

**UN MODELO MATEMATICO PARA
EL COMERCIO INTERNACIONAL**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

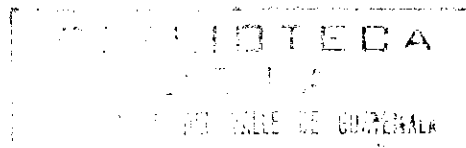
Facultad de Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemática

UN MODELO MATEMATICO PARA

EL COMERCIO INTERNACIONAL

Carlos Alberto Oliva Mayorga

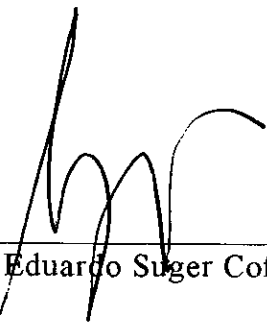


Trabajo de graduación presentado para optar
al grado académico de Licenciado en Matemática

Guatemala

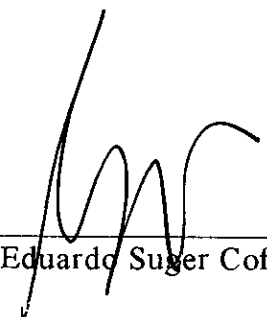
1995

Vo. Bo.:

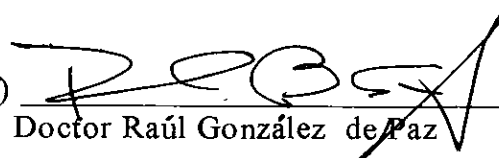
(f) 

Doctor Eduardo Suger Cofiño
Asesor/

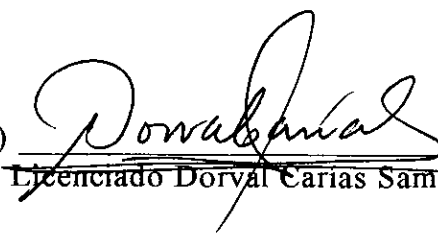
Tribunal:

(f) 

Doctor Eduardo Suger Cofiño

(f) 

Doctor Raúl González de Paz

(f) 

Licenciado Dorval Carias Samayoa

Fecha de aprobación: 3 de abril de 1995

DEDICO ESTE TRABAJO

A mi esposa, Amparito.

A mis tres hijos,
Juan Luis, Anne Elise y Andrea.

A mi buen amigo, Eduardo Suger C.

INDICE

	Página
INTRODUCCION.....	01
I PRELIMINARES	03
A Análisis Gráfico del Comercio Internacional.....	03
B Modelo Matemático para el Equilibrio del Comercio Internacional	10
C Curvas de Oferta de Oniki-Uzawa.....	14
D Ilustración Gráfica del Equilibrio Internacional.....	17
II MODELO MATEMATICO DE UNA ECONOMIA DE DOS SECTORES.....	19
A Modelo Matemático de una Economía de Dos Sectores	19
B Aplicaciones.....	28
III EL TEOREMA DE HECKSCHER OHLIN	31
IV TEORIA RICARDIANA DE VENTAJAS COMPARATIVAS.	39
A Introducción: Ventajas Comparativas.....	39
B Formulación Matemática de la Teoría Ricardiana	42
C Teorema de Ricardo	45
D Programación Lineal y el Problema Dual.....	48
E El Teorema de Dualidad y la Teoría Ricardiana	49
V TEORIA CLASICA CON CONDICIONES DE DEMANDA.....	53
A Introducción a las Condiciones de Demanda	53
B Ganancia del Comercio	56
C Conceptos de Programación No Lineal.....	58
D El Problema de Mill y la Programación No Lineal	60

VI	ESTATICA COMPARATIVA PARA UN MODELO DE VARIOS PAISES	
	Y VARIOS BIENES.....	65
A	Introducción	65
B	Propuesta de Chipman	66
C	Bienestar Mundial y Bienestar de cada País	70
D	Maximización de la Renta y Minimización del Costo	73
E	Patrones de Especialización	76
F	El Problema de McKenzie-Jones	78
G	Una Generalización del Problema de Mill	80
VII	EQUILIBRIO GENERAL DEL COMERCIO Y LA PRODUCCION MUNDIAL.....	85
A	Elementos del Análisis de Actividad	85
B	Modelo Matemático	85
C	Concepto de Vector Máximo	90
D	El Conjunto de la Producción Mundial y la Caracterización de los Puntos Eficientes	97
E	Una Teoría del Equilibrio del Libre Comercio	105
VIII	BIBLOGRAFIA	117

INTRODUCCION

Este trabajo se presenta como requisito final para optar al título de Licenciado en Matemática. El título del mismo es "**Un Modelo Matemático para el Comercio Internacional**", y se expone la teoría del Comercio Internacional en forma de modelos matemáticos.

Se plantea fundamentalmente la producción y consumo de bienes de los países del mundo, en forma aislada y en condiciones de intercambio. Es importante determinar las condiciones que fijan el equilibrio en el comercio internacional haciendo referencia a funciones de transformación de la producción y funciones de oferta y demanda de los bienes. Se analiza la teoría clásica de Ventajas Comparativas de David Ricardo al usar programación lineal y se trabaja el teorema de Heckscher-Ohlin al usar estática comparativa.

En la parte **I** se describe, en forma gráfica, el problema del Comercio Internacional considerando el problema en dos dimensiones. Por otro lado, se presenta un modelo matemático para el equilibrio en el Comercio Internacional, haciéndose una formulación matemática del problema gráfico analizado anteriormente.

En la parte **II** se presenta un modelo matemático de una economía que incluye dos sectores; dos países que producen dos bienes y trabajan con dos factores de producción.

Se da una serie de definiciones, lemas y teoremas que representan al fenómeno y finalmente se dan algunas aplicaciones del modelo.

En la parte **III** se utiliza la teoría de ventajas comparativas para analizar el modelo de Heckscher-Ohlin. En la parte **VI** se utiliza la programación lineal para trabajar las Ventajas Comparativas en el modelo de David Ricardo.

En la parte **V** se utiliza la programación no lineal para trabajar la teoría clásica del Comercio Internacional con condiciones de demanda. En la parte **VI** se hace una generalización del modelo de dos países y dos bienes a un modelo de varios países y varios bienes.

En la parte **VII** se hace un análisis del equilibrio del Comercio Internacional y la producción. Se trabaja con análisis de actividad y el concepto de vector máximo para luego aplicarlo a la teoría del equilibrio en el comercio libre.

I PRELIMINARES

En este capítulo se hace una introducción al problema del Comercio Internacional. Primero se hace un breve análisis gráfico del equilibrio en el Comercio Internacional para luego presentar un modelo matemático del problema.

A Análisis Gráfico de Comercio Internacional

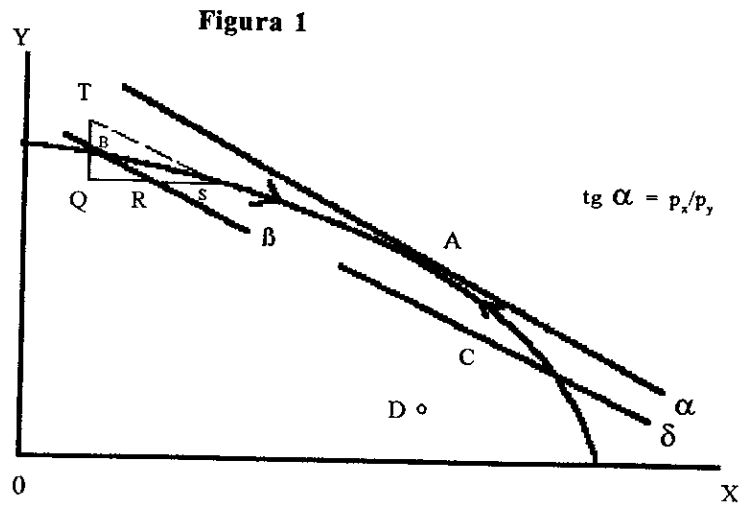
Vamos a considerar un país que produce dos bienes, X e Y.

Como podemos ver en la Figura 1, la curva de Transformación de la Producción es cóncava hacia el origen y la razón de precios de ambos bienes está dada por la pendiente de la línea α . Entonces, bajo una situación competitiva, el punto de producción está dado por A. Debe notarse que este punto es estable, pues si se mueve a cualquier otro punto, las condiciones del problema lo llevan de nuevo a A. Por ejemplo, si el punto de producción fuera B, de acuerdo a la figura, la razón de precios tiene que estar dada por la pendiente de la línea β . En este caso los productores obtienen el bien X en la cantidad QS, por cada unidad de salida del bien Y (asumimos que la unidad de Y es BQ), entonces, intercambiando lo obtenido del bien X en el mercado, pueden obtener el bien Y en la cantidad QT.

TB (= QT-BQ) mide la ganancia en términos del bien Y, por unidad sacrificada del bien Y. De esto se concluye que, a una razón de precios constante, el punto de producción se mueve a A.

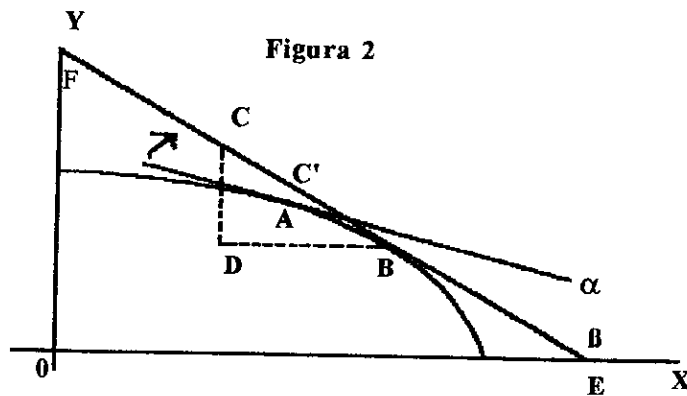
Un punto dentro de la curva de transformación no es posible porque se puede

encontrar otro sobre la curva que es mejor que éste, por ejemplo D y C. Luego de pasar a C, existe el mecanismo antes descrito, que lleva el punto de producción a A.



Asumimos ahora que ocurre el Comercio Internacional, lo cual implica que existen consumidores y productores foráneos. En este caso, cambia la razón de precios y como consecuencia de esto, cambia el punto de producción, como se ilustra en la Figura 2.

Asumimos que el país es pequeño comparando con el resto del mundo, en el sentido que el volumen de sus importaciones y exportaciones, no afecta a la línea de precios.



El punto de consumo va a estar siempre en la línea β . Si este es C, entonces:

\overline{BD} = cantidad para exportar

\overline{CD} = cantidad a importar

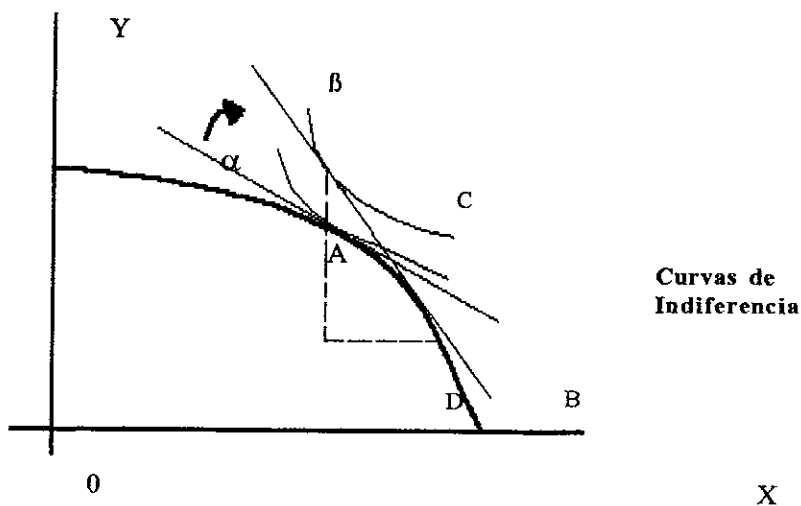
Cómo se escoge entonces el punto de consumo?

Por qué no escoger C' en lugar de A, si así habrá más de cada bien para consumir?

Para escoger el punto de consumo, usamos las Curvas de Indiferencia de la Comunidad.

Gráficamente tenemos:

Figura 3

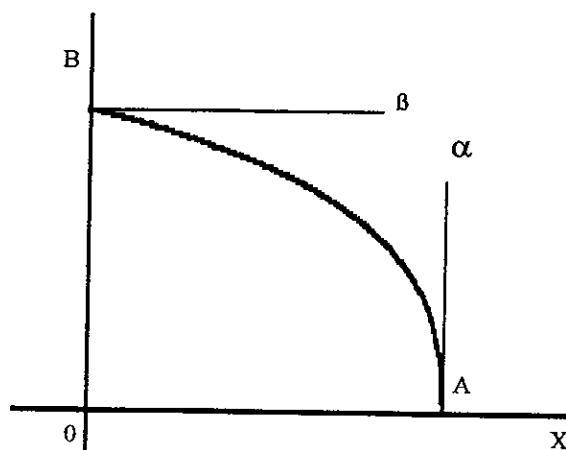


Notamos que se escoge C, porque tiene mayor curva de indiferencia.

Patrones de Producción

Los patrones de producción dependen de la razón de precios de los bienes. Esto se muestra en la Figura 4.

Y **Figura 4**



Tenemos que α y β representan las líneas de precios que son tangentes a la curva de transformación de la producción en A y B, respectivamente. p_x y p_y son los precios de los bienes X e Y. También tenemos que:

$$p = p_x/p_y$$

y además p_{\max} y p_{\min} representan el valor de p que corresponde a la pendiente de las rectas α y β , respectivamente. Entonces tenemos:

- 1) $p \geq p_{\max}$: Sólo se produce X
- 2) $p \leq p_{\min}$: Sólo se produce Y
- 3) $p_{\min} < p < p_{\max}$: Se produce X, Y

1 y 2 se llaman **Especialización Completa**.

3 se llama **Especialización Incompleta**.

Debe notarse que si la curva de transformación de la producción es una línea recta, entonces la especialización completa es más probable, pues el único caso de especialización

incompleta es el caso en que la razón de precios es igual a la razón de costos, que es representada por la línea de transformación de la producción. Este caso se discute posteriormente con mayor énfasis, en el caso de la Teoría Ricardiana de las Ventajas Comparativas.

Qué determina entonces la razón de precios cuando se da el Comercio Internacional? La respuesta a esta pregunta es obvia y depende de la demanda mundial y la disponibilidad de cada bien.

Buena parte de este trabajo pretende dar la respuesta a esta inquietud. El teorema de Heckscher-Ohlin usa curvas de transformación de la producción, cóncavas al origen y en el modelo clásico, Ricardo-Mill, la función de transformación de la producción es una línea recta, lo cual significa "costos constantes".

Si $p_1 < p_2$ (p_1 razón de precios del país 1 antes del intercambio), entonces el país 1 exporta el bien X e importa el bien Y (al contrario del país 2).

Similarmente si $p_1 > p_2$, entonces el país 1 importa el bien X y exporta el bien Y.

Cuando se inicia el comercio, sin costo internacional de transporte, las razones de precios llegan a igualarse, es decir

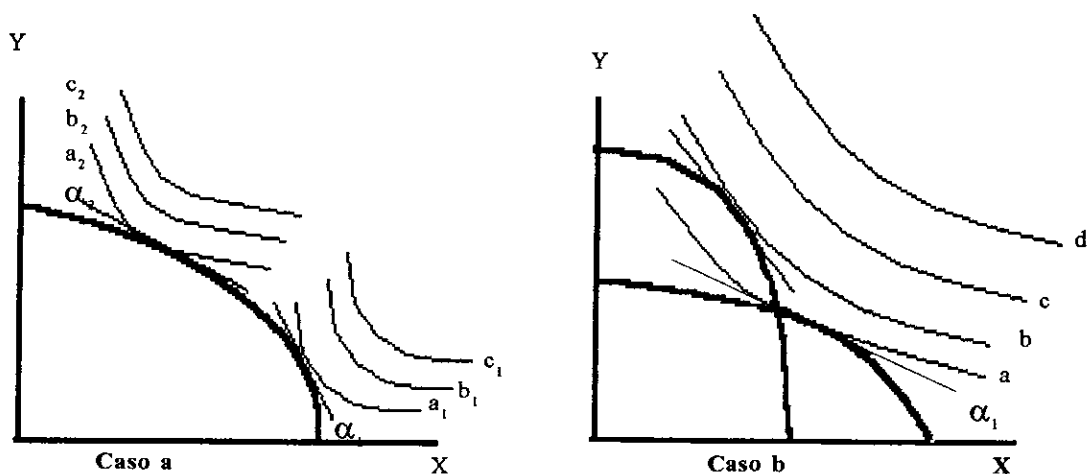
$p_1 = p_2 = p$. A este precio se le llama:

p = Precio Internacional de Equilibrio

Este precio queda determinado por las condiciones de la demanda y oferta de cada país, como se mencionó anteriormente. Es importante notar que cualquier diferencia en estas condiciones, puede crear una diferencia en las razones de precios de los países, antes del intercambio comercial.

