

C.2

UNIVERSIDAD DEL VALLE
DE GUATEMALA

SUPERCONDUCTIVIDAD

BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

CARLOS A. CAJAS VIDAURRE

GUATEMALA, MARZO 1973

DEDICATORIA

A	MIS PADRES	Lic. Carlos P. Cajas Palma Teresa de Jesús Vidaurre de Cajas	
		GRATITUD Y RESPETO	
A	MIS HERMANAS	María del Carmen, Silvia Yolanda, Telma Leticia, Marina Elena y María Teresa	
		CON CARIÑO	
A	Dr. Richard Burkel	Asesor de esta Tesis	
A	MIS MAESTROS	En especial al Dr. E. Suger por sus indi- caciones y sugerencias para la realiza- ción de este trabajo.	
		RECONOCIMIENTO A SUS ESFUERZOS	
A	MIS COMPAÑEROS		
A	Beatriz y Margarita Braeuner	por su paciente trabajo de mecanografía.	
A	MI PATRIA GUATEMALA		

INDICE

	Pág.
PARTE I: DESCRIPCION DEL FENOMENO.	
1.- INTRODUCCION	2
1.1 Introducción	2
1.2 Circuitos Superconductores	9
1.3 Resistencia a la corriente alterna	13
1.4 Efecto Isotópico	14
2.- PROPIEDADES MAGNETICAS DEL ESTADO SUPERCONDUCTOR	15
2.1 Introducción. Supresión del Flujo Magnético	15
2.2 Especímenes Gruesos. Efecto Meissner	18
2.3 Campos Magnéticos fuera de Especímenes Gruesos	19
2.4 Fuerzas sobre Especímenes Superconductores	20
2.5 Especímenes delgados	21
2.6 Anillo Superconductor	23
2.7 Aplicación: Compresores de Flujo	24
2.8 Cuantización del Flujo Magnético	26
3.- SUPERCONDUCTORES TIPO I	29
3.1 Introducción. Influencia de Campos Magnéticos	29
3.2 Transición del Estado Normal al Superconductor en un Campo Magnético.	31
3.3 Estado Intermedio de Especímenes Gruesos	33
3.4 Aplicación: Válvulas de Calor	35
3.5 Influencia de las Corrientes	35
3.6 Aplicación: Bolómetro Superconductor	36
3.7 Aplicación: El Cryoton de Bobina	36
3.8 Estado Intermedio en Especímenes Pequeños	37
3.9 Aplicación: Cryoton de Película Delgada	38
3.10 Aplicación: Celda de Almacenamiento de Crowe	40
3.11 Efectos Térmicos	41
4.- SUPERCONDUCTORES TIPO II	42
4.1 El Estado Mixto	42
4.2 Líneas de Vórtice o Fluxoides	45
4.3 Aplicación: Imanes Permanentes	47
4.4 Solenoides Superconductores	47
4.5 Energía de Frontera	48
4.6 Superficie Superconductora	53

PARTE II: FUNDAMENTOS TEORICOS DEL FENOMENO

- 1.- Introducción 55
- 2.- Termodinámica de la Transición Estado Normal - Superconductor 57
- 3.- Teoría Electromagnética de London de la Superconductividad 60
 - 3.1 Ecuaciones de London 60
 - 3.2 Superconductividad a Altas Frecuencias 63
 - 3.3 Estado Intermedio y Estructura de Regiones 65
- 4.- Teoría Cuántica de la Superconductividad 68
 - 4.1 El Hamiltoniano BCS 68
 - 4.2 La Transformación Bogoliubov - Valatin 73
 - 4.3 La Función de Onda del Estado Fundamental y el Salto de Energía 80
 - 4.4 La Temperatura de Transición 84
 - 4.5 El Efecto Meissner 88
 - 4.6 Experimentos Túnel 93
 - 4.7 Cuantización de Flujo y Efecto Josephson 98
 - 4.8 Las Ecuaciones Ginzburg - Landau 103

- BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUCCION: SUPERCONDUCTIVIDAD

En 1911 Kamerlingh Onnes descubrió que la resistencia e-

Este trabajo para el estudio del tema superconductividad está dividido, principalmente en dos partes: La primera parte trata del aspecto descriptivo del fenómeno, y la segunda de los fundamentos teóricos del fenómeno, es decir, de las teorías que conducen a una explicación de los fenómenos observados.

En la primera parte se da una introducción en la cual se describen los fenómenos observados experimentalmente y algunos aspectos especiales concernientes a los datos observados. Se tratan, a continuación, los Superconductores Tipo I con los fenómenos inherentes a los mismos y luego los Superconductores Tipo II. Con esto se ha terminado la descripción del fenómeno, con lo que se está preparado para entrar a la segunda parte.

A la par de la descripción de los diversos fenómenos y de la respuesta a distintos estímulos, se dan algunas de las aplicaciones que la superconductividad y los superconductores pueden tener en el campo técnico, como por ejemplo, su aplicación a circuitos electrónicos y a computadoras.

La segunda parte comienza con un estudio termodinámico de la transición Estado Normal-Estado Superconductor. Luego sigue un estudio Electrodinámico de la Superconductividad, para pasar, por último, a un tratamiento Cuántico -La Teoría BCS- de la Superconductividad.

Se afirma que la resistencia en el estado superconductor es exactamente cero.

Después el descubrimiento de Onnes del primer material superconductor, el mercurio, fue en 1911 durante los siguientes años el fenómeno se comenzó a estudiar como un fenómeno termodinámico. Se establecieron la mayoría de las principales pro-

CARLOS CAJAS VIDAURRE

PARTE I: DESCRIPCION DEL FENOMENO

1. INTRODUCCION:

En 1911 Kamerlingh Onnes descubrió que la resistencia eléctrica del mercurio se vuelve cero bruscamente a una temperatura de aproximadamente 4°K . En sus experiencias de Leyden también observó que la resistencia permanecía siendo cero por debajo de esta temperatura. Observó también que el paso de la resistencia normal a cero ocurría en un intervalo de temperaturas muy pequeño del orden de 0.05°K . Las corrientes eléctricas débiles circulaban por el mercurio en ausencia de diferencias de potencial y sin causar el calentamiento asociado con la resistencia en los conductores. Onnes declaró: "No cabe duda de que el mercurio está en un nuevo estado, en el cual su resistencia eléctrica ha desaparecido prácticamente. El mercurio ha pasado a un nuevo estado, el cual, en vista de sus extraordinarias cualidades puede llamarse Estado Superconductor."

En las experiencias de Leyden no fue posible encontrar ningún cambio en una corriente que se hizo circular por una bobina no-inductiva de plomo de 700 m. de longitud, en un intervalo de varios días. De la fórmula de decaimiento exponencial para la corriente se calculó que la resistencia en el estado superconductor era menor que 10^{-17} veces la resistencia normal. En el M.I.T. se tuvo una corriente de varios centenares de amperes y durante un año no se observó decrecimiento alguno, lo que confirma que la resistencia en el estado Superconductor es efectivamente cero.

Aunque el descubrimiento de Onnes del primer material superconductor, el mercurio, fue en 1911 durante los siguientes 50 años el fenómeno permaneció como un objeto de interés puramente académico. Se establecieron la mayoría de las principales pro-

* Ver figura 1

propiedades del Estado Superconductor y se descubrieron otros elementos, que como el mercurio, exhibían superconductividad a bajas temperaturas. Algunos elementos metálicos como el zinc, plomo y estaño son superconductores. Durante 45 años el problema de explicar el fenómeno en términos del comportamiento de los electrones fue uno de los problemas no resueltos de la Física. En la actualidad unos 24 elementos y un sinnúmero de compuestos son superconductores conocidos a la presión atmosférica. La aplicación tecnológica de los superconductores se incrementa rápidamente, principalmente en relación a los elementos conmutadores en las computadoras, bolómetros y electroimanes superconductores. En particular, los electroimanes superconductores capaces de producir campos magnéticos intensos más baratos que los convencionales están disponibles comercialmente.

Por el lado teórico, se ha conseguido finalmente un conocimiento básico del estado superconductor.

Cuando un superconductor se enfría por debajo de cierta temperatura, no solamente hay una pérdida repentina de la resistencia eléctrica, sino que también hay cambios bruscos en muchas de las otras propiedades del material. Todos estos cambios ocurren a la misma temperatura, conocida como temperatura crítica del material, y bajo esta temperatura muchas de estas propiedades son bastante diferente de aquellas exhibidas a temperaturas mayores que la temperatura crítica. Algunas de estas propiedades son las siguientes: *

- (i) Resistencia a Corriente Directa. El primer cambio descubierto fue desde luego, la anulación de la resistencia eléctrica. En la temperatura crítica la resistencia a la corriente eléctrica desaparece y continúa siendo cero por debajo de ella.
- (ii) Capacidad de Calor Específico. En la temperatura crítica la capacidad de calor específico del material au-

* Ver figura 1

menta bruscamente, y su comportamiento es muy diferente de aquel en el estado normal (i.e. por encima de la temperatura crítica).

(iii) Efectos Termoeléctricos. Todos los efectos termoeléctricos desaparecen bruscamente a la temperatura crítica. Por ejemplo, en los conductores normales un gradiente de temperatura ΔT aplicado da lugar a un campo eléctrico E en el conductor. El termopoder del material se define como $E/\Delta T$. En un superconductor este termopoder desaparece bruscamente en la temperatura de transición.

(iv) Conductividad Térmica. La conductividad térmica de un superconductor cambia bruscamente a la temperatura crítica. En algunos superconductores comienza a crecer, mientras en otros empieza a disminuir con la disminución de la temperatura.

(v) Crecimiento de la Entropía. Existe diferencia entre los calores específicos del estado normal y el superconductor. Al pasar de una temperatura inferior a la crítica a una temperatura superior a la crítica existe un aumento de entropía, es decir, el estado superconductor es más ordenado que el normal. La diferencia de entropías es del orden de $10^{-3}R$ por mol, en vez de ser del orden de R como ocurre en una transición ordinaria de segundo orden, tal como el ferromagnetismo. Esta pequeña diferencia sugiere que el reajuste del sistema al volverse superconductor, es relativamente pequeño, de tal forma que sólo afecta a un número reducido de electrones.

Esta pequeña, pero poco comprensiva lista enfatiza que a la temperatura crítica ocurre algo más que solamente una pérdida repentina de resistencia eléctrica; a la temperatura crítica hay un cambio de un conjunto de propiedades a otro, lo cual lo expresamos diciendo que bajo la temperatura crítica el material está en el Estado Superconductor y sobre ella en el Estado Normal.

1.1 Superconductores.

La temperatura crítica a la que ocurre la transición entre el estado superconductor y el estado normal es independiente de la forma o tamaño del espécimen de acuerdo de campo magnético; es una característica del material. En la tabla (1) se da una lista de los superconductores (elementos) con sus temperaturas críticas y también se da una lista de aquellos elementos que son superconductores sólo a altas presiones. Se p (b) da que otros elementos no citados eran superconductores, ya que algunos elementos son superconductores sólo si son químicamente puros y los impurezas en los experimentos pueden no haber tenido la pureza suficiente, y también es posible que a temperaturas más bajas que las indicadas existieran otros elementos como superconductores, aunque hoy se han logrado temperaturas de 0,07°K. Entre los mejores de los elementos metálicos son superconductores en un rango limitado de temperatura y presión.

Ya que las temperaturas críticas son bastante bajas, sólo la alta temperatura crítica de T_c conocida a la fecha es la de $25,3^\circ K$ (por el elemento (c) que descubrió en 1968). Esto es crítico hace que la superconductividad sea un fenómeno de bajas temperaturas, lo que es un obstáculo para su explotación tecnológica, ya que un aparato o instrumento superconductor debe ir acompañado de un equipo de refrigeración que mantenga la temperatura lo suficientemente

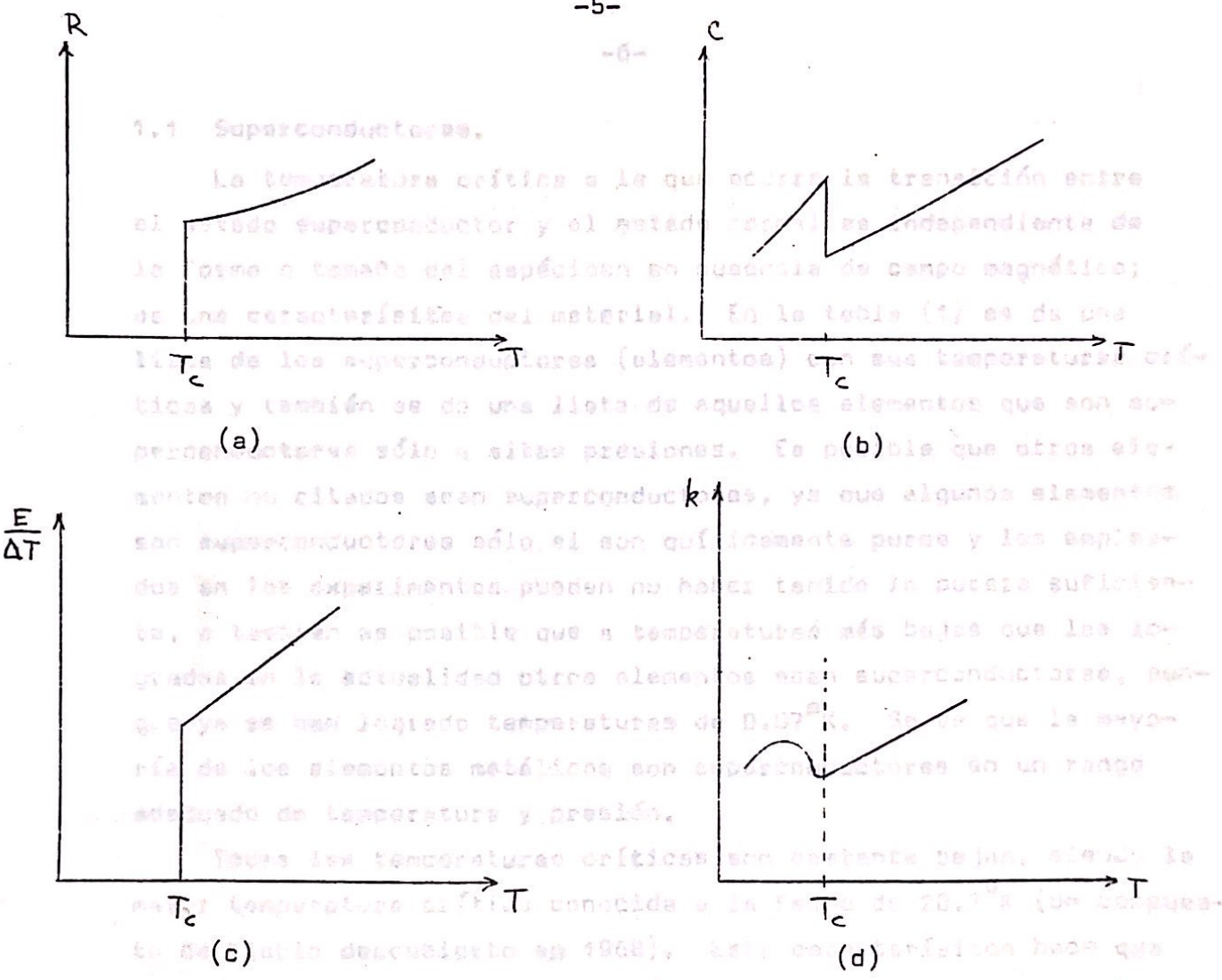


Figura 1. Variaciones de diversas propiedades de un superconductor con la temperatura,

- (a) Resistencia.
- (b) Calor específico.
- (c) Termopoder.
- (d) Conductividad térmica.

Figura 1. Variaciones de diversas propiedades de un superconductor con la temperatura, (a) Resistencia. (b) Calor específico. (c) Termopoder. (d) Conductividad térmica. Este fenómeno se produce en la transición y no se distingue por tanto, este último se hecho que en los últimos años se han hecho una gran variedad de experimentos con estos materiales con altas temperaturas críticas. Sin embargo se debe admitir que se necesitan los recursos de los cuales una vez obtenidos son superconductores y otros...

1.1 Superconductores. TABLA I

La temperatura crítica a la que ocurre la transición entre el estado superconductor y el estado normal es independiente de la forma o tamaño del espécimen en ausencia de campo magnético; es una característica del material. En la tabla (1) se da una lista de los superconductores (elementos) con sus temperaturas críticas y también se da una lista de aquellos elementos que son superconductores sólo a altas presiones. Es posible que otros elementos no citados sean superconductores, ya que algunos elementos son superconductores sólo si son químicamente puros y los empleados en los experimentos pueden no haber tenido la pureza suficiente, o también es posible que a temperaturas más bajas que las logradas en la actualidad otros elementos sean superconductores, aunque ya se han logrado temperaturas de 0.07°K . Se ve que la mayoría de los elementos metálicos son superconductores en un rango adecuado de temperatura y presión.

Todas las temperaturas críticas son bastante bajas, siendo la mayor temperatura crítica conocida a la fecha de 20.7°K (un compuesto de Niobio descubierto en 1968). Esta característica hace que la superconductividad sea un fenómeno de bajas temperaturas, lo que es un obstáculo para su explotación tecnológica, ya que, un aparato o instrumento superconductor debe ir acompañado de un equipo de refrigeración que mantenga la temperatura lo suficientemente baja. No se ha encontrado ninguna razón por la cual no puedan existir temperaturas de transición en el rango del Hidrógeno líquido o de la temperatura ambiente, pero aún temperaturas críticas del orden de 40°K harían la transmisión de corriente eléctrica bastante cara; aunque se tendría la ventaja que con cables superconductores no habrían pérdidas en la transmisión y no se disiparía potencia, esto último ha hecho que en los últimos años se haya hecho una búsqueda intensiva de materiales con altas temperaturas críticas. Sin embargo se debe admitir que se desconocen las razones por las cuales unos materiales son superconductores y otros no.

TABLA I

Temperaturas Críticas, T_c , de elementos Superconductores.

Elemento	T_c en $^{\circ}K$	Elemento	T_c	Elemento	T_c
Aluminio	1.196	Mercurio -	4.154	Talio	2.39
Cadmio	0.56	Mercurio -	3.949	Torio	1.368
Galio -	1.091	Molibdeno	0.92	Estaño	3.722
Galio -	6.2	Niobio	9.26	Titanio	0.39
Galio -	7.62	Osmio	0.655	Tungstano	0.012
Indio	3.4035	Protactinio	1.4	Uranio -	0.68
Iridio	0.14	Renio	1.698	Uranio -	1.80
Lantano -	4.9	Rutenio	0.49	Vanadio	5.30
Lantano -	6.06	Tantalio	4.483	Zinc	0.87
Plomo	7.193	Technetium	8.22	Zirconio	0.546

Elemento	T_c en $^{\circ}K$	Presión
Bismuto II	3.916	25,000 atm
	3.90	25,200 atm
	3.86	25,800 atm
Bismuto	7.25	27,000 - 28,400 atm
Cesio	1.7	50 Kbar.
Germanio	4.85 - 5.4	-120 Kbar.
Selenio II	6.75 , 6.95	130 Kbar.
Silicio	7.9	120 - 130 Kbar.
Teluro	-3.3	-56,000 atm
Talio (FCC)	1.45	35 Kbar.
Talio (HCP)	1.95	35 Kbar.

Hasta el momento sólo se tiene una colección de reglas empíricas:

- i) Sólo los metales son superconductores.
- ii) Los materiales ferromagnéticos y antiferromagnéticos no son superconductores.
- iii) En los elementos metálicos sólo se encuentra superconductividad cuando el número de electrones de valencia por átomo está comprendido entre 2 y 8. Esencialmente la misma regla es válida para compuestos aún cuando se conocen excepciones en los que el número de electrones promedio por átomo es un poco menor que dos, o un poco mayor que 8.
- iv) En los elementos metálicos de transición, la temperatura crítica varía de una forma periódica con el número de electrones de valencia por átomo y exhibe un máximo agudo. En los elementos que no son de transición, la temperatura crítica se incrementa con el número de electrones de valencia.

Finalmente mencionaremos el llamado grupo de superconductores "portador de baja concentración" descubierto recientemente. Estos materiales se obtienen agregando grandes cantidades de impurezas apropiadas a semiconductores (tales como el telurio de germanio y el titanato de estroncio reducido). Este grupo no viola la regla (i) ya que son metales tanto como a sus propiedades electromagnéticas se refiere en el estado normal. La densidad de electrones de conducción en estos materiales es mucho menor que la densidad de electrones de conducción normal en metales (la cual es del orden de 10^{28} elect./m³). Como esta densidad puede variarse simplemente variando las impurezas, estos materiales proveen un medio para observar la forma como las propiedades del estado superconductor dependen de la densidad de electrones de conducción. Una ilustración de dicha dependencia se ilustra en la fig. 2.

Cuando se agregan impurezas a un elemento metálico superconductor pueden suceder varias cosas, por ejemplo, para bajas concentraciones de impurezas no-magnéticas, la temperatura crítica decrece independientemente de la impureza que se trata; para altas concentraciones de impurezas la temperatura crítica empieza a aumentar si la valencia de los átomos impureza es mayor que la de los átomos del metal huésped y disminuye si la valencia del átomo impureza es menor que la del huésped.

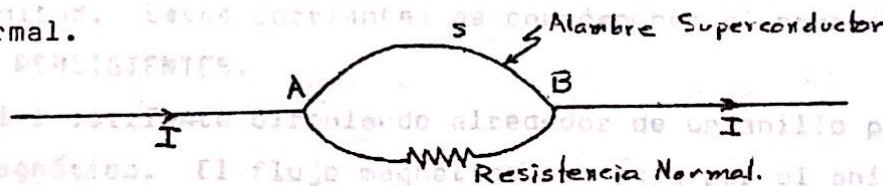
1.2. Circuitos Superconductores

Consideremos un alambre de longitud L que lleve una corriente directa I . Si el alambre está en el estado normal, la diferencia de potencial entre los extremos del alambre, a temperatura constante, está relacionada a la corriente I por la Ley de Ohm:

$$(1) \quad V = IR$$

donde R es la resistencia del alambre. El campo eléctrico, E , dentro del alambre está dado por: $E = V/L$. Cuando el alambre está en el estado superconductor; la resistencia R es cero y por consiguiente V & E también son cero; esto es, no hay un campo eléctrico ni una diferencia de potencial en un alambre superconductor.

Como un ejemplo sencillo consideremos el circuito siguiente donde un alambre superconductor está en paralelo con una resistencia normal.



La diferencia de potencial a través del alambre (entre A & B) es cero, y por consiguiente la diferencia de potencial a través de la resistencia normal es cero. Entonces, de acuerdo con la ley de Ohm no fluirá ninguna corriente por la resistencia normal, toda la corriente pasa a través del alambre superconductor.

Consideremos ahora un anillo cerrado o argolla. Si este anillo se sumerge en un campo magnético uniforme $B_a(t)$, entonces cualquier corriente $I(t)$ circulando en el anillo satisface la Ley de Lenz:

$$(2) \quad -A \frac{dB_a}{dt} = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt}$$

donde R , L & A son la resistencia del anillo, su inductancia y el área encerrada por el anillo, respectivamente.

Si no hay ningún campo magnético externo aplicado, entonces la ec. anterior se reduce a:

$$(3) \quad 0 = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt}, \text{ con solución}$$

$$(4) \quad I(t) = I(0) \exp. (-Rt/L)$$

Esto muestra que cualquier corriente inicial $I(0)$ circulando en el anillo se reduce exponencialmente a cero. En el estado normal las corrientes no pueden circular indefinidamente sin un campo magnético variable que las mantenga. En el estado superconductor $R = 0$, y la ecuación (4) se reduce a:

$$(5) \quad I(t) = I(0)$$

En este caso, la corriente inicial no se reduce a cero, sino que circula alrededor del anillo indefinidamente sin ningún cambio de magnitud. Estas corrientes se conocen con el nombre de CORRIENTES PERSISTENTES.

Cualquier corriente circulando alrededor de un anillo produce un campo magnético. El flujo magnético que pasa por el anillo y es producido por él es LI ; el flujo magnético que pasa por el anillo debido a un campo magnético aplicado, B_a , es igual a AB_a . Por lo tanto el flujo magnético total en el anillo es entonces:

$$(6) \quad \Phi = AB_a + LI$$

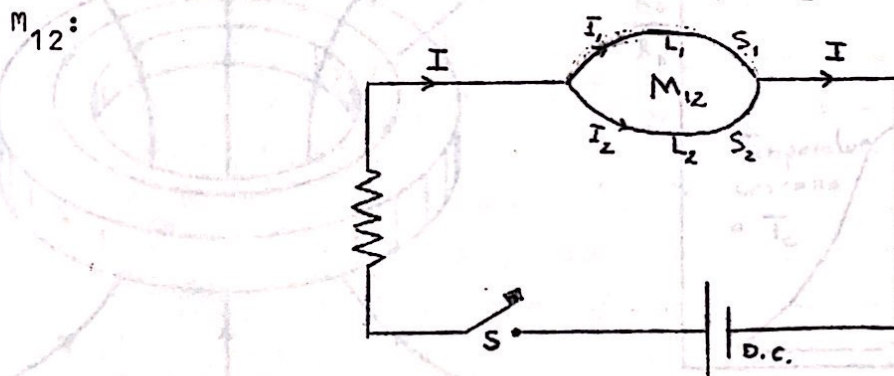
Por lo que la ec. (2) queda:

$$(7) \quad \frac{d\Phi}{dt} = -RI$$

En el estado superconductor, la resistencia R es cero, por lo que la ec. (7) queda:

$$(8) \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad ; \quad \Phi = \text{Constante}$$

Esta última es la ecuación general que puede ser usada para analizar corrientes en cualquier anillo superconductor; de este modo, se aplica más fácilmente a anillos que son más complicados que el considerado anteriormente. Como un segundo ejemplo consideremos el circuito siguiente, donde la red superconductor está formada por dos ramas de inductancias L_1 & L_2 e inductancia mútua M_{12} :



Si inicialmente no hay corriente en la red y además no hay campo magnético, el flujo magnético total encerrado por la red es cero. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación (8) el flujo total a cualquier tiempo t , posterior, es también cero. Supongamos que al tiempo t , una corriente externa $I(t)$ se conecta a la red dando lugar a corrientes $I_1(t)$ & $I_2(t)$ en las dos ramas. El flujo magnético total encerrado por la red estará dado por:

$$(9) \quad (L_1 - M_{12}) I_1(t) - (L_2 - M_{12}) I_2(t) = \Phi$$

Y como el flujo total debe seguir siendo cero:

$$(10) \quad (L_1 - M_{12}) I_1(t) - (L_2 - M_{12}) I_2(t) = 0$$

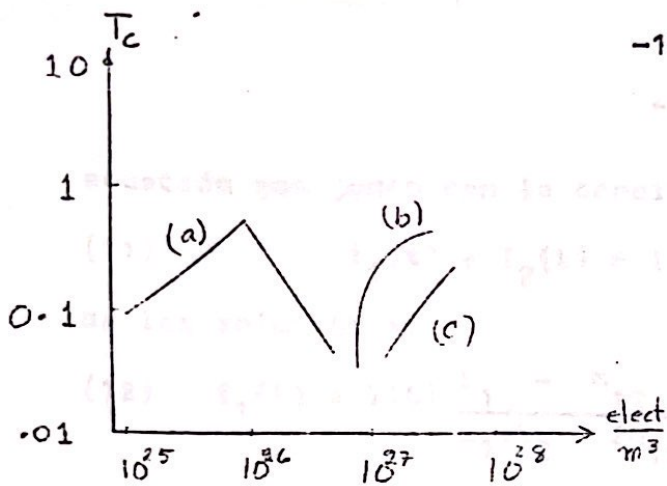


Figura 2. Variación de la temperatura crítica con la densidad de electrones para:

(a) SrTiO_3 (b) GeTe (c) SnTe

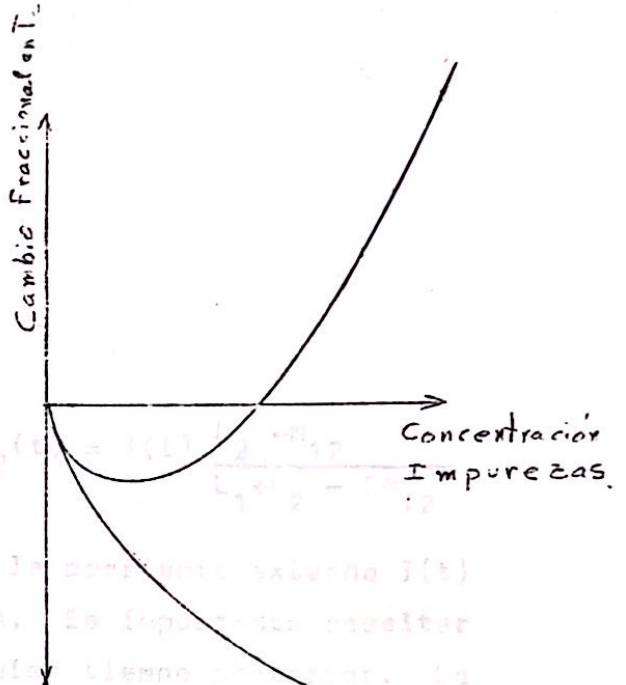


Figura 3. Cambio fraccional de la temperatura como una función de la concentración de impurezas.

