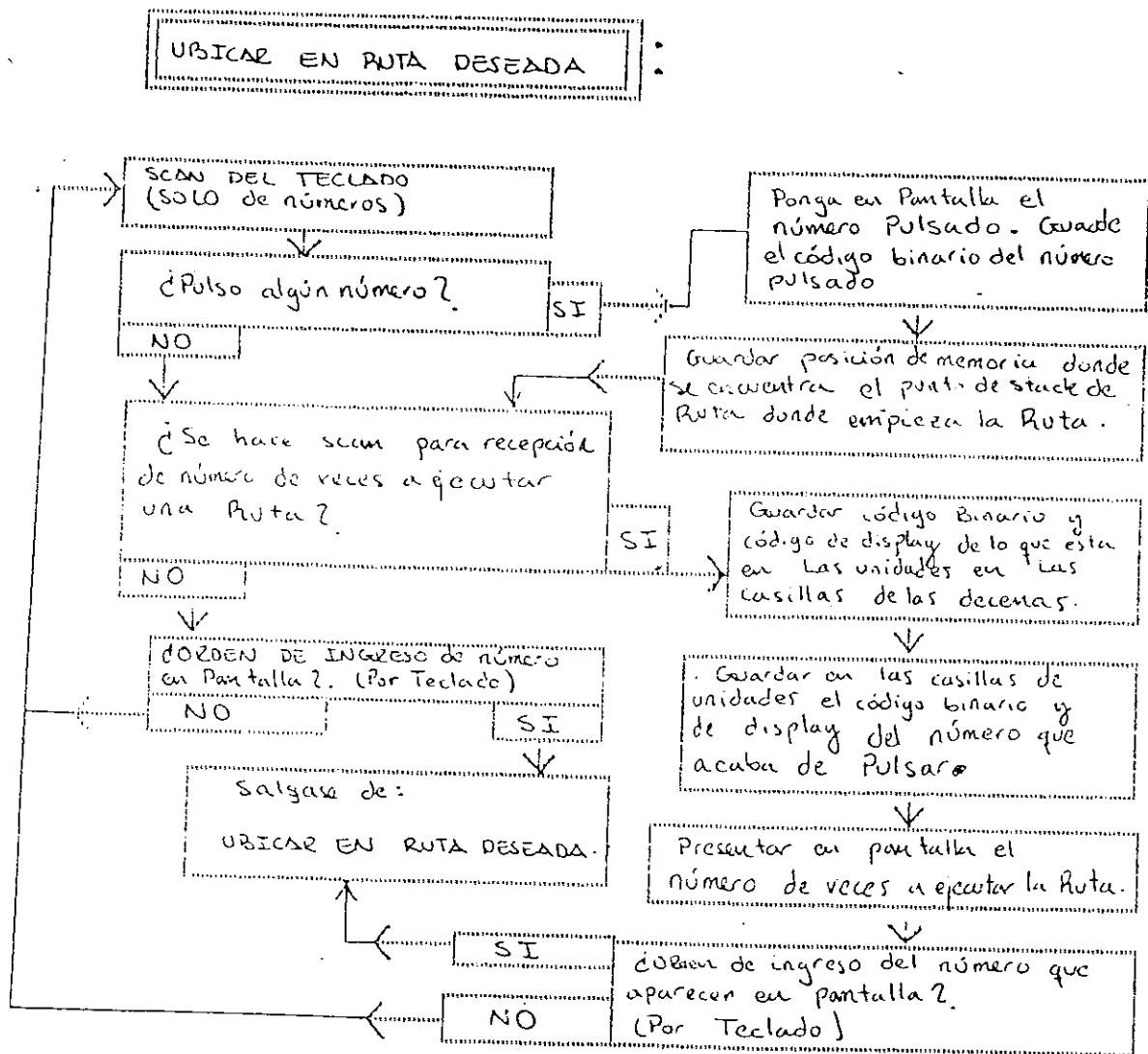


Figura 6.12  
 Diagrama de flujo de subrutina  
 Ejecute

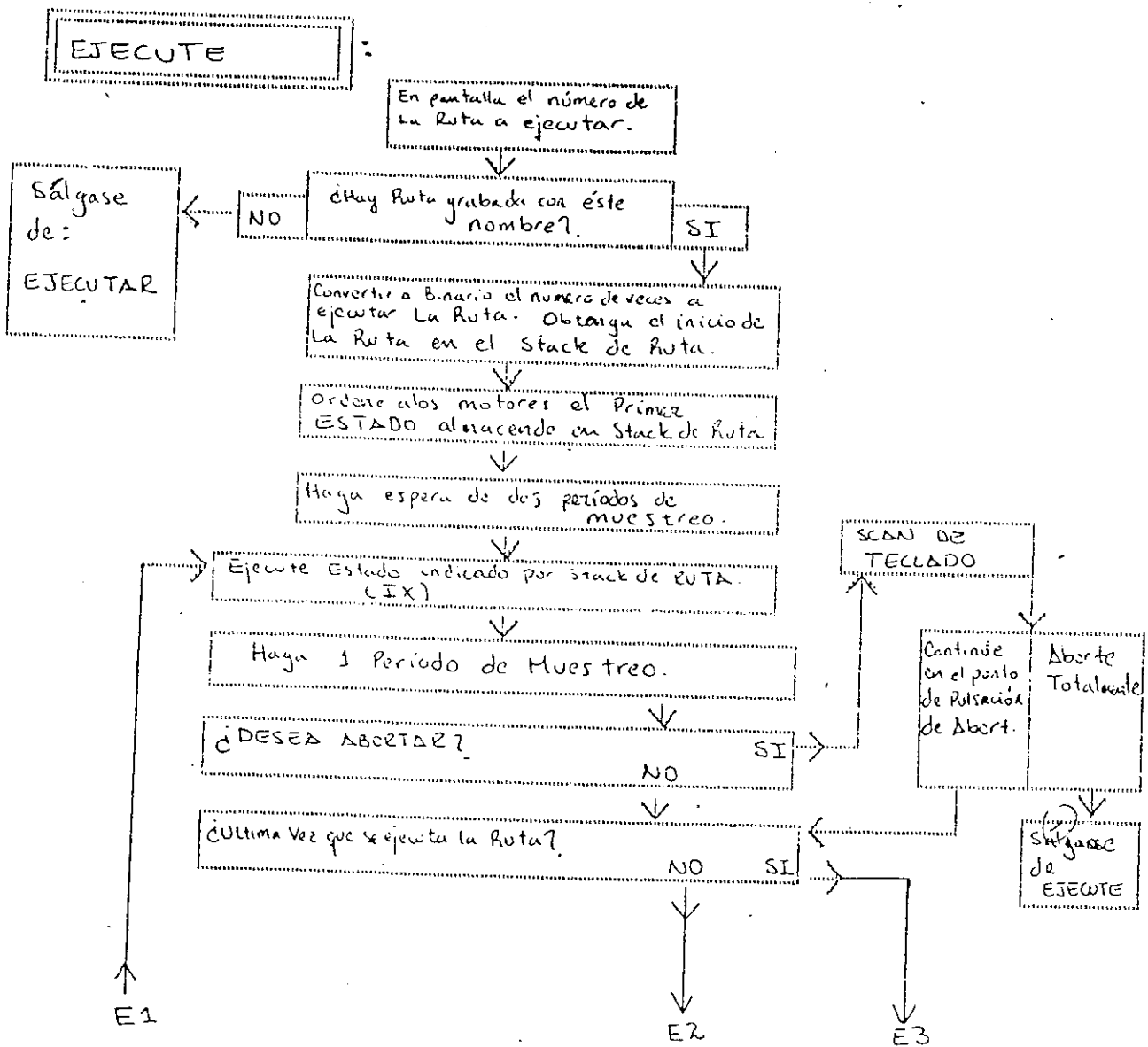
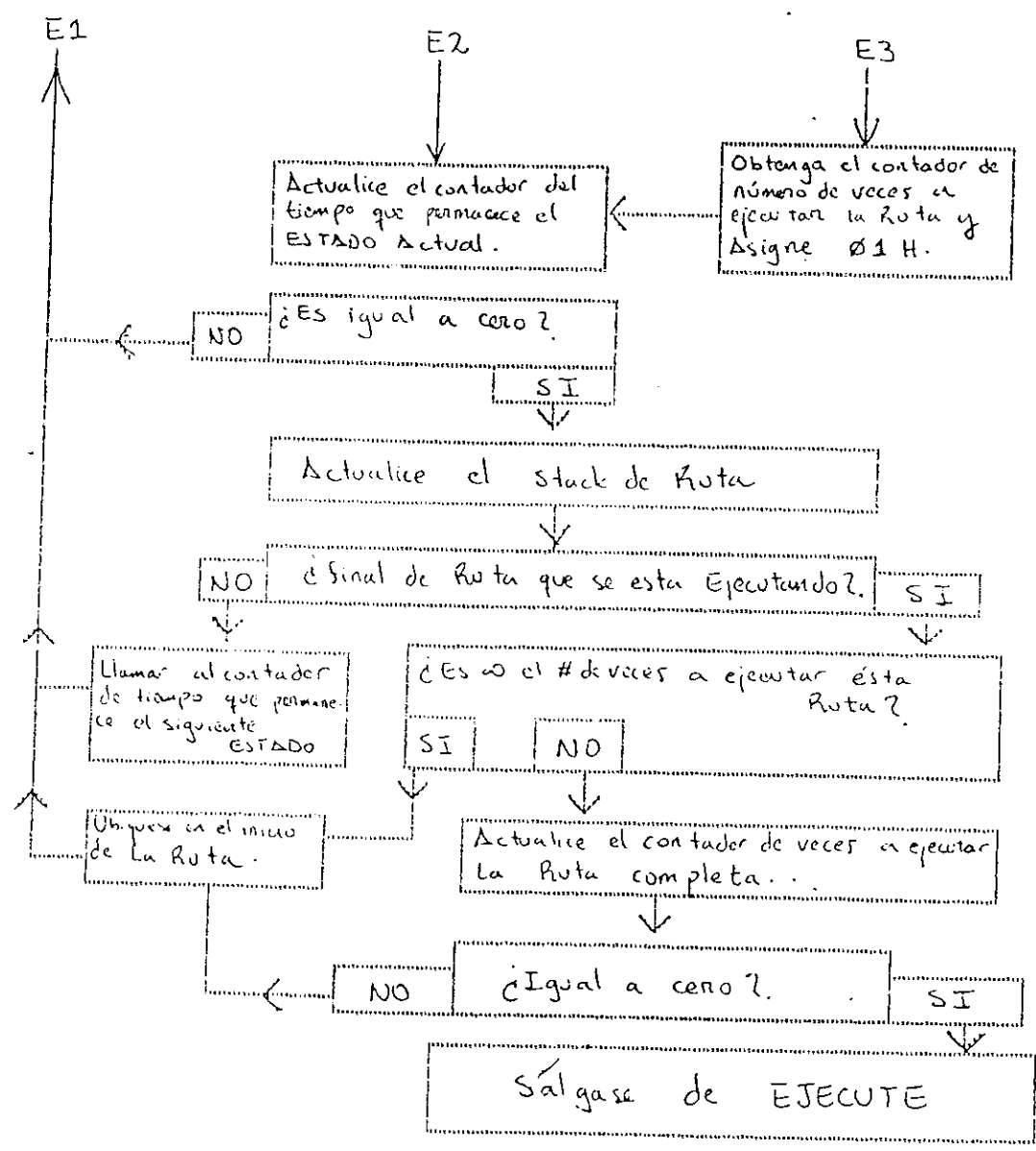


Figura 6.13  
Diagrama de flujo de subrutina  
ejecute (continuación)



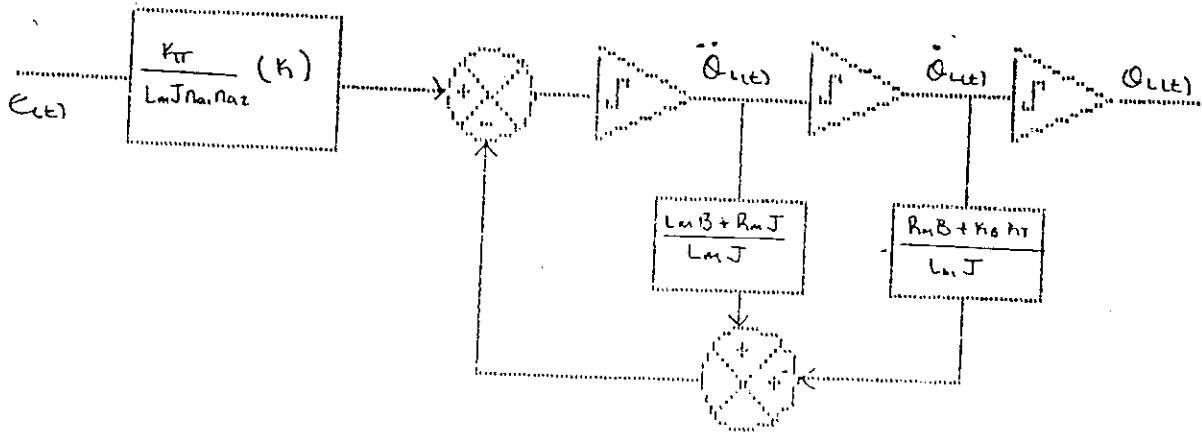
## VII. VALIDACION DE DISEÑO

Para el efecto de validación del diseño se ha desarrollado un circuito eléctrico equivalente de un motor de corriente continua, utilizando el primer modelo matemático desarrollado. La computadora analógica fue conectada, directamente, al circuito de control. Para la validación del programa desarrollado se utilizó una unidad lógica basada en el microprocesador Z-80. Dicha unidad cuenta con tres puertos paralelos de ocho bits cada uno, programables por medio del PPI 8255.