Por ejemplo, las razones de precios pueden ser diferentes entre los países, si las dos curvas de transformación de la producción son idénticas. Este puede ser el caso, si las condiciones de demanda de los dos países son diferentes. Lo anterior se ilustra en el caso a de la Figura 5. Si las condiciones de demanda son iguales (dado por las curvas de indiferencia iguales para los dos países), las razones de precios antes del intercambio son distintas, así como las curvas de transformación de la producción. Esto se ilustra en la parte b de la figura.

Figura 5



Curva de Oferta

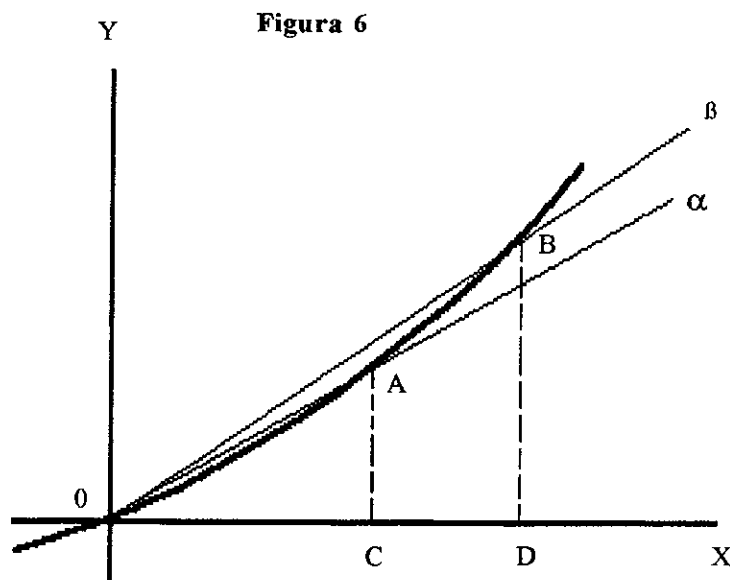
Para dar el concepto de Curva de Oferta, debemos observar la Figura No. 3 donde tenemos el punto de consumo (C) y de producción (B), cuando prevalece la línea de precios β . Con estas condiciones, este país exporta el bien X en la cantidad BD e importa el bien Y, en la

cantidad CD. Nótese que para este país, BD significa la cantidad de exceso ofrecido del bien X y CD la cantidad de exceso demandado del bien Y. Cuando la razón de precios cambia, las cantidades de exportación e importación también cambian. Con base en esto, podemos dar la siguiente definición.

La curva de oferta es el lugar geométrico de puntos que describen la razón de precios para el volumen de exportaciones e importaciones.

La curva de oferta muestra cuánto del bien importado requiere el país, a cambio de varias cantidades de su bien de exportación.

Gráficamente tenemos:



En la gráfica podemos notar que el punto A representa las condiciones de exportación-importación, cuando prevalece la línea de precios α . En otras palabras, la cantidad

de exceso de demanda para el bien Y es igual a AC y la cantidad de exceso de oferta del bien X, es igual a 0C.

Cuando la línea de precios cambia de α a β , las cantidades de exportación e importación cambian de acuerdo a como queda ilustrado en la figura.

Elasticidad de la Curva de Oferta

Es el porcentaje de cambio de la demanda de importación dividido por el porcentaje de cambio en la razón de precios.

La expresión:

$$\eta_1 = \frac{(-dy/y)}{[d(p_y/p_x)/(p_y/p_x)]}$$

ó

$$\eta_1 = -[dy/d(p_y/p_x)][(p_y/p_x)/y]$$

Representa la Elasticidad de la Curva de Oferta del país 1.

B Modelo Matemático para el equilibrio del Comercio Internacional

Un país produce dos bienes X, Y

1) $Y = \varnothing(X)$, donde $X \geq 0$ y $Y \geq 0$ se llama curva de

Transformación de la Producción.

Además asumimos que:

$\varnothing' < 0$ y $\varnothing'' < 0$ para todo nivel de X.

$[\varnothing' = d\varnothing/dX$ y $\varnothing'' = d^2\varnothing/dX^2]$

p_x = precio del bien X p_y = precio del bien Y

$p = p_x/p_y$ = precio relativo de los dos bienes

El equilibrio de los productores bajo una situación competitiva queda descrito por:

2) $p = -\phi'$ (dado p se puede determinar la cantidad de X , y por ende, la cantidad de Y que debe producirse para el equilibrio).

Definición:

C_x es el consumo del bien X

C_y es el consumo del bien Y

$u(C_x, C_y)$ función de utilidad de la comunidad (indicador)

Además, si la razón de precios p prevalece en el mercado, entonces el equilibrio del consumidor en un país puede ser descrito por:

$$p = u_x/u_y \text{ donde } u_x = \partial u/\partial X \text{ y } u_y = \partial u/\partial Y$$

(Notar que esto significa que la curva de indiferencia de la comunidad es tangente a la línea de precio).

Si hacemos $v = u_x/u_y \Rightarrow$

$$3) p = v(C_x, C_y)$$

- Sea E_x el exceso demandado (sobrante) para el bien X si $E_x > 0$ ($E_x < 0$). E_y se define en forma similar.

Entonces tenemos:

$$4) C_x = X + E_x \text{ (} E_x \text{ es el faltante a importar de } X \text{ si } E_x > 0 \text{ ó el sobrante a exportar si}$$

$$E_x < 0)$$

$$5) C_y = Y + E_y \text{ (} E_y \text{ es el sobrante a exportar de } Y \text{ si } E_y < 0 \text{ ó el faltante a importar si}$$

$$E_y > 0)$$

Definición:

Ecuación de Presupuesto

$$6) p_x E_x + p_y E_y = 0 \text{ ó } p E_x + E_y = 0$$

Si revisamos, notamos que tenemos 7 variables por determinar X , Y , C_x , C_y , E_x , E_y y p y seis ecuaciones 1...6.

Asumimos que podemos dar todas las variables en función de p .

Si p queda determinado del exterior, que es el caso para un país pequeño, podemos resolver el problema.

Si no es un país pequeño, p es determinado por la interacción de las condiciones de demanda y productividad de este país, con el resto del mundo.

Es usual considerar al país que se analiza, como el País 1 y al resto del mundo como el País 2. Algunos libros usan otra notación como por ejemplo Inglaterra y Portugal, el País Local y el País Extranjero y otras más.

Cuando se incluye el otro país, se dan las condiciones para el Comercio Internacional.

Inicio de Comercio Internacional

Cuando aparece el comercio, ponemos subíndices a las variables X_i , Y_i , C_{xi} , C_{yi} , E_{xi} y E_{yi} ($i = 1,2$).

Si asumimos libre comercio y carencia de costos de transporte, la razón de precios de ambos países es igual a p . Tenemos ahora 13 variables.

Definición del Equilibrio:

$$E_{x1} + E_{x2} = 0 \quad E_{y1} + E_{y2} = 0$$

Estas dos ecuaciones no son independientes, pues una se puede obtener de la otra con:

$$pE_{x1} + E_{y1} = 0 \quad \text{y} \quad pE_{x2} + E_{y2} = 0$$

con esto tenemos 13 ecuaciones.

Definición

Combinando:

$$pE_{x1} + E_{y1} = 0 \quad E_{x1} + E_{x2} = 0$$

con

$$pE_{x2} + E_{y2} = 0 \quad E_{y1} + E_{y2} = 0$$

Tenemos:

$$pE_{x2} - E_{y1} = 0 \text{ que se conoce como:}$$

"Relación de Equilibrio para la Balanza de Pagos"

Equilibrio Internacional

- I) Recordar que todas las variables se definen como funciones de p .
- II) Con $pE_{x1}(p) + E_{y1}(p) = 0$ determinamos la razón de precios (p) para el equilibrio Internacional

III) Con esta razón de precios, que llamaremos p^* , podemos determinar el valor de las restantes variables $X_1(p^*)$, etc.

C Curva de Ofertas de Oniki-Uzawa (Equilibrio Internacional)

Ecuaciones relevantes:

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $Y = \varnothing(X)$ | d) $C_x = X + E_x$ |
| b) $p = -\varnothing'$ | e) $C_y = Y + E_y$ |
| c) $p = v(C_x, C_y)$ | f) $p_x E_x + p_y E_y = 0$ ó $p E_x + E_y = 0$ |

Con d), e), f) tenemos

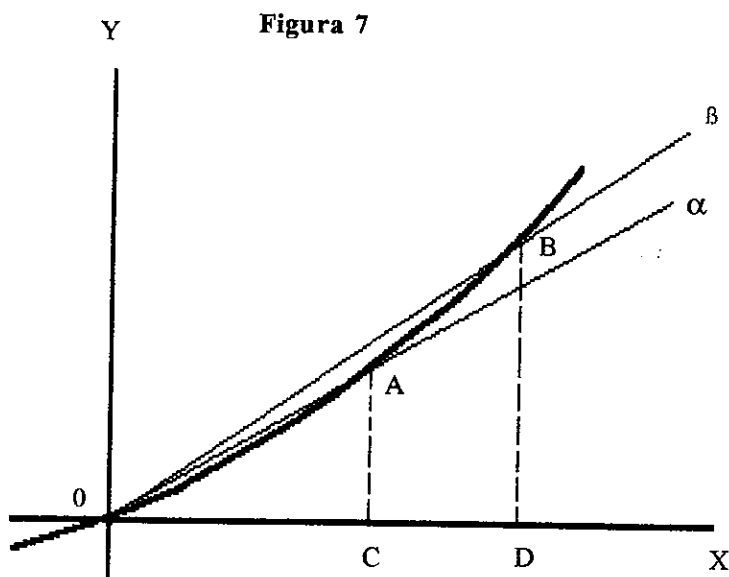
$$C_x = X + E_x$$

$$C_y = Y - pE_x$$

Nota: si $E_x > 0 \Rightarrow E_x$ se importa del país 2

Si $E_x < 0 \Rightarrow E_x$ se exporta al país 2

Además, si recordamos del modelo gráfico, tenemos:



- A) $p \geq p_{\max} \Rightarrow$ solo X se produce
- B) $p \leq p_{\min} \Rightarrow$ solo Y se produce
- C) $p_{\min} < p < p_{\max} \Rightarrow$ se producen X, Y

Podemos reescribir estas tres relaciones como:

- A) $p \geq p_{\max} \Rightarrow \bar{X} = X; Y = \emptyset(\bar{X}) = 0$
- B) $p \leq p_{\min} \Rightarrow X = 0; Y = \bar{Y} = \emptyset(0)$
- C) $p_{\min} < p < p_{\max} \Rightarrow Y = \emptyset(X), X, Y > 0$

[Restricciones de $\emptyset : \emptyset(X) = 0$ y $\emptyset(0) = Y$]

Ejemplo Ilustrativo (Curva de Oferta de Oniki-Uzawa)

Usamos la función de Cobb-Douglas como indicador de la utilidad del consumidor:

$U = C_x^\alpha C_y^\beta$ donde $\alpha, \beta > 0$ con esto tenemos:

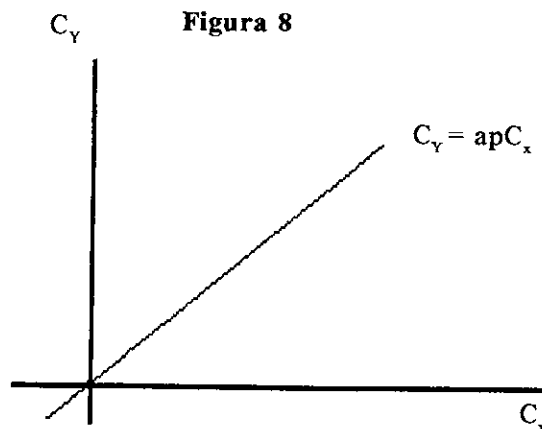
$$U_x = \alpha C_x^{\alpha-1} C_y^\beta \quad \text{y} \quad U_y = \beta C_x^\alpha C_y^{\beta-1}$$

Además

$$p = v(C_x, C_y) = U_x/U_y = \alpha C_y/\beta C_x$$

$$\Rightarrow C_y = apC_x \text{ donde } a = \beta/\alpha$$

De esto, vemos que para p fijo la razón de consumo C_y/C_x es constante:



Por otro lado, si combinamos:

$$C_y = apC_x \text{ con } C_x = X + E_x \quad \text{y} \quad C_y = Y - pE_x$$

Tenemos:

$$apC_x = Y - pE_x$$

$$ap(X + E_x) = Y - pE_x$$

$$apX + apE_x = Y - pE_x$$

$$apE_x + pE_x = Y - apX$$

$$pE_x(a + 1) = Y - apX$$

Finalmente:

$$E_x = \{1/[(a + 1)p]\} [Y - apX]$$

De esto tenemos que:

I) Si $p \geq p_{\max}$ $E_x = [-a/(a + 1)] \bar{X} < 0$ 1

II) Si $p \leq p_{\min}$ $E_x = [1/(a + 1)p] \bar{Y} > 0$ 2

III) Si $p_{\min} < p < p_{\max}$

Además

$$X = X(p) \text{ y } Y = Y(p) \quad (= \emptyset[X(p)])$$

$$\Rightarrow X' > 0 \text{ y } Y' < 0 \text{ para todo } p_{\min} < p < p_{\max}$$

En este caso

$$E_x = [1/(a + 1)p] [Y(p) - apX(p)] \text{3}$$

Las ecuaciones 1,2,3 describen la curva de Ofertas.!!!

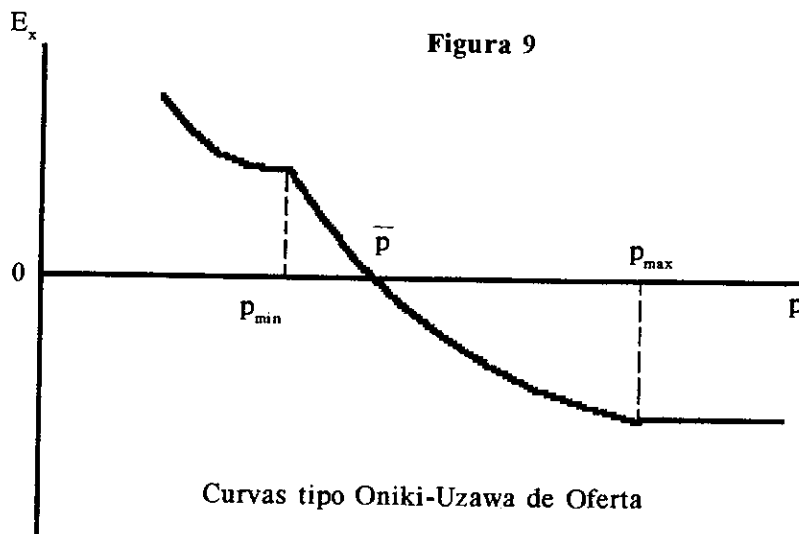
Conclusiones:

- 1) $E_x = \text{Constante} < 0$ Si $p \geq p_{\max}$
- 2) $E_x > 0$ y $dE_x/dp < 0$ si $p \leq p_{\min}$
- 3) Si $p_{\min} < p < p_{\max}$

$$dE_x/dp = [-1/((a + 1) p)] [Y/p + apX' - Y'] < 0$$

(X es función decreciente respecto de p)

Gráfica:



D Ilustración Gráfica del Equilibrio Internacional

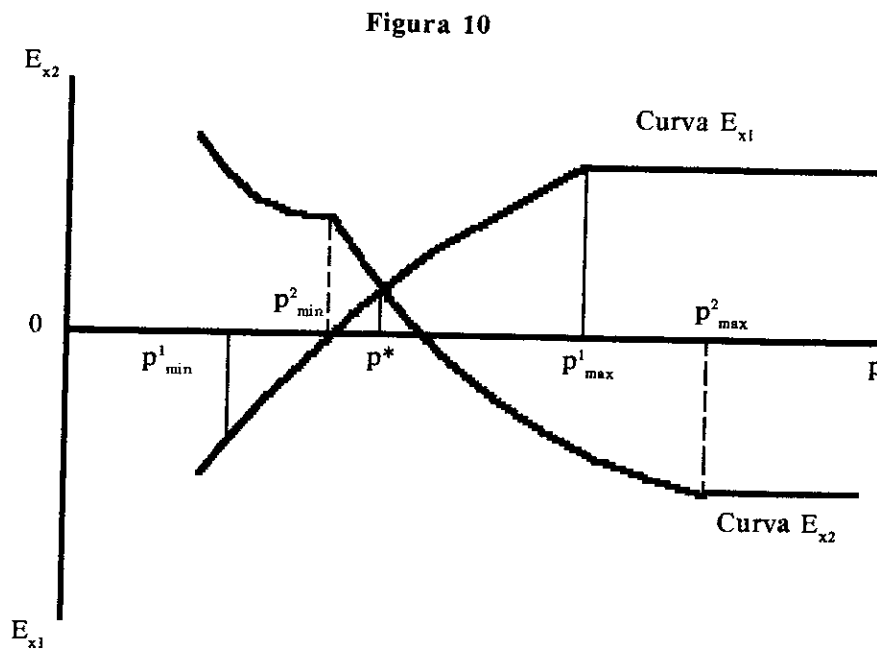
Para ilustrar el equilibrio internacional, primero recordemos que la relación básica del equilibrio es: $E_{x1} + E_{x2} = 0$. Entonces, graficando las dos curvas de oferta de los dos países, como se muestra en la siguiente figura, el precio de equilibrio se obtiene como p^* .

p^* es tal que los países producen ambos bienes. El país 2 importa el bien X y el país 1 importa el bien Y, es decir:

$$E_{x2} > 0$$

$$E_{x1} < 0$$

Gráficamente tenemos:



Es importante notar que la relación:

$$dE_{xi}/dp < 0$$

$$\forall p, p < p_{max}$$

es suficiente para garantizar la unicidad del equilibrio internacional.

