

**Universidad del Valle de
Guatemala**
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Algunas relaciones entre las topologías de los espacios
topológicos
y las de sus subespacios densos**

**Trabajo de graduación presentado por Jose Rigoberto
Enrique Zelada Cifuentes para optar al grado académico de
Licenciado en Matemática**

**GUATEMALA
2015**

**ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS TOPOLOGÍAS
DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS
Y LAS DE SUS SUBESPACIOS DENSOS**

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS TOPOLOGÍAS
DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS
Y LAS DE SUS SUBESPACIOS DENSOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR
JOSE RIGOBERTO ENRIQUE ZELADA CIFUENTES
PARA OPTAR AL GRADO
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

GUATEMALA
2015

Vo.Bo.:



Dr. Pedro Poitevin

Tribunal Examinador:



Lic. Ricardo Barrientos



Dr. Antonio Gillot



MSc. Alan Reyes

Fecha de aprobación:

Guatemala, 23 de enero de 2015

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que de algún modo se vieron involucradas en la elaboración de este trabajo, ya sea que pueda explicar los aspectos en que colaboraron o que no pueda hacerlo por lo extenso de su participación.

Primero, quiero agradecer a todas las personas cuya participación en este trabajo puedo explicar. Agradezco al Dr. Pedro Poitevin por su colaboración como asesor principal de este trabajo, sin su apoyo habría sido imposible presentar cualquiera de mis ideas matemáticas. También quisiera agradecer al Dr. Gillot, ya que su disposición a conversar sobre las distintas áreas de la matemática me permitió escoger las ideas básicas para este trabajo. Agradezco a Alan Reyes, quien es responsable en buena parte de que la redacción de este trabajo no sea tan mala. Y a mi primo Carlos Zelada, gracias a quien pude conocer al Dr. Gillot.

Agradezco a todos mis catedráticos, en especial a Dorval, Ricardo y el Dr. González; quienes son las personas que me brindaron la oportunidad de conocer las matemáticas; a Irene Aguilar, quien siempre me comunicó buenas noticias; a la Licda. de Nieves quien me mostró por primera vez un libro de teoría de conjuntos; al Lic. Mata, de quien aprendí a hacer pruebas por inducción; a Luis Mijangos, compañero y catedrático exigente, y al Lic. Enrique Mencos, quien goza de mi amistad y absoluto respeto.

Ahora prosigo a agradecer a todas aquellas personas que por lo extenso de su participación no puedo explicar con claridad cómo contribuyeron a este trabajo. Entre estas personas destacan Dios, mis padres, mis hermanos y familiares y demás amigos, en particular Chelo quien siempre tuvo la paciencia de escuchar cantidades infinitas de matemática.

Finalmente sólo me queda agradecer a la Universidad del Valle de Guatemala y a todas sus autoridades, incluyendo a M.A. Nancy Zurita, por haber facilitado mi

aprendizaje de la matemática y haber provisto los insumos necesarios para obtener un grado en esta forma de razonamiento.

Índice general

Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Definiciones, notaciones y propiedades básicas	3
3. Los subespacios densos de X , C , ϕ y σ_D	11
4. Una caracterización de recuperabilidad	15
5. Una construcción útil	19
6. \widetilde{T}_X y la recuperabilidad de X a partir de cada uno de sus subespacios densos	23
7. Conclusiones y recomendaciones	25
7.1. Extensiones topológicas	25
7.2. Compactificaciones	26
7.3. Topología sin puntos	26
8 Bibliografía	29

Resumen

El propósito de este trabajo es investigar aquellas situaciones en que la información sobre un espacio topológico X puede deducirse de la topología de algún subespacio denso de X . Para lograr este objetivo se introduce el concepto de recuperabilidad y se estudia la estructura topológica que un espacio topológico hereda a sus subespacios densos.

El concepto de recuperabilidad intenta describir aquellas situaciones en que, a partir de la topología de un subespacio de un espacio topológico X , se puede deducir la topología de X . Dentro de los resultados presentados en este trabajo y relacionados con el concepto de recuperabilidad, destacan distintas caracterizaciones de cuándo el espacio topológico X es recuperable a partir de su subespacio D . En el capítulo final se incluye una caracterización de algunos espacios topológicos recuperables a partir de cada uno de sus subespacios densos.

Además del concepto de recuperabilidad, en este trabajo también se investiga el concepto de densidad. Uno de los resultados relevantes en este trabajo caracteriza el concepto de densidad en términos de una relación entre la estructura topológica del espacio X y el subespacio denso D . Es de resaltar que siempre que X sea recuperable a partir de D , D es denso en X .

Finalmente, es importante señalar que en este trabajo se propone un método para la construcción de la topología de X a partir de la topología de un espacio topológico D , de tal forma que X sea recuperable a partir de D . De hecho se muestra que, bajo ciertas condiciones, cada espacio X recuperable a partir de D puede reconstruirse mediante este método. Así, en este trabajo se señalan algunas de las propiedades que permiten la existencia de procesos como los métodos de compactificación de espacios topológicos o los métodos de completación de espacios métricos.

1 Introducción

Al asistir a cualquier curso introductorio a la Topología General los estudiantes se suelen encontrar con las siguientes preguntas: ¿Qué tanto se *parece* un espacio topológico a uno de sus subespacios densos?, ¿Existe *evidencia* que indique la existencia de los puntos de un espacio topológico X en cada uno de sus subespacios densos?, y ¿Qué tanto se deben parecer X y alguno de sus subespacios densos, D , para que los puntos de X dejen algún *rastro inequívoco* en D ?

Como muchas otras cosas en la vida, sería de esperar que el *rastro* de los puntos de X en D pueda recibir muchas interpretaciones. Sin embargo, con el afán de reducir la *arbitrariedad* en las posibles interpretaciones del *rastro* de X en D , se introduce en el Capítulo 2 de este trabajo, el concepto de *recuperabilidad de X a partir de D* . Este nuevo concepto intenta describir aquellos casos en que X puede deducirse del *rastro* de X en D en una forma considerada como *poco arbitraria*.

Sobre esta *deducción poco arbitraria de X a partir de D* hace falta señalar que no todos los subespacios densos D de un espacio topológico X poseen suficiente información sobre X como para que X sea *recuperable a partir de D* . Por tanto, hace falta conocer: a) La información sobre X que posee cualquier subespacio D denso en X (Ésto se estudia en el Capítulo 3); y b) La información adicional sobre X que debe poseer D para que X sea *recuperable a partir de D* (Ésto se estudia en el Capítulo 4).

En el Capítulo 5 se establece un método para la reconstrucción de X a partir de un subespacio D del que X es *recuperable* y que posee ciertas características. Este método deja en evidencia la debilidad de la definición de X es *recuperable a partir de D* para evitar la arbitrariedad: Existe más de un espacio topológico que se puede deducir de la topología de D , de tal forma que X sea *recuperable a partir de D* .

En el Capítulo 6 se presentan teoremas que permiten al lector reconocer aquellos

espacios que son recuperables a partir de cada uno de sus subespacios densos. Algunos de estos espacios *recuperables* son los espacios métricos completos, los espacios regulares y los espacios Hausdorff compactos.

En el Capítulo 7 se realiza una breve revisión de bibliografía en la que se pretenden dos cosas: a) Mostrar al lector algunos de los enfoques que existen para estudiar la estructura topológica de un espacio topológico y b) Mostrar al lector algunos de los métodos de selección arbitraria de puntos y topologías que existen para extender un espacio topológico D a un espacio topológico X , de tal forma que X sea *recuperable a partir de D* .

2 Definiciones, notaciones y propiedades básicas

En este capítulo se realizará una breve descripción de las notaciones y los conceptos básicos utilizados en este trabajo. Se incluyen algunos resultados conocidos relacionados con estos conceptos.

A lo largo de este trabajo se denota a una topología contenida en el conjunto potencia de un conjunto X (con X como elemento) como T_X y se usa la expresión “espacio topológico X ” para referirse al par (X, T_X) y “espacio topológico X dotado de la topología T_X ” cuando pueda existir ambigüedad. Además se denota con \emptyset al conjunto vacío.