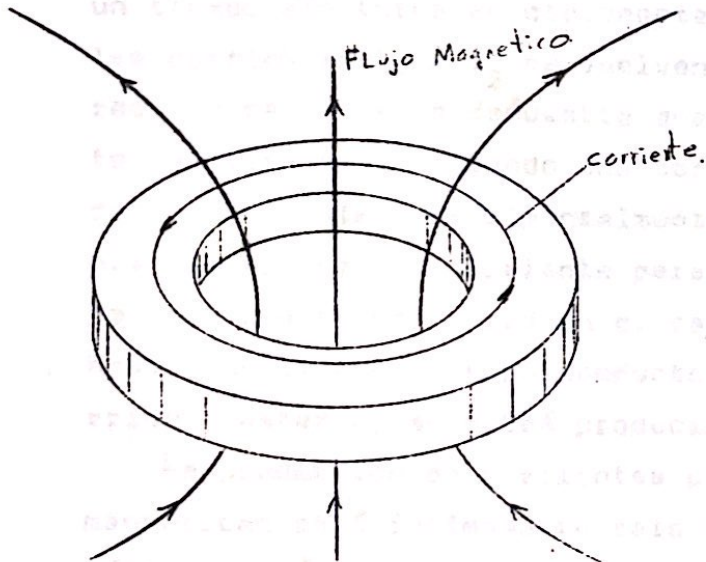


Figura 4. Anillo Superconductor.

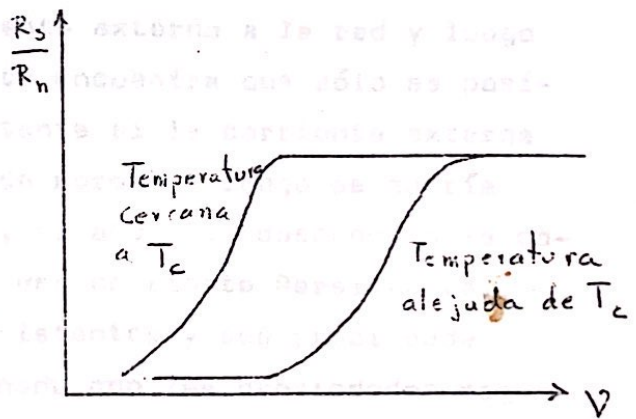


Figura 5. Variación de la resistencia de la muestra dividida la resistencia normal con la frecuencia.

1.3 Resistencia a la Corriente Alternada

La resistencia cero del estado superconductor es estrictamente válida para corrientes directas (corrientes continuas de valor constante). Si la corriente está cambiando, existe una resistencia distinta de cero, aunque ésta es tan pequeña que en el estado normal. Esta resistencia aparece en las frecuencias altas, esta resistencia depende de la frecuencia (longitud de onda) y de la temperatura de la muestra. Si la temperatura es alta cerca de la

ecuación que junto con la condición:

$$(11) \quad I_1(t) + I_2(t) = I(t)$$

da las soluciones:

$$(12) \quad I_1(t) = I(t) \frac{L_1 - M_{12}}{L_1 + L_2 - 2M_{12}} ; I_2(t) = I(t) \frac{L_2 - M_{12}}{L_1 + L_2 - 2M_{12}}$$

Las ec. (12) describen cómo se divide la corriente externa $I(t)$ cuando pasa por la red superconductor. Es importante resaltar que la ec. (12) es válida para cualquier tiempo posterior. La corriente externa, $I(t)$ no necesita ser constante; supongamos que un tiempo más tarde se desconecta el circuito, i.e. $I = 0$ en (12), las corrientes I_1 & I_2 se vuelven cero; todas las corrientes en la red son cero. Esto demuestra que no se puede producir una corriente persistente conectando una corriente externa a la red y luego desconectándola. Experimentalmente se encuentra que sólo es posible establecer una corriente persistente si la corriente externa se hace pasar por la red en el estado normal y luego se enfría hasta que la red es superconductor, si ahora se desconecta la corriente externa, se habrá producido una corriente Persistente.

La producción de corrientes persistentes y sus propiedades magnéticas está íntimamente relacionado con las propiedades magnéticas estáticas del estado superconductor; sin embargo, una vez la red está en el estado superconductor, las corrientes que circulan por ella se analizan con la ec. (8) que sólo es válida en el estado superconductor.

1.3 Resistencia a la Corriente Alterna

La resistencia cero del estado superconductor es estrictamente válida para corrientes directas (corrientes continuas de valor constante). Si la corriente está cambiando, existe una resistencia distinta de cero, aunque ésta es mas pequeña que en el estado normal. Para corrientes alternas de una frecuencia dada, esta resistencia depende de la frecuencia (longitud de onda) y de la temperatura de la muestra. Si la temperatura no está cerca de la

La relación (14) conduce a que las vibraciones de la red juegan temperatura crítica, T_c , (esto generalmente significa $T \ll 0.35T_c$) la resistencia es efectivamente cero para bajas frecuencias y aumenta casi bruscamente a su valor normal a una cierta frecuencia generalmente alta. Si la temperatura está cerca de T_c la resistencia aumenta uniformemente con el aumento de frecuencia a su valor del estado normal. Para frecuencias lo suficientemente altas, la resistencia en el estado superconductor es igual a su valor en el estado normal. Estas frecuencias corresponden a microondas y ondas largas infrarrojas del espectro electromagnético; por ejemplo, para el indio es de 3×10^{11} hertz y según medidas de Tinkham y Glover efectuadas en plomo, la resistividad es normal para longitudes de ondas inferiores a 100μ . Las frecuencias ópticas son mayores, por lo que las propiedades ópticas del material en el estado superconductor no difieren de las del Estado normal.

1.4 Efecto Isotópico

Experimentalmente se ha observado que la temperatura crítica de los superconductores varía con la masa Isotópica. Las primeras observaciones fueron hechas por Maxwell & Reynolds empleando mercurio y posteriormente se ha observado es isótopos de Sn & Pb.

Para darnos una idea de la variación de la temperatura crítica con la masa isotópica, tenemos que para el Hg varía de 4.185 a 4.146°K cuando la masa varía de 199.5 á 203.4. Los resultados concuerdan con una relación de la forma:

$$(13) \quad M^{1/2} T_c = \text{Constante.} \quad (\text{para cada serie de isótopos})$$

En el caso del Hg, debido a que (\oplus), la temperatura de Debye es proporcional a la velocidad del sonido, la cual a su vez es proporcional a $M^{1/2}$ se llega a la relación:

$$(14) \quad \frac{T_c}{\oplus} = \text{Constante}$$

La relación (14) conduce a que las vibraciones de la red juegan un papel importante en la superconductividad y muestran que las interacciones electrón-red se deben tener en cuenta en el desarrollo teórico de la superconductividad.

2. PROPIEDADES MAGNÉTICAS DEL ESTADO SUPERCONDUCTOR

2.1 Introducción. Supresión del flujo magnético.

Las propiedades magnéticas del estado superconductor sufren un cambio radical cuando el espécimen pasa del estado normal al superconductor. Las propiedades magnéticas del estado superconductor son básicas para la comprensión de las propiedades de dicho estado. Empezaremos considerando las propiedades magnéticas de la materia por medio del experimento de Gouy.

En el experimento de Gouy una muestra cilíndrica de una sustancia no-ferromagnética se suspende de tal forma que la mitad de ella está sumergida en un campo magnético externo; de esta forma una parte de la muestra está en un campo fuerte y la otra en una región donde el campo vale casi cero. Se encuentra que para la mayoría de las sustancias no-ferromagnéticas el campo magnético ejerce una fuerza vertical. Si la fuerza es hacia arriba (ver figura) se dice que la sustancia es Diamagnética y si la fuerza es hacia abajo se dice que la sustancia es Paramagnética. En esta forma, en cuanto a sus propiedades magnéticas se refiere, las sustancias que no son ferromagnéticas se clasifican en dos clases: Diamagnéticas y Paramagnéticas. Las dos propiedades anteriores se pueden expresar en términos de la Susceptibilidad Magnética, χ , de la sustancia. En el experimento de Gouy ésta está dada por:

$$(15) \quad \chi = 2 \mu_0 F / B^2 A$$

expresión en la que:

F = fuerza sobre el cilindro (vertical)

B = densidad de campo magnético en el fondo

del cilindro

A = área de la sección transversal del cilindro.

Para sustancias paramagnéticas la fuerza es hacia abajo y χ es positiva, mientras que para sustancias diamagnéticas la fuerza es hacia arriba y χ es negativa. Para la mayoría de materiales la susceptibilidad magnética es muy pequeña, del orden de 10^{-5} a 10^{-6} y en particular este es el caso de los metales normales; en el estado superconductor, los superconductores son fuertemente diamagnéticos, siendo su susceptibilidad magnética 10^5 a 10^6 veces más grande de la del metal en el estado normal. Es por esta diferencia tan marcada que podremos desprestigiar las propiedades magnéticas débiles del estado normal y consideraremos al estado normal como efectivamente no magnético.

Las fuerzas que un cuerpo diamagnético experimenta en un campo magnético no uniforme, pueden ser visualizadas por medio de las corrientes de magnetización inducidas (ver figura). En el caso de un superconductor, dichas corrientes de magnetización son corrientes que fluyen en la superficie del espécimen. Hay que recordar que las líneas de corriente de magnetización son siempre cerradas, razón por la cual no es posible medirlas directamente. Sin embargo, toda corriente experimenta una fuerza magnética, cuando se introduce un campo magnético, y por lo tanto las corrientes de magnetización tendrán una fuerza sobre ellas, cuando el cuerpo se introduce en un campo magnético externo y por consiguiente, también habrá una fuerza sobre el cuerpo.

Como toda corriente eléctrica, las corrientes de magnetización producen un campo magnético: el campo magnético inducido. Ver los campos en la figura para un cilindro y una esfera en un campo externo uniforme. Ya que el flujo magnético total es la suma del flujo del campo aplicado, más el flujo del campo magnético inducido, en el caso de un espécimen superconductor este flujo total exhibe un rasgo distintivo notable: las líneas de campo están casi completamente excluidas del interior del espécimen y las líneas que penetran el espécimen están limitada a una región angosta cercana a la superficie del cuerpo, y en el interior no hay líneas de flujo.

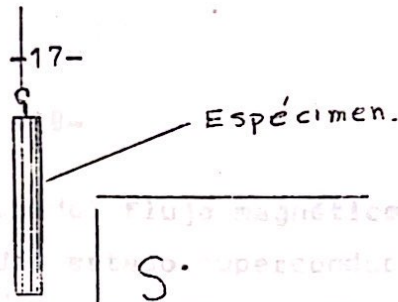


Figura 6. Experimento de Gouy.

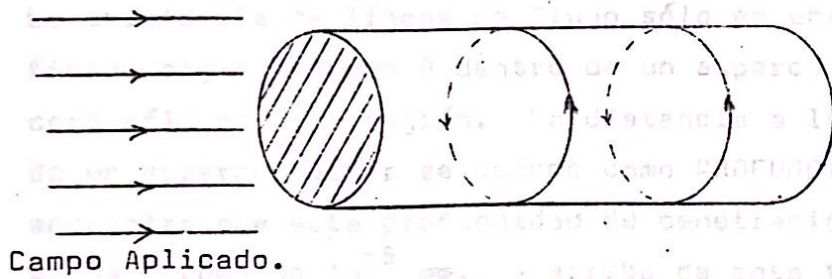


Figura 7. Corrientes de Magnetización Inducidas en un cilindro grueso y largo.

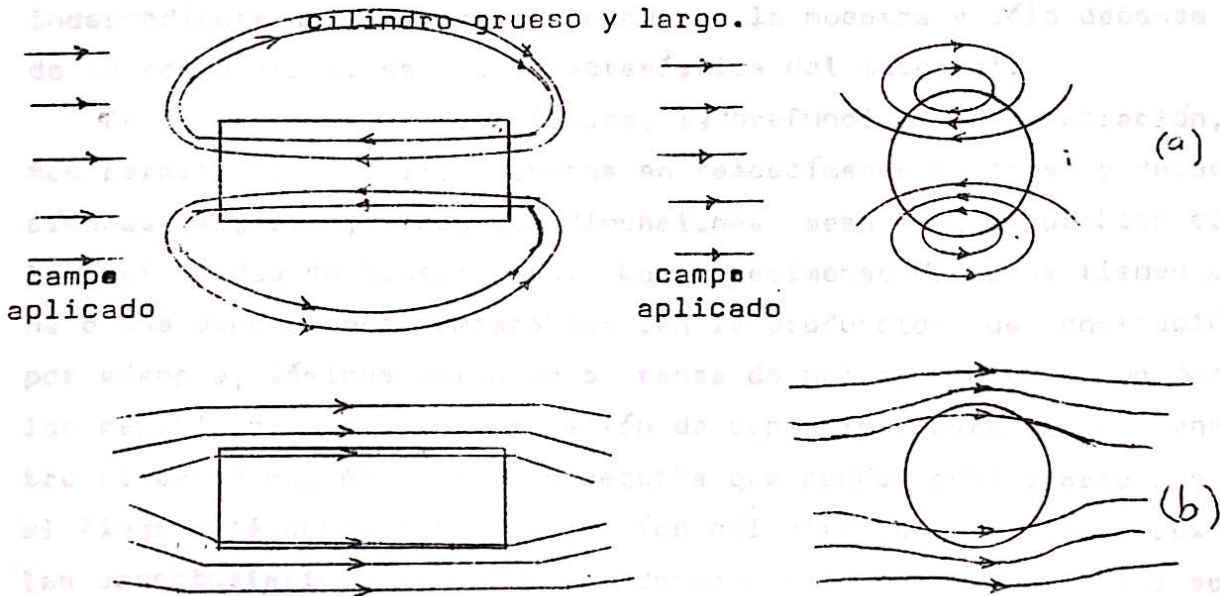


Figura 8. A (a) Corriente de Magnetización inducida en un cilindro y una esfera. Campo producido por los especímenes superconductores. (b) Campo total.

La exclusión casi completa del flujo magnético es la propiedad característica (magnética) del estado superconductor; esta exclusión del flujo magnético de dentro de un superconductor es independiente de cualquier antecedente magnético o de temperatura del cuerpo.

La exclusión del flujo magnético en el estado superconductor puede expresarse en términos de la densidad de flujo magnético B . La existencia de líneas de flujo sólo en una delgada capa superficial significa que B dentro de un superconductor es diferente de cero sólo en esta región. La distancia a la que B penetra dentro de un superconductor se conoce como PROFUNDIDAD DE PENETRACION y se encuentra que esta profundidad de penetración a cero grados Kelvin es del orden de 10^{-5} mm., y arriba de esta temperatura aumenta con el incremento de temperatura. La profundidad de penetración es independiente de la forma o tamaño de la muestra y sólo depende de la temperatura; es una característica del material.

Esta distancia característica, la profundidad de penetración, nos permite dividir las muestras en "especímenes Gruesos" y "especímenes Delgados", según sus dimensiones sean o no comparables con la profundidad de penetración. Los especímenes delgados tienen una o más dimensiones comparables con la profundidad de penetración, por ejemplo, láminas delgadas o granos de polvo, mientras que para los especímenes gruesos, la región de superficie para la que penetra el campo magnético es tan pequeña que puede considerarse que el flujo está completamente excluido del material. Es claro que las características de las propiedades magnéticas del material son muy diferentes, si el espécimen es grueso o delgado, por lo que los consideraremos separadamente.

(ii) *El espécimen es un cilindro grueso y largo, con el eje del cilindro, paralelo al campo magnético.*

2.2 Especímenes Gruesos. Efecto MEISSNER.

En 1933 Meissner y Ochsenfeld, descubrieron la exclusión o expulsión del campo magnético cuando un material se enfriaba del estado normal al estado superconductor, este fenómeno es conocido como

EFECTO MEISSNER. Este efecto Meissner, como fue discutido en la sección anterior, muestra que en el interior del superconductor, $B = 0$, o alternativamente, como que si el superconductor exhibiera diamagnetismo perfecto, i.e. $\chi = 1/4\pi$.

El método experimental más sencillo para observar este fenómeno es usar un cilindro grueso y largo alrededor del cual se enrolla una bobina en el estado normal que está conectada en serie con un galvanómetro. Por medio de la bobina se pueden observar los cambios de flujo dentro de ella en la lectura del galvanómetro, haciendo pasar el cilindro del estado normal al superconductor o viceversa, o bien, sacando y metiendo el cilindro en el estado superconductor de la bobina. (Hay que recordar que cuando el cilindro está en el estado superconductor, expulsa el flujo fuera de él, mientras que cuando está en el estado normal, por ser no ferromagnético, no altera el flujo en la bobina).

2.4. Fuerzas sobre especímenes superconductores.

2.3. Campos Magnéticos fuera de Especímenes Gruesos.

La expulsión del flujo magnético del interior de un superconductor grueso altera, en general, el campo magnético externo fuera del espécimen. Ya que $B = 0$ dentro del superconductor, se puede calcular por medio de la teoría clásica del magnetismo el campo magnético fuera del espécimen, si el campo externo es uniforme. Consideraremos los siguientes casos:

(i) Esfera. El campo magnético en la superficie de una esfera es, en cualquier punto, tangencial a la superficie; el campo varía de cero en los polos a $3/2$ de la densidad de flujo aplicado en el ecuador $(3/2)B_a$.

(ii) Cilindro Transversal. Para un cilindro grueso y largo, con el campo externo aplicado perpendicularmente al eje del cilindro, la densidad de flujo es también tangencial en cualquier punto a su superficie. En este caso el campo varía de cero en la línea polar a $2B_a$ en las líneas ecuatoriales.

(iii) Cilindro Paralelo. En el caso de un cilindro paralelo con el campo externo aplicado, al contrario de los casos anteriores, el campo es el mismo en todos los puntos de su superficie.

Para la mayoría de las otras formas de las muestras el problema de derivar el patrón de flujo en las cercanías del espécimen superconductor, es imposible. El método usado es el de graficar experimentalmente el campo; tales gráficas pueden obtenerse con gran precisión por medio de la prueba del Bismuto. La resistencia eléctrica de un elemento de bismuto depende de la magnitud de la densidad de campo magnético, particularmente a bajas temperaturas, por lo que la medida de dicha resistencia provee una medida muy sensitiva del campo. El bismuto no es superconductor a la presión atmosférica, por lo que es muy conveniente para este propósito.

2.4 Fuerzas sobre especímenes superconductores.

Debido a que cuando un espécimen está en el estado superconductor fluyen en él corrientes de magnetización, habrá, como para toda corriente eléctrica en un campo magnético, una fuerza magnética sobre el espécimen, como en el experimento de Gouy. Debido a que en un espécimen grueso el campo en su interior es cero, las fuerzas sobre el espécimen deben estar en la superficie de la muestra, lo que muestra que las corrientes de magnetización son superficiales. El cálculo de las fuerzas magnéticas sobre un espécimen superconductor es un problema análogo al de calcular la fuerza eléctrica sobre un conductor normal en un campo eléctrico uniforme, debido a que en este último, el campo eléctrico en su interior es cero. Los cálculos muestran que en cada punto en la superficie del espécimen se ejerce una presión hacia adentro del espécimen que está dada por $B_s^2 / 2\mu_0$, donde B_s es la densidad de flujo en dicho punto. En muchos casos las presiones en los distintos puntos del espécimen se equilibran de modo que la fuerza neta sobre el espécimen es cero (esfera en campo magnético uniforme), sin embargo en otros casos como el experimento de Gouy, hay una fuer-

donde $B(0)$ es la densidad de flujo en $x = 0$, es decir, en la superficie neta resultante sobre el espécimen. Los dos ejemplos más espectaculares, que se tienen de esta fuerza es la esfera Simon y el imán de Arkadiev.

2.5 Especímenes Delgados:

Si el espécimen es más delgado que la profundidad de penetración, el campo magnético atraviesa el espécimen completamente. Ver figura. La densidad de flujo empieza a disminuir a medida que penetra en la muestra, pero antes que su valor haya alcanzado el valor cero, ha atravesado la muestra, por lo que ha sido capaz de atravesar o penetrar la película. Un método directo de mostrar este hecho es el siguiente, se coloca una película cilíndrica del material, y afuera de ella se enrolla una bobina normal. Dentro de la película se coloca una segunda bobina también normal; si ahora se hace variar la corriente en la bobina exterior, el campo magnético que pasa la película cilíndrica variará también en el interior, induciendo una corriente en la bobina interior, lo cual prueba nuestra aseveración.

Para interpretar los efectos de los experimentos en películas delgadas, se hace necesario conocer la forma como varía el campo dentro de la película. Antes del descubrimiento del efecto Meissner, H. London & F. London propusieron que la densidad de flujo dentro del espécimen satisface la ecuación:

$$(16) \quad \frac{d^2 B(x)}{dx^2} = -\frac{B(x)}{\lambda_L^2}$$

donde λ_L , es una cierta distancia que ahora se conoce como Profundidad de penetración de London. La solución de esta ecuación con las condiciones de frontera adecuadas, para un espécimen determinado, da la variación del flujo dentro del espécimen. Por ejemplo, para una película con un campo magnético aplicado en una cara de la película y paralela a ella la solución es:

$$(17) \quad B(x) = B(0) \cdot \exp(-x/\lambda_L)$$

donde $B(0)$ es la densidad de flujo en $x = 0$, es decir en la superficie. La ecuación muestra un decrecimiento exponencial dentro de la película, si el grueso de la película es a , la densidad de flujo en la otra cara de la película será: $B(0) \exp(-a/\lambda_L)$, y si la película es muy gruesa, entonces será cero, demostrando esto que λ_L es una medida de la distancia a la cual la densidad de flujo cae a cero, es decir, de la Profundidad de Penetración. La ecuación de London se encuentra que es válida para muchos superconductores, particularmente en campos magnéticos débiles. Los superconductores no ideales o duros que no satisfacen la ecuación de London tienen una descripción alternativa y se usan mejor especímenes gruesos para su estudio. Para tales superconductores la definición de la profundidad de penetración es:

$$(18) \quad \lambda \equiv \int_0^{\infty} \frac{B(x) dx}{B(0)}$$

si la solución de London se sustituye en la ec. (18) obtenemos: $\lambda = \lambda_L$ por lo que esta definición de la profundidad de penetración es consistente con la expresión de London para la profundidad de penetración. Se encuentra que la expresión (18) para la profundidad de penetración no nos dice nada acerca de la forma como B decrece a cero dentro del material, por lo que podemos asumir que B dentro del espécimen es constante e igual a $B(0)$ y que a la distancia λ , cae bruscamente a cero. Podemos predecir las características magnéticas de los especímenes gruesos en términos de λ como definida en (18); experimentos en especímenes gruesos proveen, de esta forma, medidas de la profundidad de penetración, sin importar la ley real de la penetración del campo. Realmente, para los efectos de la susceptibilidad magnética y las corrientes de magnetización, el efecto de la penetración de la densidad de flujo es equivalente a extraer una capa de grueso λ del material.

Aunque λ es una característica del material dado, se encuentra que su dependencia con la temperatura es la misma para casi todos los materiales y está dada por:

(19)
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\left[1 - \frac{T^4}{T_c^4}\right]^{1/2}}$$

expresión en la que λ_0 es la profundidad de penetración a la temperatura 0°K y T_c es la temperatura crítica del material, lo que muestra que λ se incrementa con la temperatura, volviéndose infinita para $T = T_c$.

2.6 Anillo Superconductor.

Anteriormente habíamos visto que las propiedades magnéticas estáticas del estado superconductor eran independientes de la historia previa del material. Sin embargo, si el material de que se trata es un anillo (o cualquier material que tenga un agujero a través de él), ocurren nuevos fenómenos. Empezamos con un anillo en el estado normal, sumergido en un campo magnético externo; cuando enfriamos el anillo al estado superconductor, en la presencia del campo magnético, se observa que se produce una corriente eléctrica que fluye por el anillo, además de tener el efecto Meissner. Por estar el anillo en el estado superconductor, dicha corriente fluirá sin ninguna resistencia, es decir, será una corriente persistente. Se observa también que media vez el anillo esté en el estado superconductor, la corriente en el anillo no será afectada por los cambios de campo magnético externo, por lo que podremos remover el campo externo y poder observar la corriente persistente por medio del campo que ella produce. Es claro que si el anillo pasa al estado normal, se re-establecerá de nuevo la resistencia eléctrica del anillo que destruirá dicha corriente. Si el anillo está en el estado Superconductor y aplicamos un campo magnético externo, el único fenómeno observado será el efecto Meissner; por lo que la corriente persistente debe producirse en el instante en que el anillo entra al estado superconductor en la presencia de un campo magnético externo aplicado. Una aplica-

ción de este fenómeno es la de producir campos magnéticos intensos comprimiendo las líneas de campo. Esto lo veremos en el siguiente artículo.

2.7 APLICACION: Compresores de Flujo.

Consideremos el arreglo mostrado en la figura donde un cilindro tiene un agujero en forme de ocho. Por medio del procedimiento usado en la sección anterior se produce una corriente persistente en el tubo, la cual da lugar a un campo magnético en el interior del agujero. La forma de intensificar dicho campo magnético es la siguiente: un segundo cilindro sólido en el estado superconductor, que ajusta exactamente en el agujero grande, se introduce en dicho agujero. Debido al efecto Meissner, las líneas de flujo en la cavidad mayor no pueden pasar a través del cilindro superconductor macizo, lo que da lugar a que sean "comprimidas" en el agujero pequeño. Por lo tanto, al introducir el cilindro macizo en el agujero mayor del tubo, se hace mayor el número de líneas de campo por unidad de área en la cavidad menor, dando por resultado un campo magnético más intenso en la cavidad menor. De esta forma se han logrado campos de intensidad 5×10^5 Amp./m.

El aparato anterior es un compresor simple, el otro aparato que consideraremos es una versión modificada que permite el bombeo cíclico del flujo. El aparato funciona en la siguiente forma: (ver figura). (i) Se empieza con el aparato en el estado superconductor y por medio de la bobina calefactora 1 se hace la región A normal. (ii) En las condiciones del inciso anterior se sumerge el aparato en un campo magnético externo y se desconecta la bobina 1, lo que crea una corriente persistente alrededor de la cavidad compresora. La corriente crea un flujo en dicha cavidad después de remover el campo externo. (iii) Se introduce en la cavidad compresora un pistón en el estado superconductor que tiene un área transversal ligeramente menor que el área de la cavidad compresora, lo que causa que el flujo se comprima. (iv) Por medio de la bobina calefactora 2 se hace la región B normal, permitiendo

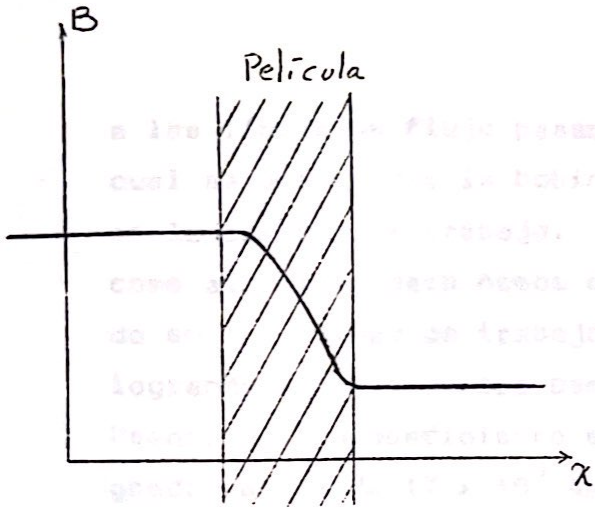


Figura 9. Penetración del flujo magnético en una película delgada.

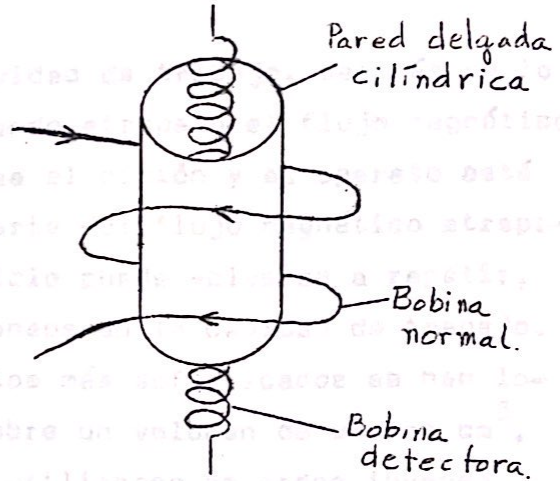


Figura 10. Aparato experimental para detectar la penetración del campo.

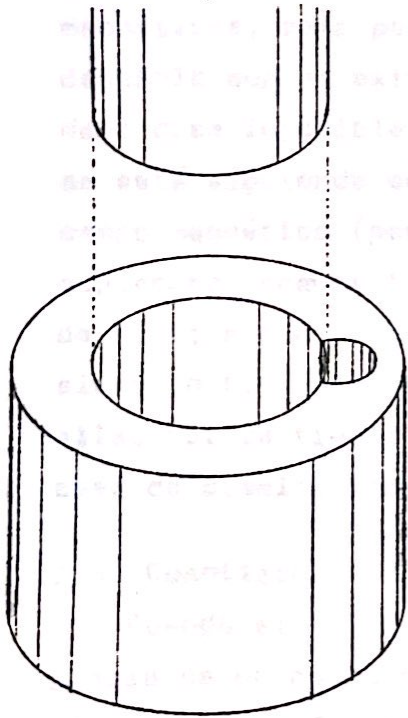


Figura 11. Compresor de flujo.