II MODELO MATEMATICO PARA UNA ECONOMIA DE DOS SECTORES

A Modelo Matemático para una Economía de Dos Sectores

La esencia del problema del Comercio Internacional es el intercambio de bienes. En este capítulo se hace un análisis del problema, al usar dos bienes producidos en dos países y con dos factores de producción.

El modelo se describe a continuación.

Se producen dos bienes X, Y.

Vamos a tener dos factores de producción:

Mano de Obra: L Capital : K

Funciones de Producción

$$X = F(L_x, K_x)$$

$$Y = G(L_y, K_y)$$

Asumiendo retornos constantes de escala ⁽¹⁾ para cada industria, podemos escribir estas ecuaciones como:

$$X = L_x f(k_x) \text{ con } k_x = K_x/L_x \text{ }^{(2)}$$

$$Y = L_y g(k_y) \text{ con } k_y = K_y/L_y$$

A k_i ($i = x, y$) se le llama Factor-intensidad o razón Capital/Labor en la industria i .

(1) f muestra Retorno Constante de Escala si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

(2) Asumimos que f y g son diferenciables.

Si asumimos Competencia Perfecta y adoptamos la Teoría de Productividad Marginal, podemos concluir que el precio de cada factor puede ser igualado al valor de sus productos marginales y que el precio de cada factor puede ser el mismo en cada industria. Esto podemos expresarlo como:

$$w = p_x \delta_x = p_y \delta_y$$

$$r = p_x \tau_x = p_y \tau_y$$

Donde:

$w =$ Tasa de pago en dinero (Sueldo)

$r =$ Renta por servicio del Capital

$\delta_i =$ Producto físico marginal del Trabajo

$\tau_i =$ Producto físico marginal del Capital

Claramente tenemos que:

$$\delta_x = \partial X / \partial L_x, \quad \tau_x = \partial X / \partial K_x, \text{ y así sucesivamente.}$$

Por otro lado, asumimos que:

$\delta_i > 0$ y $\tau_i > 0$ ($i = x, y$) y también asumimos la Ley de Retorno Decreciente, es decir:

$$\partial \delta_i / \partial L_i < 0; \quad \partial \tau_i / \partial K_i < 0 \quad (i = x, y)$$

Por otro lado, de las Funciones de Producción tenemos:

$$\delta_x = \partial X / \partial L_x = f + L_x (df/dk_x) (dk_x/dL_x) = f - f'k_x$$

Similarmente, tenemos que:

$$\tau_x = f'; \quad \delta_y = g - k_y g'; \quad \tau_y = g'$$

Teorema La ley de Retorno Decreciente es equivalente a la relación

$$f'' < 0 \quad g'' < 0$$

Vamos a probar que

$$\partial \delta_x / \partial L_x < 0 \quad \text{ssi} \quad f'' < 0 \quad (\text{etc.})$$

Demostración:

$$\delta_x = f - k_x f'$$

$$\partial \delta_x / \partial L_x = -f' k_x / L_x - [-f' k_x / L_x - (k_x^2 / L_x) f'']$$

$$= (k_x^2 / L_x) f''$$

lo cual demuestra el teorema.

Definición: Mano de Obra Total y Capital Total.

$$L = L_x + L_y$$

$$K = K_x + K_y$$

Definición: Participación Relativa del Trabajo.

$$\Gamma_x = \delta_x L_x / X$$

$$\Gamma_y = \delta_y L_y / Y$$

Notas:

-Tenemos que $\delta_x = w/p_x$ y $\delta_y = w/p_y$ de aquí es que llamamos a

Γ_x , Participación Relativa del Trabajo

- Por otro lado, Γ_x puede ser considerada como la

Elasticidad de las salidas respecto de las entradas de Trabajo, es decir:

$$\Gamma_x = (dX/X) / (dL_x/L_x)$$

Lema 1

Si $k_x \leq k_y$ entonces $\Gamma_x \geq \Gamma_y$

Demostración:

Usando las ecuaciones de Euler para funciones homogéneas de grado uno⁽¹⁾,

$X = F(L_x, K_x)$ y $Y = G(L_y, K_y)$ se pueden escribir como:

$X = (\partial X/\partial L_x)L_x + (\partial X/\partial K_x)K_x$ y $Y = (\partial Y/\partial L_y)L_y + (\partial Y/\partial K_y)K_y$ o sea:

$$X = \delta_x L_x + \tau_x K_x \dots\dots\dots(1) \quad y$$

$$Y = \delta_y L_y + \tau_y K_y \dots\dots\dots(2)$$

De $w = \delta_i p_i$ y $r = \tau_i p_i$ tenemos $q = w/r = \delta_i/\tau_i$ ($i = x,y$).

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$X = \delta_x L_x + (\delta_x/q)K_x \text{ (dividiendo entre X)}$$

$$1 = (\delta_x L_x)/X + (\delta_x K_x)/(qX) \text{ (multiplicando por } L_x/L_x)$$

$$1 = \Gamma_x + (1/q)\Gamma_x k_x$$

$$1 = \Gamma_x (1 + k_x/q)$$

$$1 = \Gamma_x [(q + k_x)/q]$$

$$\Gamma_x = q/(q + k_x)$$

Similarmente tenemos

$$\Gamma_y = q/(q + k_y) \text{ restando tenemos: } \Gamma_x - \Gamma_y = [q(k_y - k_x)]/[(q + k_x)(q + k_y)],$$

con lo cual se comprueba el lema.

(1) ECUACIONES DE EULER PARA FUNCIONES HOMOGENEAS: Sea $f(x)$ definida en R^n , entonces f es Homogénea de grado m ssi: $mf(x) = (\partial f/\partial x_1)x_1 + \dots + (\partial f/\partial x_n)x_n$

Nota: Si $k_x > k_y$ se dice que X es más Intensivo en Capital que Y y Y es más Intensivo en mano de obra que X (o al contrario si $k_x < k_y$)

Lema 2

$$\hat{p} = (\Gamma_x - \Gamma_y)\hat{q} \quad [dp/p = (\Gamma_x - \Gamma_y)dq/q]$$

Demostración:

$$X = \delta_x L_x + \tau_x K_x \quad (\text{dividiendo por } X)$$

$$1 = (\delta_x L_x)/X + (\tau_x K_x)/X \Rightarrow$$

$$\Gamma_x + \tilde{\Gamma}_x = 1$$

($\tilde{\Gamma}_x = (\tau_x K_x)/X$ es la Participación Relativa del Dinero)

Similarmente

$$\Gamma_y + \tilde{\Gamma}_y = 1$$

Por otro lado, si diferenciamos la Función de Producción

tenemos:

$$dX = \delta_x dL_x + \tau_x dK_x \quad (\text{dividimos por } X)$$

$$dX/X = (\delta_x dL_x)/X + (\tau_x dK_x)/X \quad (\text{multiplicamos el primer$$

término de la derecha

por L_x/L_x y el segundo

por K_x/K_x)

$$\hat{X} = \Gamma_x \hat{L}_x + \tilde{\Gamma}_x \hat{K}_x$$

$$\hat{X} = \Gamma_x \hat{L}_x + (1 - \Gamma_x)\hat{K}_x \dots\dots\dots \text{A similarmente}$$

$$\hat{Y} = \Gamma_y \hat{L}_y + (1 - \Gamma_y)\hat{K}_y \dots\dots\dots \text{B}$$

Si ahora diferenciamos:

$$X = \delta_x L_x + \tau_x K_x \quad y$$

$$Y = \delta_y L_y + \tau_y K_y \quad \text{tenemos:}$$

$$\hat{X} = \Gamma_x L_x + (1 - \Gamma_x) \hat{K}_x + \Gamma_x \hat{\delta}_x + (1 - \Gamma_x) \hat{\tau}_x \dots\dots C$$

$$\hat{Y} = \Gamma_y L_y + (1 - \Gamma_y) \hat{K}_y + \Gamma_y \hat{\delta}_y + (1 - \Gamma_y) \hat{\tau}_y \dots\dots D$$

Si combinamos A, B con C, D, tenemos

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_x \hat{\delta}_x + (1 - \Gamma_x) \hat{\tau}_x &= 0 \\ \Gamma_y \hat{\delta}_y + (1 - \Gamma_y) \hat{\tau}_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \rightarrow I$$

Por otro lado tenemos

$$w = p_x \delta_x = p_y \delta_y$$

$$w/p_y = p \delta_x = \delta_y \text{ además}$$

$$p \tau_x = \tau_y \text{ y también}$$

$$q = \delta_x / \tau_x = \delta_y / \tau_y$$

Si aplicamos logaritmos y diferenciamos, tenemos:

$$\hat{p} + \hat{\delta}_x = \hat{\delta}_y$$

$$\hat{p} + \hat{\tau}_x = \hat{\tau}_y$$

$$\hat{q} = \hat{\delta}_x - \hat{\tau}_x = \hat{\delta}_y - \hat{\tau}_y$$

Si reescribimos I como

$$\Gamma_x (\hat{\delta}_x - \hat{\tau}_x) + \hat{\tau}_x = 0 \text{ y sustituimos, tenemos}$$

$$\Gamma_x \hat{q} + \hat{\tau}_x = 0$$

$$\Gamma_y \hat{q} + \hat{\tau}_y = 0 \text{ si restamos tenemos } (\Gamma_x - \Gamma_y) \hat{q} = \hat{\tau}_y - \hat{\tau}_x$$

$$\Rightarrow (\Gamma_x - \Gamma_y) \hat{q} = \hat{p} \text{ lo que demuestra el lema.}$$

Corolario ⁽¹⁾

Si $k_x > k_y \Rightarrow \hat{p} \geq 0$ de acuerdo con que $\hat{q} \leq 0$

Esto es: $dq/dp \leq 0$ de acuerdo con que $k_x \geq k_y$

Nota: Si $k_x < k_y \Rightarrow \hat{p} \leq 0$ de acuerdo con que $\hat{q} \geq 0$

Estos enunciados son evidentes por los Lemas 1 y 2.

Lema 3 ⁽²⁾

$$\hat{\tau}_x = -\Gamma_x \hat{q}$$

$$\hat{\tau}_y = -\Gamma_y \hat{q}$$

Del Lema 2 teníamos la expresión $\Gamma_i \hat{q} + \hat{\tau}_i = 0$ ($i = 1, 2$),

lo cual hace evidente la prueba de este lema.

Lema 4

q es función monótona creciente, respecto de k_i

Demostración

$$w = p_x \delta_x = p_y \delta_y \quad \delta_x = f - k_x f'$$

y

$$r = p_x \tau_x = p_y \tau_y \quad \tau_x = f'$$

Luego:

$$q = \delta_x / \tau_x = f/f' - k_x = g(k_y)/g'(k_y) - k_y$$

$$dq/dk_x = (-ff'')/(f')^2 > 0 \text{ porque } f'' < 0.$$

(1) Explicación del Corolario: Si el capital es más caro que la mano de obra, entonces se da una sustitución de mano de obra por capital en cada industria.

(2) Explicación del Lema 3: La productividad marginal del capital crece, si el capital se vuelve más caro que la mano de obra.

Corolario

Si $\Phi(1/q) = r/p_x$ y $\vartheta(1/q) = r/p_y$ donde $1/q = r/w$

$\Rightarrow \Phi' > 0$ y $\vartheta' > 0$

Demostración

Como $\tau_x = f'(k_x)$ y $\tau_y = g'(k_y)$

y $\tau_x = r/p_x \Rightarrow r/p_x = f'(k_x)$ además

como $f'' < 0 \Rightarrow d(r/p_x)/dk_x < 0$.

Por el Lema 4 tenemos que $dk_x/dq > 0$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\Phi' &= -d(r/p_x)/d(1/q) \cdot 1/q^2 \\ &= -d(r/p_x)/dq \cdot q^2 \\ &= -[d(r/p_x)/dk_x][dk_x/dq]q^2 > 0\end{aligned}$$

lo cual demuestra el corolario para Φ' . En forma similar se hace para ϑ' .

Definición

La tasa de cambio porcentual del Factor de Intensidad por unidad de cambio porcentual de la Tasa Marginal de Transformación es llamada Elasticidad del Factor de Substitución.

$$\sigma_i = (dk_i/k_i)/(dq/q) \text{ con } i = x, y$$

Nota: $\sigma_i = (q/k_i)(dk_i/dq)$

Lema 5

Asumiendo que $k_x \neq k_y$ tenemos (recordar que $k = K/L$)

$$\hat{X} = A(\hat{K} - (k_y/k)\hat{L}) - B\hat{q}$$

$$\hat{Y} = -\bar{A}(\hat{K} - (k_x/k)\hat{L}) + \bar{B}\hat{q}$$

$$\hat{X} - \hat{Y} = C(\hat{K} - \hat{L}) - D\hat{q}$$

A, B, \bar{A} , \bar{B} , C y D se definen como:

$$A = 1/(k_x - k_y).K/L_x$$

$$\bar{A} = 1/(k_x - k_y)K/L_y$$

$$B = 1/(k_x - k_y)\{[\Gamma_x k_x + (1 - \Gamma_x)k_y]\sigma_x + k_y\sigma_y/L_x\}$$

$$\bar{B} = 1/(k_x - k_y)\{[\Gamma_y k_y + (1 - \Gamma_y)k_x]\sigma_x + k_x\sigma_x/L_y\}$$

$$C = 1/(k_x - k_y).LK/L_x L_y \quad y$$

$$D = B + \bar{B}$$

Demostración

Por $\sigma_i = (dk_i/k_i)/(dq/q) \Rightarrow$

$$dk_i/k_i = \sigma_i dq/q \text{ pero}$$

$$dk_i/k_i = dk_i/k_i - dL_i/L_i \Rightarrow$$

$$k_i = \sigma_i q + L_i \text{ además}$$

$$L_x + L_y = L$$

$$K_x + K_y = K \Rightarrow$$

$$L_x/L.L_x + L_y/L.L_y = L$$

$$K_x/KK_x + K_y/KK_y = K$$

Con estos resultados y con un poco de álgebra se llega a la demostración del lema.

B Aplicaciones

1 Elasticidad de la producción

Caso 1. Suponemos que K y L son fijos \Rightarrow X, Y son función de p.

