

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades
Departamento de Matemática



El teorema de Riemann-Roch:
Límite entre álgebra, geometría y topología

Trabajo de graduación presentado por
Mario Roberto Gómez Flores
para optar al grado académico
de Licenciado en Matemática

Guatemala
2016

**El Teorema de Riemann-Roch:
Límite entre álgebra, geometría y topología**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades
Departamento de Matemática



El teorema de Riemann-Roch:
Límite entre álgebra, geometría y topología

Trabajo de graduación presentado por
Mario Roberto Gómez Flores
para optar al grado académico
de Licenciado en Matemática

Guatemala
2016

Vo.Bo.:



MSc. Alan Reyes

Tribunal Examinador:



MSc. Alan Reyes



Dr. Roberto Molina



Lic. Dorval Carías

Fecha de aprobación: Guatemala, 30 de septiembre de 2016

PREFACIO

Terence Tao dice que la formación de un estudiante de matemáticas se puede dividir en tres etapas. La primera es una etapa de intuición en la que la matemática se enseña informalmente. Los conceptos se introducen a través de ejemplos y se enfatiza el resolver operaciones. El aprendizaje se da más por intuición; se sabe que las propiedades que uno aprende funcionan mas no necesariamente por qué. La segunda etapa es la etapa de rigor matemático, en la que se empieza a estudiar la matemática “de verdad”. En esta etapa, una clase típica consta de definiciones, teoremas y demostraciones. Ahora es necesario, no solo conocer las propiedades, sino saber por qué funcionan y ser capaz de demostrarlo. La última etapa es la de pos-rigor. Podría decirse que es la mezcla de las dos anteriores y es cuando un matemático alcanza la madurez. El estudiante puede usar su intuición para demostrar y entender la teoría y es capaz de sustentarlo con pruebas rigurosas si es necesario. El énfasis en esta última etapa es nuevamente la intuición y ser capaz de ver el panorama general de una teoría, en lugar de un conglomerado de teoremas. (Tao, s.f.)

De acuerdo con esta clasificación, creo que esta tesis entra por lo menos en la etapa de rigor (la segunda), aunque quizás está con un pie en la tercera. Quería escribirla de forma que fuera accesible a estudiantes de pregrado, que explicara la idea detrás de las demostraciones y diera el marco general de la teoría. También debía fundamentar formalmente todos los pasos y evitar frases como “es obvio que”. Aunque sí utilizo este último recurso, confío en haber dejado suficiente trasfondo para que el lector pueda terminar los detalles que faltan (la frase también tiene sus usos, a pesar de lo que uno pueda pensar cuando está en la transición entre la etapa de intuición y rigor).

Es importante aclarar que la fuente principal de este trabajo es el libro de Miranda (1995). Su redacción amigable y detallada me hizo preferirlo frente a otras fuentes. Considero que el valor de esta tesis es, de acuerdo con el párrafo anterior, haber llenado los detalles que “se dejaban al lector” en muchas demostraciones. No estoy seguro de haber logrado la componente de intuición que buscaba, pero confío que expliqué bien los primeros capítulos de forma que el lector pueda construir su propia intuición en los capítulos posteriores y que pueda estudiar otros textos más avanzados con facilidad.

ÍNDICE

	Página
Prefacio	V
Lista de figuras	IX
Resumen	XI
I. Introducción	1
II. Topología de variedades	3
A. Definiciones básicas	3
B. Ejemplos de variedades	6
C. Superficies de Riemann	10
D. Ejemplos de superficies de Riemann	14
E. Teoremas importantes de variedades y superficies	15
III. Funciones sobre superficies de Riemann	21
A. Funciones de valores complejos sobre superficies de Riemann	21
B. Funciones entre superficies de Riemann	25
C. Propiedades de los mapeos holomorfos	27
1. Series de Laurent	28
2. Teoremas heredados del análisis complejo	31
3. Funciones meromorfas y mapeos holomorfos en la esfera de Riemann	32
4. Forma normal y multiplicidad de un mapeo holomorfo	33
D. Funciones entre superficies de Riemann compactas	36
1. Fórmula de Riemann-Hurwitz	38
IV. Formas diferenciales e integrales	41
A. Formas diferenciales	41
1. Formas diferenciales definidas en un atlas	42
2. Orden de 1-formas meromorfas	45
3. 2-formas diferenciales	47
B. Operaciones con formas diferenciales	48
1. Producto exterior de 1-formas diferenciales	48
2. Diferenciales de funciones y 1-formas	49
3. Pullback de formas diferenciales	52
C. Integración	53
1. Integrales de 1-formas	54

2.	Residuos	60
3.	Integrales de 2-formas	60
4.	Cadenas	61
D.	Resultados importantes	62
V.	Divisores y curvas algebraicas	65
A.	Divisores	65
1.	Divisores principales y divisores canónicos	66
2.	Equivalencia lineal de divisores	69
3.	Espacios de funciones y 1-formas meromorfas asociados a un divisor	71
4.	Cota superior para la dimensión de $L(D)$	74
B.	Curvas algebraicas	75
1.	Funciones meromorfas con comportamiento prescrito	76
2.	$\mathcal{M}(X)$ como extensión del campo \mathbb{C}	79
C.	Divisores de truncamiento de Laurent	83
1.	Mapas de truncamiento	84
2.	Espacio $H^1(D)$	85
VI.	Teorema de Riemann-Roch	93
A.	Aplicación residuo	93
B.	Dualidad de Serre	94
C.	Segunda forma del Teorema de Riemann-Roch	97
VII.	Aplicaciones	99
A.	Superficies de Riemann y Teorema de Riemann-Roch	99
B.	Mapeos holomorfos y género	100
C.	Puntos de Weierstrass	101
VIII.	Bibliografía	105

Índice de figuras

	Página
II.1. Vecindades de un punto homeomorfas a abiertos de \mathbb{R}^n	3
II.2. Toro generado al girar un anillo alrededor de un punto.	7
II.3. Toro generado al pegar los lados opuestos de una hoja de papel.	7
II.4. Traslación del conjunto P' a P_δ	9
II.5. Cartas locales y función de transición	11
II.6. Posibles triangulaciones de un toro.	16
II.7. Intersecciones prohibidas en una triangulación	16
II.8. Ejemplos de suma conexa de toros	18
II.9. Definición de orientación antihoraria usando $e^{2\pi ti}$	18
III.1. Forma local de un mapeo entre superficies de Riemann	25

RESUMEN

En este trabajo se presenta una demostración del Teorema de Riemann-Roch sobre superficies de Riemann definidas como variedad compleja de dimensión 2. Se comienza definiendo variedades y se enuncian sin demostración teoremas acerca de triangulaciones, característica de Euler y género. Con esta base, se desarrolla la teoría de funciones meromorfas y de formas diferenciales sobre superficies de Riemann. Los resultados más importantes son los teoremas de Riemann-Hurwitz y del Residuo. Luego de construir esta base, se definen divisores y sus espacios vectoriales asociados. A pesar de que la existencia de funciones meromorfas no constantes en una superficie de Riemann compacta es un paso vital, la demostración es muy extensa. Por ello, el trabajo se limita a un tipo particular de superficie de Riemann, las curvas algebraicas. En este nuevo contexto, se encuentran funciones meromorfas con series de Laurent prescritas en una cantidad finita de puntos y se demuestran cotas para la dimensión de los espacios asociados a un divisor. Finalmente, se demuestra el resultado principal utilizando el Teorema de Dualidad de Serre.

En el último capítulo se presentan aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch. Se demuestra que las únicas superficies de Riemann en las que vale el resultado principal son curvas algebraicas. Se demuestra una relación entre dos superficies de Riemann entre las que existe un mapeo holomorfo y su género. Se definen puntos de Weierstrass y se finaliza enunciando un teorema que caracteriza las superficies de Riemann como espacios cubiertos de la esfera.

I. INTRODUCCIÓN

El renombrado David Hilbert decía que los problemas son el elemento vital de la matemática. De acuerdo con este criterio, la geometría algebraica es uno de los candidatos para ser la teoría perfecta. Junto con la teoría de números, ambas ramas requieren herramientas de prácticamente cualquier otro campo de la matemática y viceversa. Hoy en día la geometría algebraica es el vínculo entre conceptos aparentemente distantes. (Dieudonné, 1972)

Un ejemplo de esta amalgama de ideas matemáticas es el Teorema de Riemann-Roch, que da una relación entre la dimensión de ciertos espacios de funciones meromorfas y el género del dominio. El propio enunciado del teorema involucra álgebra, análisis y topología. En consecuencia, el camino hacia este resultado requerirá muchas herramientas. Las variedades proveen el ambiente idóneo para empezar este recorrido. Familiarizados con su topología iniciaremos el estudio de funciones sobre superficies de Riemann. Aquí aparece el primer vínculo entre dos ramas distintas. Al conferir información geométrica a los puntos que tienen información analítica nace la fórmula de Riemann-Hurwitz, la relación entre el análisis y la topología. Por otro lado, los conjuntos de funciones también contienen información algebraica. El Teorema del Residuo, fruto de la teoría de integración, será una pieza clave para relacionar esta información algebraica con la topológica. Finalmente el Teorema de Dualidad de Serre proveerá el último eslabón para unir toda esta información en el Teorema de Riemann-Roch.

El Teorema de Riemann-Roch requiere mucho trabajo, pero este esfuerzo es bien recompensado. La información local de una variedad no siempre puede usarse para conocer sus propiedades globales, pero el Teorema de Riemann-Roch disminuye la dificultad de este problema en el caso de las superficies de Riemann compactas. Además es el puente que une la definición moderna de superficie de Riemann y el concepto original que el mismo Riemann forjó. Así que más que un vínculo, el Teorema de Riemann-Roch es una componente fundamental de la teoría de superficies de Riemann.

II. TOPOLOGÍA DE VARIEDADES

El principal objeto de estudio de este trabajo son funciones sobre superficies de Riemann. Estas superficies pertenecen a una clase de espacios más general, las variedades. Informalmente, una variedad es un espacio topológico que localmente “se ve” como un espacio euclidiano, es decir, \mathbb{R}^n .

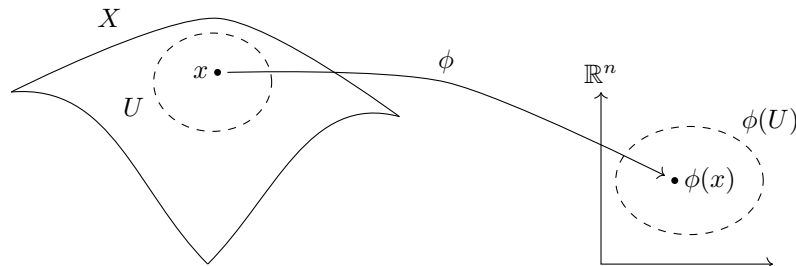
Para entender el concepto de variedad, pensemos en la Tierra. Mucha gente creía que la Tierra es plana. De hecho, si una persona observa el suelo a su alrededor, ve que este es plano. Si viaja podría encontrar montañas, valles, barrancos y otras imperfecciones, pero si ignora estos accidentes geográficos, puede ver que la forma del suelo es esencialmente plana. Hoy sabemos que la Tierra es (casi) esférica. Por esto, usar el primer razonamiento para concluir que la Tierra completa es plana es un error. La persona solo está viendo lo que está cerca de ella, así que no puede dar conclusiones sobre la forma completa del planeta. Esta es la característica fundamental de las variedades. En vecindades pequeñas de un punto, la variedad tiene una forma conocida, aunque la forma global sea distinta. En el caso de la Tierra, nuestros alrededores se ven planos (es decir, como \mathbb{R}^2) y sabemos que su forma es realmente una esfera.

A. Definiciones básicas

Ya con un primer ejemplo de variedad, esta definición formaliza la intuición que se acaba de presentar.

Definición II.1. Un espacio *localmente euclidiano de dimensión n* es un espacio topológico X tal que todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n .

Figura II.1: Vecindades de un punto homeomorfas a abiertos de \mathbb{R}^n .



Ejemplo II.2. Cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con la topología subespacio heredada de \mathbb{R}^n es un espacio localmente euclidiano de dimensión n . Para cualquier punto $x \in U$, U es una vecindad de x abierta en \mathbb{R}^n . \square

Ejemplo II.3. Inspirados en que la Tierra es muy parecida a una esfera, el siguiente ejemplo es la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con la topología de subespacio de \mathbb{R}^3 . Sean $N = (0, 0, 1), P = (0, 0, -1) \in S^2$. Como \mathbb{R}^3 es Hausdorff, S^2 también lo es, así que los conjuntos de un solo punto son cerrados. En particular, $\{N\}$ y $\{P\}$ son cerrados por lo que $S^2 \setminus \{N\}$ y $S^2 \setminus \{P\}$ son abiertos en S^2 .

Considérense las funciones $\phi_1 : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\phi_2 : S^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\phi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, -\frac{y}{1+z} \right)$$

Nótese que ambas son funciones racionales cuyos denominadores no se anulan en sus respectivos dominios y, en consecuencia, continuas. Por el mismo razonamiento, sus inversas

$$\phi_1^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

$$\phi_2^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

también son continuas y están definidas en todo \mathbb{R}^2 , así que ϕ_1 y ϕ_2 son sobreyectivas. Si $\phi_1(x_1, y_1, z_1) = \phi_1(x_2, y_2, z_2)$, entonces $x_2 = \frac{1-z_2}{1-z_1}x_1$ y $y_2 = \frac{1-z_2}{1-z_1}y_1$. Por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ &= \left(\frac{1-z_2}{1-z_1} \right)^2 (x_1^2 + y_1^2) + z_2^2 \\ &= \left(\frac{1-z_2}{1-z_1} \right)^2 (1-z_1^2) + z_2^2. \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-z_2)^2(1-z_1^2) - (1-z_1)^2(1-z_2^2) \\ &= (1-z_1)(1-z_2)[(1-z_2)(1+z_1) - (1-z_1)(1+z_2)] \\ &= 2(1-z_1)(1-z_2)(z_1-z_2). \end{aligned} \tag{II.1}$$

Tanto z_1 como z_2 son diferentes de 1 pues $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S^2 \setminus \{N\}$. Por ello, la única solución de (II.1) es $z_1 = z_2$, que conlleva $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Esto implica que ϕ_1 es inyectiva. Un razonamiento análogo muestra que ϕ_2 también es inyectiva. Por lo tanto, ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos de sus respectivos dominios con \mathbb{R}^2 . Finalmente, como $S^2 = (S^2 \setminus \{N\}) \cup (S^2 \setminus \{P\})$, cualquier punto de la esfera tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 . En conclusión, S^2 es un espacio

localmente euclidiano de dimensión 2. \square

Ejemplo II.4. Sea $M = \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{R}_d denota el conjunto de números reales con la topología discreta. Sea $(a, x) \in M$. En \mathbb{R}_d , $\{a\}$ es abierto, así que $U = \{a\} \times \mathbb{R}$ es una vecindad abierta de (a, x) en M homeomorfa a \mathbb{R} . Entonces, M es un espacio localmente euclidiano de dimensión 1. Por otro lado, si $(a, x), (b, y) \in M$ son distintos, tenemos dos opciones:

- Si $a \neq b$, $\{a\} \times \mathbb{R}$ y $\{b\} \times \mathbb{R}$ son vecindades disjuntas de (a, x) y (b, y) , respectivamente.
- Si $a = b$ y $x \neq y$, como \mathbb{R} es Hausdorff, existen U, V vecindades disjuntas de x, y , respectivamente. Con ellas, $\{a\} \times U$ y $\{a\} \times V$ son vecindades disjuntas de (a, x) y (a, y) .

Estos dos casos muestran que M es Hausdorff. Ahora bien, M no es segundo enumerable. Sean \mathcal{B} una base de M y $x \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{x\} \times \mathbb{R}$ es un abierto de M , así que \mathcal{B} debe contener un abierto B_x tal que $x \in B_x \subset \{x\} \times \mathbb{R}$. Entonces el conjunto no enumerable de abiertos $\{B_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ está contenido en \mathcal{B} , causando que \mathcal{B} tampoco sea enumerable. \square

Ejemplo II.5. Considérese el conjunto $\mathbb{R}_{0 \times 1} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$, formado por dos copias de la recta real. Los abiertos de este espacio son los conjuntos de la forma $(U \times \{0\}) \cup (V \times \{1\})$, donde U, V son abiertos de \mathbb{R} en la topología usual. Defínase una relación de equivalencia mediante $(x, 0) \sim (x, 1)$ para todo $x \neq 0$ y denótese al espacio cociente como $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_{0 \times 1} / \sim$. El mapa cociente correspondiente $f : \mathbb{R}_{0 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_0$ está definido por $f(x, i) = [x]$ para $x \neq 0$ y $f(0, i) = \{(0, i)\}$ para $i = 0, 1$. El espacio \mathbb{R}_0 se llama la recta con dos orígenes.

Si $[x] \in \mathbb{R}_0$ es la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y U es una vecindad de x en \mathbb{R} , $f(U \times \{0\})$ es una vecindad de $[x]$ homeomorfa a U . En cambio, si $x = 0$, $f(U \times \{0\})$ es una vecindad de $\{(0, 0)\} \in \mathbb{R}_0$ y $f(U \times \{1\})$, de $\{(0, 1)\} \in \mathbb{R}_0$; ambos conjuntos son homeomorfos a U . Por lo tanto, \mathbb{R}_0 es localmente euclidiano de dimensión 1.

Por otro lado, \mathbb{R}_0 no es Hausdorff. De hecho, no podemos separar a $(0, 0)$ y $(0, 1)$ mediante abiertos. Si tomamos vecindades arbitrarias U de $(0, 0)$ y V de $(0, 1)$, existen U' y V' vecindades de 0 en \mathbb{R} tales que $f(U' \times \{0\}) = U$ y $f(V' \times \{1\}) = V$. Sin embargo, $U' \cap V' \neq \emptyset$ implica $U \cap V \neq \emptyset$. \square

Estos ejemplos muestran casos extraños de espacios localmente euclidianos. En el ejemplo II.4, el plano \mathbb{R}^2 se separó en infinitas fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$. El espacio del ejemplo II.5 es una sola recta que tiene dos ceros infinitamente cerca que no se pueden separar. Como las variedades (y en particular, las superficies de Riemann) son objetos “naturales”, la definición de espacios localmente euclidianos se refina para excluir estos casos patológicos.

Definición II.6. Un espacio topológico X es una *variedad topológica de dimensión n* (o *n -variedad topológica*) si X es localmente euclidiano de dimensión n , Hausdorff y segundo enumerable. En particular, una variedad de dimensión 2 se llama *superficie*.

Observación. Es necesario hacer dos comentarios a la definición II.6. Primero, existen varios tipos de variedades dependiendo de las propiedades adicionales que el espacio X o sus funciones puedan tener. El objeto de estudio de este trabajo son las superficies de Riemann, que son claramente distintas de las variedades topológicas. Segundo, por razones de simplicidad el estudio se restringe a variedades conexas. Si se desea comprobar alguna propiedad de una variedad desconexa, se demuestra primero en espacios conexos y después se aplica a cada componente. Dicho esto, en este estudio las variedades topológicas conexas de dimensión n serán llamadas simplemente variedades de dimensión n o n -variedades.

B. Ejemplos de variedades

Ejemplo II.7. \mathbb{R}^n con la topología usual, además de localmente euclidiano de dimensión n , es Hausdorff y segundo enumerable; en consecuencia, \mathbb{R}^n es una variedad de dimensión n . \square

Ejemplo II.8. El plano complejo \mathbb{C} es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, es una variedad de dimensión 2 o una superficie. \square

Ejemplo II.9. La esfera S^2 del ejemplo II.3 es un subespacio de \mathbb{R}^3 y, como tal, es Hausdorff y segundo enumerable. También es un espacio localmente euclidiano de dimensión 2, así que S^2 es una 2-variedad. \square

Ejemplo II.10. La recta larga del ejemplo II.4 no es segundo enumerable y la recta con dos orígenes del ejemplo II.5 no es Hausdorff. Ambos son localmente euclidianos, pero ninguno es una variedad. \square

Ejemplo II.11 (Toro complejo). En este ejemplo se define un espacio topológico conocido como toro, o toroide de dos formas distintas. La primera forma es como una superficie de revolución generada por la rotación de una circunferencia S^1 alrededor de un punto fuera de ella. Esto genera el espacio de la figura II.2.

El segundo definición inicia con una hoja de papel. Al pegar los lados opuestos se obtiene un cilindro. Si luego se pegan los extremos abiertos del cilindro uno con otro, nuevamente se obtiene el toro (figura II.3).

Para formalizar la segunda definición, se eligen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Sea $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ el retículo generado por $\{\omega_1, \omega_2\}$. L es un subgrupo normal del grupo aditivo abeliano \mathbb{C} . Sean, entonces, $X = \mathbb{C}/L$ el grupo cociente y $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ la proyección canónica. X se dota con la topología cociente: U es abierto en X si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C} . Se mostrará que esta definición corresponde con la idea intuitiva de pegar los bordes de una hoja de papel.

Sean $P = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}$ y $P' = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)\}$. P es un paralelogramo cerrado. Su “base” es ω_1 y su “altura”, ω_2 . P' es el mismo paralelogramo con los

Figura II.2: Toro generado al girar un anillo alrededor de un punto.

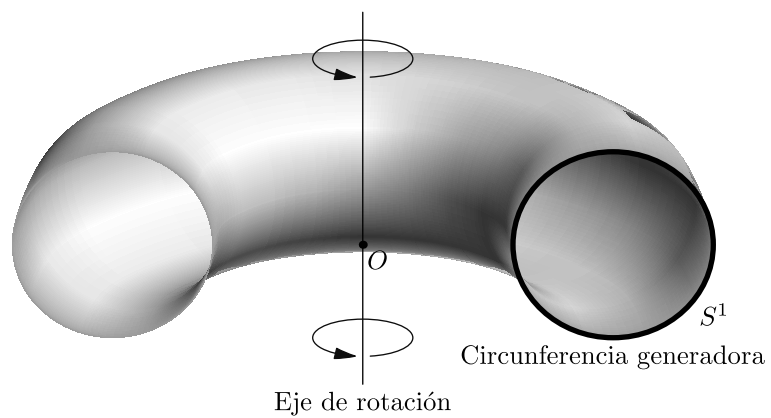
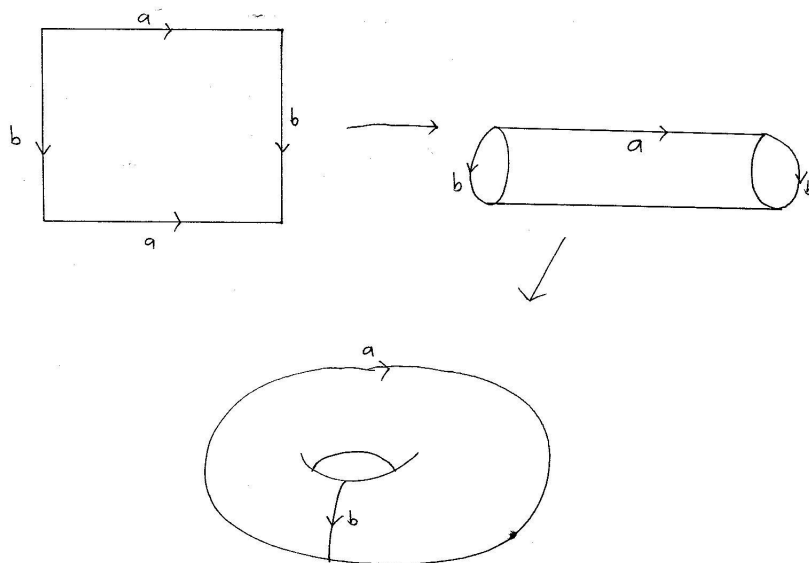


Figura II.3: Toro generado al pegar los lados opuestos de una hoja de papel.



Fuente: <http://365daysofpattern.blogspot.com/2013/04/tiling-on-torus.html>

bordes superior y derecho removidos. Como ω_1, ω_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , forman una base para el espacio vectorial \mathbb{C} . Así, para todo $z \in \mathbb{C}$, existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $z = s\omega_1 + t\omega_2$. Sean $m_1 = \lfloor s \rfloor$ y $m_2 = \lfloor t \rfloor$. Escribiendo de forma única $s = m_1 + \lambda_1$, $t = m_2 + \lambda_2$, con $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$, se observa que $z = (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) + (m_1\omega_1 + m_2\omega_2) \in (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) + L$. Es decir, z es congruente a un único punto de P' módulo L . En otras palabras, P' es el conjunto de representantes canónicos del grupo cociente X .

Ahora, ¿qué sucede con los puntos de $P \setminus P' = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in P \mid \lambda_1 = 1 \text{ o } \lambda_2 = 1\}$? Sean $\lambda_1 \in [0, 1)$ y $\lambda_2 = 1$. El punto $z_1 = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in P \setminus P'$ es congruente a $z_0 = \lambda_1\omega_1 \in P'$ módulo L . En otras palabras, el mapa cociente manda z_1 y z_0 al mismo punto, lo que corresponde con la idea intuitiva de “pegar” el borde superior de P con su borde inferior. Análogamente, π pega el borde derecho de P con el borde izquierdo. Efectivamente, X cumple con la segunda descripción de un toro.

A continuación se exploran las propiedades topológicas de X . Sea $V \subset \mathbb{C}$ cualquiera. $x \in \bigcup_{\omega \in L} (\omega + V) \iff$ existen $\omega \in L$, $v \in V$ tales que $x = \omega + v \iff$ existe $v \in V$ tal que $\pi(x) = \pi(v) \iff x \in \pi^{-1}(\pi(V))$. Entonces,

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + V). \quad (\text{II.2})$$

En particular, si V es abierto, $\omega + V$ es una traslación de V y, por ende, es abierto. Así, el lado derecho de la ecuación (II.2) es abierto por ser unión de abiertos, mostrando que $\pi^{-1}(\pi(V)) \subset \mathbb{C}$ es abierto. Por definición de abiertos en X , $\pi(V)$ también lo es. Por lo tanto, π es un mapa abierto.

Sea $\varepsilon = \inf_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|x|}{4}$. Si $x, y \in L$ son distintos, $x - y \in L \setminus \{0\}$ y $|x - y| \geq 4\varepsilon > 2\varepsilon$. Sea $D_{z_0} = B_\varepsilon(z_0)$ una bola centrada en algún $z_0 \in \mathbb{C}$. La distancia máxima entre cualquier par de puntos de D_{z_0} es menor que 2ε , así que D_{z_0} no puede contener dos puntos distintos de L . Como π es una función continua, sobreyectiva y abierta, su restricción $\pi|_{D_{z_0}}$ también lo es. Ahora bien, si $x, y \in D_{z_0}$ son tales que $\pi|_{D_{z_0}}(x) = \pi|_{D_{z_0}}(y)$, entonces $x = y + \omega$ para algún $\omega \in L$. Sin embargo, si $\omega \neq 0$ entonces $2\varepsilon < |\omega - 0| = |x - y| < 2\varepsilon$, una contradicción. La única opción restante es $\omega = 0$, es decir, $x = y$. Esto quiere decir que $\pi|_{D_{z_0}}$ es inyectiva. Por ende, $\pi|_{D_{z_0}}$ es un homeomorfismo entre el disco D_{z_0} y un abierto de X .

Por sobreyectividad de π , para todo $\bar{x} \in X$ existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(x) = \bar{x}$. Por el razonamiento del párrafo anterior también existe un disco D_x que contiene a x tal que $\pi|_{D_x}(D_x)$ es un abierto en X homeomorfo a D_x . Como D_x es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 , $\pi|_{D_x}(D_x)$ es una vecindad de \bar{x} homeomorfa a \mathbb{R}^2 , por lo que X es un espacio localmente euclidiano de dimensión 2.

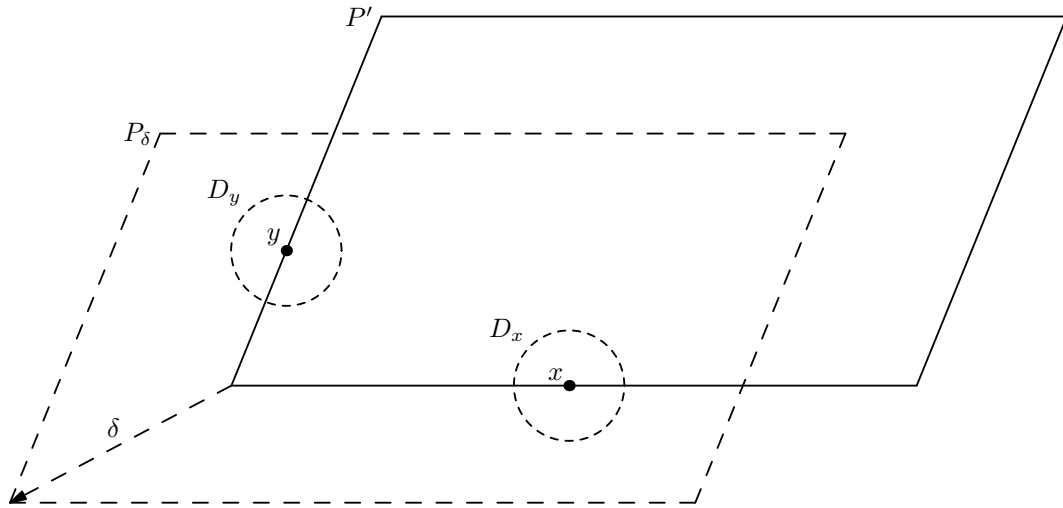
Como \mathbb{C} es conexo, P compacto y $X = \pi(\mathbb{C}) = \pi(P)$ es su imagen bajo la función continua π , X también es conexo y compacto. \mathbb{C} es segundo enumerable y X es un espacio cociente de \mathbb{C} , así que X también es segundo enumerable.

Se muestra ahora que X es Hausdorff. Sean \bar{x} y \bar{y} elementos distintos de X . En P' existen $x = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ y $y = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ elementos distintos tales que $\pi(x) = \bar{x}$ y $\pi(y) = \bar{y}$. Para $i = 1, 2$ se definen:

$$\delta_i = \begin{cases} \frac{1 - \mu_i}{2} & \text{si } \lambda_i = 0 \\ \frac{1 - \lambda_i}{2} & \text{si } \mu_i = 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_i\mu_i \neq 0. \end{cases}$$

Nótese que si $\lambda_i = \mu_i = 0$, δ_i toma el valor $\frac{1}{2}$ sin ambigüedad. Sea $\delta = \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2$ y considérese el conjunto $P_\delta = -\delta + P'$. La idea es trasladar el paralelogramo P' lo suficiente para que si x o y no están en $\text{int}(P')$, entren en $\text{int}(P_\delta)$; pero no demasiado para que si x o y ya están en $\text{int}(P')$, salgan de $\text{int}(P_\delta)$ (ver figura II.4).

Figura II.4: Traslación del conjunto P' a P_δ .



En efecto, sustituyendo $\lambda'_i = \lambda_i + \delta_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \\ &= -\delta + (\lambda_1 + \delta_1)\omega_1 + (\lambda_2 + \delta_2)\omega_2 \\ &= -\delta + (\lambda'_1\omega_1 + \lambda'_2\omega_2). \end{aligned}$$

De la misma forma, $\mu'_i = \mu_i + \delta_i$ produce $y = -\delta + \mu'_1\omega_1 + \mu'_2\omega_2$. Si $\lambda_i = 0$, $\delta_i = \frac{1 - \mu_i}{2} \leq \frac{1}{2}$ así que $\lambda'_i \in (0, 1)$. Si $\lambda_i \neq 0$, $\delta_i \in \{0, \frac{1 - \lambda_i}{2}\}$, por lo que $\lambda'_i \in \{\lambda_i, \frac{1 + \lambda_i}{2}\} \subset (0, 1)$. Un razonamiento análogo muestra que $\mu'_i \in (0, 1)$ de forma que $x, y \in \text{int}(P_\delta)$. Entonces, existen abiertos $U, V \subset \text{int}(P_\delta)$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y, como \mathbb{C} es Hausdorff, $U \cap V = \emptyset$. Además, existen discos D_x y D_y tales que $\pi|_{D_x}$ y $\pi|_{D_y}$ son homeomorfismos y, si su radio es suficientemente pequeño, $D_x \subset U$ y $D_y \subset V$. Además, al igual que P' , P_δ es un conjunto de representantes para las clases de equivalencia de \mathbb{C}/L .

Por ello, $\pi|_{P_\delta}$ es inyectiva y $\pi(D_x)$ y $\pi(D_y)$ son vecindades disjuntas de \bar{x} y \bar{y} , respectivamente. Por lo tanto, el toro X es Hausdorff y, con ello, también es una variedad compacta de dimensión 2. \square

C. Superficies de Riemann

El dominio de las funciones holomorfas son subconjuntos del plano complejo. Las variedades que se han trabajado hasta el momento son reales solamente, en el sentido que el espacio es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Ahora se cambia a un ambiente complejo. Como \mathbb{C} es una superficie en sí mismo, los objetos que se trabajan de ahora en adelante también son variedades, pero el cambio es necesario porque las funciones de variable compleja tienen propiedades que las reales no.

Definición II.12. Sea X un espacio topológico. El homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ entre abiertos $U \subset X$ y $V \subset \mathbb{C}$ de la definición II.1 se llama *carta local compleja* de X . Al escribir $z = \phi(x)$, para $x \in U$, se dice que z es la *coordenada local inducida por ϕ* . Si $\phi(p) = 0$ para algún $p \in U$, la carta ϕ está *centrada en p* .

Una ventaja de hacer explícito el homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ es la coordenada local inducida por ϕ . La carta ϕ asigna un número complejo $z = \phi(x) \in V$ a todo $x \in U$. Intuitivamente, el hecho de que U sea homeomorfo a V significa que la forma de ambos conjuntos es esencialmente la misma. Esta similitud permite describir la posición de x (adentro de U) mediante el número complejo z . Más adelante, en el estudio de funciones entre superficies de Riemann se le saca el mayor provecho a las coordenadas locales. Por ahora, la mejor forma de entenderlas es con el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.13. \mathbb{C} es una superficie y, en particular, es homeomorfo a \mathbb{R}^2 . La representación geométrica de ambos es un plano. En \mathbb{R}^2 , un punto P está representado por una coordenada x y una coordenada y . En \mathbb{C} , un número complejo $z = x + iy$ es representado por un punto de \mathbb{R}^2 , cuya abscisa es la parte real de z y la ordenada, la parte imaginaria de z . Es decir, z se representa como el punto (x, y) de \mathbb{R}^2 . Así, la función $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(z) = (\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ (que de hecho es un homeomorfismo) representa al número complejo z mediante dos coordenadas reales. Las cartas complejas juegan el mismo papel. La función inversa de ψ es el homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que le asigna el número complejo $z = x + iy$ al punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Al igual que $z \in \mathbb{C}$ puede ser representado con coordenadas reales, el punto $P \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado en el plano complejo usando una coordenada compleja. Así como ψ le da dos coordenadas reales a un número complejo, ϕ le da una coordenada compleja a un punto de \mathbb{R}^2 . \square

Ejemplo II.14. En el ejemplo II.3 se dan homeomorfismos explícitos entre abiertos de la esfera S^2 y abiertos de \mathbb{R}^2 . En virtud de la equivalencia entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} , estos homeomorfismos se pueden reescribir como cartas locales complejas. Así, se definen $\phi_1 : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\phi_2 : S^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C}$

por

$$\begin{aligned}\phi'_1(x, y, z) &= \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \\ \phi'_2(x, y, z) &= \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z}\end{aligned}$$

La única diferencia con el ejemplo II.3 es que el punto (u, v) de \mathbb{R}^2 cambió por el número complejo $u + iv$. \square

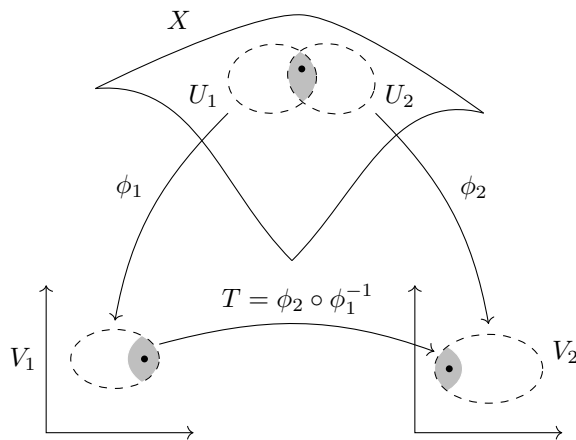
Ahora bien, el ejemplo anterior muestra que un punto puede recibir varias coordenadas distintas. De hecho, a excepción de N y P , todo punto de S^2 recibe dos coordenadas distintas, una dada por ϕ'_1 y otra por ϕ'_2 . La definición de funciones sobre variedades depende de las coordenadas locales, por lo que es necesario que sus propiedades (en particular, diferenciabilidad) no cambien sin importar la coordenada utilizada. Esto se logra delimitando el tipo de cartas complejas admitidas.