### A. Circuito de control

Partiendo del primer modelo matemático desarrollado en variables de estado se tiene:

Figura 7.1  
Diagrama de bloques para el modelo matemático  
número 1



Se elige el caso de máximo sobretiro.

$$\Rightarrow \quad = 0.69$$

$$J_L = 7 \text{ Kg-m}^2$$

$$K_T / n_{a1} n_{a2} L_m J = 5667.1$$

$$(L_m B + K_b K_T) / L_m J = 10250.1$$

$$(R_m B + K_b K_T) / L_m J = 25449.3$$

Figura 7.3  
 Diagrama para computadora analógica con  
 nueva escala

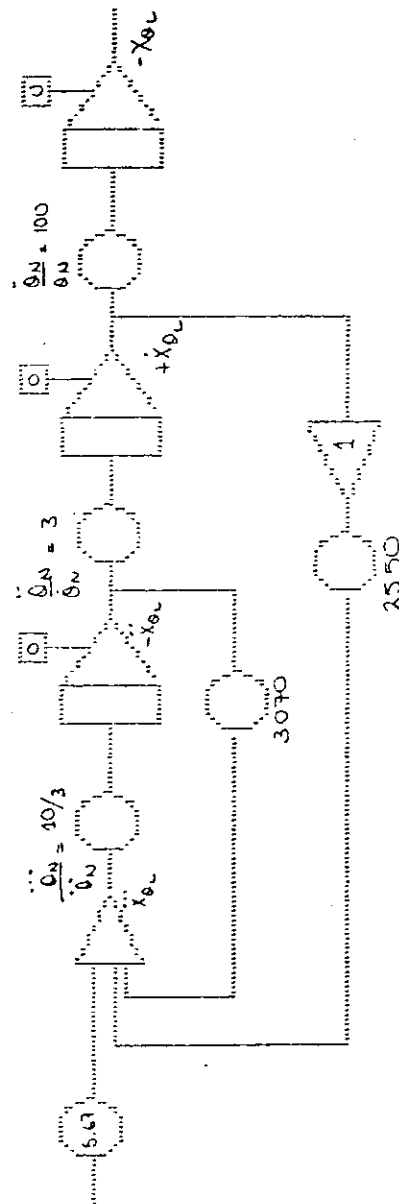


Figura 7.3  
 Diagrama para computadora analógica con  
 nueva escala

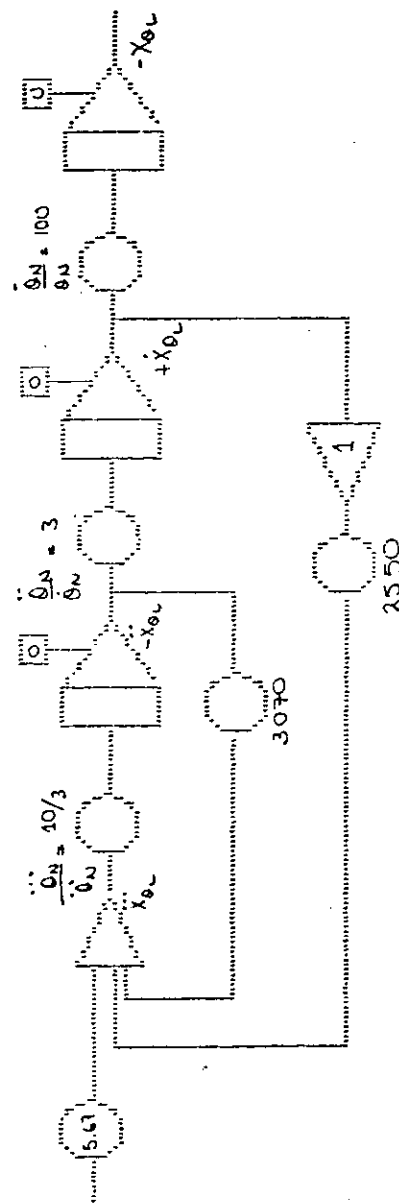
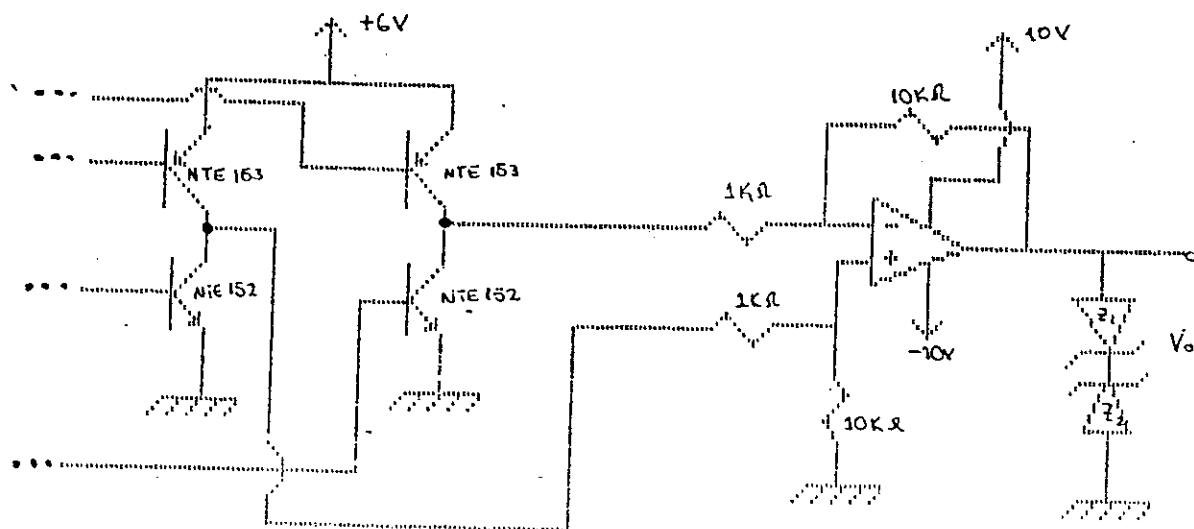


Figura 7.4  
 Forma de conexión con el circuito  
 de control real



Donde  $V_o = \pm 7.7V ; 0V$ .

$Z_1 = Z_2 = \text{NTE } 138A$

En la salida del circuito de interface entre el equivalente eléctrico y el circuito real es de :

$$\pm 7.7V$$

Entonces se hace la conversión necesario para que se reciban  $\pm 6V$ .

$$\frac{5.67}{7.7V} (6V) = 4.416$$

En la salida del equivalente eléctrico no se desea la posición angular. Por lo tanto se asume un movimiento máximo de  $120^{\circ}$  .  $\Rightarrow$  2.0944 rad.

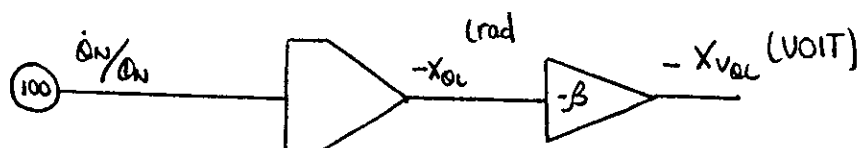
Se asume la utilización de un potenciómetro con magnitud de resistencia proporcional al ángulo girado. Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{2.0944 \text{ rad}}{5V} &= 0.4189 \text{ rad/volt} \\ &= 2.3873 \text{ volt/rad} \end{aligned}$$

Entonces:

Figura 7.5

Diagrama de bloques de la salida de la computadora analógica



$$G = \frac{1}{RC} = \frac{z_f}{z}$$

$$4.416 (10/3) = 14.72$$

$$3070 (10/3) = 10\,233.3$$

$$2550 (10/3) = 8500.0$$

Para el primer integrador se escoge un capacitor de  $0.1 \mu\text{F}$ .

$$R = \frac{1}{14.72 (0.1 \mu\text{F})} = 679.4 \text{ k}\Omega$$

$$R = \frac{1}{10233.3 (0.1 \mu\text{F})} = 0.977 \text{ k}\Omega$$

$$R = \frac{1}{8500 (0.1 \mu\text{F})} = 1.176 \text{ k}\Omega$$

Para el segundo integrador se utiliza un capacitor de  $4 \mu\text{F}$ . Entonces:

$$G = 3$$

$$R = \frac{1}{3 (4 \times 10^{-6})} = 83.33 \text{ k}\Omega$$

Para el tercer integrador se utiliza un capacitor de  $4 \mu\text{F}$ .