Definición Elasticidad de la Producción

$$\varepsilon_x = (dX/X)/(dp/p) = \hat{X}/\hat{p}$$

$$\varepsilon_y = -(dY/Y)/(dp/p) = -\hat{Y}/\hat{p}$$

Para obtener una expresión para ε_x , usamos el Lema 2 y el

Lema 5 y el hecho que $\hat{K} = \hat{L} = 0$:

$$\hat{p} = (\Gamma_x - \Gamma_y)\hat{q}$$

$$\hat{X} = A(\hat{K} - k_y/kL) - B\hat{q}$$

$$\varepsilon_x = \hat{X}/\hat{p} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = -B\hat{q}/[(\Gamma_x - \Gamma_y)\hat{q}]$$

$$= -1/[(k_x - k_y)(\Gamma_x - \Gamma_y)]$$

$$\{[\Gamma_x k_x + (1 - \Gamma_x)k_y]\sigma_x + k_y\sigma_y/L_x\}$$

ε_y se define en forma similar

Como $(k_x - k_y)(\Gamma_x - \Gamma_y)$ es siempre negativo $\Rightarrow \varepsilon_x$ es siempre positivo

Con las relaciones anteriores se puede probar que $\varepsilon_x X = \varepsilon_y Y$,

si $p = 1$

Otra forma

Por la curva de Transformación tenemos:

Si $\hat{X} > 0 \Rightarrow \hat{Y} < 0$ además

$dY/dX = -p_x/p_y$ además

$$\epsilon_x X - \epsilon_y Y = dX/dp + dY/dp = 0 \Rightarrow \epsilon_x X = \epsilon_y Y.$$

Caso 2. Cantidades de Factores variables.

En este caso \hat{L} y \hat{K} no son cero (lo cual es más real que el caso anterior).

Podemos escribir:

$$L = L(q), \quad K = K(1/q)$$

$$\alpha = (dL/L)/(dq/q) = \hat{L}/\hat{q} \quad \text{Elasticidad del Trabajo}$$

$$\beta = [dK/K]/[d(1/q)/(1/q)] = -\hat{K}/\hat{q} \quad \text{Elasticidad del Capital.}$$

Si hacemos inicialmente $q = 1$ y sustituimos en las

expresiones del Lema 5 tenemos:

$$\hat{X} = -[A(\beta + \alpha k_y/k) + B]\hat{q}$$

$$\hat{Y} = [\bar{A}(\beta + \alpha k_x/k) + \bar{B}]\hat{q}$$

Con el Lema 2 y estas expresiones podemos obtener expresiones "generalizadas" para la Elasticidad de la Producción:

$$\epsilon_x = -1/[(k_x - k_y)(\Gamma_x - \Gamma_y)]\{(BK/L_x + \alpha k_y/k) + [\Gamma_x k_x + (1 - \sigma_x)k_y]\sigma_x + k_y \sigma_y / L_x\}$$

ϵ_y se define en forma similar

2 TEOREMA DE RYBCZYNSKI

Si la cantidad usada de un factor crece con el uso de otro factor constante, la salida absoluta del Bien que usa el factor creciente relativamente menos "intensivo", disminuye si se mantiene constante el precio relativo de los bienes.

Demostración

Si $\hat{p} = 0 \Rightarrow \hat{q} = 0$ por el Lema 2

Si $\hat{q} = 0$ por el Lema 5 tenemos:

$$\hat{X} = A(\hat{K} - k_y/k.L) \quad \text{y} \quad \hat{Y} = -A(\hat{K} - k_x/k.L) \quad (k_x \neq k_y)$$

Supongamos que X es más intensivo en capital que Y ($k_x > k_y$)

$$\Rightarrow A > 0 \quad \text{y} \quad \bar{A} > 0 \Rightarrow$$

Si $\hat{K} > k_x/k.L \Rightarrow \hat{X} > 0$ y $\hat{Y} < 0$

Si $\hat{K} < k_y/k.L \Rightarrow \hat{X} < 0$ y $\hat{Y} > 0$

Si $k_x/k.L > \hat{K} > k_y/k.L \Rightarrow \hat{X} > 0$ y $\hat{Y} > 0$

El teorema se comprueba si fijamos $\hat{K} > 0$ y $\hat{L} = 0$ ó $\hat{L} > 0$ y $\hat{K} = 0$ en la relación anterior.

3 Teorema de Mishán

Un crecimiento en la salida de un bien intensivo en capital (labor), implica una disminución (crecimiento) en la relación w/r.

Demostración

Por el Lema 5, poniendo $\hat{K} = 0$ y $\hat{L} = 0$ obtenemos:

$$\hat{X} = -B\hat{q} \quad \text{y} \quad \hat{Y} = \bar{B}\hat{q}$$

Suponemos que X es más intensivo en capital que Y ($k_x > k_y$)

$$\Rightarrow B > 0 \quad \text{y} \quad \bar{B} > 0 \Rightarrow$$

$$\hat{X} = -z\hat{q} \quad \text{y} \quad \hat{Y} = z\hat{q} \quad (z = \text{constante})$$

lo cual demuestra el teorema.

III TEOREMA DE HECKSCHER-OHLIN

Introducción:

De nuevo vamos a considerar un mundo de dos países, cada uno de estos es capaz de producir dos bienes usando dos factores de producción, mano de obra (L) y capital (K), la dotación de cada uno de estos es fijo para cada país. Nombraremos a los países como el país 1 y el país 2, y a los bienes producidos como X e Y.

Suponemos también, que las condiciones dadas en el capítulo anterior, son válidas para cada país. En otras palabras, asumimos que la función de producción es lineal homogénea (es decir, con retorno constante de escala) con la propiedad de retorno decreciente, que cada factor es totalmente empleado, y que la competencia perfecta prevalece en el mercado de los bienes y de los factores de producción.

Suponemos entonces que los dos países se comprometen en el comercio internacional. Asumimos que existe libre comercio y que los bienes son movibles internacionalmente, de la misma forma como localmente, sin impedimentos y con costos de transporte insignificantes. Asumimos también que los factores de producción son movibles domésticamente sin impedimentos y con costos de transporte insignificantes pero son completamente inamovibles internacionalmente por costos prohibitivos de transporte u otros impedimentos tales como leyes de migración.

Tenemos entonces que si el bien X es relativamente más barato que el bien Y en el país 1 comparado con el país 2 antes del comercio, entonces el país 1 exporta X e importa Y después del comercio. De esta forma, la producción del bien X crece (decrece) y la producción de Y decrece (crece) en el país 1 (país 2). Esto presumiblemente causa un crecimiento en el costo de producción de X relativo a Y en el país 1 (por la ley de retornos decrecientes). Así, el precio de X relativo a Y crece en el país 1. Similarmente, el precio de X relativo a Y decrece en el país 2. Este proceso continúa hasta que la razón de precios de los bienes es la misma en ambos países y se establece la razón de precios del equilibrio internacional.

Es importante observar que la tasa de cambio de la moneda de los dos países, no juega un papel importante en el análisis anterior.

Entonces, al inquirir en ambos lados de la economía, la demanda y la producción, con los dos esenciales supuestos que la función de producción para cada bien es la misma en ambos países y que la diferencia en las condiciones de demanda son insignificantes, Ohlin establece la conclusión que el factor esencial para determinar una diferencia regional (o internacional) en la razón de precios, es la diferencia en la dotación de factores en las dos regiones (países). Esta conclusión, conocida como el Teorema de Heckscher-Ohlin, puede ser establecida como:

Enunciado del Teorema:

Bajo los supuestos mencionados anteriormente y dadas las especificaciones del modelo propuesto en este capítulo, un país exporta (importa) el bien que es relativamente más intensivo en el factor que es relativamente más (menos) abundante en este país.

Otra forma de enunciar el teorema:

Cada país exportará el bien intensivo en su factor relativamente abundante y barato, e importará el bien intensivo en su factor relativamente escaso y costoso.

Un ejemplo del enunciado de este teorema es la comparación entre Guatemala y los Estados Unidos. En Guatemala se supone que la mano de obra es abundante y barata al contrario de los Estados Unidos. En los Estados Unidos podemos suponer que el capital es abundante y barato. Con estos supuestos concluimos que Guatemala exporta los bienes intensivos en mano de obra (Maquila) y los Estados Unidos exporta los bienes intensivos en Capital (Computadoras).

Paradoja de Leontief

Previo a demostrar el Teorema de Heckscher-Ohlin se muestra la Paradoja de Leontief, la que supuestamente contradice el teorema mencionado. Leontief propone, en la tabla que se da a continuación, resultados que contradicen la afirmación del teorema de Heckscher-Ohlin. En esta tabla cada entrada representa la cantidad de capital o mano de obra necesaria

para producir el valor de un millón de dólares (precio de 1947) por bienes de exportación o sustitutos de bienes de importación.

	1947		1951	
	Exportación	Importación	Exportación	Importación
Capital	2,550,780	3,091,339	2,256,800	2,303,400
Mano de Obra (hombre x año)	181.31	170.00	173.91	167.81

La tabla anterior muestra que:

$$1947: K_{imp}/k_{exp} = 1.3$$

$$1951: K_{imp}/k_{exp} = 1.058,$$

donde k_{exp} representa la razón capital/mano de obra en la industria de exportación y k_{imp} representa la razón capital/mano de obra en la industria de sustitutos de importación. Se puede notar que en 1947 y 1951 se tiene que $k_{imp} > k_{exp}$.

Además en 1947 y en 1951, los sustitutos de bienes de importación son más intensivos en capital que los bienes exportados por los Estados Unidos!!. Como los Estados Unidos es presumiblemente más abundante en capital que el resto del mundo, el resultado aparentemente contradice el teorema de Heckscher-Ohlin.

El problema se da por la interpretación de algunos conceptos, pues el concepto de intensidad del factor se da como la razón capital/mano de obra lo cual, en términos de la

notación del capítulo anterior sería k_x y k_y . Por tanto, X es más intensivo en capital que Y, si $k_x > k_y$ y X es más intensivo en mano de obra que Y si $k_x < k_y$. Esta definición de factor de intensidad no presenta diferencia entre Leontief y Ohlin.

Si vemos ahora la definición de abundancia, notamos que Leontief define la abundancia en términos de la razón de dotación de factores. En notación matemática, tenemos que el país 1 es más abundante en capital que el país 2 si

$$K_1/L_1 > K_2/L_2$$

Esta definición no coincide con el concepto de Ohlin, el cual da la siguiente definición de abundancia.

Definición (Ohlin)

Abundancia de un factor: El país 1 es más abundante en capital que el país 2 si:

$$q_1 > q_2$$

Similarmente el país 1 es más abundante en trabajo si:

$$q_1 < q_2 \quad (1)$$

Si adoptamos esta definición de abundancia de un factor podemos dar la siguiente demostración.

Demostración del Teorema

Supongamos que X es más intensivo en capital que Y ($k_x > k_y$) para todo q .

Por el Corolario del Lema 2 del capítulo anterior:

$$\text{Como } k_x > k_y \text{ entonces si } \hat{q} \leq 0 \Rightarrow \hat{p} \geq 0.$$

(1) En otras palabras, si el capital (mano de obra) es relativamente barato, entonces el país es llamado un país abundante en capital (mano de obra).

Si suponemos que el país 1 es más abundante en capital que el país 2, entonces $q_1 > q_2 \Rightarrow$

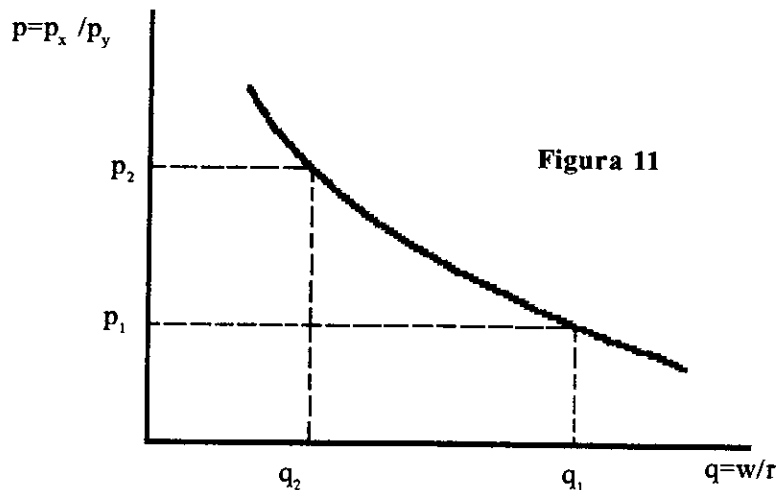
$$\text{Si } k_x > k_y \text{ y } q_1 > q_2 \Rightarrow p_1 < p_2$$

$$\text{es decir } (p_x/p_y)_1 < (p_x/p_y)_2 \Rightarrow$$

El país 1 exporta el Bien X e importa el Bien Y, después del tratado.

Como X es más intensivo en capital que Y y el país 1 es más abundante en capital que el País 2, esto completa la prueba del teorema.

Gráficamente



Conclusión:

- 1) Como el planteamiento del teorema es un tanto ambiguo, para aceptar la demostración del mismo, debemos confirmar que el teorema es válido si y sólo si las condiciones de demanda y la relación del factor de intensidad son correctamente definidos.
- 2) Algunas otras razones contra la paradoja de Leontief son:
 - i) Leontief asume que los trabajadores Norteamericanos son 3 veces más eficientes que

los del resto del mundo, lo cual implica que los Norteamericanos son más abundantes en mano de obra que el resto del mundo (El teorema de Hecksher-Ohlin requiere de mano de obra homogénea).

- ii) El trabajo fue realizado con datos muy próximos a la Segunda Guerra Mundial.
- iii) Se hizo sobre bienes sustitutos de importación por la carencia de datos del resto del mundo.
- iv) Las restricciones mismas del modelo.
- v) Algunos bienes son intensivos en recursos naturales, de manera que clasificarlos en intensivos en mano de obra o en capital, como los hizo Leontief, es inapropiado.
- vi) Los aranceles en los Estados Unidos, generalmente son mayores en bienes intensivos en mano de obra y esto distorsiona el flujo del comercio.
- vii) Leontief incluyó en su medición de capital, solamente el capital físico, maquinaria, construcciones, etc., e ignoró completamente el capital humano (gastos en educación, adiestramiento en el trabajo, salud, etc.).

IV LA TEORIA RICARDIANA DE LAS VENTAJAS COMPARATIVAS

La primera parte de este trabajo, muestra por medio del teorema de Heckscher-Ohlin, qué producto exporta y qué producto importa un país en un comercio de dos países que producen dos bienes, con la condición que ambos países tienen una función de producción idéntica.

A Introducción: Ventajas Comparativas

La teoría Ricardiana sobre Ventajas Comparativas asume que el mercado consiste de dos países; cada uno es capaz de producir dos bienes. Asumimos además que cada bien se produce usando un solo factor (Mano de Obra) en cada país. La mano de obra es completamente inamovible entre países y completamente movable dentro de cada país.

Supongamos que dos países generan dos productos, con los requerimientos de mano de obra, para producir una unidad del producto, que se indican en la tabla siguiente:

	Producto 1	Producto 2
país 1	100	120
país 2	90	80

En la tabla se puede notar que el país 2 tiene una Ventaja Absoluta en la producción de ambos bienes porque necesita menor cantidad de mano de obra para producirlos. Es decir, el país 2 es más eficiente que el país 1 en la producción de los bienes.

Podemos notar que la "eficiencia" de una persona del país 2 es 90/100 sobre una persona del país 1 para producir una unidad del Bien 1 y 80/120 para producir una unidad del Bien 2. Puede notarse que la ventaja en la eficiencia no es la misma para ambos productos. De esto nace el concepto de Ventajas Comparativas.

Podemos decir que el país 1 tiene Ventaja Comparativa sobre el país 2 en la producción del Bien 1, pero el país 2 tiene Ventaja Comparativa sobre el país 1 en la producción del Bien 2 (Porque $90/100 > 80/120$).

Con estas condiciones, si cada país se especializa en la producción del bien en el cual tiene Ventaja Comparativa, la ganancia para la producción mundial se ilustra en la tabla siguiente:

Antes de la Especialización

	PAIS 1	PAIS 2	PRODUCCION MUNDIAL:
Bien 1	100 trabajadores = 1 unidad	90 trabajadores = 1 unidad	2
Bien 2	120 trabajadores = 1 unidad	80 trabajadores = 1 unidad	2

Después de la Especialización

	PAIS 1	PAIS 2	PRODUCCION MUNDIAL:
Bien 1	220 trabajadores = 220/100 unidades		2.2
Bien 2		170 trabajadores = 170/80 unidades	2.125

Ricardo supone que la Razón de Intercambio entre ambos países, debe estar entre las razones de ventajas comparativas (entre 90/80 y 100/120). Para ilustrar la ganancia en el consumo que tiene cada país, asumamos una razón de intercambio de 1/1.