Definición II.15. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales complejas en X . Se dice que ϕ_1 es *compatible* con ϕ_2 si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o si la función

$$T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa. En este caso, T se llama *función de transición* de V_1 a V_2 .

Figura II.5: Cartas locales y función de transición



Si ϕ_1 y ϕ_2 inducen coordenadas locales en abiertos de X , T representa un cambio de coordenadas. El dominio y la imagen de T tienen formas similares, por ser T un homeomorfismo, y la transición entre ellos es suave en el sentido que T es infinitamente diferenciable (por ser holomorfa). Esto significa que las coordenadas inducidas por ϕ_1 y ϕ_2 no son esencialmente distintas.

Ejemplo II.16. Sean ϕ_1 y ϕ_2 las cartas locales del ejemplo II.14. Sean $U_1 = S^2 \setminus \{N\}$, $U_2 = S^2 \setminus \{P\}$ y $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$. Nótese que $\phi_1(P) = 0$ y que $\phi_2(N) = 0$, así que la imagen de la intersección $U_1 \cap U_2 = S^2 \setminus \{N, P\}$ bajo ϕ_1 y ϕ_2 es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Las inversas de ϕ_1 y ϕ_2 tienen la misma forma que las inversas de las funciones del ejemplo II.3; solamente hay que sustituir $u = \operatorname{Re}(z)$ y $v = \operatorname{Im}(z)$. Si se toma un $z \in \mathbb{C}$ distinto de 0 y se simplifica, se obtiene que $T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Como T está definida solo en $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es holomorfa en todo su dominio. Por lo tanto, ϕ_1 es compatible con ϕ_2 . Análogamente se muestra que $T(z) = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en su dominio, así que ϕ_2 es compatible con ϕ_1 . \square

El último paso para emular el concepto de variedad es asegurarnos que cada punto tenga una vecindad euclidiana. Para eso se define:

Definición II.17. Una colección de cartas complejas $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \subset X \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}\}$ es un *atlas complejo en X* si cualquier par de cartas $\phi_\alpha, \phi_\beta \in \mathcal{A}$ es compatible entre sí y $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

En un atlas complejo, la compatibilidad de cartas locales es simétrica: dadas $\phi_\alpha, \phi_\beta \in \mathcal{A}$, tanto $T = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ como $S = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son holomorfos en su dominio. Esto implica que las funciones de transición son biholomorfas y que los cambios de coordenadas son reversibles. Como consecuencia se tiene el siguiente lema.

Lema II.18. Sea \mathcal{A} un atlas complejo. Sean $\phi_\alpha, \phi_\beta \in \mathcal{A}$ cartas locales cualquiera y $T = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ su función de transición. Entonces $T'(z) \neq 0$ para cualquier z en el dominio de T .

Demostración. Sea $S = T^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$. Como \mathcal{A} es un atlas complejo, S es holomorfa. En el dominio de T , $(S \circ T)(z) = z$. Derivando esta ecuación respecto de z y usando la regla de la cadena se obtiene $S'(T(z))T'(z) = 1$. Por lo tanto, $T'(z) \neq 0$ en todo su dominio. \square

Ejemplo II.19. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Si U es un abierto de \mathbb{R}^2 , la función $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi_U(x, y) = x + iy$ es una carta local compleja. Además, si $U \cap V \neq \emptyset$, la función de transición $T : \phi_V(U \cap V) \rightarrow \phi_U(U \cap V)$ dada por $T(z) = \phi_U \circ \phi_V^{-1}(z) = z$ es holomorfa. Por lo tanto, la colección $\mathcal{A} = \{\phi_U \mid U \text{ abierto de } \mathbb{R}^2\}$ es un atlas complejo. En particular, $\mathcal{A}' = \{\phi_U \mid U = B_\varepsilon(x, y)\}$, el subconjunto que solo tiene las funciones correspondientes a las bolas abiertas de \mathbb{R}^2 , también es un atlas complejo. \square

Como muestra este ejemplo, un espacio puede tener más de un atlas complejo asociado. En general, decimos que dos atlas \mathcal{A} y \mathcal{A}' son equivalentes si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas; es decir, si todas las cartas de \mathcal{A} son compatibles con todas las de \mathcal{A}' . De hecho, tenemos el siguiente

Lema II.20. Todo atlas complejo está contenido en un único atlas maximal.

Demostración. Sean \mathcal{A}_0 un atlas complejo sobre X y \mathbb{A} el conjunto parcialmente ordenado por inclusión de todos los atlas equivalentes con \mathcal{A}_0 . Si $T \subset \mathbb{A}$ es un conjunto totalmente ordenado, el

atlas $\mathcal{T} = \bigcup_{\mathcal{A} \in T} \mathcal{A}$ es una cota superior de T . Por el Lema de Zorn, \mathbb{A} tiene al menos un elemento maximal, es decir, un atlas $\bar{\mathcal{A}}$ tal que $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ implica $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$. Ahora bien, cualquier otro atlas $\mathcal{B} \in \mathbb{A}$ debe ser compatible con $\bar{\mathcal{A}}$, así que $\bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}$ es también un atlas. Como $\bar{\mathcal{A}} \subset \bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}$, tenemos que $\bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$ lo que implica $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{A}}$. En particular, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ y si $\bar{\mathcal{B}}$ es otro atlas maximal, $\bar{\mathcal{B}} \subset \bar{\mathcal{A}}$ implica $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}}$. En conclusión, $\bar{\mathcal{A}}$ es el atlas maximal único buscado. \square

Definición II.21. Una *estructura compleja* sobre X es un atlas complejo maximal.

El ejemplo II.19 muestra dos atlas sobre \mathbb{R}^2 , el primero de los cuales es una estructura compleja, se puede trabajar con el atlas de cartas sobre las bolas abiertas sin ningún problema. La diferencia es simplemente práctica, gracias a la flexibilidad de una estructura compleja. Por ejemplo, si $\phi : U \rightarrow V$ es una carta local en algún atlas \mathcal{A} , la restricción de ϕ a cualquier $W \subset U$ será compatible con todas las cartas que sean compatibles con ϕ . Así, aunque $\phi|_W \notin \mathcal{A}$, $\phi|_W$ sí estará en la estructura compleja que contiene a \mathcal{A} . En general, el hecho que un atlas complejo cualquiera se puede extender a una estructura compleja permite agregar a conveniencia cualquier carta local que sea compatible con las originales.

Este era el último bloque que faltaba para definir el principal objeto de estudio de este trabajo.

Definición II.22. Un espacio topológico Hausdorff, segundo enumerable y equipado con una estructura compleja se llama una *superficie de Riemann*.

Nota. Al igual que con las variedades, estudiaremos superficies de Riemann conexas únicamente.

En virtud de la nota al inicio de esta sección, y para justificar el estudio de variedades, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición II.23. *Toda superficie de Riemann es una 2-variedad.*

Demostración. Sea X una superficie de Riemann. Por definición, X es Hausdorff y segundo enumerable, así que solo hay que verificar que sea localmente euclidiana. De hecho, como X tiene un atlas complejo asociado, todo punto $p \in X$ pertenece al dominio de alguna carta local en el atlas. Esta carta establece un homeomorfismo entre su dominio (que es una vecindad de p) y un abierto de \mathbb{C} , que a su vez, es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . En conclusión, X es localmente euclidiano y, por ende, una 2-variedad. \square

De hecho, una superficie de Riemann es una superficie en el sentido de la definición II.6 (una 2-variedad) que además tiene una estructura compleja. La diferencia entre una superficie “topológica” y una superficie de Riemann son las propiedades extra que provienen de la holomorfía de las funciones de transición.

D. Ejemplos de superficies de Riemann

En esta sección se muestran algunos ejemplos de variedades que, con el atlas adecuado, son superficies de Riemann.

Ejemplo II.24. El ejemplo II.16 muestra que las cartas locales de la esfera S^2 son compatibles y, como $S^2 = U_1 \cup U_2$, $\mathcal{A} = \phi_1, \phi_2$ es un atlas complejo. Así, S^2 es una superficie de Riemann llamada la *esfera de Riemann*. \square

Ejemplo II.25. \mathbb{C} no es compacto, pero si se le agrega un punto llamado ∞ , se genera el espacio $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ llamado *plano extendido*. \mathbb{C}_∞ tiene una topología que extendiendo la de \mathbb{C} . Los abiertos son de dos tipos: los abiertos de \mathbb{C} y los conjuntos $U = \mathbb{C}_\infty \setminus D$, donde $D \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto. El Teorema 29.1 de Munkres (2000) asegura que esta colección es una topología y que \mathbb{C}_∞ es un espacio compacto. Con base en una de las cartas locales del ejemplo II.16, definamos la función $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de la siguiente manera:

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} & \text{si } (x, y, z) \neq N \\ \infty & \text{si } (x, y, z) = N \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Nótese que ψ restringida a $S^2 \setminus \{N\}$ coincide con ϕ_1 , así que ψ es inyectiva, sobreyectiva y bicontinua en esa parte de su dominio. Falta verificar estas propiedades para ∞ . De hecho, $\psi(N) = \infty$, así que ψ es sobreyectiva. La inyectividad se mantiene porque $\psi(S^2 \setminus \{N\})$ no contiene a ∞ . Ahora, sea U un abierto de S^2 que contiene a N . $D = S^2 \setminus U$ es cerrado y como S^2 es acotado, también es compacto. Como ψ es un homeomorfismo en $S^2 \setminus \{N\}$, $\psi(D)$ es compacto en \mathbb{C}_∞ y no contiene a ∞ . Entonces $V = \mathbb{C}_\infty \setminus \psi(D)$ es un abierto de \mathbb{C}_∞ que contiene a ∞ . Más todavía: por inyectividad de ψ , $\psi(U) \cap \psi(D) = \emptyset$; por sobreyectividad, $\psi(U) \cup \psi(D) = \psi(U \cup D) = \psi(S^2) = \mathbb{C}_\infty$. Estas dos relaciones fuerzan $\psi(U) = V$. Entonces ψ es un mapeo abierto y un razonamiento análogo se puede usar para mostrar que si $V \subset \mathbb{C}_\infty$ es un abierto que contiene a ∞ , existe U abierto de S^2 con $N \in U$ tal que $U = \psi^{-1}(V)$. En conclusión, ψ es un homeomorfismo entre \mathbb{C}_∞ y la esfera de Riemann. Esto demuestra indirectamente que \mathbb{C}_∞ es una superficie de Riemann compacta.

Para probar directamente que \mathbb{C}_∞ es una superficie de Riemann, se necesita un atlas complejo. La primera carta es φ_1 sobre $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$ y se define por $\varphi_1(z) = z$; este es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$ y \mathbb{C} . Con la carta ϕ_2 de S^2 se define $\varphi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ por $\varphi_2(z) = \phi_2 \circ \psi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Siendo ψ y ϕ_2 homeomorfismos, φ_2 también lo es. La función de transición $T(z) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ tiene dominio $\varphi_1(\mathbb{C}_\infty \setminus \{0, \infty\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y es holomorfa en él. Por tanto, estas dos cartas forman un atlas complejo explícito para \mathbb{C}_∞ . \square

Nota. En virtud del homeomorfismo del ejemplo II.25, a \mathbb{C}_∞ también se le llama esfera de Riemann.

Ejemplo II.26. En el ejemplo II.11, un toro se define como el espacio cociente \mathbb{C}/L entre \mathbb{C} y un retículo $L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ generado por el conjunto linealmente independiente $\{\omega_1, \omega_2\}$. Intuitivamente, esto equivale a pegar los lados opuestos del paralelogramo $P = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}$. También se mostró que las restricciones de la proyección canónica $\pi|_D : D \rightarrow X$ son homeomorfismos entre un disco suficientemente pequeño D y un abierto de X .

De hecho, también se puede probar que el toro X es una superficie de Riemann. Para ello, hay que encontrar un atlas complejo, que obtendremos de las proyecciones $\pi|_D$. Igual que antes, sea $\varepsilon > 0$ el radio de los discos que separan los puntos del retículo L y para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, sea $D_{z_0} = B_\varepsilon(z_0)$. Sea $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ la función inversa de $\pi|_{D_{z_0}}$. Como ya se mostró, $\pi|_{D_{z_0}}$ son homeomorfismos, de forma que ϕ_{z_0} también lo es. Así, para cualquier z_0 , ϕ_{z_0} es una carta local compleja.

Lo único que falta mostrar es que al elegir dos puntos distintos z_1 y z_2 , las cartas $\phi_1 = \phi_{z_1}$, $\phi_2 = \phi_{z_2}$ son compatibles. Sea $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$ la intersección de sus dominios. Si $U = \emptyset$, las cartas son compatibles por definición. Si no, sea $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ la función de transición. Para todo $z \in \phi_1(U)$, $\pi[T(z)] = \pi[\phi_2(\phi_1^{-1}(z))] = \pi[\phi_2(\pi(z))] = \pi(z)$. Entonces la función $\omega(z) = T(z) - z$ siempre es un elemento de L . Por ser diferencia de funciones continuas, $\omega(z)$ es continua.

Si $W \subset \phi_1(U)$ es una componente conexa de $\phi_1(U)$, $\omega(W) \subset L$ es conexo. Los únicos subconjuntos conexos de un espacio discreto consisten únicamente de un punto. Por ello, ω es constante en las componentes conexas de $\phi_1(U)$. Así, la representación de $T(z)$ en cada componente conexa es $z + \omega$, para algún $\omega \in L$ fijo en esa componente. Como los polinomios son funciones holomorfas, T es holomorfa en cada componente conexa de $\phi_1(U)$. En conclusión, $\{\phi_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ es un atlas complejo, por lo que el toro X es una superficie de Riemann. \square

E. Teoremas importantes de variedades y superficies

En esta sección se recopilan definiciones y teoremas importantes acerca de variedades y superficies de Riemann. No se incluye la prueba completa de ninguno de estos teoremas pues son muy extensas. En cambio, se dan referencias a libros que las contengan y, cuando sea posible, un argumento informal e intuitivo que se espera sea suficiente para convencer al lector de la veracidad del teorema.

Definición II.27. Un triángulo T es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que es compacto, tiene interior no vacío y está acotado por tres rectas distintas. Si $f : T \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, se llama vértice o lado a la imagen $f(S)$ de un vértice o un lado de T , respectivamente.

Nótese que la definición anterior describe a los triángulos usuales. La compacidad implica que ninguna pareja de rectas es paralela, mientras que el interior no vacío elimina el caso degenerado de tres rectas concurrentes, que determinan un punto y no un triángulo. Además, si Y es homeomorfo

a un triángulo, naturalmente Y también tiene vértices y lados.

Definición II.28. Una *triangulación* de una 2-variedad compacta S consiste de una colección finita $\{T_1, \dots, T_n\}$ de cerrados que cubre a S y una familia de homeomorfismos $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$, donde cada $T'_i \subset \mathbb{R}^2$ es un triángulo, tales que si $i \neq j$, $T_i \cap T_j$ es vacío, o es un vértice o un lado común de T_i y T_j .

Si existe una triangulación de S , decimos que S es *triangulable*.

Triangular una superficie compacta simplemente significa dividirla en triángulos (o en figuras homeomorfas a triángulos, al menos) de forma ordenada. La Figura II.6 muestra dos ejemplos de triangulaciones correctas de un toro generado por $\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, i\}$, en las que la intersección de dos triángulos distintos es vacía o es el vértice o el lado de algún triángulo. Recuerdese que, en el toro, los lados derecho y superior de cada rectángulo están identificados con los lados izquierdo e inferior, respectivamente. En términos de las triangulaciones, esto significa que los puntos del extremo derecho (respectivamente superior) son los mismos que los puntos del extremo izquierdo (respectivamente inferior). Lo mismo sucede con los lados. La Figura II.7, por otro lado, muestra tres tipos de intersecciones que no están permitidas.

Figura II.6: Posibles triangulaciones de un toro.

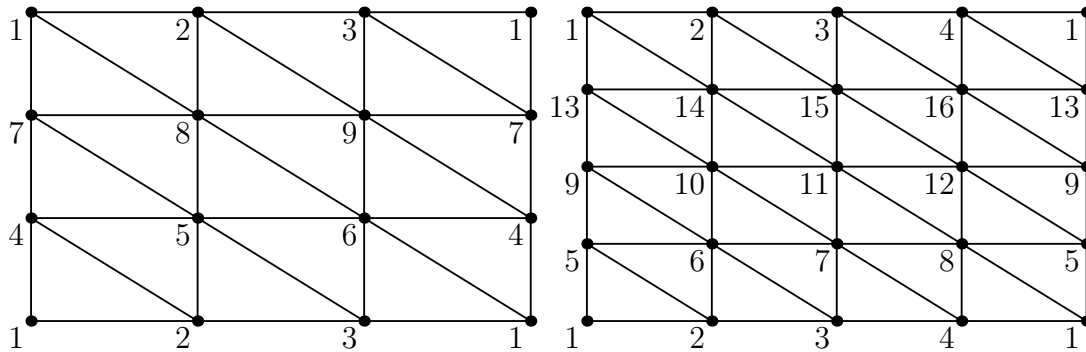
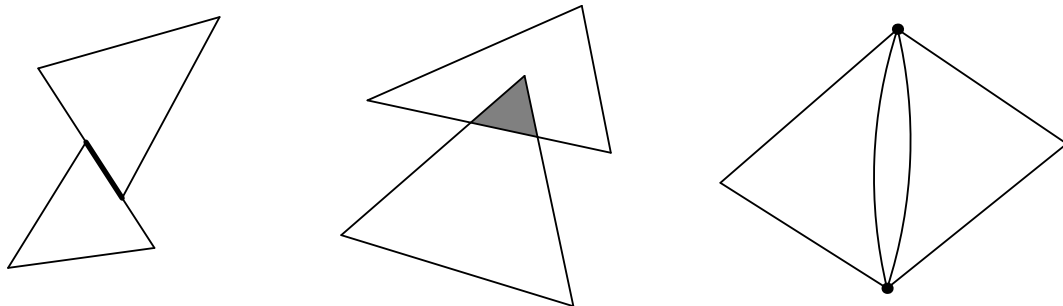


Figura II.7: Intersecciones prohibidas en una triangulación: parte de un lado (debería de ser un lado completo), un triángulo más pequeño y dos vértices en lugar de uno.



Teorema II.29. *Toda 2-variedad compacta admite al menos una triangulación.*

Demostración. Una prueba de este teorema puede encontrarse en Moise (1977). \square

La importancia de este teorema es que implica que todas las superficies de Riemann admiten una triangulación y hace que la siguiente definición sea aplicable para cualquier superficie de Riemann.

Definición II.30. Sean S una 2-variedad compacta y T una triangulación. Supóngase que, en esta triangulación, existen v vértices, e lados y t triángulos en S . La *característica de Euler* de S se define como $\chi(S) = t - e + v$.

Esta definición necesita algunas aclaraciones. Primero, los puntos que se cuentan son aquellos en S que son imagen de un vértice de algún triángulo de T ; no se cuentan los vértices de todos los triángulos de T . De la misma forma, no se cuentan los lados de los triángulos de T sino los subconjuntos de S que son lado de algún triángulo. Segundo, y quizás lo más problemático, es que una 2-variedad puede tener varias triangulaciones y la característica de Euler se define en términos de ellas, así que podría no estar bien definida. Por ejemplo, en la Figura II.6, sea T_1 la triangulación de la izquierda y T_2 la de la derecha. Denótese con $\chi(R, T_i)$ a la característica de Euler del rectángulo R en términos de T_i . Para T_1 , $v = 9$, $e = 27$, $t = 18$, así que $\chi(S, T_1) = 9 - 27 + 18 = 0$. Para T_2 , $v = 16$, $e = 48$, $t = 32$, de donde $\chi(S, T_2) = 16 - 48 + 32 = 0$. Para las triangulaciones T_1 y T_2 del toro, la característica de Euler es la misma. De hecho, esta equivalencia sucede para cualquier triangulación de cualquier 2-variedad.

Teorema II.31. *La característica de Euler es independiente de la triangulación.*

De hecho, el Teorema II.31 es un corolario del siguiente.

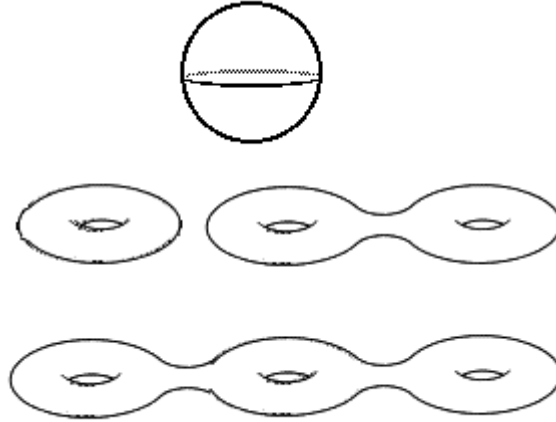
Teorema II.32. *La característica de Euler es una invariante topológica.*

Demostración. Una prueba de este hecho se encuentra en Lee (2011). En el capítulo 5 define triangulaciones y característica de Euler para variedades de cualquier dimensión. En el capítulo 13, define grupos de homología y demuestra su invarianza topológica. Finalmente, demuestra que la característica de Euler se puede expresar en términos de los números de Betti, números asociados a los grupos de homología. Como estos grupos no dependen de una triangulación y son invariantes bajo homeomorfismos, se demuestra este teorema y tiene como corolario el teorema II.31. \square

El siguiente resultado es una clasificación de las superficies de Riemann compactas. En pocas palabras, dice que toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera o a la suma conexa de n toros.

Teorema II.33. *Toda superficie de Riemann compacta es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de n toros, con $n \in \mathbb{Z}^+$.*

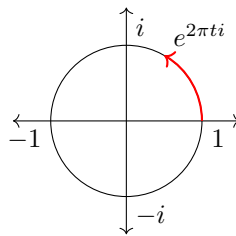
Figura II.8: Ejemplos de suma conexas de toros. De arriba a abajo: una esfera, un toro, suma conexas de 2 y 3 toros.



Fuente: <https://people.math.osu.edu/fiedorowicz.1/math655/classification.html>.

Demostración. Massey (1977) demuestra que toda 2-variedad compacta y orientable es homeomorfa a una esfera o a la suma conexas de n toros. Lo que falta mostrar para poder usar su resultado es que las superficies de Riemann son orientables. Esto quiere decir que en cada punto podemos definir una rotación en sentido horario de forma continua (*i.e.* mientras más nos acercamos a un punto p , nuestra noción de rotación coincide con la de p). El plano complejo permite entender este concepto. \mathbb{C} tiene una orientación natural (que también es continua): el ciclo $e^{2\pi ti}$, con $0 \leq t \leq 1$, va en sentido antihorario cuando t varía de 0 a 1.

Figura II.9: Definición de orientación antihoraria usando $e^{2\pi ti}$.



Mediante las cartas locales, esta noción se puede trasladar a las superficies de Riemann y no importa qué carta se utilice. Las funciones de transición son biholomorfas, por lo que también son funciones conformes, es decir, que preservan la orientación. Esto induce una orientación continua y consistente, como se quería. \square

Definición II.34. Sea X una superficie de Riemann compacta. Si X es homeomorfa a la suma conexas de n toros, el *género* de X se define como el número $g(X) = n$. Si X es homeomorfa a una

esfera, se toma $g(X) = 0$.

El último teorema del capítulo relaciona la característica de Euler y el género de las superficies de Riemann.

Teorema II.35. *Sea X una superficie de Riemann compacta, χ su característica de Euler y g su género. Entonces*

$$\chi = 2 - 2g$$

Demostración. Ver Massey (1977).

□

III. FUNCIONES SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

En este capítulo inicia el estudio de funciones sobre superficies de Riemann. Las cartas complejas definidas en el capítulo II sirven para transferir el dominio de las funciones a \mathbb{C} . Esto permite dotarlas con las propiedades de las funciones de variable compleja. La compatibilidad de cartas asegura que estas construcciones sean independientes de la elección de la carta local.

A. Funciones de valores complejos sobre superficies de Riemann

Definición III.1. Sean X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en una vecindad $W \subset X$ de p . Se dice que f es *holomorfa en p* si existe una carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$ y $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. f es *holomorfa en W* si f es holomorfa en cada punto de W .

El papel que juegan las cartas locales en la definición de superficies de Riemann es transformar los abiertos de X en abiertos de \mathbb{C} . Gracias a la similitud de esos abiertos, las cartas locales transforman las funciones sobre superficies de Riemann en funciones complejas y de esta forma, transfieren propiedades como la holomorfía al nuevo dominio.

Ejemplo III.2. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta local sobre X . La función $\phi \circ \phi^{-1}(z) = z$ es holomorfa en cualquier $z \in \phi(U)$. Por ello, ϕ es una función holomorfa en todo $p \in U$. \square

Por otro lado, es posible que la definición de holomorfía no coincida al usar cartas locales distintas. El siguiente lema se encarga de resolver este problema y demuestra que estas funciones heredan más propiedades de sus contrapartes complejas.

Lema III.3. *Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida sobre una vecindad de p . Entonces:*

1. *f es holomorfa en p si y solo si $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa para cualquier carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$.*
2. *f es holomorfa en W si y solo si existe un conjunto de cartas locales $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ tal que $W \subset \bigcup_i U_i$ y $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en $\phi_i(W \cap U_i)$ para todo i .*
3. *Si f es holomorfa en p , entonces es holomorfa en una vecindad de p .*

Demostración.

1. Si f es holomorfa en p , existe una carta local ϕ tal que p está en su dominio y $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa. Si ψ es cualquier otra carta local cuyo dominio contiene a p , como ϕ y ψ son

compatibles, $\phi \circ \psi^{-1}$ es holomorfa. Entonces $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$ es una funciones holomorfa sobre $\psi(p)$. Para mostrar el converso, se usa el hecho de que X está equipada con una estructura compleja. En efecto, los dominios de las cartas locales cubren X , de forma que existe una carta ϕ cuyo dominio contiene a p . Como $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa por hipótesis, f es holomorfa por definición.

2. Sea $C = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ el conjunto de todas las cartas locales cuyos dominios contienen algún punto de W . Gracias la estructura compleja de X , $C \neq \emptyset$ y $W \subset \bigcup_i U_i$. Si f es holomorfa en W , sea $\phi_i \in C$ cualquiera. Para cualquier punto $x \in W \cap U_i$, $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en $\phi_i(x)$. Por ello, $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en todo $\phi_i(W \cap U_i)$ y, como ϕ_i es arbitraria, esto sucede para todo $\phi_i \in C$. Para mostrar el converso, nótese que los dominios de las cartas $\phi_i \in C$ cubren a W . Por ello, para todo $x \in W$, existe una carta local ϕ_i tal que $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en $\phi_i(x)$. Por ello, f es holomorfa en todo W , probando la segunda afirmación.
3. Por definición, existe una carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Se sabe que si una función compleja, como $f \circ \phi^{-1}$, es holomorfa en un punto, entonces es holomorfa en una vecindad de ese punto. De igual manera, $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad $V' \subset \phi(W \cap U)$ de $\phi(p)$ y f lo es en $U' = \phi^{-1}(V')$, una vecindad de p .

□

Este lema será de gran utilidad. En pocas palabras, dice que si una función f definida sobre una superficie de Riemann es holomorfa, lo será respecto de cualquier carta local; por tanto para demostrar que f es holomorfa, solo se necesita verificarlo respecto de una carta local, en lugar de hacerlo con todas.

Proposición III.4. *Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas en p , entonces $f \pm g$ y fg son holomorfas en p . Si además $g(p) \neq 0$, f/g también es holomorfa en p .*

Demostración. Sea $z_0 = \phi(p)$. Por el lema anterior, $f \circ \phi^{-1}$ y $g \circ \phi^{-1}$ son holomorfas en z_0 para cualquier carta $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$. Para las funciones $f \circ \phi^{-1}$ y $g \circ \phi^{-1}$ con dominio $V \subset \mathbb{C}$ e imagen en \mathbb{C} , una suma (o resta) de funciones holomorfas en z_0 es una función holomorfa en z_0 . Entonces $(f \pm g) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \pm (g \circ \phi^{-1})$ es holomorfa en z_0 y, por definición, $f \pm g$ es holomorfa en p . La prueba para fg es análoga.

Con la condición adicional $g(p) = 0$, solo hay que agregar un detalle para probar que f/g es holomorfa. Como $g(p) \neq 0$, $g \circ \phi^{-1}(z_0) = g(p) \neq 0$. Así, $(f/g) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) / (g \circ \phi^{-1})$ es un cociente de funciones holomorfas en z_0 , donde $g \circ \phi^{-1}(z_0) \neq 0$. Entonces, $(f/g) \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en z_0 y, por ende, f/g es holomorfa en p . □

Ejemplo III.5. Si se define una función f en \mathbb{C}_∞ , la definición de holomorfa de f en $p \neq \infty$ coincide con la definición usual en \mathbb{C} . Cualquier $p \neq \infty$ está en el dominio de $\varphi_1(z) = z$, así que

$f(z)$ es holomorfa si, y solo si, $f \circ \varphi_1^{-1}(z) = f(z)$ lo es vista como una función con dominio \mathbb{C} . En cambio, f es holomorfa en ∞ si $f \circ \varphi_2^{-1}(z) = f(\frac{1}{z})$ es holomorfa en $\varphi_2(\infty) = 0$.

En la definición de \mathbb{C}_∞ , se agregó el punto ∞ a \mathbb{C} con topológicas, pero no algebraicas. Un ejemplo de tales propiedades es que las sucesiones $\{a_n\}_n \subset \mathbb{C}$ en las que $|a_n| > M$ para cualquier $M > 0$ y n suficientemente grande convergen a ∞ en la topología de \mathbb{C}_∞ ; en la topología de \mathbb{C} no convergen. De hecho, cualquier conjunto compacto es acotado; está contenido en una bola cerrada centrada en el origen $\bar{B}_M(0)$ que también es compacta. Entonces, cualquier abierto de \mathbb{C}_∞ que contiene a ∞ también contiene a un abierto de la forma $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{B}_M(0)$. En consecuencia, para cualquier M existen infinitos n enteros tales que $a_n \in \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{B}_M(0)$. Por tanto, a_n converge a ∞ . En particular si a_n converge a 0, $\frac{1}{a_n}$ converge a ∞ .

Gracias a esta propiedad, el cambio de variable $z \rightarrow \frac{1}{w}$ permite intercambiar funciones cerca de ∞ por funciones en vecindades de 0. Por ejemplo, se puede mostrar que una función racional $f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}$, con $a_m b_n \neq 0$, es holomorfa en ∞ si $m \leq n$. Tomar el camino algebraico y simplemente evaluar $f(\infty)$ no es suficiente: se obtiene una fracción indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. En cambio, el cambio de variable propuesto (que es lo mismo que usar la carta local φ_2^{-1} para evaluar $f \circ \varphi_2^{-1}$) permite obtener $f(\frac{1}{w}) = w^{n-m} \frac{a_m + a_{m-1} w + \dots + a_0 w^m}{b_n + b_{n-1} w + \dots + b_0 w^n} = w^{n-m} q(w)$. $q(w)$ es holomorfa en 0, pues $b_n \neq 0$ y se sabe que w^{n-m} es holomorfa en 0 si, y solo si, $m \leq n$. Por tanto, $f(\frac{1}{w})$ es holomorfa en 0 y $f(z)$ en ∞ si, y solo si, $m \leq n$. \square

Definición III.6. Si $W \subset X$ es un abierto de una superficie de Riemann X , $\mathcal{O}(W)$ es el conjunto de funciones holomorfas sobre W .

Ahora se traslada el concepto de funciones meromorfas a las superficies de Riemann. Lo primero por definir son las singularidades.

Definición III.7. Sean X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : U_0 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en una vecindad perforada de p . Se dice que f tiene una *singularidad* en p si existe una carta local $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad en $\phi(p)$. Las singularidades se clasifican de la siguiente forma:

1. *Singularidad removible* si $|f(x)|$ está acotado en una vecindad perforada de p .
2. *Polo* si $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.
3. *Singularidad esencial* si $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)|$ no existe.

Vale la pena recordar que el dominio y la imagen de $f \circ \phi^{-1}$ son abiertos de \mathbb{C} . El concepto de singularidad está definido para funciones de variable compleja. La definición anterior usa una carta local para extenderlo a funciones sobre superficies de Riemann. Al igual que sucede con las funciones holomorfas, la carta local que se utilice es irrelevante.

Lema III.8. *Con las condiciones de la definición anterior, f tiene una singularidad en p si, y solo si, $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad en $\phi(p)$ para cualquier carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$. El tipo de singularidad también es independiente de la carta local elegida.*

Demostración. Supóngase que f tiene una singularidad en p . Entonces, existe una carta local $\phi : U_1 \rightarrow V_1$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad en $\phi(p)$. Sean $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ cualquier otra carta local con $p \in U_2$ y $T = \phi \circ \psi^{-1}$ la función de transición. La función $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ T$ está definida en una vecindad de $\psi(p)$. Como $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad perforada de $\phi(p)$ y T es holomorfa en una vecindad de $\psi(p)$, $f \circ \psi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad perforada de $\psi(p)$. Por último, como $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad en $\phi(p)$, $f \circ \psi^{-1}$ tiene una singularidad en $\psi(p)$. Nótese que los criterios de clasificación de singularidades no dependen de las cartas locales. Solo dependen del comportamiento de f alrededor de p , que se puede identificar sin necesidad de utilizar cartas locales. \square

Definición III.9. Una función f definida en un abierto U de la superficie de Riemann X es *meromorfa* en p si es holomorfa, tiene una singularidad removible o tiene un polo en p . Si f es holomorfa en p , se dice que p es un *punto regular* de f . f es meromorfa en un abierto $W \subset U$ si es meromorfa en cada punto de W . $\mathcal{M}(W)$ denota al conjunto de funciones meromorfas en W .