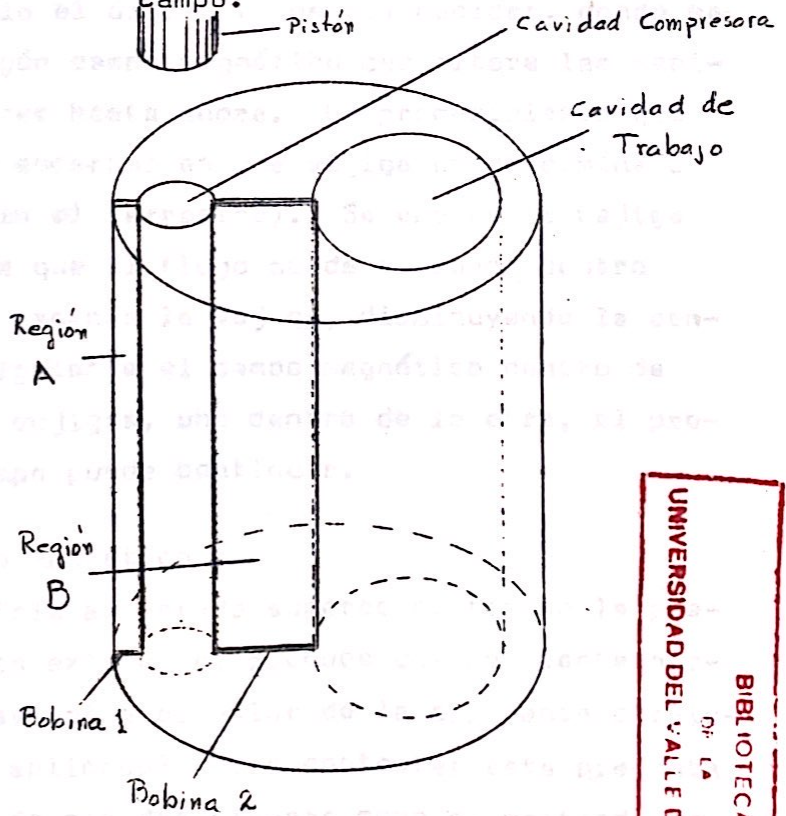


Figura 12. Bomba de flujo cíclica.

BIBLIOTECA
 DE LA
 UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

a las líneas de flujo pasara la cavidad de trabajo, después de lo cual se desconecta la bobina 2 dejando atrapado el flujo magnético en la cavidad de trabajo. Se extrae el pistón y el aparato está como al inicio pero hemos dejado parte del flujo magnético atrapado en la cavidad de trabajo. El ciclo puede volverse a repetir, logrando de esta manera campos intensos en la cavidad de trabajo. Usando este procedimiento en aparatos más sofisticados se han logrado campos de 17×10^5 Amp./m, sobre un volumen de varios cm^3 ,

(21) El procedimiento también puede utilizarse en orden inverso, es decir, crear regiones en las que el campo valga cero. Esta condición es deseable en muchos experimentos de medidas de momentos magnéticos, como por ejemplo el dipolo (momento) nuclear, donde es deseable que no exista ningún campo magnético que altere las medidas; cosa imposible de lograr hasta ahora. Un procedimiento que se está siguiendo es el de encerrar en una vejiga un determinado campo magnético (por ejemplo el terrestre). Se vuelve la vejiga superconductora de tal forma que el flujo queda atrapado dentro de ella; a continuación se expande la vejiga, disminuyendo la densidad de flujo, y por consiguiente el campo magnético dentro de ella. Si se tienen varias vejigas, una dentro de la otra, el proceso de disminución del campo puede continuar.

2.8 Cuantización del flujo magnético

Cuando el anillo se enfría al estado superconductor en la presencia de un campo magnético externo se produce una corriente persistente. ¿Qué relación hay entre el valor de la corriente persistente y el campo magnético aplicado? Para contestar esta pregunta consideremos un tubo largo de paredes gruesas como el mostrado en la figura. El cilindro se encuentra en el estado superconductor, lleva una corriente persistente y está sumergido en un campo externo. Debido a la longitud del cilindro, al igual que en un solenoide, lejos de los extremos y en la parte interior del tubo, podemos considerar que las líneas de flujo son paralelas al eje del cilindro

Flujo total

Flujo de corriente
Flujo de campo

y están espaciadas uniformemente. Si suponemos que el valor de la densidad de flujo total en un cierto punto dentro del tubo es B , la densidad de flujo externo B_a , la distorsión de la densidad de flujo aplicada debida al efecto Meissner B_d y la densidad de flujo debida a la corriente persistente B_c , tenemos la relación:

$$(20) \quad B = B_a + B_d + B_c$$

Por lo que el flujo total será:

$$(21) \quad \Phi = \Phi_a + \Phi_d + \Phi_c$$

Flujo Aplicado

Si cuando aplicamos el campo magnético externo B_a el tubo ya está en el estado superconductor, no se producirá ninguna corriente persistente y Φ_c será cero en la ec (21); si en cambio cuando ya se ha producido la corriente persistente, suprimimos el campo externo, B_a , entonces sólo queda el flujo producido por la corriente persistente, Φ_c , por lo que nuestra pregunta inicial podría ser modificada a: ¿Cuál es la relación entre Φ_c y el flujo aplicado, Φ_a , qué se usa para producirlo?

No

La respuesta a esta pregunta está en los resultados experimentales obtenidos por Deaver y Fairbanks dados en la figura. En dicha figura en (a), el flujo total está ploteado contra el flujo aplicado. La línea punteada da el flujo debido al campo aplicado y su distorsión debida al efecto Meissner; la diferencia entre la línea punteada y la sólida muestra la existencia del flujo de la corriente persistente, cuyo flujo incrementa a los dos anteriores. En la (b) se muestra el flujo de la corriente persistente ploteado contra el flujo aplicado. La curva revela una propiedad notable del flujo debido a la corriente persistente que se puede expresar como

$$(22) \quad \Phi_c = n \cdot \frac{h}{2e} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde h & e son la constante de Planck y la carga del electrón. Esto significa que el flujo sólo puede tomar valores que son múltiplos

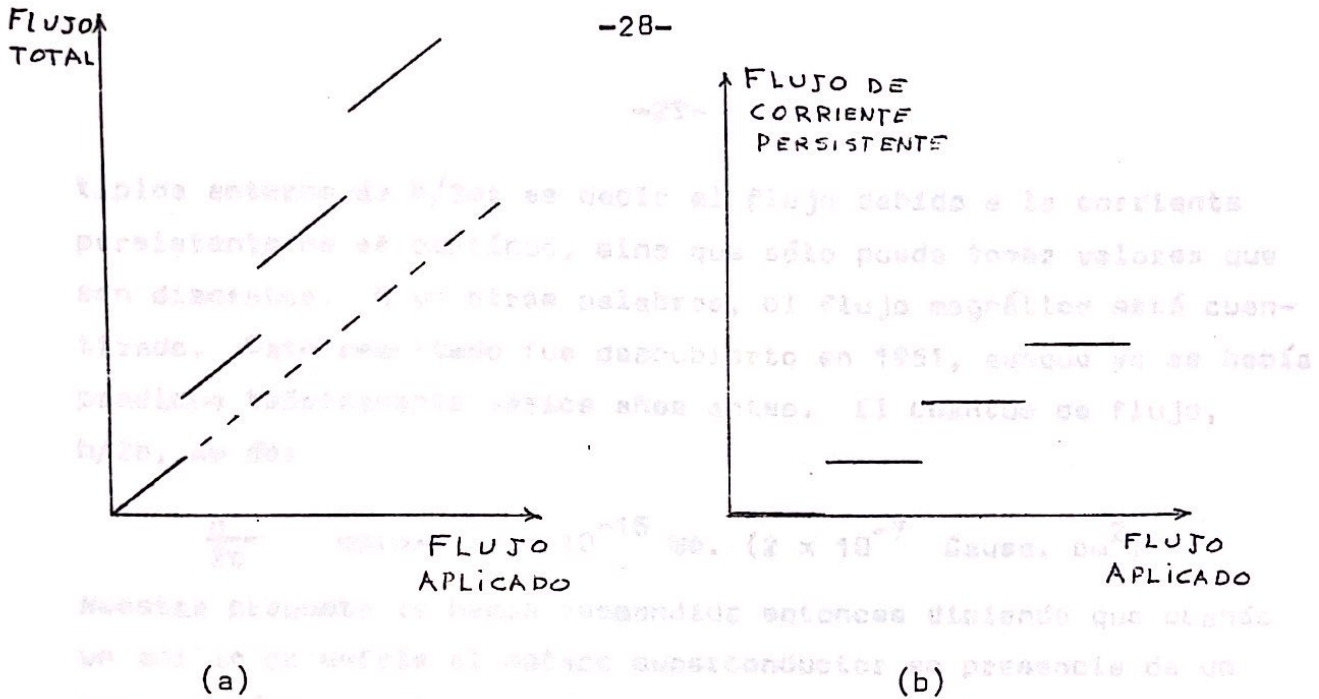


Figura 13. Cuantización del Flujo Magnético.

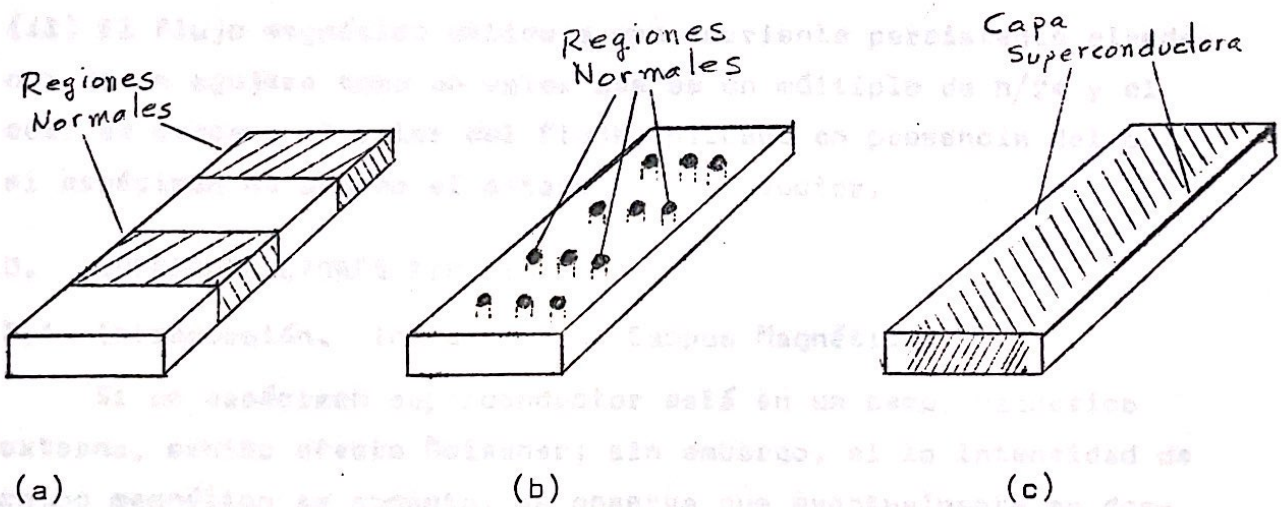


Figura 14. (a) Estado Intermedio. (b) Estado Mixto. (c) Superconductividad de Superficie.

tiplos enteros de $h/2e$; es decir el flujo debido a la corriente persistente no es continuo, sino que sólo puede tomar valores que son discretos. O en otras palabras, el flujo magnético está cuantizado. Este resultado fue descubierto en 1961, aunque ya se había predicho teóricamente varios años antes. El quantum de flujo, $h/2e$, es de:

$$\frac{h}{2e} \text{ aprox. } 2 \times 10^{-15} \text{ Wb. (} 2 \times 10^{-7} \text{ Gauss. cm}^2\text{)}$$

Nuestra pregunta la hemos respondido entonces diciendo que cuando un anillo se enfría al estado superconductor en presencia de un campo magnético aplicado, se produce una corriente persistente que produce un flujo magnético cuyo valor es un múltiplo entero de $h/2e$ que es cercano al valor del flujo aplicado, Φ_a . Podemos concluir: (i) El flujo magnético debido a una corriente persistente alrededor de un hueco en un espécimen grueso, tiene los valores dados por la ec. (22).

(ii) El flujo magnético debido a una corriente persistente alrededor de un agujero toma un valor que es un múltiplo de $h/2e$ y el cual es cercano al valor del flujo aplicado en presencia del cual el espécimen ha pasado al estado superconductor.

3. SUPERCONDUCTORES TIPO I

3.1 Introducción. Influencia de Campos Magnéticos.

Si un espécimen superconductor está en un campo magnético externo, exhibe efecto Meissner; sin embargo, si la intensidad de campo magnético se aumenta, se observa que eventualmente se destruye la superconductividad. Las primeras observaciones de la destrucción de la superconductividad aplicando campos magnéticos fueron hechas también por K. Onnes en 1913. Lo que él descubrió fue que el paso de corrientes suficientemente intensas por un superconductor, destruían la superconductividad al alcanzar cierto valor I_c ; hecho que prohibía la construcción de electroimanes su-

perconductores para producir campos magnéticos intensos. Silsbee en 1916 sugirió que no era el paso de la corriente eléctrica lo que destruía la superconductividad, sino el campo producido por dicha corriente eléctrica. La hipótesis de Silsbee ha sido comprobada en superconductores metálico puros, no-deformados (ideales) no así en otros elementos y aleaciones (no-ideales o duros).

Cuando no hay campo magnético externo aplicado a un espécimen, éste puede estar únicamente en dos estados; en el estado normal por encima de la temperatura crítica o en el estado superconductor, si su temperatura es inferior a la crítica. En el caso de que haya un campo magnético externo, la situación es un poco diferente. Para ciertos valores del campo externo unas partes del espécimen estarán en estado normal, mientras otras estarán en el estado superconductor, quedando el material dividido en regiones normales y regiones superconductoras.

La forma como un espécimen queda dividido por las regiones normales y superconductoras puede ser de tres clases, conocidas como Estado Intermedio, Estado Mixto y Superficie Superconductoras. Por ejemplo, para una lámina gruesa con el campo externo paralelo a las caras de la lámina, en el estado intermedio se forman bandas anchas paralelas perpendiculares al campo externo alternativamente normales y superconductoras; en el estado mixto se forman filamentos perpendiculares al campo de regiones normales (dichos filamentos son numerosos, muy delgados y su separación es del orden de 10^{-5} mm.) y en el estado de superficie superconductoras el espécimen está en el estado normal, excepto por una delgada capa en la superficie que permanece en el estado superconductor. Recientemente se ha descubierto que los materiales que exhiben el estado intermedio no exhiben el estado mixto y viceversa. Lo anterior hace que los materiales sean divididos en dos grupos conocidos como Superconductores Tipo I y Superconductores Tipo II. Los superconductores Tipo I (ideales o suaves) como por ejemplo el plomo, son aquellos que exhiben el estado intermedio y los Superconductores Tipo II (no-i-

deales o Duros) como por ejemplo el Niobio, son los que exhiben estado mixto. La mayoría de los elementos son superconductores Tipo I, mientras que la mayoría de aleaciones y compuestos son superconductores Tipo II. Ambas clases de superconductores pueden exhibir superconductividad de superficie, pero esta es una situación compleja. Si el material está rodeado de un aislador puede aparecer superconductividad de superficie, mientras que si el superconductor está rodeado por un metal normal, nunca aparece superconductividad de superficie; y, finalmente todos los materiales superconductores Tipo II pueden exhibir superconductividad de superficie, mientras que sólo para algunos Tipo I se ha observado. En lo que sigue trataremos con superconductores Tipo I.

3.2. Transición del estado normal al Superconductor en un Campo Magnético.

Un espécimen superconductor Tipo I puede estar en tres estados, en el estado normal, en el superconductor o en el intermedio; dicho estado dependerá de los valores de temperatura y campo magnético (ver figura). Es de hacer notar que únicamente si el campo aplicado es cero, el espécimen no exhibirá el estado intermedio. Para pasar del estado superconductor al normal, se puede lograr de tres formas: (i) incrementando la temperatura, (ii) aumentando el campo externo & (iii) aumentando tanto el campo, como la temperatura. En cualquiera de las tres formas siempre habrá una región de temperatura y campo para la cual el espécimen estará en el estado intermedio. La transición brusca del estado normal al superconductor sólo ocurre si el campo aplicado vale cero. Desde luego, todos los procesos anteriores son reversibles. El hecho de que aparezca el estado intermedio está reflejado en las propiedades del espécimen. Por ejemplo, la figura muestra la resistencia eléctrica en función del campo aplicado. Existe una región en la cual la resistencia no es cero (estado superconductor) ni tiene su valor del estado normal; en esta región el espécimen está en el estado intermedio.

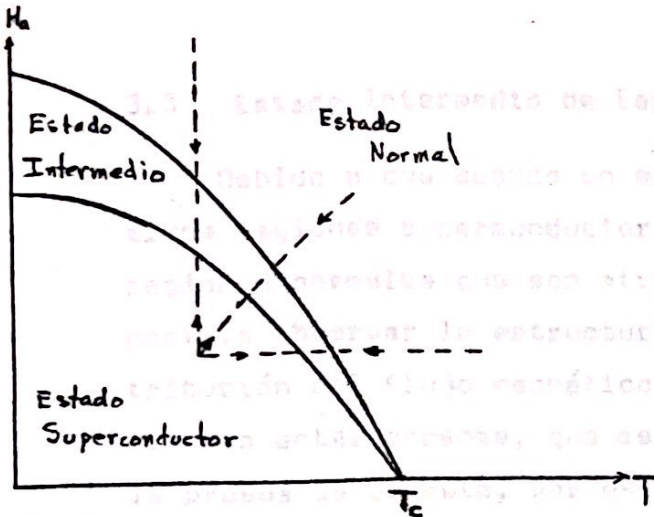


Figura 15. Dependencia de estado de los especímenes Tipo I con el campo aplicado y la Temperatura.

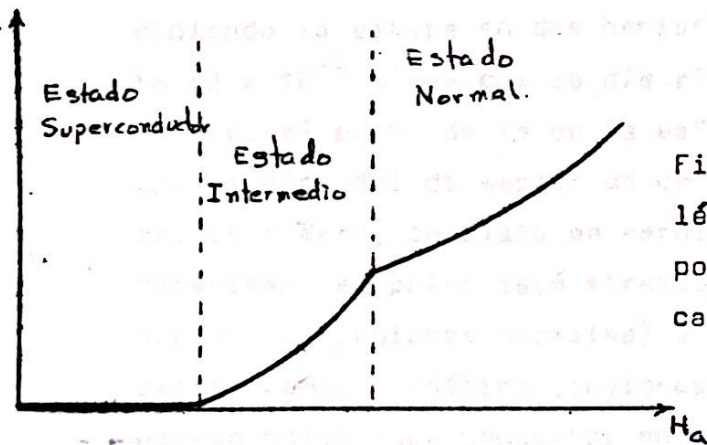


Figura 16. Resistencia eléctrica de un espécimen Tipo I, como una función del campo aplicado.

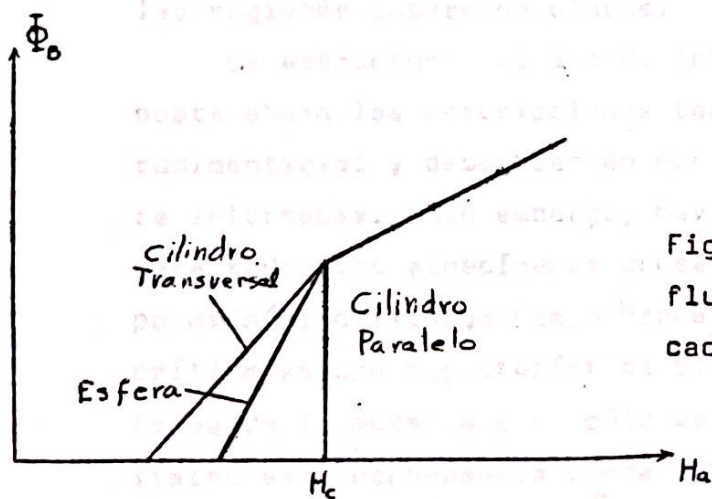


Figura 17. Variación del flujo con el campo aplicado en especímenes Tipo I.

3.3 Estado Intermedio de Espécimenes Gruesos.

Debido a que cuando un espécimen está en el estado intermedio tiene regiones superconductoras que no contienen flujo magnético, y regiones normales que son atravesadas por el flujo magnético, es posible observar la estructura de dicho estado por medio de la distribución del flujo magnético en el espécimen. Un método, ya mencionado anteriormente, que se usa para mapear campos magnéticos es la prueba de Bismuto, por medio de la cual se puede observar la estructura interna del estado intermedio. Por ejemplo, para una esfera en el estado intermedio, dicha estructura se puede observar dividiendo la esfera en dos hemisferios separados una distancia corta (2×10^{-4} m) ya que la distribución del campo en esta abertura no variará mucho de la de la esfera sólida. Otro método, que es una versión del de mapear un campo magnético por medio de limaduras de hierro, consiste en espolvorear polvo ferromagnético en el espécimen; el polvo será atraído a las regiones donde existe flujo magnético (regiones normales) y expulsado de las regiones donde no existe campo magnético (regiones superconductoras). También puede usarse polvo superconductor en lugar del polvo ferromagnético con los mismos resultados, sólo que en este caso el polvo se acumula en las regiones superconductoras.

La estructura del estado intermedio es bastante complicada y hasta ahora las descripciones teóricas del estado intermedio son rudimentarias y descansan en modelos simplificados de la estructura intermedia. Sin embargo, hay unos resultados que son válidos para todos los espécimenes gruesos Tipo I relacionados con un campo magnético llamado Campo Magnético Crítico. El campo magnético crítico es una característica del material que no depende de la forma de la muestra sino sólo de su temperatura; para muchos materiales esta dependencia puede ser aproximada por la relación:

$$(23) \quad H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

Expresión en la que T_c es la temperatura crítica del material y $H_c(0)$ es el valor del campo crítico a la temperatura cero. Un espécimen obedece las siguientes reglas:

(i) Un espécimen grueso tipo I hace su transición del estado superconductor al intermedio cuando el campo en cualquier punto de su superficie se vuelve igual a H_c .

(ii) La transición del estado normal al intermedio ocurre cuando el campo aplicado es igual al campo crítico.

Consideremos, por ejemplo, una esfera; para valores bajos del campo aplicado la esfera estará en el estado superconductor y el flujo en su interior será cero. Pero, de acuerdo con la ec. (2.3) el campo en la superficie de una esfera varía de cero en los polos a $\frac{3}{2}H_a$ en el ecuador, por lo que cuando el campo aplicado H_a llegue al valor $H_a = \frac{2}{3}H_c$ la esfera entra al estado intermedio y el flujo empieza a aumentar de cero cuando las líneas de flujo atraviesan por las regiones normales. Si el caso fuera un cilindro transversal, tenemos que el campo varía en la superficie del cilindro de cero a $2H_a$; por lo que cuando el campo aplicado alcance el valor $H_a = (\frac{1}{2})H_c$, el cilindro entra al estado intermedio. A medida que el campo aplicado crece de los valores $(\frac{2}{3})H_c$ para la esfera y $(\frac{1}{2})H_c$ para el cilindro, las regiones normales empiezan a crecer a expensas de las superconductoras, hasta que para un valor del campo aplicado igual al campo crítico, la muestra entra en el estado normal. La transición del estado intermedio al normal es independiente de la forma del material. Un caso muy especial es el del cilindro paralelo de la sección (2.3) ya que en este caso, el cilindro entra al estado mixto cuando el campo aplicado es igual a el valor del campo crítico. $H_a = H_c$, de acuerdo con (i); pero por otro lado, de acuerdo con (ii) cuando $H_a = H_c$ el espécimen entra al estado normal, por lo que en un cilindro paralelo la transición entre el estado normal y el superconductor es brusca y no exhibe estado intermedio.

3.4 APLICACION: Válvulas de Calor.

Las válvulas superconductoras de calor son instrumentos de control del flujo de calor bastante usados; son más importantes a temperaturas bajas, menores de 0.4°K donde si se usaran válvulas mecánicas, la propia vibración de las válvulas produciría calor. Si se reemplazan las válvulas mecánicas por superconductoras se pueden mantener temperaturas muy bajas, del orden de 0.04°K .

La válvula superconductora de calor es básicamente un alambre cilíndrico grueso y largo de material Tipo I que conecta dos sistemas A & B. Si el alambre se hace de plomo y se mantiene a temperaturas inferiores a 1°K , su conductividad térmica en el estado superconductor es muy pequeña y como unas 200 veces menor que su conductividad térmica en el estado normal. De esta forma con sólo cambiar el alambre del estado normal al superconductor se tiene una válvula para el flujo de calor (abierta en el estado normal y cerrada en el estado superconductor); la forma de operar esta válvula es por medio de campos magnéticos.

3.5 Influencia de las Corrientes.

Hemos visto anteriormente que los alambres no pueden llevar corrientes ilimitadas y permanecer en el estado superconductor, debido a que toda corriente crea un campo magnético. Según la ley de Ampere, el campo en la superficie de un alambre cilíndrico de radio r y conduciendo una corriente I , está dado por:

$$(24) \quad H_{\text{sup}} = \frac{I}{2\pi r}$$

que junto con lo visto previamente, el alambre entrará al estado intermedio cuando el campo en la superficie alcance el valor crítico, el cual corresponderá a una corriente llamada Corriente Crítica I_c , y es la máxima corriente que puede llevar el alambre con resistencia cero. Cuando $I = I_c$ se observa que el valor de la resistencia crece bruscamente a 0.8 de su valor en el estado normal; el espécimen está en el estado intermedio y de allí en adelante,

cuando la corriente crece la resistencia también crece uniformemente, hasta que aproximadamente para $I = 3I_c$ la resistencia tiene su valor del estado normal. Es claro que un alambre se puede hacer superconductor enfriándolo y normal calentándolo.

El rango en el cual el alambre está en el estado intermedio es un intervalo muy corto de temperatura, del orden de 0.005°K , para una corriente de 40 mA. y decrece a medida que disminuye la corriente, siendo cero para una corriente igual a cero.

3.6 APLICACION: Bolómetro superconductor.

Un bolómetro es un aparato usado para medir y captar radiación electromagnética. La operación de este aparato está basada en que un cuerpo en el estado normal al absorber radiación sufre un incremento de temperatura; dicho incremento de temperatura le produce un aumento de su resistencia eléctrica y de esta forma la radiación se puede detectar como una variación en la corriente eléctrica del material.

En un bolómetro superconductor el material normal se reemplaza por un material superconductor y funciona a temperaturas del estado superconductor. Debido a que se tiene que el incremento de temperatura viene dado por:

$$(25) \quad \Delta T = \frac{\Delta E}{C_v}$$

donde C_v es la capacidad de calor específico del material, y sabiendo que en el estado intermedio de un alambre conduciendo una corriente, dicho alambre es muy sensible a los cambios de temperatura, el bolómetro superconductor ofrece un detector de radiación electromagnética muy sensible y ha sido usado con éxito en la región del infrarrojo, donde otros detectores son incapaces de poder detectarlas.

3.7 APLICACION: El Cryoton de Bobina.

El cryoton de bobina consiste en un cilindro grueso que lleva una corriente y está sujeto a un campo magnético aplicado paralelo

a su longitud producido por una bobina enrollada sobre él. Si nos referimos a la corriente del cilindro como corriente de entrada I y a la corriente en la bobina como corriente de control, I_c , tendremos que si el cilindro está en el estado superconductor, lo podremos hacer normal alterando los valores de I_e & I_c . De esta forma tenemos un dispositivo que puede ser usado como interruptor o como intercambiador de corrientes de circuitos. Por lo regular la bobina también es de un material superconductor cuya corriente crítica es mayor que la del cilindro y es usualmente cambiando la corriente de control como se abre o cierra el circuito. Este aparato tiene dos limitaciones principales, la primera es que la máxima corriente que puede interrumpir es la corriente crítica del cilindro, y la segunda que la transición entre el estado normal y el superconductor lleva un tiempo que es del orden de 10 micro-segundos, que para ser usado en una computadora es un tiempo apreciable.

3.8 Estado Intermedio en Especímenes Pequeños.

Como era de esperarse, las características del estado intermedio para especímenes pequeños como películas delgadas, son diferentes de las de los especímenes gruesos. En especial, la transición del estado intermedio al normal tiene lugar a un campo aplicado más pequeño que para especímenes gruesos y la transición del estado superconductor al intermedio tiene lugar a un campo aplicado mayor. Esto ocasiona que el rango en el cual un espécimen delgado está en el estado intermedio es menor que para un espécimen grueso.

Para las muestras que no tienen estado intermedio como cilindros paralelos delgados, se encuentra que la transición entre el estado superconductor y el normal tiene lugar a un campo aplicado mayor que el campo crítico del material. Si el campo al cual ocurre la transición estado normal-superconductor es H_f , el crecimiento del campo crítico, H_f/H_c , se ve que es extremadamente grande, especialmente a altas temperaturas. Los rasgos de los especímenes delgados no están comprendidos del todo; la teoría moderna

muestra que las diferencias cuantitativas entre ambos especímenes se deben a los efectos de la energía de enlace, la cual es más marcada en un espécimen delgado.