Definición 2.1. Para $x \in X$ y $D \subseteq X$, X espacio topológico con topología T_X se define:

1. La topología relativa de D al espacio topológico X como $T_D = \{U \cap D \mid U \in T_X\}$. Al conjunto D dotado de esta topología se le llama subespacio de X , y a menos que se especifique de otra manera, se debe asumir que la topología de cualquier subconjunto $D \subseteq X$ es la topología relativa a X de D .

2. La cerradura de D como $\overline{D}^{T_X} = \bigcap \{X \setminus U \mid U \cap D = \emptyset \text{ y } U \in T_X\}$. La asignación $D \mapsto \overline{D}^{T_X}$ se denomina *operador cerradura respecto a T_X* o simplemente *operador cerradura* cuando no existe riesgo de confusión (en este caso se denota \overline{D}).

3. Es importante resaltar que un operador $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que para $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

- a) $C(\emptyset) = \emptyset$,
- b) $A \subseteq C(A)$,
- c) $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$,

d) $C(C(A)) = C(A)$;

induce una topología $T_C = \{X \setminus C(A) | A \in \mathcal{P}(X)\}$. Obsérvese que $T_C = T_X$ si y solo si $C(A) = \overline{A}$ para cada $A \subseteq X$.

4. El interior de D como $D^{\circ T_X} = \bigcup \{U \in T_X | U \subseteq D\}$. La asignación $D \mapsto D^{\circ T_X}$ se denomina *operador interior respecto a T_X* o simplemente *operador interior* cuando no existe riesgo de confusión (en este caso se denota D°).

5. Se define \widetilde{D} como $(\overline{D})^\circ$ en donde los operadores cerradura e interior son respecto a T_X (De existir riesgo de confusión, se escribe $\widetilde{D^{T_X}}$).

6. Se define $U(x)$ como $\{U \in T_X | x \in U\}$, el conjunto de todas las vecindades abiertas de x en el espacio X .

7. Se define $U_D(x)$ como $\{U \cap D | U \in U(x)\}$. En el caso que existan dos espacios topológicos X y Y tales que D es subespacio de ambos, se denotará $U_{D \cap X}(x)$ a $\{U \cap D | U \in U(x) \subseteq T_X\}$; y $U_{D \cap Y}(y)$ a $\{U \cap D | U \in U(y) \subseteq T_Y\}$, para $x \in X$ y $y \in Y$.

8. Se define $\widetilde{U_D(x)}$ como $\{\widetilde{U^{T_X}} \cap D | U \in U(x)\}$. En el caso que $D = X$, se escribe $\widetilde{U(x)}$.

9. Para $U \in T_X$, se define $[U] = \{V \in T_X | \overline{V^{T_X}} = \overline{U^{T_X}}\}$. Nótese que para $U, V \in T_X$; si $[U] \cap [V] \neq \emptyset$, entonces $[U] = [V]$ y que $U \in [U]$.

10. Se define Γ como $\{[U] | U \in T_X\}$. Ya que $\bigcup \Gamma = T_X$, se tiene que Γ es una partición de T_X .

11. Se define C como $\{f : \Gamma \rightarrow T_X | \forall \gamma \in \Gamma (f(\gamma) \in \gamma)\}$. Nótese que la aplicación $\phi : \Gamma \rightarrow T_X$ tal que $\phi([U]) = \widetilde{U^{T_X}}$ es elemento de C , y por tanto $C \neq \emptyset$.

12. Se define $\sigma_D : T_X \rightarrow T_D$ de forma tal que $\sigma_D(U) = U \cap D$ para cada $U \in T_X$.

13. Se dice que D es denso en X si $\overline{D^{T_X}} = X$.

14. Se define $\widetilde{T_D}$ como $\{\widetilde{U^{T_D}} | U \in T_D\}$.

15. Sea $F \subseteq T_X$, se dice que F es un filtro (o filtro abierto) si:

a) $\emptyset \notin F$,

- b) Para cada $V \in T_X$, si existe $U \in F$ tal que $U \subseteq V$, entonces $V \in F$,
- c) Para todos los $U, V \in F$, $U \cap V \in F$,
- d) $X \in F$.

Claramente el inciso d) asegura que si F es un filtro, entonces $F \neq \emptyset$.

16. Sea Y un conjunto. Una base β es un subconjunto de $\mathcal{P}(Y)$ tal que:

- a) $\emptyset \in \beta$,
- b) si $A, B \in \beta$, entonces $A \cap B \in \beta$,
- c) $\bigcup\{A \in \beta\} = Y$.

17. Es un hecho que $T_\beta = \{\bigcup b \mid b \subseteq \beta\}$ es una topología sobre Y . Así si $Y = X$ y $T_X = T_\beta$ se dirá que β es base de T_X , o simplemente que β es base de X si no existe riesgo de confusión.

18. Es importante notar que si $X = Y$, entonces $T_X = T_\beta$ si y solo si se cumple que $\forall U \in T_X \forall x \in U \exists V \in \beta$ tal que $x \in V \subseteq U$ y $\beta \subseteq T_X$. Además debe notarse que T_β es la topología menos fina que contiene a β .

19. Si β es base de T_D , se define $U_\beta(x) = \{U \cap D \in \beta \mid U \in U(x)\}$. En donde T_D es la topología de D relativa a X .

A continuación se presentan algunos resultados básicos de topología:

Lema 2.2. Sea X espacio topológico y D subconjunto de X , entonces $\forall K \subseteq D (\overline{K}^{T_D} = \overline{K}^{T_X} \cap D)$.

Demostración. Sea X espacio topológico y D subconjunto de X . Entonces $\forall U \in T_D \exists V \in T_X (U = V \cap D)$, así $\overline{K}^{T_D} = \bigcap \{D \setminus U \mid U \in T_D \text{ y } U \cap K = \emptyset\} = \bigcap \{(D \cap X) \setminus (U \cap D) \mid U \in T_X \text{ y } K \cap (U \cap D) = \emptyset\} = \bigcap \{D \cap (X \setminus U) \mid U \in T_X \text{ y } U \cap K = \emptyset\} = \overline{K}^{T_X} \cap D$. \square

Lema 2.3. Sea X espacio topológico, $x \in X$ y $K \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{K}$ si y solo si $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y) \mid y \in K\}$.

Demostración. Por vacuidad, el resultado vale para $K = \emptyset$. Considérese $K \neq \emptyset$. Así, si x esta en la cerradura de K , cada abierto U tal que $x \in U$ cumple que $\exists y \in K(\{y\} \subseteq U \cap K)$. Por tanto $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y)|y \in K\}$. Por otra parte si $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y)|y \in K\}$, entonces cada abierto de x es abierto de algún elemento de K y por tanto x es elemento de la cerradura de K . \square

Lema 2.4. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces $\forall K \subseteq X(f(\overline{K^{T_X}}) = \overline{f(K)^{T_Y}})$. Es decir, el operador cerradura Cl_X que genera a T_X y el operador cerradura Cl_Y que genera a T_Y , se relacionan de la siguiente manera: $f(Cl_X(A)) = Cl_Y(f(A))$.

Demostración. Sea $K \subseteq X$; debido a que f es continua se tiene que $f(\overline{K^{T_X}}) \subseteq \overline{f(K)^{T_Y}}$. Y debido a que f^{-1} es continua, se tiene que $\overline{K^{T_X}} = \overline{f^{-1}(f(K))^{T_X}} \supseteq f^{-1}(\overline{f(K)^{T_Y}})$, de modo que al aplicar f de ambos lados de la contención se obtiene $f(\overline{K^{T_X}}) \supseteq \overline{f(K)^{T_Y}}$. Por tanto, $f(\overline{K^{T_X}}) = \overline{f(K)^{T_Y}}$. \square

Lema 2.5. Sea $D \subseteq X$, (D, T_Δ) y (X, T_X) espacios topológicos, y sea $i : D \rightarrow X$ tal que i es continua e $i(d) = d$ para cada $d \in D$. Además supongase que $\forall V \in T_\Delta \exists U \in T_X$ tal que $i^{-1}(U) = V$. Entonces D es subespacio de X .