Con esta razón de intercambio, si el país 2 exporta 1.125 unidades (sobre la producción total de 2.125) del Producto 2 e importa 1.125 unidades del Producto 1, los resultados obtenidos se ilustran en la tabla siguiente:

GANANCIA DEL TRATADO

	PAIS 1	PAIS 2
PRODUCTO 1	1 (1.075)	1 (1.125)
PRODUCTO 2	1 (1.125)	1 (1)

El consumo después del tratado y de la especialización se ilustra con los números entre paréntesis. El estado original se muestra con los números fuera del paréntesis.

Como puede notarse, cada país puede incrementar el consumo de por lo menos un bien, sin disminuir el consumo del otro, usando la misma cantidad de mano de obra utilizada antes del comercio y la especialización.⁽¹⁾

B Formulación Matemática de la Teoría Ricardiana

Asumimos que el mundo consta de dos países, 1 y 2. Cada país produce dos bienes X, Y con solo un factor de producción, Mano de Obra.

Sea L_1 y L_2 la cantidad de Mano de Obra disponible en los países 1 y 2.

Sean l_{xi} y l_{yi} la cantidad de Mano de Obra necesaria para producir una unidad de los bienes X y Y, respectivamente, en el país i ($i = 1,2$).

Sea x_i , y_i la cantidad producida de los bienes X y Y, respectivamente en el país i ($i = 1,2$) y sea L_{xi} , L_{yi} la cantidad de mano de obra requerida en la X-industria y Y-industria, respectivamente, en el país i ($i = 1,2$).

Entonces las Funciones de Producción en el país i son:

$$x_i = (1/l_{xi})L_{xi} \quad y_i = (1/l_{yi})L_{yi}$$

(1) Es importante mencionar que David Ricardo basó su ley de Ventajas Comparativas en la teoría de Valor-Trabajo. Más adecuado es explicar las Ventajas Comparativas en la teoría del Costo de Oportunidad. Este establece que el costo de un bien es la cantidad de un segundo bien que debe sacrificarse para liberar los suficientes factores de producción o recursos para producir una unidad adicional del primer bien.

Como la capacidad de producción de ambos países no es igual, en general tenemos que: $l_{x1} \neq l_{x2}$ y $l_{y1} \neq l_{y2}$, esto implica que las funciones de Producción de cada país son distintas (a diferencia del modelo de Heckscher-Ohlin).

Supongamos ahora que el país 1 tiene una Ventaja Comparativa en la producción del Bien X, esto es:

$$(l_{x1}/l_{x2}) < (l_{y1}/l_{y2}) \text{ o equivalente}$$

$$(l_{x1}/l_{y1}) < (l_{x2}/l_{y2})$$

La cantidad de bienes producidos en cada país está restringido por la capacidad de producción, es decir:

$$l_{x1}x_1 + l_{y1}y_1 \leq L_1 \text{ y}$$

$$l_{x2}x_2 + l_{y2}y_2 \leq L_2$$

Podemos reescribir estas desigualdades de la siguiente manera:

$$x_1/(L_1/l_{x1}) + y_1/(L_1/l_{y1}) \leq 1 \quad \text{ó} \quad x_1/a_1 + y_1/b_1 \leq 1;$$

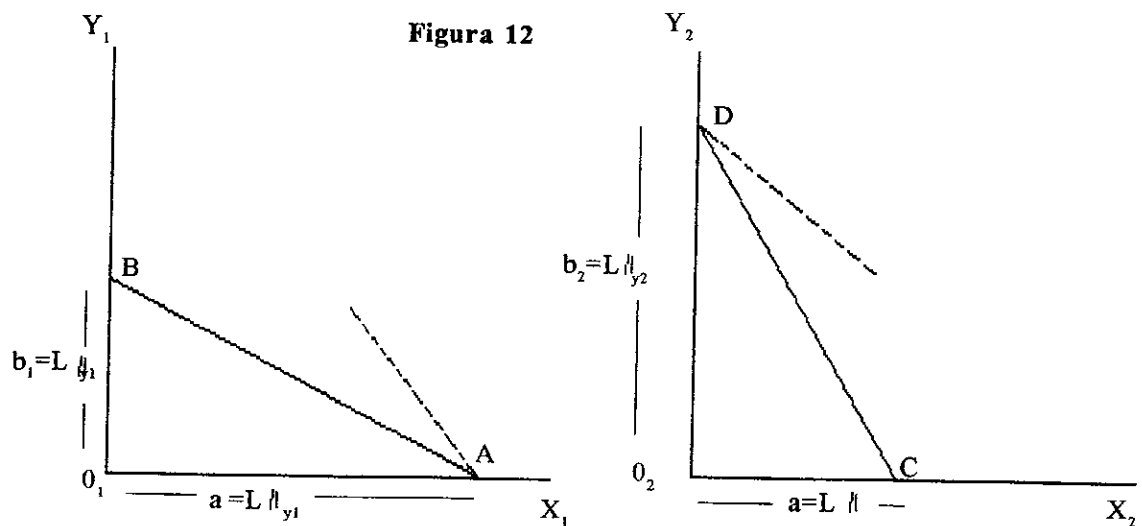
$$x_2/(L_2/l_{x2}) + y_2/(L_2/l_{y2}) \leq 1 \quad \text{ó} \quad x_2/a_2 + y_2/b_2 \leq 1;$$

donde $a_i = L_i/l_{xi}$,

$$b_i = L_i/l_{yi} \quad (i = 1,2)$$

El conjunto de combinaciones (x_i, y_i) en el cuadrante positivo, que satisfacen las últimas desigualdades, describen **El Conjunto de Posibilidades de Producción** en el país i ($i = 1,2$).

Lo anterior se ilustra en la gráfica siguiente:



Problemas de Optimización

Problema 1. (Beneficio Mundial).

Consiste en maximizar la Renta Mundial dada una razón de precios fija: p_x/p_y .

El problema es entonces:

Maximizar $(p_x/p_y)(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$

Sujeto a:

$$x_1/a_1 + y_1/b_1 \leq 1; \quad x_2/a_2 + y_2/b_2 \leq 1 \text{ y}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2 \geq 0$$

Problema 2. (Beneficio de un país)

Consiste en Maximizar la Renta Real de cada país.

a) Maximizar $(p_x/p_y)x_1 + y_1$

Sujeto a:

$$x_1/a_1 + y_1/b_1 \leq 1 \text{ y } x_1, \quad y_1 \geq 0$$

b) Maximizar $(p_x/p_y)x_2 + y_2$

Sujeto a:

$$x_2/a_2 + y_2/b_2 \leq 1 \text{ y } x_2, y_2 \geq 0$$

En cada caso asumimos que la razón de precios permanece constante.

C TEOREMA (Ricardo)

Dada una razón de precios fija, la completa especialización para ambos países, maximiza la renta real del mundo como un todo y de cada país individualmente.

Demostración Gráfica

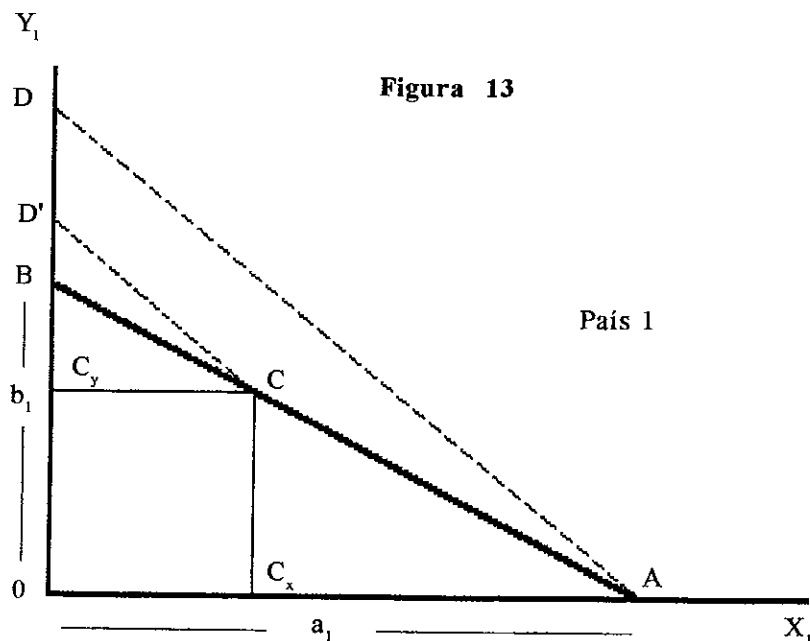
Asumimos, de acuerdo al criterio Ricardiano, que:

1.- $1_{x1}/1_{y1} < 1_{x2}/1_{y2}$ ó $b_1/a_1 < b_2/a_2$ (con $1_{xi}, 1_{yi} > 0, i = 1,2$)

2.- $1_{x1}/1_{y1} < p_x/p_y < 1_{x2}/1_{y2}$ ó $b_1/a_1 < p_x/p_y < b_2/a_2$ (con $p_x, p_y > 0$)

Parte 1

Para demostrar la parte del teorema referente al bienestar de cada país, usaremos la gráfica número 12 y la gráfica siguiente:



AD es la Recta de Precios del Mundo

—
AB define el Conjunto de Posibilidades de Producción
Cualquier punto de Producción debe estar en \overline{AB} .

Si asumimos que el punto de Producción es C, entonces el país produce C_x del Bien X y C_y del Bien Y. En este caso la RENTA REAL, medida en términos del Bien Y, a la razón de cambio antes del comercio, es $OB [= C_y + C_x (OB/OA)]$.

Si ahora asumimos que el país 1 se especializa en la producción del Bien X y entra en el Comercio Internacional con el resto del mundo (país 2). Entonces la Renta Real del país 1, medida en términos del Bien Y, es OD , a la razón de precios dada por AD . En este caso la ganancia es BD .

Podemos notar que cualquier otro punto que se escoja, que no sea de la completa especialización, es inferior a éste.

Por ejemplo, si escogemos C, la Renta Real, después del Comercio, en términos del Bien Y y la razón de precios dada por CD' , es OD' , que es evidente menor que OD (notar que CD' es paralela a AD), lo cual demuestra la parte del Teorema.

Parte 2

Para demostrar la parte del Bienestar Mundial, usaremos la gráfica siguiente:

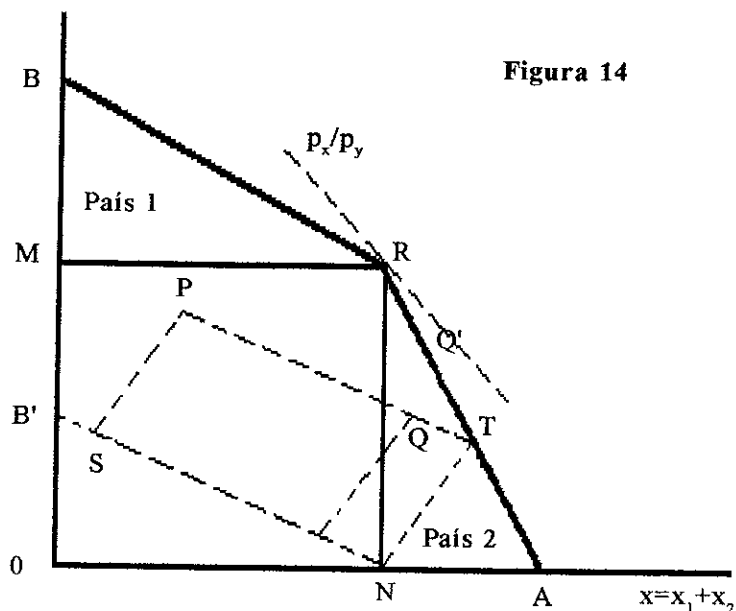


Figura 14

El conjunto 0ARB representa el Conjunto Mundial de Posibilidades de Producción.

Los triángulos MRB y NAR representan los Conjuntos de Producción de los países 1 y 2, respectivamente.

Geoméricamente el Conjunto de Posibilidades Mundiales de Producción, puede obtenerse deslizando NAR sobre el eje B'N.

Podemos notar que si ambos países se especializaran en la producción de Y, la Producción Mundial total de Y, estaría dada por 0B y si se especializaran en X, la Producción Mundial de X sería 0A.

Si el país 1 se especializa en la producción de X y el país 2 en la producción de Y, la Producción Mundial de X e Y está representada por el punto R (Punto Ricardiano).

Para demostrar que la completa especialización maximiza la Renta Mundial, asumimos que ambos países producen ambos bienes, por ejemplo en los puntos S para el país 1 y T para el país 2.

En este caso de Especialización Incompleta, el punto de Producción Mundial es el punto P. Puede notarse que el punto P está estrictamente dentro del Conjunto de Posibilidades Mundiales de Producción.

Finalmente, podemos notar que cualquier combinación de Especialización Incompleta, da un Punto de Producción Mundial que queda dentro de la región ORAB, lo cual comprueba la última parte del teorema.

D Programación Lineal y el Problema Dual

Dado el problema de Programación Lineal

(M) Maximizar $f(x) = cx$ sujeto a:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

El Dual de este problema está dado por:

(m) Minimizar $g(y) = by$ sujeto a:

$$A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

El Teorema de Dualidad establece que si hay solución para el primal, entonces hay solución para el Dual. Además se tiene que:

- i) $\text{Max } f(x) = \text{min } g(y)$
- ii) Si x^* es la solución de (M) y y^* es la solución de (m) entonces
 - a) $Ax^* < b \Rightarrow y^* = 0$
 - b) $x^* > 0 \Rightarrow A^T y^* = c$
 - c) $A^T y^* > c \Rightarrow x^* = 0$
 - d) $y^* > 0 \Rightarrow Ax^* = b$

E El Teorema de Dualidad y la Teoría Ricardiana

En esta parte del trabajo, se aplicará el Teorema de Dualidad de la Programación Lineal a la Teoría Ricardiana.

Partimos del problema original, PROBLEMA DE MAXIMIZACION, el cual está dado por:

Para cada i , $i = 1, 2$,

maximizar $p_x x_i + p_y y_i$ sujeto a

$$l_{xi} x_i + l_{yi} y_i \leq L_p$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0$$

El Dual de este problema de maximización, puede ser escrito como:

Para cada i , $i = 1, 2$,

minimizar $w_i L_i$ sujeto a

$$w_i l_{xi} \geq p_x, w_i l_{yi} \geq p_y, w_i \geq 0$$

Usando el Teorema de Dualidad, tenemos que si una solución óptima finita para uno de los problemas, existe una solución finita óptima para el otro y además:

a) $p_x x_i + p_y y_i = w_i L_i, i = 1, 2$

b) Si $w_i l_{xi} > p_x$, entonces $x_i = 0$ y si $w_i l_{yi} > p_y$, entonces

$$y_i = 0, i = 1, 2$$

c) Si $l_{xi} x_i + l_{yi} y_i < L_i$, entonces $w_i = 0, i = 1, 2$

Nótese que la relación b es equivalente a:

$$b') x_i > 0 \Rightarrow w_i l_{xi} = p_x \text{ y } y_i > 0 \Rightarrow w_i l_{yi} = p_y$$

Debemos recordar que w_i es la tasa de pago en dinero (sueldo) para el país i .

La relación a, dice que en el punto óptimo, el producto total de la nación es igual al factor total de ingresos de cada país.

La relación b, dice que en el punto óptimo, si el costo marginal (= promedio) de un bien excede su precio, entonces las salidas del bien es 0.

La relación c establece que si existe un exceso de oferta de mano de obra en el país i , en condiciones de equilibrio, el precio de la mano de obra del país es igual a 0.

La relación b' establece que si un bien es producido, entonces el costo marginal (= promedio) del bien es igual a su precio.

Con las relaciones anteriores y usando la suposición Ricardiana que $l_{x1}/l_{y1} < l_{x2}/l_{y2}$ podemos probar las siguientes cuatro proposiciones:

1. No es posible para el país 1 producir el bien Y y para el país 2 producir el bien X al mismo tiempo. Es decir, no es posible para ambos países producir los bienes en que tienen desventajas comparativas, al mismo tiempo.