Un ejemplo importante en la práctica es la transición de estado inducido por la corriente en una película delgada plana. (Ver figura). Si la corriente es baja, la película permanece en el estado superconductor y la resistencia es cero; a medida que la corriente se aumenta a un valor I_1 , la resistencia empieza a aumentar gradualmente hasta que a un valor I_2 la resistencia, de súbito, se restablece pasando la muestra al estado normal. Sin embargo, si la corriente se disminuye, la resistencia no sigue la misma trayectoria anterior, sino que disminuye gradualmente hasta que a un valor I_3 , la resistencia cae bruscamente a la curva anterior, es decir, sigue una curva de histéresis y la película se comporta irreversiblemente. La resistencia, entre las corrientes I_3 & I_2 , ya no depende de la corriente solamente, sino también de la historia previa del material.

El comportamiento irreversible se cree que es debido a los efectos de calefacción; cuando la resistencia empieza a aumentar, a la par se calienta la muestra por efecto Joule y este calentamiento causaría el efecto irreversible. En los aparatos se evita este problema trabajando las muestras en los intervalos de corrientes no afectados, es decir, arriba de I_2 o debajo de I_1 .

3.9 APLICACION. Cryoton de Película Delgada.

Los aparatos de película delgada además de la ventaja que ofrecen por su tamaño reducido, tienen la ventaja que el tiempo de cambio del estado normal al superconductor y viceversa es mucho más reducido que el de los especímenes gruesos. En los especímenes gruesos, debido al efecto Meissner, se inducen corrientes de magnetización, las cuales a su vez producen calentamientos que retardan el tiempo de transición; dicho tiempo se encuentra que está enormemente reducido en los especímenes delgados. Las

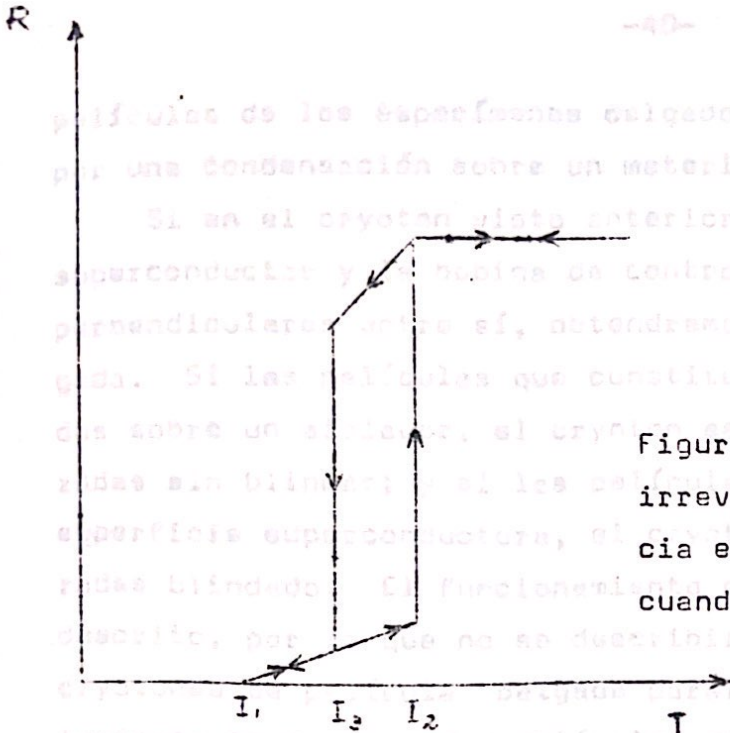


Figura 18. Comportamiento irreversible de la resistencia en un espécimen delgado, cuando se varía la corriente.

Las películas de los superconductores cargados se producen por lo general por una condensación sobre un material.

Si en el cryostat visto anteriormente se reemplaza el cilindro superconductor y se dispone de control por dos películas cargadas, perpendicularmente entre sí, obtendremos un cryostat de película delgada.

Si las películas que constituyen el cryostat están depositadas sobre un aislante, el cryostat es una película de película delgada sin blindaje; si las películas están depositadas sobre una superficie superconductora, el cryostat es una película delgada blindada. El funcionamiento de un cryostat de película delgada se describe, por lo que no se describirá. También se pueden construir cryostats de película delgada para películas, que sólo difieren de los anteriores en que las dos películas se colocan paralelas una sobre la otra, teniendo el efecto de cambiar las corrientes críticas.

3.10 APLICACIONES: Celda de Almacenamiento de Crowe.

La celda de almacenamiento de Crowe es un aparato de película delgada utilizado para almacenar memoria en una computadora. Lo que se utiliza en este aparato es una película superconductora con un agujero en el que puede fluir una corriente paralela a la superficie de la película, dando lugar a que en una dirección de la corriente principalmente el hecho que la corriente fluye en una película delgada de material superconductor.

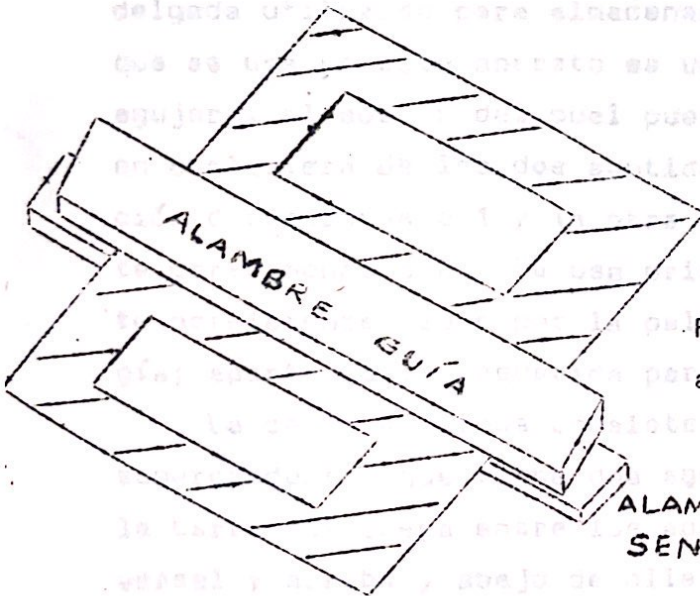


Figura 19. Celda de almacenamiento de Crowe.

La celda de almacenamiento de Crowe es un aparato de película delgada utilizado para almacenar memoria en una computadora. Lo que se utiliza en este aparato es una película superconductora con un agujero en el que puede fluir una corriente paralela a la superficie de la película, dando lugar a que en una dirección de la corriente principalmente el hecho que la corriente fluye en una película delgada de material superconductor.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la corriente a un nivel que sea inferior a la corriente crítica de la barra transversal, dando lugar a que la corriente fluya en la barra transversal.

películas de los especímenes delgados se producen por lo general por una condensación sobre un material.

3.9 Si en el cryoton visto anteriormente se reemplaza el cilindro superconductor y la bobina de control por dos películas delgadas, perpendiculares entre sí, obtendremos un cryoton de película delgada. Si las películas que constituyen el cryoton están depositadas sobre un aislador, el cryoton se llama cryoton de películas cruzadas sin blindar; y si las películas están depositadas sobre una superficie superconductora, el cryoton es de películas delgadas cruzadas blindado. El funcionamiento de este cryoton es análogo al ya descrito, por lo que no se describirá. También se pueden construir cryotones de película delgada paralela, que sólo difieren de los anteriores en que las dos películas se colocan paralelas una sobre la otra, teniendo el efecto de cambiar las corrientes críticas.

3.10 APLICACION: Celda de Almacenamiento de Crowe.

La celda de almacenamiento de Crowe es un aparato de película delgada utilizado para almacenar memoria en una computadora. Lo que se usa en este aparato es una película superconductora con un agujero, alrededor del cual puede fluir una corriente persistente en cualquiera de los dos sentidos, dando lugar a que en una dirección corresponda a 1 y la otra dirección de la corriente persistente corresponde a 0. Se usa principalmente el hecho que la corriente persistente fluye por la película sin necesidad de gastar energía; aparte de la requerida para mantener la baja temperatura.

La celda de Crowe consiste en una película delgada de material superconductor que tiene dos agujeros de unos pocos mm de diámetro, la barra que queda entre los agujeros se conoce como barra transversal y arriba y abajo de ella van dos alambres conocidos como alambre guía y alambre sensor. El funcionamiento consiste en producir una corriente en el alambre guía, lo suficientemente grande para que haga a la barra transversal normal, luego reducir la co-

riente en el alambre guía permitiendo a la barra transversal volver al estado superconductor; y, por medio de este procedimiento dejar una corriente persistente.

3.11 Efectos Térmicos.

Hemos dicho anteriormente que en un cilindro macizo con un campo externo aplicado paralelo al eje del cilindro no ocurre estado intermedio, sino que la transición del estado normal al superconductor ocurre a un campo aplicado igual al campo crítico. Sin embargo, se observa que cuando el espécimen pasa del estado superconductor al normal absorbe una cierta cantidad de calor; y si la transición es del estado normal al superconductor, el espécimen desprende calor. Estos dos calores son iguales y se conoce con el nombre de calor latente de transición y está definido como la cantidad de calor necesaria para volver al cilindro normal. El calor latente específico está relacionado con el campo crítico por la expresión:

$$(26) \quad \ell = VT \mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$$

donde V es el volumen del cilindro y T es la temperatura a la cual toma lugar la transición. La discontinuidad $C_{nor} - C_{sup}$ en el calor específico en la transición puede obtenerse de la expresión (26) y de la relación termodinámica:

$$(27) \quad C_n - C_s = \frac{d\ell}{dT}$$

lo cual nos da:

$$(28) \quad C_n - C_s = -VT \mu_0 H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} - VT \mu_0 \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2$$

La ecuación anterior sólo se aplica a un cilindro superconductor paralelo con el campo externo; para otras formas ocurre el estado intermedio y la dependencia del calor específico con la temperatura es diferente.

Si el cilindro está alejado de otros cuerpos (térmicamente), no puede ni tomar ni ceder calor, por lo que la transición acarreará una disminución o aumento de temperatura según el caso; esta caída

de temperatura se llama efecto Magneto-calórico y sugiere una forma de refrigeración de un material, la cual se ha probado experimentalmente y no es muy eficiente.

Si ahora consideramos la transición del cilindro en la ausencia de un campo magnético aplicado, las ecuaciones que se obtienen son las que resultan de sustituir $H_c = 0$ & $T = T_c$ en las ecuaciones (26) y (28), lo que da:

$$(29) \quad l = 0 \quad \& \quad C_n - C_s = -VT \mu_0 \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{T = T_c}^2$$

para la discontinuidad del calor específico en la transición. O sea que no hay calor latente cuando ocurre la transición entre el estado normal y el superconductor en ausencia de campo magnético externo. La ec. (29) también muestra que el calor específico aumenta cuando vamos del estado normal al superconductor; y como ninguna muestra exhibe estado intermedio en ausencia de campo magnético externo, la expresión (29) es válida para cualquier forma de espécimen.

4. SUPERCONDUCTORES TIPO II.

4.1 El Estado Mixto

El descubrimiento de los materiales tipo II es bastante reciente (alrededor de 1962 se ha aceptado su existencia). Antes de reconocer que había dos clases de superconductores, se consideraban anómalas las características de estos materiales y se trabajó sólo con materiales tipo I. Este desarrollo en materiales tipo I no es sorprendente, ya que los únicos elementos que son superconductores Tipo II son el Niobio y el Vanadio; todos los demás superconductores tipo II son compuestos. La diferencia básica entre los superconductores tipo I y los superconductores tipo II es que mientras los primeros exhiben el estado intermedio, los segundos exhiben el estado Mixto. Por lo general los superconductores tipo II se caracterizan por tener temperaturas de transición elevadas, no cumplir la regla de Silsbee y que la región del estado de transición (mixto) es más amplia que la de los tipo I.

En el estado mixto las regiones normales de la muestra forman un arreglo de filamentos de grueso insignificante arreglados en forma paralela al campo magnético externo, los cuales están rodeados de material en el estado superconductor. El efecto es un número de agujeros de estado normal en la muestra en el estado superconductor.

En los materiales de tipo I hemos visto que un cilindro paralelo al campo no exhibe estado intermedio, sin embargo un cilindro paralelo de tipo II si exhibe el estado mixto. Cuando el cilindro está en el estado superconductor y el campo externo alcanza el valor H_c el flujo magnético en el cilindro de material tipo II, se empieza a incrementar rápidamente de su valor cero. El valor del campo magnético para el cual empieza el incremento de flujo dentro del espécimen se conoce como H_{c1} ; el material está en el estado mixto. A medida que se incrementa el campo, se incrementa rápidamente el flujo dentro del espécimen hasta llegar a un cierto valor para el cual el flujo alcanza su valor en el estado normal; al campo para el cual esto ocurre se conoce como H_{c2} . Para valores de campo magnético entre H_{c1} & H_{c2} el material está en el estado mixto.

A H_{c1} empiezan a aparecer filamentos normales dentro de la muestra, lo que hace que el flujo pueda pasar a través del material; sin embargo, las líneas de flujo no están confinadas sólo a los filamentos normales sino que pueden penetrar una distancia λ dentro del material que rodea el filamento. Mientras el espacio que separa los filamentos sea mayor que λ , los filamentos no interactúan. Cuando el material entra al estado mixto a H_{c1} se encuentra que la separación entre los filamentos es del orden de λ , de tal forma que hay interacción entre ellos. A medida que el campo externo aumenta, el grueso de los filamentos no aumenta sino que en su lugar, aparecen más filamentos de modo que la distancia entre filamentos se reduce, con lo que su interacción mutua aumenta, dando por resultado que cuando el campo llega a H_{c2} se pasa al estado normal.

Las transiciones en H_{c1} & H_{c2} no son iguales; la diferencia entre ellas es que el aumento del campo en H_{c1} es bastante violenta,

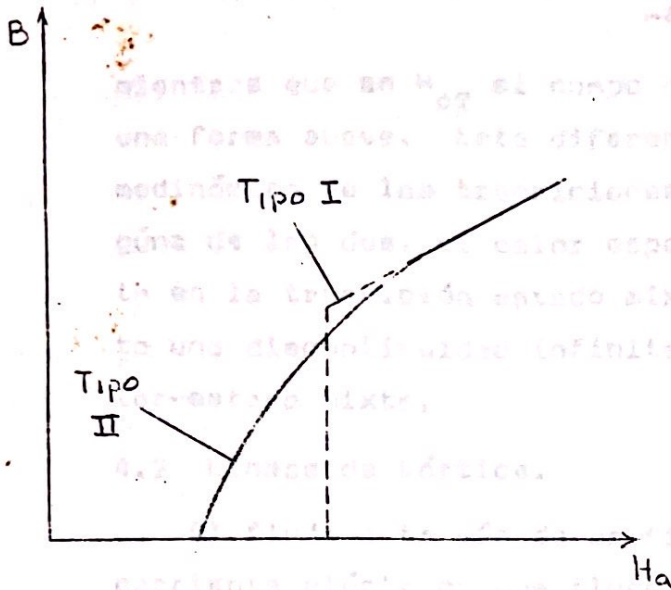


Figura 20. Variación de la densidad de flujo con el campo aplicado para especímenes tipo I (línea punteada) y para especímenes tipo II (línea llena)

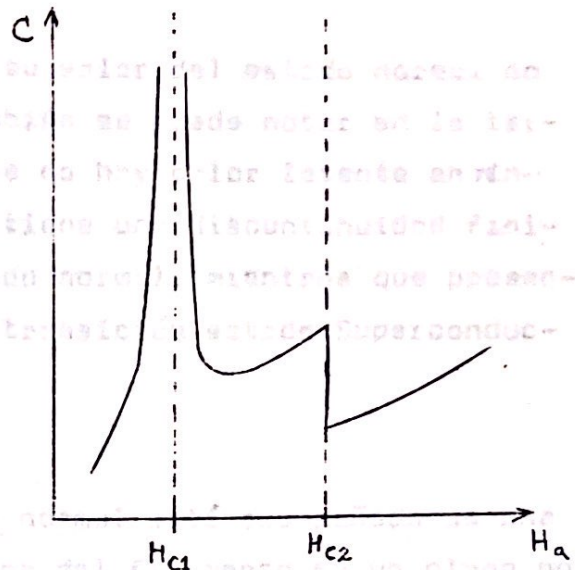


Figura 21. Calor Específico de especímenes tipo II.

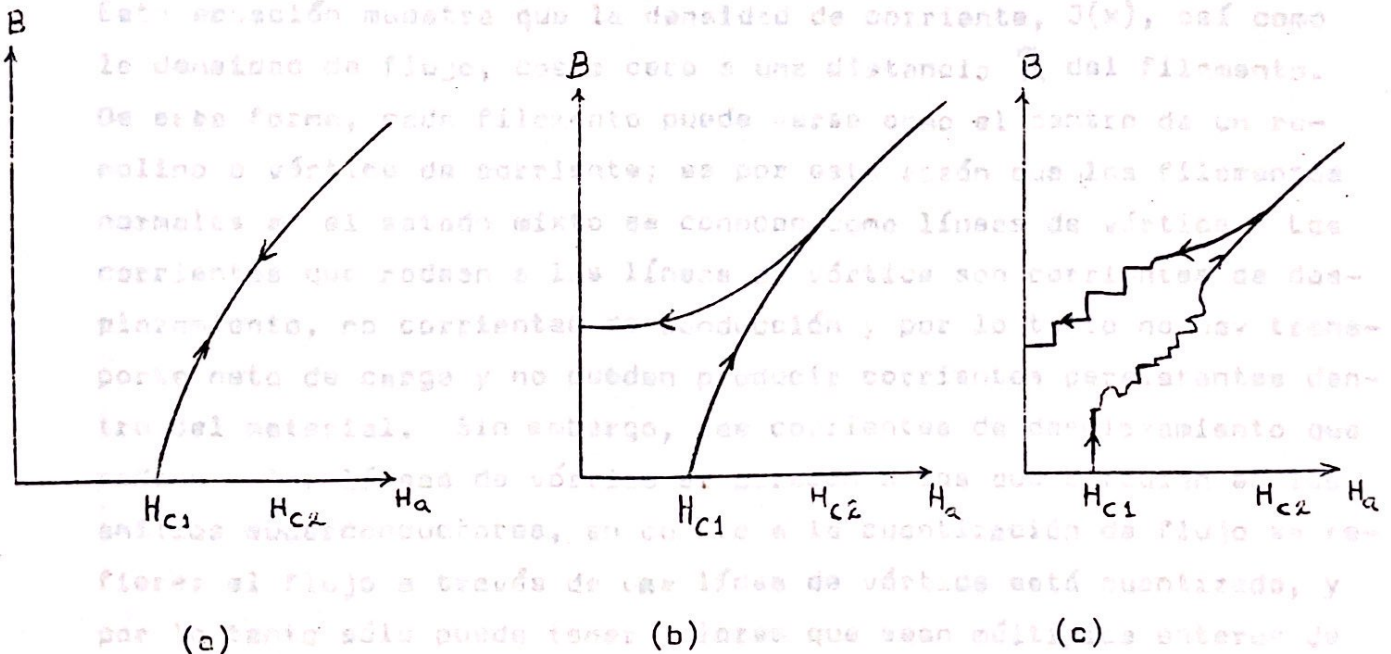


Figura 22. Densidad de Flujo contra campo aplicado en varios especímenes tipo II.

- (a) Comportamiento Reversible.
- (b) Comportamiento Irreversible de especímenes con defectos.
- (c) Comportamiento Irreversible de especímenes con defectos exhibiendo saltos de flujo.

mientras que en H_{c2} el campo alcanza su valor del estado normal en una forma suave. Esta diferencia también se puede notar en la termodinámica de las transiciones, aunque no hay calor latente en ninguna de las dos, el calor específico tiene una discontinuidad finita en la transición estado mixto-estado normal, mientras que presenta una discontinuidad infinita en la transición estado Superconductor-estado mixto.

4.2 Líneas de Vórtice.

El flujo a través de un filamento normal está acompañado de una corriente eléctrica que fluye alrededor del filamento en un plano normal a este, cuando dicho flujo es producido por un campo variable. La densidad de corriente a una distancia x del filamento está dada por:

$$(30) \quad \frac{dB(x)}{dx} = -\mu_0 J(x)$$

Esta ecuación muestra que la densidad de corriente, $J(x)$, así como la densidad de flujo, cae a cero a una distancia λ del filamento. De esta forma, cada filamento puede verse como el centro de un remolino o vórtice de corriente; es por esta razón que los filamentos normales en el estado mixto se conocen como líneas de vórtice. Las corrientes que rodean a las líneas de vórtice son corrientes de desplazamiento, no corrientes de conducción y por lo tanto no hay transporte neto de carga y no pueden producir corrientes persistentes dentro del material. Sin embargo, las corrientes de desplazamiento que rodean a las líneas de vórtice se parecen a las que circulan en los anillos superconductores, en cuanto a la cuantización de flujo se refiere; el flujo a través de una línea de vórtice está cuantizado, y por lo tanto sólo puede tener valores que sean múltiplos enteros de $h/2e$, la unidad de flujo (quantum).

Si consideramos a las líneas de vórtice como los centros de las corrientes que las rodean, es fácil entender el origen de las fuerzas entre ellas, pues será la misma fuerza magnética que existe entre dos bobinas paralelas o entre dos imanes paralelos; para dos líneas de

vórtice llevando el mismo flujo y separadas una distancia r , se encuentra que la fuerza repulsiva entre ambas es proporcional a $1/r^{2/3}$, si r es grande comparado con λ , pero cuando r es comparable con λ la fuerza se incrementa rápidamente volviéndose infinito para $r = 0$. Es debido a estas fuerzas de repulsión que las líneas vórtice se distribuyen uniformemente en el espécimen.

Es posible lograr que las líneas de vórtice se muevan si introducimos una corriente (de conducción) en la muestra. Si la corriente es perpendicular al campo magnético aplicado, las líneas de vórtice se moverán lateralmente como resultado de la fuerza magnética que la corriente (por producir campo magnético) ejerce sobre las líneas vórtice. Este movimiento es continuo, entrando las líneas por un lado del espécimen y saliendo por otro, significando este movimiento un disipamiento de la energía eléctrica lo cual representa una resistencia eléctrica en el espécimen. Si las líneas vórtice no pudieran moverse, las corrientes de conducción a través del espécimen podrían tomar trayectorias en la región superconductora y la resistencia continuaría siendo cero. Esto es algo que puede suceder si el espécimen tiene defectos o impurezas o si no es homogéneo en su estructura cristalina; en este caso las líneas vórtice quedan atrapadas. Este fenómeno se conoce como fijación o clavado de flujo. En este caso, para valores bajos de corriente, la fuerza también será pequeña e insignificante para vencer la fuerza de clavado de las líneas con los defectos del cristal, sin embargo, a medida que la corriente aumenta, la fuerza se vuelve suficiente para vencer las fuerzas de clavado y se empieza a observar el voltaje generado por el movimiento de las líneas vórtice, y también se observa la resistencia distinta de cero.

El clavado de flujo conduce a un comportamiento irreversible en las propiedades magnéticas del espécimen. Por ejemplo, si un campo magnético se aplica a un superconductor tipo II con defectos, y a uno sin defectos, ambos exhiben el estado mixto cuando el campo externo es lo suficientemente grande. Para la muestra sin defectos, si se disminuye el flujo magnético, regresa al estado superconduc-

tor siguiendo un proceso reversible; pero, para el espécimen con defectos, las líneas vórtice están clavadas y en consecuencia aunque el campo aplicado disminuya a cero, cierto número de líneas de vórtice permanecen en la muestra haciendo que el flujo no regrese a cero. Cierta cantidad de flujo ha quedado atrapado y el material tiene magnetización permanente. Muchas muestras tienen algunas complicaciones más como es que la curva de flujo contra campo aplicado no es uniforme sino que presenta saltos tanto en el proceso de magnetización como en el de desmagnetización. El clavado de flujo produce variaciones importantes en el comportamiento de los materiales tipo II, ya que para valores bajos de corriente en el estado mixto permite corrientes con resistencia cero y también permite magnetización permanente.

4.3 APLICACION: Imanes Permanentes.

La magnetización permanente de una muestra con defectos tipo II inmediatamente sugiere el uso de tales especímenes como imanes permanentes. El proceso de imenación es el mismo que el que se usa para producir imanes permanentes convencionales de materiales ferromagnéticos, es decir la aplicación y remoción sucesiva de un campo aplicado. En ambos casos, una medida conveniente de la calidad del imán permanente es el producto del flujo permanente del imán y el valor máximo del campo aplicado usado para formarlo. Los superconductores tipo II pueden producir imanes permanentes para los que el valor de este producto es del mismo orden de magnitud del de los mejores imanes convencionales y frecuentemente es más grande por un factor de 10.

4.4 Solenoides Superconductores.

En el diseño de electroimanes convencionales para producir campos intensos hay tres problemas, el primero consiste en la gran potencia de entrada requerida (1 megavatio para campos del orden de 8×10^6 Amp/m); el segundo es que la potencia de entrada se debe disipar en forma de calor por efecto Joule en la bobina, lo que requiere un

sistema de refrigeración adecuado y el tercero es que se produce una presión sobre el solenoide que se origina de la interacción del campo con la corriente, los conductores normales como el cobre empiezan a ceder para campos de 16×10^6 Amp/m.

Los dos primeros problemas se pueden solucionar con el empleo de solenoides superconductores, pero en este caso surge el problema de encontrar superconductores que no se vuelvan normales en campos externos intensos. Según lo que hemos visto, los materiales tipo I no servirían ya que sus campos críticos son del orden de 10^4 A/m. En los materiales de tipo II el campo H_{c1} también es bastante bajo, pero si a un material de tipo II se le ponen suficientes deformaciones, se clava el flujo, lo que permite el paso de corrientes con resistencia cero dentro del estado mixto hasta el valor H_{c2} para el campo externo que generalmente es alto para bajas temperaturas.

Se ha llegado a construir comercialmente solenoides de aleaciones de Niobio-Zirconio que producen campos arriba de 10^6 Amp/m.

4.5 Energía de Frontera.

Sabemos que cuando un sistema está en equilibrio tiene su valor más bajo de energía total. En esta sección aplicaremos este resultado para los estados mixto e intermedio en 0°K con el fin de explicar algunas de sus características. Los resultados obtenidos pueden generalizarse para temperaturas distintas de cero.

Consideremos entonces un superconductor en 0°K en la presencia de un campo magnético aplicado; dependiendo de los valores del campo aplicado, el espécimen puede estar en cualquiera de los tres estados: el Superconductor, el Intermedio o el Mixto, y el Normal. Cuando el campo aplicado es cero, $H = 0$, el estado superconductor tiene una energía más baja que la del estado intermedio (o mixto) o la del estado normal, por lo que la muestra estará en el estado superconductor de acuerdo con nuestro postulado inicial. A medida que se incrementa el campo aplicado, la energía del estado supercon-

ductor crece, debido a que necesita energía para expulsar el flujo magnético de su interior; y para un campo aplicado H_1 , la energía del estado superconductor se vuelve mayor que la del estado intermedio (o mixto), por lo que para campos mayores de H_1 el estado intermedio (o mixto) tiene la energía menor y la muestra estará en el estado intermedio (mixto). Cuando el campo aplicado alcanza un valor H_2 , es el estado normal el que tiene la menor energía y por consiguiente la muestra entra al estado normal. Este razonamiento por medio de la energía del sistema explica la existencia del estado intermedio o del mixto, ya que para un cierto rango del campo aplicado, la energía de este estado es menor que la del superconductor o el normal.

Hagamos consideraciones cuantitativas de las energías posibles para una muestra en cualquiera de los tres estados. En el estado normal, la energía total del sistema es:

$$(31) \quad E_{\text{tot}} = VE_n$$

donde E_n es la densidad de energía del estado normal y V es el volumen de la muestra. Como el estado normal es no-magnético, E_n no depende del campo aplicado, además no hay contribución magnética a la energía de la muestra en el estado normal. En el estado superconductor la energía total puede expresarse:

$$(32) \quad E_{\text{tot}}^{\text{sup}} = V(E_s + E_{s,m})$$

donde $E_{s,m}$ es la densidad de energía magnética debida a la expulsión del flujo de la muestra en el estado superconductor y E_s es la densidad de energía del estado superconductor en la ausencia de un campo magnético externo. El estado intermedio, como el mixto, es más complejo, pues aquí la muestra está dividida en regiones normales y superconductoras, por lo que habrán contribuciones a la energía total que será de tres clases, una debida a las regiones normales, otra a las regiones superconductoras y la tercera la que proviene de formar fronteras entre las regiones normales y superconductoras. Las energías de las regiones normales y de las superconductoras son las mis-

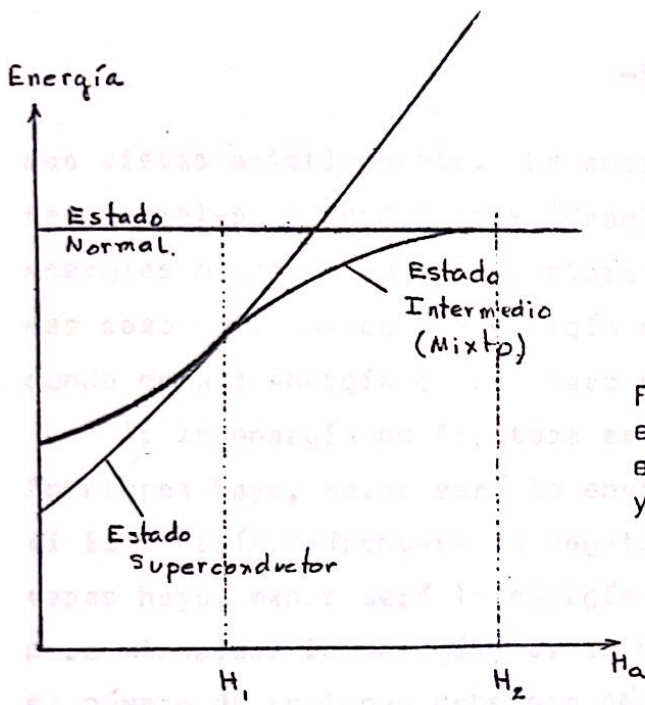


Figura 23. Energías del estado superconductor, del estado intermedio o mixto, y energía del estado normal.