Proposición III.10. *Sean f, g funciones meromorfas en $p \in X$. Entonces $f \pm g$ y fg son meromorfas en p . Si g no es idénticamente 0 en una vecindad de p , f/g también es meromorfa en p .*

Demostración. La demostración es análoga a la prueba de la proposición III.4. Solamente se requiere que g no sea idénticamente 0 alrededor de p para poder definir f/g en una vecindad de p . Luego, se elige una carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$ y se usan las propiedades de las funciones meromorfas en \mathbb{C} para probar sus correspondientes en X . \square

Corolario III.11. *Sean f, g funciones holomorfas en $p \in X$. Si g no es idénticamente 0 en cualquier vecindad de p , entonces f/g es meromorfa en p .*

Demostración. Si f y g son holomorfas en p , en particular, son meromorfas. Por la proposición anterior, f/g es meromorfa en p . \square

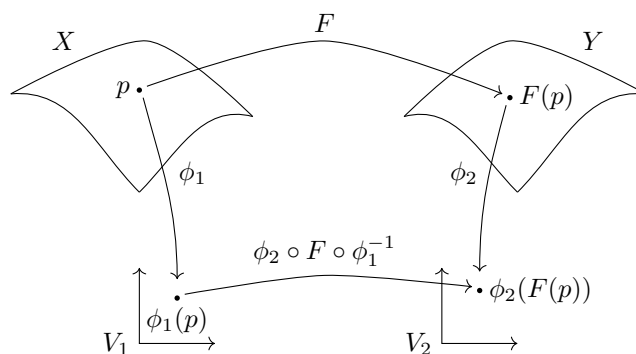
Ejemplo III.12. Al igual que en el ejemplo III.5, decir que una función f definida sobre \mathbb{C}_∞ es meromorfa en $z \in \mathbb{C}$ equivale a la definición usual de funciones meromorfas en \mathbb{C} . Por el contrario, f es meromorfa en ∞ si $f(\frac{1}{w})$ es meromorfa en 0. En particular, cualquier función racional es meromorfa en ∞ y, en general, en todo el plano extendido \mathbb{C}_∞ . \square

B. Funciones entre superficies de Riemann

Ya con idea de cómo se comportan las funciones en una superficie de Riemann con valores complejos, se generalizan las definiciones del inicio del capítulo para estudiar funciones entre superficies de Riemann.

Definición III.13. Sean X, Y superficies de Riemann. Un mapeo $F : X \rightarrow Y$ es *holomorfo* en $p \in X$ si existen cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ con $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$ tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfo en $\phi_1(p)$. Si $W \subset X$ es un abierto, se dice que F es *holomorfo en W* si es holomorfo en todo punto de W . Si $W = X$, F es un *mapeo holomorfo*.

Figura III.1: Forma local de un mapeo entre superficies de Riemann



Nota. Generalmente, las palabras función y mapeo son sinónimos, pero aquí se hace una distinción. Dada $f : X \rightarrow Y$, si X es una superficie de Riemann, se usa la palabra función cuando $Y = \mathbb{C}$, mientras que si Y es una superficie de Riemann arbitraria, se usa mapeo (o mapa) y el nombre de la función se escribirá con mayúscula (es decir, $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo).

Ejemplo III.14. Sea $\text{id} : X \rightarrow X$ el mapeo identidad. Para cualquier $p \in X$ existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$. En este caso, la composición $(\phi \circ \text{id} \circ \phi^{-1})(z) = z$ es holomorfa. Entonces id es un mapeo holomorfo. \square

Igual que antes, la elección de la carta local no influye en la definición.

Lema III.15. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una función.

1. F es holomorfa en p si y solo si la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$ para cualquier pareja de cartas locales $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ tales que $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$.
2. F es holomorfa en W si y solo si existen dos colecciones de cartas $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}\}$ en X y $\{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)}\}$ en Y tales que $W \subset \bigcup_i U_1^{(i)}$, $F(W) \subset \bigcup_j U_2^{(j)}$ y $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1}$ es holomorfa para cualquier i, j en que la composición esté definida.

Demostración.

1. Si F es holomorfa en p , existen cartas locales $\phi_1^{(0)} : U_1^{(0)} \rightarrow V_1^{(0)}$ y $\phi_2^{(0)} : U_2^{(0)} \rightarrow V_2^{(0)}$ tales que $p \in U_1^{(0)}$, $F(p) \in U_2^{(0)}$ y $\phi_2^{(0)} \circ F \circ \phi_1^{(0)^{-1}}$ es holomorfa. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ otras cartas locales con $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$; sean $T_1 = \phi_1^{(0)} \circ \phi_1^{-1}$ y $T_2 = \phi_2 \circ \phi_2^{(0)^{-1}}$ las funciones de transición correspondientes. Como éstas son holomorfas, la función $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} = T_2 \circ (\phi_2^{(0)} \circ F \circ \phi_1^{(0)^{-1}}) \circ T_1$ es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas, probando la primera dirección. La segunda dirección es inmediata, pues por ser X y Y superficies de Riemann, para cualquier $p \in X$ existen cartas locales $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ tales que $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$. Por hipótesis, $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa, haciendo de F holomorfa.
2. Supongamos que F es holomorfa en W . Tómense dos colecciones $\mathcal{I} = \{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)} \mid U_1^{(i)} \cap W \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{J} = \{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)} \mid U_2^{(j)} \cap F(W) \neq \emptyset\}$. Como las cartas locales forman un atlas, los dominios de los atlas de \mathcal{I} y \mathcal{J} cubren W y $F(W)$, respectivamente. Para cualquier pareja de cartas $\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}$ y $\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)}$ tales que $U_1^{(i)} \cap F^{-1}(U_2^{(j)}) \neq \emptyset$, la composición $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)^{-1}}$ está definida y es una función holomorfa en $\phi_1(U_1^{(i)} \cap F^{-1}(U_2^{(j)}))$. Ahora bien, $U_1^{(i)} \cap F^{-1}(U_2^{(j)}) \neq \emptyset$ es un requerimiento para que la composición $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)^{-1}}$ esté definida. Por tanto, la primera dirección de la segunda afirmación está demostrada. El converso es inmediato. Para cualquier $p \in W$, como $W \subset \bigcup_i U_1^{(i)}$, $F(W) \subset \bigcup_j U_2^{(j)}$, existen cartas $\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}$ y $\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)}$ tales que $p \in U_1^{(i)}$, $F(p) \in U_2^{(j)}$, $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)^{-1}}$ está definida y es una función holomorfa.

□

En el siguiente lema demostramos varias propiedades de las funciones holomorfas relacionadas a la composición de funciones.

Lema III.16. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo entre superficies de Riemann.*

1. F es continua y es C^∞ . Esto es, la parte real y la parte imaginaria de $F \circ \phi^{-1}$ tienen derivadas parciales de cualquier orden, para cualquier carta local ϕ .
2. Si $G : Y \rightarrow Z$ es un mapa holomorfo, $G \circ F : X \rightarrow Z$ es holomorfo.
3. Si $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa definida en un abierto $W \subset Y$, $g \circ F$ es holomorfa en $F^{-1}(W)$.
4. Si g fuera meromorfa, $g \circ F$ es meromorfa, siempre y cuando $F(X) \cap W$ no consista únicamente de polos de g .

Demostración.

1. Como F es holomorfo, $\forall x \in X$, $\exists \phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales tal que $x \in U_1$, $y \in U_2$ y $\phi_2 \circ F \phi_1^{-1}$ es holomorfa. En \mathbb{C} , las funciones holomorfas son continuas y \mathcal{C}^∞ . Como las cartas locales son homeomorfismos, son continuas y $F = \phi_2^{-1} \circ (\phi_2 \circ F \phi_1^{-1}) \circ \phi_1$ es continua. Además, F es \mathcal{C}^∞ respecto de cualquier pareja de cartas locales, pues las funciones de transición $T_1 = \phi_1 \circ \phi_1'^{-1}$ y $T_2 = \phi_2' \circ \phi_2^{-1}$ son holomorfas y \mathcal{C}^∞ . Por tanto, $\phi_2' \circ F \phi_1'^{-1} = T_2 \circ (\phi_2 \circ F \phi_1^{-1}) \circ T_1$ también es \mathcal{C}^∞ .
2. Como F y G son holomorfos, para todo $x \in X$, existen cartas locales $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, $\phi_3 : U_3 \rightarrow V_3$ en las que $x \in U_1$, $F(x) \in U_2$ y $G \circ F(x) \in U_3$ tales que $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ y $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ son holomorfas. Entonces $\phi_3 \circ (G \circ F) \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})$ es holomorfa.
3. Sean $x \in F^{-1}(W)$ y $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales tales que $x \in U_1$ y $F(x) \in U_2 \cap W$. Nótese que $(g \circ F) \circ \phi_1^{-1} = (g \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})$ es composición de funciones holomorfas, así que es holomorfa en $\phi_1(x)$. Como x es arbitraria, $g \circ F$ es holomorfa en todo $F^{-1}(W)$.
4. Como $F(X) \cap W$ no contiene únicamente polos de g , $g \circ F$ es holomorfa en los puntos $x \in F^{-1}(W)$ tales que $F(x)$ no es polo de g . En \mathbb{C} y bajo estas condiciones, la composición de una función meromorfa con una holomorfa es meromorfa, así que $(g \circ F) \circ \phi_1^{-1} = (g \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})$ es meromorfa.

□

La siguiente definición es un criterio para comparar dos superficies de Riemann.

Definición III.17. Sean X, Y superficies de Riemann. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo inyectivo con inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ holomorfa. Se dice que F es un *isomorfismo* (o *biholomorfismo*) entre X y Y y que estas son *isomorfas*.

Ejemplo III.18. La esfera de Riemann S^2 y el plano extendido \mathbb{C}_∞ son homeomorfos y, de hecho, también isomorfas. La función ψ definida en el ejemplo II.25 es un isomorfismo. La demostración se encuentra más adelante. □

C. Propiedades de los mapeos holomorfos

En esta sección, se exploran más a fondo las funciones y los mapeos holomorfos. Lo primero es la serie de Laurent de una función sobre una superficie de Riemann utilizando coordenadas locales. Luego, se generalizan propiedades de las funciones holomorfas de variable compleja. Al final del capítulo, se encuentra una relación entre las funciones meromorfas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ y los mapeos holomorfos $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, lo que permite probar la fórmula de Riemann-Hurwitz, una pieza clave en la demostración del Teorema de Riemann-Roch.

1. Series de Laurent.

Las coordenadas locales ahora adquieren un papel protagónico. Gracias a ellas, las funciones sobre superficies de Riemann adquieren un rostro familiar que facilita la herencia de propiedades de las funciones complejas.

Definición III.19. Sean f una función holomorfa definida en una vecindad perforada de $p \in X$ y $\phi : U \rightarrow V$ una carta local tal que $x \in U$. Sea $z = \phi(x)$ la coordenada local dada por ϕ y $z_0 = \phi(p)$. Como $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad de z_0 , tiene una serie de Laurent en una vecindad de z_0

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n$$

Esta serie se llama *serie de Laurent de f con respecto de ϕ* .

Es en esta definición donde se ve la bondad de las coordenadas locales. En la definición de coordenada local, se dijo que estas expresan la posición de un punto en una superficie de Riemann mediante un número complejo. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ le asigna un número complejo $f(x)$ a cualquier $x \in X$, así que si se identifica x con la coordenada $z \in \mathbb{C}$ inducida por ϕ , se puede pensar que f le asigna el número complejo $f(x)$ a z . Esta idea inspira a expresar f en términos de z como $w = h(z)$, donde $h = f \circ \phi^{-1}$. La misma idea funciona con los mapeos $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann. Para los puntos $x_0 \in X$ y $y_0 = F(x_0) \in Y$, se escogen cartas locales $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ tales que $x_0 \in U_1$ y $y_0 \in U_2$. Estas cartas inducen las coordenadas locales z en U_1 y w en U_2 . En términos de estas coordenadas, decimos que F toma la forma $w = H(z)$, donde $H = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$. La utilidad de las formas $w = h(z)$ y $w = H(z)$ es que ambas son funciones con dominio y valores complejos. Entonces, para determinar si f y F tienen una propiedad específica, se estudian h y H en su lugar y se usan los teoremas de funciones sobre el plano complejo para determinar si las funciones en la superficie de Riemann tienen la propiedad buscada.

Nota. En virtud de estas equivalencias, de ahora en adelante se dice que f y F toman las formas $w = h(z)$ y $w = H(z)$ en términos de las coordenadas locales w y z sin llamar explícitamente a las cartas locales.

Contrario a las propiedades anteriores, la serie de Laurent de f sí depende de la coordenada local elegida. Lo que no depende es el orden de f , definido a continuación.

Definición III.20. Sean f una función meromorfa en $p \in X$ y $\sum_n c_n (z - z_0)^n$ la serie de Laurent de f respecto de una coordenada local z . Se define el *orden de f en p* por

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}$$

Lema III.21. $\text{ord}_p(f)$ está bien definido. Es decir, no depende de la coordenada local respecto de

la cual se construya la serie de Laurent de f .

Demostración. Sean $\phi : U \rightarrow V$ y $\psi : U' \rightarrow V'$ cartas locales alrededor de p . Sean $z = \phi(x)$ y $w = \psi(x)$ las coordenadas locales dadas por ϕ y ψ , con $z_0 = \phi(p)$ y $w_0 = \psi(p)$. Sea $T(w) = \phi \circ \psi^{-1}$ la función de transición holomorfa. Por el lema II.18, $T'(w_0) \neq 0$. Entonces el coeficiente a_1 de la serie

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n$$

es distinto de 0. Sea $\sum_{n \geq n_0} c_n (z - z_0)^n$ la serie de Laurent de f respecto de z , que tiene orden n_0 . Como $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ T$, si sustituimos $z - z_0$ por la serie $z - z_0 = \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n$ obtendremos la serie de Laurent de f respecto de w . El término no nulo con menor grado en la expansión de T es a_1 ; el de $f(z)$ es c_{n_0} . Entonces, el término no nulo de menor grado en la composición $(f \circ \phi^{-1}) \circ T$ es $c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0}$. Por lo tanto, $\text{ord}_p(f)$ está bien definido y es n_0 . \square

El lema anterior da un sencillo criterio para determinar si una función es holomorfa o meromorfa y clasificar el tipo de singularidades.

Corolario III.22. *Sea f una función meromorfa en p .*

1. *Si p es una singularidad removible, $c_n = 0$ para todo $n < 0$, donde c_n son los coeficientes de la serie de Laurent de f con respecto de cualquier carta local ϕ centrada en $z_0 = \phi(p)$.*
2. *p es un polo si y solo si la serie de Laurent de f tiene una cantidad finita de términos negativos no nulos. Esto equivale a decir que $\text{ord}_p(f) < 0$.*
3. *p es una singularidad esencial si y solo si la serie de Laurent de f tiene una cantidad infinita de términos negativos no nulos.*
4. *f es holomorfa en p si y solo si $\text{ord}_p(f) \geq 0$.*
5. *$f(p) = 0$ si y solo si $\text{ord}_p(f) > 0$.*
6. *p no es un cero ni un polo de f si y solo si $\text{ord}_p(f) = 0$.*

Demostración. Todos estos criterios son iguales a los criterios de series de Laurent en \mathbb{C} . Por ello, la prueba de todos ellos consiste en encontrar una serie de Laurent de f respecto de una coordenada local y demostrar que posee todas estas propiedades. Como $\text{ord}_p(f)$, la holomorfía y las singularidades de f no dependen de la coordenada utilizada, demostrar las propiedades para una carta será suficiente. \square

Definición III.23. En virtud de estas propiedades, se dice que si f es meromorfa en p

- f tiene un *cero de orden* $n > 0$ en p si $\text{ord}_p(f) = n \geq 1$.

- f tiene un polo de orden $n > 0$ en p si $\text{ord}_p(f) = -n < 0$.

Lema III.24. Sean f, g funciones meromorfas no nulas en $p \in X$. Entonces

1. $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$
2. $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$
3. $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$
4. $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$.

Demostración. Sean $n = \text{ord}_p(f)$ y $m = \text{ord}_p(g)$. Utilizando notación O grande y suponiendo $\phi(p) = 0$ sin pérdida de generalidad, las series de Laurent de f y g son $a_n z^n + O(z^{n+1})$ y $b_m z^m + O(z^{m+1})$, respectivamente, con $a_n b_m \neq 0$. Entonces:

- $fg = (a_n z^n + O(z^{n+1}))(b_m z^m + O(z^{m+1})) = a_n b_m z^{n+m} + O(z^{n+m+1})$
- $\frac{f}{g} = \frac{a_n z^n + O(z^{n+1})}{b_m z^m + O(z^{m+1})} = \frac{\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + O(z^{n-m+1})}{1 + O(z)} = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + O(z^{n-m})$
- $f \pm g = a_n z^n + O(z^{n+1}) + b_m z^m + O(z^{m+1}) = c z^{\min\{n, m\}} + O(z^{\min\{n, m\}+1})$ para alguna constante c .

Las primeras dos conclusiones del lema se obtienen directamente de estas relaciones. La tercera se obtiene de la segunda tomando $f(x) = 1$. En la última, es posible que $n = m$ y que $a_n + b_m = 0$, haciendo que la potencia z^n desaparezca de la serie de Laurent de $f + g$. Por tanto, la menor potencia de esa serie es por lo menos $\min\{n, m\}$, aunque no sea exactamente ese número. \square

Ejemplo III.25. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función racional no constante sobre el plano extendido \mathbb{C}_∞ . Por el Teorema Fundamental del Álgebra, se factorizan p y q para obtener

$$f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$$

donde $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, los $\lambda_i \in \mathbb{C}$ son distintos y $e_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sea $F_k(z) = c \prod_{i \neq k} (z - \lambda_i)^{e_i}$. Como los λ_i son distintos $F_k(\lambda_k) \neq 0, \infty$. Por el corolario III.22, $\text{ord}_{\lambda_k}(F_k) = 0$ y por definición, $\text{ord}_{\lambda_k}[(z - \lambda_k)^{e_k}] = e_k$. Juntando estos hechos y usando el lema III.24, $\text{ord}_{\lambda_k}(f) = \text{ord}_{\lambda_k}[(z - \lambda_k)^{e_k}] + \text{ord}_{\lambda_k}(F_k) = e_k$.

Por otro lado, se usa la carta local $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ para encontrar que $\text{ord}_\infty(p(z)) = \text{ord}_0(p(\frac{1}{w}))$ es igual a $-\text{grado}(p)$. Análogamente, $\text{ord}_\infty(q(z)) = -\text{grado}(q)$. Nuevamente gracias al lema III.24, se tiene que $\text{ord}_\infty(f(z)) = \text{ord}_\infty(p(z)) - \text{ord}_\infty(q(z)) = \text{grado}(q) - \text{grado}(p) = -\sum_{i=1}^n e_i$.

Para cualquier otro $x \in \mathbb{C}_\infty$ distinto de los λ_i y de ∞ , $f(x) \neq 0, \infty$. Por el corolario III.22,

$\text{ord}_x(f) = 0$. Juntando todos estos resultados, se obtiene que

$$\sum_{x \in \mathbb{C}_\infty} \text{ord}_x(f) = 0$$

Esta ecuación dice que una función racional en \mathbb{C}_∞ tiene la misma cantidad de ceros que de polos, si se cuentan de acuerdo con su orden. De hecho, esto sucede para cualquier función meromorfa en cualquier superficie de Riemann compacta, pero todavía faltan propiedades para demostrarlo. \square

2. Teoremas heredados del análisis complejo.

Se empieza recolectando varios teoremas que los mapeos holomorfos heredan del análisis complejo. Viendo a \mathbb{C} como superficie de Riemann, estos resultados cumplen, en particular, para las funciones que definimos en la sección A. Se omiten algunas pruebas porque el esquema es el mismo para todas. Si se quiere que un mapeo holomorfo F tenga alguna propiedad, se eligen cartas locales ϕ_1 y ϕ_2 de forma que la función holomorfa compleja $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ tenga la propiedad buscada. Como las cartas locales son homeomorfismos, también tienen (o mantienen) la propiedad, así que la composición $F = \phi_2^{-1} \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ \phi_1$ cumple la propiedad requerida.

Proposición III.26 (Teorema del mapeo abierto). *Todo mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann es una función abierta.*

Proposición III.27. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo inyectivo entre las superficies de Riemann X y Y . F es un isomorfismo entre X y su imagen $F(X)$.*

Proposición III.28 (Teorema de Identidad). *Sean F, G dos mapeos holomorfos entre las superficies de Riemann X y Y . Si $F = G$ en un conjunto $S \subset X$ que tiene un punto límite en X , entonces $F = G$ en X .*

Proposición III.29. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante. Entonces Y es compacto y F es sobreyectivo.*

Demostración. Por el Teorema del mapeo abierto, $F(X)$ es abierto. Como X es compacto, $F(X)$ es compacto y por ser Y Hausdorff, $F(X)$ es cerrado. Como Y es un conjunto conexo, los únicos conjuntos abiertos y cerrados son \emptyset y Y . $X \neq \emptyset$ implica que $F(X) = Y$. \square

Proposición III.30. *Si $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo no constante, la preimagen $F^{-1}(y)$ de cualquier $y \in Y$ es un subconjunto discreto de X .*

Estas proposiciones no aplican para mapeos entre superficies de Riemann en general, pero sí al menos para funciones sobre superficies de Riemann con valores complejos.

Proposición III.31. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Si f no es idénticamente 0, entonces el conjunto de ceros y polos de f es discreto.*

Corolario III.32. *Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa no constante sobre una superficie de Riemann compacta X , entonces f tiene un número finito de ceros y polos.*

Demostración. Sea P el conjunto de singularidades de f . Por la proposición anterior, P es discreto. Entonces, existen vecindades conexas U_p para cada $p \in P$ tal que $U_p \cap P = \{p\}$. Por otro lado, para $x \in X \setminus P$, sean $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ una carta local centrada en x y $D_x \subset V_x$ un disco abierto tal que $0 \in D_x$ y $\overline{D_x} \subset V_x$. La colección $\{U_p \mid p \in P\} \cup \{\phi_x^{-1}(D_x) \mid x \in X \setminus P\}$ es una cubierta abierta de X y como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{U_k\}_{k=1}^N$. Supóngase, por reducción al absurdo, que existe $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq N$, tal que U_n contiene infinitos puntos de P . Nótese que $U_n \neq U_p$ para todo $p \in P$ pues, por definición, $|U_p \cap P| = 1$. Entonces $U_n = \phi_x^{-1}(D_x)$ para algún $x \in X \setminus P$. En particular, f es meromorfa en U_x , así que la función de valores complejos $f \circ \phi_x^{-1}$ es meromorfa en $V_x \supset \overline{D_x}$ y $\overline{D_x}$ contiene infinitos polos y ceros de $f \circ \phi_x^{-1}$. Sean $\{p_\lambda\}$ los ceros y polos de $f \circ \phi_x^{-1}$. Por el Teorema Bolzano-Weierstrass, la compacidad de $\overline{D_x}$ causa que $\{p_\lambda\}$ contenga una subsecuencia convergente $\{p_{\lambda_n}\}$ con límite $p \in \overline{D_x}$. Como $f \circ \phi_x^{-1}$ es continua, $(f \circ \phi_x^{-1})(p_{\lambda_n}) \rightarrow (f \circ \phi_x^{-1})(p)$ y como $f \circ \phi_x^{-1}(p_{\lambda_n}) \in \{0, \infty\}$ para todo n , el límite $f \circ \phi_x^{-1}(p)$ también debe ser 0 o ∞ . Esto es absurdo pues los ceros y polos de $f \circ \phi_x^{-1}$ deberían estar aislados y p no lo está. Por lo tanto, para $n = 1, \dots, N$, $U_n \cap P$ es finito, de donde $P = \bigcup_{1 \leq n \leq N} (U_n \cap P)$ también. \square

Proposición III.33 (Teorema del Módulo Máximo). *Sea $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida sobre un abierto $W \subset X$ de una superficie de Riemann X . Si existe $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$, entonces f es constante en W .*

Proposición III.34. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Si f es holomorfa en X , entonces f es constante.*

Demostración. Como f es holomorfa, es continua, así que la función $|f|$ es continua. Como X es compacto, $|f|$ alcanza su valor máximo en X , así que por el Teorema del Módulo Máximo, f es constante en X . \square

3. Funciones meromorfas y mapeos holomorfos en la esfera de Riemann.

De acuerdo con la definición III.7, un polo es un punto en el que el límite de una función es ∞ . Una función sobre una superficie de Riemann es meromorfa si todas sus singularidades son únicamente removibles o polos. Por otro lado, en el ejemplo II.25 se agrega un punto ∞ al plano complejo \mathbb{C} . Luego, en el ejemplo III.5, se prueba que una sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $\forall M > 0, |a_n| > M$ para infinitos n converge a ∞ en \mathbb{C}_∞ , a pesar de que diverge en \mathbb{C} . Todos estos hechos inspiran la

pregunta de qué pasará si el dominio de una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se extiende de \mathbb{C} a \mathbb{C}_∞ . Esta es la motivación de la siguiente proposición, que da una respuesta natural a esta pregunta.

Proposición III.35. *Sea X una superficie de Riemann. Existe una biyección entre las funciones meromorfas sin singularidades removibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sobre X y los mapas holomorfos $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que no son idénticamente ∞ .*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa sobre X que no tenga singularidades removibles. Definamos el mapeo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } x \text{ es un polo de } f \end{cases}$$

f es holomorfa en cualquier $x \in X$ que no sea un polo. La función inclusión $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por $i(z) = z$ es un mapeo holomorfo (usando la carta local $\varphi_1(z) = z$ en \mathbb{C}_∞). Entonces, en el conjunto de puntos regulares de f , $F = i \circ f$ es holomorfa. Falta entonces verificar que F es holomorfa en los polos de f . Para ello, se debe mostrar que, para todo polo $p \in X$, $\frac{1}{F} = \varphi_2 \circ F$ es una función holomorfa en p . En términos de una coordenada local z tal que z_0 corresponde a p , f se expresa como $\sum_{n \geq -k} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} H(z - z_0)$, donde $k = -\text{ord}_p(f) > 0$, $H(0) \neq 0$ y H es holomorfa en 0. En los puntos regulares de f alrededor de p , esta representación se puede utilizar también para F y como $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-k} H(z - z_0) = \infty$, también en p . Entonces, $H(0) \neq 0$ implica que $\frac{1}{F} = (z - z_0)^k \frac{1}{H(z - z_0)}$ es holomorfa en 0. Por tanto, F es holomorfa en p y es la función buscada.

Para mostrar el converso, sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ un mapeo holomorfo que no sea idénticamente ∞ . Sea $P \subset X$ el conjunto de puntos p tales que $F(p) = \infty$. Nótese que P es el conjunto de ceros de $\frac{1}{F} = \varphi_2 \circ F$, que también es un mapeo holomorfo. Por ello, P es un conjunto discreto y como X es Hausdorff, $X \setminus P$ es abierto. Defínase $f : X \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ como $F(x) \in \mathbb{C}$. $f|_{X \setminus P} = F|_{X \setminus P}$ es holomorfa por ser la restricción de una función holomorfa a un abierto. Si $P = \emptyset$, f es holomorfa en todo X y por consiguiente también es meromorfa. Supóngase ahora que $P \neq \emptyset$. Se busca mostrar que todo $p \in P$ es un polo de f . Primero nótese que F es holomorfa y, por ende, continua. Entonces, $\lim_{x \rightarrow p} F(x) = \infty$. Como P es un conjunto discreto, existe una vecindad $D \subset X$ de p tal que $F(x) \neq \infty$ y $f(x) = F(x)$ para $x \in D \setminus \{p\}$. Entonces $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} F(x) = \infty$. Por tanto, p es un polo de f . En resumen, f es holomorfa en $X \setminus P$ y todo $p \in P$ es un polo de f . En otras palabras, f es una función meromorfa. \square

4. Forma normal y multiplicidad de un mapeo holomorfo.

Las coordenadas locales permiten expresar un mapeo $F : X \rightarrow Y$ como una función compleja $z = H(w)$. Si F es meromorfa, es posible expresar a F como una serie de Laurent $z = \sum_{n \geq n_0} c_n w^n$. Resulta que si una elección cuidadosa de las coordenadas produce una forma muy sencilla y útil.

Proposición III.36 (Formal normal local). *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante. Para todo $p \in X$, existe un único $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier carta local $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ centrada en $F(p)$ existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ centrada en p de forma que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m$.*

Demostración. Sea ϕ_2 una carta en Y centrada en $F(p)$. Considérese una carta local arbitraria ψ en X centrada en p con coordenada local $w = \psi(x)$. La serie de Laurent de $T = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}$ respecto de w es $T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$ con $c_m \neq 0$. Como ϕ_2 está centrada en $F(p)$, $\psi(p)$ es un cero de $T(w)$, así que $m \geq 1$ gracias al corolario III.22. Si se factoriza w^m , se obtiene $T(w) = w^m \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^{i-m} = w^m S(w)$, donde $S(w)$ es una función holomorfa en 0 y $S(0) \neq 0$. Los ceros de S están aislados, así que existe una vecindad U de 0 tal que $0 \notin S(U)$ y como S es continua, se puede escoger U de forma que $S(U)$ esté contenido en un ramo del logaritmo (que es un abierto). Por ello, $\ln S(w)$ está bien definido y es holomorfo en U , así que la función $R(w) = e^{\frac{1}{m} \ln S(w)}$ es holomorfa y cumple $R^m(w) = S(w)$. Esto permite escribir $T(w) = (wR(w))^m$

Sea $\eta(w) = wR(w)$. η es holomorfa por ser producto de funciones holomorfas. Por el Teorema de la función inversa, $\eta'(0) = R(0) \neq 0$ implica que existe una vecindad W de 0 en la que η es invertible. Como toda biyección holomorfa es un homeomorfismo, η es un homeomorfismo en W . Sea $U_1 = \psi^{-1}(W)$. Como ψ es un homeomorfismo, $\phi_1 = \eta \circ \psi|_{U_1}$ es un homeomorfismo.

$T(w) = \eta^m(w)$ ya se parece a la forma normal local. Se necesita ahora una carta centrada en p proveniente de la estructura compleja de X para obtener la forma normal. ϕ_1 es la candidata. Para admitirla en la estructura compleja, basta mostrar que ϕ_1 es compatible con ψ (por transitividad, será compatible con todas las demás cartas de X). De hecho, la función de transición $\phi_1 \circ \psi|_{U_1}^{-1} = \eta$ es holomorfa, así que sí son compatibles. Además, $\psi(p) = 0$ implica $\phi_1(p) = 0$, así que ϕ_1 está centrada en p . Ahora, se puede nombrar una nueva coordenada local $z = \eta(w) = \phi_1(x)$. Entonces $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = (\phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}) \circ \eta^{-1}(z) = T(\eta^{-1}(z)) = \eta^m(\eta^{-1}(z)) = [\eta \circ \eta^{-1}(z)]^m = z^m$, que es la forma buscada.

Lo último que queda por mostrar es la unicidad del exponente m . Sea $x_0 \in U_1 \setminus \{p\}$ un punto suficientemente cerca de p (pronto se determinará qué tan cerca). Escríbase a x_0 y $F(x_0)$ mediante coordenadas locales $z_0 = \phi_1(x_0)$ y $w_0 = \phi_2(F(x_0))$. Gracias a la primera parte de esta prueba, $w_0 = z_0^m$. Sean z_1, \dots, z_{m-1} las otras $m - 1$ raíces m -ésimas de w_0 , que están en un círculo centrado en 0 . Como V_1 es un abierto que contiene a 0 , se puede elegir x_0 de forma que el círculo que contiene a z_0, z_1, \dots, z_{m-1} esté en el interior de V_1 . Si $x_i = \phi_1^{-1}(z_i)$, $F(x_0)$ tiene exactamente m preimágenes x_0, x_1, \dots, x_{m-1} . F cumple esta propiedad para cualquier x en una vecindad suficientemente pequeña de p y es independiente de las cartas locales utilizadas. Entonces, se puede encontrar m estudiando a F cerca de p . \square

Al igual que con el orden de una función, el lema anterior permite hacer la siguiente definición.

Definición III.37. La *multiplicidad* de F en p es el único $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que existen cartas locales

ϕ_1, ϕ_2 centradas en p y $F(p)$, respectivamente, con $F(z) = z^m$. Se denota por $m = \text{mult}_p(F)$.

El siguiente lema permite detectar la multiplicidad sin utilizar la forma normal local.

Lema III.38. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo. Para un punto cualquiera $p \in X$ sean z y w coordenadas locales alrededor de p y $F(p)$, respectivamente. Sean $z_0 = p$ y $w_0 = F(p)$. $y = F(x)$ se reescribe en términos de estas coordenadas como $w = h(z)$. Entonces:*

$$\text{mult}_p(F) = \text{ord}_{z_0}(h - h(z_0)) = 1 + \text{ord}_{z_0} \left(\frac{dh}{dz} \right)$$

Demostración. La serie de Taylor de h es:

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{n \geq m} c_n (z - z_0)^n$$

con $c_m \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}^+$. En la prueba de la proposición III.36 se vio que la multiplicidad de F surge del primer $c_n \neq 0$ de una serie centrada en p . La serie de arriba puede ser intercambiada por

$$w - w_0 = h(z) - h(z_0) = \sum_{n \geq m} c_n (z - z_0)^n$$

lo que indica que $\text{mult}_p(F) = m$. Como h es holomorfa, se puede derivar su serie de potencias. Hacer esto con la ecuación anterior respecto de z produce

$$\frac{dh}{dz} = \sum_{n \geq m} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

de donde, tras aplicar la definición, se obtiene $\text{ord}_{z_0} \left(\frac{dh}{dz} \right) = m - 1$, probando la segunda igualdad. \square

El lema anterior tiene dos consecuencias. Primero, muestra que la multiplicidad en cualquier punto $p \in X$ es por lo menos 1. Como h es holomorfa, su serie de Taylor solo tiene potencias no negativas de z y si se remueve su término independiente, la siguiente debe ser por lo menos de grado 1. Segundo, permite mostrar que el conjunto de puntos con $\text{mult}_p(F) \geq 2$ es discreto. $\text{ord}_{z_0} \left(\frac{dh}{dz} \right) \geq 1$ indica que estos puntos son ceros de $\frac{dh}{dz}$. Como $\frac{dh}{dz}$ es holomorfa, estos puntos forman un conjunto discreto que obtendrán un nombre especial.

Definición III.39. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante. Un punto $p \in X$ es un *punto de ramificación* de F si $\text{mult}_p(F) \geq 2$. $y \in Y$ es un *valor de ramificación* de F si es la imagen de un punto de ramificación.

De la proposición III.35, toda función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ corresponde a una función

holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Naturalmente, existe una relación entre la multiplicidad de F y el orden de f en un punto $p \in X$.

Lema III.40. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ el mapeo holomorfo correspondiente según la proposición III.35. Entonces:*

1. Si p es un cero de f , $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.
2. Si p es un polo de f , $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.
3. Si p no es un cero ni un polo de f , $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Demostración. Si p no es un polo de f , el lema III.38 establece que $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$. En particular, si p es un cero de f , $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$. Por otro lado, si p es un polo de f , también es un cero de $\frac{1}{f}$. Para encontrar la multiplicidad de F en p se usa la carta local $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$. Si ϕ es la carta que provee la forma normal, $\varphi_2 \circ F \circ \phi^{-1} = z^m$. Como $\varphi_2 \circ F = \frac{1}{f}$, $\left(\frac{1}{f}\right) \circ \phi = z^m$ así que $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p\left(\frac{1}{f}\right) = -\text{ord}_p(f)$, por el lema III.24. \square

D. Funciones entre superficies de Riemann compactas

En esta sección, se estudian superficies de Riemann compactas para obtener propiedades importantes, incluyendo la fórmula de Riemann-Hurwitz que será fundamental en la prueba del resultado principal. Se empieza contando el número de preimágenes de puntos $y \in Y$ bajo un mapa holomorfo $F : X \rightarrow Y$. La siguiente propiedad dice que cualquier punto $y \in Y$ tiene la misma cantidad de preimágenes si las contamos con multiplicidad.

Proposición III.41. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. La función $d_y : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F)$$

es independiente de la elección de y . Es decir, es constante.