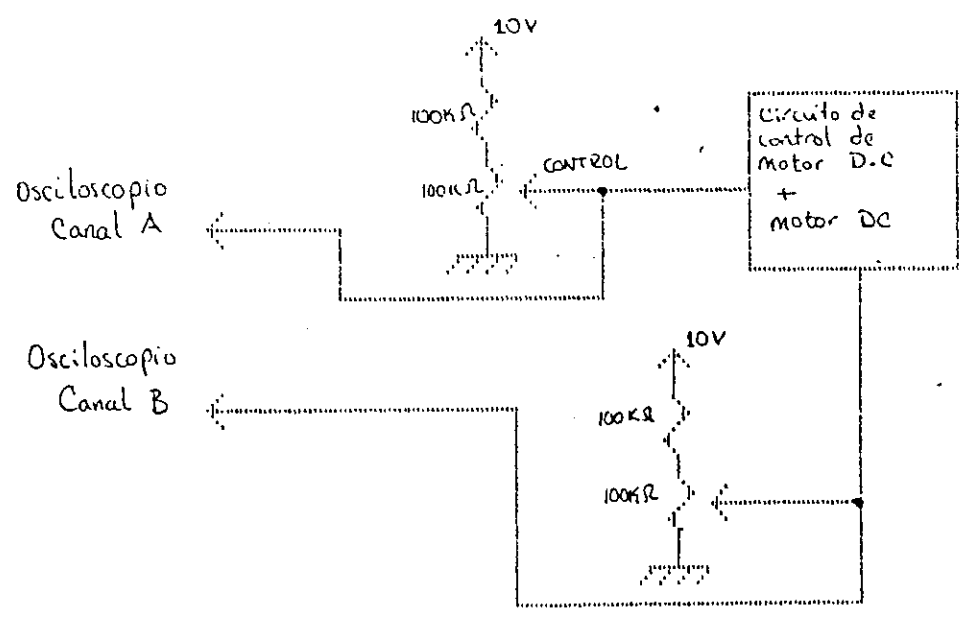
Una vez ubicado el equivalente eléctrico en el circuito de control real como se muestra en la figura 7.4, se procedio a observar el comportamiento del sistema motor-carga al ser controlado por el circuito diseñado.

A continuación se presenta una serie de fotografías que ilustran la forma del comportamiento del sistema antes mencionado.

Las fotografías fueron obtenidas de un osciloscopio de doble traza Hewlett-Packard

Figura 7.7

Forma de conexión del circuito con el osciloscopio para la obtención de fotografías

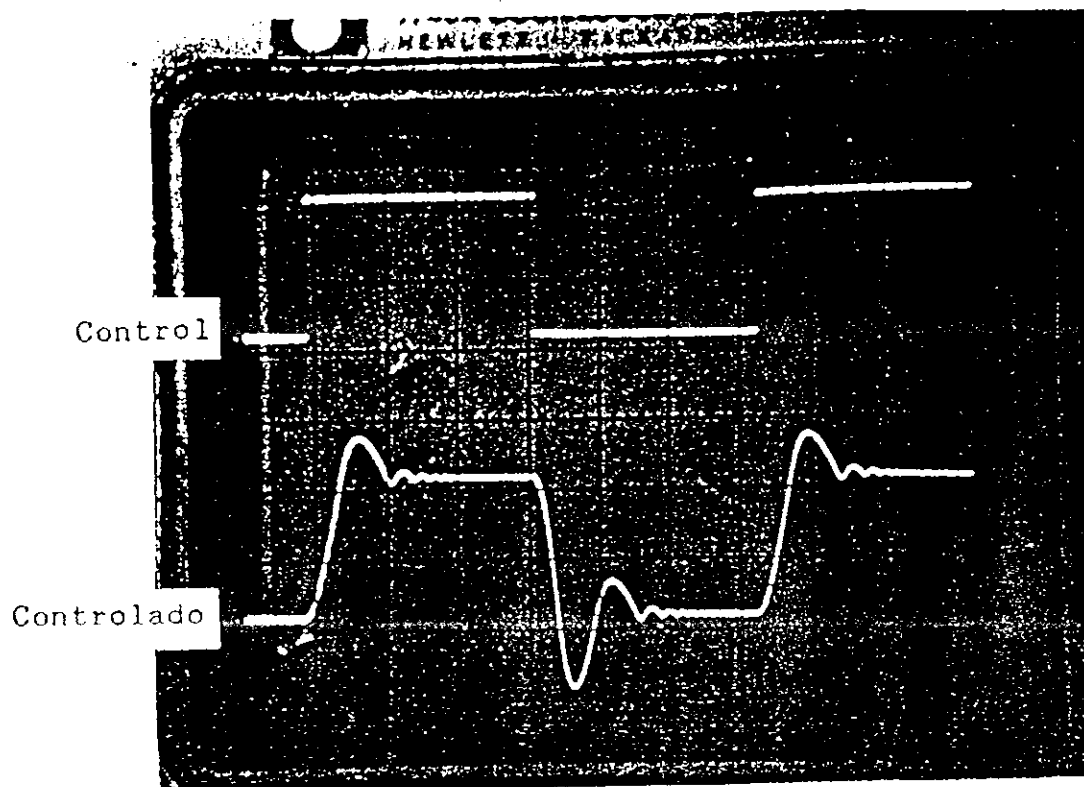


**Información sobre las fotografías:**

Cámara: Canon A-1  
Rollo: Konica Asa 100  
Lente: Vivitar 75-205 mm  
Distancia: 5 m; 135mm  
Exposición: f/8; 20 seg.

## Fotografía 7.1

Excitación con señal cuadrada (1).