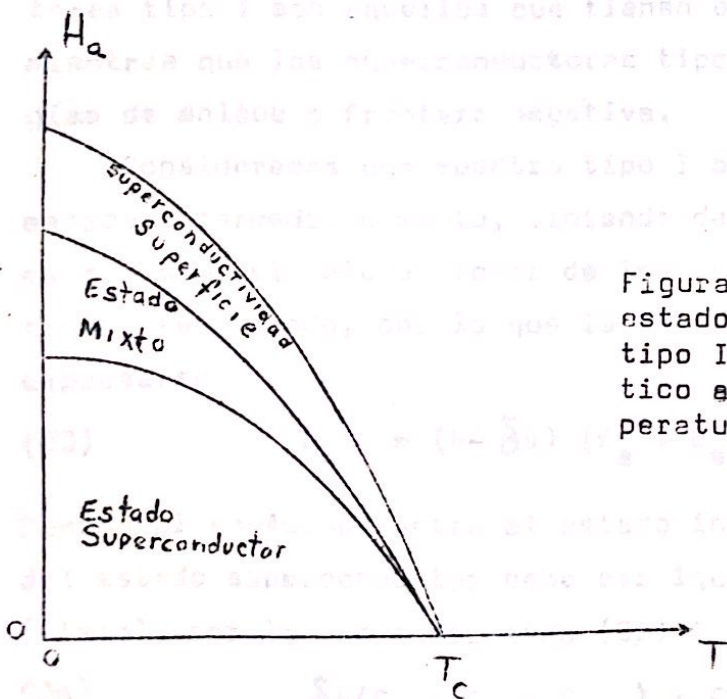


Figura 24. Dependencia de estado de un superconductor tipo II con el campo magnético aplicado y con la Temperatura.

mas vistas anteriormente. La energía que proviene de las regiones normal-superconductoras (fronteras) puede ser mayor que las energías normal y superconductoras o puede ser menor. En el primer caso hablamos de una energía de frontera positiva y en el segundo de una energía de frontera negativa.

Si la energía de frontera es positiva, entre mayor número de fronteras haya, mayor será la energía de dicho estado, y también, si la energía de frontera es negativa, entre mayor número de fronteras haya, menor será la energía total del sistema. Por lo tanto, para minimizar la energía, si la energía de frontera es positiva, el número de regiones debe ser pequeño y las regiones relativamente grandes, en cambio, si la energía de frontera es negativa, el número de regiones debe ser grande y las regiones deben ser pequeñas. Sorprendentemente, éstas son las características de los estados intermedio y mixto, por lo que podemos postular que los superconductores tipo I son aquellos que tienen energías de frontera positivas, mientras que los superconductores tipo II son los que tienen energías de enlace o frontera negativa.

Consideremos una muestra tipo I o tipo II que esté entrando al estado intermedio o mixto, viniendo del estado superconductor. En este punto, el volumen total de las regiones normales, V , es relativamente pequeño, por lo que la energía total de la muestra puede expresarse:

$$(33) \quad E_{tot} = (V - \delta V) (E_s + E_{s,m}) + \delta V E_n + \text{Energía de Frontera.}$$

Cuando el espécimen entra al estado intermedio o mixto, la energía del estado superconductor debe ser igual a la del estado intermedio (mixto), por lo que combinando (32) & (33) da:

$$(34) \quad \delta V (E_n - E_s - E_{s,m}) + \text{En. de Frontera} = 0$$

El campo crítico a 0°K está definido por:

$$(35) \quad E_n = E_s + (1/2) \mu_0 H_c^2$$

ecuación que muestra que H_c es independiente de la forma del material, siendo una característica del material; esta definición de H_c se aplica tanto a materiales de tipo I como a aquellos de tipo II. Sustituyendo (35) en (34) nos da:

$$(36) \quad E_{s,m} = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 + \frac{\text{Energía de frontera}}{\delta V}$$

1ª) Muestras Gruesas tipo I. Un espécimen tipo I trata de formar el menor número de fronteras normal-superconductor, por lo que la energía de frontera de la ec. (36) puede despreciarse, con lo que la ecuación (36) queda:

$$(37) \quad E_{s,m} = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 \quad (\text{Energía de frontera})$$

Para una esfera maciza en el estado superconductor el flujo está totalmente expulsado de ella, por lo que la esfera tendrá una energía magnética convencional: $E_{s,m} = \frac{9}{8} \mu_0 H_a^2$, donde H_a es el campo aplicado. Sustituyendo esta expresión en la ec. (37) nos da $H_a = \frac{2}{3} H_c$ para el campo aplicado al cual entra la esfera para el estado intermedio; en el caso de un cilindro paralelo, $E_{s,m} = (\frac{1}{2}) \mu_0 H_a^2$, dando en la ecuación (37) $H_a = H_c$; resultados que están de acuerdo con los datos empíricos vistos anteriormente.

2ª) Muestras Delgadas Tipo I. En este caso, la penetración del flujo dentro del espécimen es considerable; cuando está en el estado superconductor la densidad de energía magnética, $E_{s,m}$, se reduce considerablemente con respecto a un espécimen grueso. Hay también, una contribución considerable de la energía de frontera, efectos que incrementan el campo aplicado al cual aparece el estado intermedio, resultados que están de acuerdo con lo anterior.

Si la muestra no exhibe estado intermedio, se puede aplicar la ec. (37) y ésta da la condición para la transición del estado superconductor al normal. Por ejemplo, un cilindro paralelo cuyo radio $a \ll \lambda_L$, la Teoría de London da la densidad de energía magnética como de:

$$(38) \quad E_{s,m} = 16 \frac{a^2}{\lambda_L^2} \mu_0 H_a^2$$

lo que sustituido en la ecuación (37) da:

$$(39) \quad H_a = \sqrt{8 \left(\frac{\lambda L}{a}\right)} H_c$$

Esto es el "aumento del campo crítico" visto anteriormente.

3ª) Muestras Gruesas Tipo II. En este caso la energía de frontera no puede ser despreciada puesto que hay muchas regiones fronterizas. Por ejemplo, si para un cilindro paralelo sustituimos

$E_{s,m} = \frac{1}{2} \mu_0 H_a^2$ en la ec. (36) tenemos:

$$(40) \quad H_a^2 = H_c^2 + \frac{2}{\mu_0} \frac{\partial V}{\partial V} \quad (\text{Energía de frontera})$$

como la energía de frontera es en este caso negativa, la ec. (40) se satisface para H_a menor que H_c . El cilindro paralelo entrará al estado mixto a un campo aplicado menor que el campo crítico. y

Como hemos visto, las consideraciones de la energía de enlace, o frontera llevan a la existencia de los estados mixto e intermedio, a la diferencia entre ellos y a la diferenciación entre materiales Superconductores Tipo I y Superconductores Tipo II.

4.6 Superficie Superconductora.

Hemos dicho antes que algunos materiales tipo I y los materiales tipo II pueden exhibir superconductividad de Superficie. Esto ocurre únicamente si la interfase es superconductor-aislador.

Debido a que la superconductividad de superficie no ocurre en la interfase superconductor-metal, se puede prevenir con sólo rodear el superconductor con un metal. Cuando la Superficie Superconductora ocurre en los materiales tipo I, sólo ocurre para campos mayores que el campo crítico; el espécimen abandona el estado intermedio y cuando se incrementa el campo no pasa al estado normal sino que entra al estado superconductividad de superficie. Los superconductores tipo II exhiben superconductividad de superficie para campos aplicados mayores que H_{c2} por lo general, aunque parece ser que algunos materiales tipo II exhiben superconductividad de superficie en el estado mixto.

PARTE III

FUNDAMENTOS FÍSICOS DEL FENÓMENO

Un ejemplo de la variación de la superficie superconductora se puede ver en una esfera. La capa superconductora forma una envoltura para la esfera; a medida que el campo se incrementa, las regiones en los polos de la esfera empiezan a volverse normales, dejando una franja ecuatorial superficie superconductora. La franja disminuye, hasta que a un campo aplicado H_{c3} la muestra entra en el estado normal. La forma como varía la superficie superconductora con el campo aplicado para otras formas de especímenes es bastante complicada.

La superconductividad de superficie se debe a la diferencia entre una frontera superconductividad-normal y una frontera superconductor-aislador. La frontera superconductor-metal normal es esencialmente la misma que las que existen entre una región normal y una superconductora en un espécimen en el estado intermedio o mixto, por lo que dicha frontera no exhibirá superconductividad de superficie. En la frontera superconductor-aislador habrá una energía de enlace, que es la que se supone que es responsable por este fenómeno. La superficie superconductora se predijo por primera vez por St. James & de Gennes en 1963 como resultado de cálculos largos y prolongados de un superconductor en tal frontera. Cada electrón no está asociado con ningún átomo en particular sino que pertenece con el espécimen como un todo y son libres de moverse dentro del metal. Estos electrones son muy energéticos y caminan por el metal con una velocidad promedio del orden de 10^6 m/seg.

Los átomos en la muestra, por haber perdido sus electrones de valencia, serán iones positivos y están colocados en un arreglo regular en el espacio: la Red Cristalina. Esta estructura de red no es completamente estática, ya que los iones pueden tener movimientos pequeños rápidos oscilaciones. La amplitud de estas oscilaciones es menor que la distancia entre los iones. Por lo que el cuadro de un metal típico será una red de iones positivos rodeada por una nube de electrones que se mueven rápidamente entre ellos.

PARTE II: FUNDAMENTOS TEORICOS DEL FENOMENO

1. INTRODUCCION

En la primera parte dimos una descripción de las principales propiedades del estado superconductor y es en esta segunda parte donde se dará la teoría que lleva a entender dichas propiedades. Es de hacer notar que las características del estado superconductor dependen del comportamiento de los electrones y por lo tanto, nuestro tema de interés será estudiar dicho comportamiento y a partir de él poder deducir las características y los fenómenos observados en el estado superconductor.

Es conveniente empezar diciendo lo que entendemos por un metal, ya que sólo los metales son superconductores. Los sólidos se pueden clasificar de acuerdo con el comportamiento de los electrones de valencia de los átomos que lo constituyen; por ejemplo, en los cristales de Van der Waals (argón sólido) los electrones de valencia permanecen unidos a sus átomos y estos sólidos consisten de átomos neutros. En los cristales Covalentes (silicio, germanio), los átomos vecinos comparten sus electrones de valencia entre sí, dando lugar a la unión covalente. En los metales, los electrones de valencia son completamente libres de sus átomos; cada electrón no está asociado con ningún átomo en particular sino que pertenecen al espécimen como un todo y son libres de moverse dentro del metal. Estos electrones son muy energéticos y caminan por el metal con una velocidad promedio del orden de 10^6 m/seg.

Los átomos en la muestra, por haber perdido sus electrones de valencia, serán iones positivos y están colocados en un arreglo regular en el espacio: la Red Cristalina. Esta estructura de red no es completamente estática, ya que los iones pueden tener movimientos pequeños -rápidas oscilaciones-. La amplitud de estas oscilaciones es menor que la distancia entre los iones. Por lo que el cuadro de un metal típico será una red de iones positivos rodeados por una nube de electrones que se mueven rápidamente entre ellos chocando

entre sí y con los iones de la red. El mismo cuadro se aplica tanto a un metal normal, como a un metal en el estado superconductor. De esta forma las diferencias entre los dos estados proviene de las diferencias en el comportamiento dinámico de estos electrones.

En el estado normal, los electrones se mueven con un momentum lineal, p , cambiante debido a los choques, pero con la característica que ningún otro electrón en el metal en un instante dado tiene el mismo momentum que él; esto es debido a que los electrones deben satisfacer el principio de exclusión de Pauli. De acuerdo con la teoría Modelo de Electrón Libre, que explica las propiedades del estado normal, se puede asumir que las interacciones de los electrones en el estado normal son despreciables. En el estado superconductor dichas interacciones no pueden despreciarse y dos electrones pueden estar unidos por estas interacciones. El efecto de estas interacciones es acoplar dos electrones de tal forma que deben permanecer cerca uno del otro en su movimiento por el cristal. La distancia entre los electrones que constituyen un par es del orden de 10^{-6} m, y tales pares que se pueden considerar como una mini-molécula se les conoce con el nombre de Pares de Cooper.

La característica esencial de los pares de Cooper es que todos tienen el mismo momentum total en tamaño. Esto último no quiere decir que los electrones que constituyen los pares violen el principio de exclusión de Pauli, ya que si un electrón tiene un momentum p_1 y un segundo momentum p_2 , el par de Cooper formado por estos dos electrones tendrá un momentum $p_1 + p_2$; entonces si en otro par de Cooper uno de los electrones tiene un momentum $p_1' = p_1 + q$ el otro electrón del par tendrá un momentum: $p_2' = p_2 - q$, de tal forma que su momentum total será: $p_1' + p_2' = p_1 + p_2$; que es el mismo del primer par de Cooper. De esta forma todos los pares pueden tener el mismo momentum total sin que esto viole el principio de exclusión de Pauli. Se encuentra que para que un electrón le pueda ceder energía a la red, o bien, pueda interactuar con ella, (la resistencia eléctrica está causada por estas interacciones), es ne-

cesario que la velocidad del mismo sea mayor que la velocidad del sonido en el sólido; si es menor, no habrá interacción. Esto último quiere decir que si los electrones viajan a velocidades menores que la velocidad del sonido en el metal, la corriente acarreada por ellos no tendrá resistencia eléctrica. En los metales normales debido al principio de exclusión de Pauli, la fracción de electrones que llevan velocidades menores que la velocidad del sonido es apenas del 10^{-6} % del total. Sin embargo, en el estado superconductor, si la velocidad asociada a un par de Cooper es menor que la velocidad del sonido, todos los pares podrán viajar sin interactuar, por lo que la corriente acarreada por ellos no tendrá resistencia eléctrica. Esto es lo que permite explicar las principales propiedades electromagnéticas estáticas del estado superconductor, tales como resistencia cero y efecto Meissner.

Empezaremos nuestro estudio teórico del fenómeno con las consideraciones termodinámicas de la transición estado normal-estado superconductor, a fin de llegar a la diferencia de entropías de los dos estados, así como de los calores específicos. Después haremos una descripción "macroscópica" electromagnética de los superconductores, tratando de explicar el "diamagnetismo perfecto" o efecto Meissner, así como las ecuaciones de London y su profundidad de penetración, para concluir con el estado intermedio. Y por último se dará la teoría cuántica de la superconductividad más aceptada y que ha dado los mejores resultados en acuerdo con los experimentos y ha predicho fenómenos como el efecto isotópico, la Teoría BCS, desarrollada por Bardeen, Cooper y Schrieffer basada en una modificación del Hamiltoniano de Fröhlich.

2. TERMODINAMICA DE LA TRANSICION ESTADO NORMAL-SUPERCONDUCTOR

El estudio teórico de la superconductividad empieza con el estudio de la transición estado normal-estado superconductor desde el punto de vista termodinámico con W. Keesom (1924). Van Laer y Keesom demostraron experimentalmente que la transición entre el estado normal y el estado superconductor es reversible y que es completamente

análoga a una transformación de fase, como la que ocurre entre un líquido y un sólido. Principalmente es el efecto Meissner el que sugiere que la transición de estados es reversible, ya que si cuando desaparece la superconductividad se produjera efecto Joule, lo cual no ocurre, sería irreversible. Siguiendo la teoría de Gorter y Casimir, se pueden aplicar los principios termodinámicos y de esta forma se puede obtener una expresión para la diferencia de entropías entre el estado normal y el superconductor basándonos en la curva del campo crítico como una función de la temperatura.

Debido a que un superconductor se comporta como que si su susceptibilidad magnética fuera $-1/4\pi$ tenemos:

$$(1) \quad \chi = -\frac{1}{4\pi} = \frac{M}{H} \quad ; \quad \text{por lo que: } M = -\frac{H}{4\pi}$$

La densidad de energía interna en presencia de un campo magnético H está dada por:

$$(2) \quad dU = TdS + HdM$$

donde M es la magnetización de la muestra y se han hecho las sustituciones p por $-H$ y V por M en la ecuación fundamental $dU = TdS - pdV$ recordando las sustituciones anteriores y sabiendo que la energía libre de Gibbs por unidad de volumen es:

$$(3) \quad G = U - TS + pV$$

nos da:

$$(4) \quad G = U - TS - HM$$

por lo que:

$$dG = dU - TdS - SdT - HdM - MdH$$

sustituyendo (2) :

$$dG = TdS + HdM - TdS - SdT - HdM - MdH$$

$$(4') \quad dG = -SdT - MdH$$

integrando la ecuación anterior a $T = \text{constante}$ y sustituyendo M de la ec. (1):

$$dG = + \frac{H}{4\pi} dH \text{ por lo que } G_s(H) - G_s(0) = \frac{H^2}{8\pi}$$

y finalmente:

$$(5) \quad G_s(H) = G_s(0) + \frac{H^2}{8\pi}$$

Las energías libres de Gibbs en las dos fases en equilibrio deben ser iguales manteniendo T , p & H constantes por lo que en la curva de H_c en donde los estado normal y superconductor están en equilibrio tenemos:

$$(6) \quad G_n = G_s(0) + \frac{H^2}{8\pi}$$

donde los subíndices n & s indican la energía libre de Gibbs en el estado normal y en el estado superconductor respectivamente. La energía libre de Gibbs resulta ser en el estado normal independiente de el campo magnético aplicado.

De la ecuación (4') tenemos que: $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_H = -S$ por lo que:

$$(7) \quad S_n = S_s + \left(-\frac{Hc}{4\pi} \frac{dHc}{dT}\right)$$

$$S_n - S_s = -\frac{Hc}{4\pi} \frac{dHc}{dT}$$

Donde S_s está tomada en campo cero. Como dHc/dT es siempre negativo, S_n siempre será mayor que S_s lo que indica que el estado superconductor es más ordenado que el estado normal. La diferencia de calores específicos está dada por:

$$\Delta C = C_s - C_n = T \frac{d}{dT}(S_s - S_n) = \frac{THc}{4\pi} \frac{d^2Hc}{dT^2} + \frac{T}{4\pi} \left(\frac{dHc}{dT}\right)^2$$

para $T = T_c$ & $H_c = 0$ tenemos la fórmula de Rutgers:

$$(8) \quad \Delta C = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{dHc}{dT}\right)^2$$

relación que está de acuerdo con los resultado experimentales:

Sustancia	T_c ($^{\circ}K$)	$(dH_c/dT)_{T = T_c}$	Δc (calculado)	Δc (obs.)
Estaño	3.69	151.2	0.00229	0.0024
Talio	2.38	137.4	0.00144	0.00148

Se puede notar de la ec. (7) que a la temperatura crítica, donde $H_c = 0$ no existe calor latente de transición, pero según la ec. (8), existe una discontinuidad en el calor específico por lo que la transición de fase es de segundo orden. Cuando la transición toma lugar en presencia de un campo magnético, va acompañada de calor latente de transición dado por:

$$(9) \quad L = T(S_n - S_s)$$

Cuando $T \rightarrow 0$, la tercera ley de la termodinámica dice que $S_n - S_s \rightarrow 0$; el calor latente también desaparece cuando $T \rightarrow 0$. Además, la ecuación (7) implica que cuando $T \rightarrow 0$, $(dH/dT) \rightarrow 0$, lo que quiere decir que la curva de transición (fig. 15 & 24) deben empezar a $T = 0$ con tangente o pendiente cero, en perfecto acuerdo con los experimentos.

3. TEORIA ELECTROMAGNETICA DE LONDON DE LA SUPERCONDUCTIVIDAD

3.1 Ecuaciones de London.

La teoría de London es una extensión de las ecuaciones de Maxwell para que describan los fenómenos electromagnéticos de la superconductividad, principalmente el efecto Meissner y la resistencia cero.

La conductividad infinita (resistencia cero) y el efecto Meissner (campo magnético cero dentro de la muestra) son dos propiedades aisladas en el sentido de que la conductividad infinita no implica necesariamente que el campo sea cero dentro del espécimen, y también que el campo magnético sea cero, o que el material se comporte como per-

fectamente diamagnético no puede deducirse de esto que la resistencia de la muestra sea cero.

La hipótesis de conductividad cero conduce a la ecuación:

$$eE = F_{\text{res}} = ma = m\dot{v}$$

como $j = nev$; $n = \text{núm. de electrones/m}^3$

$$E = \frac{m\dot{v}}{e} = \frac{m}{e} \frac{d}{dt} \left(\frac{j}{ne} \right) = \frac{m}{ne^2} \frac{dj}{dt}$$

$$E = \frac{m}{ne^2} \frac{dj}{dt}$$

tomando rotacional a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\nabla \times E = \nabla \times \left(\frac{m}{ne^2} \frac{dj}{dt} \right) = \frac{m}{ne^2} \nabla \times \left(\frac{dj}{dt} \right)$$

además:

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{m}{ne^2} \nabla \times \left(\frac{dj}{dt} \right)$$

$$(10) \quad -\frac{1}{c} \dot{H} = \frac{m}{ne^2} \nabla \times \left(\frac{dj}{dt} \right)$$

pero por otra parte:

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} j$$

$$\nabla \times \nabla \times H = \frac{4\pi}{c} \nabla \times j$$

$$(11) \quad \nabla \times \nabla \times \dot{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \left(\frac{dj}{dt} \right)$$

sustituyendo (11) en (10):

$$(12) \quad -\frac{1}{c} \dot{H} = \frac{mc}{4\pi ne^2} \nabla \times \nabla \times \dot{H}$$

y recordando que:

$$(13) \quad \nabla \times \nabla \times \dot{H} = \nabla (\nabla \cdot \dot{H}) - \nabla^2 \dot{H}$$

tenemos:

$$(14) \quad \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \nabla^2 \dot{H} = \dot{H}$$

e integrando con respecto al tiempo obtenemos:

$$(15) \quad \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \nabla^2 (H - H_0) = H - H_0$$

El resultado de la ec. (15) admite la solución $H = H_0$, donde H_0 es un campo arbitrario en el tiempo $t=0$. Sabemos que según el efecto Meissner no podemos tener campos "congelados", por lo que la ec. (15) tiene más soluciones que las físicamente posibles.

F. London y H. London sugieren que se abandone la ecuación de movimiento como punto de partida y que en su lugar se tome la ecuación:

$$(16) \quad \frac{mc}{ne^2} \nabla \times j = -H$$

que debe reemplazar la ley de Ohm en los superconductores. Tomando rotacionales a la ecuación:

$$\frac{4\pi}{c} j = \nabla \times H$$

tenemos:

$$\frac{4\pi}{c} \nabla \times j = \nabla \times \nabla \times H = -\nabla^2 H$$

y sustituyendo (16) en la ecuación anterior da:

$$\nabla^2 H = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} H$$

$$(17) \quad \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \nabla^2 H = H$$

La ecuación (17) no admite necesariamente la solución $H = H_0$. Si incluimos la corriente de desplazamiento tenemos:

$$(18) \quad \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \left[\nabla^2 H - \frac{1}{c^2} \ddot{H} \right] = H$$

La ecuación de movimiento y la ecuación (16) cuando se aplican a los electrones de conducción se conocen con el nombre de ecuaciones de London y se utilizan ampliamente con un éxito considerable en las descripciones macroscópicas electrodinámicas de los superconductores. El tratamiento termodinámico es consistente con las ecuaciones de London, según lo demostrado por London.

3.2 Superconductividad a altas frecuencias.

Supongamos que los efectos de alta frecuencia pueden describirse considerando la corriente $j = j_n + j_s$, como la suma de una corriente normal y una superconductor. Como:

$$j_n = \sigma E$$

tenemos de la Ley de Ampere:

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} (j_n + j_s) + \frac{1}{c} \dot{E}$$

$$c \nabla \times H = 4\pi (\sigma E + j_s) + \dot{E}$$

$$c \nabla \times \nabla \times H = 4\pi \sigma \nabla \times E + 4\pi \nabla \times j_s + \nabla \times \dot{E}$$

y sustituyendo de la ec. (16):

$$\frac{mc}{ne^2} \nabla \times j = -H$$

por lo que: $-c \nabla^2 H = -\frac{4\pi \sigma}{c} \dot{H} - \frac{4\pi ne^2}{mc} H + \frac{d}{dt} \nabla \times E$

$$(19) \quad \nabla^2 H = \frac{4\pi \sigma}{c^2} \dot{H} + \frac{4\pi ne^2}{mc^2} H + \frac{\ddot{H}}{c^2}$$

ecuación diferencial con solución:

$$(20) \quad H = \zeta e^{-i(\omega t - k \cdot r)}$$

que sustituyéndola en la ec. (19) nos da:

$$(21) \quad k^2 c^2 = 4\pi \sigma \omega i - \frac{4\pi ne^2}{m} + \omega^2$$

los términos del segundo miembro de la ec. (21) representan los efectos de película, la profundidad de penetración en una muestra superconductor y la corriente de desplazamiento respectivamente. Esta relación determina las características de propagación del medio. En el límite de baja frecuencias podemos despreñar los términos en ω por lo que:

$$k \approx i (4\pi ne^2/mc^2)^{1/2}$$

lo que significa un rápido decaimiento en la penetración del campo magnético, lo que hace que H se reduzca por un factor e^{-1} a la profundidad:

$$\lambda_L = (mc^2/4\pi ne^2)^{1/2} \quad (\text{profundidad de penetración de London})$$

Si tomamos n del orden de 10^{23} elec/cm³ como para un metal normal, tendremos que λ_L es del orden de 10^{-5} cm. Así, para bajas frecuencias la penetración del campo magnético en un superconductor viene limitada por las propiedades superconductoras de la sustancia caracterizada por (m/ne^2) .

A frecuencia del infrarrojo, tomando σ del orden de 10^{20} ues (como para los metales normales a bajas temperaturas) y con ω del orden de 10^{13} seg⁻¹ tenemos para la expresión (21):

$$c^2 k^2 \approx 10^{34} i - 10^{32} + 10^{26}$$

por lo que el término dominante será el primero (el de las corrientes en remolino), por lo que en esta región:

$$k \approx i^{1/2} (4\pi \sigma \omega / c^2)^{1/2}$$

que es el resultado conocido.

Las propiedades superconductoras del material pueden manifestarse únicamente por la variación del número de electrones de conducción normal que intervienen en el valor de la conductividad (σ). A altas frecuencias, $h\omega \gg kT_c$, por lo que probablemente los electrones son expulsados de sus niveles de energía en el estado superconductor por radiación y esto explicaría el comportamiento normal de los superconductores en lo que respecta a la reflexión de radiación infrarroja. La transición entre el comportamiento superconductor y el normal tiene lugar cuando el segundo y tercer término son iguales entre sí, pues el primer término es despreciable en el intervalo de validez de la teoría de la conductividad.

Se observa que la transición tiene lugar cuando el espesor de película para corrientes de torbellino es igual a la profundidad de penetración de London. Esta transición tiene lugar cuando ω es del orden de 10^{11} seg^{-1} (10^{10} hertz) que está situada en la región de ondas ultracortas de acuerdo con las experiencias. La frecuencia crítica viene dada por:

$$(22) \quad \omega_c = \frac{ne^2}{\sigma_m} = \frac{m}{n_n e^2 \mathcal{T}} \cdot \frac{n_s e^2}{m} = \frac{1}{\mathcal{T}} \cdot \frac{n_s}{n_n}$$

expresión en la cual n_n es la densidad de electrones en el estado normal, n_s es la densidad de electrones en el estado superconductor & \mathcal{T} es el tiempo de relajación de los electrones normales (calculado según la teoría ordinaria de conductividad). Se introduce por medio de la relación:

$$(23) \quad \mathcal{T} = ne^2 \mathcal{T} / m$$

Se ha investigado con microondas el comportamiento de los superconductores con el fin de comprobar la teoría anterior; obteniéndose el resultado que la teoría describe los fenómenos observados en conjunto. Según Pippard, un estudio y examen cuidadoso revela que las ecuaciones de London deben generalizarse. Se ha demostrado también que la dependencia de (ne^2/m) con la intensidad del campo es muy débil, de modo que la ec. (17) es aproximadamente lineal con H.