Demostración. A probar que $T_\Delta = \{U \cap D | U \in T_X\}$. Para esto considérense $V \in T_\Delta$, entonces existe $U \in T_X$ tal que $V = i^{-1}(U)$, de modo que $V = \{d \in D | i(d) \in U\} = \{d \in X | d \in U \cap D\} = U \cap D$. Ésto muestra que $T_\Delta \subseteq \{U \cap D | U \in T_X\}$. Por otra parte, sea $U \in T_X$, entonces $i^{-1}(U) = V \in T_\Delta$; y como se tiene que $V = \{d \in D | i(d) \in U\} = U \cap D$, se concluye que $T_\Delta \supseteq \{U \cap D | U \in T_X\}$; lo que muestra que $T_\Delta = \{U \cap D | U \in T_X\}$. \square

Observación. Es importante notar que las condiciones suficientes del Lema 2.5, son también necesarias. Ésto muestra la gran diferencia que existe entre la expresión $D \subseteq X$ y D es subespacio de X .

Lema 2.6. Para todo $U \in T_X$ sea $X \setminus \overline{U} = V$. Entonces $V = \tilde{V}$.

Demostración. Para $W, U \in T_X$, se tiene que si $W \subseteq X \setminus \overline{U}$, entonces $W \subseteq X \setminus U$ ya que $X \setminus \overline{U} \subseteq X \setminus U$. Por otra parte, si $W \subseteq X \setminus U$ entonces para cada $x \in W$ se tiene

que $x \notin \bar{U}$, lo que muestra que $W \subseteq X \setminus \bar{U}$. Esto establece que $W \subseteq X \setminus \bar{U} \iff W \subseteq X \setminus U$.

Así, como $X \setminus U$ es cerrado y $V = X \setminus \bar{U} \subseteq X \setminus U$, se tiene que $\overline{X \setminus \bar{U}} \subseteq X \setminus U$. Por tanto, si $W \subseteq \bar{V}$, entonces $W \subseteq X \setminus U$. Pero $W \subseteq X \setminus \bar{U} = V \iff W \subseteq X \setminus U$, de modo que $W \subseteq V$. Así como $V \subseteq \bar{V}$, $\tilde{V} = \bigcup\{W \in T_X | W \subseteq \bar{V}\} = \bigcup\{W \in T_X | W \subseteq V\} = V$; lo que muestra el resultado. \square

Lema 2.7. *Sea X espacio topológico, $V \in \widetilde{T}_X$ y $U = X \setminus \bar{V}$. Entonces $\bar{U} = X \setminus V$.*

Demostración. Si $\bar{V} \setminus V = \emptyset$ entonces U es cerrado al ser el complemento de un abierto y por tanto $\bar{U} = U = X \setminus \bar{V} = X \setminus V$. Por otra parte, si $\bar{V} \setminus V \neq \emptyset$, por ser $V \in \widetilde{T}_X$ se tiene que para cada $x \in \bar{V} \setminus V$, para cada $W \in U(x)$, $W \not\subseteq \bar{V}$. Así, al notar que $\bar{U} \cup \bar{V} = X$ se obtiene que $\forall x \in \bar{V} \setminus V \forall W \in U(x) (W \cap \bar{U} \neq \emptyset)$, de modo que $\forall x \in \bar{V} \setminus V (x \in \bar{\bar{U}} = \bar{U})$, lo que a su vez hace posible concluir que $\bar{U} \cup V = X$. Finalmente, como $V \cap \bar{U} = \emptyset$, se obtiene que $X \setminus V = (\bar{U} \cup V) \setminus V = \bar{U}$, con lo que se demuestra el lema. \square

Lema 2.8. *Para cualesquiera $U, V \in T_X$, sea $W = \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Entonces $W = \widetilde{W}$.*

Demostración. Sean $T, U, V \in T_X$ y $W = \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Si $T \subseteq \overline{\tilde{U} \cap \tilde{V}}$, entonces $T \subseteq \bar{U} \cap \bar{V}$. Ésto implica que $T \subseteq \bar{U}$ y por tanto, que $T \subseteq \tilde{U}$. De forma análoga, $T \subseteq \tilde{V}$. Por tanto, $T \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V} = W$. Lo que muestra que $\widetilde{W} \subseteq W$. Además, como por definición $W \subseteq \widetilde{W}$, se deduce que $W = \widetilde{W}$. \square

Lema 2.9. *Sea X espacio topológico y D subespacio denso de X . Entonces para cada $x \in X$ vale $U_D(x)$ es un filtro en T_D .*

Demostración. Considérense $A, B \in T_D$; $U, V \in T_X$ tales que $A = U \cap D$ y $B = V \cap D$; $x \in X$ y $U \in U(x)$. Nótese que para $x \in X$ se tiene que: 1) Como $x \notin \emptyset$ y D es denso en X , entonces $\emptyset \notin U_D(x)$. 2) Recordando que $A \in U_D(x)$, si $A \subseteq B$, entonces $x \in U \cup V$ y por tanto $(U \cup V) \cap D = B \in U_D(x)$. 3) Si $A, B \in U_D(x)$, sin pérdida de generalidad supóngase que $V \in U(x)$. Entonces $x \in V$ y $x \in U$, lo que implica que $U \cap V \in U(x)$ y por tanto, $A \cap B \in U_D(x)$. 4) Por definición $x \in X$ y $X \in T_X$, por tanto $X \cap D = D \in U_D(x)$. \square

Lema 2.10. *Sea β base de T_X . Para cada $x \in X$ y para cada $K \subseteq X$ vale que $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y) | y \in K\}$ si y solo si $U_\beta(x) \subseteq \bigcup \{U_\beta(y) | y \in K\}$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $K \subseteq X$. Es claro que $U_\beta(z) = U(z) \cap \beta$ para $z \in X$. Por tanto, si $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y) | y \in K\}$, entonces $U_\beta(x) \subseteq \bigcup \{U_\beta(y) | y \in K\}$ por propiedades de la intersección de conjuntos. Por otra parte, supóngase que $U_\beta(x) \subseteq \bigcup \{U_\beta(y) | y \in K\}$, y sea $U \in U(x)$. Como β es base, existe $V \in \beta$, tal que $V \subseteq U$ y $x \in V$, de modo que $V \in U_\beta(x) \subseteq \bigcup \{U_\beta(y) | y \in K\}$. Ésto implica que existe $y \in K$ tal que $V \in U_\beta(y) \subseteq U(y)$. Finalmente, como $U(y)$ es filtro, $U \in U(y) \subseteq \bigcup \{U(y) | y \in K\}$; con lo que se demuestra el lema. \square

Para concluir el capítulo se introduce el concepto de recuperabilidad, que será uno de los conceptos más estudiados en este trabajo.

Definición 2.11. Sea X espacio topológico y D un subconjunto no vacío de X . Se dice que X es recuperable a partir de D si y solo si $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \in \overline{K^{Tx}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\} \cup \{\emptyset\})$.

El concepto de recuperabilidad sintetiza aquellas situaciones en que la topología de un subespacio topológico es suficiente para describir a la topología del espacio que lo contiene. Es importante notar la gran similitud entre el hecho de que X sea recuperable a partir de D y el hecho de que para $K \subseteq X$, $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y) | y \in K\}$.

Los siguientes ejemplos pretenden familiarizar al lector con el concepto de recuperabilidad y mostrar la independencia de este concepto del hecho de que un espacio topológico sea Hausdorff, en particular el siguiente ejemplo muestra que no todo espacio topológico Hausdorff es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos.

Ejemplo. Considérese el conjunto $\mathbb{I} = [0, 1]$, $\mathcal{N} = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, α la topología usual de \mathbb{I} y $\beta = \{U \setminus \mathcal{N} | U \in \alpha\}$. Sea T_X la topología menos fina que contiene a

$\alpha \cup \beta$ e \mathcal{I} el conjunto de números irracionales contenidos en \mathbb{I} . Se observa que \mathcal{I} es denso en (\mathbb{I}, T_X) , que (\mathbb{I}, T_X) es Hausdorff. y que \mathcal{N} es cerrado en (\mathbb{I}, T_X) . Además, $U_{\mathcal{I}}(0) \subseteq \bigcup \{U_{\mathcal{I}}(y) | y \in \mathcal{N}\}$; lo que muestra que \mathbb{I} no es recuperable a partir de \mathcal{I} .

Por otra parte, el siguiente ejemplo muestra que un espacio topológico puede ser recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos, sin que el espacio topológico sea Hausdorff.