 $K=6$  $J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$ 

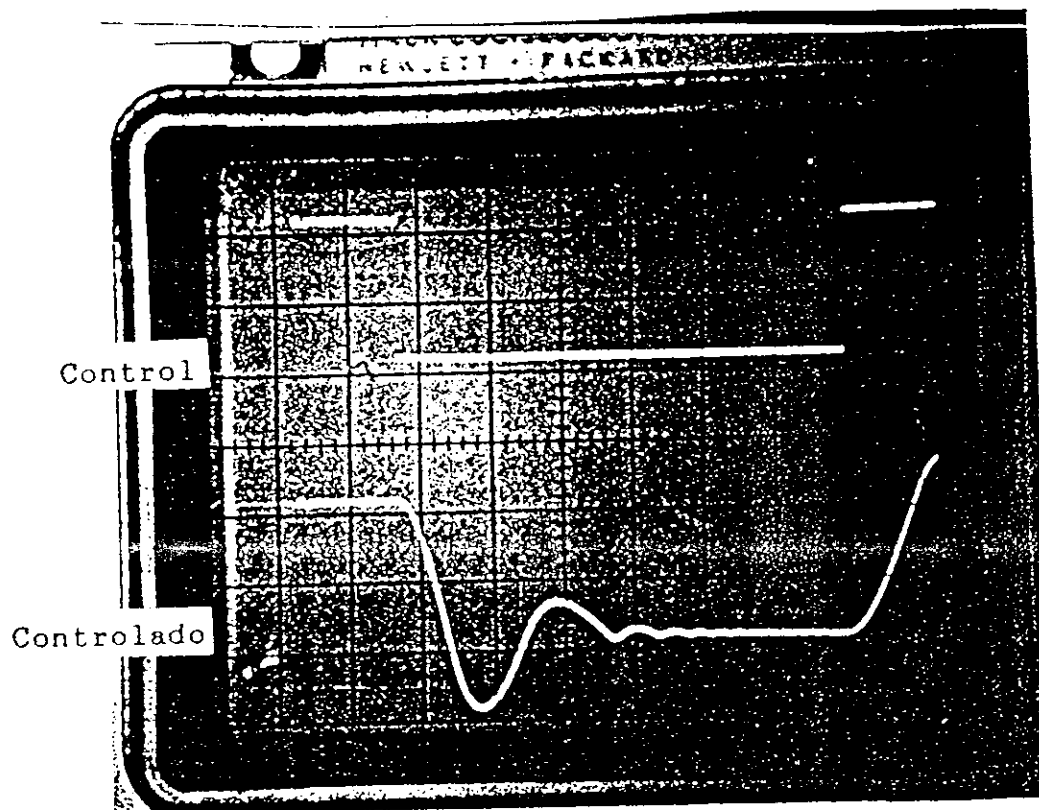
motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

Frecuencia de señal de control: 0.0787 Hz

Fotografía 7.2  
Excitación con señal cuadrada (2)



$$K=6$$

$$J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$$

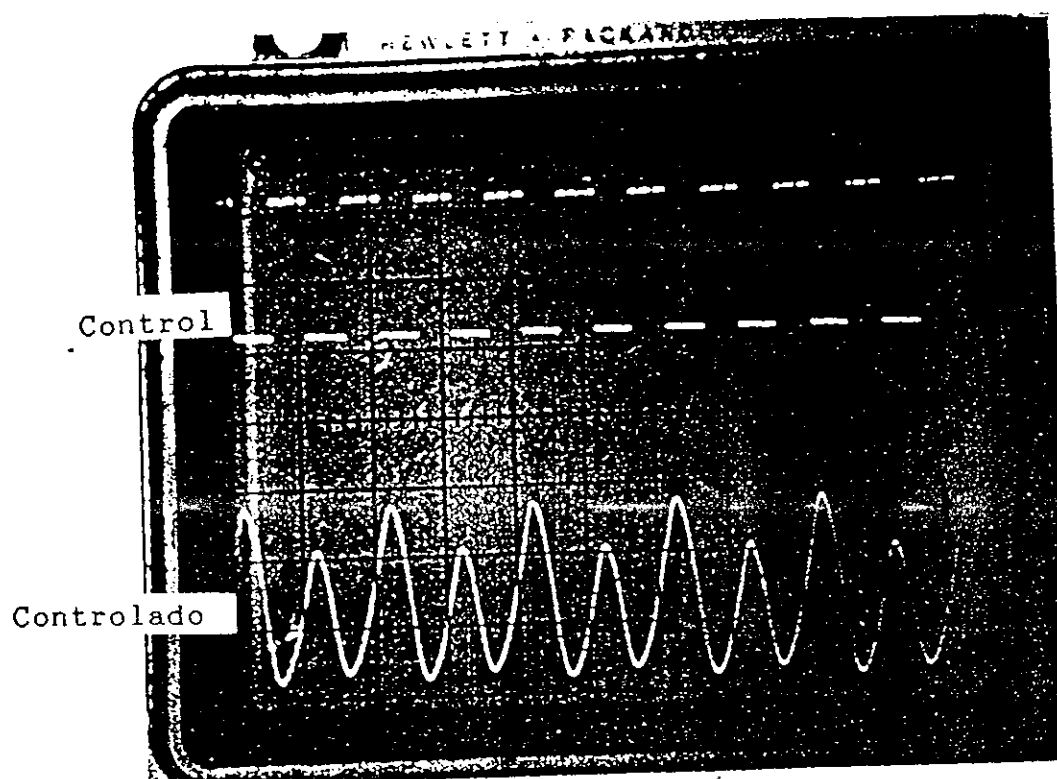
motor: U9M4T.

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 1 Seg/Div

Frecuencia de señal de control: 0.0787 Hz

Fotografía 7.3  
Excitación con señal cuadrada (3)



$K=6$

$J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$

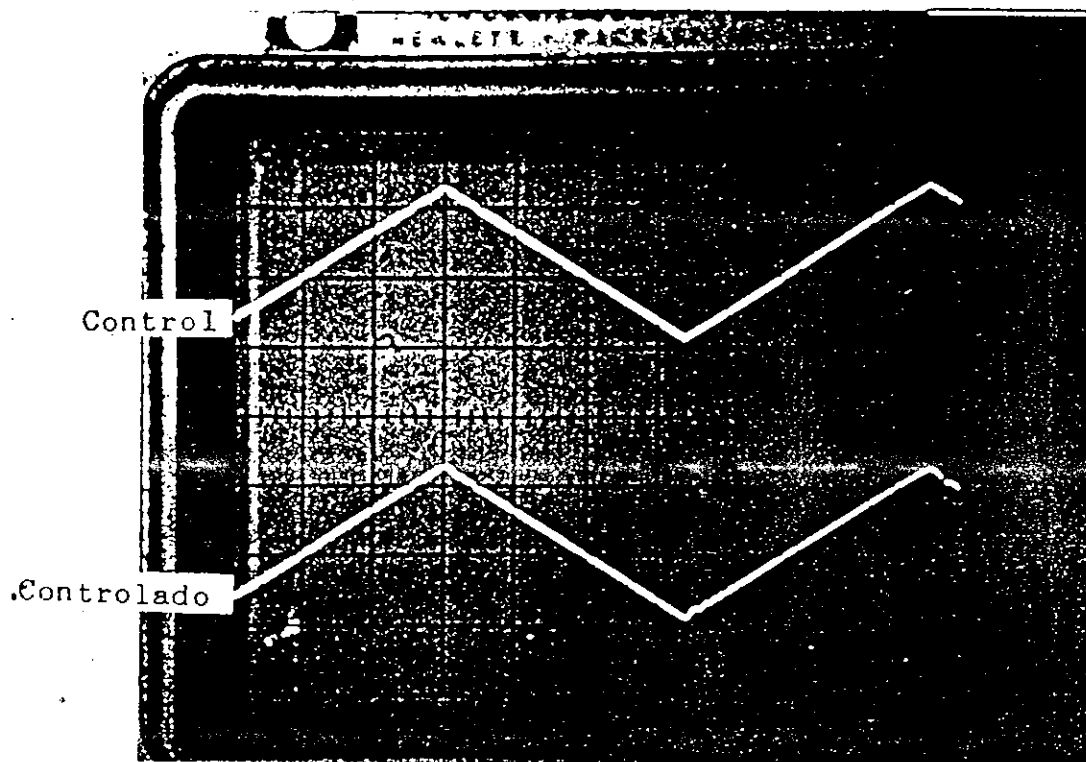
motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