3.3 Estado Intermedio y Estructura de Regiones.

Si aplicamos la ecuación de continuidad para la componente tangencial del campo magnético H a través del límite en el plano ecuatorial de una esfera tenemos:

$$H_i = H_{ext} \quad (\text{en el ecuador})$$

pero,

$$H_i = H - \frac{4\pi}{3} M$$

además para una esfera tenemos:

$$M = -\frac{3}{8\pi} H$$

por lo que:

$$H_i = \frac{3}{2} H \quad \chi = \frac{3}{4\pi} \left(1 - \frac{H_c}{H}\right)$$

Si consideramos el diagrama de campo de un dipolo, resulta que el valor máximo de la componente tangencial del campo externo está en el plano ecuatorial y según la ecuación anterior posee un campo 1.5 veces mayor que el valor del campo aplicado. El campo H_i excederá el valor del campo crítico H_c determinado a partir de medidas realizadas sobre un alambre largo en un campo coaxial, cuando:

$$H > \frac{2}{3} H_c$$

en este caso podemos evitar que toda la esfera vuelva al estado normal si admitimos que esta modificación tiene lugar en el material próximo al plano ecuatorial. La forma efectiva del material superconductor será la de un elipsoide, y por lo tanto se reduce el campo en su interior. La muestra en la región comprendida entre las regiones normales y superconductoras estará al campo H_c , pero el material exterior al límite, como la superficie de la esfera, estará a un campo inferior a H_c y será de nuevo superconductor. De esta forma sólo se puede obtener un estado estable si se divide la esfera en muchas regiones pequeñas (dominios) que sean alternativamente normales y superconductores.

Se puede estudiar el efecto de la estructura de dominios sobre la susceptibilidad magnética de una esfera en la región en que las intensidades de campo son $\frac{2}{3} H_c < H < H_c$; la idea de un estado intermedio ficticio introducido por Peierls y London para describir las propiedades de la mezcla de dominios normales y superconductores ayuda a la comprensión del fenómeno. El conjunto puede caracterizarse por los valores medios:

minimo $H_i = H_c$ & $B_i \neq 0$ cuando el hecho para una esfera, pero cuando el factor de desmagnetización de 2π cuando la magnetización toma un valor tal que:

$$H_c = H - \frac{4\pi}{3} M$$

por lo que para $\frac{2}{3} H_c < H < H_c$: $\chi = \frac{3}{4\pi} \left(1 - \frac{H_c}{H}\right)$.

4. Esta última expresión es igual a $-(3/8\pi)$ para $H = \frac{2}{3} H_c$ y vale cero para $H = H_c$. Como la magnetización es una función lineal de H :

$$M = \frac{3}{4\pi} (H - H_c) \quad \left(\frac{2}{3} H_c < H < H_c\right)$$

de acuerdo con las medidas realizadas con esferas.

La naturaleza y dimensiones de la estructura de dominios en superconductores han sido estudiadas por Landau quien encuentra que es necesario tener una estructura ramificada bastante compleja para satisfacer las condiciones de frontera en el interior de un metal. Un estado con numerosas regiones delgadas es favorable desde el punto de vista de la teoría de desmagnetización, pero posee una importante superficie de transición entre las fases normal y superconductora. La densidad de energía superficial es del orden de:

$$\sigma \sim \frac{1}{8} H_c^2 \lambda_L \quad ; \quad \lambda_L = \text{profundidad de penetración.}$$

La existencia de una estructura de dominios tiene varias consecuencias que han sido confirmadas experimentalmente. La observación directa por medio de una sonda de bismuto en la abertura entre dos hemisferios superconductores en el estado intermedio ha sido realizada por Meshkovsky y Shalnikov. En su experimento encontraron grandes picos en la intensidad de H lo que sugiere una estructura laminar de dominios. Estos dominios también pueden ser observados por los otros métodos de graficar el campo.

En el caso de un alambre superconductor de sección circular con el campo transversal, la condición crítica para la formación de do-

minios se hace mediante un análisis semejante al hecho para una esfera, pero usando un factor de desmagnetización de 2π cuando $H > \frac{1}{2} H_c$. La presencia de capas del material normales sugiere que la resistencia deja de ser cero cuando H excede a $\frac{1}{2} H_c$ como ha sido observado, por Desirant, Schoenberg y Andrew.

4. TEORIA CUANTICA DE LA SUPERCONDUCTIVIDAD

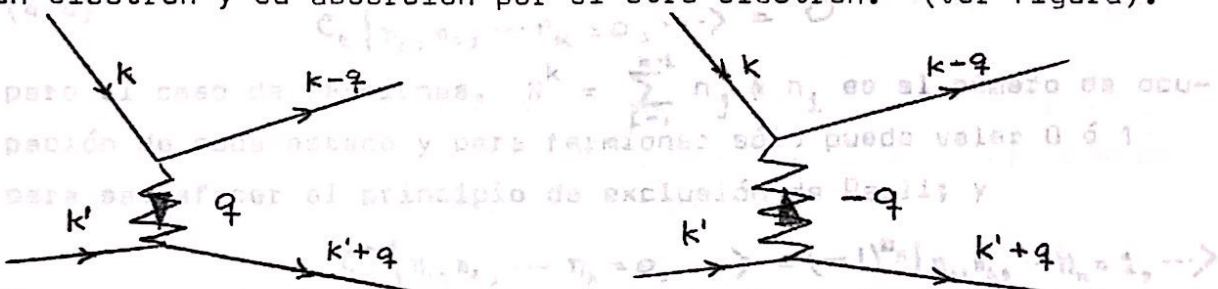
Entre los trabajos que se han hecho para dar una explicación cuántica de la superconductividad se pueden mencionar los trabajos de Heisenberg, Tisza, Born & Cheng, Fröhlich y Bardeen. Todas las teorías anteriores son complicadas y tienen varias dificultades. Sin embargo, la teoría BCS de J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer basada en una modificación de la de Fröhlich ha sido la más exitosa en explicar los diversos fenómenos de la superconductividad, así como es la más simple que tiene en cuenta las interacciones entre los electrones y la red que, con el descubrimiento del efecto isotópico, son la base para aparear dos electrones en un par de Cooper.

4.1. El Hamiltoniano BCS.

La existencia bastante obvia de la transición de fase involucrada en la superconductividad lleva a una larga búsqueda de un mecanismo que puede conducir a una interacción atractiva entre electrones. El descubrimiento del efecto isotópico dio la evidencia suficiente de que la interacción electrón-fonón era de hecho el mecanismo responsable de tal interacción. La dependencia de la temperatura crítica con la masa M del núcleo en el efecto isotópico se encontró que en los primeros metales era $T_c \propto M^{1/2}$ y por consiguiente era proporcional a la temperatura de Debye; sin embargo, más recientes investigaciones han dado una gran variedad de potencias variando desde una ausencia total en algunos elementos como el Osmio, hasta una dependencia de aproximadamente $T_c \propto M^2$ en uranio-alfa.

Generalmente los electrones libres se repelen por medio de la interacción de Coulomb (fuerzas de Coulomb), pero esta interacción se reduce considerablemente a grandes distancias por el efecto de pantalla de los demás electrones.

(4.2) En una red cristalina este aspecto varía un poco, ya que un electrón tiende a atraer los iones positivos que lo rodean, por lo que la red en la región que rodea al electrón será un poco más densa de lo que es normalmente. Si otro electrón viaja en los alrededores de la región que rodea al primer electrón, será atraído hacia dicha región; realmente, parecería que los dos electrones se atraerán. Las dos partículas se atraerán con una fuerza que se puede calcular más fácilmente si consideramos la interacción como la emisión de un fonón virtual por un electrón y su absorción por el otro electrón. (Ver figura).



El proceso anterior toma lugar cuando un electrón en el estado k emite un fonón de momentum q y es dispersado al estado $k - q$. Un electrón en el estado k' absorbe este fonón y es desviado al estado $k' + q$. En la teoría de perturbaciones de segundo orden este transición se representa por un elemento matricial de la forma:

$$(4.1) \quad \langle k - q, k' + q | V | k, k' \rangle = \frac{M_{k, k-q} M_{k', k'+q}^*}{\hbar \omega_{k-q} - \hbar \omega_q}$$

Otro proceso que puede producir el mismo efecto es la emisión de un fonón por el electrón en el estado k' de momentum $-q$ y la absorción de este fonón por el electrón en el estado k , con lo que de nuevo el electrón en el estado k pasa al estado $k - q$ y el

electrón en el estado k' pasa al estado $k'+q$. Este proceso nos lleva a la misma expresión anterior con ligeras variaciones en el denominador que, combinadas nos llevan al resultado:

$$(4.2) \quad \langle k-q, k'+q | V | k', k \rangle = \frac{|2|M_{k, k-q}|^2 \hbar \omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{k-q})^2 - (\hbar \omega_q)^2} = 2 W_{kk'q}$$

Por lo tanto, podemos expresar el potencial de interacción como:

$$(4.3) \quad V \equiv \frac{1}{2} \sum_{k, k', q} 2 W_{kk'q} c_{k'+q}^+ c_{k-q}^+ c_k c_{k'} = \sum_{k, k', q} W_{kk'q} c_{k'+q}^+ c_{k-q}^+ c_k c_{k'}$$

donde los operadores c_k y c_k^+ son los operadores de aniquilación y creación según los términos de la segunda cuantización y están definidos como:

$$(4.4) \quad c_k |n_1, n_2, \dots, n_k=1, \dots\rangle = (-1)^{N_k} |n_1, n_2, \dots, n_k=0, \dots\rangle$$

$$c_k |n_1, n_2, \dots, n_k=0, \dots\rangle = 0$$

para el caso de fermiones. $N^k = \sum_{j=1}^{k-1} n_j$ & n_i es el número de ocupación de cada estado y para fermiones sólo puede valer 0 ó 1 para satisfacer el principio de exclusión de Pauli; y

$$(4.5) \quad c_k^+ |n_1, n_2, \dots, n_k=0, \dots\rangle = (-1)^{N_k} |n_1, n_2, \dots, n_k=1, \dots\rangle$$

$$c_k^+ |n_1, n_2, \dots, n_k=1, \dots\rangle = 0$$

La interpretación de los operadores de creación y aniquilación es: los operadores de creación crean una partícula en el estado k y los de aniquilación destruyen una partícula en el estado k .

Los operadores $c_k^+ c_k$ se pueden identificar como los operadores de "número" y representan el número de partículas en el estado k :

$$c_k^+ c_k = n_k$$

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad c_k^+ c_k |n_1, n_2, \dots, n_k=1, \dots\rangle &= c_k^+ (-1)^{N_k} |n_1, n_2, \dots, n_k=0, \dots\rangle \\
 &= (-1)^{N_k} (-1)^{N_k} |n_1, n_2, \dots, n_k=1, \dots\rangle \\
 &= 1 |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle
 \end{aligned}$$

para el caso de fermiones.

Por lo anterior, el producto de los cuatro operadores de creación y aniquilación de la expresión (4.3) se puede interpretar como la destrucción de dos electrones en los estados k' & k y la creación de dos electrones en los estados $k' + q$ & $k - q$.

Se puede notar de las expresiones (4.2) & (4.3) que si:

$$(4.7) \quad |\bar{E}_k - \bar{E}_{k-q}| < \hbar \omega_q$$

lo cual ocurre en un intervalo pequeño de energías, entonces la interacción es negativa, lo que da lugar a una atracción neta entre los electrones.

Esta es la aproximación que hace Fröhlich en su hamiltoniano, por lo que tomaremos este hamiltoniano como un modelo simple de un sistema que puede exhibir superconductividad.

Escribamos la transformación canónica con:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_e$$

en la forma:

$$\mathcal{H}' = e^{-S} \mathcal{H} e^S$$

$$(4.8) \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}_0 + \sum_{k,s,k',s',q} W_{kk'q} c_{k'+q,s'}^+ c_{k-q,s'}^+ c_{k,s} c_{k',s'}$$

donde \mathcal{H}_0 es el hamiltoniano del sistema en el estado normal y

$W_{kk'q}$ es un elemento matricial de la forma:

$$(4.9) \quad W_{kk'q} = \frac{|M_q|^2 \hbar \omega_q}{(\bar{E}_k - \bar{E}_{k-q})^2 - (\hbar \omega_q)^2}$$

El spin s de los electrones también se ha incluido explícitamente en este hamiltoniano transformado. Como esta interacción representa una fuerza atractiva entre electrones no nos es útil la teoría de Perturbaciones para encontrar los eigenestados de un hamiltoniano como el (4.8). Regresamos a una aproximación variacional en la cual hacemos una predicción sobre la forma que tendrá la función de onda correcta $|\Psi\rangle$ y luego la acomodamos hasta que el valor de expectación $\langle\Psi|\mathcal{H}|\Psi\rangle$ se minimiza. Esta es la aproximación que Bardeen, Cooper y Schrieffer tomaron originalmente y es como aparece en su papel de 1957. En lugar de este camino tomaremos otro ligeramente diferente para obtener el mismo resultado. El punto de partida de la teoría de Bogoliubov del átomo de Helio es asumir la existencia de una condensación de partículas con momentum cero. (Nosotros usaremos el camino de la teoría de Bogoliubov). Esto conduce al Hamiltoniano aproximado:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} N^2 V_0 + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger})$$

en el cual las interacciones que tienen lugar envuelven el scattering de partículas de momentum igual pero opuesto. Podemos considerar el sistema de electrones superconductores como si estuviera en una especie de fase condensada y de esta forma es razonable hacer la hipótesis que en el problema de la superconductividad el scattering de pares de electrones que tienen momentum igual y opuesto es sumamente importante. De acuerdo con la discusión anterior de la interacción expresada por la ec. (4.8) sólo retendremos aquellos términos para los cuales $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$, lo que nos conduce el hamiltoniano reducido:

$$(4.10) \quad \mathcal{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}s}^{\dagger} c_{\mathbf{k}s} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}s}^{\dagger} c_{\mathbf{k}'s}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}s} c_{-\mathbf{k}'s}$$

donde el primer término $\sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}s}^{\dagger} c_{\mathbf{k}s}$ es la energía cinética y el segundo término representa la interacción superconductora de los electrones. Según la anotación (4.9):

$$V_{kk'} = -2 W_{-kkk'-k'} - U_{kk'}$$

con $U_{kk'}$, un término de repulsión de Coulomb que agregaremos al hamiltoniano de Fröhlich. Un valor positivo de $V_{kk'}$, corresponde a una interacción atractiva neta entre electrones. Otra pregunta que debemos preguntarnos antes de diagonalizar el hamiltoniano BCS es respecto a los espines de los electrones, se deben aparear electrones de igual spin ($s = s'$) o de spin opuesto? La respuesta es que para minimizar el estado fundamental de energía se deben aparear electrones de spin opuesto. Con estas hipótesis se puede efectuar la suma sobre s en la ec. (4.10) puesto que:

$$\begin{aligned} \sum_s c_{k's}^+ c_{-k's}^+ c_{-ks} c_{ks'} &= c_{k'\downarrow}^+ c_{-k'\uparrow}^+ c_{-k\uparrow} c_{k\downarrow} + c_{k'\uparrow}^+ c_{-k'\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \\ &= c_{k'\downarrow}^+ c_{-k'\uparrow}^+ c_{-k\uparrow} c_{k\downarrow} + c_{k'\downarrow}^+ c_{-k'\uparrow}^+ c_{k\uparrow} c_{k\downarrow} \end{aligned}$$

y $V_{kk'} = V_{-k,-k'}$; por lo que la suma sobre s nos da un factor de 2. Esto permite abreviar la notación de la ec. (4.10) si adoptamos la convención que un operador escrito con signo (-) en el subíndice se refiere a un estado con spin hacia abajo y un operador sin signo se refiere a un estado con spin hacia arriba:

$$c_{k'}^+ \equiv c_{k'\uparrow}^+ ; c_{-k'}^+ \equiv c_{-k'\downarrow}^+ ; \text{etc.}$$

por lo tanto tenemos:

$$(4.11) \quad \mathcal{H}_{BCS} = \sum_k \xi_k (c_k^+ c_k + c_{-k}^+ c_{-k}) - \sum_{k,k'} V_{kk'} c_{k'}^+ c_{-k'}^+ c_{-k} c_k$$

Este es el modelo del hamiltoniano de Bardeen, Cooper y Schrieffer del cual se deben explorar los eigen-estados y eigen-valores.

4.2 La Transformación Bogoliubov-Valatin.

En la teoría Bogoliubov del Helio se encuentra que es posible diagonalizar un hamiltoniano que contiene términos de scattering como $a_k^+ a_{-k}^+$ por medio de una transformación a nuevos operado-

res:

$$\alpha_k = (\cosh \theta_k) a_k - (\sinh \theta_k) a_k^\dagger$$

Las α_k y sus conjugadas α_k^\dagger se encuentra que tienen las mismas relaciones de conmutación de los operadores de bosones, y esto permite una solución exacta del hamiltoniano modelo. Esto nos sugiere tratar una transformación similar para el problema de fermiones del hamiltoniano BCS y con este fin definimos dos nuevos operadores:

$$(4.12) \quad \gamma_k = u_k c_k - v_k c_{-k}^\dagger \quad ; \quad \gamma_{-k} = u_k c_{-k} + v_k c_k^\dagger$$

cuyas conjugadas son:

$$(4.13) \quad \gamma_k^\dagger = u_k c_k^\dagger - v_k c_{-k} \quad ; \quad \gamma_{-k}^\dagger = u_k c_{-k}^\dagger + v_k c_k$$

donde las constantes u_k & v_k se escogen de tal forma que sean reales positivas y que obedezcan la condición:

$$u_k^2 + v_k^2 = 1$$

para que los nuevos operadores tengan las relaciones de anticonmutación de los fermiones:

$$[\gamma_k, \gamma_{k'}] = [\gamma_k, \gamma_{-k'}] = [\gamma_k^\dagger, \gamma_{-k'}^\dagger] = 0$$

$$[\gamma_k^\dagger, \gamma_{k'}] = [\gamma_k^\dagger, \gamma_{-k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

Las ecuaciones de definición de γ comprenden la Transformación Bogoliubov-Valatin, la cual nos permite escribir el hamiltoniano BCS en términos de nuevos operadores. No esperamos poder diagonalizar \mathcal{H}_{BCS} completamente, ya que este hamiltoniano tiene términos con productos de cuatro operadores de electrones, y es intrínsecamente más difícil que el de Bogoliubov; sin embargo, esperamos que una selección adecuada de u_k & v_k nos permitan eliminar los términos más difíciles. Re-escribiremos el hamiltoniano BCS primeramente haciendo las transformaciones inversas para las γ & c :

$$(4.14) \quad c_k = u_k \gamma_k + v_k \gamma_{-k}^\dagger \quad ; \quad c_{-k} = u_k \gamma_{-k} - v_k \gamma_k^\dagger$$

$$(4.15) \quad c_k^+ = u_k \gamma_k^+ + v_k \gamma_{-k}^- \quad ; \quad c_{-k}^+ = u_k \gamma_{-k}^+ - v_k \gamma_k^-$$

La primera parte de la ec. (4.11) representa la energía cinética \mathcal{H}_T y haciendo la sustitución de las ecuaciones (4.14) & (4.15) está dada por:

$$\mathcal{H}_T = \sum_k \mathcal{E}_k \left[u_k^2 \gamma_k^+ \gamma_k^- + v_k^2 \gamma_{-k}^- \gamma_{-k}^+ + u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k}^- \gamma_k^-) + v_k^2 \gamma_k^- \gamma_k^+ + u_k^2 \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}^- - u_k v_k (\gamma_{-k}^+ \gamma_k^+ + \gamma_k^- \gamma_{-k}^-) \right]$$

Las partes diagonales de esta expresión pueden simplificarse usando las relaciones de anticomutación de las γ y definiendo un nuevo par de operadores de número:

$$m_k = \gamma_k^+ \gamma_k^- \quad ; \quad m_{-k} = \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}^-$$

con lo que:

$$(4.16) \quad \mathcal{H}_T = \sum_k \mathcal{E}_k \left[2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(m_k + m_{-k}) + 2u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k}^- \gamma_k^-) \right]$$

Notamos en la expresión (4.16) tres tipos de términos, un constante, un término en los operadores de número m_k & m_{-k} , y los términos fuera de la diagonal que contienen el producto $\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+$ o $\gamma_{-k}^- \gamma_k^-$. La energía potencial está dada por la segunda parte del hamiltoniano BCS y nos lleva a la expresión más complicada:

$$(4.17) \quad \mathcal{H}_V = - \sum_{k,k'} V_{kk'} (u_{k'} \gamma_{k'}^+ + v_{k'} \gamma_{-k'}^-) (u_k \gamma_{-k}^+ - v_k \gamma_k^-) \times (u_k \gamma_{-k}^- - v_k \gamma_k^+) (u_{k'} \gamma_{k'}^- + v_{k'} \gamma_{-k'}^+)$$

$$= - \sum_{k,k'} V_{kk'} \left[u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (1 - m_k - m_{-k}) + u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{-k}^- \gamma_k^- + \gamma_k^+ \gamma_{-k}^+) \right]$$

+ (términos de cuarto orden fuera de la diagonal).

Argumentamos ahora que si podemos eliminar los términos fuera de la diagonal por medio de que los de la ec. (4.16) se cancelen con los de la (4.17) entonces tendremos el hamiltoniano de un sistema de fermiones independientes. Asumimos primero que el estado del sistema de menor energía tiene todos los números de ocupación m_k & m_{-k} igual a cero, lo que puede ser verificado en un paso posterior del cálculo. Para encontrar la forma de la transformación Bogoliubov-Valatin que es apropiada para un superconductor en su estado fundamental hacemos que todos los m_k & m_{-k} desaparezcan en las ec. (4.16) y (4.17) y estipulamos que la suma de los términos no diagonales también se cancela, por lo que encontramos:

$$(4.18) \quad \sum_k 2 \xi_k u_k v_k (\delta_k^\dagger \delta_{-k}^\dagger + \delta_{-k} \delta_k) - \sum_{k, k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (u_k^2 - v_k^2) (\delta_k^\dagger \delta_{-k'}^\dagger + \delta_{-k'} \delta_k) + (\text{términos de cuarto orden}) = 0$$

Si hacemos la aproximación de que los términos de cuarto orden pueden despreciarse, esto nos reduce la ec. (4.18) a

$$(4.19) \quad 2 \xi_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = 0$$

Ya que u_k & v_k están relacionadas por $u_k^2 + v_k^2 = 1$, por lo que no son independientes, se vuelve conveniente expresarlas en términos de una sola variable x_k definida por:

$$(4.20) \quad u_k = \left(\frac{1}{2} - \chi_k\right)^{1/2} \quad ; \quad v_k = \left(\frac{1}{2} + \chi_k\right)^{1/2}$$

por lo que la ec. (4.19) queda:

$$(4.21) \quad 2 \xi_k \left(\frac{1}{4} - \chi_k^2\right)^{1/2} + 2 \chi_k \sum_{k'} V_{kk'} \left(\frac{1}{4} - \chi_{k'}^2\right)^{1/2} = 0$$

Definamos la cantidad Δ_k por:

$$(4.22) \quad \Delta_k = \sum_{k'} V_{kk'} \left(\frac{1}{4} - \chi_{k'}^2\right)^{1/2}$$

con lo que la ec. (4.21) nos da el resultado:

$$(4.23) \quad \chi_k = \pm \frac{\xi_k}{2(\xi_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}}$$

y sustituyendo esta expresión en (4.22) nos da una ecuación integral para Δ_k de la forma:

$$(4.24) \quad \Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{(\xi_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}}$$

Si $V_{kk'}$ es conocido, entonces esta ecuación puede ser resuelta y sustituida en la ec. (4.23) nos da x_k . Con esto notamos que el cero de la energía de los electrones debe tomarse como que si fuera el potencial químico μ , si el número total de electrones permanece constante. Para esto notamos que:

$$N = \sum_k (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k}) \\ = \sum_k [2v_k^2 + (\mu_k^2 - v_k^2)(m_k + m_{-k}) + 2\mu_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k}^- \gamma_k^-)]$$

y por lo tanto el valor de espectación de N en el estado fundamental es precisamente,

$$(4.25) \quad \langle N \rangle = \sum_k 2v_k^2 = \sum_k (1 + 2\chi_k)$$

en la ausencia de interacciones,

$$\langle N \rangle = \sum_{k < k_F} 2$$

así que deducimos que $x_k = 1/2$ si $\xi_k \leq \mu$ & $x_k = -1/2$ si $\xi_k > \mu$. Esto muestra que x_k es una función impar de $\xi - \mu$ en el caso no-interactuante, y si nos aseguramos que x_k permanece siendo una función impar de $\xi_k - \mu$ en la presencia de interacciones, entonces la ecuación (4.25) nos dice que $\langle N \rangle$ quedará invariable (se desprecia la dependencia de la energía con la densidad de estados). También queremos que la forma de x_k dada por (4.23) se reduzca al caso del electrón libre cuando $V_{kk'}$ desaparezca, así que tomamos la raíz cuadrada negativa y obtenemos una forma para v_k & x_k . Para recordarnos que ξ_k se mide con relación a μ usamos el símbolo $\hat{\xi}_k = \xi_k - \mu$ para volver a escribir (4.23) como:

$$x_k = - \frac{\hat{\xi}_k}{2(\hat{\xi}_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}}$$

Para clarificar conceptos pasaremos a considerar un modelo simple que permite resolver la ecuación integral de Δ_k en forma exacta. El elemento matricial $V_{kk'}$, tiene su origen en la interacción electrón-fonón y como en la ec. (4.9) se indica, es sólo atractiva cuando $|\hat{\xi}_k - \hat{\xi}_{k'}| < \hbar\omega_q$, la energía del fonón envuelto.

En el primer modelo simple tomado por BCS el elemento matricial se asumió que era de la forma:

$$(4.26) \quad V_{kk'} = \begin{cases} V & \text{si } |\hat{\xi}_k| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

con V una constante y $\hbar\omega_D$ la energía de Debye. Se sigue que Δ_k también es una constante, ya que la ec. (4.24) se reduce a:

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} D(\xi_{k'}) d\xi_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{(\xi_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}} V_{kk'}$$

$$\Delta_k = \frac{1}{2} V D(\xi) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\Delta}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi$$

la densidad de energía de estados $D(\xi)$ se refiere aquí a los estados de un solo espín y se toma como constante, y tiene la solución:

$$(4.27) \quad \Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\text{sen} \frac{1}{2} (\frac{1}{VD(\xi)})}$$

La magnitud del producto $VD(\xi)$ puede estimarse notando que de la ec. (4.9)

$$V \sim \frac{|M_q|^2}{\hbar\omega_D}$$

y además

$$|M_q|^2 \sim \frac{N \hbar^2 k_F^2}{M \hbar \omega_D} |V_k|^2 \sim \frac{m}{M} \frac{\hbar}{\hbar \omega_D} N |V_k|^2$$

con V_k la transformada de Fourier de un potencial iónico. Como $D(\frac{\hbar}{2}) \sim N/\hbar$, encontramos:

$$VD(\frac{\hbar}{2}) \sim \frac{m}{M} \left(\frac{N V_k}{\hbar \omega_D} \right)^2$$

Mientras que $\hbar \omega_D$ puede ser típicamente 0.03 eV, el factor $N V_k$ es más o menos el promedio del potencial iónico sobre la celda unitaria conteniendo al ión, y puede tener un valor de unos cuantos eV, haciendo $\left(\frac{N V_k}{\hbar \omega_D} \right)^2$ del orden de 10^4 . La razón de la masa del electrón a la masa del ión: m/M es, sin embargo, del orden de 10^{-5} , y como en muchos casos es razonable hacer la aproximación de un acoplamiento débil y reemplazar la ec. (4.27) por:

$$(4.28) \quad \Delta = 2 \hbar \omega_D e^{-1/VD(\frac{\hbar}{2})}$$

La diferencia entre $2 \sinh\left(\frac{1}{VD(\frac{\hbar}{2})}\right)$ & e^{10} es despreciable. En superconductores de acoplamiento fuerte tales como el mercurio o el plomo, la interacción electrón-fonón es muy fuerte y tal simplificación no es válida; para estos metales el amortiguamiento rápido de los estados de cuasi-partículas también debe tomarse en cuenta.

El resultado importante del cálculo anterior nos dice que Δ es de hecho una cantidad muy pequeña, siendo generalmente 1% de la energía de Debye, y por consiguiente corresponde a energías térmicas del orden de $1^0 K$, por lo que el parámetro x_k sólo difiere en $\pm 1/2$ dentro de esta corta distancia de la energía de Fermi y nuestros operadores γ_k & γ_{-k} se reducen a simples operadores de aniquilación o creación de electrones en todas partes dentro de esta delgada capa de estados que contienen la superficie de Fermi.