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2\}$ espacio topológico dotado de la topología $T_X = \{\emptyset, X\}$. Se nota que (X, T_X) no es Hausdorff (de hecho no es T_0) y que los únicos cerrados de X con esta topología son \emptyset y X . Así, sin importar si $a = 1$ o $a = 2$, se observa que para $x \in X$, $x \in \emptyset$ si y solo si $\{a\} = U_{\{a\}}(x) \subseteq \emptyset \cup \{\emptyset\}$ y que $x \in X$ si y solo si $\{a\} = U_{\{a\}}(x) \subseteq \bigcup \{U_{\{a\}}(x) | x \in X\} \cup \{\emptyset\} = \{a\} \cup \{\emptyset\}$.

Hasta este punto se ha mostrado que la densidad de un subespacio D en un espacio topológico X no garantiza la recuperabilidad de X a partir de D . El siguiente teorema muestra que siempre que X sea recuperable a partir de D , D es denso en X .

Teorema 2.12. *Sea X espacio topológico y D subespacio no vacío de X . Entonces X es recuperable a partir de D si y solo si D es denso en X y para cada K subconjunto de X y cada $x \in X$ vale que $x \in \overline{K^{T_X}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$.*

Demostración. \implies) Tomando $K = D$ en la definición de recuperabilidad, y recordando que para cada $x \in X$, $U_D(x) \subseteq T_D$; se obtiene para cada $x \in X$ que $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(d) | d \in D\} \cup \{\emptyset\} = T_D$, por tanto $\overline{D^{T_X}} = X$. Así para cada $x \in X$, para cada $U \in U(x)$ se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$ y por tanto vale la siguiente sucesión lógica para $K \subseteq X$: $x \in \overline{K^{T_X}}$ si y solo si $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\} \cup \{\emptyset\} = \mathcal{K}$ si y solo si $U_D(x) = U_D(x) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ si y solo si $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$. Por tanto se establece que $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \in \overline{K^{T_X}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\})$.

\impliedby) De igual forma, si D es denso en X , $K \subseteq X$ y $x \in X$; se obtiene la siguiente sucesión lógica: $x \in \overline{K^{T_X}}$ si y solo si $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$ si y solo si $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\} \cup \{\emptyset\}$; con lo que se demuestra el teorema. \square

El Teorema 2.12 muestra que siempre que D sea denso en X , es equivalente el que X sea recuperable a partir de D y el que para cada K subconjunto de X y cada $x \in X$, $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $U_D(x) \subseteq \bigcup\{U_D(y)|y \in K\}$. Claramente este enunciado se asemeja más a $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $U(x) \subseteq \bigcup\{U(y)|y \in K\}$ que la definición original de X es recuperable a partir de D al omitir la mención de $\{\emptyset\}$. Así, para mostrar la necesidad de mencionar $\{\emptyset\}$ en la definición de recuperabilidad, se concluye esta sección con el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Sea D subconjunto de X tal que D no es denso en X . Entonces para cada $K \subseteq X$ y cada $x \in X$ se tiene que $x \in \overline{K^{Tx}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup\{U_D(y)|y \in K\}$ si y solo si $\forall x \in X \setminus \overline{D}(U_D(x) = T_D$ y $\overline{\{x\}} = X)$ y $\overline{D^{Tx}}$ es recuperable a partir de D .*

Demostración. \implies) Si $x \in X \setminus \overline{D}$ entonces existe $U \in U(x)$ tal que $U \cap D = \emptyset$, por tanto para cada $V \in T_X$, $V \cap D \in U_D(x)$ ya que $(V \cup U) \cap D = V \cap D$. Así se concluye que $\forall x \in X \setminus \overline{D}(U_D(x) = T_D$ y $\overline{\{x\}} = X)$. Por otra parte, como D es denso en $\overline{D^{Tx}} = A$ y para $K \subseteq A$ vale que $\overline{K^{TA}} = \overline{K^{Tx}}$, se deduce del Teorema 2.12 que $\overline{D^{Tx}}$ es recuperable a partir de D .

\impliedby) Se observan dos casos para $K \subseteq X$: 1) Si $K \subseteq \overline{D} = A$ por el teorema anterior se tiene que $x \in \overline{K^{Tx}} = \overline{K^{TA}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup\{U_D(y)|y \in K\}$. 2) Si $K \not\subseteq \overline{D}$, entonces existe $y \in K \setminus \overline{D}$ tal que $U_D(y) = T_D$ y $\overline{\{y\}} = X$, de modo que en este caso también se cumple que $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \in \overline{K^{Tx}} = X \iff U_D(x) \subseteq \bigcup\{U_D(y)|y \in K\} = T_D)$; con lo que se demuestra el teorema. \square

3 Los subespacios densos de X , C ,

ϕ y σ_D

En este capítulo se exploran algunas de las relaciones existentes entre la topología de X y la topología de alguno de sus subespacios densos D . A lo largo del capítulo se ilustrará la relación que existe entre $\overline{U^{T_X}}$ y $\overline{U \cap D^{T_D}}$ para cada abierto U de X ; algunas de las propiedades que se mencionan en este capítulo son bien conocidas, mientras que otras no se presentan en la literatura utilizada para realizar este trabajo, tal es el caso del Teorema 3.2.

El primer resultado que se presenta en el capítulo es un lema conocido que relaciona la cerradura respecto a T_X de los abiertos de T_D y la cerradura respecto a T_X de los abiertos de T_X .

Lema 3.1. *Sea X espacio topológico y D un subconjunto no vacío denso en X , Entonces para cada $U \in T_X$, $\overline{U \cap D} = \overline{U}$.*

Demostración. Como D es denso en X , $\forall U, V \in T_X \setminus \{\emptyset\}$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, lo que implica que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$, debido a que $U \cap V$ es abierto. Por tanto, si $x \in X$ se deduce que si $\forall V \in U(x)(V \cap U \neq \emptyset)$, entonces $\forall V \in U(x)((V \cap U) \cap D \neq \emptyset)$. Lo que demuestra que si $x \in \overline{U}$, entonces $x \in \overline{U \cap D}$. Así se puede concluir que $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap D} \subseteq \overline{U \cap D} = \overline{U}$. Lo que demuestra el lema para $U \neq \emptyset$. El resultado es claro para $U = \emptyset$ ya que $\overline{\emptyset \cap D} \subseteq \overline{\emptyset} = \emptyset$. \square

Así, por el lema anterior se puede observar la existencia de un vínculo entre la topología de X y la topología de D , cuando D es denso en X . Una pregunta natural es saber si existe alguna relación entre la cerradura respecto a T_X de los abiertos de X y la cerradura respecto a T_D de los abiertos de D que garantice la densidad de D en X . Afortunadamente la respuesta a esta pregunta es afirmativa y se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes para X espacio topológico y D subconjunto de X :*

1. D es denso en X .
2. $\forall U, V \in T_X$ vale que $\overline{U^{T_X}} \subseteq \overline{V^{T_X}}$ si y solo si $\overline{(U \cap D)^{T_D}} \subseteq \overline{(V \cap D)^{T_D}}$.
3. $\forall f \in C$ la composición $\sigma_D \circ f : \Gamma \rightarrow T_D$ es inyectiva, donde $\sigma_D : T_X \rightarrow T_D$ es tal que $\sigma_D(U) = U \cap D$ y $f \in C$ si y solo si $f(\gamma) \in \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (Ver Definición 2.1; incisos 10, 11 y 12).

Demostración. 1 \implies 2) Sean $U, V \in T_X$. Como $\overline{D^{T_X}} = X$, si $\overline{(U \cap D)^{T_X}} = \overline{U^{T_X}} \subseteq \overline{V^{T_X}} = \overline{(V \cap D)^{T_X}}$, entonces $\overline{(U \cap D)^{T_D}} = \overline{(U \cap D)^{T_X}} \cap D \subseteq \overline{(V \cap D)^{T_X}} \cap D = \overline{(V \cap D)^{T_D}}$. Por otro lado, notando que para $W \in T_X$, $\overline{W^{T_X}} = \overline{(W \cap D)^{T_X}} \subseteq \overline{(W^{T_X} \cap D)^{T_X}} \subseteq \overline{W^{T_X}}$; si $\overline{(U \cap D)^{T_X}} \cap D = \overline{(U \cap D)^{T_D}} \subseteq \overline{(V \cap D)^{T_D}} = \overline{(V \cap D)^{T_X}} \cap D$, se obtiene que $\overline{U^{T_X}} = \overline{(\overline{(U \cap D)^{T_X}} \cap D)^{T_X}} \subseteq \overline{(\overline{(V \cap D)^{T_X}} \cap D)^{T_X}} = \overline{V^{T_X}}$; lo que demuestra el enunciado 2.