## Fotografía 7.4

Excitación con onda triangular

 $K=6$  $J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$ 

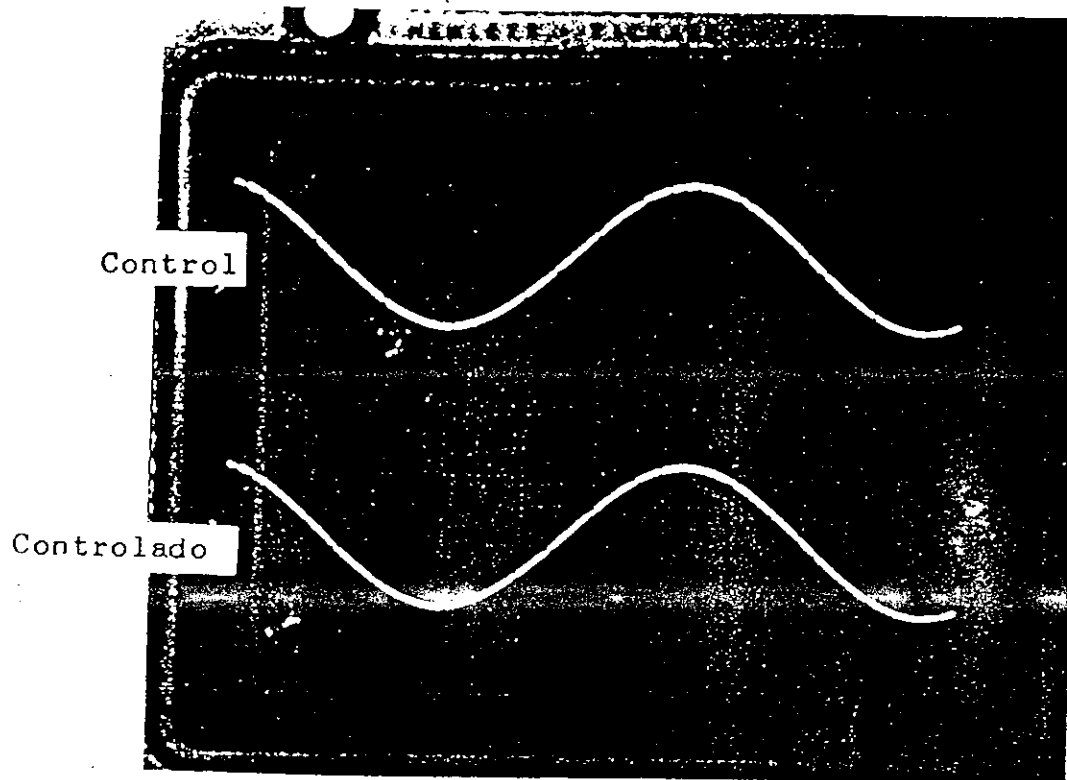
motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

## Fotografía 7.5

Excitación con onda senoidal (1)

 $K=6$  $J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$ 

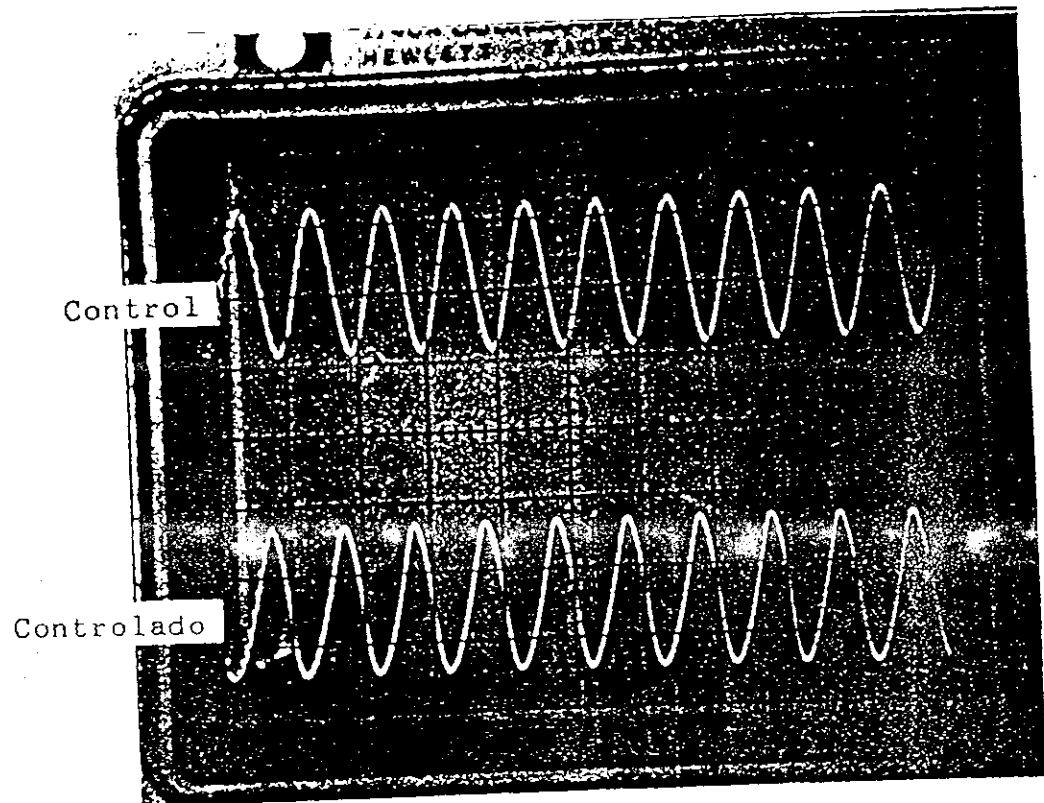
motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

## Fotografía 7.6

Excitación con onda senoidal (2)