Demostración. Este resultado se demuestra primero para una clase particular de funciones. Sea $D = B_1(0)$ el disco unitario abierto en el plano complejo y considérese la función $f : D \rightarrow D$ dada por $f(z) = z^m$ para $m \in \mathbb{Z}^+$. Sea $w \in D$. Si $w = 0$, su única preimagen es $z = 0$ y $\text{mult}_0(f) = m$. Contando con multiplicidad, $w = 0$ tiene m preimágenes. $w \neq 0$, por otro lado, tiene exactamente m raíces m -ésimas $z_1, \dots, z_m \in D$ y $\text{mult}_{z_i}(f) = 1$. En este caso, w también tiene m preimágenes, probando la proposición para f .

La forma normal local de la proposición III.36 transforma a una F arbitraria, al menos localmente, en una función de la forma $w = z^m$; esto es similar a la función del párrafo anterior y es el nexo entre el caso particular y el general. Tómesese $y \in Y$ arbitrario. Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ todas las

preimágenes de y bajo F . Elíjase una carta local $\phi : U \rightarrow D$ centrada en y . Por la proposición III.36, para cada x_i existe una carta local $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ centrada en x_i que proporciona la coordenada z_i y que transforma a F en $w = h_i(z) = z_i^{m_i}$ en V_i . Gracias a que la imagen de ϕ es D (y por tanto, la de h_i también), se puede suponer sin pérdida de generalidad que $V_i = D$. Así, en términos de las coordenadas locales $F|_{U_i}$ tiene la misma forma que la función f del inicio de esta prueba: es una función del disco D a sí mismo que manda un punto z_i a $z_i^{m_i}$. Por ello, cualquier punto $y' \in U$ tiene la misma cantidad de preimágenes que y en las vecindades U_1, \dots, U_n .

Si esas fueran todas las preimágenes de y' la proposición estaría demostrada. Sin embargo, es posible que y' tenga otra preimagen que no esté en esas vecindades. Supóngase, en busca de una contradicción, que existen infinitos puntos $y_j \in U$ arbitrariamente cerca de y (esto es, $y_j \rightarrow y$) que tienen al menos una preimagen p_j fuera de las vecindades U_1, \dots, U_n . Obviamente, $F(p_j) \rightarrow y$. Como X es compacto, existen $x \in X$ y una subsecuencia convergente de $\{p_j\}$, digamos $\{p_{j_k}\}$, tales que $p_{j_k} \rightarrow x$. Como F es continua, $F(p_{j_k}) \rightarrow y$ implica que $F(x) = y$, de donde $x = x_i$ para algún i . Sin embargo, esto es una contradicción, pues $p_{j_k} \rightarrow x_i$ implica que eventualmente $p_{j_k} \in U_i$.

Por ello, cualquier punto de U tiene la misma cantidad de preimágenes que y en $U_1 \cup \dots \cup U_n$ y este conjunto las contiene a todas. Esto implica que d_y es constante en U . Como y es arbitraria, d_y es localmente constante y como Y es conexo, entonces es constante. \square

Esta proposición da una medida para clasificar a los mapas holomorfos.

Definición III.42. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo no constante entre dos superficies de Riemann compactas. El número $\deg(F)$, dado por $d_y(F)$ para cualquier $y \in Y$, se llama *grado* de F .

Corolario III.43. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo entre dos superficies de Riemann compactas. F es un isomorfismo si y sólo si $\deg(F) = 1$.

Demostración. Si $\deg(F) = 1$, todo punto $y \in Y$ tiene exactamente una preimagen de multiplicidad 1. Esto quiere decir que F es inyectivo. Por la proposición III.27, F tiene que ser un isomorfismo. \square

Corolario III.44. Sea X una superficie de Riemann compacta. Si existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que tiene exactamente un polo simple p y ninguna otra singularidad, entonces X es isomorfo a \mathbb{C}_∞ .

Demostración. Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ el mapeo holomorfo correspondiente a f . Al calcular $\deg(F)$ en ∞ , la única preimagen de ∞ es p . Como p es un polo simple de f , $\text{ord}_p(f) = -1$ y por el lema III.40, $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f) = 1$. Entonces $\deg(F) = 1$ y en virtud del corolario anterior, F es un isomorfismo entre X y \mathbb{C}_∞ . \square

A continuación se generaliza el ejemplo III.25 a superficies de Riemann compactas. Este es un paso crucial para obtener la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Proposición III.45. Sean X una superficie de Riemann compacta y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa no constante. Entonces

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0$$

Demostración. En virtud de la proposición III.35, sea $F : X \rightarrow C_\infty$ la función holomorfa correspondiente a f . Sean $\{x_i\}$ el conjunto de ceros y $\{y_j\}$ el conjunto de polos de f . Para cualquier i y j , $F(x_i) = 0$ y $F(y_j) = \infty$. Con esto, se calcula el grado de F respecto de 0 y de ∞ .

$$\begin{aligned} \deg(F) &= d_0(F) = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \\ &= d_\infty(F) = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \end{aligned}$$

Por el lema III.40, $\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f)$ y $\text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f)$. Además, por el corolario III.22, sólo los ceros y polos tienen orden no nulo. En consecuencia

$$\begin{aligned} \sum_p \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

1. Fórmula de Riemann-Hurwitz.

El siguiente es el primer teorema importante en la teoría de mapeos holomorfos. Esta fórmula relaciona las propiedades analíticas de un mapeo holomorfo con las propiedades topológicas de su dominio y su imagen (que son superficies de Riemann).

Teorema III.46 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). Sean X y Y dos superficies de Riemann compactas. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante. Entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

Demostración. Antes que nada, como X es compacta, el conjunto de puntos de ramificación de F además de ser discreto es finito. Así, la suma de la derecha es finita.

Constrúyase una triangulación de Y de forma que todos los valores de ramificación de F sean vértices en la triangulación. F induce una triangulación análoga en X , enviando cada valor de ramificación a sus puntos de ramificación. Sean v , e , t el número de vértices, lados y triángulos, respectivamente, de la triangulación de Y y v' , e' , t' sus correspondientes en X .

Como todos los valores de ramificación son vértice de algún triángulo en Y , ningún triángulo contiene valores de ramificación en su interior. Por ello, cada punto del interior de un triángulo tiene exactamente $\deg(F)$ preimágenes bajo F (todas de multiplicidad 1). En otras palabras, por cada triángulo en Y , hay $\deg(F)$ triángulos en X . Este argumento funciona también para mostrar que $v' = \deg(F)v$ y $e' = \deg(F)e$. Si se sustituye el número de preimágenes de un punto $q \in Y$ usando la definición de $\deg(F)$ en q , se obtiene:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = \deg(F) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{q \text{ vértice de } Y} |F^{-1}(q)| \\ &= \sum_{q \text{ vértice de } Y} \left(\deg(F) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1] \right) \\ &= \deg(F)v - \sum_{q \text{ vértice de } Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)v - \sum_{p \text{ vértice de } X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Por el teorema II.35, $\chi(X) = 2 - g(X)$. Al unir todas estas cuentas se obtiene:

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -\chi(X) \\ &= -v' + e' - t' \\ &= -\deg(F)v + \sum_{p \text{ vértice de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)e - \deg(F)t \\ &= -\deg(F)\chi(Y) + \sum_{p \text{ vértice de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

□

IV. FORMAS DIFERENCIALES E INTEGRALES

Después de extender la noción de diferenciabilidad a las superficies de Riemann, ahora se extiende la definición de integrabilidad. Sin embargo, las integrales no son el único objetivo de este capítulo. Las formas diferenciales están involucradas en el enunciado del Teorema de Riemann-Roch, mientras que el Teorema del Residuo será clave en la demostración del resultado principal.

A. Formas diferenciales

Primero se extiende la noción de formas diferenciales complejas a las superficies de Riemann. No se ahonda en los detalles del significado de una forma diferencial. Lo importante es saber que su comportamiento es el mismo que en el plano complejo. El lector interesado puede consultar el artículo de Tao (2007) que define formas diferenciales generalizando una noción específica de integración en la recta real.

Definición IV.1. Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una *1-forma diferencial* ω es una expresión de la forma

$$\omega = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$$

Definición IV.2. En la definición anterior, si f y g son funciones \mathcal{C}^∞ , se dice que ω es \mathcal{C}^∞ en V o en la coordenada z .

Elíjanse dos 1-formas particulares: $\omega_1 = f_1(z)dz$ y $\omega_2 = f_2(w)dw$, \mathcal{C}^∞ en los abiertos V_1 y V_2 , respectivamente. Sea $T : V_2 \rightarrow V_1$ una función holomorfa, $z = T(w)$ en términos de las coordenadas z y w . En una integral, T puede servir para hacer un cambio de variable de w a z de la siguiente forma: $\int \omega_1 = \int f_1(z)dz = \int f_1(T(w))T'(w)dw = \int f_2(w)dw = \int \omega_2$. Esta idea inspira la definición de un cambio de variable más general.

Definición IV.3. Sean $\omega_1 = f_1(z)dz + g_1(z)d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2(w)dw + g_2(w)d\bar{w}$ 1-formas \mathcal{C}^∞ definidas sobre los abiertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ respectivamente. Sea $z = T(w)$ un mapeo holomorfo de V_2 a V_1 . Se dice que T *transforma* a ω_1 en ω_2 , o que T es un *cambio de variable* de ω_1 a ω_2 , si $f_2(w) = f_1(T(w))T'(w)$ y $g_2(w) = g_1(T(w))\overline{T'(w)}$.

La idea es obtener ω_2 después de sustituir $z = T(w)$, $dz = T'(w)dw$ y $d\bar{z} = \overline{T'(w)}d\bar{w}$ en la expresión de ω_1 , al igual que un cambio de variable de integración. Como es esperado, si S es la función inversa de T , se puede transformar a ω_2 en ω_1 usando S .

Hacer un cambio de variable simplifica el cálculo de la integral, pero no cambia el resultado. De igual manera, que estas transformaciones no deben afectar las propiedades más importantes de las 1-formas diferenciales.

Definición IV.4. Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma \mathcal{C}^∞ en X es una colección $\{\omega_\phi\}$ de 1-formas \mathcal{C}^∞ que cumple las siguientes dos condiciones.

- Para toda carta local $\phi : U \rightarrow V$ de X , existe una única 1-forma ω_ϕ definida sobre V .
- Si los dominios de dos cartas locales $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ no son disjuntos, la función de transición $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ transforma a ω_{ϕ_1} en ω_{ϕ_2} .

La motivación de esta definición sigue la misma línea que las funciones holomorfas. Una 1-forma sobre una superficie de Riemann es un objeto que localmente es una 1-forma compleja y cuyas representaciones locales son compatibles. Esto significa se puede usar un cambio de variable para transformar la representación de la 1-forma en una carta local al cambiar de coordenada. En este caso, el cambio de variable es la función de transición entre las cartas locales.

Definición IV.5. Una 1-forma $\{\omega_\phi\}$ en una superficie de Riemann X es *holomorfa* si localmente tiene la forma $f(z)dz$, con f holomorfa. Es decir, $\forall \omega \in \{\omega_\phi\}$, $\omega = f(z)dz$ con f holomorfa. En cambio, si cada $f(z)$ es meromorfa se dice que $\{\omega_\phi\}$ es *meromorfa*.

Las 1-formas más relevantes no son las \mathcal{C}^∞ sino las holomorfas y meromorfas. Sin embargo, las propiedades que se demostraremos a continuación se refieren a formas \mathcal{C}^∞ . La razón es que las formas holomorfas y meromorfas son muy parecidas a las \mathcal{C}^∞ . Por ejemplo, toda función holomorfa es analítica o \mathcal{C}^∞ . Entonces, una 1-forma holomorfa $\{\omega_{\phi_\alpha}\}$ es una 1-forma \mathcal{C}^∞ en la que cada ω_{ϕ_α} no depende de \bar{z}_α (igual que las funciones holomorfas, que cumplen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$). Por ello, las 1-formas holomorfas heredan todas las propiedades de las 1-formas \mathcal{C}^∞ .

Las funciones meromorfas heredan las propiedades de las funciones \mathcal{C}^∞ , aunque solo en sus puntos regulares, pues en sus polos no son analíticas. Lo mismo ocurre con las 1-formas meromorfas. Sea $\{\omega_\phi\}$ una 1-forma definida sobre X y sean $\omega_\phi = f(z)dz$ y $\omega_\psi = g(w)dw$ sus representaciones locales respecto de ϕ y ψ respectivamente, con f y g meromorfas. Sea $T = \phi \circ \psi^{-1}$ la función de transición (que es holomorfa). Si $\phi(p)$ es un polo de f y se transforma ω_ϕ en ω_ψ , la función $g(w) = f(T(w))T'(w)$ tiene un polo en $\psi(p)$. Por tanto, los polos de las 1-formas meromorfas están bien definidos en el sentido que no dependen de la carta local. Por ello, se puede decir que p es un polo de la 1-forma meromorfa $\{\omega_\phi\}$. Así, $\{\omega_\phi\}$ hereda las propiedades de las 1-formas \mathcal{C}^∞ en sus puntos regulares, mientras que sus polos se mantienen fijos.

Nota. Por la explicación en el párrafo anterior, se demostrarán los siguientes teoremas para formas \mathcal{C}^∞ únicamente, recordando que valdrán también para formas holomorfas y meromorfas.

1. Formas diferenciales definidas en un atlas.

Ejemplo IV.6. Sea $\omega_1 = dz$ una 1-forma diferencial en \mathbb{C} . Se busca una 1-forma ω sobre \mathbb{C}_∞ cuya representación local en \mathbb{C} sea ω_1 . En el ejemplo II.25, se obtuvo un atlas para \mathbb{C}_∞ que consiste de

las cartas $\varphi_1 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $\varphi_1(z) = z$ y $\varphi_2(w) = w^{-1}$. La función de transición es $T(w) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w) = w^{-1}$. Se puede escribir $\omega_1 = f(z)dz$, donde $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $f(z) = 1$, y notar que ω_1 está definida en la imagen de φ_1 . Si se transforma a ω_1 usando T , se obtiene una 1-forma $\omega_2 = f(T(w))T'(w)dw = -w^{-2}dw$ meromorfa en \mathbb{C} , la imagen de φ_2 . Entonces, el conjunto $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ contiene formas diferenciales complejas que corresponden a una carta local distinta del atlas $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ de \mathbb{C}_∞ . \square

La colección Ω realmente no es una 1-forma diferencial sobre \mathbb{C}_∞ . Existen otras cartas locales $\phi : U \rightarrow V$ en la estructura compleja de \mathbb{C}_∞ para las cuales no existe una 1-forma diferencial compleja en Ω definida en V . Sin embargo, el procedimiento para extender una 1-forma usando un cambio de variable para definirla en otras cartas locales se puede generalizar. El siguiente lema verifica que este procedimiento es válido y que el resultado es, en efecto, una 1-forma diferencial según la definición anterior.

Lema IV.7. *Sean X una superficie de Riemann y \mathcal{A} un atlas complejo de X . Supóngase que existe una colección de 1-formas complejas \mathcal{C}^∞ , una para cada carta de \mathcal{A} , de forma que si dos formas tienen dominios no disjuntos, una se transforma en la otra. Entonces, existe una única 1-forma \mathcal{C}^∞ definida en X que extiende la colección de 1-formas en \mathcal{A} .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\forall \phi \in \mathcal{A}$, el dominio U de ϕ es conexo. Si no fuera así, reemplazamos ϕ por las cartas definidas en las componentes conexas de U .

Sea $\psi : U \rightarrow V$ una carta local en la estructura compleja de X que no esté en el atlas \mathcal{A} . Se busca una 1-forma diferencial compleja con dominio V que se pueda transformar en cualquier otra 1-forma que se necesite. Como \mathcal{A} es un atlas, los dominios de sus cartas cubren X , así que si se toma un $p \in U$ fijo, existe $\phi \in \mathcal{A}$ cuyo dominio contiene a p . Sea z la coordenada local asociada a ϕ y w , la asociada a ψ . En la estructura compleja, $T = \phi \circ \psi^{-1}$ es la función de transición y en términos de las coordenadas es $z = T(w)$. Sea $\omega_\phi = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ la 1-forma asociada a ϕ y defínase

$$\omega_\psi = f(T(w))T'(w)dw + g(T(w))\overline{T'(w)}d\bar{w}.$$

ω_ψ es la candidata para ser la 1-forma asociada a ψ . Primero, la definición es independiente de la elección de ϕ . Si ϕ_1 fuera otra carta local sobre p con coordenada local s , función de transición $s = R(w) = \phi_1 \circ \psi^{-1}(w)$ y 1-forma asociada $\omega_{\phi_1} = f_1(s)ds + g_1(s)d\bar{s}$, ω_ψ estaría dada por

$$f_1(R(w))R'(w)dw + g_1(R(w))\overline{R'(w)}d\bar{w}.$$

Por hipótesis, se puede transformar ω_ϕ en ω_{ϕ_1} . Es decir, $f_1(s) = f(T_1(s))T_1'(s)$ y $g_1(s) = g(T_1(s))\overline{T_1'(s)}$, donde $T_1 = \phi_1 \circ \psi^{-1}$ es la función de transición. Reescribiendo esta ecuación usando funciones relacionadas a ψ , se obtiene $T_1 = T \circ R^{-1}$ y $T = T_1 \circ R$. Si se sustituyen estas relaciones

en la definición de ω_ψ en términos de ϕ_1 , se obtiene:

$$\begin{aligned}
& f_1(R(w))R'(w)dw + g_1(R(w))\overline{R'(w)}d\bar{w} \\
&= [f(T_1(R(w)))T_1'(R(w))] R'(w)dw + [g(T_1(R(w)))\overline{T_1'(R(w))}] \overline{R'(w)}d\bar{w} \\
&= f(T_1 \circ R(w)) [T_1'(R(w))R'(w)]dw + g(T_1 \circ R(w)) [\overline{T_1'(R(w))R'(w)}]d\bar{w} \\
&= f(T(w))T'(w)dw + g(T(w))\overline{T'(w)}d\bar{w} \\
&= \omega_\psi.
\end{aligned}$$

Esto muestra que las 1-formas definidas respecto de ϕ y de ϕ_1 son iguales, por lo que la definición de ω_ψ es independiente de la carta local utilizada y ω_ψ es única. Es más, este hecho permite probar que no solo se puede elegir cualquier carta local, sino que cualquier punto $q \in U$ sirve de base para definir ω_ψ .

Supóngase que U es conexo. Si no fuera conexo, este procedimiento se puede usar para definir ω_ψ de forma única en cada componente conexa. Como ψ es un homeomorfismo, V es conexo y, por ser un abierto de \mathbb{C} , también es conexo por caminos. Esto significa que existe un camino $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow V$ tal que $\gamma_0(0) = \psi(p)$ y $\gamma_0(1) = \psi(q)$. Si se define $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ por $\psi^{-1} \circ \gamma_0$, se obtiene un camino tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Además, los dominios de las cartas del atlas \mathcal{A} cubren a $\gamma([0, 1])$. Como γ es una función continua, $\gamma([0, 1])$ es compacto y conexo. Gracias a esto, existe una cantidad finita de cartas $\phi_k : U_k \rightarrow V_k$, con $k = 0, 1, \dots, n$, tales que $\phi_k \in \mathcal{A}$, $\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{k=0}^n U_k$ por compacidad. Por conexidad, se eligen los índices k de forma que $U_k \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} U_i\right) \cap \neq \emptyset$ para $k = 1, \dots, n$.

Esta construcción sirve para extender la definición de ω_ψ a q . Primero, defínase ω_ψ en $\gamma([0, 1]) \cap U_0$ transformando a ω_{ϕ_0} en ω_ψ mediante la función de transición $T_0 = \phi_0 \circ \psi^{-1}$. Supóngase ahora que ω_ψ ya está definida en $\gamma([0, 1]) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} U_i\right)$ para algún $1 \leq k \leq n$. Como $\gamma([0, 1]) \cap \left(\bigcup_{i=0}^k U_i\right)$ es conexo, $U_k \cap \left[\gamma([0, 1]) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} U_i\right)\right]$ es no vacío y contiene a un punto p_k . Existe, entonces, $0 \leq j < k$ tal que $p_k \in U_j$. Usando el cambio de coordenadas $T_{kj} = \phi_k \circ \phi_j^{-1}$, la definición de ω_ψ se extiende de $(\gamma([0, 1]) \cap U_j) \cap U_k$ a $\gamma([0, 1]) \cap U_k$. Como se ve al inicio de esta prueba, ω_ψ es independiente de la carta local que se use para definirla. Por ello, ω_ψ es igual en $\gamma([0, 1]) \cap U_k$ y en $\gamma([0, 1]) \cap \left(\bigcup_{i=0}^k U_i\right)$. Este proceso inductivo permite definir ω_ψ en el conjunto $\gamma([0, 1]) \cap \left(\bigcup_{i=0}^n U_i\right) = \gamma([0, 1])$ y, en particular, en $q = \gamma(1)$.

Lo que falta para tener una 1-forma en X es mostrar que todas las 1-formas definidas de esta manera son compatibles. Es decir, que si ψ_1 y ψ_2 son cartas locales con dominios U_1 y U_2 , respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces se puede transformar ψ_1 en ψ_2 usando $T = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$. Si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}$, ω_{ψ_1} se transforma en ω_{ψ_2} por hipótesis. Si $\psi_1 \in \mathcal{A}$ y $\psi_2 \notin \mathcal{A}$, la definición de ω_{ψ_2} es justamente ω_{ψ_1} transformada por T en $U_1 \cap U_2$. Si $\psi_1, \psi_2 \notin \mathcal{A}$, sea $p \in U_1 \cap U_2$. Se elige una carta local $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$. Sean $T_1 = \phi \circ \psi_1^{-1}$ y $T_2 = \phi \circ \psi_2^{-1}$. Si

$\omega_\phi = f(s)ds + g(s)d\bar{s}$, se definen las 1-formas respecto de ϕ :

$$\begin{aligned}\omega_{\psi_1} &= f(T_1(z))T_1'(z)dz + g(T_1(z))\overline{T_1'(z)}d\bar{z} \\ \omega_{\psi_2} &= f(T_2(w))T_2'(w)dw + g(T_2(w))\overline{T_2'(w)}d\bar{w}.\end{aligned}$$

En la expresión de ω_{ψ_1} , se hace el cambio de variable $z = T(w)$ para obtener:

$$\begin{aligned}& f[T_1(T(w))]T_1'(T(w))[T'(w)dw] + g[T_1(T(w))]\overline{T_1'(T(w))} [\overline{T'(w)}d\bar{w}] \\ &= f(T_1 \circ T(w))(T_1 \circ T)'(w)dw + g(T_1 \circ T(w))\overline{(T_1 \circ T)'(w)}d\bar{w} \\ &= f(T_2(w))T_2'(w)dw + g(T_2(w))\overline{T_2'(w)}d\bar{w} \\ &= \omega_{\psi_2}.\end{aligned}$$

En cualquier caso, es posible transformar a ω_{ψ_1} en ω_{ψ_2} . Así, se ha construido una 1-forma diferencial $\{\omega_\phi\}$ en X a partir de las 1-formas correspondientes al atlas \mathcal{A} . El paso restante es demostrar la unicidad. Si $\{\eta_\phi\}$ es otra 1-forma sobre X que extiende a la colección de formas sobre \mathcal{A} , cualquier pareja de formas η_ϕ y η_ψ pueden ser transformadas una en la otra. En particular, si $\phi \in \mathcal{A}$, η_ψ es la transformación de la forma η_ϕ que pertenece a la colección de formas sobre \mathcal{A} . Por tanto $\eta_\psi = \omega_\psi$. \square

Gracias al lema IV.7, el procedimiento del ejemplo IV.6 se puede continuar para extender la 1-forma compleja dz a una 1-forma diferencial en la esfera de Riemann.

2. Orden de 1-formas meromorfas.

Al igual que con las funciones meromorfas, se puede definir el orden de una 1-forma meromorfa en un punto.

Definición IV.8. Sea ω una 1-forma meromorfa definida en una superficie de Riemann X . Sea z una coordenada local y z_0 la coordenada correspondiente a $p \in X$. En términos de z , ω toma la forma $f(z)dz$ con f meromorfa. El *orden de ω en p* se define como el orden de f en z_0 y se denota con $\text{ord}_p(\omega)$.

Lema IV.9. *El orden de una 1-forma meromorfa en p es independiente de la elección de coordenada local.*

Demostración. Esta prueba es similar a la del orden de las funciones meromorfas. Sean ϕ, ψ cartas locales que contengan a p en su dominio y supóngase, sin pérdida de generalidad, que están centradas en p . Si no lo estuvieran, se reemplaza z por $z - z_0$ y w por $w - w_0$ en las series de Laurent, donde $z_0 = \phi(p)$ y $w_0 = \psi(p)$.

Respecto de ϕ , se tiene $\omega_\phi = f(z)dz = \left(\sum_{n \geq n_0} a_n z^n\right) dz = (a_{n_0} z^{n_0} + O(z^{n_0+1})) dz$, con

$a_{n_0} \neq 0$. En esta forma, $\text{ord}_p(\omega) = n_0$. Respecto de ψ , ω toma la forma $g(w)dw$. Por el lema II.18, la función de transición $T = \phi \circ \psi^{-1}$ tiene la forma $z = T(w) = \sum_{n \geq 1} b_n w^n = b_1 w + O(w^2)$ con $b_1 \neq 0$. Como T transforma a ω_ϕ en ω_ψ , se tiene que

$$\begin{aligned} g(w) &= f(T(w))T'(w) \\ &= f(b_1 w + O(w^2))(b_1 + O(w)) \\ &= [a_{n_0}(b_1 w + O(w^2))^{n_0} + O((b_1 w + O(w^2))^{n_0+1})](b_1 + O(w)) \\ &= [a_{n_0} b_1^{n_0} w^{n_0} + O(w^{n_0+1})](b_1 + O(w)) \\ &= a_{n_0} b_1^{n_0+1} w^{n_0} + O(w^{n_0+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el orden de ω respecto de ψ también es n_0 , como se quería. \square

Definición IV.10. Sean ω una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann X y $p \in X$.

- p es un *cero de orden* n de ω si $\text{ord}_p(\omega) = n > 0$.
- p es un *polo de orden* n de ω si $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$.

El lema IV.9 provee otra forma de comprobar que los polos de las formas diferenciales están bien definidos. La demostración de las siguientes propiedades es análoga a su equivalente para funciones meromorfas.

Proposición IV.11. *El conjunto de ceros y polos de una 1-forma meromorfa es discreto.*

Proposición IV.12. *Una 1-forma meromorfa ω es holomorfa en p si y solo si $\text{ord}_p(\omega) \geq 0$.*

Ejemplo IV.13. Sea ω la forma diferencial en \mathbb{C}_∞ definida en el ejemplo IV.6. La forma de ω respecto de φ_2 es $w^{-2}dw$, así que $\text{ord}_\infty(\omega) = \text{ord}_{\varphi_2(\infty)}(w^{-2}) = \text{ord}_0(w^{-2}dw) = -2$. Entonces ω tiene un polo de orden 2 en ∞ . En cualquier otro punto $z \in \mathbb{C}$, ω toma la forma dz respecto de φ_1 y se tiene $\text{ord}_z(\omega) = \text{ord}_z(1) = 0$. \square

Ejemplo IV.14. Sea $f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$ una función definida en \mathbb{C} , con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distintos y $e_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sea $\omega_1 = f(z)dz$ una 1-forma diferencial en \mathbb{C} . Transfórmese ω_1 usando el cambio de variable $z = T(w) = \frac{1}{w}$. Primero, nótese que $f\left(\frac{1}{w}\right) = c \prod_{i=1}^n \left(w - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{e_i} \left(-\frac{w}{\lambda_i}\right)^{-e_i}$. Sea, entonces, $\omega_2 = g(w)dw = f(T(w))T'(w)dw = c \left[\prod_{i=1}^n \left(w - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{e_i} \left(-\frac{w}{\lambda_i}\right)^{-e_i} \right] (-w^{-2})dw$. Por el lema IV.7, existe una 1-forma diferencial meromorfa ω sobre \mathbb{C}_∞ que extiende a $\{\omega_1, \omega_2\}$.

Se sabe que $\text{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$. Respecto de la carta φ_1 , ω toma la forma $f(z)dz$ y entonces se tiene que $\text{ord}_{\lambda_i}(\omega) = e_i$. También se puede calcular $\text{ord}_{\lambda_i}(\omega)$ usando la forma local de ω respecto de φ_2 . Respecto de esta carta, ω toma la forma $g(w)dw$ y $\text{ord}_{\lambda_i}(\omega) = \text{ord}_{\varphi_2(\lambda_i)}(g) = \text{ord}_{1/\lambda_i}(g) = e_i$, que concuerda con el orden respecto de φ_1 , según el lema IV.9. Para calcular $\text{ord}_\infty(\omega)$, se usa la forma

respecto de φ_2 y obtenemos $\text{ord}_\infty(\omega) = \text{ord}_{\varphi_2(\infty)}(g) = \text{ord}_0(g) = -2 - \sum_{i=1}^n e_i$. Naturalmente, para cualquier otro punto $z \in \mathbb{C}_\infty$ distinto de ∞ y de los λ_i , $\text{ord}_z(\omega) = 0$. \square

3. 2-formas diferenciales.

Más tarde, las 1-formas diferenciales se usan para integrar sobre trayectorias en superficies de Riemann. En este caso, sólo se necesita un parámetro para definir una trayectoria. También puede ser útil integrar sobre superficies, en cuyo caso se necesitan dos parámetros para definir la región de integración y, con ello, un diferencial de “dos variables”. Ahora se formaliza esta noción y se extiende a las superficies de Riemann.

Definición IV.15. Una expresión de la forma

$$\eta = f(z)dz \wedge d\bar{z}$$

donde f es una función \mathcal{C}^∞ definida en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ se llama *2-forma diferencial \mathcal{C}^∞ en la coordenada z* .

Ahora la regla de transformación es ligeramente distinta.

Definición IV.16. Supóngase que $\eta_1 = f(z)dz \wedge d\bar{z}$ y $\eta_2 = g(w)dw \wedge d\bar{w}$ son 2-formas diferenciales definidas en los abiertos V_1 y V_2 , respectivamente. Sea $z = T(w)$ una función holomorfa de V_2 a V_1 . Entonces, T transforma a η_1 en η_2 si

$$g(w) = f(T(w))\|T'(w)\|^2.$$

La regla de transformación surge también de la idea de sustituir $z = T(w)$ en la expresión de $\eta_1 = f(z)dz \wedge d\bar{z}$. La diferencia es que ahora hay dos diferenciales, así que la forma diferencial se transforma de la siguiente manera: $dz \wedge d\bar{z} = d(T(w)) \wedge d(\overline{T(w)}) = (T'(w)dw) \wedge (\overline{T'(w)}d\bar{w}) = T'(w)\overline{T'(w)}dw \wedge d\bar{w} = \|T'(w)\|dw \wedge d\bar{w}$. Aunque no se han descrito las propiedades de la operación \wedge , esta sustitución explica la motivación del término $\|T'(w)\|$.

El siguiente paso es extender las 2-formas de \mathbb{C} a las superficies de Riemann.

Definición IV.17. Sea X una superficie de Riemann. Una colección $\{\eta_\phi\}$ de 2-formas \mathcal{C}^∞ se llama *2-forma diferencial en X* si cumple:

- Para toda carta local $\phi : U \rightarrow V$ de X , existe una única 2-forma η_ϕ en la colección definida sobre V .
- Si los dominios de dos cartas locales ϕ_1 y ϕ_2 no son disjuntos, la función de transición $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ transforma a η_{ϕ_1} en η_{ϕ_2} .

Al igual que con las 1-formas, se tiene:

Lema IV.18. Sean X una superficie de Riemann y \mathcal{A} un atlas complejo de X . Supóngase que existe una colección de 2-formas complejas \mathcal{C}^∞ , una para cada carta de \mathcal{A} , de forma que si dos formas tienen dominios no disjuntos, una se transforma en la otra. Entonces existe una única 2-forma \mathcal{C}^∞ definida en X que extiende la colección de 2-formas en \mathcal{A} .

La prueba de este lema es análoga a la del lema IV.7.

B. Operaciones con formas diferenciales

Existen varias formas de obtener nuevas formas diferenciales. Una manera es obtenerlas a partir de otras formas existentes. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 se multiplican los diferenciales dx y dy para obtener $dA = dxdy$. También se puede hacer una sustitución para cambiar el dominio de una forma diferencial, como cuando se utilizan coordenadas polares mediante la función inversa de $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$; el dominio circular $x^2 + y^2 \leq R^2$ es transformado en uno rectangular $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi$. Por otro lado, las formas diferenciales generalmente están asociadas con alguna forma de diferenciación. Al integrar $\int f(x)dx$, en ocasiones es necesario hacer un cambio de variable $x = g(u)$. En este caso, el diferencial dx se reemplaza entonces por $g'(u)du$. A continuación, se formalizan estas ideas.

1. Producto exterior de 1-formas diferenciales.

En la definición de 2-formas diferenciales, se obtuvo informalmente el criterio para transformar 2-formas a partir de las propiedades del símbolo \wedge . Ahora se define correctamente la operación \wedge entre 1-formas diferenciales. Informalmente, se puede considerar a una 1-forma en el plano complejo como un segmento de recta de longitud infinitesimal, mientras que una 2-forma es una sección infinitesimal de un plano. Al igual que dos rectas no paralelas determinan un plano, dos 1-formas no “paralelas” determinan una 2-forma mediante la operación \wedge .

Definición IV.19. Sean $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ dos 1-formas \mathcal{C}^∞ en \mathbb{C} . Se define el *producto exterior* de ω_1 y ω_2 por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge d\bar{z}$$

La verificación de las siguientes propiedades es inmediata a partir de la definición.

Proposición IV.20. Sean $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ dos 1-formas \mathcal{C}^∞ en \mathbb{C} . Entonces:

- $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.
- $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$.

En particular, la proposición anterior dice que $d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z}$ y que $dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$. Interpretar al producto exterior como el plano infinitesimal generado por dz y $d\bar{z}$, le da sentido a estas propiedades. Al igual que dos rectas paralelas no generan un plano, la segunda propiedad

dice que dos 1-formas “paralelas” no generan una 2-forma. La anticonmutatividad (la primera propiedad) tiene sentido al integrar. Una integral respecto de $d\bar{z} \wedge dz$ se hace en dirección opuesta a $dz \wedge d\bar{z}$, así que sus integrales difieren únicamente por su signo. En términos del producto exterior, esto significa que \wedge le da una orientación a las 2-formas y que al invertir el orden de los factores, se invierte la orientación.