2 \implies 3) Sean $U, V \in T_X$, entonces por hipótesis si $U \cap D = V \cap D$, entonces $\overline{(U \cap D)^{T_D}} = \overline{(V \cap D)^{T_D}}$ implica que $\overline{U^{T_X}} = \overline{V^{T_X}}$; de modo que para cada $f \in C$ se tiene que $\sigma_D \circ f$ es inyectiva.

3 \implies 1) Si D no es denso en X , entonces $U = X \setminus \overline{D} \neq \emptyset$ es un elemento de la topología de X . Así, $f : \Gamma \rightarrow T_X$ tal que $f([V]) = \begin{cases} \tilde{V}, & \text{si } U \notin [V]; \\ U, & \text{si } U \in [V]; \end{cases}$ es elemento de C y $\sigma_D(f([\emptyset])) = \sigma_D(\emptyset) = \emptyset = U \cap D = \sigma_D(f([U]))$, mostrando que $\sigma_D \circ f$ no es inyectiva. \square

El teorema anterior indica la existencia de una biyección entre la cerradura respecto a T_X de los abiertos de X y la cerradura respecto a T_D de los abiertos de D . Es de notar que esta biyección preserva la relación de la contención. Aún así sería deseable poder asegurar la existencia de una biyección que preserve la relación de la contención entre la topología de X y la topología de D o al menos entre subconjuntos de ambas topologías. El Lema 3.3 y el Corolario 3.4, a continuación, ayudan a definir esta biyección.

Lema 3.3. *Sea X espacio topológico y $D \subseteq X = \overline{D}$. Entonces $\forall K \subseteq D(\widetilde{K^{T_D}} =$*

$\widetilde{K^{T_X} \cap D}$).

Demostración. Sea $U \in T_X$; si $U \cap D \subseteq \overline{K^{T_D}}$, entonces $\overline{K^{T_X}} \supseteq \overline{U \cap D^{T_X}} = \overline{U^{T_X}} \supseteq U$, lo que implica $U \subseteq \overline{K^{T_X}}$. Además, como $U \subseteq \overline{K^{T_X}}$ implica que $U \cap D \subseteq \overline{K^{T_X}} \cap D = \overline{K^{T_D}}$, se tiene que $U \cap D \subseteq \bigcup\{V \in T_D \mid V \subseteq \overline{K^{T_D}}\} = \widetilde{K^{T_D}}$ si y solo si $U \subseteq \bigcup\{V \in T_X \mid V \subseteq \overline{K^{T_X}}\} = \widetilde{K^{T_X}}$.

Así, por la definición de T_D para cada $K \subseteq D$ existe $W \in T_X$ tal que $\widetilde{K^{T_D}} = W \cap D$, y se tiene que $W \subseteq \widetilde{K^{T_X}}$, conforme a la equivalencia deducida en el párrafo anterior. Por otra parte $\widetilde{K^{T_X}} \subseteq \overline{K^{T_X}}$, implicando que $\widetilde{K^{T_X}} \cap D \subseteq \overline{K^{T_D}}$. Por tanto se establece que $\widetilde{K^{T_D}} = W \cap D \subseteq \widetilde{K^{T_X}} \cap D \subseteq \overline{K^{T_D}}$, demostrando el lema. \square

Corolario 3.4. *Sea X espacio topológico y $D \subseteq X = \overline{D^{T_X}}$. Entonces la función $\delta_D : \widetilde{T_X} \rightarrow \widetilde{T_D}$ tal que $\delta_D(U) = \sigma_D(\phi([U])) = U \cap D$ es biyectiva.*

Demostración. Primero, nótese que el contradominio de δ_D está bien definido; ya que si $V \in \widetilde{T_X}$, entonces $V \cap D \in \widetilde{T_D}$ ($V \cap \overline{D^{T_X}} = \widetilde{V^{T_X}}$ y por tanto, el Lema 3.3 implica que $V \cap \overline{D^{T_D}} = V \cap D$). Además, el Lema 3.3 también hace a δ_D sobreyectiva, pues para $V \cap \overline{D^{T_D}} \in \widetilde{T_D}$, $V \cap \overline{D^{T_X}} \cap D = V \cap \overline{D^{T_D}}$.

Segundo, la inyectividad de δ_D se obtiene del Teorema 3.2; ya que si $U, V \in \widetilde{T_X}$ y $\delta_D(U) = \delta_D(V)$ entonces $\overline{(U \cap D)^{T_D}} = \overline{(V \cap D)^{T_D}}$ y por tanto $\overline{U^{T_X}} = \overline{V^{T_X}}$, de donde se concluye que $U = V$. Así se concluye que δ_D es biyectiva. \square

Observación. *En el corolario anterior se observa que δ_D hace más que ser una biyección entre subconjuntos de la topología de X y la topología de D . De hecho, δ_D preserva las intersecciones finitas, es decir $\delta_D(U \cap V) = \delta_D(U) \cap \delta_D(V)$. Desafortunadamente el recíproco del Corolario 3.4 no es cierto. Como ejemplo de esto se considera el conjunto de los números naturales con la topología $T_{\mathbb{N}} = \{F \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus F \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ y $D = \{1\}$.*

Notando que siempre que $U \in T_{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ vale que $\overline{U^{T_{\mathbb{N}}}} = \mathbb{N}$, se deduce que $\widetilde{T_{\mathbb{N}}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Además como $T_{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\widetilde{T_{\{1\}}} = T_{\{1\}}$, se concluye que $\delta_{\{1\}} : \widetilde{T_{\mathbb{N}}} \rightarrow \widetilde{T_{\{1\}}}$ es una biyección. A pesar de esto, $\{1\}$ no es denso en $(\mathbb{N}, T_{\mathbb{N}})$.

El siguiente teorema muestra algunas condiciones bajo las cuales la inyectividad de δ_D y la densidad de D en X son equivalentes.

Teorema 3.5. *Sea X espacio topológico, $\emptyset \neq D \subseteq X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$1. (\forall U \in T_X(\overline{D} \subseteq U \implies \overline{U} = X)) \implies \overline{D} = X.$$

$$2. \overline{D} \neq X \implies \exists U \in T_X(\overline{D} \subseteq U \text{ y } \overline{U} \neq X).$$

Además si se cumplen 1 y 2 vale también

3. $X = \overline{D} \iff (\delta_D : \widetilde{T}_X \rightarrow T_D \text{ tal que } \delta_D(U) = \sigma_D(\phi([U])) = U \cap D, \text{ es inyectiva.})$.

Demostración. 1 y 2 son expresiones contrapuestas, por tanto son equivalentes.

2 \implies 3) Si D es denso en X , por el Corolario 3.4, δ_D es inyectiva. Si D no es denso, por hipótesis, $\exists U \in T_X(\overline{D} \subseteq U \text{ y } \overline{U} \neq X)$. Por tanto $X \cap D = \widetilde{U}^{T_X} \cap D$, de modo que δ_D no es inyectiva. \square

En el teorema anterior se expuso una situación en que la inyectividad de una función es equivalente a la densidad de un conjunto en otro conjunto. De nuevo, surge la pregunta ¿qué tipo de subconjuntos A de T_X permiten que para cada $D \subseteq X = \overline{D}$, $f_D : (A \subseteq T_X) \rightarrow (B \subseteq T_D)$, con $f_D(U) = U \cap D$, sea una función inyectiva para cada D ? Como se observará en los capítulos subsecuentes, la respuesta a esta pregunta es de particular interés ya que permite entender mejor como debe de ser la relación entre la topología de un espacio X y la topología de sus subconjuntos para que X sea recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos D .