 $K=6$  $J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$ 

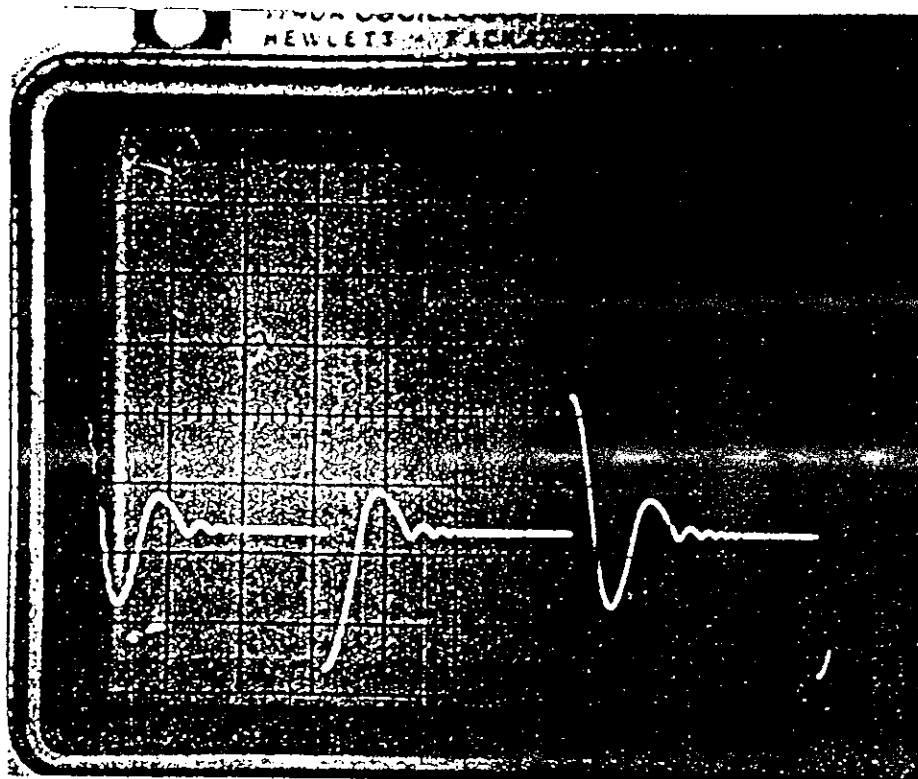
motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

## Fotografía 7.7

Señal de controlada restada a la señal de control  
al aplicarse excitación con onda cuadrada



$K=6$

$J_L = 8 \text{ Kg-m}^2$

motor: U9M4T

Escala de magnitud: 5 Volt/Div

Escala de tiempo: 2 Seg/Div

### B. Validación de software

Se ha utilizado una unidad lógica basada en el microprocesador Z-80, teniendo definidos tres puertos de salida por medio de un PPI 8255.

A : puerto 40

B : puerto 41

C : puerto 42

Programación del  
PPI : puerto 43

Palabras de control para el PPI utilizadas en el programa implementado:

A : (OUT)

8AH : B : (IN)

C : (Low OUT) (High IN)

A : (OUT)

88H : B : (OUT)

C : (Low OUT) (High IN)

A continuación se presenta los diagramas del hardware implementado. La forma de interconectar el circuito de control con la unidad lógica es como se ha explicado en el capítulo V.

Figura 7.8  
Hardware de teclado utilizado

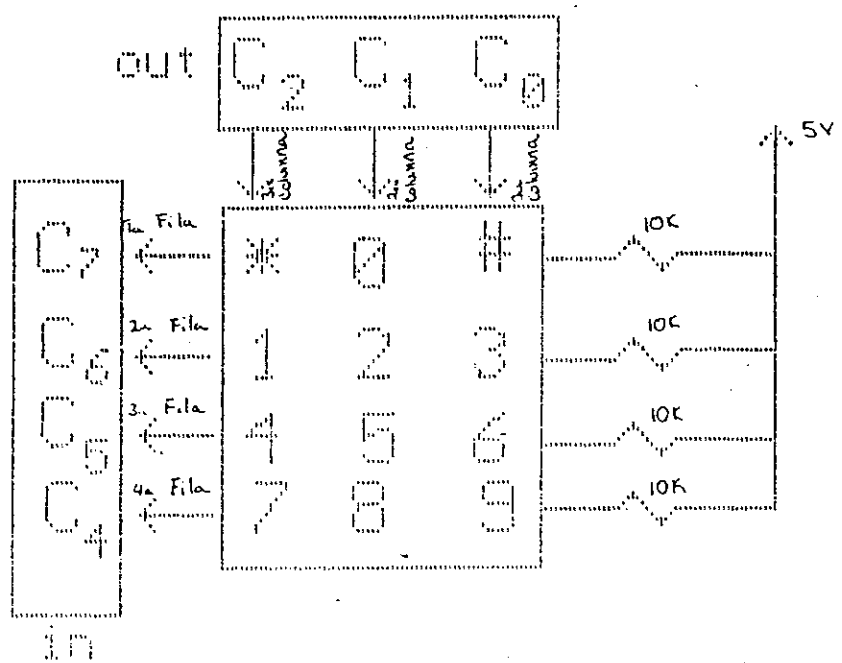
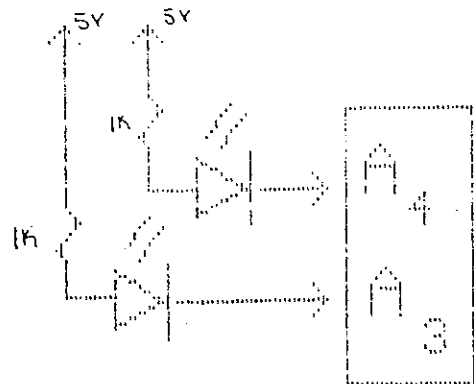


Figura 7.9

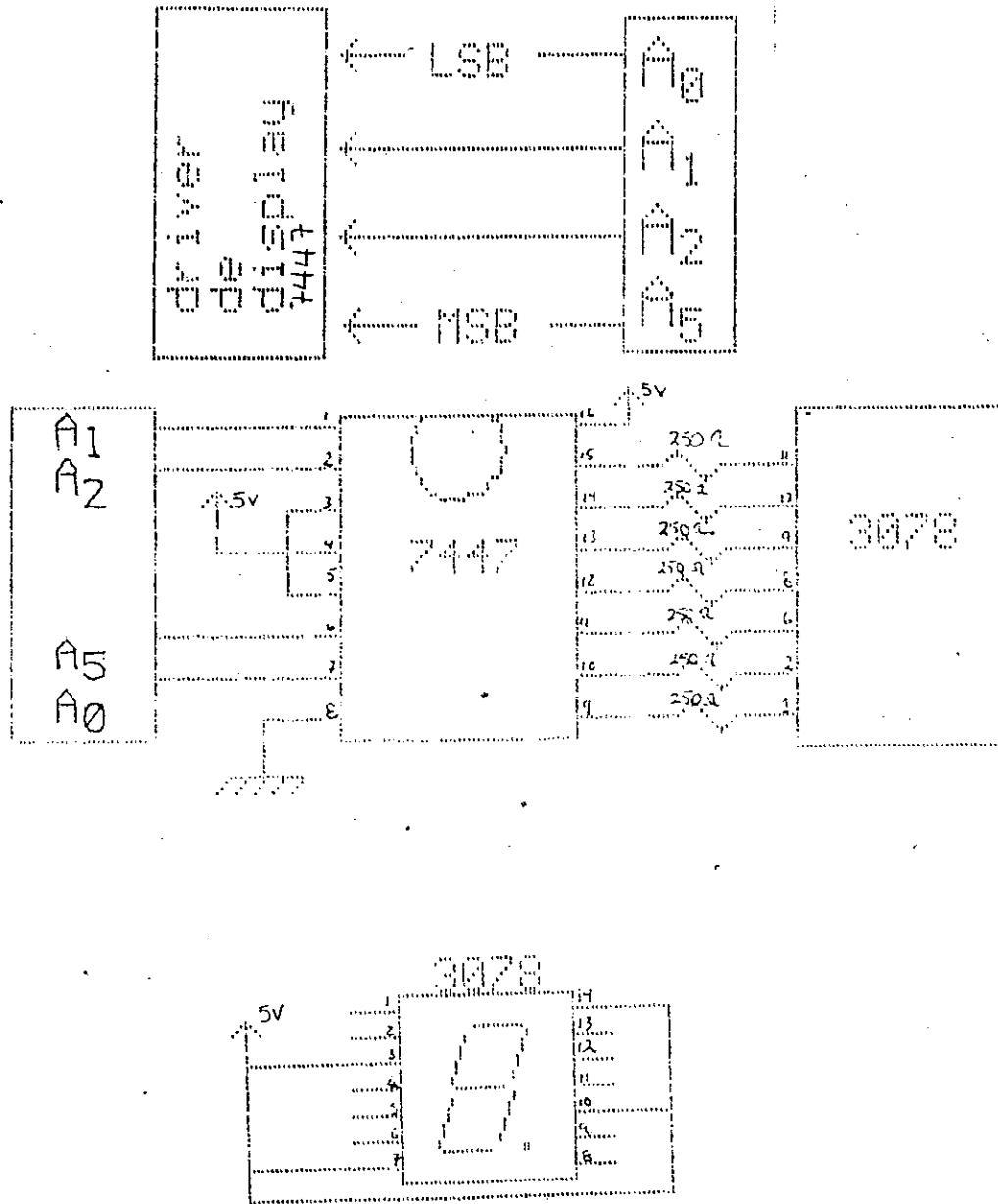
Hardware para indicaciones visuales de ejecución de y grabación de ruta