Definición IV.21. Sea X una superficie de Riemann. Sean ω_1 y ω_2 1-formas \mathcal{C}^∞ definidas en X . Supóngase que sus formas locales son $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ con respecto de alguna coordenada local z . Se define el *producto exterior* de ω_1 y ω_2 , denotado por $\omega_1 \wedge \omega_2$, como la 2-forma diferencial cuya representación local es

$$(f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge d\bar{z}$$

En otras palabras, el producto exterior de dos 1-formas en una superficie de Riemann es la colección de los productos exteriores de las representaciones locales. Antes de seguir, se tiene que verificar que:

Lema IV.22. *La 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ de la definición IV.21 está bien definida.*

Demostración. Sean ϕ_1 y ϕ_2 cartas locales tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, z_1 y z_2 sus coordenadas inducidas y $z_1 = T(z_2)$ la función de transición. Sea $\omega_{i,j} = f_{i,j}(z_j) dz_j + g_{i,j}(z_j) d\bar{z}_j$ la representación local de ω_i respecto de ϕ_j , con $f_{i,j}(z_j)$ y $g_{i,j}(z_j)$ funciones \mathcal{C}^∞ para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$. La representación de $\omega_1 \wedge \omega_2$ respecto de ϕ_j es $[f_{1,j}(z_j)g_{2,j}(z_j) - f_{2,j}(z_j)g_{1,j}(z_j)] dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Para verificar la buena definición del producto exterior, se debe mostrar que T transforma la representación de $\omega_1 \wedge \omega_2$ respecto de ϕ_1 en aquella respecto de ϕ_2 . Por hipótesis, T transforma a $\omega_{i,1}$ en $\omega_{i,2}$, es decir $f_{i,2}(z_2) = f_{i,1}(T(z_2))T'(z_2)$ y $g_{i,2}(z_2) = g_{i,1}(T(z_2))\overline{T'(z_2)}$. Entonces

$$\begin{aligned} & [f_{1,1}(T(z_2))g_{2,1}(T(z_2)) - f_{2,1}(T(z_2))g_{1,1}(T(z_2))] \|T'(z_2)\|^2 \\ &= [f_{1,1}(T(z_2))g_{2,1}(T(z_2)) - f_{2,1}(T(z_2))g_{1,1}(T(z_2))] [T'(z_2)\overline{T'(z_2)}] \\ &= [f_{1,1}(T(z_2))T'(z_2)] \cdot [g_{2,1}(T(z_2))\overline{T'(z_2)}] - [f_{2,1}(T(z_2))T'(z_2)] \cdot [g_{1,1}(T(z_2))\overline{T'(z_2)}] \\ &= f_{1,2}(z_2)g_{2,2}(z_2) - f_{2,2}(z_2)g_{1,2}(z_2). \end{aligned}$$

Este es el criterio de transformación de 2-formas diferenciales, lo que se quería mostrar. \square

2. Diferenciales de funciones y 1-formas.

A una función diferenciable f en \mathbb{R}^n se le puede asociar una 1-forma diferencial llamada diferencial total dado por $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$. En las superficies de Riemann, la forma de hacer esto es la siguiente.

Definición IV.23. Sea X una superficie de Riemann y f una función C^∞ sobre X . Sean ϕ una carta local cualquiera, z su coordenada inducida y denótese por $f_\phi(z)$ la forma local de f respecto de esta coordenada. Se define el diferencial de f como la 1-forma diferencial dada localmente por

$$df_\phi = \frac{\partial f_\phi}{\partial z} dz + \frac{\partial f_\phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Se omite la dependencia de la carta local cuando no haya riesgo de ambigüedad.

Como de costumbre, se verifica que las representaciones locales de df se transforman bien bajo cambios de coordenadas.

Lema IV.24. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales que inducen las coordenadas z_1 y z_2 . Supongamos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y sea $z_1 = T(z_2)$ la función de transición. Sean $df_{\phi_1}(z_1)$ y $df_{\phi_2}(z_2)$ las representaciones locales de df respecto de estas coordenadas. Entonces T transforma a df_{ϕ_2} en df_{ϕ_1} .

Demostración. Escribáanse las formas locales como

$$\begin{aligned} df_{\phi_1}(z_1) &= \frac{\partial f_{\phi_1}}{\partial z_1}(z_1) dz_1 + \frac{\partial f_{\phi_1}}{\partial \bar{z}_1}(z_1) d\bar{z}_1 = g_1(z_1) dz_1 + h_1(z_1) d\bar{z}_1 \\ df_{\phi_2}(z_2) &= \frac{\partial f_{\phi_1}}{\partial z_2}(z_2) dz_2 + \frac{\partial f_{\phi_1}}{\partial \bar{z}_2}(z_2) d\bar{z}_2 = g_2(z_2) dz_2 + h_2(z_2) d\bar{z}_2. \end{aligned}$$

Verificar el lema se traduce en demostrar las igualdades $g_2(z_2) = g_1(T(z_2))T'(z_2)$ y $h_2(z_2) = h_1(T(z_2))\overline{T'(z_2)}$. Usando la regla de la cadena se obtiene:

$$\begin{aligned} g_1(T(z_2))T'(z_2) &= \frac{\partial f_{\phi_1}}{\partial z_1}(T(z_2)) \frac{dT}{dz_2}(z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_2} [f_{\phi_1} \circ T](z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_2} [(f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})](z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_2} [f \circ \phi_2^{-1}](z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_2} [f_{\phi_2}](z_2) \\ &= g_2(z_2). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se demuestra de forma análoga. □

Así como se definen diferenciales de funciones, se pueden definir diferenciales de 1-formas. Naturalmente, si el diferencial de una función es una 1-forma, el diferencial de una 1-forma será una 2-forma.

Definición IV.25. Sea ω una 1-forma C^∞ sobre una superficie de Riemann X . Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta local en X y z su coordenada inducida. La representación de ω respecto de z es $f(z)dz + g(z)d\bar{z}$. El *diferencial de ω* se define localmente por

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

Lema IV.26. *El diferencial de una 1-forma C^∞ ω sobre una superficie de Riemann está bien definido.*

Demostración. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales con coordenadas inducidas z_1, z_2 y $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $z_1 = T(z_2)$ la función de transición. La representación de ω respecto de ϕ_i es $\omega_i = f_i(z_i)dz_i + g_i(z_i)d\bar{z}_i$, con $i = 1, 2$. Nótese que $f_2(z_2) = f_1(T(z_2))T'(z_2)$ y $g_2(z_2) = g_1(T(z_2))\overline{T'(z_2)}$ y que T es holomorfa. Derivando estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_2}(z_2) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}[(f_1 \circ T) \cdot T'](z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}[f_1 \circ T](z_2)T'(z_2) + (f_1 \circ T)(z_2)\frac{\partial T'}{\partial \bar{z}_2}(z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}[f_1 \circ T](z_2)T'(z_2). \end{aligned}$$

Gracias a que $T(z_2)$ es holomorfa, $T'(z_2)$ también lo es. Entonces $\frac{\partial T'}{\partial \bar{z}_2}(z_2) = 0$, justificando la última desigualdad. Análogamente, se demuestra que

$$\frac{\partial g_2}{\partial z_2}(z_2) = \frac{\partial}{\partial z_2}[g_1 \circ T](z_2)\overline{T'(z_2)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(T(z_2)) - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1}(T(z_2)) \right] \|T'(z_2)\|^2 \\ &= \left[\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(T(z_2)) - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1}(T(z_2)) \right] T'(z_2)\overline{T'(z_2)} \\ &= \left[\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(T(z_2))T'(z_2) \right] \overline{T'(z_2)} - \left[\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1}(T(z_2))\overline{T'(z_2)} \right] T'(z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_2}[g_1 \circ T](z_2)\overline{T'(z_2)} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}[f_1 \circ T](z_2)T'(z_2) \\ &= \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(z_2) - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_2}(z_2). \end{aligned}$$

□

Así como la derivada, el operador $d(\cdot)$ obedece la regla del producto.

Proposición IV.27. *Sean f una función C^∞ y ω una 1-forma C^∞ definidas sobre una superficie*

de Riemann. Entonces

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

Demostración. Escribese a f y ω localmente como $f(z)$ y $g(z)dz + h(z)d\bar{z}$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= d(fg dz + fh d\bar{z}) \\ &= \left(\frac{\partial(fh)}{\partial z} - \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} h + f \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g - f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} h - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g \right) dz \wedge d\bar{z} + f \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge (g dz + h d\bar{z}) + f d\omega \\ &= df \wedge \omega + f d\omega. \end{aligned}$$

□

3. Pullback de formas diferenciales.

Al igual que las coordenadas polares cambian la forma del dominio de las formas diferenciales, esta idea se adapta a las superficies de Riemann. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann. Sea ω una 1-forma C^∞ en Y . Definiremos una 1-forma en X utilizando ω y F . Tomemos cartas locales $\phi : U \rightarrow V$ en X y $\psi : U' \rightarrow V'$ en Y tales que $F(U) \subset U'$. Sean w y z las coordenadas inducidas por ϕ y ψ , respectivamente. Sean $z = h(w)$ y $f dz + g d\bar{z}$ las formas locales de F y ω .

Definición IV.28. Bajo las condiciones del párrafo anterior, se define localmente una 1-forma diferencial C^∞ sobre X , llamada el *pullback de ω bajo F* , por

$$F^*\omega = f(h(w))h'(w)dw + g(h(w))\overline{h'(w)}d\bar{w}$$

Obviamente, si ω es holomorfa o meromorfa, $F^*\omega$ también es holomorfa o meromorfa, respectivamente. Además:

Lema IV.29. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann. El pullback de una 1-forma diferencial ω sobre Y es una 1-forma diferencial bien definida.

Demostración. Sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales sobre X con coordenadas w_1 y w_2 y $\psi_1 : U'_1 \rightarrow V'_1$ y $\psi_2 : U'_2 \rightarrow V'_2$ cartas locales sobre Y con coordenadas z_1 y z_2 tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y $F(U_i) \subset U'_i$ para $i = 1, 2$. Notemos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ implica $U'_1 \cap U'_2 \neq \emptyset$. Se

definen las funciones de transición $T_X = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ y $T_Y = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$. Sean $\omega_i = f_i dz_i + g_i d\bar{z}_i$ y $h_i = \psi_i \circ F \circ \phi_i^{-1}$ las representaciones locales de ω y F , respectivamente, con f_i y g_i funciones \mathcal{C}^∞ para $i = 1, 2$. T_Y transforma las representaciones locales de ω , es decir $f_2 = (f_1 \circ T_Y) \cdot T_Y'$ y $g_2 = (g_1 \circ T_Y) \cdot \overline{T_Y'}$. Por su parte, h_1 y h_2 son funciones holomorfas de valores complejos y cumplen $h_1 = T_Y \circ h_2 \circ T_X^{-1}$. La representación local del pullback $F^*\omega$ respecto de la carta ϕ_i es

$$F^*\omega_i = f_i(h_i(w_i))h_i'(w_i)dw_i + g_i(h_i(w_i))\overline{h_i'(w_i)}d\bar{w}_i$$

Solo falta comprobar que $[(f_2 \circ h_2) \cdot h_2'](w_2) = [(f_1 \circ h_1 \circ T_X) \cdot (h_1' \circ T_X)](w_2)T_X'(w_2)$; la prueba de $[(g_2 \circ h_2) \cdot h_2'](w_2) = [(g_1 \circ h_1 \circ T_X) \cdot (h_1' \circ T_X)](w_2)\overline{T_X'(w_2)}$ es análoga. En efecto,

$$\begin{aligned} (f_1 \circ h_1 \circ T_X) \cdot (h_1' \circ T_X) \cdot T_X' &= [f_1 \circ (T_Y \circ h_2 \circ T_X^{-1}) \circ T_X] \cdot [(T_Y \circ h_2 \circ T_X^{-1})' \circ T_X] \cdot T_X' \\ &= [(f_1 \circ T_Y) \circ h_2 \circ (T_X^{-1} \circ T_X)] \\ &\quad \cdot [(T_Y' \circ h_2 \circ T_X^{-1} \circ T_X) \cdot (h_2' \circ T_X^{-1} \circ T_X) \cdot ((T_X^{-1})' \circ T_X)] \cdot T_X' \\ &= [(f_1 \circ T_Y) \circ h_2] \cdot [(T_Y' \circ h_2) \cdot h_2'] \cdot [(T_X^{-1})' \circ T_X] \cdot T_X' \\ &= [((f_1 \circ T_Y) \cdot T_Y') \circ h_2] \cdot h_2' \cdot [T_X^{-1} \circ T_X]' \\ &= (f_2 \circ h_2) \cdot h_2'. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición muestra cómo obtener el orden del pullback $F^*\omega$ a partir del orden de ω en Y y la multiplicidad de F .

Proposición IV.30. Sean $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann y ω una 1-forma meromorfa en Y . Para $p \in X$,

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega))\text{mult}_p(F) - 1$$

Demostración. Por la proposición III.36, existen coordenadas w , centrada en p , y z , centrada en $F(p)$, tales que la forma local de F es $z = w^n$, con $n = \text{mult}_p(F)$. Por su parte, la forma local de ω respecto de z es $(cz^k + O(z^{k+1}))dz$, donde $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$. Entonces, la forma local de $F^*\omega$ respecto de w es $(cw^{nk} + O(w^{n(k+1)}))(nw^{n-1})dw = (ncw^{n(k+1)-1} + O(w^{n(k+1)}))dw$. El resultado sigue de esta ecuación. □

C. Integración

La idea de definir formas diferenciales es para integrar sobre superficies de Riemann. Naturalmente, estas integrales heredan muchas propiedades de sus contrapartes complejas y, por tanto, no

se demostrarán todas. El contenido de esta sección que será útil más adelante es, principalmente, el Teorema del Residuo.

1. Integrales de 1-formas.

El primer tipo es la integral de línea. Las siguientes son definiciones estándar en cualquier espacio topológico. Por ello no demostraremos que las construcciones están bien hechas.

Definición IV.31.

- Un *camino* en una superficie de Riemann X es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ que es continua y \mathcal{C}^∞ por partes. $\gamma(a)$ se llama punto inicial y $\gamma(b)$, punto final. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que γ es un *camino cerrado*. Por simplicidad, a la imagen de γ se denota simplemente como γ .
- Si $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función continua y \mathcal{C}^∞ por partes tal que $\alpha(c) = a$ y $\alpha(d) = b$, al camino $\gamma \circ \alpha : [c, d] \rightarrow X$ se le llama *reparametrización* de γ . Para todo camino γ existe una reparametrización con dominio $[0, 1]$.
- El *camino inverso* de γ se define por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$.
- Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$ son caminos en X tales que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, se define la *concatenación* de γ_1 y γ_2 con dominio $[a, b]$ como el camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tal que

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1 \circ \alpha_1(t), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma_2 \circ \alpha_2(t), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

donde $\alpha_1(t) = a_1 + 2(b_1 - a_1)(\frac{t-a}{b-a})$ y $\alpha_2(t) = b_2 + 2(a_2 - b_2)(\frac{t-b}{a-b})$. Nótese que α_1 y α_2 proveen reparametrizaciones de γ_1 y γ_2 .

- Para cualquier partición finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ del intervalo $[a, b]$, la colección de caminos $\{\gamma_k = \gamma|_{[a_{k-1}, a_k]}\}_{k=1}^n$ se llama *partición* de γ . La concatenación de los elementos de la partición es igual a γ .

Los caminos obtienen propiedades adicionales en las superficies de Riemann.

Definición IV.32. Si $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann y γ es un camino en X , entonces $F \circ \gamma$ es un camino en Y que se denota por $F_*\gamma$.

Definición IV.33. Sea X una superficie de Riemann. Sean $p \in X$ y $S \subset X$ tales que $p \notin \bar{S}$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino cerrado tal que

- $\gamma|_{(a,b)}$ es una función inyectiva, es decir γ es un camino simple.
- Existe una carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $p \in U$ y $\gamma \subset U$.
- El índice del camino cerrado $\phi \circ \gamma$ alrededor de $\phi(p)$ es 1.

- Ningún punto $s \in S \cap U$ está en la imagen o en el interior de γ , es decir en la componente conexa de $X \setminus \gamma$ que contiene a p .

Se dice que γ es un *camino que separa* a p de S .

Para mostrar que la definición anterior está bien hecha, hay que verificar dos puntos: que el índice de $\phi \circ \gamma$ alrededor de $\phi(p)$ es el mismo sin importar la carta utilizada y que el interior de γ está bien definido. Una prueba general requiere el Teorema de la Curva de Jordan. En cambio, se muestra que existe un camino especial que cumple con las condiciones prescritas. No se necesitan caminos generales, así que este caso particular será suficiente.

Lema IV.34. *Sean X un espacio topológico conexo y $Z \subset Y \subset X$ abiertos tales que Y y $Y \setminus \bar{Z}$ son abiertos conexos no vacíos. Entonces $X \setminus \bar{Z}$ es conexo.*

Demostración. Sea A, B una separación del abierto $X \setminus \bar{Z}$, es decir abiertos de $X \setminus \bar{Z}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $X \setminus \bar{Z} = A \cup B$. Nótese que A y B son de la forma $A = A' \cap (X \setminus \bar{Z}) = A' \setminus \bar{Z}$ y $B = B' \cap (X \setminus \bar{Z}) = B' \setminus \bar{Z}$, donde A' y B' son abiertos de X . Como $Y \setminus \bar{Z}$ es un subconjunto conexo de $X \setminus \bar{Z}$, sin pérdida de generalidad, $Y \setminus \bar{Z} \subset A$ y con ello $Y \subset A'$.

B es una intersección de abiertos de X , así que es abierto. A' también es abierto y $A' \cup B = (\bar{Z} \cup A) \cup B = \bar{Z} \cup (X \setminus \bar{Z}) = X$. Además, $A' \cap B = (A \cup \bar{Z}) \cap B = (A \cap B) \cup (\bar{Z} \cap B) = \emptyset$. Estas últimas igualdades muestran que A' y B forman una separación de X . Como X es conexo y $A' \supset Y \neq \emptyset$, $B = \emptyset$. Por lo tanto, A, B son una separación trivial de $X \setminus \bar{Z}$, lo que muestra que $X \setminus \bar{Z}$ es conexo. \square

Lema IV.35. *Sea X una superficie de Riemann. Sean $p \in X$ y $S \subset X$ tales que $p \notin \bar{S}$. Entonces existe un camino γ que separa a p de S .*

Demostración. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta centrada en p tal que U es conexo (si U no es conexo, restringimos ϕ a la componente conexa que contiene a p). Sea $R = U \cap S$. Nótese que $p \notin \bar{R}$ por lo que $\phi(p) \notin \overline{\phi(R)}$. Entonces, existe una bola abierta $B_r(0) \subset V$ tal que $B_r(0) \cap \overline{\phi(R)} = \emptyset$. Sea $\gamma_0 : [0, 2\pi] \rightarrow V$ el camino definido por $\gamma_0(t) = \frac{r}{2}e^{it}$. Nótese que γ_0 es un camino cerrado simple y que su índice alrededor de 0 es 1. Además, γ_0 separa a $V \setminus \gamma_0$ en $V_i = B_{r/2}(0)$ y $V_e = V \setminus \overline{B_{r/2}(0)}$. V_i es una bola abierta, así que es conexa. Tanto V como $B_r(0)$ y $B_r(0) \setminus \overline{B_{r/2}(0)}$ son conexos, así que, por el lema IV.34, V_e es conexo. Entonces, $V \setminus \gamma_0$ se separa en dos componentes conexas que cumplen $\phi(p) \in V_i$ y $R \cap V_i = \emptyset$.

Sea $\gamma = \phi^{-1} \circ \gamma_0$. $U \setminus \gamma$ tiene dos componentes conexas: $U_i = \phi^{-1}(V_i)$ y $U_e = U \setminus \overline{U_i} = \phi^{-1}(V_e)$. Se define el interior de γ como $\gamma_i = U_i$ y el exterior, como $\gamma_e = X \setminus \overline{\gamma_i}$. Dado que X , U y $U_e = U \setminus \overline{\gamma_i}$ son conexos, por el lema IV.34, γ_e es también lo es. Entonces, $X \setminus \gamma$ tiene dos componentes conexas: γ_i y γ_e .

Se tiene, entonces, que γ es un camino inyectivo en $[a, b]$, por ser la composición de una función

inyectiva ϕ y γ_0 , que es inyectivo en $[0, 2\pi)$. Como γ_0 es cerrado, γ también es cerrado. Además, $\gamma \subset U$ y el índice de $\phi \circ \gamma = \gamma_0$ es 1 alrededor de $\phi(p) = 0$. Como $\gamma_i \subset U$, también se tiene que $S \setminus R = S \setminus U \subset X \setminus U \subset X \setminus \overline{\gamma_i} = \gamma_e$; como $\phi(R) \cap V_i = \emptyset$, $R \cap \gamma_i = \emptyset$. En resumen, $S \cap \gamma_i = [(S \setminus R) \cup R] \cap \gamma_i = [(S \setminus R) \cap \gamma_i] \cup [R \cap \gamma_i] = \emptyset$. Por lo tanto, γ es un camino que separa a p de S . \square

Ahora se muestra que el índice de este camino es independiente de la elección de carta local.

Lema IV.36. Sean X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino cerrado tales que $p \notin \gamma$. Sean $\phi : U \rightarrow V$ y $\psi : U' \rightarrow V'$ cartas locales tales que $p \in U \cap U'$ y $\gamma \subset U \cap U'$. Los índices de $\phi \circ \gamma$ alrededor de $\phi(p)$ y $\psi \circ \gamma$ alrededor de $\psi(p)$ son iguales.

Demostración. Al igual que en el lema anterior, se puede suponer que U y U' son conexos. Sean z y w las coordenadas locales asociadas a ϕ y ψ , respectivamente. Sea $z = T(w) = \phi \circ \psi^{-1}(w)$ la función de transición. Sean $z_0 = \phi(p)$ y $w_0 = \psi(p)$. Notemos que $z_0 = T(w_0)$. Defínase una función $g : \psi(U \cap U') \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(w) = \begin{cases} T'(w) \frac{w - w_0}{T(w) - z_0}, & w \neq w_0 \\ 1, & w = w_0 \end{cases}$$

$g(w)$ es holomorfa para $w \neq w_0$. En $w = w_0$ tenemos, gracias a la Regla de L'Hôpital, y a que $T'(w) \neq 0$ por el lema II.18,

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow w_0} g(w) &= \lim_{w \rightarrow w_0} T'(w) \frac{w - w_0}{T(w) - z_0} \\ &= \left(\lim_{w \rightarrow w_0} T'(w) \right) \left(\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{T(w) - z_0} \right) \\ &= T'(w_0) \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{T'(w)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, g es además continua y holomorfa en w_0 . Si $I(\gamma_0, p_0)$ denota el índice de un camino γ_0 alrededor de p_0 , tenemos que $2\pi i \cdot I(\phi \circ \gamma, z_0) = \int_{\phi \circ \gamma} \frac{dz}{z - z_0}$. Haciendo el cambio de variable

$z = T(w)$ y usando la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned}
2\pi i \cdot I(\phi \circ \gamma, z_0) &= \int_{\phi \circ \gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{T \circ \psi \circ \gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\
&= \int_{\psi \circ \gamma} \frac{T'(w)}{T(w) - z_0} dw \\
&= \int_{\psi \circ \gamma} \left(T'(w) \frac{w - w_0}{T(w) - z_0} \right) \frac{dw}{w - w_0} \\
&= \int_{\psi \circ \gamma} g(w) \frac{dw}{w - w_0} \\
&= 2\pi i \cdot g(w_0) \cdot I(\psi \circ \gamma, w_0).
\end{aligned}$$

Como $g(w_0) = 1$, el resultado sigue. \square

El siguiente lema será un ingrediente fundamental para definir integrales sobre superficies de Riemann. Esencialmente, construye una partición finita de un camino en caminos suaves y suficientemente pequeños para que estén contenidos en el dominio de alguna carta local.

Lema IV.37. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino sobre una superficie de Riemann X . Entonces existe una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ del intervalo $[a, b]$ que induce una partición $\{\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow X\}_{k=1}^n$ de γ tal que, para $k = 1, \dots, n$,*

- γ_k es \mathcal{C}^∞ .
- Existe $\phi_k : U_k \rightarrow V_k$ tal que $\gamma_k \subset U_k$.

Demostración. Por definición, γ es \mathcal{C}^∞ por partes, así que existe una partición $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ es \mathcal{C}^∞ en (s_{i-1}, s_i) para $i = 1, \dots, n$. Como esta partición es finita, podemos suponer que γ es \mathcal{C}^∞ y encontrar una partición $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ tal que $\gamma_k \subset U_k$.

Sea $\{L_\alpha\}$ la colección de componentes conexas de los conjuntos de la forma $U_\beta \cap \gamma$, donde U_β es el dominio de alguna carta local ϕ_β sobre X . En la topología de γ relativa a X , todo L_α es un abierto. Como \mathbb{R} es segundo numerable, para todo α existen conjuntos enumerables $\{d_{\alpha,i}\}_i$ y $\{D_{\alpha,i}\}_i$ contenidos en $[a, b]$ tales que $d_{\alpha,i} < D_{\alpha,i}$ y $\gamma^{-1}(L_\alpha) = \bigcup_i (d_{\alpha,i}, D_{\alpha,i})$. Es posible que $d = a$ o que $D = b$, ya que los conjuntos de la forma $[a, D)$ y $(d, b]$ también son abiertos en la topología de $[a, b]$. Durante esta demostración, se hace la convención de escribir (a, D) y (d, b) en lugar de $[a, D)$ y $(d, b]$ para simplificar la notación.

De cualquier forma, $\{L_\alpha\}$ cubre a γ , así que el conjunto $\{(d_{\alpha,i}, D_{\alpha,i})\}_i$ cubre a $[a, b]$. Por la compacidad de $[a, b]$, existe una colección finita $\mathcal{I} = \{(d_{\alpha_j, i_j}, D_{\alpha_j, i_j})\}_{j=1}^m$ de intervalos que lo cubren. Sea $\mathcal{P} = \{d_{\alpha_j, i_j}\}_{j=1}^m \cup \{D_{\alpha_j, i_j}\}_{j=0}^m$. \mathcal{P} es finito, así que se puede escribir como $\{t_k\}_{k=1}^n$, donde $t_0 = a$, $t_n = b$, $t_{i-1} < t_i$ y donde cada t_i es algún d_{α_j, i_j} o D_{α_j, i_j} . \mathcal{P} induce una partición

de γ dada por $\{\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\}_{k=1}^n$. Como \mathcal{I} cubre a $[a, b]$, para todo $k = 1, \dots, n$ existe un intervalo $(d_{\alpha_j, i_j}, D_{\alpha_j, i_j}) \in \mathcal{I}$ tal que $[t_{k-1}, t_k] \subset (d_{\alpha_j, i_j}, D_{\alpha_j, i_j})$. Entonces, para toda $k = 1, \dots, n$, $\gamma_k \subset L_{\alpha_j} \subset U_k$, donde U_k es el dominio de la carta ϕ_k que corresponde a L_{α_j} . Como además todos estos caminos son \mathcal{C}^∞ , se obtiene la partición deseada. \square

Todas las piezas están listas para definir integrales sobre superficies de Riemann.

Definición IV.38. Sea X una superficie de Riemann. Sean ω una 1-forma \mathcal{C}^∞ sobre X y $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino. Sea $\{\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow X\}_{k=0}^n$ una partición de γ tal que γ_k es \mathcal{C}^∞ y $\gamma_k \subset U_k$, el dominio de la carta ϕ_k . Con respecto de ϕ_k , se escribe localmente a ω como $f_k dz + g_k d\bar{z}$ y a la función $\phi_k \circ \gamma_k$, como $z(t)$, para $t \in [a_{k-1}, a_k]$. La *integral de línea de ω sobre el camino γ* se define como

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f_k(z(t))z'(t) + g_k(z(t))\overline{z'(t)}] dt$$

En el lema IV.37, se construyó una partición de un camino γ de forma que cada elemento γ_k de la partición estuviera contenido en el dominio de alguna carta local ϕ_k . El propósito de esta partición es dotar de una coordenada local a cada sección del camino con el fin de transportar la integral al plano complejo. En otras palabras, la integral $\int_{\gamma} \omega$ se calcula sumando cada una de las integrales que la componen en \mathbb{C} . Ahora se verifica que este proceso provee una buena definición para la integral.

Lema IV.39. *La definición de integral es independiente de la elección de partición y de cartas locales.*

Demostración. Primero se verifica que la definición no depende de la elección de cartas locales. Sean $k = 1, \dots, n$ fijo y $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ dos cartas locales tales que $\gamma_k \subset U_1 \cap U_2$. Sea $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ la función de transición. La representación local de ω respecto de ϕ_i es $\omega_i = f_i dz_i + g_i d\bar{z}_i$ y cumple $f_2(z_2) = f_1(T(z_2))T'(z_2)$ y $g_2(z_2) = g_1(T(z_2))\overline{T'(z_2)}$. Haciendo la sustitución $z_1 = T(z_2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \omega_1 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f_1(z_1(t))z_1'(t) + g_1(z_1(t))\overline{z_1'(t)}] dt \\ &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f_1[T(z_2(t))][T'(z_2)]'(t) + g_1[T(z_2(t))]\overline{[T'(z_2)]'(t)}] dt \\ &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f_1[T(z_2(t))][T'(z_2(t))z_2'(t) + g_1[T(z_2(t))]\overline{[T'(z_2(t))z_2'(t)}]] dt \\ &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f_2(z_2(t))z_2'(t) + g_2(z_2(t))\overline{z_2'(t)}] dt \\ &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \omega_2. \end{aligned}$$

Sea ahora $a = b_0 < b_1 < \dots < b_m = b$ un refinamiento de la partición $\{a_k\}_{k=0}^n$. Para todo $k = 1, \dots, n$ fijo, se tiene una partición $a_{k-1} = b_{j_k} < b_{j_{k+1}} < \dots < b_{j_{k+n_k}} = a_k$ de $[a_{k-1}, a_k]$. Como $[b_{j_{i-1}}, b_{j_i}] \subset [a_{k-1}, a_k]$, por simplicidad se puede usar la misma carta ϕ_k para calcular $\int_{\gamma_k} \omega$ en todos los intervalos $[b_{j_{i-1}}, b_{j_i}]$ (aunque ya se sabe que no importa la carta que se elija). Entonces, $\int_{\gamma_k} \omega$ se calcula de dos formas: como una sola integral de a_{k-1} a a_k , o como una suma de integrales de $b_{j_{i-1}}$ a b_{j_i} , para $i = 1, \dots, n_k$. Por las propiedades de la integral compleja, ambas formas de calcular $\int_{\gamma_k} \omega$ dan el mismo resultado. Por lo tanto, la integral es invariante bajo refinamientos de partición. Si se tienen dos particiones distintas de $[a, b]$, existe un refinamiento de ambas y la integral respecto de las dos particiones originales es igual a la integral respecto del refinamiento. Por lo tanto, la integral es igual, independientemente de la elección de la partición. \square

Las siguientes propiedades son heredadas del análisis complejo o son sencillas de verificar. Por estas razones, no se da la prueba.

Proposición IV.40. Sean X una superficie de Riemann, ω una 1-forma C^∞ sobre X y $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino.

1. La integral es independiente de la parametrización de γ . Es decir, para toda función $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ C^∞ por partes,

$$\int_{\gamma \circ \alpha} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

2. Si ω_1, ω_2 son 1-formas C^∞ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\gamma} (\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2$$

3. Vale el teorema fundamental del cálculo: si f es una función C^∞ definida en una vecindad de la imagen de γ , entonces

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

4. Si $\{\gamma_k\}$ es una partición de γ ,

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega$$

5. Si se invierte la dirección del camino, el signo de la integral cambia.

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

6. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante. Entonces:

$$\int_{F_* \gamma} \omega = \int_{\gamma} F^* \omega$$

2. Residuos.

Definición IV.41. Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma meromorfa en $p \in X$. Sea z una coordenada local centrada en p . Supóngase que ω se expresa mediante una serie de Laurent en z :

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n \right) dz,$$

con $c_{-M} \neq 0$. El *residuo* de ω en p se define como

$$\text{Res}_p(\omega) = c_{-1}$$

Ciertamente, la serie de Laurent de ω es distinta en cada carta local. Sin embargo, ahora se muestra que el residuo sí es independiente de la elección de coordenada.

Lema IV.42. Sean X una superficie de Riemann, $p \in X$ y ω una 1-forma meromorfa en X . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es un camino que separa a p de cualquier otro polo de ω , entonces:

$$\text{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega.$$

En particular, $\text{Res}_p(\omega)$ es un número complejo bien definido.

Demostración. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta centrada en p tal que $\gamma \subset U$. Sea z la coordenada local asociada a ϕ y escríbase localmente a ω como $\omega = f(z)dz = (\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n)dz$, con $c_{-M} \neq 0$. Por el Teorema del Residuo en \mathbb{C} y la definición de integral (definición IV.38), se tiene que:

$$\text{Res}_p(\omega) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi \circ \gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f[\phi \circ \gamma(t)](\phi \circ \gamma)'(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega.$$

Como c_{-1} es independiente de γ y la última integral, de ϕ , entonces $\text{Res}_p(\omega)$ es un número complejo bien definido. \square

3. Integrales de 2-formas.

Ahora se definen integrales dobles de forma análoga a las integrales de línea.

Definición IV.43. Sean X una superficie de Riemann y $D \subset X$ un cerrado triangulable. Sea $\{T_k\}_{k=0}^n$ una triangulación de D con la propiedad de que existan cartas locales $\phi_k : U_k \rightarrow V_k$ tales que $T_k \subset U_k$. Sea η una 2-forma \mathcal{C}^∞ en X con representación local $\eta_k = f_k(z)dz_k \wedge d\bar{z}_k$ respecto de ϕ_k . Se define la integral de η sobre D por

$$\iint_D \eta = \sum_{k=0}^n \iint_{\phi(T_k)} f_k(z)dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

Al igual que con las integrales de línea, la integral doble está bien definida al integrar primero sobre secciones que estén contenidas en el dominio de las cartas locales. La demostración de la buena definición es análoga al caso de las 1-formas. Primero, cada conjunto T_k es homeomorfo a un triángulo en \mathbb{C} , así que siempre se puede encontrar una carta $\phi_k : U_k \rightarrow V_k$ tal que $T_k \subset U_k$. Si T_k estuviera contenido en el dominio de dos cartas distintas, se pueden transformar las representaciones locales de η respecto de estas cartas y la integral no cambiará. Asimismo, si se refina la triangulación, la integral mantiene su valor (refinar una triangulación significa triangular cada T_k en $T_{k,0}, \dots, T_{k,m_k}$ de forma que $T_k = \bigcup_{i=0}^{m_k} T_{k,i}$). Así, en lugar de integrar sobre $\phi(T_k)$, se integra sobre $\phi(T_{k,0}), \dots, \phi(T_{k,m_k})$ y gracias a las propiedades de la integral compleja, ambos métodos dan el mismo resultado. Finalmente, como cualquier par de triangulaciones de D tienen un refinamiento común, esta definición de integral doble es independiente de la triangulación.

4. Cadenas.

Definición IV.44. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ caminos en X y $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. La combinación lineal formal $\gamma = \sum_{i=1}^{n_k} n_i \gamma_i$ se llama *cadena*. El conjunto de todas las cadenas sobre X se denota por $CH(X)$. $CH(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los caminos en X .