Prueba: Supongamos que el país 1 produce Y. Entonces por b y b' , $p_y = w_1 l_{y1}$ y $p_x \leq w_1 l_{x1}$. De aquí, $p_x/p_y \leq l_{x1}/l_{y1}$. Similarmente, si suponemos que el país 2 produce X, $p_x = w_2 l_{x2}$ y $p_y \leq w_2 l_{y2}$. Entonces tenemos $p_x/p_y \geq l_{x2}/l_{y2}$ y, consecuentemente, $l_{x1}/l_{y1} \geq l_{x2}/l_{y2}$ lo cual contradice lo que asumimos.

2. Si el país 1 produce X y el país 2 produce Y, entonces es necesario que

$$l_{x1}/l_{y1} \leq p_x/p_y \leq l_{x2}/l_{y2}.$$

Prueba: De las relaciones b y b' , obtenemos $p_x = w_1 l_{x1}$, $p_y \leq w_1 l_{y1}$, $p_x \leq w_2 l_{x2}$ y $p_y = w_2 l_{y2}$. De esto podemos obtener $l_{x1}/l_{y1} \leq p_x/p_y \leq l_{x2}/l_{y2}$.

3. Si el país 1 produce X y Y, es necesario que $p_x/p_y = l_{x1}/l_{y1}$.

Similarmente, si el país 2 produce X y Y, es necesario $p_x/p_y = l_{x2}/l_{y2}$.

Prueba: Usando las condiciones del primer caso, tenemos que $p_x = w_1 l_{x1}$ y $p_y = w_1 l_{y1}$. Dividiendo estos dos resultados comprobamos la primera parte. La segunda parte se prueba en forma similar.

Combinando las proposiciones anteriores, obtenemos:

4. El Modelo del Comercio y la Especialización puede obtenerse como sigue:

CASO 1 $l_{x1}/l_{y1} < p_x/p_y < l_{x2}/l_{y2}$ I(X) y II(Y)

CASO 2 $l_{x1}/l_{y1} = p_x/p_y < l_{x2}/l_{y2}$ I(X,Y) y II(Y)

CASO 3 $l_{x1}/l_{y1} < p_x/p_y = l_{x2}/l_{y2}$ I(X) y II(X, Y)

CASO 4 $p_x/p_y < l_{x1}/l_{y1} < l_{x2}/l_{y2}$ No se produce X

CASO 5 $l_{x1}/l_{y1} < l_{x2}/l_{y2} < p_x/p_y$ No se produce Y

5. En orden que al menos un país tenga especialización completa en la producción de un bien (esto es, I(X), II(Y), o ambos), es necesario que

$$l_{y2}/l_{y1} < w_1/w_2 < l_{x2}/l_{x1}$$

Prueba: De b y b' obtenemos $p_x = w_1 l_{x1}$, $p_y \leq w_1 l_{y1}$,

$p_x \leq w_2 l_{x2}$ y $p_y = w_2 l_{y2}$. De la primera y tercera expresión obtenemos $w_1 l_{x1} \leq w_2 l_{x2}$ ó $w_1/w_2 \leq l_{x2}/l_{x1}$. Similarmente, de la segunda y cuarta expresión obtenemos $l_{y2}/l_{y1} \leq w_1/w_2$. De aquí obtenemos $l_{y2}/l_{y1} \leq w_1/w_2 \leq l_{x2}/l_{x1}$.

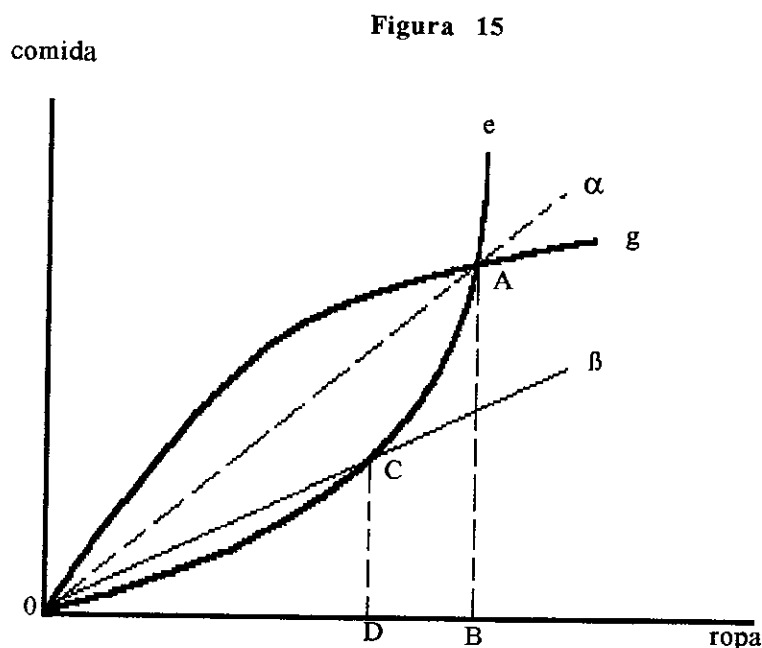
El caso de las igualdades corresponde a la Especialización Incompleta, por tanto deben excluirse.

V TEORIA CLASICA CON CONDICIONES DE DEMANDA

A Introducción a las condiciones de demanda

Como vimos anteriormente, la Curva de Oferta se define como aquella que queda determinada por todos los puntos de exceso de oferta y de exceso de demanda de los bienes de un país correspondiendo a diferentes razones de precios de los bienes.

Vamos a considerar un Mundo de dos países, E y G. La Curva de Oferta de estos países, son las curvas e y g de la gráfica siguiente.



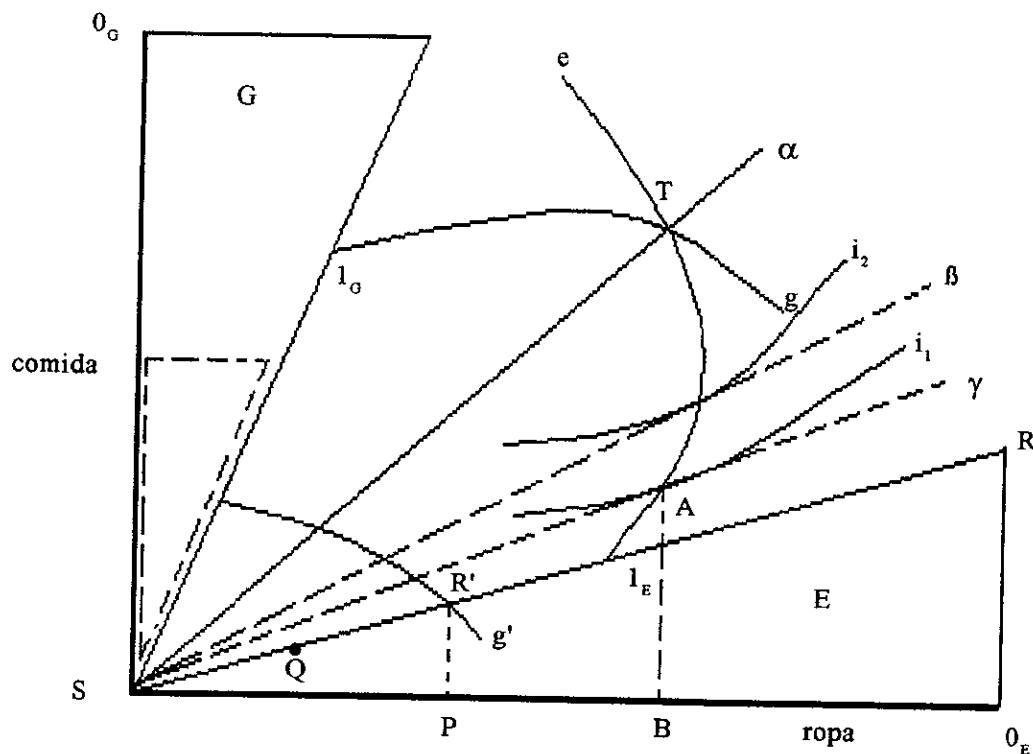
En esta gráfica podemos notar que si la razón de precios está dada por la pendiente de la recta β , entonces, C es el punto en que el país E tiene un exceso de oferta (OD) de ropa y un exceso de demanda (CD) de comida. Cuando hacemos variar la línea de precios, obtenemos la curva de oferta del país E, dada por la curva e.

El punto donde los dos países se satisfacen, es el punto donde se intersectan las dos curvas de oferta (A). La pendiente de la recta α , da la razón de precios del equilibrio y en esta razón de precios el país E exporta la cantidad OB de ropa e importa la cantidad AB de comida, mientras que el país G importa OB de ropa y exporta AB de comida.

Para determinar la cantidad de exceso de oferta y de demanda de cada bien para cada país a una razón de precios dada, tenemos que considerar la interacción entre las condiciones de demanda y oferta. Para ellos, debemos usar el concepto de Curvas de Indiferencia de la Comunidad para la demanda y las Curvas de Producción para la oferta.

Con estos conceptos y manteniendo los costos constantes, podemos construir curvas de oferta para cada país y las condiciones de equilibrio para el comercio, de acuerdo a la siguiente figura.

Figura 16



Siguiendo la tradición clásica de Ricardo y Mill, podemos asumir que la cantidad de mano de obra requerida para producir una unidad de un bien es constante y que la mano de obra es el único factor de producción. Con estas condiciones, el Conjunto de Transformación de la Producción de cada país es un triángulo, tal como se muestra en la figura anterior.

En la figura anterior podemos notar que, si la razón de precios está dada por la pendiente de la recta γ , el país E se especializa en la producción de ropa, produciendo una cantidad $O_E S$ y comercializa una cantidad SB de ropa por una cantidad AB de comida. Es claro que, dada la pendiente de las Curvas de Transformación de la Producción de los dos países, la pendiente de la línea de precios no puede ser menor que la de la línea SR . Debe notarse que si la línea de precios coincide con la línea de Transformación de la Producción, el país E no necesariamente se especializará en la producción de ropa. Usualmente va a producir ropa y comida (Especialización Incompleta).

El Término Mundial del Comercio (razón de precios de los bienes) es determinado por la intersección de las dos curvas de oferta. El punto T es este punto y la pendiente de la línea α , da los Términos de Equilibrio para el Comercio.

Si un país es mucho más pequeño que el otro, como se ilustra en la figura anterior por medio del triángulo punteado para el país G, la línea de Precios de Equilibrio, va a coincidir con la curva de Transformación de la Producción del país más grande. En este caso, la curva de oferta del país G, es la curva g' y la intersección de las dos curvas de oferta, es R' , por tanto, la Razón de Precios Mundial es igual a la pendiente de la recta SR . Nótese que aquí se tiene un caso en que las suposiciones Ricardianas de que los Términos Mundiales del Comercio caen estrictamente entre la razón de costos de los dos países, no es cierta. Debe notarse también que, en este caso, el consumo del país E se da en el punto I_E y su producción toma lugar en el punto Q donde $QI_E = SR'$.

B Ganancia de Comercio

Cuando queda determinada la razón de precios para el Equilibrio Mundial, resulta fácil calcular la Ganancia del Comercio. Para determinarlos, asumimos que se producen dos bienes, X e Y donde x e y denotan la producción de los bienes X e Y.

Sea p la razón de precios del Equilibrio Mundial ($p = p_x/p_y$). Sean p_E y p_G las razones de precios de cada país, antes del comercio.

Supongamos que $p_E \leq p \leq p_G$.

Si $p_E < p < p_G$ el país E se especializa en la producción del bien X y el país G se especializa en la producción del bien Y.

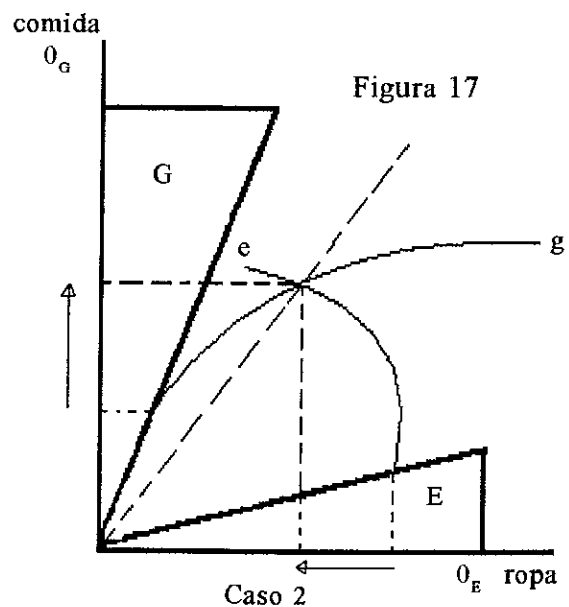
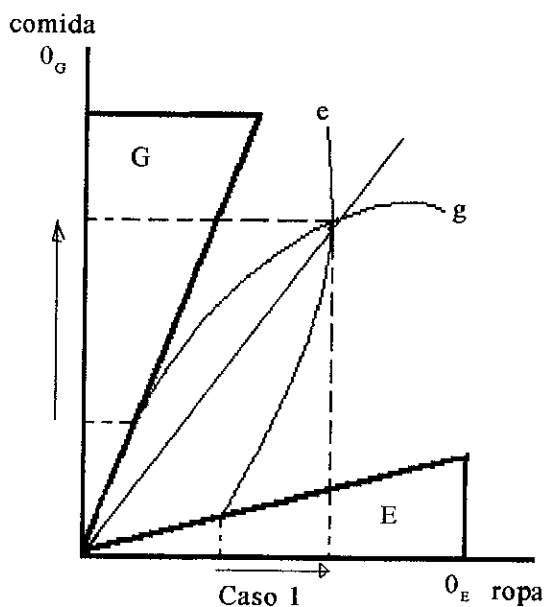
x_E y y_E (x_G y y_G) denotan la cantidad total del bien X y del bien Y que el país E (país G) puede producir, si este se especializa completamente en la producción de X e Y respectivamente.

Antes del comercio, cada país puede especializarse en la producción de algún bien o producir ambos bienes. En cualquier caso, la Renta Real del país E antes del comercio, es x_E en términos del bien X o y_E en términos del bien Y si p_E coincide con la razón de costos del país E (la pendiente de la línea de Transformación de la Producción del país E, la cual es constante). Un razonamiento similar debemos hacer para el país G.

Asumiendo la igualdad entre la razón de costos y la razón de precios, es claro que $y_E/x_E = p_E$ y $y_G/x_G = p_G$.

Cuando se da el Comercio, la razón de precios Mundial, p , queda determinada y podemos observar que de acuerdo al patrón anterior de especialización (país E en X y país G en Y) y midiendo la ganancia del comercio (el crecimiento del Rendimiento Real) en el país E en términos del bien Y como $px_E - y_E = (p - p_E)x_E$, o como $(p - p_E)x_E/p$ en términos del bien X. Similarmente, las ganancias para el país G en términos del bien X está dado por $(1/p)y_G - x_G = (1/p - 1/p_G)y_G$ o $p(1/p - 1/p_G)y_G$ en términos del bien Y. Por lo tanto, si $p_E < p$ se da una ganancia positiva después del comercio para el país G. Además, de acuerdo a como la diferencia entre p_E y p (p y p_G) crezca, la ganancia después del comercio para el país E (país G) crece.

Por tanto, el crecimiento en el bienestar del país, como resultado del comercio, es una función de la diferencia entre las razones de costos de los países y la razón de precios Mundial. Sin embargo, esto no necesariamente implica que cada país aumenta sus consumos de ambos bienes. De hecho, es posible y probable que un país pueda reducir el consumo de uno de los bienes, después del comercio. Este caso y el caso en que se aumenta el consumo de ambos bienes, se ilustra en las figuras siguientes.



De la discusión anterior, podemos observar que en cuanto más diverja la razón de precios Mundial de la razón de costos de los países, más grande será la ganancia del comercio. Esto implica que si, por una política u otro, un país puede mover la razón de precios Mundial lejos de su razón de costos, entonces este país puede hacer crecer sus ganancias por el comercio.

C Programación No Lineal

Sean f, g_1, g_2, \dots, g_n funciones de variable real definidas en R^n .

Problema de Maximización

Maximizar $f(x)$ sujeto a:

$$g_j(x) \geq 0; \quad j=1,2,\dots,m$$

$$x_i \geq 0; \quad i=1,2,\dots,n$$

TEOREMA (Necesidad). Supongamos que una de las dos condiciones siguientes se satisface:

- 1.- Las funciones $g_j(x); j=1,2,\dots,m$ son todas cóncavas y existe un $x \in R^n, x \geq 0$ t.q. $g_j(x) > 0, \forall j$
- 2.- Las funciones $g_j(x); j=1,2,\dots,m$ son todas lineales.