4 Una caracterización de recuperabilidad

En este capítulo se presenta una caracterización para el concepto de recuperabilidad, es decir, se presenta un enunciado equivalente a que X sea recuperable a partir de D . El siguiente teorema sugiere que aunque un espacio topológico D no siempre conserva todas las propiedades de un espacio recuperable a partir de D , X ; podría ocurrir que alguna base de la topología de D si lo hiciera. Este punto podría motivar futuras investigaciones sobre la relación entre las propiedades de las bases de un espacio topológico D y las de las bases de algún espacio recuperable de D , X . Este tipo de investigación no se incluye en este trabajo.

Teorema 4.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para X espacio topológico y $D \subseteq X$:*

1. *Existen α base de T_X y β base de T_D tales que la función $T : \alpha \rightarrow \beta$ definida por $T(U) = U \cap D$, es función biyectiva.*
2. *X es recuperable a partir de D .*

Demostración. 1 \implies 2) Antes de empezar la prueba debe notarse que para cada $U \in T_X \setminus \{\emptyset\}$ se tiene que existe $V \in \alpha \setminus \{\emptyset\}$ tal que $V \subseteq U$. Así, por la inyectividad de T se tiene que $\emptyset \neq V \cap D \subseteq U \cap D$, y por tanto D es denso en X . De modo que para mostrar que X es recuperable a partir de D , basta probar que $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \in \overline{K^{T_X}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\})$.

Sea $x \in X$ y $\emptyset \neq K \subseteq X$. Entonces si $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$, se tiene que $U_\beta(x) \subseteq \bigcup \{U_\beta(y) | y \in K\}$, que por la biyectividad de T implica que $U_\alpha(x) \subseteq \bigcup \{U_\alpha(y) | y \in K\}$. Por el Lema 2.10 se obtiene que $U(x) \subseteq \bigcup \{U(y) | y \in K\}$, que a su vez implica que $U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$; de modo que por el Lema 2.3, se tiene que X es recuperable a partir de D .

2 \implies 1) Es de notar que T siempre es una función bien definida ya que si $A = B$, resulta claro que $A \cap D = B \cap D$ por la definición de intersección entre conjuntos. Teniendo esto en mente, se define $\alpha = \{X \setminus \overline{K^{T_X}} \mid K \subseteq D\}$ y $T : \alpha \rightarrow T_D$ tal que $T(X \setminus \overline{K^{T_X}}) = (X \setminus \overline{K^{T_X}}) \cap D = D \setminus (\overline{K^{T_X}} \cap D) = D \setminus \overline{K^{T_D}}$. Se demostrará que T es función biyectiva, y que tanto α como T_D son bases de T_X y T_D , respectivamente.

Primero se demostrará que T es función biyectiva. Para esto, se observa que D es denso en X por ser X recuperable a partir de D , y recordando de la definición de α que para cada K , K está contenido en D . Como $K \subseteq \overline{K^{T_D}}$, se tiene que $\overline{K^{T_X}} \subseteq \overline{K^{T_D}^{T_X}} \subseteq \overline{K^{T_X}^{T_X}} \cap \overline{D^{T_X}} = \overline{K^{T_X}}$. Por tanto, cuando $H, K \subseteq D$ se tiene que si $D \setminus \overline{H^{T_D}} = D \setminus \overline{K^{T_D}}$, entonces $\overline{H^{T_D}} = \overline{K^{T_D}}$; y por tanto al tomar la cerradura respecto a T_X en ambos lados de esta última igualdad se concluye que $\overline{H^{T_X}} = \overline{K^{T_X}}$. Ésto implica que $X \setminus \overline{H^{T_X}} = X \setminus \overline{K^{T_X}}$; demostrando así que T es inyectiva. Por otro lado, si $U \in T_D$, se define $K = D \setminus U$. Claramente K es cerrado en D respecto a T_D y $T(X \setminus \overline{K^{T_X}}) = D \setminus \overline{K^{T_D}} = D \setminus (D \setminus U) = U$; demostrando así que T es sobreyectiva. Ésto establece que T es función biyectiva.

Ahora, como T_D es base de T_D , basta probar que α es base de X para concluir la demostración del teorema. Para ello, ya que $\emptyset, X \in \alpha$, basta demostrar los siguientes dos enunciados:

a) Si $U, V \in \alpha$, entonces $U \cap V \in \alpha$; y

b) Si $U \in T_X \setminus \{\emptyset, X\}$ y $x \in U$, entonces $\exists V \in \alpha$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Primero se demostrará el enunciado a). Para ésto, se nota que para $K, H \subseteq D$, $K \cup H \subseteq D$; de modo que si $X \setminus \overline{K^{T_X}}, X \setminus \overline{H^{T_X}} \in \alpha$, entonces $X \setminus \overline{K^{T_X}} \cap X \setminus \overline{H^{T_X}} = X \setminus \overline{(K \cup H)^{T_X}} \in \alpha$. Esta afirmación prueba a).

Para demostrar el enunciado b), para cada $U \in T_X \setminus \{\emptyset, X\}$ y cada $x \in U$, se construirá un conjunto $A = \overline{A^{T_D}} \subseteq D$ tal que $x \in X \setminus \overline{A^{T_X}} \subseteq U$. Para conseguir ésto, se observa que para cada $U \in T_X \setminus \{\emptyset, X\}$ y cada $x \in U$, si $\overline{K^{T_X}} = K = X \setminus U$, entonces $x \notin K$. Además, como X es recuperable a partir de D , se sabe que $U_D(x) \not\subseteq \bigcup \{U_D(y) \mid y \in K\}$, lo que implica que $\exists V \in U_D(x)$ tal que $V \not\subseteq \bigcup \{U_D(y) \mid y \in K\}$.

Así, sea $U \in T_X \setminus \{\emptyset, X\}$, $K = X \setminus U$, $x \in U$, $V \in U_D(x)$ tal que $V \notin \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$ y $A = \{d \in D | V \notin U_D(d)\} = D \setminus V$, claramente A es cerrado en D . Para caracterizar los $y \in \overline{A^{Tx}}$ se presenta la siguiente sucesión lógica: $y \in \overline{A^{Tx}}$ si y solo si $\forall W \in U(y) (W \cap A \neq \emptyset)$ si y solo si $\forall W \in U(y) ((W \cap D) \cap A \neq \emptyset)$ si y solo si $\forall W \in U(y) ((W \cap D) \not\subseteq V)$ si y solo si $V \notin U_D(y)$. Así se obtiene que $y \in \overline{A^{Tx}}$ si y solo si $V \notin U_D(y)$.

Finalmente, se observa que como para cada $y \in K$, V no es elemento de $U_D(y)$; entonces $K \subseteq \overline{A^{Tx}}$. Además $V \in U_D(x)$, de modo que $x \notin \overline{A^{Tx}}$. Así como $\overline{A^{T_D}} = A \subseteq D$, se tiene que $X \setminus \overline{A^{Tx}} \in \alpha$ y $x \in X \setminus \overline{A^{Tx}} \subseteq U$; lo que demuestra b), concluyendo la prueba de $2 \implies 1$). \square

Finalmente, se concluye el capítulo presentando el siguiente teorema, que resume las diferentes caracterizaciones para el enunciado X es recuperable a partir de D . La equivalencia de estos enunciados ya ha sido probada a lo largo de este trabajo, aún cuando no se haya presentado como un teorema.

Teorema. *Los siguientes enunciados son equivalentes para X espacio topológico y $D \subseteq X$:*

1. X es recuperable a partir de D .
2. $\overline{D^{Tx}} = X$ y para cada K subconjunto de X y cada $x \in X$ vale que $x \in \overline{K^{Tx}} \iff U_D(x) \subseteq \bigcup \{U_D(y) | y \in K\}$.
3. $\alpha = \{X \setminus \overline{K^{Tx}} | K \subseteq D\}$ es base de T_X y $\emptyset \in \alpha$.
4. Existen α base de T_X y β base de T_D tales que la función $T : \alpha \rightarrow \beta$ definida por $T(U) = U \cap D$, es función biyectiva.

5 Una construcción útil

Con base en los resultados del capítulo anterior, en el presente capítulo se pretende mostrar parte de la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Puede un espacio topológico X reconstruirse a partir de la topología de uno de sus subespacios densos D ? Por un lado si $X = \{1, 2, 3\}$ con la topología $T_X = \{X, \emptyset\}$ y $D = \{1\}$; es claro que $\overline{D} = X$ y que no existe ningún indicio en la topología de D que nos permita inferir la forma del espacio X y su topología. Por otra parte, si $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y $D = \mathbb{Q}$, entonces es bien sabido que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y que existen métodos para reconstruir a \mathbb{R} a partir de la topología de \mathbb{Q} , un ejemplo de estos métodos es conocido como el proceso de completación de un espacio métrico.