Las cadenas se usan para extender la integral de los caminos por linealidad. Es decir, para cualquier 1-forma ω en X y cualquier cadena $\gamma = \sum_{i=1}^{n_k} n_i \gamma_i$, se define

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{n_k} n_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

Sean $T \subset X$ un cerrado y $\phi : U \rightarrow V$ una carta local tal que $T \subset U$ y $\phi(T)$ es un triángulo en \mathbb{C} . Se busca un camino que recorra el borde de T . En el caso particular de \mathbb{C} , se puede definir un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que recorra el borde de $\phi(T)$ en sentido antihorario. Los homeomorfismos preservan los bordes, así que el camino $\partial T = \phi^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ recorre el borde de T . Aunque la imagen de ∂T es el borde de T y es independiente de ϕ y de γ , el camino ∂T no está bien definido. La razón es que γ podría tener diferentes parametrizaciones y puntos iniciales. Sin embargo, por el Teorema de Cauchy, el valor de la integral de una 1-forma diferencial sobre cualquiera de estos caminos es el mismo. Por ello, se llama *camino borde* a cualquier camino ∂T definido de esta manera y se puede decir, sin riesgo de ambigüedad, que $\int_{\partial T} \omega$ es la integral de ω en el borde de T . En general, si $D \subset X$ es un cerrado y $\{T_1, \dots, T_n\}$ es una triangulación de D , se define una *cadena borde* como $\partial D = \sum_{k=1}^n \partial T_k$. La suma

$$\sum_{k=1}^n \int_{\partial T_k} \omega \tag{IV.1}$$

no depende de la triangulación elegida. Si T_i y T_j se intersectan en un lado común $L_{i,j}$, las integrales

$\int_{\partial T_i} \omega$ y $\int_{\partial T_j} \omega$ recorren el lado $L_{i,j}$ en sentidos opuestos. Por el inciso 5 de la proposición IV.40,

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_i} \omega + \int_{\partial T_j} \omega &= \int_{\partial T_i \setminus L_{i,j}} \omega + \int_{L_{i,j}} \omega + \int_{-L_{i,j}} \omega + \int_{\partial T_j \setminus L_{i,j}} \omega \\ &= \int_{\partial T_i \setminus L_{i,j}} \omega + \int_{L_{i,j}} \omega - \int_{L_{i,j}} \omega + \int_{\partial T_j \setminus L_{i,j}} \omega \\ &= \int_{\partial T_i \setminus L_{i,j}} \omega + \int_{\partial T_j \setminus L_{i,j}} \omega. \end{aligned}$$

Entonces, la suma IV.1 se anula en cualquier segmento que sea lado común de dos triángulos. La única región en la que esto no sucede es en el borde de D . Por tanto, la suma IV.1 depende solo de D y se puede definir la integral sobre el borde de D como

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_{k=1}^n \int_{\partial T_k} \omega.$$

D. Resultados importantes

El objetivo de definir integrales es demostrar las versiones en superficies de Riemann del Teorema de Stokes y, especialmente, del Teorema del Residuo.

Teorema IV.45 (Teorema de Stokes). *Sean X una superficie de Riemann, $D \subset X$ un cerrado triangulable y ω una 1-forma C^∞ en X . Entonces,*

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Demostración. Sea $\{T_1, \dots, T_n\}$ una triangulación de D tal que, para todo $k = 1, \dots, n$, existe una carta local $\phi_k : U_k \rightarrow V_k$ con $T_k \subset U_k$. Sea $T'_k = \phi_k(T_k)$ y nótese que, vistos como caminos, $\partial T'_k = \phi_k(\partial T_k)$. Sean z_k la coordenada asociada a ϕ_k y $\omega_k = f_k(z_k)dz_k + g_k(z_k)d\bar{z}_k$ la forma local de ω . Como $T'_k \subset \mathbb{C}$, el Teorema de Green en \mathbb{C} permite cambiar integrales de línea por integrales

dobles y obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \omega &= \sum_{k=1}^n \int_{\partial T_k} \omega \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\phi(\partial T_k)} \omega_k \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\partial T'_k} f_k(z_k) dz_k + g_k(z_k) d\bar{z}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \iint_{T'_k} \left(\frac{\partial g_k}{\partial z_k}(z_k) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_k}(z_k) \right) dz_k \wedge d\bar{z}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \iint_{T'_k} d\omega_k \\
&= \sum_{k=1}^n \iint_{T_k} d\omega \\
&= \iint_D d\omega.
\end{aligned}$$

□

Teorema IV.46 (Teorema del Residuo). *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sea ω una 1-forma meromorfa en X . Entonces*

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0$$

Demostración. Nótese que, como X es compacta, ω tiene una cantidad finita de polos y la suma de residuos es finita. Sean p_1, \dots, p_n los polos de ω . Para cada $i = 1, \dots, n$, sean γ_i un camino que separe a p_i de los demás polos, que existe por el lema IV.35, y U_i el interior de γ_i . Por el lema IV.42, $\text{Res}_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \omega$. Sea $D = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$. D es triangulable y se tiene que $\partial D = -\sum_{i=1}^n \gamma_i$. Por el Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \text{Res}_{p_i}(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \omega \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sum_{i=1}^m \gamma_i} \omega \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_D d\omega.
\end{aligned}$$

Como ω es holomorfa en D , $d\omega = 0$. Entonces, $\int_D d\omega = 0$ y se obtiene el resultado. □

V. DIVISORES Y CURVAS ALGEBRAICAS

En los dos capítulos anteriores se extendieron conceptos del análisis complejo a las superficies de Riemann. En este capítulo, se estudian los ceros y polos de funciones meromorfas desde una nueva perspectiva. Para este propósito, se define una nueva herramienta algebraica, los divisores. Sin embargo, la existencia de funciones meromorfas no constantes es un resultado necesario, pero altamente no trivial. Por ello, se limita el estudio a un tipo especial de superficie de Riemann, en donde se pueden obtener estas funciones con relativa facilidad.

A. Divisores

Definición V.1. Sea X una superficie de Riemann. Un *divisor* D sobre X es una combinación lineal formal de una cantidad finita de puntos $p \in X$ con coeficientes enteros. Es decir,

$$D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p,$$

donde $n_p \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in X$ y $n_p = 0$ excepto para una cantidad finita de puntos $p \in X$. El conjunto de divisores sobre X se denota por $\text{Div}(X)$.

Definición V.2. Si $D_1 = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ y $D_2 = \sum_{p \in X} m_p \cdot p$ son divisores, su suma se define como el divisor $D_1 + D_2$ dado por

$$D_1 + D_2 = \sum_{p \in X} (n_p + m_p) \cdot p.$$

De hecho, hay que verificar que $D_1 + D_2$ es un divisor. Si $n_p + m_p \neq 0$, entonces $n_p \neq 0$ o $m_p \neq 0$. En términos de conjuntos, esto significa que $\{p \in X \mid n_p + m_p \neq 0\} \subset \{p \in X \mid n_p \neq 0\} \cup \{p \in X \mid m_p \neq 0\}$ y, como esto último es la unión de dos conjuntos finitos, $\{p \in X \mid n_p + m_p \neq 0\}$ también es finito. En consecuencia,

Proposición V.3. Si X es una superficie de Riemann, $\text{Div}(X)$ con la suma de divisores es un grupo abeliano.

La demostración de los demás axiomas de grupo es trivial. El divisor $\sum_{p \in X} n_p \cdot p$ tal que $n_p = 0$ para todo $p \in X$ es el elemento neutro de la suma y se denota por 0 .

Definición V.4. Si $D_1 = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ y $D_2 = \sum_{p \in X} m_p \cdot p$ son divisores, se dice que $D_1 \geq D_2$ si $n_p \geq m_p$ para todo $p \in X$. Si además $D_1 \neq D_2$, se dice que $D_1 > D_2$. Un divisor $D \geq 0$ es llamado *efectivo*.

Proposición V.5. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Todo divisor D sobre X puede ser escrito de forma única como $P - N$ donde P y N son divisores efectivos tales que todo $q \in X$ aparece únicamente en la expansión de P o de N .*

Demostración. Sea $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p \in X} n_p \cdot p \\ &= \sum_{n_p > 0} n_p \cdot p + \sum_{n_p < 0} n_p \cdot p \\ &= \sum_{n_p > 0} n_p \cdot p - \sum_{n_p < 0} (-n_p) \cdot p \\ &= P - N \end{aligned}$$

donde $P = \sum_{n_p > 0} n_p \cdot p$ y $N = \sum_{n_p < 0} (-n_p) \cdot p$ son divisores efectivos. Estos son los divisores que buscados, pues para todo $q \in X$, existen tres opciones excluyentes: $n_q > 0$, $n_q < 0$ y $n_q = 0$. Estas corresponden a cuando q aparece en la expansión de P , de N o en ninguna, respectivamente.

Si $P' = \sum_{p \in X} a_p \cdot p$ y $N' = \sum_{p \in X} b_p \cdot p$ es otra pareja de divisores que cumple las condiciones de la proposición, sea $q \in X$ tal que $n_q \neq 0$. Si $n_q > 0$ y como N' es efectivo, tenemos que $n_q = a_q - b_q$ implica $a_q > 0$. Esto fuerza a b_q a ser 0 y $a_q = n_q$. Análogamente, como P' es efectivo, tenemos que $b_q = -n_q$ cuando $n_q < 0$. Esto coincide con las definiciones de P y N así que la unicidad está demostrada. \square

Ya que los divisores son sumas formales, una posible pregunta es cuál es la suma de sus coeficientes. Esta suma será muy útil más adelante, por lo que se le pone un nombre.

Definición V.6. Sea X una superficie de Riemann y $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor. Se define el *grado* de D como el número entero

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} n_p$$

Como $n_p \neq 0$ solo en un número finito de puntos, la suma de $\deg(D)$ tiene un número finito de términos no nulos y es, en efecto, un número entero. Por otro lado, es evidente que $\deg(D_1 + D_2) = \deg(D_1) + \deg(D_2)$, así que $\deg : X \rightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo. El kernel de \deg es el conjunto de divisores de grado 0 y se denota por $\text{Div}_0(X)$.

1. Divisores principales y divisores canónicos.

El propósito de los divisores es estudiar los ceros y polos de las funciones meromorfas. Con esto en mente, existe una forma natural de asignarle a función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ un divisor que contenga información acerca sus de los ceros y polos. Sin embargo, para que esto sea posible, es necesario que f tenga una cantidad finita de ceros y polos. Esto solo ocurre en superficies compactas,

así que de ahora en adelante, el estudio se restringe únicamente a superficies de Riemann que son compactas.

Definición V.7. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa no nula definida sobre una superficie de Riemann compacta X . Se define el *divisor* de f por

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p$$

Un divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ tal que $D = \operatorname{div}(f)$ para alguna función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es llamado *divisor principal*. El conjunto de divisores principales se denota por $\operatorname{PDiv}(X)$.

El *divisor de ceros* de f se define como

$$\operatorname{div}_0(f) = \sum_{\substack{p \in X \\ \operatorname{ord}_p(f) > 0}} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p$$

y el *divisor de polos* de f como

$$\operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{\substack{p \in X \\ \operatorname{ord}_p(f) < 0}} (-\operatorname{ord}_p(f)) \cdot p.$$

Ejemplo V.8. Sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ una función racional dada por $f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$, con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ todos distintos y $e_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En el ejemplo III.25 se muestra que $\operatorname{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$ y $\operatorname{ord}_\infty(f) = -\sum_{i=1}^n e_i$. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f) &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + \left(-\sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty, \\ \operatorname{div}_0(f) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ e_i > 0}} e_i \cdot \lambda_i + \left(-\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ e_i < 0}} e_i \right) \cdot \infty, \\ \operatorname{div}_\infty(f) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ e_i < 0}} e_i \cdot \lambda_i + \left(-\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ e_i > 0}} e_i \right) \cdot \infty. \end{aligned}$$

□

Los divisores principales cumplen las siguientes propiedades que son consecuencia directa de las propiedades de las funciones meromorfas.

Lema V.9. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ funciones meromorfas no nulas sobre una superficie de Riemann compacta X . Entonces:

1. $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$

$$2. \operatorname{div}(1/f) = -\operatorname{div}(f)$$

$$3. \operatorname{div}(f/g) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$$

$$4. \operatorname{deg}(\operatorname{div}(f)) = 0$$

Demostración. Por el lema III.24,

$$\operatorname{div}(fg) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(fg) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) + \operatorname{ord}_p(g) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) + \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g).$$

Los incisos 2 y 3 se demuestran análogamente. El inciso 4 se demuestra usando la proposición III.45:

$$\operatorname{deg}(\operatorname{div}(f)) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) = 0.$$

□

Así como una función meromorfa tiene un divisor asociado, también lo tiene una 1-forma meromorfa.

Definición V.10. Sea ω una 1-forma diferencial meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta X . El divisor de ω es

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p$$

Si $D \in \operatorname{Div}(X)$ cumple $D = \operatorname{div}(\omega)$, D es llamado *divisor canónico* y el conjunto de divisores canónicos se denota por $\operatorname{KDiv}(X)$. El *divisor de ceros* $\operatorname{div}_0(\omega)$ y el *divisor de polos* $\operatorname{div}_\infty(\omega)$ de ω se definen análogamente a los de una función meromorfa no nula.

Ejemplo V.11. Sea ω la 1-forma meromorfa en \mathbb{C}_∞ cuya forma local es dz en \mathbb{C} (ver ejemplo IV.6). Se tiene $\operatorname{ord}_\infty(\omega) = -2$ y $\operatorname{ord}_z(\omega) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\operatorname{div}(\omega) = -2 \cdot \infty.$$

Nótese que $\operatorname{deg}(\operatorname{div}(\omega)) = -2$.

□

Ejemplo V.12. Sea ω la 1-forma meromorfa en \mathbb{C}_∞ cuya forma local respecto de φ_1 es $f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$. Del ejemplo IV.14,

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + \left(-2 - \sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty.$$

Nuevamente, $\operatorname{deg}(\operatorname{div}(\omega)) = -2$.

□

2. Equivalencia lineal de divisores.

En el lema V.9 se muestra que el grado de un divisor principal es 0. Los ejemplos V.11 y V.12 muestran que existen divisores con grado no nulo, así que no todo divisor es un divisor principal. Tiene sentido, entonces, investigar qué tan distinto es un divisor cualquiera de un divisor principal. Será bastante común, además, que dos divisores difieran por un divisor principal. Por esto, se hace la siguiente definición.

Definición V.13. Sean X una superficie de Riemann compacta, $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Se dice que D_1 es *linealmente equivalente* a D_2 si existe una función meromorfa f sobre X tal que $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$. Si es así, se denota por $D_1 \sim D_2$.

El siguiente lema es fácil de verificar a partir del lema V.9.

Lema V.14. Sean X una superficie de Riemann compacta y $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Entonces,

1. \sim es una relación de equivalencia sobre $\text{Div}(X)$.
2. $D_1 \sim 0$ si, y solo si, D_1 es un divisor principal.
3. Si $D_1 \sim D_2$ entonces $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Proposición V.15. Sean ω_1 y ω_2 1-formas diferenciales meromorfas sobre una superficie de Riemann X (no necesariamente compacta). Si ω_2 es no nula, existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\omega_1 = f\omega_2$.

Demostración. Se define $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ localmente. Es decir, si $p \in X$ y $\phi : U \rightarrow V$ es una carta local con $p \in U$, se define $f(p) = (f_\phi \circ \phi)(p)$, donde f_ϕ es una función meromorfa definida en V . Sean $\omega_{1,\phi} = f_{1,\phi}dz$ y $\omega_{2,\phi} = f_{2,\phi}dz$ las formas locales de ω_1 y ω_2 respecto de $\phi : U \rightarrow V$, con $f_{1,\phi}$ y $f_{2,\phi} \neq 0$ funciones meromorfas. La función $f_\phi = f_{1,\phi}/f_{2,\phi}$ es meromorfa y, al menos en U , se tiene $\omega_{1,\phi} = f_\phi\omega_{2,\phi}$.

Esta definición de f es independiente de la elección de carta local. Si $\psi : U' \rightarrow V'$ es otra carta tal que $U \cap U' \neq \emptyset$, sea $T = \phi \circ \psi^{-1}$ la función de transición. Sea $\omega_{i,\psi} = f_{i,\psi}dw$ la forma local de ω_i respecto de ψ . Como T transforma a $\omega_{i,\phi}$ en $\omega_{i,\psi}$, se tiene $f_{i,\psi} = (f_{i,\phi} \circ T) \cdot T'$. Gracias a que $T' \neq 0$ por el lema II.18, también se sabe que

$$f_\psi \circ \psi = \left(\frac{f_{1,\psi}}{f_{2,\psi}} \right) \circ \psi = \left(\frac{(f_{1,\phi} \circ T) \cdot T'}{(f_{2,\phi} \circ T) \cdot T'} \right) \circ \psi = \frac{(f_{1,\phi} \circ T) \circ \psi}{(f_{2,\phi} \circ T) \circ \psi} = \frac{f_{1,\phi} \circ \phi}{f_{2,\phi} \circ \phi} = f_\phi \circ \phi.$$

Por lo tanto, la función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ está bien definida y $\omega_1 = f\omega_2$. □

Esta propiedad permite demostrar la siguiente relación entre los divisores canónicos y la equivalencia lineal.

Lema V.16. Sean X una superficie de Riemann compacta y ω una 1-forma meromorfa no nula fija. Para cualquier 1-forma meromorfa no nula η , $\omega \sim \eta$. En otras palabras,

$$\text{KDiv}(X) = \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X)$$

Demostración. Para toda función meromorfa no nula f sobre X , $\text{div}(\omega) + \text{div}(f) = \text{div}(f\omega)$ así que $\text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X) \subset \text{KDiv}(X)$. Por la proposición V.15, para cualquier 1-forma η existe una función meromorfa no nula f tal que $\eta = f\omega$. Entonces, $\text{div}(\eta) = \text{div}(\omega) + \text{div}(f)$ y $\text{KDiv} \subset \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X)$. \square

En los ejemplos V.11 y V.12, se muestran dos 1-formas meromorfas no nulas sobre \mathbb{C}_∞ cuyo divisor tiene el mismo grado. Esta proposición permite demostrar que esto no es casualidad, sino que sucede en general.

Proposición V.17. Sean X una superficie de Riemann compacta de género g . Si existe una función meromorfa no constante f sobre X , entonces existe un divisor canónico sobre X de grado $2g - 2$.

Demostración. Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ el mapeo holomorfo asociado a f , dado en la proposición III.35. Sea ω la 1-forma sobre \mathbb{C}_∞ con forma local dz en \mathbb{C} . Sea $\eta = F^*(\omega)$ el pullback de ω . Por la proposición IV.30, la Fórmula de Riemann-Hurwitz y el hecho de que el género de la esfera de Riemann es 0, se tiene

$$\begin{aligned} \deg(\text{div}(\eta)) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\eta) \\ &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(F^*(\omega)) \\ &= \sum_{p \in X} [(1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in F^{-1}(q)}} (\text{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (-\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in F^{-1}(q)}} (\text{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (\text{mult}_p(F) - 1) - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2 \text{mult}_p(F) \\ &= \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2 \text{mult}_p(F) \\ &= 2g - 2 + 2 \deg(F) - 2 \deg(F) \\ &= 2g - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{div}(\eta)$ es un divisor canónico de grado $2g - 2$. \square

Corolario V.18. *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g . Si existe una función meromorfa no constante sobre X , todo divisor canónico sobre X tiene grado $2g - 2$.*

Demostración. Sean ω una 1-forma meromorfa no constante y $\text{div}(\eta)$ el divisor canónico dado por la proposición V.17. Por el lema V.16, existe $\text{div}(f) \in \text{PDiv}$ tal que $\text{div}(\omega) = \text{div}(\eta) + \text{div}(f)$. Por lo tanto $\text{deg}(\text{div}(\omega)) = \text{deg}(\text{div}(\eta)) + \text{deg}(\text{div}(f)) = 2g - 2$. \square

3. Espacios de funciones y 1-formas meromorfas asociados a un divisor.

La función $\text{div}(f)$ le asigna un divisor a una función meromorfa no nula o a una forma diferencial meromorfa. Ahora se invierte el proceso. A un divisor se le asocia un espacio de funciones y un espacio de formas meromorfas. Nuevamente, habrá una relación entre los ceros y polos de la función o forma diferencial y el divisor. Antes de iniciar, se hace una convención. Si f es idénticamente nula en una vecindad de un punto p , los términos de su serie de Laurent son todos 0 y $\text{ord}_p(f)$ no se puede definir de la manera usual. En cambio, se toma $\text{ord}_p(f) = \infty$, con $\infty > n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Definición V.19. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor. El espacio de funciones meromorfas sobre X con polos limitados por D se define como el conjunto*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(f) \geq -D\}.$$

La definición anterior dice que si $f \in L(D)$, entonces $\text{ord}_p(f) \geq -n_p$, para todo $p \in X$. Si $n_p > 0$, entonces f puede tener un polo en p de orden n_p a lo sumo. Si $n_p < 0$, f tiene un cero con orden $-n_p$ por lo menos.

Ejemplo V.20. En cualquier superficie de Riemann compacta X , $L(0) = \mathcal{O}(X)$. Como las únicas funciones holomorfas en X son constantes, $L(0) \cong \mathbb{C}$. \square

Proposición V.21. *Sean X una superficie de Riemann y $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Entonces:*

- $L(D_1)$ es un espacio vectorial complejo.
- Si $D_1 \leq D_2$, entonces $L(D_1) \subset L(D_2)$.

Demostración. Sea $D_1 = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$. Por la convención al inicio de esta sección, la función constante 0 tiene orden ∞ en todo punto de X y, por tanto, $0 \in L(D_1)$. Si $f, g \in L(D_1)$ y $a, b \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\text{ord}_p(af + bg) \geq \min\{\text{ord}_p(af), \text{ord}_p(bg)\} = \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\} \geq -n_p.$$

Entonces $\text{div}(af + bg) \geq -D_1$ y $af + bg \in L(D_1)$. Por tanto, $L(D_1)$ es un espacio vectorial. Por otro lado, para toda $f \in L(D_1)$, $\text{div}(f) \geq -D_1 \geq -D_2$ así que $f \in L(D_2)$. \square

Así como en la proposición anterior hay una relación entre los espacios $L(D_1)$ y $L(D_2)$ cuando $D_1 \geq D_2$, ahora existe un isomorfismo cuando D_1 y D_2 son linealmente equivalentes.

Proposición V.22. Sean D_1 y D_2 divisores linealmente equivalentes sobre una superficie de Riemann compacta X . Entonces $L(D_1) \cong L(D_2)$.

Demostración. Si $D_1 \sim D_2$ existe una función meromorfa no constante h sobre X tal que $D_1 = D_2 + \text{div}(h)$. Para todo $f \in L(D_1)$, se tiene $\text{div}(f) \geq -D_1$ y $\text{div}(fh) = \text{div}(f) + \text{div}(h) \geq -D_1 + \text{div}(h) = -D_2$, por lo que $fh \in L(D_2)$. Se define, entonces, una aplicación $\mu_h : L(D_1) \rightarrow L(D_2)$ dada por $\mu_h(f) = fh$. Cualquier aplicación de este tipo es lineal, así que su inversa $\eta_{1/h}(g) = g/h$ definida en $L(D_2)$ también es lineal. Entonces, μ_h es una biyección lineal, es decir un isomorfismo entre $L(D_1)$ y $L(D_2)$. \square

Ejemplo V.23. Sea $D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ un divisor sobre \mathbb{C}_∞ con $\text{deg}(D) \geq 0$ y λ_i números complejos distintos. El propósito del ejemplo es dar una caracterización del espacio $L(D)$. Defínase $f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$ una función meromorfa sobre \mathbb{C}_∞ tal que $\text{div}(f_D) = \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i + (\sum_{i=1}^n e_i) \cdot \infty$. Elíjase $h \in L(D)$ y sea $g = h/f_D$ una función meromorfa sobre \mathbb{C}_∞ . Nótese que

$$\begin{aligned} \text{div}(g) &= \text{div}(h) - \text{div}(f_D) \\ &\geq -D - \text{div}(f_D) \\ &= -\sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - e_\infty \cdot \infty - \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty \\ &= -\left(e_\infty + \sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty \\ &= -\text{deg}(D) \cdot \infty. \end{aligned}$$

En otras palabras, $\text{ord}_p(g) \geq 0$ para todo $p \in \mathbb{C}$ y $\text{ord}_\infty(g) \geq -\text{deg}(D)$; en consecuencia el único polo de g es ∞ . Como g es meromorfa, tiene una cantidad finita de ceros complejos, así que g debe ser un polinomio de la forma $g = \prod_{i=1}^m (z - c_i)^{f_i}$, donde $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ son los ceros distintos de g y $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{Z}^+$. Nótese que $\text{ord}_\infty(g) = -\text{deg}(g) \geq -\text{deg}(D)$. Por lo tanto, todo $h \in L(D)$ es de la forma gf_D , donde g es un polinomio con $\text{deg}(g) \leq \text{deg}(D)$.

Esta es la caracterización buscada del espacio $L(D)$. Si g es un polinomio con grado máximo

$\deg(D)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(gf_D) &= \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f_D) \\
 &\geq \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i + \left(-\deg(D) + \sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty \\
 &= \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i - e_\infty \cdot \infty \\
 &= -D.
 \end{aligned}$$

Entonces, $gf_D \in L(D)$ para todo polinomio g con grado máximo $\deg(D)$. En conclusión,

$$L(D) = \{gf_D \mid g \in \mathbb{C}[z] \text{ y } \deg(g) \leq \deg(D)\}.$$

De hecho, $\dim L(D) = 1 + \deg(D)$, pues $\{f_D, zf_D, \dots, z^{\deg(D)} f_D\}$ es claramente una base para $L(D)$. \square

No cualquier divisor D define un espacio $L(D)$ no trivial. Por ejemplo, dado $p \in X$ y $D = -1 \cdot p$, no existe ninguna función meromorfa que tenga un cero de orden por lo menos 1 en p y no tenga polos. Tal función sería holomorfa, por ende constante y no tendría un cero en p . En el siguiente lema, se encuentran divisores cuyos espacios asociados son vacíos.

Lema V.24. Sean X una superficie de Riemann compacta y $D \in \operatorname{Div}(X)$. Entonces:

- Si $\deg(D) < 0$, entonces $L(D) = \{0\}$.
- Si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$, entonces $L(D) = \{0\}$.

Demostración. Supóngase primero que $\deg(D) < 0$. Si existiera $f \in L(D)$ no nula, $\operatorname{div}(f) \geq -D$ y se tendría que $\deg(\operatorname{div}(f)) \geq -\deg(D) > 0$. Esto contradice al lema V.9, así que $L(D) = \{0\}$, comprobando la primera afirmación.

La segunda afirmación se demuestra por contrapositiva. Supóngase que existe una función meromorfa no nula $f \in L(D)$. Sea $E = \operatorname{div}(f) + D \geq 0$. Si $\deg(D) = 0$, $\deg(E) = 0$ también. La única manera en la que esto puede suceder es si $E = 0$, de donde $D \sim 0$. Por otro lado, si $D \not\sim 0$, se tiene $E \neq 0$ y $\deg(E) > 0$. Por lo tanto $\deg(D) = \deg(E) > 0$. \square

Análogo al espacio de funciones meromorfas $L(D)$, a continuación se define un espacio de 1-formas diferenciales asociadas a D .

Definición V.25. Sea X una superficie de Riemann compacta y $D \in \operatorname{Div}(X)$. El espacio de 1-formas diferenciales con polos limitados por D es el conjunto

$$I(D) = \{\omega \text{ 1-forma meromorfa sobre } X \mid \operatorname{div}(\omega) \geq -D\}$$

Argumentos análogos a los de las proposiciones V.21 y V.22 permiten demostrar que

Proposición V.26. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Entonces:*

- $I(D_1)$ es un espacio vectorial complejo.
- Si $D_1 \leq D_2$, $I(D_1) \subset I(D_2)$.
- Si $D_1 \sim D_2$, $I(D_1) \cong I(D_2)$.

También existe una relación entre los espacios $L(D)$ e $I(D)$.

Proposición V.27. *Sean X una superficie de Riemann compacta, $D \in \text{Div}(X)$ y $K = \text{div}(\omega) \in \text{KDiv}(X)$, para alguna 1-forma meromorfa ω no nula. Entonces $L(D + K) \cong I(D)$.*

Demostración. Defínase una aplicación lineal $\zeta : L(D + K) \rightarrow I(D)$ por $\zeta(f) = f\omega$. Primero, se verifica que $\zeta(f) \in I(D)$. Si $f \in L(D + K)$, $\text{div}(\zeta(f)) = \text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega) \geq -(D + K) + K = -D$, así que $\zeta(f) \in I(D)$. Por otro lado, como ω es no nula, si $\zeta(f) = f\omega = 0$ implica que $f = 0$, así que ζ es inyectiva. Por último, si $\eta \in I(D)$, por la proposición V.15, existe una función meromorfa no nula f sobre X tal que $\eta = f\omega$. Como $-D \leq \text{div}(\eta) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega) = \text{div}(f) + K$, $f \in L(D + K)$. El hecho de que $\zeta(f) = \eta$ comprueba que ζ es sobreyectiva. Resumiendo, ζ es un isomorfismo entre $L(D + K)$ y $I(D)$. \square

4. Cota superior para la dimensión de $L(D)$.

A continuación, se encuentran cotas superiores para la dimensión de $L(D)$. Esto muestra que la cantidad de funciones con polos prescritos está limitada de cierta forma.

Lema V.28. *Sean X una superficie de Riemann compacta, $p \in X$ y $D = \sum_{q \in X} n_q$. Entonces, $L(D - p) = L(D)$ o $\text{codim } L(D - p) = 1$ en $L(D)$.*

Demostración. Sea z una coordenada local centrada en p . Si $f \in L(D)$, su serie de Laurent alrededor de p centrada en z es de la forma $a_{n_p} z^{-n_p} + O(z^{-n_p+1})$. Defínase una aplicación lineal $\alpha : L(D) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\alpha(f) = a_{n_p}$. Si $a_{n_p} = 0$, entonces $\text{ord}_p(f) \geq -n_p + 1$ y $f \in L(D - p)$; si $f \in L(D - p)$, entonces $\text{ord}_p(f) \geq -n_p + 1$ y $a_{n_p} = 0$. Esto muestra que $\ker(\alpha) = L(D - p)$. Si α es una aplicación idénticamente nula, entonces $L(D) = \ker(\alpha) = L(D - p)$. De lo contrario, existe una función $f \in L(D)$ tal que $\alpha(f) = a_{n_p} \neq 0$. Si se elige $c \in \mathbb{C}$ cualquiera, se tiene $\alpha(\frac{c}{a_{n_p}} f) = c$, así que α es sobreyectiva. Por el primer teorema de isomorfismos, $\mathbb{C} \cong L(D)/\ker(\alpha) = L(D)/L(D - p)$, así que $\text{codim } L(D - p) = 1$. \square

Proposición V.29. *Sean X una superficie de Riemann compacta y $D \in \text{Div}(X)$. Escríbase $D = P - N$, donde P y N son los divisores efectivos dados por la proposición V.5. Entonces, $\dim L(D) \leq 1 + \text{deg}(P)$. En particular, $\dim L(D) < \infty$.*

Demostración. Supóngase que $\deg(P) = 0$. Como P es efectivo, $P = 0$ y $L(P) = \mathbb{C}$. Como $D \leq P$, por la proposición V.21 $L(D) \subset L(P)$ así que $\dim L(D) \leq \dim L(P) = 1 = 1 + \deg(P)$.

Se procede ahora por inducción sobre $\deg(P)$. Supóngase que la proposición es verdadera si $\deg(P) \leq k-1$ y sea $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor tal que $\deg(P) = k \geq 1$. Sea $p \in X$ tal que $n_p \geq 1$. El divisor $P - p$ es efectivo y $\deg(P - p) = k - 1$, así que la hipótesis de inducción afirma que $\dim L(D - p) \leq 1 + \deg(P - p) = \deg(P)$. El lema V.28 da dos opciones: $\dim L(D) = \dim L(D - p)$ y $\dim L(D) = 1 + \dim L(D - p)$. En cualquier caso, se tiene $\dim L(D) \leq 1 + \dim(D - p) \leq 1 + \deg(P)$. \square

En virtud del isomorfismo de la proposición V.27, se obtiene un corolario de la proposición V.29.

Corolario V.30. Sean X una superficie de Riemann compacta y $D \in \text{Div}(X)$. Entonces, $I(D)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

B. Curvas algebraicas

Los resultados a partir de la sección 2 (en especial la proposición V.17) dependen de la existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann compactas arbitrarias. La construcción de estas funciones, si bien no requiere de herramientas muy avanzadas, es muy larga y se desvía de los objetivos de este trabajo. Por ello, se estudia un tipo particular de superficies de Riemann en el que la existencia de estas funciones se pueda demostrar de forma más simple. Primero, se hace la convención de decir que una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tiene multiplicidad 1 en p si el mapeo holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de la proposición III.35 tiene multiplicidad 1 en p . La siguiente definición se adopta de Lucas de Arruda (2011).

Definición V.31. Sea S un conjunto de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta X . Se dice que S *separa puntos* de X si para cualquier pareja $p, q \in X$ de puntos distintos, existe una función $f \in S$ tal que $f(p) \neq f(q)$. S *separa tangentes* si, para todo $p \in X$, existe una función $f \in S$ que tenga multiplicidad 1 en p .

Definición V.32. Una superficie de Riemann compacta X es una *curva algebraica* si $\mathcal{M}(X)$, el conjunto de funciones meromorfas sobre X , separa puntos y tangentes de X .

Lucas de Arruda (2011) advierte que la definición anterior no es común en la literatura. En primer lugar, el hecho que $\mathcal{M}(X)$ separe puntos implica que existen funciones meromorfas no constantes. La utilidad del hecho que separe tangentes no es tan inmediata, pero es posible justificar la elección del nombre. La derivada de un mapeo $F : X \rightarrow Y$ entre variedades X y Y es una aplicación lineal F' del espacio tangente de X al espacio tangente de Y . Decir que F separa tangentes significa que F' es inyectiva. En el caso de que X sea una superficie de Riemann compacta,

esto equivale a que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tenga multiplicidad 1. Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ el mapeo holomorfo asociado a f y supóngase que la representación de F en coordenadas centradas en p es una función holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. El espacio tangente a \mathbb{C} tiene dimensión 1, así que g' es una multiplicación por un escalar $g'(0)$. g' es inyectiva si, y solo si, $g'(0) \neq 0$. Así que, si f separa tangentes, g' es inyectiva y esto conlleva $\text{mult}_p(F) = 1$.

Ejemplo V.33. Sean $p, q \in \mathbb{C}_\infty$, con $p \neq q$. Si $p, q \neq \infty$, la función $f(z) = \frac{z-p}{q-p} + \frac{z-q}{q-p}$ cumple $f(p) \neq f(q)$. Si $q = \infty$, $f(z) = z$ bastará para tener $f(p) \neq f(q)$. Entonces, el campo $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ separa puntos. Por otro lado, si $p \in \mathbb{C}_\infty$ y $p \neq \infty$, sea $f(z) = z - p$; si $p = \infty$ se toma $f(z) = \frac{1}{z}$. En cualquier caso, p es un cero de orden 1 de f , así que f tiene multiplicidad 1 en p . Por tanto, $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ separa tangentes de \mathbb{C}_∞ y la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ es una curva algebraica. \square

1. Funciones meromorfas con comportamiento prescrito.

En una curva algebraica, no solo existen funciones meromorfas no constantes sino también es posible describir su comportamiento en una cantidad finita de puntos. Las siguientes propiedades muestran descripciones cada vez más precisas.

Proposición V.34. Sea X una curva algebraica y $p \in X$. Para todo $m \in \mathbb{Z}$, existe una función meromorfa f sobre X tal que $\text{ord}_p(f) = m$.

Demostración. Como $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes, existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ asociada a un mapeo holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ con $\text{mult}_p(F) = 1$. Por el lema III.40, hay dos opciones: $\text{ord}_p(f - f(p)) = 1$ y $\text{ord}_p(f) = -1$. En el primer caso, sea $g = (f - f(p))^m$ y en el segundo, $g = 1/f^m$. En cualquier caso, $\text{ord}_p(g) = m$. \square

Más que solo especificar el orden de una función en un punto, se puede especificar una parte de su serie de Laurent. Para ello, se fija una notación.

Definición V.35. Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Sea $h(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i$ una serie de Laurent cualquiera. Si $n \leq m$, se define $\tau(h, n) = 0$. De lo contrario,

$$\tau(h, n) = \sum_{i=m}^{n-1} a_i z^i.$$

En cualquier caso, $\tau(h, n)$ se llama *truncamiento de Laurent* de h en grado n . Un *polinomio de Laurent* es cualquier función de la forma $r(z) = \sum_{i=m}^n a_i z^i$ y su grado se define como $\text{deg}(r) = \text{máx}\{k \mid a_k \neq 0\}$.