Supongamos además que f y $g_j(x)$ son todas diferenciables en R^n . Entonces si existe una solución x^* para el problema de maximización anterior, existe un $\lambda^* \in R^m, \lambda^* \geq 0$ t.q.

$$f_x^* + \lambda^* \cdot g_x^* \leq 0 \quad \dots \quad 1$$

$$[f_x^* + \lambda^* \cdot g_x^*] \cdot x^* = 0 \quad \dots \quad 2$$

$$\lambda^* \cdot g(x^*) = 0 \quad \dots \quad 3$$

$$g(x^*) \geq 0 \quad \dots \quad 4$$

(1) $g(x)$ es cóncava si $g(\Theta x + (1-\Theta)x) \geq \Theta g(x) + (1-\Theta) g(x)$ con $0 \leq \Theta \leq 1$

$$f_x^* \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Big|_{x^*}$$

$$g_x^* \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big|_{x^*}$$

$$g(x^*) \equiv (g_1(x^*), \dots, g_m(x^*))$$

Además:

$$\lambda^* \cdot g(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) \quad y$$

$$\lambda^* \cdot g_{x_i}^* = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \Big|_{x^*} \quad i=1,2,\dots,n$$

Los λ_i se llaman MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$\phi(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda \cdot g(x)$ se llama el LAGRANGIANO

TEOREMA 2: (Suficiencia) supóngase que f es cóncava y el conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0\}$, llamado conjunto de restricciones, es convexo ⁽¹⁾. Si existe un $x^* \geq 0$ que satisface las condiciones 1 a 4, x^* es solución del problema de maximización. Si F es estrictamente cóncava, x^* es solución única.

(1) C es convexo si las $g_j(x)$; $j = 1, 2, \dots, m$, son todas funciones cóncavas.

TEOREMA 3: Sean f, g_1, \dots, g_m funciones cóncavas en \mathbb{R}^n . Supóngase que una de las condiciones del Teorema 1 se cumple, entonces x^* es una solución del problema de maximización si y sólo si se satisfacen las condiciones 1 - 4 (KTL).

Una caracterización para cuando las funciones $f, g_j, j=1, \dots, m$, no son necesariamente diferenciables, está dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 4: Sea f, g_1, \dots, g_m funciones cóncavas definidas en un conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que g_j funciones, satisfacen las siguientes condiciones de Slater.

(S) $\exists x \in X$ t.q. $g_j(x) > 0 \forall j$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que x^* maximice $f(x)$ sujeto a $g_j(x) \geq 0$, es que existe un vector λ^* , con $\lambda_j^* \geq 0$ t.q.

(SP) $\Phi(x, \lambda^*) \leq \Phi(x^*, \lambda^*) \leq \Phi(x^*, \lambda) \quad \forall x \in X, \lambda \geq 0$ donde $\Phi(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$.

D El Problema de Mill y la Programación No Lineal

En la primera parte de este capítulo se consideró el mecanismo por el cual la razón de precios mundial es determinada. También se estudió cómo determinar la ganancia del comercio.

En esta parte se plantea un modelo para maximizar el Bienestar Mundial, asumiendo que existe una Función de Utilidad simple (es decir, un conjunto de curvas de indiferencia) para el Mundo como un todo.

En este modelo tendremos también dos países a los cuales llamaremos país 1 y país 2.

x_i e y_i denotan la producción de los bienes X e Y para el país i ($i = 1, 2$).

Sean $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ las producciones mundiales de los bienes X e Y.

$u(x, y)$ representa la función de utilidad que mide los niveles de satisfacción del mundo como un todo.

Sean l_{xi} y l_{yi} las cantidades de mano de obra requeridas para producir una cantidad de X ó una unidad de Y respectivamente en el país i ($i = 1, 2$).

Sea L_i la cantidad total de mano de obra disponible en el país i ($i = 1, 2$).

Asumimos que l_{x1} , l_{x2} , l_{y1} y l_{y2} son constantes para todos los niveles de producción y que la mano de obra es el único factor de producción.

Las restricciones de recurso de cada país pueden escribirse como:

$$l_{x1}x_1 + l_{y1}y_1 \leq L_1$$

$$l_{x2}x_2 + l_{y2}y_2 \leq L_2$$

o equivalentemente como:

$$x_1/a_1 + y_1/b_1 \leq 1 \text{ donde } a_1 = L_1/l_{x1} \text{ y } b_1 = L_1/l_{y1}$$

$$x_2/a_2 + y_2/b_2 \leq 1 \text{ donde } a_2 = L_2/l_{x2} \text{ y } b_2 = L_2/l_{y2}$$

Entonces nuestro problema consiste en encontrar x_1 , x_2 , y_1 e y_2 que maximicen la función $u(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sujeto a las restricciones anteriores y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$.

Este es un problema de Programación No Lineal porque u no es necesariamente lineal.

Sin perder generalidad, podemos adoptar los supuestos Ricardianos:

$$l_{x1}/l_{y1} < l_{x2}/l_{y2} \text{ o } b_1/a_1 < b_2/a_2$$

Podemos convertir las restricciones en

$$x/a_1 + y/b_1 \leq b/b_1$$

$$x/a_2 + y/b_2 \leq a/a_2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

donde $a = a_1 + a_2$ y $b = b_1 + b_2$

Para lograr esta conversión, tomamos las primeras desigualdades y las multiplicamos por b_1 y b_2 , respectivamente. Luego las sumamos y obtenemos.

$$(b_1/a_1)x_1 + (b_2/a_2)x_2 + y \leq b$$

con las desigualdades Ricardianas, tenemos:

$$b \geq (b_1/a_1)x_1 + (b_2/a_2)x_2 + y \geq (b_1/a_1)(x_1 + x_2) + y = (b_1/a_1)x + y$$

que es equivalente a

$$x/a_1 + y/b_1 \leq b/b_1$$

La otra desigualdad se obtiene en forma similar.

De todo lo anterior podemos obtener el siguiente problema de Programación No Lineal.

Problema M

Encontrar x e y tal que maximicen $u(x, y)$ sujeto a ⁽¹⁾

$$x/a_1 + y/b_1 \leq b/b_1$$

$$x/a_2 + y/b_2 \leq a/a_2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

El Lagrangiano para el anterior problema de Programación No Lineal es:

$$\Phi = u(x, y) + p(b/b_1 - x/a_1 - y/b_1) + q(a/a_2 - x/a_2 - y/b_2);$$

donde p y q son los Multiplicadores de Lagrange. Como u es cóncava, las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker-Lagrange (KTL), dan condiciones suficientes y necesarias para que (x^*, y^*) sean un óptimo.

Existen p^* , q^* , x^* e y^* tal que

¹ Asumimos que u es una función continua y cóncava

(KTL)

$$u_x^* - p^*/a_1 - q^*/a_2 \leq 0 \quad \text{y} \quad u_y^* - p^*/b_1 - q^*/b_2 \leq 0$$

$$(u_x^* - p^*/a_1 - q^*/a_2)x^* + (u_y^* - p^*/b_1 - q^*/b_2)y^* = 0$$

$$b/b_1 - x^*/a_1 - y^*/b_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad a/a_2 - x^*/a_2 - y^*/b_2 \geq 0$$

$$p^*(b/b_1 - x^*/a_1 - y^*/b_1) + q^*(a/a_2 - x^*/a_2 - y^*/b_2) = 0$$

$$p^* \geq 0, q^* \geq 0, x^* \geq 0, y^* \geq 0$$

donde $u_x^* = \partial u / \partial x$ y $u_y^* = \partial u / \partial y$, valuadas en (x^*, y^*)

VI ESTADÍSTICA COMPARATIVA PARA UN MODELO DE VARIOS PAÍSES Y VARIOS BIENES

A Introducción

En este modelo se usan todos los supuestos del modelo de dos bienes y dos países, sólo que se trabaja con varios países y varios bienes.

Asumimos que se tienen m países y n bienes. Todos estos países son capaces de producir todos los bienes. Además tenemos:

l_{ij} = mano de obra requerida para producir una unidad del bien i en el país j .

L_j = cantidad de mano de obra disponible en el país j .

x_{ij} = cantidad disponible del bien i en el país j .

Con estas condiciones se plantea el siguiente problema de programación lineal:

PROBLEMA I (MAX)

Maximizar

$$\sum_{k=1}^n p_k \left(\sum_{j=1}^m x_{kj} \right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_{ij} \leq L_j, j = 1, 2, \dots, m \text{ y}$$

$$x_{ij} \geq 0; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$$

El problema Dual del problema anterior, es:

PROBLEMA I (MIN)

Minimizar

$$\sum_{j=1}^m w_j L_j$$

Sujeto a:

$$w_j l_{ij} \geq p_i; \quad i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m \quad y$$

$$w_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

B PROPUESTA DE CHIPMAN

En esta propuesta se asume que la mano de obra es indispensable en la producción de todos los bienes ($l_{ij} > 0$ para todo i y j) y escribimos $a_{ij} = L_j/l_{ij}$

Con esto las restricciones del PROBLEMA I (MAX), se pueden escribir como:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}/a_{ij} \leq 1; \quad j=1, 2, \dots, m$$

Si hacemos $y_{ij} = x_{ij}/a_{ij}$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} + \delta_j = 1, \quad j=1, 2, \dots, m$$

donde $\delta_j > 0$ es una "variable de holgura" para cada j .

Por otro lado, definimos $x_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}$ como la producción

mundial del bien i .

Por la definición de y_{ij} tenemos:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_{ij} = x_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Con estas condiciones formulamos el problema de Programación Lineal:

PROBLEMA II (MAX)

Maximizar

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n y_i + \delta_j = 1, \quad j=1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad y$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$\delta_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m.$$

El problema dual del problema anterior, es:

PROBLEMA II (MIN)

Maximizar

$$\sum_{j=1}^m s_j \quad \left(= \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \cdot 0 + \sum_{j=1}^m s_j \cdot 1 \right)$$

Sujeto a:

$$-\bar{p}_i a_{ij} + s_j > 0 \quad i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\bar{p}_i \geq p_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad y$$

$$s_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

En este problema, \bar{p}_i y s_j son las variables duales.

Por una de las partes del teorema de dualidad, sabemos que si (x_1, x_2, \dots, x_n) es una solución del PROBLEMA II (MAX), con $x_i > 0$ para todo i , entonces

$$\bar{p}_i = p_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Asumimos que este es el caso, cuando la producción de todos los bienes es positiva.

Entonces podemos reemplazar \bar{p}_i por p_i . Escribimos $s_j/L_j = w_j$ y recordamos que $a_{ij} = L_j/l_{ij}$

Con esto podemos reescribir el problema anterior como:

Maximizar

$$\sum_{j=1}^m w_j L_j$$

Sujeto a:

$$w_j l_{ij} \geq p_i \quad i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m \text{ y}$$

$$w_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

es importante observar que este problema dual es igual al anterior, lo cual es razonable, por la similitud de los problemas primales.

Consideraciones sobre el DUAL

Si $(x_{11}^*, \dots, x_{nm}^*)$ es una solución de PROBLEMA I (MAX) y (w_1^*, \dots, w_m^*) una solución del PROBLEMA II (MIN), entonces por el Teorema de Dualidad podemos establecer:

$$1. \quad \sum_{i,j} p_i x_{ij}^* = \sum_j w_j^* L_j$$

Establece que el valor total de la producción mundial es igual al factor de ingresos totales.

$$2.- \quad \text{Si } \sum_{i=1}^n l_{ij} x_{ij}^* < L_j, \text{ entonces } w_j^* = 0; j=1, 2, \dots, m$$

Establece que si la mano de obra es redundante en el país j, el valor de ésta es cero.

$$3.- \quad \text{Si } w_j^* > 0, \text{ entonces } \sum_{i=1}^n l_{ij} x_{ij}^* = L_j; j= 1, 2, \dots, m$$

Establece que si el precio de la mano de obra en el país j es positivo, entonces toda la mano de obra disponible en el país j, es utilizada en la producción.

$$4.- \quad \text{Si } w_j^* l_{ij} > p_i, \text{ entonces } x_{ij}^* = 0 ; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$$

Establece que si el costo unitario de producción del bien i en el país j excede al precio del bien i, entonces el bien no es producido.

$$5.- \quad \text{Si } x_{ij}^* > 0, \text{ entonces } w_j^* l_{ij} = p_i ; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$$

Establece que si el bien i es producido en el país j, entonces su precio es igual a su costo marginal (costo promedio).

C Bienestar Mundial y Bienestar de cada País

Definimos los vectores

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj});$$

$$l_j = (l_{1j}, l_{2j}, \dots, l_{mj}) \text{ y}$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Con esto, definimos los siguientes problemas:

PROBLEMA W (Bienestar Mundial)

Maximizar

$$\sum_{j=1}^m p \cdot x_j$$

Sujeto a:

$$l_j \cdot x_j \leq L_j$$

$$x_j \geq 0; j=1, \dots, m$$

PROBLEMA C (Bienestar de cada País)

Para cada $j=1, 2, \dots, m$;

Maximizar

$$p \cdot x_j$$

Sujeto a:

$$l_j \cdot x_j \leq L_j$$

$$x_j \geq 0$$

Antes de continuar con nuestros problemas, probaremos el siguiente:

LEMA

Sean $f_j(x_j); j=1, \dots, m$, funciones reales definidas en \mathbb{R}^n . Sean $S_j, j=1, \dots, m$; subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que $x_j \in S_j$.

Consideramos $S = \prod_{j=1}^m S_j$, el producto cartesiano de todos los S_j .

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S \subset \mathbb{R}^{nm}$

Definimos $f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x_j)$.

Entonces $f(x)$ tiene su máximo sobre S en x^* si y sólo si $f_j(x_j)$ tiene su máximo sobre S_j en x_j^* para todo $j=1, \dots, m$.

Demostración

(\Rightarrow)

Asumimos que $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in S$ o

$$\sum_{j=1}^m f_j(x_j^*) \geq \sum_{j=1}^m f_j(x_j) \text{ para todo } x_j \in S_j; j=1, \dots, m$$

Sea $x_j = x_j^*$ para todo j , excepto para $j=i$; para algún i arbitrario. Entonces $f_j(x_j^*) \geq f_j(x_j)$ para todo $x_j \in S_j$. Como la selección del i es arbitrario, esto prueba la primera parte del Lema.

(\Leftarrow)

Asumimos que $f_j(x_j^*) \geq f_j(x_j)$ para todo $x_j \in S_j; j=1, \dots, m$

$$\text{De aquí, } \sum_{j=1}^m f_j(x_j^*) \geq \sum_{j=1}^m f_j(x_j) \text{ para todo } x_j \in S_j; j=1, \dots, m$$

lo cual muestra el Lema.

TEOREMA

El valor de la producción mundial se maximiza si y sólo si todo país maximiza su producción.

Prueba

Definimos $S_j = \{x_j/x_j \in \mathbb{R}^n; x_j \geq 0; 1_j x_j \leq L_j\}$

$j=1, \dots, m$ y además $f_j(x_j) = p \cdot x_j$. Nótese que $f(x) = \sum_{j=1}^m p \cdot x_j$

Si aplicamos el Lema anterior, se prueba el Teorema.

Por otro lado sabemos, por resultados obtenidos de la programación no lineal, que para funciones no necesariamente diferenciables, tenemos que una condición necesaria y suficiente para que $x_j^*, j=1, \dots, m$ sea una solución del PROBLEMA W, es que exista un $w_j^*, j=1, \dots, m$ tal que:

$$\Phi(x, w^*) \leq \Phi(x^*, w^*) \leq \Phi(x^*, w) \text{ para todo } x \geq 0, w \geq 0 \text{ ----> I}$$

donde

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ es una matriz $n \times m$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ es un vector y

$$\Phi(x, w) = \sum_{j=1}^m p \cdot x_j + \sum_{j=1}^m w_j (L_j - 1_j x_j)$$

Por otro lado, una condición necesaria y suficiente para que $x_j^o, j=1, \dots, m$, sea una solución del PROBLEMA C, es que exista una $\lambda_j^o, j=1, \dots, m$ tal que:

$$\Phi_j(x_j, \lambda_j^o) \leq \Phi_j(x_j^o, \lambda_j^o) \leq \Phi_j(x_j^o, \lambda_j) \text{ para todo}$$

$$x_j \geq 0 \text{ y } \lambda_j \geq 0; j=1, \dots, m \text{ ----> II}$$

donde

$$\Phi_j(x_j, \lambda_j) = p \cdot x_j + \lambda_j(L_j - 1_j x_j)$$

Claramente si la expresión II se cumple para todo j , entonces la expresión I es válida. Para mostrar la implicación inversa, hacemos $x_k = x_k^*$ y $w_k = w_k^*$ para todo $k=1, \dots, m$, excepto para algún j en I. Entonces si hacemos $x_j^* = x_j^0$ y $w_j^* = \lambda_j^0$ obtenemos la relación II. Ya que la elección de j es arbitraria, II es válida para todo j .