4.3 La Función de Onda del Estado Fundamental y el Salto de Energía

La primera aplicación del formalismo de Bogoliubov y Valatin debe ser una evaluación de la energía del estado fundamental \mathcal{F}_S del sistema superconductor. Esperemos encontrar un resultado menor que \mathcal{F}_N , la energía del sistema normal, por una cantidad que llamaremos la Energía de Condensación \mathcal{F}_C . La energía del estado fundamental del sistema BCS está dada por la suma de los valores de espectación de las ecuaciones (4.16) & (4.17) bajo las condiciones $m_k = m_{-k} = 0$. Como ya hemos eliminado los términos no-diagonales, sólo nos quedan los términos constantes, por lo que:

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_S &= \sum_k 2 \hat{\mathcal{E}}_k v_k^2 - \sum_{kk'} v_{k'} u_{k'} v_k u_k v_k \\ &= \sum_k \hat{\mathcal{E}}_k (1 + 2x_k) - \sum_{k \neq k'} v_{k'} \left[\left(\frac{1}{4} - x_{k'}^2 \right) \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Es importante notar que se puede considerar el hamiltoniano BCS desde un punto de vista variacional; en vez de eliminar los términos fuera de la diagonal de \mathcal{H}_{BCS} se puede haber escogido las x_k de tal forma que minimizarán \mathcal{F}_S . Sin embargo, este enfoque conduce al mismo resultado anterior; si diferenciamos (4.29) con respecto a x_k y resolvemos el sistema igualando a cero, obtenemos una ecuación idéntica a la (4.21). Re-escribiremos (4.29) en la forma:

$$\mathcal{F}_S = \sum_k \left[\hat{\mathcal{E}}_k (1 + 2x_k) - \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right)^{1/2} \Delta \right]$$

con x_k & Δ definidos por las ec. (4.23) & (4.22). En el sistema normal $x_k^2 = 1/4$ para todo valor de k y por lo tanto la energía de condensación $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_S - \mathcal{F}_N$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C &= \sum_{k < k_F} \hat{\mathcal{E}}_k (2x_k - 1) + \sum_{k > k_F} \hat{\mathcal{E}}_k (2x_k + 1) - \sum_k \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right)^{1/2} \Delta \\ &= 2D(\xi) \int_0^{\hbar\omega_D} \left[\hat{\mathcal{E}}_k - \frac{2\hat{\mathcal{E}}_k^2 + \Delta^2}{2(\hat{\mathcal{E}}_k^2 + \Delta^2)^{1/2}} \right] d\hat{\mathcal{E}}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_c &= D(\xi) \left\{ (\hbar\omega_0)^2 - \hbar\omega_0 \left[(\hbar\omega_0)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= (\hbar\omega_0)^2 D(\xi) \left[1 - \coth \left(\frac{1}{\sqrt{D(\xi)}} \right) \right] \end{aligned}$$

que en el caso de acoplamiento débil se vuelve:

$$\begin{aligned} (4.30) \quad \mathbb{F}_c &\cong -2 (\hbar\omega_0)^2 D(\xi) e^{-2/\sqrt{D(\xi)}} \\ &= \frac{1}{2} D(\xi) \Delta^2 \end{aligned}$$

Esta energía de condensación es sorprendentemente pequeña, y es del orden de 10^{-7} eV por electrón, lo que es equivalente a una energía térmica de alrededor de 1 miligrado Kelvin. Esto es una consecuencia del hecho que sólo electrones en el rango $\xi - \Delta, \xi + \Delta$ son afectados por una interacción atractiva, y éstos son sólo una pequeña fracción del orden de Δ/ξ del total. Puede notarse que no podemos expandir \mathbb{F}_c en una serie de potencias en la intensidad de interacción V ya que la función $\exp[-2/\sqrt{D(\xi)}]$ tiene una singularidad esencial en $V = 0$; lo que significa que mientras la función y todas sus derivadas se anulan cuando $V \rightarrow +0$, todas ellas se vuelven infinito cuando $V \rightarrow -0$. Esto muestra la diferencia cualitativa entre los efectos de una interacción atractiva y repulsiva y nos advierte que nunca hubiéramos podido tener éxito si calculamos \mathbb{F}_c usando teoría de Perturbaciones.

La función de onda Ψ_0 del sistema superconductor en su estado fundamental puede encontrarse recordando que debe ser una eigen-función del hamiltoniano BCS diagonalizado que tiene $m_k = m_{-k} = 0$ para todo k , por lo que

$$(4.31) \quad \gamma_k |\Psi_0\rangle = \gamma_{-k} |\Psi_0\rangle = 0$$

como $\gamma_k \gamma_k = \gamma_{-k} \gamma_{-k} = 0$, podemos construir la función de onda que satisfaga (4.31) simplemente operando en el estado vacío con todas las γ_k & γ_{-k} . De la ec. (4.12) tenemos:

$$\begin{aligned} (\prod_k \gamma_k \gamma_{-k}) | \Rightarrow &= \left[\prod_k (\mu_k c_k - v_k c_{-k}^\dagger) (\mu_k c_{-k} + v_k c_k^\dagger) \right] | 0 \rangle \\ &= \left[\prod_k (\mu_k v_k + v_k^2 c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \right] | 0 \rangle \end{aligned}$$

para normalizarla, dividimos por el producto de todas la v_k y obtenemos:

$$(4.32) \quad | \Psi_0 \rangle = \left[\prod_k (\mu_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \right] | 0 \rangle$$

Esta función de onda es una combinación lineal de funciones de onda simples que contienen diferentes números de partículas, lo cual significa que no es un eigen-estado del número total de operadores N . Nuestra familiaridad con el concepto de potencial químico ζ nos enseña que no nos concierne mucho este hecho, ya que estamos seguros que el valor promedio permanece constante.

Las excitaciones de cuasi-partículas del sistema son creadas por los operadores γ_k^+ y γ_{-k}^+ actuando sobre Ψ_0 . Sumando (4.16) & (4.17) se puede escribir el hamiltoniano en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{BCS} = \mathcal{F}_s + \sum_k (m_k + m_{-k}) \left[(\mu_k^2 - v_k^2) \hat{\mathcal{F}}_k + 2 \mu_k v_k \sum_{k'} v_{kk'} \mu_{k'} v_{k'} \right] \\ + (\text{términos de orden superior}) \end{aligned}$$

el que con las sustituciones de nuestras soluciones para u_k & v_k queda:

$$\mathcal{H}_{BCS} = \mathcal{F}_s + \sum_k \left(\hat{\mathcal{F}}_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2} (m_k + m_{-k}) + \dots$$

Las energías E_k de estas excitaciones elementales están dadas por:

$$(4.33) \quad E_k = \left(\hat{\mathcal{F}}_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2}$$

Estas excitaciones no pueden crearse aisladamente, ya que esto significaría operar sobre Ψ_0 con una sola γ^+ , lo cual es una suma que contiene sólo una c y una c^\dagger . Ahora bien, cualquier perturbación física que apliquemos a Ψ_0 contendrá al menos 2 operadores de electrón, ya que tales perturbaciones así como los campos eléctricos y magnéticos actúan para dis-

perser más que para crear o aniquilar electrones. Por ejemplo:

$$c_k^+ c_{k'} |\Psi_0\rangle = (u_k \gamma_k^+ + v_k \gamma_{-k}^-) (u_{k'} \gamma_{k'} + v_{k'} \gamma_{-k'}^+) |\Psi_0\rangle$$

$$= u_k v_{k'} \gamma_k^+ \gamma_{-k'}^+ |\Psi_0\rangle$$

y los otros términos desaparecen. Entonces, concluimos que sólo pares de cuasi-partículas pueden ser excitadas, y de la ec. (4.33) la mínima energía para crear tales pares de excitaciones es 2Δ . Esto explica la forma exponencial del calor específico electrónico a bajas temperaturas y también el pico de absorción para radiación electromagnética en $\hbar\omega = 2\Delta$.

Es interesante comparar estas excitaciones de cuasi-partículas con las excitaciones de hoyos-partículas de un sistema normal de Fermi. En un gas electrónico no-interactuante a temperatura cero el operador $c_k^+ c_{k'}$ crea un hoyo en k' y un electrón en k ya que $\hat{\xi}_{k'} < 0$ & $\hat{\xi}_k > 0$. La energía de esta excitación es $\hat{\xi}_k - \hat{\xi}_{k'}$ la cual puede escribirse como: $|\hat{\xi}_k| + |\hat{\xi}_{k'}|$, y así es igual a la suma de los módulos. En el sistema superconductor el operador $c_k^+ c_{k'}$ tiene una componente $\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+$ la que crea una excitación de energía total $E_k + E_{k'}$. La densidad de estados es inversamente proporcional a la pendiente de $\hat{\xi}(k)$ en el metal normal, y esto nos lleva a pensar en una densidad de estados efectiva en el estado superconductor inversamente proporcional a $dE/d|k|$. Como E_k & ξ_k están relacionadas por la ec. (4.33), encontramos que esta densidad de estados efectiva es igual a:

$$(4.33.1) \quad D(E) = 2 D(\xi) \frac{d\xi}{dE} \approx \begin{cases} 2 D(\xi) \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{3/2}} & \text{si } |E| > \Delta \\ 0 & \text{si } |E| \leq \Delta \end{cases}$$

El factor 2 entra cuando $D(\xi)$ es la densidad normal de estados para una dirección de spin, ya que los estados $\gamma_k^+ |\Psi_0\rangle$ & $\gamma_{-k}^+ |\Psi_0\rangle$ son degenerados.

4.4 La Temperatura de Transición.

El método que seguimos anteriormente para diagonalizar \mathcal{H}_{BCS} fue fijar u_k de tal forma que la suma de los términos no-diagonales de las ec. (4.16) & (4.17) se anularan. La ecuación resultante era de la forma:

$$(4.34) \quad \sum_k \left[2 \hat{E}_k u_k v_k - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) \right] \chi (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_k^- \gamma_{-k}^-) = 0$$

y para resolver este sistema primero hicimos $m_{k'} = m_{-k'} = 0$.

Aunque este enfoque es válido en la presencia de unas pocas excitaciones de quasi-partículas, necesita ser modificado cuando la proporción de estados excitados se vuelve comparable con la unidad; ya que los términos en $m_{k'}$ & $m_{-k'}$ contribuirán en forma significativa a la suma sobre k' . Este será el caso si la temperatura es tal que kT no es mucho menor que Δ .

Resolvemos esta dificultad, primero que todo, asumiendo que es posible eliminar los términos no-diagonales. Entonces tendremos un hamiltoniano que es la suma de las partes diagonales de las ecuaciones (4.16) & (4.17) por lo que:

$$(4.35) \quad \mathcal{H}_{BCS} = \sum_k 2 \hat{E}_k v_k^2 + \sum_k (u_k^2 - v_k^2) \hat{F}_k (m_k + m_{-k}) - \sum_{k, k'} V_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (1 - m_k - m_{-k})$$

La energía E_k necesaria para crear excitaciones de quasi-partículas será:

$$(4.36) \quad E_k = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{BCS} \rangle}{\partial m_k} = \hat{F}_k (u_k^2 - v_k^2) + 2 u_k v_k \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - \langle m_{k'} \rangle - \langle m_{-k'} \rangle)$$

Si ahora tenemos un sistema de fermiones independientes a la temperatura T , entonces conocemos, de la estadística de Fermi-Dirac, cuál es exactamente la ocupación promedio de cada estado; por lo que:

$$(4.37) \quad \bar{m}_k = \bar{m}_{-k} = \frac{1}{\exp(E_k/kT) + 1}$$

expresión en la que no aparece el potencial químico ya que el número total de cuasi-partículas no se conserva). Aunque los términos en $m_k m_{k'}$, en la ec. (4.35) representan interacciones entre fermiones, la definición de energía de cuasi-partícula adoptada en (4.36) nos permite tratarlas como independientes. Entonces podemos obtener una solución aproximada de la ec. (4.34) reemplazando m_k & m_{-k} , por sus promedios térmicos. Si abreviamos la función de Fermi de la ec. (4.37) por $f(E_k)$, entonces encontramos que para satisfacer la ec. (4.34) debemos poner:

$$(4.38) \quad 2 \hat{\epsilon}_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} [1 - 2f(E_{k'})] = 0$$

La única diferencia entre esta ecuación y la ec. (4.19) está en el factor extra $(1 - 2f(E_{k'}))$ que multiplica el elemento matricial $V_{kk'}$, por lo que si de nuevo hacemos la sustitución (4.20), pero esta vez reemplazando la definición de ϵ_k dada en (4.22) por la definición:

$$(4.39) \quad \Delta_k(T) = \sum_{k'} V_{kk'} \left(\frac{1}{4} - \chi_{k'}^2 \right)^{1/2} [1 - 2f(E_{k'})]$$

recobramos la ec. (4.23). El parámetro de salto (de energía) dependiente de la temperatura, $\Delta(T)$, se encuentra volviendo a sustituir la ec. (4.23) en la ec. (4.39):

$$(4.40) \quad \Delta_k(T) = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}(T)}{[\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2(T)]^{1/2}} [1 - 2f(E_{k'})]$$

Esta ecuación todavía tiene la energía de excitación E_k que evaluamos tomando el promedio térmico de la ec. (4.35), encontrando:

$$(4.41) \quad E_k = \hat{\epsilon}_k (u_k^2 - v_k^2) + 2 u_k v_k \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} [1 - 2f(E_{k'})] \\ = \left[\hat{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2(T) \right]^{1/2}$$

que es idéntica a nuestra expresión (4.33) anterior, excepto que ahora Δ es una función de la temperatura. Haciendo la sustitución de E_k & $f(E_{k'})$ en la ec. (4.38) tenemos:

$$(4.42) \quad \Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{(\xi_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}} \tanh \left[\frac{(\xi_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2)^{1/2}}{2kT} \right]$$

En el modelo simple definido en la ec. (4.26) esto se reduce a:

$$(4.43) \quad VD(\xi) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \left[\frac{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}}{2kT} \right]}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi = 1$$

En la temperatura cero esta ecuación para Δ se reduce a nuestra solución previa (4.27). Cuando la temperatura se aumenta sobre cero el numerador del integrando se reduce, y así de acuerdo con que la ec. (4.43) debe cumplirse, el denominador debe decrecer también. Esto implica que Δ es una función monótona decreciente de T . La disminución inicial es exponencial baja, hasta que kT se vuelve del orden de $\Delta(0)$ y las excitaciones de cuasi-partículas se vuelven numerosas; entonces $\Delta(T)$ empieza a caer más rápidamente hasta que a la temperatura de transición, T_c , se anula. La magnitud de T_c en el modelo BCS se encuentra de la ec. (4.43) poniendo $\Delta(T_c) = 0$ con lo que tendremos:

$$VD(\xi) \int_0^{\hbar\omega_D/2kT_c} x^{-1} \tanh(x) dx = 1$$

$$\left[\ln(x) \tanh(x) \right]_0^{\hbar\omega_D/2kT_c} - \int_0^{\hbar\omega_D/2kT_c} \text{sech}^2(x) \ln(x) dx = \frac{1}{VD(\xi)}$$

Para superconductores de acoplamiento débil podemos reemplazar $\tanh(\hbar\omega_D/2kT_c)$ por la unidad y extender el límite superior de la integral a infinito para encontrar:

$$\ln \left(\frac{\hbar\omega_D}{2kT_c} \right) - \int_0^{\infty} \text{sech}^2(x) \ln(x) dx = \frac{1}{VD(\xi)}$$

La integral es bastante difícil y se encuentra que es igual a $\ln(0.44)$ con lo que:

$$(4.44) \quad kT_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-1/VD(\hbar)}$$

que comparándola con la ec. (4.28) nos muestra que en este modelo

$$\frac{2\Delta(0)}{kT_c} = 3.50$$

un resultado que está en un acuerdo adecuado con los valores experimentales observados de dicho parámetro, que para la mayoría de elementos está entre 2 y 5.

La existencia de un efecto isotópico es una consecuencia obvia de la ec. (4.44). La forma más simple del efecto isotópico ocurre cuando $VD(\hbar)$ es independiente de la masa iónica M ; entonces T_c depende de M únicamente a través de la energía de Debye $\hbar \omega_D$ la cual es proporcional a $M^{1/2}$. El hecho de que el enlace electrón-fonón de $D(\hbar)$ es independiente de M se considera más adelante y la demostración de que V debe tener esta misma propiedad se sigue en forma semejante. Se nota sin embargo, que T_c es muy sensible a los cambios en la densidad de estados $D(\hbar)$ como una consecuencia que $VD(\hbar) \ll 1$. Así, si $VD(\hbar) = 1/8$, entonces de la ec. (4.44) se sigue que una disminución de 1% en $D(\hbar)$ causaría una disminución de 8% en T_c . No es muy sorprendente entonces que el incluir la repulsión de Coulomb en V o al uso de otros modelos más complicados puedan llevar a otras clases de efectos isotópicos.

El calor específico electrónico C , puede ser calculado también del modelo BCS. La energía $\bar{E}(T)$ del superconductor a la temperatura T será el promedio del valor de espectación del hamiltoniano (4.35) y encontramos:

$$(4.46) \quad \begin{aligned} \bar{E}(T) &= \sum_k \left[2\hat{E}_k v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) 2f_k \hat{E}_k - (1-2f_k) u_k v_k \Delta \right] \\ &= \sum_k \left[\hat{E}_k - \left(E_k - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right) (1-2f_k) \right] \end{aligned}$$

de la cual:

$$\begin{aligned}
 (4.45) \quad C &= \frac{dF(T)}{dT} = \sum_k \left[2(E - \frac{\Delta^2}{2E}) \frac{df}{dT} + \frac{1}{2} (1-2f) \Delta^2 \frac{d(\frac{1}{E})}{dT} \right] \\
 &= \sum_k \left[2E \frac{df}{dT} + \Delta^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{1-2f}{2E} \right) \right] \\
 &= \sum_k \left[\frac{d\Delta^2}{dT} - \frac{2E^2}{T} \right] \frac{df}{2E}
 \end{aligned}$$

Un acuerdo razonablemente bueno con los experimentos se obtienen generalmente con esta fórmula. La discontinuidad observada en C a la temperatura de transición proviene del término $\frac{d\Delta^2}{dT}$, el cual es cero para $T > T_c$ pero es finito para $T < T_c$. La predicción de la ec. (4.45) es que C se incrementa en un 43% cuando la muestra se enfría a través de T_c ; los incrementos observados están dentro de un factor de 4 de este valor.

4.5 El Efecto Meissner.

En el efecto Meissner la anulación del campo magnético dentro de un superconductor grueso debe atribuirse a la existencia de una corriente eléctrica fluyendo en la superficie del espécimen. El campo magnético debido a esta corriente debe cancelar exactamente el campo aplicado H_0 . Investigaremos este fenómeno dentro del modelo BCS, aplicando un campo magnético débil a un superconductor y calculando al primer orden la densidad de corriente, j , resultante en campo aplicado. Evitaremos las dificultades de los efectos de superficie aplicando un campo magnético de variación espacial definido por un vector potencial $A = A_q e^{iq \cdot r}$ y examinando la respuesta $j = j_q e^{iq \cdot r}$ en el límite cuando $q \rightarrow 0$.

Varios años antes de la teoría BCS se había predicho que cualquier respuesta de primer orden de j al vector potencial A llevaría a un efecto Meissner. Si definimos la constante de proporcionalidad entre j & A de tal forma que:

$$(4.46) \quad j = - \left(\frac{c}{4\pi\lambda^2} \right) A$$

donde $c =$ velocidad de la luz, y tomamos el rotacional de esta relación obtenemos la ecuación de London (ver ec. (16) & (17) de segunda parte):

$$\nabla \times j = - \left(\frac{c}{4\pi \lambda^2} \right) B$$

que con el uso de las ecuaciones de Maxwell y el hecho de que $B = H$ cuando toda la magnetización se atribuye a la corriente j nos da la ecuación:

$$\nabla^2 B = \lambda^{-2} B$$

Las soluciones de esta ecuación muestran un campo magnético que decae aproximadamente con una longitud característica λ_L , que como vimos anteriormente, puede identificarse con la profundidad de penetración. En un metal normal λ_L sería infinita y de la ec. (4.46) no esperaríamos encontrar ningún término de primer orden en una expansión de j en potencias de A .

Procederemos a continuación a hacer los cálculos de j_q en el modelo BCS. Un campo magnético entra al hamiltoniano de un electrón simple como un término de perturbación:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{e}{2mc} \left(\frac{e}{c} A^2 - p \cdot A - A \cdot p \right)$$

donde se han despreciado los efectos relativistas y el spin del electrón. Dejamos el término en A^2 , y escribimos \mathcal{H}_1 en la notación de la segunda cuantización como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{e}{2mc} \sum_{k, k', s} \langle k | -p \cdot A - A \cdot p | k' \rangle c_{k's}^\dagger c_{k's} \\ &= \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{k, k', s} \langle k | -A \cdot (k+k') | k' \rangle c_{k's}^\dagger c_{k's} \end{aligned}$$

cuando el vector potencial es de la forma $A_q e^{iq \cdot r}$ tenemos:

$$(4.47) \quad \mathcal{H}_1 = -\mu_B A_q \cdot \sum_{k,s} (2k-q) c_{k's}^\dagger c_{k's}$$

substituímos en esta expresión j_q y \mathcal{H}_1 dados en (4.47) & (4.48) y calculamos los términos en A^2 con lo que empezamos:

con $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$. La densidad de corriente $e\mathbf{v}/\Omega$ se encuentra de la continuidad de la ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

cuya transformada de Fourier es:

$$i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_q = - \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho_q]$$

con lo que encontramos:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_q = - \frac{e}{\Omega \hbar} [(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1), \rho_q]$$

cuyo resultado es:

$$(4.48) \quad \mathbf{j}_q = \sum_{k,s} \left[\frac{e\hbar}{2m\Omega} (2k - \mathbf{q}) c_{k-\mathbf{q},s}^+ c_{k,s} - \frac{e^2 A_q}{mc \Omega} c_{k,s}^+ c_{k,s} \right]$$

El efecto del campo magnético es perturbar la función de onda del superconductor de su estado inicial, $|\Psi_0\rangle$, a un nuevo estado, $|\Psi\rangle$, que está dado para el primer orden en A_q por la fórmula usual:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{1}{E_0 - \mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 |\Psi_0\rangle$$

con lo que la corriente en presencia del campo magnético aplicado será:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_q \rangle &= \langle \Psi_0 | \mathbf{j}_q | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \mathbf{j}_q \frac{1}{E_0 - \mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 | \Psi_0 \rangle \\ &\quad + \langle \Psi_0 | \mathcal{H}_1 \frac{1}{E_0 - \mathcal{H}_0} \mathbf{j}_q | \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

sustituimos en esta expresión \mathbf{j}_q y \mathcal{H}_1 dados en (4.47) & (4.48) y despreciamos los términos en A_q^2 con lo que encontramos:

$$(4.49) \quad \langle j_q \rangle = - \frac{N e^2 A_q}{m c \Omega^2} - \langle \Psi_0 | \sum_{k,s,k',s'} \frac{e \hbar \mu_B A_q}{2 m \Omega} \cdot (2k'-q) \times (2k-q) (c_{k-q,s}^+ c_{k,s} \frac{1}{E_k - E_0} c_{k',s'}^+ c_{k'-q,s'} + c_{k',s'}^+ c_{k'-q,s'} \frac{1}{E_{k'} - E_0} c_{k-q,s}^+ c_{k,s}) | \Psi_0 \rangle$$

En esta expresión el operador \mathcal{H}_0 es el hamiltoniano BCS en la ausencia de un campo magnético. Para evaluar $\langle j_q \rangle$ es necesario expresar los operadores de electrón en términos de los operadores de quasi-partículas que cambian $|\Psi_0\rangle$ en otros eigenestados de \mathcal{H}_0 . De esta forma usamos las ec. (4.14) & (4.15) para escribir:

$$c_{k-q,\uparrow}^+ c_k = (u_{k-q} \gamma_{k-q}^+ + v_k \gamma_{-(k-q)}) (u_k \gamma_{k,\uparrow} + v_k \gamma_{-k}^+)$$

y otras expresiones similares. Luego sigue un largo manipuleo en el que el primer paso consiste en argumentar que siempre que se creen o destruyan quasi-partículas cuando $c_{k',\uparrow}^+ c_{k'-q,\uparrow}$ actúe sobre Ψ_0 se debe reemplazar cuando $c_{k-q,\uparrow}^+ c_{k,\uparrow}$ actúe, si el elemento matricial no desaparece. Un razonamiento similar se aplica a todas las combinaciones de operadores de tal forma que la suma sobre k & k' se reduzca a una sola suma. Cuando q es muy pequeña, u_{k-q} & v_{k-q} se reemplazan por u_k & v_k y de esta forma se pueden cancelar una gran cantidad de términos, con lo que la ec. (4.49) se reduce a:

$$\langle j_q \rangle = - \frac{2 N e \mu_B}{\hbar \Omega} A_q - \frac{e \hbar \mu_B}{2 m \Omega} A_q \sum_k 2k (u_k^2 + v_k^2) 4k \langle \Psi_0 | \frac{m_k - m_{k+q}}{E_k - E_{k+q}} | \Psi_0 \rangle$$

La suma sobre k se sustituye por una integral sobre la energía multiplicada por $\frac{D(\epsilon)}{3}$, donde el factor $1/3$ viene de la integración angular. La expectación de los operadores de números de quasi-partículas m_k se sustituye por sus promedios f_k , mientras que para valores pequeños de q la razón de las diferencias $m_k - m_{k+q}$ & $E_k - E_{k+q}$ se vuelve la razón entre sus derivadas,

así que se tiene:

$$\langle j_q \rangle = - \frac{Ne^2}{mc\Omega} A_q - \frac{e^2 \hbar^2}{4\pi^2 c^2 \Omega} A_q \cdot \frac{1}{3} D(\xi) 8k_f \int \frac{\partial f_k}{\partial E_k} d\xi$$

ya que $D(\xi)$ puede escribirse como $3Nm/2\hbar^2 k_f^2$ queda:

$$(4.50) \quad \langle j_q \rangle = - \frac{Ne^2}{mc\Omega} A_q \left(1 + \int \frac{\partial f}{\partial E} dE \right) \\ = - \frac{Ne^2}{mc\Omega} A_q \left(1 + 2 \int \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} \frac{df}{dE} dE \right)$$

con $f(E)$ la función de Fermi-Dirac.

Como esta expresión es de la forma esperada puede verificarse examinando los casos en que $\Delta = 0$ y donde $T = 0$. A temperaturas mayores que T_c el parámetro de salto, Δ , desaparece y la integración puede hacerse inmediatamente; los dos términos en el paréntesis se cancelan y no se predice ningún efecto Meissner. En $T = 0$, por otra parte, la integral sobre E se anula y la ec. (4.50) se puede escribir:

$$\langle j_q \rangle = - \frac{c}{4\pi \lambda^2} A_q$$

si λ se escoge de tal forma que:

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2 \Omega}{4\pi Ne^2}} = \frac{c}{\omega_p}$$

con ω_p la frecuencia de plasma. Un efecto Meissner se predice con una profundidad de penetración, λ , que es del orden correcto de magnitud y que sólo depende de la densidad de electrones. A temperaturas intermedias la ec. (4.50) predice una profundidad de penetración que aumenta monótonamente con T y se vuelve infinita en $T = T_c$, de acuerdo con los resultados experimentales y que es la propuesta por London para explicar el efecto Meissner según lo visto anteriormente.

4.6 Experimentos Túnel.

Poco después del desarrollo de la teoría BCS se descubrió que era posible obtener una gran cantidad de información de los superconductores estudiando las características corriente-voltaje de instrumentos compuestos de dos piezas de metal separadas por una capa delgada de aislador. Un instrumento típico de esta clase puede consistir de una capa de magnesio que ha sido expuesta a la atmósfera para permitir que una capa aislante de MgO se forme en su superficie. Después que se tiene esta capa de aproximadamente 20 \AA de grueso, se puede depositar una capa de plomo sobre el óxido, y de esta forma se puede medir la inductancia diferencial, dI/dV , a una temperatura lo suficientemente baja para que el plomo sea superconductor. El resultado observado es un pico agudo en dI/dV cuando la diferencia de potencial V entre el magnesio y el plomo es tal que el parámetro de salto, Δ , del plomo es igual a eV .

Para discutir efectos como estos escogemos un modelo simplificado en el cual dos mitades de una caja están separadas por una barrera de potencial delgada, de tal forma que la variación de potencial en la dirección z sea la de una barrera de potencial entre las dos mitades de la caja. La función de onda para un electrón en este sistema es de la forma:

onda:

$$\psi = e^{-ik_x x + ik_y y} \phi(z)$$

donde, según la simetría del potencial, $\phi(z)$ será ya sea una función impar, ϕ_a , de z o bien una función par ϕ_s . Para cada estado ϕ_s habrá un estado correspondiente ϕ_a , que tiene exactamente un nodo más (que puede estar localizado en el centro de la barrera). La diferencia de energía de estos estados estará gobernada por el hecho que la fase de la función de onda a los lados de la barrera será diferente en los dos casos por

una cantidad $\delta\theta$; si en el lado izquierdo de la caja ϕ_s es de la forma $\sin(k_z z)$ entonces ϕ_a será de la forma $\sin(k_z + \frac{\delta\theta}{L})z$. La diferencia de energía $2T$ estará dada por:

$$(4.51) \quad 2T = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(k_z + \frac{\delta\theta}{L} \right)^2 - k_z^2 \right]$$

y será proporcional a v_z , la componente de la velocidad del electrón perpendicular a la barrera, cuando $\delta\theta$ es pequeña.