Es fácil verificar que $\tau(h, n)$ es lineal en h . Nótese que $\tau(h, n)$ es una forma abreviación para decir que todos los términos de grado mayor o igual que n de la serie $h(z)$ fueron eliminados. Si todos los términos tienen por lo menos grado n (es decir si $n \leq m$), τ los remueve todos y $\tau(h, n)$ es 0.

Proposición V.36. Sean X una curva algebraica, $p \in X$ y z una coordenada local centrada en p . Sea $r(z)$ un polinomio de Laurent de grado n . Entonces, existe una función meromorfa f sobre X cuya serie de Laurent $\tilde{f}(z)$ alrededor de p cumple $r(z) = \tau(\tilde{f}, n + 1)$, donde $n = \deg(r)$.

Demostración. Sea $r(z) = \sum_{i=m}^n a_i z^i$, con $a_m, a_n \neq 0$. La prueba es por inducción sobre el número de términos de r . Si r tiene un solo término, $r(z) = a_m z^m$ y $\deg(r) = m$. Por la proposición V.34, existe una función meromorfa $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ con $\text{ord}_p(g) = m$. Si la serie de Laurent de g alrededor de p es $\sum_{i=m}^{\infty} b_i z^i$, se tiene $b_m \neq 0$, así que se elige $f = \frac{a_m}{b_m} g$. Ésta es la función buscada pues su serie de Laurent alrededor de p es $\tilde{f}(z) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{a_m b_i}{b_m} z^i$ y cumple $\tau(\tilde{f}, m + 1) = a_m z^m$.

Supóngase que $r(z)$ tiene k términos y que todo polinomio de Laurent con menos de k términos cumple la propiedad. Sea h una función meromorfa sobre X con serie de Laurent $\tilde{h}(z)$ tal que $\tau(\tilde{h}, m + 1) = a_m z^m$. Sea $s = \tau(\tilde{h} - r, n + 1)$. Como \tilde{h} y r coinciden por lo menos en el primer término, $s(z)$ tiene $k - 1$ términos a lo sumo. Por hipótesis de inducción, existe una función meromorfa g sobre X cuya serie de Laurent $\tilde{g}(z)$ satisface $s = \tau(\tilde{g}, n + 1)$. Si se define $f = h - g$, su serie de Laurent \tilde{f} alrededor de p en términos de z cumple

$$\begin{aligned} \tau(\tilde{f}, n + 1) &= \tau(\tilde{h} - \tilde{g}, n + 1) \\ &= \tau(\tilde{h} - r - \tilde{g} + r, n + 1) \\ &= \tau(\tilde{h} - r, n + 1) - \tau(\tilde{g}, n + 1) + \tau(r, n + 1) \\ &= r \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es la función buscada. \square

También se pueden encontrar funciones meromorfas con propiedades en varios puntos.

Lema V.37. Sea X una curva algebraica. Para todo número finito de puntos p, q_1, \dots, q_n , existe una función meromorfa f sobre X con cero en p y polos en q_1, \dots, q_n .

Demostración. Nuevamente, la prueba es por inducción sobre n . Como X es una curva algebraica, existe una función meromorfa g sobre X tal que $g(p) \neq g(q_1)$. Si p es un polo de g , cambiamos g por $1/g$ y si p no es un cero de g , cambiamos g por $g - g(p)$. En cualquier caso, g tiene un cero en p , $g(q_1) \neq 0$ y la función $f = \frac{g}{g - g(q_1)}$ tiene un polo en q_1 .

Supóngase que existe una función meromorfa g con cero en p y polos en q_1, \dots, q_{m-1} . Sea h una función meromorfa con un cero en p y un polo en q_n . Para m suficientemente grande, $f = g + h^m$ es la función buscada. Tanto g como h tienen un cero en p , así que f también. Sea $1 \leq i \leq n - 1$ fijo. g tiene un polo en q_i . Dependiendo de si h tiene o no un polo en q_i , hay dos casos. Si h no tiene un polo en q_i , es decir si h es holomorfa en q_i , entonces f sí tiene un polo en q_i . Si h tiene un polo en q_i , sea m tal que $\text{ord}_{q_i}(h^m) < \text{ord}_{q_i}(g)$. Sea z una coordenada local alrededor de q_i tal que z_0 corresponda a q_i . Las formas locales de g y h son $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(g)} g_0$ y

$\tilde{h}^m(z) = (z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(h^m)} h_0$, con g_0 y h_0 funciones holomorfas en z_0 . Entonces, la forma local de f es

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{g}(z) + \tilde{h}^m(z) = (z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(g)} g_0 + (z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(h^m)} h_0 \\ &= (z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(h^m)} [(z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(g) - \text{ord}_{q_i}(h^m)} g_0 + h_0]\end{aligned}$$

donde, por la elección de m , $(z - z_0)^{\text{ord}_{q_i}(g) - \text{ord}_{q_i}(h^m)} g_0 + h_0$ es holomorfa en z_0 . Entonces f tiene un polo en q_i . Análogamente se demuestra que f tiene un polo en q_n , considerando si g tiene o no un polo en ese punto. Esto comprueba que f es la función buscada. \square

La función dada por el lema V.37 tiene polos específicos, mas no se tiene información de su orden. El siguiente corolario responde esta pregunta.

Corolario V.38. *Sea X una curva algebraica. Entonces, para todo número finito de puntos $p, q_1, \dots, q_n \in X$ y todo $N \in \mathbb{Z}^+$, existe una función meromorfa f sobre X tal que $\text{ord}_p(f - 1) \geq N$ y $\text{ord}_{q_i}(f) \geq N$.*

Demostración. Por el lema V.37, existe una función meromorfa g sobre X con un cero en p y polos en q_1, \dots, q_n . Sea $f = \frac{1}{1+g^N}$. Por el lema III.24 y las desigualdades $\text{ord}_p(g) \geq 1$ y $\text{ord}_{q_i}(g) \leq -1$, se tiene

$$\text{ord}_p(f - 1) = \text{ord}_p\left(\frac{-g^N}{1+g^N}\right) = \text{ord}_p(g^N) - \text{ord}_p(1+g^N) \geq N \text{ord}_p(g) - 0 \geq N$$

y

$$\text{ord}_{q_i}(f) = \text{ord}_{q_i}\left(\frac{1}{1+g^N}\right) = -\text{ord}_{q_i}(1+g^N) \geq -N \text{ord}_{q_i}(g) \geq N.$$

\square

La cumbre de esta sucesión de teoremas es el siguiente. Por un lado, ya se logró que una función tenga el truncamiento de Laurent deseado en un punto fijo. Por otro, es posible encontrar una función con ceros y polos en una cantidad finita de puntos con un orden mínimo. Ahora, se combinan propiedades en un resultado llamado Lema de aproximación de series de Laurent.

Lema V.39. *Sean X una curva algebraica y $p_1, \dots, p_n \in X$. Para $1 \leq i \leq n$, elíjanse coordenadas locales z_i centradas en p_i y polinomios de Laurent $r_i(z_i)$. Entonces, existe una función meromorfa f sobre X tal que su serie de Laurent alrededor de p_i en la coordenada z_i tiene a $r_i(z_i)$ como truncamiento de Laurent.*

Demostración. Sea $N = 1 + \text{máx}\{\text{deg}(r_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. Se construye una función meromorfa f con la siguiente propiedad. Si f_i es la serie de Laurent de f alrededor de p_i en términos de z_i , entonces $r_i = \tau(f_i, N + 1)$. Por la proposición V.36, para cada $i = 1, \dots, n$ existe una función

meromorfa g_i sobre X tal que \tilde{g}_i es su serie de Laurent alrededor de p_i en la coordenada z_i y $r_i = \tau(\tilde{g}_i, N+1)$. Sea $M = \min\{\text{ord}_{p_j}(g_i) \mid i, j = 1, \dots, n\}$. Por el corolario V.38, para cada i existe una función meromorfa h_i sobre X tal que $\text{ord}_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$ y, para $j \neq i$, $\text{ord}_{p_j}(h_i) \geq N - M$.

Sea $f = \sum_{i=1}^n g_i h_i$. Sean \tilde{g}_{ij} y \tilde{h}_{ij} las series de Laurent de g_i y h_i alrededor de p_j para $i \neq j$; sea \tilde{h}_i la serie de h_i alrededor de p_i . Por las observaciones del párrafo anterior, $\text{ord}_{p_j}(g_i h_i) = \text{ord}_{p_j}(g_i) + \text{ord}_{p_j}(h_i) \geq N$ para $i \neq j$. Entonces, $\tau(\tilde{g}_{ij} \tilde{h}_{ij}, N+1) = 0$ si $i \neq j$. Análogamente se muestra que $\tau(\tilde{g}_i(\tilde{h}_i - 1), N+1) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tau(f_j, N+1) &= \sum_{i=1}^n \tau(\tilde{g}_{ij} \tilde{h}_{ij}, N+1) \\ &= \tau(\tilde{g}_i, N+1) + \tau(\tilde{g}_i(\tilde{h}_i - 1), N+1) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \tau(\tilde{g}_{ij} \tilde{h}_{ij}, N+1) \\ &= r_i. \end{aligned}$$

□

Corolario V.40. *Sea X una curva algebraica. Elíjanse una cantidad finita de puntos $p_1, \dots, p_n \in X$ y $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Entonces, existe una función meromorfa f sobre X tal que $\text{ord}_{p_i}(f) = m_i$ para $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Para $i = 1, \dots, n$, sea z_i una coordenada local centrada en p_i . Sea $r_i(z_i) = z_i^{m_i}$. Por el lema V.39, existe una función meromorfa f sobre X tal que $r_i(z_i)$ es el truncamiento de su serie de Laurent alrededor de p_i en la coordenada z_i . f es la función buscada. □

Es importante aclarar que, si bien existe una función con un orden prescrito en una cantidad finita de puntos, no se tiene control sobre los demás puntos. Es posible que la función tenga otros polos o ceros que no se conozcan.

2. $\mathcal{M}(X)$ como extensión del campo \mathbb{C} .

En la sección anterior se construyeron funciones meromorfas con propiedades locales. Ahora se estudia el campo de funciones meromorfas globalmente. Específicamente, $\mathcal{M}(X)$ es una extensión del campo \mathbb{C} que está generada por una cantidad finita de elementos.

Primero, se repasan definiciones del álgebra de campos. Si K es una extensión del campo L , un elemento $\alpha \in K$ es llamado trascendente si no existe ningún polinomio $p(t) \in L[t]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Un conjunto $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es llamado *algebraicamente independiente* si no existe ningún polinomio $p \in L[x_1, \dots, x_n]$ tal que $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. El *grado de trascendencia* de K sobre L se define como $\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) = |A|$, donde A es un conjunto algebraicamente independiente con la mayor cardinalidad entre esos conjuntos. (Lang, 2002)

Proposición V.41. *Sea X una curva algebraica. Viendo a $\mathcal{M}(X)$ como una extensión de \mathbb{C} ,*

$$\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) = 1$$

Demostración. Ya se sabe que si X es una curva algebraica, entonces existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante. Sea $A = \{f\}$. Si A no es algebraicamente independiente, f es un elemento algebraico de \mathbb{C} . Existe, entonces, un polinomio $p \in \mathbb{C}[t]$ tal que $p(f) = 0$. Como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, $f \in \mathbb{C}$. Esto es absurdo pues f no es constante. Entonces, $\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) \geq 1$.

Supóngase ahora que $\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) > 1$. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X)$ algebraicamente independientes. Sea $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor sobre X tal que $D > \text{div}_\infty(f), \text{div}_\infty(g)$. Por la elección de D , $f, g \in L(D)$. Tomando $n \in \mathbb{Z}^+$ e $i, j \in \mathbb{Z}^+$ tales que $i + j = n$ se tiene, por el lema V.9,

$$\text{div}(f^i g^j) = i \text{div}(f) + j \text{div}(g) \geq -iD - jD = -nD$$

así que $f^i g^j \in L(nD)$. Como f, g son algebraicamente independientes, el conjunto $B = \{f^i g^j \mid i + j = n; i, j \in \mathbb{Z}^+\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} . Luego, $\dim L(nD) \geq (n^2 + 3n + 2)/2$. Sin embargo, esto es una contradicción, pues la proposición V.29 establece que $\dim L(nD) \leq 1 + \text{deg}(nD) = 1 + n \text{deg}(D)$ y, para n suficientemente grande, $(n^2 + 3n + 2)/2 > 1 + n \text{deg}(D)$. Esto implica que $\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) > 1$ es imposible, así que $\text{tr.deg}(\mathcal{M}(X)) = 1$. \square

Ahora se muestra que $\mathcal{M}(X)$ es una extensión finita de \mathbb{C} . El lema anterior dice que cualquier función meromorfa no constante es un elemento trascendente en \mathbb{C} . Por esta razón, en lugar de demostrar directamente que la extensión de $\mathcal{M}(X)$ sobre \mathbb{C} es finita, se prueba que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$ es finito, pues $\mathbb{C}(f)$ es de por sí una extensión finita de \mathbb{C} .

Lema V.42. *Sean X una curva algebraica y $A \in \text{Div}(X)$. Sea f una función meromorfa no constante sobre X y $D = \text{div}_\infty(f)$. Entonces, existen $m \in \mathbb{Z}^+$ y una función meromorfa g sobre X tales que $A - \text{div}(g) \leq mD$. Es más, existe $r \in \mathbb{C}[t]$ tal que $g = r(f)$.*

Demostración. Sea $A = \sum_{p \in X} a_p \cdot p$. Si no existiera ningún punto regular de f tal que $a_p \geq 1$, $m = \max\{1, a_p \mid p \in X\}$ y $g = 1$ cumplen el lema. De lo contrario, existe una cantidad finita de puntos regulares p_1, \dots, p_k de f para los cuales $a_p \geq 1$. Para cada $i = 1, \dots, k$, $f(p_i) \in \mathbb{C}$ así que $f - f(p_i)$ es una función meromorfa. p_i es un cero de esta función y sus polos son exactamente los polos de f con el mismo orden. Asimismo, $(f - f(p_i))^{a_{p_i}}$ también es meromorfa, tiene un cero en p_i con orden mínimo a_{p_i} y un polo en q si, y solo si, q es polo de f . Además, $\text{ord}_q(g) = a_{p_i} \text{ord}_q(f)$.

Sean $r(t) = \prod_{i=1}^k (t - f(p_i))^{a_{p_i}} \in \mathbb{C}[t]$ y $g = r(f)$. Por el razonamiento del párrafo anterior, g es una función meromorfa. Gracias a ello, existe $m = \max\{a_p - \text{ord}_p(g) \mid p \in X\}$. Nótese que solo hay una cantidad finita de puntos $p \in X$ en los que $a_p \neq 0$ u $\text{ord}_p(g) \neq 0$. Es decir, existen infinitos $p \in X$ tales que $a_p - \text{ord}_p(g) = 0$ así que $m \geq 0$. Para probar que $A - \text{div}(g) \leq mD$ hay

dos casos: dado $p \in X$, este puede o no ser un polo de f . Si p no es un polo, su coeficiente en $\text{div}_\infty(f)$ es 0 y hay que probar que $a_p - \text{ord}_p(g) \leq 0$. Para empezar, p tampoco es un polo de g y $\text{ord}_p(g) \geq 0$. Si $a_p \leq 0$ no hay nada que probar. Si $a_p \geq 1$, g tiene un cero en p con $\text{ord}_p(g) \geq a_p$, así que $a_p - \text{ord}_p(g) \leq 0$. Si p es un polo, su coeficiente en $\text{div}_\infty(f)$ es el entero $c = -\text{ord}_p(f) \geq 1$. Entonces, $a_p - \text{ord}_p(g) \leq m \leq mc$. Al unir estos dos casos se obtiene la desigualdad buscada. \square

Corolario V.43. Sean X una curva algebraica y f, g funciones meromorfas no constantes sobre X . Entonces, existen $m \in \mathbb{Z}^+$ y un polinomio $r \in \mathbb{C}[t]$ tales que

- $r(f)g \in L(mD)$, donde $D = \text{div}_\infty(f)$.
- $q \in X$ es un polo de $r(f)g$ solo si q es polo de f .

Demostración. Dado $A = -\text{div}(g)$, por el lema V.42, existen $m \in \mathbb{Z}^+$ y $r \in \mathbb{C}[t]$ tales que $-\text{div}(g) - \text{div}(r(f)) \leq mD$. Entonces, $\text{div}(r(f)g) \geq -mD$, así que $r(f)g \in L(mD)$. Si $q \in X$ es un polo de f , su coeficiente en D es $n_q = 0$. Entonces, $\text{ord}_q(r(f)g) \geq -mn_q = 0$ y q no puede ser un polo de $r(f)g$. \square

Lema V.44. Sean X una curva algebraica, f una función meromorfa no constante sobre X y $D = \text{div}_\infty(f)$. Si $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$, existe $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\dim L(mD) \geq (m - m_0 + 1)k$$

para todo entero $m \geq m_0$.

Demostración. Si $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$, existen por lo menos k funciones $g_i \in \mathcal{M}(X)$ linealmente independientes. Por el corolario V.43, para cada $i = 1, \dots, k$ existen $m_i \in \mathbb{Z}^+$ y $r_i \in \mathbb{C}[t]$ no nulo tales que $h_i \in L(m_i D)$, donde $h_i = r_i(f)g_i$ y $D = \text{div}_\infty(f)$. Dado que $r_i(f) \in \mathbb{C}(f)$, las funciones h_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}(f)$ pues cada una es un múltiplo escalar de una función g_i distinta.

Sea $m_0 = \max\{m_i \mid i = 1, \dots, k\}$. Para todo entero $m \geq m_0$ y $j = 0, \dots, m - m_0$ tenemos

$$\text{div}(f^j h_i) = j \text{div}(f) + \text{div}(h_i) \geq -jD - m_i D \geq -jD - m_0 D \geq -mD,$$

es decir $f^j h_i \in L(mD)$. Todas estas funciones son linealmente independientes sobre \mathbb{C} , así que $\dim L(mD) \geq (m - m_0 + 1)k$ para todo entero $m \geq m_0$. \square

Ahora se demuestra que $\mathcal{M}(X)$ es una extensión finita de \mathbb{C} .

Proposición V.45. Si X es una curva algebraica, f una función meromorfa no constante sobre X y $D = \text{div}_\infty(f)$, entonces

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D).$$

Demostración. Supóngase, por reducción al absurdo, que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq 1 + \deg(D)$. La proposición V.29 da una cota superior para la dimensión de $L(D)$, mientras que el lema V.44 da una cota inferior a partir de $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$ y de un entero fijo m_0 . Combinándolas, se obtiene que para todo entero $m \geq m_0$,

$$(m - m_0 + 1)(1 + \deg(D)) \leq \dim L(mD) \leq 1 + m \deg(D).$$

Esto es una contradicción, pues como $\deg(D) > 0$, la desigualdad anterior no vale para m suficientemente grande. \square

De hecho, la cota anterior permite obtener un valor más preciso de $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)]$.

Proposición V.46. *Si X es una curva algebraica, f una función meromorfa no constante sobre X y $D = \operatorname{div}_\infty(f)$,*

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D).$$

Demostración. En virtud de la proposición V.45, solo falta demostrar que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq \deg(D)$. Sea $D = \sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i$, donde p_i son los polos de f y $n_i \geq 1$. Por el corolario V.40, para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $j = 1, \dots, n_i$, se puede encontrar una función meromorfa g_{ij} sobre X tal que p_i es un polo con $\operatorname{ord}_{p_i}(g_{ij}) = -j$ y $\operatorname{ord}_{p_k} = 0$ para $k \neq i$. La prueba concluye si se demuestra que el conjunto $\{g_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_i\}$, que tiene $\deg(D)$ elementos, es linealmente independiente. Supóngase lo contrario: sean $c_{ij} \in \mathbb{C}(f)$ funciones racionales en f tales que

$$\sum_{i,j} c_{ij}(f)g_{ij} = 0. \tag{V.1}$$

De hecho, se puede suponer que cada $c_{ij}(f)$ es un polinomio en f multiplicando la relación V.1 por el denominador común de los $c_{ij}(f)$. Nótese que si d es el grado de $c_{ij}(f)$, entonces $\operatorname{ord}_{p_k}(c_{ij}(f)) = -dn_k$. Sean i_0 y j_0 los índices tales que el grado de $c_{i_0 j_0}$ es máximo (si existieran varios, elíjase una pareja en la que j_0 sea máximo). Si la ecuación V.1 se divide entre $c_{i_0 j_0}$, se obtiene

$$\sum_{i,j} d_{ij}(f)g_{ij} = 0, \tag{V.2}$$

donde $d_{i_0 j_0}(f) = 1$ y el resto de coeficientes $d_{i,j}(f)$ son funciones racionales en las que el grado del denominador es mayor o igual que el grado del numerador. Esto causa que $\operatorname{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0 j_0}(f)) = 0$ y $\operatorname{ord}_{p_k}(d_{i,j}(f)) = m_{ij}n_k$ con $m_{ij} > 0$ para cualquier otro i, j, k . A pesar de esto, un término $d_{ij}(f)g_{ij}$ podría tener un polo. De hecho, si $i \neq i_0$, $d_{ij}(f)g_{ij}$ no tiene un polo en p_{i_0} pues $\operatorname{ord}_{p_{i_0}}(d_{ij}(f)g_{ij}) =$

$\text{ord}_{p_{i_0}}(d_{ij}(f)) + \text{ord}_{p_{i_0}}(g_{ij}) \geq 0$. Por otro lado, para $i = i_0$,

$$\begin{aligned} \text{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0j}(f)g_{i_0j}) &= \text{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0j}(f)) + \text{ord}_{p_{i_0}}(g_{i_0j}) = m_{i_0j}n_{i_0} - j \geq m_{i_0j}n_{i_0} - n_{i_0} \\ &= (m_{i_0j} - 1)n_{i_0}. \end{aligned}$$

Entonces, si $j \neq j_0$, $m_{i_0j} \geq 1$ así que $\text{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0j}(f)g_{i_0j}) \geq 0$ y p_{i_0} no es un polo de $d_{i_0j}(f)g_{i_0j}$. Si $j = j_0$, $m_{i_0j_0} = 0$ y $\text{ord}_{p_{i_0}}(d_{i_0j_0}(f)g_{i_0j_0}) = -n_{i_0} < 0$. Por lo tanto, el término $d_{i_0j_0}(f)g_{i_0j_0}$ tiene un polo en p_{i_0} y es el único con esta característica. Sin embargo, esto significa que la combinación lineal de la ecuación V.2 tiene un polo en p_{i_0} . Esto es una contradicción, pues la función constante 0 no tiene polos. \square

C. Divisores de truncamiento de Laurent

Al principio de este capítulo, se definieron divisores en superficies de Riemann como sumas formales finitas y se estudiaron un tipo particular de superficies de Riemann, llamadas curvas algebraicas, y resultados como el corolario V.40. Este resultado dice, parafraseando el enunciado, que dado un divisor $D = \sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i$, se puede encontrar una función meromorfa f definida en la curva algebraica tal que $\text{ord}_{p_i}(f) = n_i$. Sin embargo, el corolario V.40 es solo un caso especial de un resultado más poderoso, el lema V.39 de aproximación de series de Laurent. El hecho de que un divisor usual D genere una función, por el corolario del lema de aproximación, inspira la definición un nuevo tipo de divisor.

Definición V.47. Sea X una superficie de Riemann. Para cada punto $p \in X$, elíjase una coordenada local z_p alrededor de p . Un *divisor de truncamiento de Laurent* sobre X se define como una suma formal finita

$$\sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p$$

donde cada $r_p(z_p)$ es un polinomio de Laurent. Se omite la dependencia de la coordenada local cuando no sea necesaria para evitar ambigüedades. El conjunto de divisores de truncamiento de Laurent se denota por $\mathcal{T}(X)$.

Al igual que los divisores usuales, la suma de dos divisores de truncamiento de Laurent es definida puntualmente; con respecto de esta suma, $\mathcal{T}(X)$ forma un grupo. A cada divisor $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ se asocia a un subgrupo de $\mathcal{T}(X)$ definido por

$$T[D](X) = \left\{ \sum_{p \in X} r_p \cdot p \mid \deg(r_p) < -n_p, \text{ para todo } r_p \neq 0 \right\}.$$

1. Mapas de truncamiento.

En esta sección se definen funciones lineales entre estos grupos que llamadas mapas de truncamiento. Dado un divisor $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$, se define

$$t_D : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X) & \longrightarrow & \mathcal{T}[D](X) \\ \sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p & \longmapsto & \sum_{p \in X} \tau(r_p, -n_p) \cdot p. \end{array}$$

El efecto de t_D es remover, en cada punto $p \in X$, los términos de orden mayor o igual a $-n_p$ del polinomio de Laurent r_p . Esta función se generaliza para que actúe sobre los grupos $\mathcal{T}[D](X)$. Sean $D_1 = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ y $D_2 = \sum_{p \in X} m_p \cdot p$ tales que $D_1 \leq D_2$. Se define

$$t_{D_2}^{D_1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}[D_1](X) & \longrightarrow & \mathcal{T}[D_2](X) \\ \sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p & \longmapsto & \sum_{p \in X} \tau(r_p, -m_p) \cdot p. \end{array}$$

Las funciones t_D y $t_{D_2}^{D_1}$ son llamadas *mapas de truncamiento* y es sencillo verificar que son homomorfismos de grupos. Sea ahora f una función meromorfa sobre X no nula y D un divisor. Si z_p es una coordenada local alrededor de $p \in X$, sea $f_p(z_p)$ la serie de Laurent de f alrededor de p en términos de z_p . Se define

$$\mu_f^D : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}[D](X) & \longrightarrow & \mathcal{T}[D - \text{div}(f)](X) \\ \sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p & \longmapsto & \sum_{p \in X} \tau(f_p r_p, -n_p + \text{ord}_p(f)) \cdot p. \end{array}$$

Claramente, μ_f^D es lineal e inyectiva. Sea $\sum_{p \in X} s_p(z_p) \cdot p$ la imagen de $\sum_{p \in X} r_p(z_p)$ bajo μ_f^D . Nótese que $f_p r_p(z_p) = s_p(z_p) + O(z_p^{-n_p + \text{ord}_p(f)})$. Si $1/f_p$ denota a la serie de Laurent de $1/f$, se tiene

$$\frac{1}{f_p} s_p = \frac{1}{f_p} f_p r_p - \frac{1}{f_p} O(z_p^{-n_p + \text{ord}_p(f)}) = r_p + O(z^{-n_p}),$$

pues $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$ implica que $\frac{1}{f_p} = O(z_p^{-\text{ord}_p(f)})$. Como $\deg(r_p) < -n_p$, se tiene $\tau(s_p/f_p, -n_p) = r_p$. Entonces, $\mu_{1/f}^{D - \text{div}(f)} \left(\sum_{p \in X} s_p(z_p) \cdot p \right) = \sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p$. Esto muestra que la función $\mu_{1/f}^{D - \text{div}(f)} : \mathcal{T}[D - \text{div}(f)](X) \rightarrow \mathcal{T}[D](X)$ es la inversa de μ_f^D y que μ_f^D es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Por último, manteniendo la notación de la definición anterior, sea

$$\alpha_D : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \mathcal{T}[D](X) \\ f & \longmapsto & \sum_{p \in X} \tau_{-n_p}(f_p) \cdot p, \end{array}$$

De nuevo es fácil verificar que α_D es lineal. Nótese que si $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ son tales que $D_1 \leq D_2$, entonces $\alpha_{D_2} = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1}$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}[D_1](X) & \xrightarrow{t_{D_2}^{D_1}} & \mathcal{T}[D_2](X) \\ \alpha_{D_1} \uparrow & \nearrow \alpha_{D_2} & \\ \mathcal{M}(X) & & \end{array}$$

Si $D \in \text{Div}(X)$ y f es una función meromorfa sobre X , el siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\alpha_{D-\text{div}(f)}} & \mathcal{T}[D-\text{div}(f)](X) \\ f \uparrow & & \uparrow \mu_f^D \\ \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\alpha_D} & \mathcal{T}[D](X) \end{array}$$

Dentro de este contexto, podemos darle una interpretación al espacio $L(D)$. Si $f \in L(D)$, entonces su serie de Laurent alrededor de un punto $p \in X$ no tiene términos de orden menor que $-n_p$. Si se remueven los términos con orden mínimo $-n_p$, la serie se quedaría sin términos. En otras palabras,

$$L(D) = \ker(\alpha_D).$$

2. Espacio $H^1(D)$.

En el lema de aproximación de series de Laurent dice que, dado un divisor de truncamiento de Laurent $Z = \sum_{p \in X} r_p \cdot p$, existe una función meromorfa f tal que su serie de Laurent alrededor de p tiene a r_p como truncamiento de Laurent. Sin embargo, se hizo la aclaración que no se tiene control del comportamiento de f en los demás puntos de X . Una pregunta similar es la siguiente, llamada problema de Mittag-Leffler. Dado $D \in \text{Div}(X)$ y $Z \in \mathcal{T}[D](X)$, ¿existirá $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_D(f) = Z$? A diferencia del lema de aproximación de series de Laurent, el problema de Mittag-Leffler requiere que f tenga truncamientos específicos en todos los puntos de X . Si bien la serie de Laurent de f tendrá términos negativos solo en una cantidad finita de puntos, en el resto f debe ser holomorfa (y quizás tener ceros con un orden mínimo). El lema de aproximación solamente asegura que f sea holomorfa en una cantidad finita de puntos y, por el momento, solo vale en curvas algebraicas.

En lugar de intentar resolver el problema de Mittag-Leffler, se evalúa qué tan difícil es. Para eso, se estudia el siguiente espacio:

$$H^1(D) := \text{coker}(\alpha_D) = \frac{\mathcal{T}[D](X)}{\text{im}(\alpha_D)}$$

El problema de Mittag-Leffler se puede parafrasear e investigar si $Z \in \text{im}(\alpha_D)$. Esta ecuación vale si, y solo si, la clase de equivalencia de Z en $H^1(D)$ es $\bar{Z} = \bar{0}$. Entonces, el espacio $H^1(D)$ mide la dificultad del problema: mientras más elementos tenga, más difícil será obtener un Z para el cual el problema de Mittag-Leffler tenga solución. Los teoremas que siguen están dirigidos a probar que $H^1(D)$ tiene dimensión finita en curvas algebraicas.

Definición V.48. La secuencia de espacios vectoriales y funciones lineales

$$V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n$$

es llamada *exacta* si $\ker(f_{i+1}) = \text{im}(f_i)$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. El caso especial

$$0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} V_3 \xrightarrow{f_4} 0$$

es llamado *secuencia exacta corta*.

Nótese que en una secuencia exacta, $V_0 = 0$ y $V_n = 0$ si, y solo si, f_2 es inyectiva y f_{n-1} es sobreyectiva. Esto se debe a que $\ker(f_2) = \text{im}(f_1) = \{0\}$ y a que $\text{im}(f_{n-1}) = \ker(f_n) = V_{n-1}$. En este caso, las funciones f_1 y f_n generalmente se omiten del diagrama. Otra propiedad que será útil es la siguiente.

Lema V.49. *Sea*

$$0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} V_3 \xrightarrow{f_4} 0$$

una secuencia exacta corta tal que V_1 y V_2 tienen dimensión finita. Entonces

$$\dim V_3 = \dim V_2 - \dim V_1$$

Demostración. Por las observaciones del párrafo anterior, f_3 es sobreyectiva y f_2 es inyectiva. Por un lado, la inyectividad de f_2 causa que $\dim \text{im}(f_2) = \dim V_1$. Por otra parte, la exactitud de la secuencia implica que $\ker(f_3) = \text{im}(f_2)$. Por el primer teorema de isomorfismos, V_3 es isomorfo a $V_2 / \ker(f_3) = V_2 / \text{im}(f_2)$. Luego $\dim V_3 = \dim V_2 - \dim \text{im}(f_2) = \dim V_2 - \dim V_1$. \square

Un resultado más elaborado de secuencias exactas es el siguiente.

Lema V.50 (Lema de la serpiente). *Considérese el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales en el que las filas son secuencias exactas cortas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces, existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{h} \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

donde \bar{f}, \bar{g} son las restricciones adecuadas de f, g y \bar{f}', \bar{g}' son los homomorfismos inducidos por f' y g' respectivamente.

Demostración. La demostración de este lema, que no es difícil pero sí larga, puede ser encontrada completa en Blute (s.f.) y como un ejercicio en Atiyah y MacDonald (1969). Aquí no se reproduce completa; únicamente se muestra que h está bien definida.

Para $c \in \ker(\gamma)$, se define $h(c)$ como la clase lateral $(f'^{-1} \circ \beta \circ g^{-1})(c) + \operatorname{im}(\alpha)$. Nótese que $\operatorname{coker}(\alpha) \subset A'$ y que se puede obtener $h(c)$ recorriendo las flechas del diagrama empezando por C , yendo a B , pasando por B' para terminar en A' . Siguiendo este camino, se muestra que h está bien definida. Como g es sobreyectiva, para todo $c \in \ker(\gamma)$ existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Nótese que $g'(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = \gamma(c) = 0$, así que $\beta(b) \in \ker(g') = \operatorname{im}(f')$. Entonces, existe $a \in A'$ tal que $f'(a) = \beta(b)$ y, gracias a que f' es inyectiva, a es único. La clase lateral $a + \operatorname{im}(\alpha) \in \operatorname{coker}(\alpha)$ se llama $h(c)$. El paso que podría generar ambigüedad en la definición de $h(c)$ es la obtención de $b \in B$ tal que $g(b) = c$, pues es posible que exista otro $b' \in B$ tal que $g(b') = c$. Para corregir esto, hay que probar que $(f'^{-1} \circ \beta)(b) = h(c)$ como clases laterales en $\operatorname{coker}(\alpha)$ o, en otras palabras, que $(f'^{-1} \circ \beta)(b) - (f'^{-1} \circ \beta)(b') \in \operatorname{im}(\alpha)$. Sin embargo $b - b' \in \ker(g) = \operatorname{im}(f)$ pues g es lineal y $g(b - b') = c - c = 0$. Entonces,

$$(f'^{-1} \circ \beta)(b) - (f'^{-1} \circ \beta)(b') = (f'^{-1} \circ \beta)(b - b') = (\alpha \circ f^{-1})(b - b') \in \operatorname{im}(\alpha),$$

como se quería.

El anterior es un ejemplo del tipo de razonamientos que se pueden usar para demostrar que la secuencia propuesta es exacta. El argumento principal es la conmutatividad del diagrama para poder intercambiar las funciones como sea conveniente. Se deja que el lector complete la prueba o consulte alguna de las referencias propuestas. \square

Sean X una superficie de Riemann compacta y $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(X)$ tales que $D_1 \leq D_2$. Como se vio en la sección 1, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/L(D_1) & \xrightarrow{\alpha_{D_1}} & \mathcal{T}[D_1](X) & \xrightarrow{\beta_1} & H^1(D_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow t_{D_2}^{D_1} & & \downarrow e & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/L(D_2) & \xrightarrow{\alpha_{D_2}} & \mathcal{T}[D_2](X) & \xrightarrow{\beta_2} & H^1(D_2) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (\text{V.3})$$

Las aplicaciones $\beta_1, \beta_2, \varphi, e$ denotan los homomorfismos naturales entre los espacios indicados.

En particular, nótese que $\varphi(f + L(D_1)) = f + L(D_2)$ para toda $f \in \mathcal{M}(X)$. Por otra parte, nótese que $\mathcal{M}(X)/L(D_i) = \mathcal{M}(X)/\ker(\alpha_{D_i})$, así que α_{D_i} actuando sobre las clases de equivalencia de $\mathcal{M}(X)/L(D_i)$ es inyectivo. Por definición, $\ker(\beta_i) = \text{im}(\alpha_{D_i})$ y además β_i es sobreyectivo. En resumen, las filas del diagrama V.3 son secuencias exactas cortas.