- A<sub>4</sub> Nivel lógico 0 : En opción de grabación de ruta.
- A<sub>3</sub> Nivel lógico 0 : En opción de ejecución de ruta.

Figura 7.10

Hardware de display utilizado

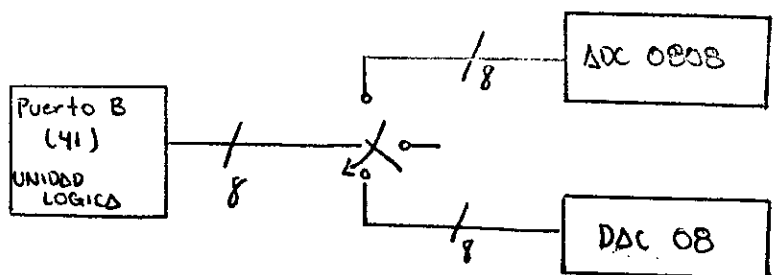


Para la prueba de la rutina de grabación de ruta se utilizó el puerto B como entrada.

Para la prueba de la rutina de ejecución de ruta se utilizó el puerto B como salida. Para el efecto se implementó un sistema de conmutación manual, mostrado en la figura 7.12.

Figura 7.12

Forma de conmutación manual para opciones de grabación y ejecución



El teclado utilizado es un elemento pasivo. Para leer la primera columna es necesario ubicar en la parte baja del puerto de salida C :  $C_0 = 0$  ,  $C_1 = 1$  ,  $C_2 = 1$  ,  $C_3 = X$  . Después es necesario ordenar la lectura de la parte alta del puerto C. Se ve claramente que al oprimir una tecla de la primera columna, la fila correspondiente al

numero oprimido sera nivel logico bajo. Por ejemplo:

Al oprimir el 3 se tendrá en la lectura de la parte alta de C al estar activada la primera columna:

$C_7 = 1$  ,  $C_6 = 0$  ,  $C_5 = 1$  ,  $C_4 = 1$

Al proceso de lectura de las 4 filas por cada vez que se activa una columna diferente se le denomina scan de teclado.

Se ve claramente que para activar :

1a columna : Palabra X6 en puerto de salida C.

2a columna : Palabra X5 en puerto de salida C.

3a columna : Palabra X3 en puerto de salida C.

Al hacer lectura de filas:

Palabra 7X en puerto de entrada C : Pertenece a 1a fila.

Palabra BX en puerto de entrada C : Pertenece a 2a fila.

Palabra DX en puerto de entrada C : Pertenece a 3a fila.

Palabra EX en puerto de entrada C : Pertenece a 4a fila.

El programa es basado en el algoritmo desarrollado y presentado en el capítulo VI.

El programa implementado tiene capacidad de almacenar 3 estados diferentes, los cuales son asignados con una sola lectura perteneciente a un motor de corriente directa. Es capaz de grabar 10 rutas diferente. Es posible elegir de 1 a 99 veces de ejecución de una ruta determinada, además

de la opción sin número definido de veces.

Se maneja un solo display de siete segmentos. La presentación del número de veces a ejecutar una ruta se hace en forma serial, presentándose primero el valor de las decenas y luego el de las unidades.

Teclas utilizadas para cada opción:

Para petición de atención del sistema: \*

Para orden de Abort : 7

Abort ordenado en etapa de ejecución: 7

Continuar en el punto donde se  
ordenó el abort: 2

Para ordenar la ubicación de  
todas las articulaciones en  
la posición 00H: 0

Ordenar la introducción del número de  
ruta a grabar : \*

Ordenar la introducción del número de  
ruta a ejecutar: H

El código para que el número de veces a ejecutar una ruta sea indefinido es : 00H

## BIBLIOGRAFIA

- Aleksander, I. Computing techniques for robots. Great Britain, Kogan Page Ltd. 276pp. 1985
- Angulo, U.; J. Sánchez. Robótica. Madrid, Paraninfo, 1986 133pp.
- Coughlin, R.; F. Driscoll. Circuitos integrados lineales y amplificadores operacionales. 2a. Ed. México, D.F., Prentice-Hall, Hispanoamericana, S.A. 394pp. 1987
- D'Azzo, J.; C. Houpis. Linear control system analysis and design. 2nd. Ed. New York, McGraw-hill. 751pp. 1981
- ECG. Semiconductors Master Replacement guide. 14th. Ed. 1987 United States of America, Philips ECG, Inc.
- Friedland, B. Control system design. An introduction to state-space methods. New York, McGraw-Hill. 533pp. 1986
- Gabel, R.; R. Roberts. Señales y sistemas lineales. 1975 México, D.F., Editorial Limusa. 433pp.
- Gartenhaus, S. Física 1 mecánica. México, D.F., 1979 Editorial Interamericana, S.A. 488pp.
- Gourishankar, V. Conversión de energía electromecánica. 1975 México, D.F., Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. 631pp.
- Hoffman, K.; R. Kunze. Algebra lineal. 2a. Ed. España, 1982 Prentice-Hall, Inc. 400pp
- Kaufman, M.; A. Seidman. Manual para ingenieros y técnicos en electrónica. México, D.F., McGraw-Hill. 800pp. 1982
- Luh, J. "Conventional controller design for industrial robot". IEEE transactions on system, man, and cybernetics. 13 (3) : 298-316 1983

- Millman, J. Microelectronics: digital and analog circuits  
1985 and systems. Singapore, McGraw-Hill. 881pp.
- Ogata, K. Ingenieria de control moderna. México, D.F.,  
1980 Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 902pp.
- Robotics age. In the beginnings. United States of America,  
1983 Maple-Vail Book Manufacturing Group. 241pp.
- Taub, H.; D. Schilling. Principles of communication  
1986 systems. 2nd. Ed. New York, McGraw-Hill. 759pp.
- Z-80. Users Manual. United States of America, Prentice-  
1980 Hall Company. 328pp.