En este capítulo se propondrá un método para construir un “*sobrespacio*” topológico ξ a partir de un espacio topológico D , de tal forma que ξ sea recuperable a partir de D . También se mostrará que mediante este método es posible reconstruir ciertos espacios topológicos T_0 recuperables a partir de D con base en la información presente en la topología de D , siempre que se cumplan las condiciones planteadas en el Teorema 5.2.

Definición 5.1. Sea D espacio topológico, $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{P}(T_D)$ un conjunto de filtros abiertos y $\Sigma(U) = U \cup \{F \in \mathbb{F} | U \in F\}$ para $U \in T_D$. Se define $\alpha = \{\Sigma(U) | U \in T_D\}$, $\xi = D \cup \mathbb{F}$ y se denotará por T_ξ a la topología menos fina que contenga a α .

De hecho se mostrará en el siguiente teorema que α es una base de T_ξ , y que por tanto, $T_\xi = \{\bigcup A | A \subseteq \alpha\}$.

Teorema 5.2. Sea D espacio topológico, $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{P}(T_D)$ un conjunto de filtros abiertos tal que $\mathbb{F} \cap D = \emptyset$ y $\Sigma(U) = U \cup \{F \in \mathbb{F} | U \in F\}$. El conjunto $\xi = D \cup \mathbb{F}$ dotado de la topología generada por $\alpha = \{\Sigma(U) | U \in T_D\}$ es recuperable a partir de D . Además, para $F \in \xi \setminus D$, $U_D(F) = \{U \cap D | F \in U \in T_\xi\} = F$.

Demostración. Se observa que la función $T : \alpha \rightarrow T_D$ definida por $T(\Sigma(U)) = U$ cumple $T(\Sigma(U)) = \Sigma(U) \cap D = U$, al ser $\mathbb{F} \cap D = \emptyset$. Además, $U = V$ implica que $\Sigma(U) = \Sigma(V)$ para $U, V \in T_D$; y $\Sigma(U) = \Sigma(V)$ implica que $U = V$. Por tanto, T es una función biyectiva, y bajo el supuesto que α es base de T_ξ se obtiene por el Teorema 4.1 que ξ es recuperable a partir de D . Así, para demostrar que ξ es recuperable a partir de D , basta mostrar que α es una base.

Para ello, se observa que $\emptyset, \xi \in \alpha$. Por tanto sólo hace falta demostrar que para $U, V \in T_D$, $\Sigma(U) \cap \Sigma(V) \in \alpha$. Para ésto, se observa que para cada par $\Sigma(U), \Sigma(V) \in \alpha$ se cumple que $\Sigma(U) \cap \Sigma(V) = (U \cap V) \cup (\{F \in \mathbb{F} | U \in F\} \cap \{F \in \mathbb{F} | V \in F\})$ y que $U, V \in F$ si y solo si $U \cap V \in F$, ya que F es filtro abierto. Por tanto, $\Sigma(U) \cap \Sigma(V) = (U \cap V) \cup \{F \in \mathbb{F} | U \cap V \in F\} = \Sigma(U \cap V)$, lo que demuestra que ξ con T_ξ es recuperable a partir de D .

Finalmente, para $F \in \xi \setminus D$ se observa que como para cada $U \in U_\xi(F)$ existe algún $V \in F$ tal que $\Sigma(V) \subseteq U$, se debe tener que $U \cap D \in F$ ya que $U \cap D \supseteq \Sigma(V) \cap D = V \in F$. Así, se puede concluir que $U_D(F) \subseteq F$. Por otra parte es claro que si $U \in F$, entonces $U = \Sigma(U) \cap D \in U_D(F)$. Por tanto, se concluye que $U_D(F) = F$. \square

Teorema 5.3. *Sea X espacio topológico T_0 recuperable a partir de D y sea $\xi = D \cup \{U_D(x) | x \in X \setminus D\}$ tal que $\{U_D(x) | x \in X \setminus D\} \cap D = \emptyset$. Entonces (ξ, T_ξ) es homeomorfo a (X, T_X) , con T_ξ la topología generada por α .*

Demostración. Se desea probar que la relación $f : X \rightarrow \xi$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D; \\ U_D(x) & \text{si } x \notin D; \end{cases}$ es un homeomorfismo. Para esto se demostrará que f es una función biyectiva continua y cerrada.

Primero, supongase que $x, y \in X$. Claramente $x = y$ implica que $f(x) = f(y)$; por tanto f es función. Segundo, si se sabe que para $x, y \in X$, $f(x) = f(y)$ se distinguen dos casos:

1) si $f(x) = f(y) \in D$ entonces por la definición de f y por el hecho de que $f(X \setminus D) \cap D = \emptyset$, se tiene que $x, y \in D$, y por tanto $x = y$; y

2) si $f(x) = f(y) \notin D$ entonces $U_D(x) = U_D(y)$, lo que ocurre si y solo si $\overline{\{x\}^{Tx}} = \overline{\{y\}^{Tx}}$ por ser X recuperable a partir de D . Además, como X es T_0 , $\overline{\{x\}^{Tx}} = \overline{\{y\}^{Tx}}$ si y solo si $x = y$.

Así, f es función inyectiva. Además, por la definición de ξ , f es función sobreyectiva. Por tanto, f es función biyectiva.

Finalmente, para $K \subseteq X$ se obtiene que $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $U_{D \cap X}(x) \subseteq \bigcup \{U_{D \cap X}(y) \mid y \in K\}$. Además, como $U_{D \cap \xi}(f(x)) = U_{D \cap X}(x)$ para cada $f(x) \in \xi$ y f es inyectiva, se obtiene que $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $U_{D \cap \xi}(f(x)) \subseteq \bigcup \{U_{D \cap \xi}(f(y)) \mid y \in K\}$ si y solo si $U_{D \cap \xi}(f(x)) \subseteq \bigcup \{U_{D \cap \xi}(f(y)) \mid f(y) \in f(K)\}$. De ahí, por la recuperabilidad de X y ξ a partir de D , se concluye que $x \in \overline{K^{Tx}}$ si y solo si $f(x) \in \overline{f(K)^{T\xi}}$. Así, se obtiene que $f(\overline{K^{Tx}}) = \overline{f(K)^{T\xi}}$, lo que implica que f es un homeomorfismo. \square

6 \widetilde{T}_X y la recuperabilidad de X a partir de cada uno de sus subespacios densos

En este capítulo se pretende responder la pregunta de cuándo un espacio topológico es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos. A pesar de que en este trabajo no se formula una condición necesaria para que X sea recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos, si se presenta una condición suficiente para que esto ocurra. Además, en este capítulo también se provee un teorema para reconocer a los espacios topológicos que verifican esta condición suficiente. Es de resaltar que como consecuencia de este teorema, un espacio regular es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos.

Teorema 6.1. *Sea X espacio topológico, $D \subseteq X = \overline{D^{T_X}}$ y \widetilde{T}_X base de T_X . Entonces X es recuperable a partir de D .*

Demostración. Sea $\delta_D : \widetilde{T}_X \rightarrow \widetilde{T}_D$ tal que $\delta_D(U) = U \cap D$, $x \in X$ y $K \subseteq X$. Como D es denso en X , δ_D es función biyectiva. Además como D es subespacio de X , \widetilde{T}_D es base de T_D . Por tanto, al aplicar el Teorema 4.1 se obtiene el resultado. \square

Teorema 6.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes para X espacio topológico:*

1. $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \notin \overline{K} \implies \exists U \in T_X (\overline{K} \subseteq \overline{U} \text{ y } x \notin \overline{U}))$.
2. \widetilde{T}_X es base del espacio topológico X .
3. $\forall K \subseteq X \forall x \in X (x \in \overline{K} \iff \widetilde{U}(x) \subseteq \bigcup \{\widetilde{U}(y) \mid y \in K\})$

Demostración. 1 \implies 2) Por el Lema 2.8, para todos los $U, V \in \widetilde{T}_X$, $U \cap V \in \widetilde{T}_X$. Además, si $U \in T_X \setminus \{\emptyset\}$ (para el caso de \emptyset , se tiene que $\emptyset \in \widetilde{T}_X$), sea $K = X \setminus U$

y $x \in U$. Claramente $x \notin K = \overline{K}$, de modo que por hipótesis $\exists V \in T_X(\overline{K} \subseteq \overline{V} \text{ y } x \notin \overline{V})$. Así, para $W = X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus K = U$, $x \in W$ y por el Lema 1.6 $W = X \setminus \overline{V} = \widetilde{W} \in \widetilde{T}_X$. Ésto demuestra que \widetilde{T}_X es base de T_X .