En el tratamiento de los experimentos de túnel es más útil trabajar en términos de las funciones de onda $\phi_s \pm \phi_a$ en lugar de ϕ_s & ϕ_a ya que la suma o la diferencia está más localizada a un lado u otro de la barrera. Por esto no escribiremos el hamiltoniano del sistema como

$$(4.52) \quad \mathcal{H} = \mathbb{E}_s c_s^\dagger c_s + \mathbb{E}_a c_a^\dagger c_a$$

con:

$$c_s^\dagger |0\rangle = |\phi_s\rangle \quad ; \quad c_a^\dagger |0\rangle = |\phi_a\rangle$$

sino que en su lugar formamos los nuevos operadores de fermiones:

$$c^+ = \frac{c_a^\dagger - c_s^\dagger}{\sqrt{2}} \quad ; \quad d^+ = \frac{c_a^\dagger + c_s^\dagger}{\sqrt{2}}$$

En términos de estos operadores el hamiltoniano (4.52) queda:

$$\mathcal{H} = \mathbb{E} (c^+ c + d^+ d) + T (c^+ d + d^+ c)$$

donde:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{E}_a + \mathbb{E}_s)$$

Tenemos ahora un cuadro de dos sistemas independientes unidos por un término de perturbación. El hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_i = \sum_{k,s} \mathbb{E}_k c_{ks}^\dagger c_{ks}$$

describe electrones en el lado izquierdo de la caja, mientras que

$$H_d = \sum_{k,s} \epsilon_k d_{ks}^\dagger d_{ks}$$

las describe en el lado derecho. La perturbación:

$$(4.52) \quad H_T = \sum_{k,k',s} T_{kk'} (c_{ks}^\dagger d_{k's} + d_{k's}^\dagger c_{ks})$$

actúa para transferir electrones a través de la barrera aislante, dependiendo la probabilidad de transición en su orden más bajo del cuadrado del módulo de el término matricial T.

Cuando se aplica un voltaje V a través de este instrumento, las energías de aquellos estados en el lado izquierdo de la barrera se incrementan por una cantidad eV. Un electrón de energía cinética ϵ_k puede sólo ser desviado elásticamente por H_T a un estado k' en el lado derecho de la barrera de energía cinética $\epsilon_{k'} + eV$. El flujo neto de electrones de la izquierda a la derecha será entonces proporcional a:

$$\sum_{k,k',s} |T|^2 [f_k (1-f_{k'}) - f_{k'} (1-f_k)] \delta(\epsilon_{k'} - \epsilon_k - eV)$$

de lo cual la corriente I puede considerarse como gobernada por la relación:

$$I \propto \int T^2 [f(\epsilon_k) - f(\epsilon_k + eV)] D(\epsilon_k) D(\epsilon_k + eV) d\epsilon_k$$

con T^2 el cuadrado de un elemento matricial promedio. El hecho de que T sea, como lo hemos visto en la ec. (4.50), proporcional a $\partial \epsilon / \partial k$, mientras

$$D(\epsilon_k) = \frac{(dN/dk)}{(d\epsilon/dk)}$$

conduce a una cancelación en la dependencia con la energía del integrando cuando $eV \ll \hbar$. Con lo que se llega a una relación:

$$I \propto \int [f(\epsilon_k) - f(\epsilon_k + eV)] d\epsilon_k$$

$$I \propto \int \left\{ f(\xi_k) - \left[f(\xi_k) + eV f'(\xi_k) + \frac{1}{2}(eV)^2 f''(\xi_k) + \dots \right] \right\} d\xi_k$$

$$= eV$$

y el instrumento se predice que obedezca la ley de Ohm. Se puede dibujar el cálculo de esa clase de túnel en una figura donde la densidad de estados de las dos mitades del aparato se plotean horizontalmente y la energía se mide verticalmente.

La densidad de estados ocupados por unidad de energía es el producto $f(\xi_k)D(\xi_k)$, el cual está representado por las áreas bajo la curva. La corriente túnel es entonces proporcional a la diferencia de las áreas sombreadas a los dos lados de la barrera.

Consideremos entonces cómo estos cálculos pueden modificarse si el metal en el lado derecho de la barrera se vuelve superconductor, así como nuestro aparato modelo: Mg - MgO - Pb, cuya conductancia consideramos anteriormente. Nuestro primer paso es reemplazar los operadores de electrones d_{ks}^+ & d_{ks} por los operadores de cuasi-partículas que actúan en el estado BCS. De acuerdo con esto reescribiremos la perturbación de túnel (4.52) como:

$$(4.53) \quad \mathcal{H}_T = \sum_{k,k'} T \left[c_k^+ (\mu_{k'} \gamma_{k'} + v_{k'} \gamma_{-k'}^+) + c_k^+ (\mu_{k'} \gamma_{-k'} - v_{k'} \gamma_{k'}^+) \right. \\ \left. + (\mu_{k'} \gamma_{k'}^+ + v_{k'} \gamma_{-k'}^-) c_k + (\mu_{k'} \gamma_{-k'}^+ - v_{k'} \gamma_{k'}^-) c_k \right]$$

En esta perturbación no se toma ya más un solo electrón de un lado de la barrera y se reemplaza por otro. El primer término por ejemplo, crea un electrón en la izquierda de la barrera y ya sea crea o destruye una excitación de cuasi-partículas en la derecha. Si el metal normal está a un voltaje V relativo al superconductor entonces la conservación de la energía exige que para que el término $c_k^+ \gamma_{k'}$, cause un proceso real de scattering debemos tener $\xi_{k'} = E_{k'} - eV$ (donde todas las energías se miden en relación al potencial químico ξ). Por otra parte, para que

el término $c_k^+ \gamma_{-k}^+$, cause scattering, debemos tener $\hat{F}_k = -E_k - eV$. Aplicando todos estos argumentos a todos los términos en la expresión (4.53) tenemos:

$$I \propto \sum_{k, k'} |T|^2 \left(u_k^2 \left\{ f(\hat{F}_k) [1 - f(E_k)] - f(E_k) [1 - f(\hat{F}_k)] \right\} \delta(E_k - \hat{F}_k - eV) \right. \\ \left. + v_k^2 \left\{ f(\hat{F}_k) f(E_k) - [1 - f(\hat{F}_k)] [1 - f(E_k)] \right\} \delta(\hat{F}_k + E_k + eV) \right) \\ = \sum_{k, k'} |T|^2 \left\{ u_k^2 [f(\hat{F}_k) - f(E_k)] \delta(\hat{F}_k - E_k + eV) \right. \\ \left. + v_k^2 [f(\hat{F}_k) - 1 + f(E_k)] \delta(\hat{F}_k + E_k + eV) \right\}$$

Cambiamos las sumas sobre k, k' a integrales sobre \hat{F}_k & E_k , multiplicando por $D_i(\hat{F}_k) D_d(E_k)$, con $D_d(E_k)$ la densidad efectiva de estados definida en (4.33.1). La primera función- δ se anula excepto en $E_k = \hat{F}_k + eV$, lo que de (4.41) significa que k' debe satisfacer la condición:

$$\hat{F}_{k'} = \pm \left[(\hat{F}_k + eV)^2 - \Delta^2 \right]^{1/2}$$

pero, ya que de (4.20) y (4.23):

$$u^2(\hat{F}_{k'}) + u^2(-\hat{F}_{k'}) = 1$$

los coeficientes u_k^2 , se anularán en la expresión para la corriente cuando hagamos la integral. Con estos argumentos y otros similares aplicados a la segunda función- δ y los coeficientes v_k^2 , nos da:

$$I \propto \int T^2 D_i(\hat{F}_k) D_d(E = \hat{F}_k + eV) [f(\hat{F}_k) - f(\hat{F}_k + eV)] d\hat{F}_k$$

donde hemos hecho uso de:

$$f(-E) = 1 - f(E).$$

Debido a la forma de $D_d(E)$, la integral ya no es proporcional a V , sino que conduce a una corriente no lineal. Para valores pequeños de V , fluirá muy poca corriente, ya que $f(\hat{\epsilon}_k + eV)$ diferirá apreciablemente de $f(\hat{\epsilon}_k)$ sólo cuando $|\hat{\epsilon}_k| < kT$, y en esta región la densidad de estados de cuasi-partículas, $D_d(E)$ se anula. Esto se puede mostrar por medio de las áreas sombreadas bajo la curva de conductancia. Es sólo cuando $eV > \Delta$ que una corriente grande fluye, dando lugar al pico observado en dI/dV a este voltaje.

Un efecto que no se ve de este cálculo elemental es el concerniente a la necesidad de distinguir entre el electrón creado por el operador c_k^+ y el electrón en la interacción con el sistema de fonones.

La transformación canónica de los electrones normales sólo se aplica a los electrones en la mitad superconductores del aparato y esto debe permitirse para un cálculo más cuidadoso de la corriente túnel. Se encuentra que las características observadas en la unión se ven muy afectadas por la forma de la densidad de estados de fonones en los superconductores de acoplamiento fuerte, y esto puede dar información útil de los modos de fonones en las aleaciones que no pueden obtenerse por otros medios.

4.7 Cuantización de Flujo y Efecto Josephson.

El tercer tipo posible de unión de túnel es aquel en el cual el metal a ambos lados de la barrera aislante es superconductor. Los cálculos de las características de este aparato son más difíciles que en los ejemplos anteriores, ya que el número total de electrones no está ahora bien definido en ningún lado de la barrera; se deben definir operadores especiales que sumen pares de electrones en un lado y otro del instrumento. De estos cálculos se puede predecir una corriente que fluye de un lado al otro de la barrera y que varía con el voltaje aplicado, exhibiendo un pico como el de la sección anterior. Sin embargo, también hay otro

tipo de corriente que puede fluir en tal instrumento -una corriente asociada con el túnel a través de la barrera de pares limitados (acotados) de electrones.

Podemos ganar algo de comprensión de la naturaleza de estas corrientes volviendo a considerar el efecto de campos magnéticos sobre la corriente acarreada por un electrón. Hemos visto que el hamiltoniano de una partícula libre de masa m^* y carga e^* en un campo magnético $H = \nabla \times A$ es de la forma:

$$H = \frac{(p - e^* A/c)^2}{2m}$$

Si el vector potencial fuera de la forma:

$$(4.54) \quad A = (A, 0, 0)$$

con A constante, entonces $\nabla \times A$ se anularía y no habría campo magnético.

Los eigen-estados de H son:

$$(4.55) \quad \psi = \exp\{ik_x x + ik_y y + ik_z z\}$$

con energías:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(k_x - \frac{e^* A}{\hbar c} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right]$$

En ausencia de campos aplicados imponemos condiciones de frontera periódicas, estimando que ψ debe ser igual en los puntos (x, y, z) y $(x + L, y, z)$; $(x, y + L, z)$ & $(x, y, z + L)$. Mientras que ningún campo eléctrico o magnético esté actuando, este es un paso permitido cuyo único efecto es hacer el conteo de los estados un poco más fácil. Si están presentes campos aplicados, esta igualdad de la función de onda en las caras opuestas de una caja cúbica debe tratarse más cuidadosamente. No podemos por ejemplo, aplicar un campo eléctrico uniforme a un sistema e imponer condiciones de frontera periódicas pues tal procedimiento resultaría en que la partícula estuviera continuamente acelerada

en una dirección. En el caso particular donde sólo un vector potencial $(A, 0, 0)$ actúa sobre la partícula, podemos imponer condiciones de frontera periódicas si recordamos sus implicaciones físicas. Ya que A es igual en los puntos (x, y, z) & $(x + L, y, z)$ el hamiltoniano es periódico en la dirección x . La periodicidad de ψ en esta dirección exige entonces que $k_x = 2\pi n/L$ con n un entero. La contribución del movimiento en la dirección x a la energía es entonces:

$$(4.56) \quad \xi_x = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{2\pi n}{L} - \frac{e^*A}{\hbar c} \right)^2$$

El movimiento en las direcciones y & z no es afectado por A así que también podemos retener la periodicidad en esas direcciones. La situación física que tenemos es un circuito cerrado de un material superconductor, como A actúa en la dirección x , físicamente unimos las dos caras del material. Como los electrones ocupan estados pares, interpretamos la carga e^* de los portadores de carga como $2e$.

Aunque asumimos que el efecto Meissner obliga al campo magnético a ser cero dentro del superconductor (asumimos que las dimensiones son grandes comparadas con la profundidad de penetración) el flujo magnético Φ que atraviesa enhebrando el anillo no necesariamente se anula ya que:

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \Phi &= \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = AL \end{aligned}$$

donde la integral se toma alrededor de una trayectoria cerrada dentro del anillo. De la ec. (4.56) la energía adicional del par de electrones debidas al vector potencial será:

$$(4.58) \quad \Delta \xi_x = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[- \frac{4\pi n}{L} \cdot \frac{2eA}{\hbar c} + \left(\frac{2eA}{\hbar c} \right)^2 \right]$$

Si para cada estado de n positiva el correspondiente estado para n negativa está también ocupado, entonces no habrá contribución a la energía total del gas electrónico del término lineal en A , y el cambio total de energía será:

$$\Delta E_{\text{TOTAL}} = \frac{2N\hbar^2}{m^*L^2} \left(\frac{e\Phi}{\hbar c} \right)^2$$

Así, la presencia de un flujo magnético finito atravesando el anillo aumenta la energía del sistema.

Si el flujo es mayor que $\pi\hbar c/2e$ se vuelve energéticamente favorable para que un par de electrones con $k_x = 2\pi(n)/L$ sea transmitido para un estado en el cual $k_x = 2\pi(n+1)/L$. El cambio total de energía debido a A es:

$$\Delta E_{\text{TOTAL}} = \frac{2N\hbar^2}{m^*L^2} \left(\pi - \frac{e\Phi}{\hbar c} \right)^2$$

que toma su valor mínimo de cero cuando $\Phi = \pi\hbar c/e$. Estos argumentos pueden extenderse para mostrar que la energía mínima posible del sistema es de hecho una función periódica de Φ ; así, hay una tendencia para el flujo magnético que atraviesa el anillo de ser cuantizado en unidades de quantum de flujo ϕ_0 igual a $\pi\hbar c/e$. Esto se verifica experimentalmente en un sinnúmero de medidas delicadas en que pequeños cilindros huecos superconductores han sido enfriados bajo T_c en presencia de campos magnéticos aplicados. Medidas posteriores del flujo atrapado de esta forma muestran valores que inconfundiblemente se amontonan alrededor de múltiplos enteros de ϕ_0 .

La corriente acarreada por un solo par de electrones será proporcional a $\hbar k_x - 2eA/c$, que de las ec. (4.57) & (4.58) es a su vez proporcional a $\frac{\partial(\Delta E_x)}{\partial \Phi}$. La corriente total I fluyendo en el anillo es proporcional a $\frac{dE_{\text{TOTAL}}}{d\Phi}$, y su gráfica es un diente de sierra. Esta última gráfica lleva a los resultados de gran importancia en la teoría de superconductividad, pues vemos

$$\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi + \phi_0)$$

que esta teoría se aplica no sólo a anillos cerrados sino también a un instrumento que consiste de un anillo roto y en cuya abertura se ha incertado una capa delgada de aislador. Como la abertura es bastante pequeña como para que un número apreciable de pares de electrones puedan atravesar en túnel la barrera y ningún cuanto de flujo está contenido en la abertura, por lo que la corriente será todavía una función periódica de Φ con período ϕ_0 .

El primer experimento que consideramos es la medida de la corriente I cuando el flujo Φ se mantiene constante. Como la fem en el anillo es igual a $-c^{-1} d\Phi/dt$ conocemos que cualquier corriente fluyendo debe permanecer así en la ausencia de un campo eléctrico. Si Φ se mantiene a un valor diferente de $n\phi_0$ es favorable energéticamente para que una supercorriente fluya, y la característica $I - V$ exhibirá un pico de una función- δ en la corriente en $V = 0$. Este fenómeno se conoce como Efecto Josephson c.d. (donde c.d. se usa para corriente directa).

El segundo experimento consiste en aumentar el flujo uniformemente con el tiempo. Este valor de $-c^{-1} d\Phi/dt$ constante representa una fem constante V actuando en el circuito. La corriente alterna en signo a medida que Φ aumenta, y la frecuencia de esta corriente alterna es igual al número de cuanta de flujo introducido por unidad de tiempo. La velocidad angular ω de la corriente en este efecto Josephson a.c. es:

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$

que es del orden de magnitud de $\frac{1}{2}$ GHz por microvolt. Es interesante notar que esta es exactamente la diferencia en frecuencia que asociaríamos a la función de onda de un sólo par de electrones colocados en este aparato. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo nos dice que una partícula de energía E tiene una función de onda:

$$\Psi(r,t) = \psi(r) e^{-i Et/\hbar}$$

mientras que la función de onda para una partícula de energía: $\mathcal{E} + 2eV$ varía con el tiempo como $e^{-i(\mathcal{E}+2eV)t/\hbar}$. Para una partícula como ésta nunca podemos esperar medir la fase de la función de onda, ya que cantidades físicamente medibles como la densidad de partículas siempre envuelven $|\Psi|^2$. Esto puede pensarse como otra forma del Principio de Incertidumbre, y dice que si el número de partículas se conoce, entonces la fase es desconocida. Sin embargo, podemos formar una función de onda de fase conocida si formamos un paquete de onda de diferentes números de partículas. Agregando cantidades iguales del estado fundamental $n = 0$ y del estado $n = 1$ de un oscilador armónico por ejemplo, de una función de onda que oscila con la frecuencia del oscilador clásico. Así vemos en la unión Josephson un instrumento en el que la incerteza en el número de pares a cada lado de la barrera permite medir la fase relativa de la función de onda de las dos partes del sistema. Este concepto puede extenderse a la teoría de superfluidos del Helio líquido, donde efectos análogos al efecto Josephson a.c. se han detectado cuando se mantiene una diferencia de presiones entre dos partes de un recipiente separadas por un pequeño agujero.

4.8 Las Ecuaciones Ginzburg-Landau.

La destrucción de la superconductividad por un campo magnético lo suficientemente fuerte puede extenderse considerando la energía asociada con el efecto Meissner. La expulsión de todo el flujo magnético del interior de una muestra larga paralela a un campo aplicado H_0 da una magnetización efectiva por unidad de volumen de $-H_0/4\pi$. Debido a que el operador de momento magnético está dado por $-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}$ se encuentra que la energía de la muestra debida a su magnetización es:

$$\mathcal{E}_M = \Omega \int_0^{H_0} \frac{H}{4\pi} dH = \frac{\Omega H_0^2}{8\pi}$$

Cuando esta energía se vuelve mayor que la energía de condensación F_c , ya no es energéticamente favorable para la muestra mantenerse en el estado superconductor. En un superconductor de acoplamiento débil a temperatura cero, por ejemplo, el campo crítico, H_c , arriba del cual el metal no permanece uniformemente superconductor está dado por:

$$\frac{\Omega H_c^2}{8\pi c} = \frac{1}{2} D(\frac{1}{2}) \Delta^2(0)$$

A temperaturas finitas $H_c(T)$ puede encontrarse identificando la energía de condensación con la diferencia entre las energías de Helmholtz de las fases normal y superconductoras;

Si se cambia la geometría de la muestra a la de una barra transversal, la energía magnética se aumenta bastante, pues ahora hay una región más grande de la parte exterior de la muestra de la que el campo aplicado es excluido parcialmente. Como la energía de condensación permanece constante, el espécimen comienza a volverse normal en un pozo de campo aplicado bajo H_c . La muestra no se vuelve completamente no-superconductor, sino que entra a lo que se conoce como Estado Intermedio, en el que un gran número de regiones normales y superconductoras existen entremezcladas. De esta forma se reduce enormemente la energía magnética mientras que una gran parte de la energía de condensación se retiene. Este comportamiento es similar al descrito en la primera parte. La diferencia entre un superconductor tipo I y un superconductor tipo II es que el primero, sólo forma una mezcla de regiones normales y superconductoras cuando se aumenta la energía magnética por factores geométricos; y el superconductor tipo II entra al estado mixto cuando el campo es bastante fuerte. En el Estado Mixto, la distancia entre las regiones normales es típicamente de 3×10^{-5} cm, lo cual puede compararse con la estructura más o menos tosca del estado intermedio que se caracteriza por distancias típicamente del orden de 10^{-2} cm.

El análisis de estos fenómenos en términos de la teoría BCS es bastante complicado. Es debido a que el campo magnético es una función de variación rápida de la posición dentro del espécimen que debemos volver a nuestros argumentos de la sección 4.5 y preguntarnos por la respuesta al vector potencial $A_q e^{iq \cdot r}$ cuando q no es más despreciablemente pequeña. De esto vemos que en la ec. (4.50) la corriente $\langle j_q \rangle$ debida al vector potencial podría expresarse como la suma de dos partes -una negativa (diamagnética) y una positiva (paramagnética). En un superconductor a temperatura cero la parte paramagnética desaparece cuando $q \rightarrow 0$, mientras que en un metal normal la parte paramagnética cancela exactamente la parte diamagnética y no conduce a un efecto Meissner. Una investigación más cuidadosa muestra que a medida que q se aumenta de cero, la respuesta paramagnética de un superconductor también aumenta, hasta que para una q lo bastante grande se aproxima a la respuesta de un metal normal. Si se expresa este resultado en la forma:

$$(4.59) \quad \langle j_q \rangle = -L_q A_q$$

entonces se encuentra que L_q primero se vuelve apreciablemente menor que su valor para q cero, cuando la aproximación:

$$E_{k+q} - E_k \cong q \cdot \frac{\partial E_k}{\partial k}$$

se vuelve válida. Esto ocurre cuando

$$q \cdot \frac{\partial E_k}{\partial k} \sim \Delta$$

lo cual es equivalente a la condición:

$$q \xi_0 \sim 1$$

con $\xi_0 = \hbar v_f / \pi \Delta$, la longitud de coherencia definida por v_f la velocidad de Fermi. La transformada de Fourier de la ec. (4.59) es una ecuación de la forma:

$$(4.60) \quad \langle j(r) \rangle = - \int L(r') A(r-r') dr'$$

donde $L(r')$ que puede ser razonablemente bien aproximada por $L_0 e^{-r'/\xi_0}$. Una ecuación de esta clase fue sugerida por Pippard sobre bases macroscópicas antes del desarrollo de la teoría BCS.

Cuando la longitud de coherencia ξ_0 es mucho más pequeña que la profundidad de penetración λ , entonces $A(r-r')$ no variará apreciablemente dentro del rango de $L(r')$. La ec. (4.60) nos dice que la densidad de corriente en un punto será aproximadamente proporcional al vector potencial en la medida que hemos escogido, y la ecuación de London, (4.46), será válida. Bajo estas circunstancias será energéticamente favorable para que ocurra la superconductividad tipo II, a medida que el campo magnético pueda penetrar el superconductor y reducir la energía magnética sin reducir la energía de condensación. Si, por otra parte, $\lambda \ll \xi_0$ entonces la ec. (4.60) predice una relación no-local entre el campo magnético y la densidad de corriente; con lo que la función de onda del superconductor puede modificarse a una distancia ξ_0 de la superficie del espécimen con una reducción consecuente en la energía de condensación. Ya que el campo magnético sólo penetra una distancia corta λ , se gana muy poca energía magnética, y la muestra será un superconductor tipo I. Podemos ilustrar esta situación si hacemos la generalización de que en un campo magnético de variación espacial el parámetro de salto Δ debe considerarse como una función de la posición. La variación de $B(r)$ y $\Delta(r)$ en la fronteras que separan las regiones normales y superconductoras de un metal pueden ser descritas como en las figuras para superconductores tipo I & tipo II respectivamente, donde Δ_∞ es el valor de Δ bastante adentro del superconductor.

Una predicción de la geometría del estado mixto en los superconductores tipo II puede obtenerse considerando la energía de Helmholtz \mathcal{F}_c en un superconductor en el que el parámetro de salto Δ varía con la posición. Vimos en la ec. (4.30) que la energía de condensación es proporcional a $-\Delta^2$ en un superconductor

homogéneo a temperatura cero, y por lo tanto es natural esperar que el término dominante en la energía de Helmholtz varíe con $-\Delta^2(r)$ en el caso más general. El hecho que la ec. (4.60) muestra la corriente (y por consiguiente la función de onda) en un punto r , depende de las condiciones en puntos distantes ξ_0 de r , sugiere que debe incluirse un término proporcional a $[\xi_0 \nabla \Delta(r)]^2$ en \mathcal{F}_S . En la presencia de un campo magnético esta contribución debe modificarse para conservar la invariancia en medida a $[\xi_0 (\nabla - i e^* A(r)/\hbar c) \Delta(r)]^2$ donde e^* se toma de nuevo igual a $2e$; también debe agregarse una densidad de energía magnética de $H^2/8\pi$.

Mientras que los términos que hemos discutido hasta ahora presentan una aproximación regular de \mathcal{F}_S , esta forma de la energía de Helmholtz no permite discutir qué red particular bidimensional de regiones normales da el estado mixto de menor energía de Helmholtz, esto se debe a la linealidad de la ecuación que se obtiene tratando de minimizar \mathcal{F}_S con respecto a Δ . De acuerdo con esto, se debe incluir el próximo término de potencia mayor en Δ , que en este caso será proporcional a Δ^4 . La expresión para la diferencia de las energías de Helmholtz entre los estados normal y superconductor será entonces:

$$(4.61) \quad \mathcal{F}_S - \mathcal{F}_N = \int \left\{ a |\Delta(r)|^2 + \frac{1}{2} b |\Delta(r)|^4 + \frac{H^2}{8\pi} + c \left| \left(\nabla - \frac{2ieA}{\hbar c} \right) \Delta(r) \right|^2 \right\} dr$$

con a , b & c constantes que dependen de la temperatura y donde se ha permitido la posibilidad de un Δ complejo en el espíritu de la discusión de la fase de la función de onda superconductor dada al final de la sección 4.7. La minimización de \mathcal{F}_S respecto a $A(r)$ & $\Delta(r)$ conduce a las ecuaciones de Ginzburg-Landau, las que en principio nos capacitan para calcular A & Δ como funciones de la posición y de las constantes a , b & c . Estas constantes pueden evaluarse en términos de los parámetros del material homo-

géneo cuando \mathcal{F}_3 se deriva del hamiltoniano BCS usando algunos procedimientos raros y difíciles aplicados por primera vez por Gorkov. Es posible eliminar todos menos uno de estos parámetros que aparecen explícitos en la energía de Helmholtz trabajando en términos de las cantidades adimensionales en las cuales H se mide con relación a H_c , las distancias se miden en relación a la profundidad de penetración de London λ_L , y en la que $\psi(\vec{r})$ es la razón de $\Delta(\vec{r})$ a su valor en el material homogéneo. Las ecuaciones de Ginzburg-Landau toman entonces la forma:

$$(4.62) \quad \left\{ 1 - |\psi|^2 - \left[\frac{1}{ik} \nabla - A \right]^2 \right\} \psi = 0$$

$$(4.63) \quad |\psi|^2 A + \nabla \times \nabla \times A = \frac{1}{2ik} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

donde k es λ/ξ_0 . El hecho que k es el único parámetro del material que interviene en estas ecuaciones confirma la idea que es sólo esta cantidad la que determina si un superconductor es de tipo I ó de tipo II. La solución detallada de las ec. (4.62) & (4.63) conduce a una variedad de predicciones cualitativas correctas del comportamiento de los superconductores tipo II.

El menor campo crítico aplicado H_{c1} al cual empieza a volverse energéticamente favorable para que un hilo de material normal exista en el superconductor puede mostrarse que es menor que H_c , el campo crítico del material (macroscópico) calculado de Δ , siempre que $K > 1/\sqrt{2}$. En forma similar, el campo crítico mayor, H_{c2} , bajo el cual una red regular bidimensional triangular de hilos de material normal forma el estado de menor energía puede calcularse que es aproximadamente $kH_c/\sqrt{2}$. Esto se ilustra en un diagrama de fase en el cual el estado del superconductor se muestra como una función del parámetro de Ginzburg-Landau k , y el campo magnético aplicado H_0 . La existencia de una capa superficial superconductora en los materiales tipo II arriba de

un campo aplicado H_{c3} que es aproximadamente igual a $1.7H_{c2}$ puede mostrarse que se sigue de las ecuaciones (4.62) & (4.63).

BIBLIOGRAFIA

- BLATT, JOHN. Theory of Superconductivity, Academic Press, Inc.
- D. SHOENBERG, F. R. S. Superconductivity Cambridge University Press.
- GOLDSTEIN, HERBERT. Classical Mechanics Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- KITTEL, CHARLES. Introduction Solid State Physics, Second Edition John Wiley & Sons, Inc.
- LONDON, FRITZ. Superfluids: Macroscopic Theory of Superconductivity, Vol. 1, Second Edition Dover Publications, Inc.
- MESSIAH, ALBERT. Quantum Mechanics, North Holland Publishing Co., John Wiley & Sons, Inc.
- REITZ, JOHN & MILFORD, FREDERICK. Foundations of Electromagnetic Theory, Second Edition Addison-Wesley Publishing Co., Inc.
- SCHIFF, LEONARD. Quantum Mechanics, Third Edition McGraw - Hill, Inc.
- TAYLOR, A. W. B. Superconductivity the Wykeham Science Series for Schools and Universities Springer - Verlag.
- TAYLOR, PHILIP. A Quantum Approach to the Solid State. Prentice - Hall, Inc.
- ZIMAN, J. M. Principles of the Theory of Solids. Cambridge University Press.
- REIF, FEDERICK. Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, International Students Edition McGraw - Hill, Inc. Kogakusha.