Defínase

$$H_1(D_1/D_2) = \ker(\varrho).$$

Nótese que, por ser $\varrho : H^1(D_1) \rightarrow H^1(D_2)$ un homomorfismo sobreyectivo, el primer teorema de isomorfismos dice que $H^1(D_2) \cong H^1(D_1)/H^1(D_1/D_2)$.

En la búsqueda por probar que $H_1(D)$ tiene dimensión finita, será útil probar primero que $H_1(D_1/D_2)$ tiene dimensión finita. Este es el contenido del siguiente lema.

Lema V.51. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces,*

$$\dim H_1(D_1/D_2) = (\deg(D_2) - \dim L(D_2)) - (\deg(D_1) - \dim L(D_1)).$$

Demostración. Por el lema de la serpiente, el diagrama V.3 posee una secuencia exacta

$$0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow \ker(t_{D_2}^{D_1}) \rightarrow H^1(D_1/D_2) \rightarrow \text{coker}(\varphi) \rightarrow \text{coker}(t_{D_2}^{D_1}) \rightarrow \text{coker}(\varrho) \rightarrow 0.$$

Como $D_1 \leq D_2$, φ es sobreyectiva, así que $\text{coker}(\varphi) = \{0\}$. Por tanto, la secuencia exacta anterior se reduce a una secuencia corta

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow \ker(t_{D_2}^{D_1}) \longrightarrow H^1(D_1/D_2) \longrightarrow 0.$$

Por el lema V.49, si $\ker(\varphi)$ y $\ker(t_{D_2}^{D_1})$ son de dimensión finita, $\dim H^1(D_1/D_2) = \dim \ker(t_{D_2}^{D_1}) - \dim \ker(\varphi)$. Calcular $\dim H^1(D_1/D_2)$ se reduce, entonces, a mostrar $\dim \ker(t_{D_2}^{D_1})$ y $\dim \ker(\varphi)$ que son finitas y encontrar sus valores.

Dado que $\varphi(f + L(D_1)) = f + L(D_2)$ y que $f + L(D_2) = \bar{0}$ si, y solo si, $f \in L(D_2)$, se observa que $\ker(\varphi) = L(D_2)/L(D_1)$. Como X es compacta, todo espacio $L(D)$ tiene dimensión finita, luego $\dim \ker(\varphi) = \dim L(D_2) - \dim L(D_1)$. Por otro lado, escribase $D_1 = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ y $D_2 = \sum_{p \in X} m_p \cdot p$. Para cualquier p que sea necesario, se escogen coordenadas z_p centradas en p . Se hace evidente que

$$\ker(t_{D_2}^{D_1}) = \left\{ \sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p \mid -m_p \leq \text{ord}_0(r_p) \text{ y } \deg(r_p) < -n_p \right\}.$$

Si $Z \in \ker(t_{D_2}^{D_1})$, en cada p el polinomio de Laurent r_p solo puede tener términos z_p^k con $-m_p \leq k < -n_p$. Estos son exactamente $m_p - n_p$ posibles términos linealmente independientes, así que

$\dim \ker(t_{D_2}^{D_1}) = \sum_{p \in X} (m_p - n_p) = \deg(D_2) - \deg(D_1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dim H^1(D_1/D_2) &= \dim \ker(t_{D_2}^{D_1}) - \dim \ker(\varphi) \\ &= (\deg(D_2) - \dim L(D_2)) - (\deg(D_1) - \dim L(D_1)). \end{aligned}$$

□

Lema V.52. *Sean X una curva algebraica, f una función meromorfa sobre X y $D = \operatorname{div}_\infty(f)$. Entonces, $\dim H^1(0/mD)$ es eventualmente constante. Es decir, existe $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dim H^1(0/mD)$ es constante para todo $m \geq m_0$.*

Demostración. La prueba consiste en verificar que $\dim H^1(0/mD)$ es acotada y no decreciente y, por tanto, convergente y, como una secuencia convergente de números enteros es eventualmente constante, el lema vale. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$; aplíquese el lema V.51 con $D_1 = 0$ y $D_2 = mD$. Como $\dim L(0) = 1$ por ser X compacta,

$$\begin{aligned} \dim H^1(0/mD) &= (\deg(mD) - \dim L(mD)) - (\deg(0) - \dim L(0)) \\ &= m \deg(D) - \dim L(mD) + 1. \end{aligned}$$

Por la proposición V.46, $[M(X) : C(f)] = \deg(D)$ así que se puede usar $k = \deg(D)$ en el lema V.44. Entonces, existe $m'_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dim L(mD) \geq (m - m'_0 + 1) \deg(D)$ para todo $m \geq m'_0$. Esto permite obtener una cota superior para $\dim H^1(0/mD)$ que no depende de m .

$$\begin{aligned} \dim H^1(0/mD) &\leq m \deg(D) - (m - m'_0 + 1) \deg(D) + 1 \\ &= 1 + (m_0 - 1) \deg(D). \end{aligned}$$

Se prueba ahora que $\{\dim H^1(0/mD)\}_m$ es no decreciente. Sean $m_1 < m_2$ enteros positivos. Como D es efectivo, $m_1D < m_2D$. Nótese que, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(m_1D) & \xrightarrow{\varrho_3} & H^1(m_2D) \\ \uparrow \varrho_1 & \nearrow \varrho_2 & \\ H^1(0), & & \end{array}$$

las funciones ϱ_i , que son los homomorfismos naturales entre los espacios indicados, están bien definidas y conmutan. Entonces $H^1(0/m_1D) = \ker(\varrho_1) \subset \ker(\varrho_2) = H^1(0/m_2D)$. Por lo tanto $\dim H^1(0/m_1D) \leq \dim H^1(0/m_2D)$, como se quería. □

Lema V.53. Si X es una curva algebraica, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\deg(A) - \dim L(A) \leq M$$

para todo $A \in \text{Div}(X)$.

Demostración. Sea $D = \text{div}_\infty(f)$ para alguna función $f \in \mathcal{M}(X)$. Para este tipo particular de divisor, por el lema V.52 se sabe que

$$\deg(mD) - \dim L(mD) = \dim H^1(0/mD) - 1 \leq M$$

para algún $M \in \mathbb{Z}^+$. Ahora se demuestra para un divisor arbitrario A . Por el lema V.42, existe una función meromorfa g sobre X tal que $B = A - \text{div}(g) \leq mD$. Nótese que $A \sim B$, así que, del lema V.14 y de la proposición V.22, se sabe que $\deg(A) = \deg(B)$, $L(A) \cong L(B)$ y $\dim L(A) = \dim L(B)$. Por el lema V.51,

$$\begin{aligned} \deg(A) - \dim L(A) &= \deg(B) - \dim L(B) \\ &= \deg(mD) - \dim L(mD) - \dim H^1(B/mD) \\ &\leq \deg(mD) - \dim L(mD) \\ &\leq M. \end{aligned}$$

□

Una consecuencia del lema anterior es la existencia de un divisor A_0 tal que $\deg(A_0) - \dim L(A_0)$ es maximal (de lo contrario la diferencia $\deg(A) - \dim L(A)$ no estaría acotada). Este hecho, a su vez, permite probar el siguiente lema.

Lema V.54. Sean X una curva algebraica y $A_0 \in \text{Div}(X)$ tal que $\deg(A_0) - \dim L(A_0)$ sea maximal. Entonces, $H^1(A_0) = \{0\}$.

Demostración. Si el lema no fuera verdadero, existiría $Z \in \mathcal{T}[A_0](X)$ no nulo tal que $Z \notin \text{im}(\alpha_{A_0})$. Sea $B \geq A_0$ un divisor tal que $t_B^{A_0}(Z) = 0$. La clase de equivalencia de $t_B^{A_0}(Z)$ en $H^1(B)$ es justamente 0, así que la clase de Z en $H^1(A_0)$ es el kernel $H^1(A_0/B)$. Como $Z \notin \text{im}(\alpha_{A_0})$, esta clase es distinta de 0 y $H^1(A_0/B) \neq \{0\}$. Sin embargo, por ser $\deg(A_0) - \dim L(A_0)$ maximal, se tiene

$$\dim H^1(A_0/B) = (\deg(B) - \dim L(B)) - (\deg(A_0) - \dim L(A_0)) \leq 0.$$

Entonces, $H^1(A_0/B) = \{0\}$. Esta contradicción prueba que el lema es verdadero. □

El lema anterior es el paso clave para demostrar que $H^1(D)$ tiene dimensión finita, pues conecta esta idea con el hecho de que $H(D_1/D_2)$ es de dimensión finita.

Proposición V.55. *Sean X una curva algebraica y $D \in \text{Div}(X)$. Entonces, $H^1(D)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.*

Demostración. Sea $A_0 \in \text{Div}(X)$ tal que $\deg(A_0) - \dim L(A_0)$ es maximal. Sea $D - A_0 = P - N$ con P y N divisores efectivos según la proposición V.5. Como $A_0 \leq A_0 + P$, el homomorfismo natural $\varrho_1 : H^1(A_0) \rightarrow H^1(A_0 + P)$ está bien definido y, de hecho, es sobreyectivo. Por el lema V.54, $H^1(A_0) = \{0\}$ así que $H^1(A_0 + P) = \{0\}$ también. De la misma forma, $\varrho_2 : (A_0 + P - N) \rightarrow H^1(A_0 + P) = \{0\}$ está definido y es sobreyectivo. Entonces,

$$H^1(D) = H^1(A + P - N) = \ker(\varrho_2) = H^1(A_0 + P - N/A_0 + P).$$

Como el lema V.51 asegura que $H^1(A_0 + P - N/A_0 + P)$ tiene dimensión finita, la prueba está terminada. □

VI. TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

Las herramientas para demostrar el Teorema de Riemann-Roch ya casi están completas. Por ahora, se demuestra una versión intermedia.

Teorema VI.1 (Primera forma del Teorema de Riemann-Roch). *Sea X una curva algebraica. Para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$, se tiene*

$$\dim L(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0).$$

Demostración. Sean $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ arbitrarios. Sea $D' \in \text{Div}(X)$ tal que $D_i \leq D'$ para $i = 1, 2$. Por la proposición V.55, $H^1(D_i)$ y $H^1(D')$ tienen dimensión finita, así que

$$\dim H^1(D') = \dim H^1(D_i)/H^1(D_i/D') = \dim H^1(D_i) - \dim H^1(D_i/D').$$

Usando el lema V.51 para sustituir $\dim H^1(D_i/D')$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\dim L(D_i) - \deg(D_i) - \dim H^1(D_i) = \dim L(D') - \deg(D') - \dim H^1(D').$$

Esto muestra que $\dim L(D_1) - \deg(D_1) - \dim H^1(D_1) = \dim L(D_2) - \deg(D_2) - \dim H^1(D_2)$. En particular, para $D_1 = D$ y $D_2 = 0$,

$$\dim L(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0).$$

□

Si bien esta forma nos información acerca de la dimensión de $L(D)$, todavía queda trabajo por hacer. Los espacios $H^1(D)$ miden la dificultad de encontrar un divisor de truncamiento de Laurent que surja de una función meromorfa. En cierta forma, si conocemos la estructura del espacio $L(D)$ podremos conocer la de $H^1(D)$ y viceversa, así que el problema de calcular $L(D)$ no ha variado significativamente. Aquí es donde entran en juego las 1-formas diferenciales. En la siguiente sección se encuentra una relación entre $H^1(D)$ y el espacio de formas meromorfas $I(D)$.

A. Aplicación residuo

Sea X una superficie de Riemann compacta y $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ un divisor sobre X . Dado un divisor de truncamiento de Laurent $Z \in \mathcal{T}[D](X)$, la pregunta de si existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_D(f) = Z$ puede ser abordada desde un punto de vista distinto al que se ha usado hasta

el momento. Sea $\omega \in I(-D)$; para todo $p \in X$ sean z_p una coordenada local centrada en p y $\omega_p = \left(\sum_{k=n_p}^{\infty} c_k z_p^k \right) dz_p$ la forma local de ω en términos de z_p . Se define

$$\begin{aligned} \text{Res}_\omega : \quad \mathcal{T}[D](X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} \text{Res}_0(r_p \omega_p). \end{aligned}$$

Sea ahora $f \in \mathcal{M}(X)$. Sea $f_p = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z_p^k$ la serie de Laurent de f centrada en 0 en términos de z_p . Si se toma $a_k = 0$ para $k < m$, entonces

$$\text{Res}_p(f\omega) = \text{Res}_0(f_p \omega_p) = \sum_{k=n_p}^{\infty} c_k a_{1-k}. \quad (\text{VI.1})$$

Nótese que el lado derecho de la ecuación VI.1 depende únicamente de los coeficientes a_k con $k < -n_p$. En otras palabras, $\text{Res}_\omega(\alpha_D(f)) = \sum_{p \in X} \text{Res}_p(f\omega)$. Como X es compacta, por el Teorema del Residuo (teorema IV.46), $\text{Res}_\omega(\alpha_D(f)) = 0$. Este es el criterio que se buscaba. Dado un divisor de truncamiento de Laurent $Z \in \mathcal{T}[D](X)$, una condición necesaria para la existencia de una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_D(f) = Z$ es $\text{Res}_\omega(Z) = 0$. El Teorema de Dualidad de Serre muestra que éste es, de hecho, un criterio necesario y suficiente.

Como Res_ω es 0 en $\text{im}(\alpha_D)$, se puede definir un funcional lineal

$$\begin{aligned} \text{Res}_\omega : \quad H^1(D) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ Z + \text{im}(\alpha) &\longmapsto \text{Res}_\omega(Z). \end{aligned}$$

que actúa en las clases de equivalencia de $H^1(D)$ aplicando Res_ω a cualquier representante. Se define la *aplicación residuo* por

$$\begin{aligned} \text{Res} : \quad I(-D) &\longrightarrow H^1(D)^* \\ \omega &\longmapsto \text{Res}_\omega. \end{aligned}$$

B. Dualidad de Serre

En esta sección se demuestra que la aplicación residuo es un isomorfismo de espacios vectoriales; este es el Teorema de Dualidad de Serre. Para ello, se hace una convención. Sea $\phi : \mathcal{T}[D](X) \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $\phi(Z) = 0$ para todo $Z \in \text{im}(\alpha)$. Nótese que si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{T}[D](X)$ son tales que $\overline{Z_1} = \overline{Z_2}$ en $H^1(D)$, existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $Z_1 = Z_2 + \alpha_D(f)$ y $\phi(Z_1) = \phi(Z_2) + \phi(\alpha_D(f)) = \phi(Z_2)$. Entonces, se puede pensar que ϕ es un funcional definido sobre $H^1(D)$ pues su imagen sobre una clase de equivalencia está bien definida. De la misma forma, si $\psi : H^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal, se dice que ψ está definido en $\mathcal{T}[D](X)$ cuando sea conveniente.

Recuérdese que si ω_1 y $\omega_2 \neq 0$ son formas diferenciales meromorfas, se pueden encontrar fun-

grande. Por tanto, el lema debe ser verdadero. \square

Lema VI.3. Sean X una superficie de Riemann compacta y $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ con $D_1 \leq D_2$. Supongamos que existe $\omega \in I(-D_1)$ tal que $\text{Res}_\omega : \mathcal{T}[D_1](X) \rightarrow \mathbb{C}$ está definido. Si $\ker(t_{D_2}^{D_1}) \subset \ker(\text{Res}_\omega)$ entonces $\omega \in I(-D_2)$.

Demostración. Si $\omega \notin I(-D_2)$, existe un punto $p \in X$ tal que $m_p \leq k < n_p$, donde $k = \text{ord}_p(\omega)$ y m_p y n_p son los coeficientes de p en D_1 y D_2 respectivamente. Sea $Z = z_p^{-k-1} \cdot p$. Por la elección de k , $Z \in \ker(t_{D_2}^{D_1})$, pero $\text{Res}_\omega(Z) \neq 0$. Esta contradicción muestra que $\omega \in I(-D_2)$. \square

Teorema VI.4 (Dualidad de Serre). Sea X una curva algebraica. Entonces, la aplicación residuo $\text{Res} : I(-D) \rightarrow H^1(D)^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$.

Demostración. Res es obviamente lineal; falta probar que Res es inyectiva y sobreyectiva. Supóngase que existe una 1-forma meromorfa no nula $\omega \in I(-D)$ tal que $\text{Res}(\omega)$ es el funcional 0 sobre $H^1(D)$. Es decir, $\sum_{p \in X} \text{Res}_p(r_p \omega) = 0$ para todo divisor de truncamiento de Laurent $\sum_{p \in X} r_p \in \mathcal{T}[D](X)$. Fijando $p \in X$ y una coordenada local z_p centrada en p , sea $(\sum_{n=k}^{\infty} c_n z_p^n) dz_p$ la forma local de ω en términos de z_p , con $k = \text{ord}_p(\omega)$ y $c_k \neq 0$. Nótese que $z_p^{-1-k} \cdot p \in \mathcal{T}[D](X)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}_\omega(z_p^{-1-k} \cdot p) &= \text{Res}_p \left(z_p^{-1-k} \sum_k^{\infty} c_n z_p^n dz_p \right) \\ &= c_k \neq 0, \end{aligned}$$

una contradicción. Entonces $\ker(\text{Res}) = \{0\}$ y Res es inyectiva.

Sea $\phi : H^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal, considerado como un funcional sobre $\mathcal{T}[D](X)$. Sean ω una 1-forma meromorfa no nula sobre X y $K = \text{div}(\omega)$. Elíjase un divisor $A = \sum_{p \in X} a_p \cdot p$ tal que $A \leq D$ y $A \leq K$. Sea $\phi_A = \phi \circ t_D^A : \mathcal{T}[A](X) \rightarrow \mathbb{C}$. Por el lema VI.2, existen un divisor efectivo $C = \sum_{p \in X} c_p \cdot p$ y $f_1, f_2 \in L(C)$ tales que

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_\omega \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_2)} \circ \mu_{f_2}, \quad (\text{VI.2})$$

considerados como funcionales sobre $H^1(A-C)$. Sea $Z = \sum_{p \in X} r_p \cdot p \in \mathcal{T}(X)$, con $r_p = \sum_{i=m_p}^{M_p} b_i z_p^i$. Por las observaciones de la sección A, $\text{Res}_\omega(Z)$ depende únicamente de los términos de r_p con $i < -\text{ord}_p(\omega)$. En particular, los términos de r_p con $-\text{ord}_p(\omega) \leq i \leq -a_p + c_p + \text{ord}_p(f_2)$ no inciden en Res_ω . Entonces, para todo $Z \in \mathcal{T}[A-C-\text{div}(f_2)](X)$, $\text{Res}_\omega(Z) = \text{Res}_\omega \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_2)}(Z)$. Por ello, se puede reemplazar $\text{Res}_\omega \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_2)}$ por $\text{Res}_\omega : \mathcal{T}[A-C-\text{div}(f_2)](X) \rightarrow \mathbb{C}$ en el lado derecho de la ecuación VI.2. Por un razonamiento análogo, $\text{Res}_\omega \circ \mu_{f_2}$ es igual al funcional

$\text{Res}_{f_2\omega} : \mathcal{T}[A - C](X) \rightarrow \mathbb{C}$. En pocas palabras,

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_{f_2\omega}.$$

Componiendo ambos lados de la última ecuación con μ_{1/f_1} , se obtiene

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} = \text{Res}_{f_2\omega} \circ \mu_{1/f_1} = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}, \quad (\text{VI.3})$$

viéndolos como funcionales sobre $\mathcal{T}[A - C - \text{div}(f_1)](X)$. Esta última igualdad muestra que

$$\ker(t_A^{A-C-\text{div}(f_1)}) \subset \ker(\text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}).$$

Dado que $(f_2/f_1)\omega \in I(-A + C + \text{div}(f_1))$, por el lema VI.3, realmente se tiene que $(f_2/f_1)\omega \in I(-A)$. Nótese que la restricción de $t_A^{A-C-\text{div}(f_1)}$ a $\mathcal{T}[A](X)$ es la identidad, así que la ecuación VI.3 se reduce a $\phi_A = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}$. Por definición de ϕ_A , $\phi \circ t_D^A = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}$. De nuevo se tiene que $\ker(t_D^A) \subset \ker(\text{Res}_{(f_2/f_1)\omega})$ y, por el lema VI.3, que $(f_2/f_1)\omega \in I(-D)$. Por lo tanto, ϕ es la imagen bajo Res de la forma meromorfa $(f_2/f_1)\omega \in I(-D)$, probando la sobreyectividad de la aplicación residuo. \square

Corolario VI.5. Sean X una curva algebraica y $K \in \text{KDiv}(X)$ un divisor canónico cualquiera. Para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$,

$$\dim I(-D) = \dim H^1(D) = \dim L(K - D).$$

Demostración. Sustituyendo D por $-D$ en la proposición V.27, se obtiene que $L(K - D) \cong I(-D)$ y que $\dim L(K - D) = \dim I(-D)$. Por el teorema VI.4, $I(-D) \cong H^1(D)^* \cong H^1(D)$ y $\dim I(-D) = \dim H^1(D)$. \square

C. Segunda forma del Teorema de Riemann-Roch

El Teorema de Dualidad de Serre era la última pieza que faltaba para poder demostrar el resultado principal:

Teorema VI.6 (Teorema de Riemann-Roch). Sea X una curva algebraica de género g . Para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ y todo divisor canónico $K \in \text{KDiv}(X)$, se tiene

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Demostración. Sustituyendo $D = K$ en el corolario VI.5, se obtiene $\dim H^1(K) = \dim L(0) = 1$ y con $D = 0$, $\dim H^1(0) = \dim L(K)$. Por el corolario V.18 y la primera forma del Teorema de

Riemann-Roch aplicada a $D = K$,

$$\begin{aligned} 2 \dim H^1(0) &= \dim H^1(0) + \dim L(K) \\ &= \dim H^1(K) + 1 + \deg(K) \\ &= \dim L(0) + 1 + (2g - 2) \\ &= 2g. \end{aligned}$$

Entonces $\dim H^1(0) = g$. Nuevamente, por el corolario VI.5, $\dim H^1(D) = \dim L(K - D)$. Por lo tanto, al sustituir estas relaciones en la primera forma del Teorema de Riemann-Roch se obtiene:

$$\begin{aligned} \dim L(D) - \dim H^1(D) &= \deg(D) + 1 - \dim H^1(0) \\ \dim L(D) - \dim L(K - D) &= \deg(D) + 1 - g. \end{aligned}$$

□

VII. APLICACIONES

A manera de conclusión de esta tesis, se examinan algunas consecuencias del Teorema de Riemann-Roch. Se empieza mostrando que el concepto de curva algebraica y el Teorema de Riemann-Roch son equivalentes. Específicamente, se muestra que las únicas superficies de Riemann en las que vale el Teorema de Riemann-Roch son curvas algebraicas. Como el Teorema de Riemann-Roch no es necesario para demostrar la existencia de funciones meromorfas no constantes, es posible demostrar que toda superficie de Riemann compacta es, en efecto, una curva algebraica. También se este teorema para calcular la dimensión de un espacio $I(D)$ particular. Esto inspira la definición de puntos de Weierstrass y se concluye enunciando un teorema de clasificación de superficies de Riemann.

A. Superficies de Riemann y Teorema de Riemann-Roch

Teorema VII.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta tal que la ecuación*

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g \quad (\text{VII.1})$$

vale para todo $D \in \text{Div}(X)$. Entonces, X es una curva algebraica.

Demostración. Para mostrar que X es una curva algebraica, hay que mostrar que $\mathcal{M}(X)$ separa puntos y tangentes de X . Sean $p, q \in X$, $p \neq q$. Sea $D = (g + 1) \cdot p$. Por la ecuación VII.1,

$$\begin{aligned} \dim L(D) &= \deg(D) + 1 - g + \dim L(K - D) \\ &\geq \deg(D) + 1 - g \\ &= 2. \end{aligned}$$

Entonces existe una función meromorfa $f \in L(D)$ no constante. Como X es compacta, si f fuera holomorfa sería constante así que f debe tener por lo menos un polo. Como el único polo permitido por D es p , f tiene un polo en p , pero no en q . Entonces $f(p) \neq f(q)$ y $\mathcal{M}(X)$ separa puntos de X .

Considérense ahora los divisores $D_n = n \cdot p$. Siendo K un divisor canónico, por el corolario V.18, $\deg(K) = 2g - 2$. Si $n > 2g - 2$, $\deg(K - D_n) < 0$ así que el lema V.24 implica que $L(K - D) = \{0\}$. Por la ecuación VII.1,

$$\begin{aligned} \dim L(D_n) &= \deg(D_n) + 1 - g + \dim L(K - D_n) \\ &= n + 1 - g, \end{aligned}$$

para todo $n > 2g - 2$. Entonces, $\dim L(D_{n+1}) - \dim L(D_n) = 1$ para todo $n > 2g - 2$. Por ello, existen $f_n \in L(D_n) \setminus L(D_{n-1})$ con $\text{ord}_p(f_n) = -n$, para $n > 2g - 1$. Luego, la función f_n/f_{n+1} tiene $\text{ord}_p(f_n/f_{n+1}) = 1$ y, por el lema III.40, $\text{mult}_p(f_n/f_{n+1}) = 1$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes de X . \square

El teorema VII.1 implica que la condición que una superficie de Riemann X sea una curva algebraica es imprescindible para demostrar el Teorema de Riemann-Roch. Algunos autores que demuestran la existencia de funciones meromorfas no constantes son Jost (2006) y Springer (1957). En lugar de construir estas funciones directamente, construyen primero funciones armónicas y demuestran un teorema similar al de Dualidad de Serre. Forster (1981), en cambio, toma un camino más topológico. Su trabajo se basa en espacios cubierta y haces (o *sheaves* en inglés) y deduce el Teorema de Dualidad de Serre como una consecuencia del Teorema de Riemann-Roch. Una característica común de ambas perspectivas es la necesidad de técnicas de homología o cohomología y la construcción que se utiliza en la demostración del teorema II.33. De cierta forma, se puede decir que el teorema VII.1 implica que el Teorema de Riemann-Roch requiere resultados no triviales, como la construcción de funciones meromorfas no constantes, o un camino totalmente distinto como el topológico de Forster (1981) y los haces.

B. Mapeos holomorfos y género

El propósito principal del Teorema de Riemann-Roch es calcular la dimensión de los espacios de funciones o formas diferenciales. Ya se usó para calcular la dimensión de algunos espacios $L(D)$ en la prueba del teorema VII.1. Ahora se usa para calcular la dimensión de un espacio de formas diferenciales.

Proposición VII.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g . Entonces $\dim I(0) = g$.*

Demostración. Por el corolario VI.5, $\dim I(-D) = \dim L(D + K)$. Como $L(0) \cong \mathbb{C}$, $\dim L(0) = 1$. Sustituyendo $D = 0$ y estas igualdades en el Teorema de Riemann-Roch, se obtiene

$$\dim I(0) = \dim L(0) - \deg(0) + g - 1 = g.$$

\square

La proposición anterior es útil por muchas razones. En este caso, permite demostrar que el género induce una jerarquía en las superficies de Riemann.

Teorema VII.3. *Sean X, Y superficies de Riemann compactas de géneros g' y g , respectivamente. Si existe un mapeo holomorfo $F : X \rightarrow Y$, entonces $g' \geq g$.*

Demostración. Por la proposición VII.2, existen g formas holomorfas linealmente independientes sobre Y , digamos η_1, \dots, η_g . Sea $\omega_i = F^*(\eta_i)$ el pullback de η_i , para $i = 1, \dots, g$. Elíjanse cartas locales $\phi : U \rightarrow V$ sobre X y $\psi : U' \rightarrow V'$ sobre Y , con coordenadas inducidas z y w , tales que $F(U) \subset U'$. Sean $w = h(z)$ y $f_i(w)dw$ las formas locales de F y η_i en términos de estas coordenadas. La forma local de ω_i es $f_i(h(z))h'(z)dz$.

Considérese una combinación lineal $\sum_{i=1}^g c_i \omega_i = 0$, que, reescrita en términos de coordenadas locales, es

$$\sum_{i=1}^g c_i f_i(h(z))h'(z)dz = 0.$$

Por el lema II.18, $h'(z) \neq 0$. Como $h'(z)$ es un factor común en la ecuación anterior, se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^g c_i f_i(h(z)) \right) dz = 0,$$

que equivale a

$$\sum_{i=1}^g c_i f_i(h(z)) = 0.$$

Reemplazando $w = h(z)$, esto implica que la forma local de la combinación lineal $\sum_{i=1}^g c_i \eta_i$ en términos de w es 0. Como esto vale para cualquier coordenada local w y η_1, \dots, η_g son linealmente independientes, los coeficientes c_i deben ser todos 0. Entonces, $\omega_1, \dots, \omega_g$ son linealmente independientes y $g' = \dim I(0) \geq g$, como se quería. \square

El teorema VII.3 dice que un mapeo holomorfo puede disminuir el género de una superficie de Riemann, pero no lo puede aumentar. Esto refuerza la idea de que el género clasifica a las superficies de Riemann y conecta a una superficie con aquellas de género menor.

C. Puntos de Weierstrass

Proposición VII.4. Sean X una superficie de Riemann compacta de género $g = 1$ y $p \in X$. No existe una función meromorfa f sobre X que tenga un polo simple en p y sea holomorfa en $X \setminus \{p\}$.

Demostración. Sean $D = 1 \cdot p$ y K un divisor canónico. Por el corolario V.18, $\deg(K) = 0$. Por el lema V.24, como $\deg(K - D) = -1$, $\dim L(K - D) = 0$. Por el Teorema de Riemann-Roch,

$$\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g + \dim L(K - D) = 1.$$

Nótese que $L(D)$ contiene a las funciones constantes, un espacio de dimensión 1. Por lo tanto, $L(D)$ es exactamente el espacio de funciones constantes y no puede existir la función f . \square

La proposición anterior es un ejemplo de un tipo de funciones meromorfas que no se pueden construir en una superficie de Riemann compacta. Esto se puede generalizar. Sean f_1, \dots, f_n funciones holomorfas definidas en un abierto $V \subset \mathbb{C}$. El *wronskiano* $W(f_1, \dots, f_n)$ se define como el

determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$W(f_1, \dots, f_n)$ es idénticamente 0 en V si, y solo si, f_1, \dots, f_n son linealmente dependientes sobre \mathbb{C} . Esta idea se adapta a las superficies de Riemann X de género $g > 0$. Por la proposición VII.2, sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base del espacio $I(0)$ de formas holomorfas sobre X . Se elije una coordenada local z y la forma local de ω_i se escribe como $f_i(z)dz$. Defínase el wronskiano de $\omega_1, \dots, \omega_g$ en términos de z como

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) := W(f_1, \dots, f_g).$$

Utilizando inducción sobre g y propiedades de determinantes, es posible demostrar que si w es otra coordenada local y $z = T(w)$ la función de transición, entonces

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) = (T')^N W_w(\omega_1, \dots, \omega_g),$$

donde $N = \frac{g(g+1)}{2}$. Si $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_g$ es otra base de $I(0)$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) = cW_z(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_g).$$

Gracias a estas dos propiedades, y al hecho que $T' \neq 0$ por el lema II.18, se puede definir un *punto de Weierstrass* como un punto $p \in X$ tal que el wronskiano $W(\omega_1, \dots, \omega_g)$ tiene un cero en p para alguna coordenada local z y alguna base $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $I(0)$.

Sea f una función meromorfa sobre X que tenga exactamente un polo p de orden máximo g . Springer (1957) muestra que los únicos puntos para los cuales existe tal función f son los puntos de Weierstrass. En el caso $g = 0$, por definición, la superficie X no tiene puntos de Weierstrass; por la proposición VII.4, si el género de X es 1, X no tiene puntos de Weierstrass. Para $g \geq 2$ se sabe que la cantidad de puntos de Weierstrass está entre $2g + 2$ y $(g - 1)(g + 1)$. Además, Springer (1957) y Jost (2006) utilizan las propiedades de los puntos de Weierstrass para demostrar otro teorema de clasificación de superficies de Riemann.

Teorema VII.5. *Para toda superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 0$, existe una equivalencia conforme entre X y un espacio cubierta de la esfera de Riemann con $g + 1$ hojas.*

La definición de superficie de Riemann es, al principio, muy abstracta. El poder del teorema anterior radica en que provee una forma concreta de visualizar superficies de Riemann y un vínculo entre estos objetos y la definición usual de curvas algebraicas (un espacio topológico que surge a partir de un polinomio $f(x, y) = 0$). La demostración de este teorema va más allá de los objetivos

de este trabajo y el lector interesado puede consultarla en el libro de Griffiths (1989). En todo caso, espero que estos ejemplos en particular, y la tesis en general, sirvan de motivación para los estudiantes de pregrado con interés en adentrarse en el estudio de la teoría de superficies de Riemann.

Bibliografía

- Atiyah, M. F. y I. G. MacDonald. 1969. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley. 128 páginas.
- Blute, Richard. *The Snake Lemma*. <http://aix1.uottawa.ca/~rblute/COURSE2/SnakeLemma.pdf>. [Fecha de consulta: 22/8/2016].
- Dieudonné, J. 1972. *The Historical Development of Algebraic Geometry*. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload5_library/22/Ford/Dieudonne.pdf. [Fecha de consulta: 17/3/2016].
- Doyle, P. H. y Moran, D. A. 1968. «A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated». *Inventiones Mathematicae* [Berlín]. 5(2): 160-162.
- Forster. 1981. *Lectures on Riemann Surfaces*. Traducción de Bruce Gilligan. Nueva York: Springer-Verlag. 256 páginas.
- Fulton, W. 2008. *Algebraic Curves*. 3a edición. Nueva York: Addison-Wesley. 129 páginas.
- Griffiths, P. 1989. *Introduction to Algebraic Curves*. Nueva Jersey: AMS. 225 páginas.
- Jost, J. 2006. *Compact Riemann Surfaces*. Nueva York: Springer-Verlag. 282 páginas.
- Lang, S. 2002. *Algebra*. 3a edición. Nueva York: Springer-Verlag. 914 páginas.
- Lee, J. 2011. *Introduction to Topological Manifolds*. 2a edición. Nueva York: Springer-Verlag. 433 páginas.
- Lucas de Arruda, R. 2011. *Teorema de Riemann-Roch e Aplicações*. Brasil: UNESP. 142 páginas.
- Madsen, I. y J. Tornehave. 1997. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge: Cambridge University Press. 296 páginas.
- Massey, W. S. 1977. *Algebraic Topology: An Introduction*. Nueva York: Springer-Verlag. 264 páginas.
- Miranda, R. 1995. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. American Mathematical Society. 390 páginas.
- Moise, E. 1977. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Nueva York: Springer-Verlag. 262 páginas.

Munkres, J. 1996. *Elements of Algebraic Topology*. California: Westview Press. 464 páginas.

Munkres, J. 2000. *Topology*. 2a edición. Nueva Jersey: Prentice Hall. 537 páginas.

Springer, G. 1957. *Introduction to Riemann Surfaces*. Massachusetts: Addison-Wesley. 309 páginas.

Talovikova, V. 2009. *Riemann-Roch Theorem*. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Talovikova.pdf>. [Fecha de consulta: 8/3/2016].

Tao, T. 2007. *Differential Forms and Integration*. <http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/forms.pdf>. [Fecha de consulta: 14/4/2016].

Tao, T. *There's more to mathematics than rigour and proofs*. <https://terrytao.wordpress.com/career-advice/there%E2%80%99s-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/>. [Fecha de consulta: 8/9/2016].