2 \implies 3) Es consecuencia inmediata del Lema 2.10 y el Lema 2.3.

3 \implies 1) Sea $x \in X$ y $K \subseteq X$ y supongase que $x \notin \overline{K}$. Al aplicar la hipótesis a $\overline{\overline{K}} = \overline{K}$, se obtiene que $\widetilde{U}(x) \notin \bigcup \{ \widetilde{U}(y) \mid y \in \overline{K} \}$, lo que implica que $\exists U \in \widetilde{U}(x)$ tal que $U \cap \overline{K} = \emptyset$ (de otra forma U sería elemento de $\widetilde{U}(y)$ para algún $y \in \overline{K}$). Sea $V = X \setminus \overline{U}$. Al aplicar el Lema 2.7 se obtiene que $\overline{V} = X \setminus U \supseteq \overline{K}$; y como $x \in U$, se obtiene que $x \notin \overline{V}$; lo que demuestra el enunciado. \square

Recordando que X es regular si y solo si $\forall K \subseteq X \forall x \in X(x \notin \overline{K} \implies \exists U \in T_X(\overline{K} \subseteq U \text{ y } x \notin \overline{U}))$, se presenta el siguiente corolario que pretende señalar que existe una gran variedad de espacios topológicos recuperable de cada uno de sus subespacios densos.

Corolario 6.3. *Sea X un espacio topológico regular. Entonces \widetilde{T}_X es base de T_X .*

Demostración. Sea $K \subseteq X$ y $x \notin \overline{K}$. Como X es regular existe $U \in T_X$ tal que $\overline{K} \subseteq U$ y $x \notin \overline{U}$. Además, como $U \subseteq \overline{U}$, se tiene que $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ y $x \notin \overline{U}$. Aplicando el Teorema 6.2 se obtiene el resultado. \square

Observación. *Siempre que un espacio topológico X tiene por base a \widetilde{T}_X , se le denomina espacio semirregular. Así, por el Corolario 6.3 se sabe que todos los espacios regulares son semirregulares y, que por tanto, todo espacio T_3 es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos. En particular todo espacio métrico es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos y todo espacio Hausdorff compacto es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos.*

7 Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se ilustran algunos de los temas relacionados con el contenido de este trabajo de graduación. La finalidad de este capítulo es describir algunas de las investigaciones relacionadas con el alcance y lo logrado en este trabajo. La revisión bibliográfica para elaborar este capítulo no es exhaustiva.

7.1. Extensiones topológicas

Sean X y Y espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ una función continua, abierta e inyectiva. Se dice que el par (Y, ϕ) es una extensión de X si y solo si $\phi(X)$ es denso en Y . Por facilidad, se puede decir que Y es una extensión de X si X es denso en Y . (Banaschewski. 1964)

Un pregunta natural al pensar en el concepto de extensión topológica es la de a qué posibles espacios topológicos se puede extender un espacio topológico dado. Suponiendo que X es T_0 , esta pregunta puede refinarse un poco a la pregunta de a qué espacios topológicos relativamente T_0 puede extenderse X (Si ξ es una extensión de X ; ξ es relativamente T_0 a X si y solo si para cualesquiera $a, b \in \xi$, $a = b$ si y solo si $U_X(a) = U_X(b)$). (Banaschewski. 1964)

Así es posible pensar que (Y, T_Y) es una extensión relativamente T_0 de X y que $O_0 \subseteq T_Y \subseteq O_1$. En donde O_0 es la topología menos fina que contiene a $\alpha_0 = \{\{y \in Y | U \in U_X(y)\} | U \in T_X\}$ y O_1 es la topología menos fina que contiene a $\alpha_1 = \{U \cup \{y\} | y \in Y \text{ y } U \in T_X \text{ y } U \in U_X(y)\} \cup \{\emptyset\}$. A (Y, O_1) se le conoce como una extensión simple de X y a (Y, O_0) como una extensión estricta de X . (Banaschewski. 1964)

Ya que Y es una extensión estricta de X si y solo si Y es recuperable a partir de X , resulta interesante señalar que, conforme a un resultado de Banaschewski, bajo ciertas condiciones es posible asegurar que un espacio es semirregular si y solo si es recuperable a partir de cada uno de sus subespacios densos. Éste hecho se resume

en el siguiente teoremas. (Banaschewski. 1964)

Teorema. *Sea X un espacio topológico Hausdorff primero contable. X es una extensión estricta de cada uno de sus subespacios densos si y solo si es semirregular.*
(Banaschewski. 1964)

7.2. Compactificaciones

Dentro de las posibles extensiones para un espacio topológico X , resultan de particular interés aquellas extensiones con nuevas propiedades topológicas. Tal es el caso de las compactificaciones de un espacio topológico. (Porter y Woods. 1988)

Es bien sabido que todo espacio completamente regular X posee una compactificación Hausdorff compacta Y . De modo que al observar que Y es normal es posible deducir que Y es recuperable a partir de X . Por tanto, se sabe que Y puede ser construido utilizando un método semejante al presentado en el Teorema 5.3. (Porter y Woods. 1988)

Por tanto, resulta de particular interés para este trabajo de graduación estudiar los diferentes métodos que existen para construir la compactificación de un espacio topológico dado. Algunos de estos métodos son: La compactificación de un punto de espacios topológicos localmente compactos, las compactificaciones generadas utilizando bases cerradas de Wallman y las compactificaciones de Gelfend. (Porter y Woods. 1988)

7.3. Topología sin puntos

Finalmente, se señala la gran importancia que tiene el estudio de las propiedades asociadas al retículo completo formado por los abiertos de la topología de un espacio topológico bajo el orden parcial de la contención en la construcción de nuevos espacios topológicos a partir de espacios ya existentes. (Picado y Pultr. 2012)

Como nota de interés en este tema, se señala el Teorema de Densidad de Isbell, que se puede interpretar como la contraparte en topología sin puntos del Teorema 3.2. El Teorema de Densidad de Isbell asegura que un sublocalo (el análogo a un subespacio en topología sin puntos, que es un álgebra de Heyting) es denso en un

localo si y solo si este sublocalo contiene al álgebra booleana cuyos elementos son aquellos elementos del localo que son iguales al complemento de su complemento. (Picado y Pultr. 2012)

Para intentar dar algún tipo de explicación para este fenómeno, aquí sólo se señalará que un subretículo es un sublocalo si existe algún mapeo cuya adjunta izquierda de Galois preserve intersecciones finitas. (Picado y Pultr. 2012)

Bibliografía

Banaschewski, B. 1964. *Extensions of Topological Spaces*. Canadian Mathematical Bulletin 1(7): 1-22.

Chitra, T. 2009. *The Stone-Cech Compactification*. Estados Unidos. Disponible en: <http://www.math.cornell.edu/~riley/Teaching/Topology2009/essays/chitra.pdf> [con acceso el 16 de febrero de 2015]

Munkres, J. 2000. *Topology*. Second Edition. Prentice Hall, Inc.. Estados Unidos. 537 pp.

Simmons, G. 1963. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Inc.. Estados Unidos. 372 pp.

Picado, J. y Pultr, P. 2012. *Frames and Locales, Topology without points*. Birkhauser. 398 pp.

Porter, J. y Woods, G. 1988. *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*. Springer-Verlag New York Inc.. Estados Unidos. 856 pp.

Stekelburg, M. 2014. *Ultrafilters and Topology*. Países Bajos. Disponible en: <http://www.math.leidenuniv.nl/scripties/BachStekelburg.pdf> [con acceso el 16 de febrero de 2015]

Willard, S. 1970. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company Inc. Estados Unidos. 389 págs.