Con esto hemos probado que la producción mundial se maximiza si y sólo si se maximiza la producción de cada país.

D Maximización de la Renta y Minimización del Costo

En esta sección se omitirán subíndices, ya que esto no provoca confusión y se simplifica la notación.

Planteamos los siguientes dos problemas:

(K_M)

Maximizar

$$p \cdot x$$

Sujeto a

$$1 \cdot x \leq L,$$

$$x \geq 0$$

(K_m)

Minimizar

$$1 \cdot x$$

Sujeto a

$$p \cdot x \geq I$$

$$x \geq 0$$

Donde I es el valor de un vector factible dado \bar{x} . Esto es

$$I = p \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \text{ con}$$

$$1 \cdot \bar{x} \leq L \text{ y } \bar{x} \geq 0.$$

Antes de plantear el Teorema de Kunh, que tiene relación con esta sección, damos tres supuestos

Supuesto 1: $l_i > 0$ para todo i

Esto quiere decir que la mano de obra es indispensable para la producción de todos los bienes en todos los países. Ya que la mano de obra es el único factor de producción, esto también se entiende como que no hay ninguna salida si no existe una entrada.

Supuesto 2: $p_i > 0$ para todo i

En otras palabras, todos los n bienes son deseados.

Supuesto 3: $p_i/l_i; i=1, \dots, n$ son todos diferentes entre sí.

Podemos ahora plantear el siguiente teorema:

TEOREMA (KHUN)

El bien i es producido en una cantidad óptima para el problema (K_M) si y sólo si este es producido en una cantidad óptima para el problema (K_m) .

Prueba

Consideremos los Duales de (K_M) y (K_m) .

Dual de (K_M)

Debemos mostrar $w \geq 0$ que minimice wL sujeto a $wl_i \geq p_i$;

$i=1, \dots, n$.

Claramente este problema tiene una solución óptima

$$w^\circ = \max_i p_i/l_i > 0$$

Más aún, si $x_i^\circ > 0$ es un Optimal para (K_M) , entonces

$$w^\circ l_i = p_i$$

La inversa también es válida. Esto es, si $w^\circ l_i = p_i$ entonces $x_i > 0$.

Si $x_i^\circ = 0$ con $w^\circ l_i = p_i$, entonces $x_i^\circ = 0$ para todo $i=1, \dots, n$, lo cual es imposible.

En otras palabras, $x_i^\circ > 0$ si y solo si $w^\circ l_i = p_i$

Dual de (K_m)

Debemos mostrar $\mu \geq 0$ tal que maximice μI sujeto a $p_i \mu \leq 1$; $i=1, \dots, n$.

Este problema tiene una solución

$$-\mu^\circ = \min_i 1/p_i > 0$$

Más aún, $x_i^{\circ\circ} > 0$ es un Optimal para (K_m) si y sólo si $1/p_i = \mu^\circ$.

Ya que los índices para los que $1/p_i$ dan el mínimo μ° , son los mismos que dan el máximo w° para los p_i/l_i , esto completa la prueba del teorema.

COROLARIO

Si x° es una solución de (K_M) , entonces esta es una solución de (K_m) con $I = p \cdot x^\circ$.

También, x° es una solución de (K_m) con $1 \cdot x^\circ = L$ si esta es una solución de (K_M) .

Prueba

Si x° es una solución de (K_M) entonces $1 \cdot x^\circ = L$, ya que $p_i > 0$ para todo i . Por el Teorema de Dualidad, $p \cdot x^\circ = w^\circ L$. Si μ° es una solución del Dual de (K_m) , entonces $1 \cdot x^{\circ\circ} = \mu^\circ I$ donde $x^{\circ\circ}$ es una solución de (K_m) . Si $\mu^\circ = 1/w^\circ > 0$, entonces $I = w^\circ 1 \cdot x^{\circ\circ}$ ó $p \cdot x^\circ = w^\circ 1 \cdot x^{\circ\circ}$. Pero $p \cdot x^\circ = w^\circ L = w^\circ 1 \cdot x^\circ$; de aquí $w^\circ 1(x^\circ - x^{\circ\circ}) = 0$. Ya que $w^\circ > 0$ y $1_i > 0$ para todo i , se tiene que $x^\circ = x^{\circ\circ}$. Pero $\mu^\circ = 1/w^\circ > 0$ por la prueba del teorema anterior. De aquí, la solución x° de (K_M) es igual a la solución $x^{\circ\circ}$ de (K_m) con $I = p \cdot x^\circ$. El otro sentido se demuestra análogamente.

A continuación se presentan dos situaciones que resultan obvias:

- 1.- Si x° es Optimal de (K_M) , entonces es Factible para (K_m) .
- 2.- Si $x^{\circ\circ}$ es Optimal para (K_m) , entonces es Factible para (K_M) .

La prueba es simple. Si x° es Optimal de (K_M) entonces $p \cdot x^\circ = p \cdot \bar{x} = I$, ya que $1 \cdot \bar{x} \leq L$ y $x \geq 0$. Esto implica que es Factible para (K_m) .

Por otro lado, si $x^{\circ\circ}$ es Optimal de (K_m) , entonces $1 \cdot x^{\circ\circ} \leq 1 \cdot \bar{x} \leq L$. Esto implica que es Factible para (K_M) .

E Patrones de Especialización

Si tomamos los resultados de la sección anterior, se puede plantear el siguiente problema.

Para cada j ,

Maximizar

$$p \cdot x_j$$

Sujeto a:

$$1_j \cdot x_j \leq L_j \text{ y}$$

$$x_j \geq 0.$$

Como ya se vio anteriormente, este problema es equivalente a maximizar la producción mundial. Vimos que para solucionar el problema, definimos el Lagrangiano:

$$\Phi_j \equiv p \cdot x_j + w_j(L_j - 1_j \cdot x_j)$$

Por la teoría de la programación no lineal, tenemos que una condición necesaria y suficiente (KTL) para que x^o_j sea una solución del problema, es que exista una w^o_j , tal que:

$$p_i - w^o_j 1_{ij} \leq 0, i=1, \dots, n; \quad \text{---> 1a}$$

$$(p_i - w^o_j 1_{ij})x^o_{ij} = 0, i=1, \dots, n; \quad \text{---> 1b}$$

$$L_j - 1_j x^o_j > 0, \quad \text{---> 2a}$$

$$(L_j - 1_j x^o_j)w^o_j = 0; \text{ y} \quad \text{---> 2b}$$

$$w^o_j \geq 0, x^o_j \geq 0.$$

Es importante notar que la condición la requiere los supuestos 1 y 2 de la sección anterior. Además debe notarse que estos dos supuestos implican que $w^o_j > 0$ para todo j . De estos, las expresiones 2a y 2b pueden reescribirse como:

$$L_j - 1_j x^o_j = 0$$

F El Problema de McKENZIE-JONES

Con el supuesto que el número de bienes es igual al número de países, en este problema se pregunta cuál es la condición necesaria y suficiente para que el país j se especialice en la producción de bien j como una solución del problema planteado anteriormente. Dicho de otra manera, se busca las condiciones para que la j - j especialización sea un óptimo.

Para esto, suponemos que el país j se especializa en la producción del bien j . Las condiciones 1a, 1b, 2a y 2b de la sección anterior, se pueden escribir entonces como:

$$\begin{aligned}
 p_j &= w_j^o l_{jj}^o; \\
 p_i - w_j^o l_{ij}^o &\leq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (i \neq j) \\
 l_{jj}^o x_j^o &= L_j.
 \end{aligned}$$

Evidentemente $w_j^o > 0$, $x_j^o > 0$, $x_{ij}^o = 0$ para $i \neq j$. De esto, la condición necesaria y suficiente para la especialización j - j sea óptima se reduce a las primeras dos expresiones de la condición anterior, las cuales pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 w_1^o l_{11}^o = p_1, \quad w_2^o l_{12}^o \geq p_1, \dots, \quad w_m^o l_{1m}^o \geq p_1 \\
 w_1^o l_{21}^o \geq p_2, \quad w_2^o l_{22}^o = p_2, \dots, \quad w_m^o l_{2m}^o \geq p_2 \\
 \dots \\
 \dots \\
 w_1^o l_{m1}^o \geq p_m, \quad w_2^o l_{m2}^o \geq p_m, \dots, \quad w_m^o l_{mm}^o = p_m
 \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden ser escritas como

$$p_i / l_{i1}^o \geq p_i / l_{i11}^o, \quad p_2 / l_{22}^o \geq p_i / l_{i2}^o, \dots, \quad p_m / l_{mm}^o \geq p_i / l_{im}^o,$$

$i=1, 2, \dots, m$ en cada caso.

Nuestra condición necesaria y suficiente puede ser reducida a:

$$p_j/1_{jj} \geq p_i/1_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Esto es equivalente a:

$$\prod_{j=1}^m (p_j/1_{jj}) \geq \prod_{j=1}^m (p_{\pi(j)}/1_{\pi(j)j})$$

donde $\pi(j)$ es una permutación de enteros del conjunto de índices.

La expresión anterior puede ser escrita como:

$$\prod_{j=1}^m p_j \prod_{j=1}^m (1/1_{jj}) \geq \prod_{j=1}^m p_{\pi(j)} \prod_{j=1}^m (1/1_{\pi(j)j})$$

Ya que $\prod_{j=1}^m p_j = \prod_{j=1}^m p_{\pi(j)}$ la expresión anterior se

reduce a:

$$\prod_{j=1}^m 1_{jj} \leq \prod_{j=1}^m 1_{\pi(j)j} \text{ para cualquier permutación } \pi.$$

Esta condición se conoce como Condición McKenzie-Jones.

El desarrollo anterior nos demuestra el siguiente Teorema:

TEOREMA (McKENZIE-JONES)

Bajo las condiciones dadas en el presente material, una condición suficiente y necesaria para que el patrón de especialización en que el país j se especialice en la producción del bien j sea un óptimo, es la relación $1_{jj}/1_{ij} \leq p_j/p_i, \quad i=1, 2, \dots, m$, siempre que cumpla con la condición de McKenzie-Jones.

F Una Generalización del Problema de MILL

En esta sección se hace una generalización del problema de Mill, estudiado en el capítulo anterior.

Partimos de presentar el siguiente problema:

Problema de Maximización de Mill-Chipman.

Maximizar

$$u(x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_n)$$

Sujeto a:

n

$$\sum_{i=1}^n 1_{ij} x_{ij} \leq L_j, j = 1, 2, \dots, m \text{ y}$$

i=1

$$x_{ij} \geq 0, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m,$$

donde

m

$$x_i \equiv \sum_{j=1}^m x_{ij}$$

j=1

Damos los siguientes supuestos:

Supuesto 1: $1_{ij} > 0$ para todo i y j.

Supuesto 2: u es cóncava y $u = 0$ si $x_i = 0$ para cualquier $i = 1, 2, \dots, n$ también $u_i > 0$ si $x_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$
donde $u_i = \partial u / \partial x_i$

Con las condiciones dadas, podemos afirmar que una condición necesaria y suficiente para que x^*_{ij} , $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$ sea una solución del problema anterior, es que exista una w^*_j , $j=1, \dots, m$ tal que

$$u^*_{ij} - w^*_j l_{ij} \leq 0, i=1, \dots, n; j=1, \dots, m, \quad \text{---> 1a}$$

$$(u^*_{ij} - w^*_j l_{ij}) x^*_{ij} = 0, i=1, \dots, n; j=1, \dots, m, \quad \text{---> 1b}$$

n

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x^*_{ij} \leq L_j, j=1, \dots, m \quad \text{---> 2a}$$

i=1

n

$$w^*_j (L_j - \sum_{i=1}^n l_{ij} x^*_{ij}) = 0, j=1, \dots, m \quad \text{---> 2b}$$

i=1

$$w^*_j \geq 0, j=1, \dots, m; x^*_{ij} \geq 0, i=1, \dots, n; j=1, \dots, m$$

Es claro que existe algún j tal que $\bar{x}_{ij} > 0$ para todo

n

$i=1, \dots, n$, con $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \leq L_j$. En otras palabras, al menos un país

i=1

puede producir una cantidad positiva de cada bien. De la segunda y tercera parte del Supuesto 2, existe un j tal que $x^*_{ij} > 0$ para todo $i=1, \dots, n$.

Por la expresión '1a' y dado que $u^*_{ij} > 0$ (ya que $x^*_{ij} > 0$), tenemos que $w^*_j > 0$. Así

n

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x^*_{ij} = L_j, j=1, \dots, m$$

i=1

Para facilitar la comparación con el teorema de McKenzie Jones, asumimos que el número de bienes es igual al número de países, m, y podemos obtener la condición necesaria y suficiente para el patrón de especialización j-j sea un óptimo. Esta condición puede ser obtenida de las condiciones anteriores. Esta es que exista $w^*_j > 0, j=1, \dots, m$ tal que

$$u^*_{jj} - w^*_j l_{jj} = 0, j=1, \dots, m;$$

$$u^*_{ij} - w^*_j l_{ij} \leq 0, i, j=1, \dots, m;$$

$$l_{jj} x^*_{jj} = L_j, j=1, \dots, m.$$

La últimas dos condiciones pueden ser resumidas como

$$u^*_{jj}/l_{jj} \geq u^*_{ij}/l_{ij}, i, j=1, \dots, m. \quad \text{----> 3}$$

Esto es equivalente a

$$\prod_{j=1}^m (u_{ij}^*/1_{ij}) \geq \prod_{j=1}^m (u_{\pi(j)}^*/1_{\pi(j)}).$$

donde $\pi(j)$ es el j^{vo} entero en una permutación del conjunto de índices.

La ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\prod_{j=1}^m (1_{\pi(j)}/1_{ij}) \geq \prod_{j=1}^m (u_{\pi(j)}^*/u_{ij}^*),$$

Recordemos que $u = u(x_1, \dots, x_p, \dots, x_n)$ donde $x_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}$.

Podemos ver que $\partial u / \partial x_{ij} = \partial u / \partial x_i$ o $u_{ij}^* = u_i^*$.

Entonces

$$\prod_{j=1}^m (u_{\pi(j)}^*/u_{ij}^*) = \prod_{j=1}^m (u_{\pi(j)}^*/u_j^*) = 1$$

De todo esto podemos obtener

$$\prod_{j=1}^m 1_{ij} \leq \prod_{j=1}^m 1_{\pi(j)},$$

que no es más que las condiciones de McKenzie-Jones obtenidas en la sección anterior.

Usando la observación que $u_{ij}^* = u_i^*$ podemos reescribir la expresión 3 como

$$1_{ij}/1_{ij} \geq u_i^*/u_j^*, \quad i, j=1, \dots, m \quad \text{---> 4}$$

Si sólo hubieran dos países y dos bienes tendríamos

$$1_{11}/1_{21} \leq u_1^*/u_2^* \leq 1_{12}/1_{22} \quad \text{---> 5}$$

Que no es más que las condiciones de Mill, razón por la cual llamamos a la expresión 4, la generalización del problema de Mill.

Puede verse que la condición 4 puede ser soportada por un equilibrio competitivo con libre comercio al escoger el precio de tal forma que

$u^*_i/u^*_j = p_i/p_j$, $i, j = 1, \dots, m$, con p_i el precio mundial del bien i . Si adoptamos la forma de Mill para la función de utilidad tenemos

$$u = (x_{11} + x_{12})(x_{21} + x_{22}) = x_1 x_2, \text{ entonces } u^*_1 = x^*_2 \text{ y } u^*_2 = x^*_1.$$

De aquí, la expresión 5 puede ser reescrita como

$$1_{11}/1_{21} \leq x^*_2/x^*_1 \leq 1_{12}/1_{22}$$

Pero de las condiciones iniciales del problema, sabemos que $x^*_1 = L_1/1_{11}$ y $x^*_2 = L_2/1_{22}$, con lo que la expresión anterior puede ser reescrita como

$$L_1/1_{21} \leq L_2/1_{22} \text{ y } L_1/1_{11} \leq L_2/1_{12}$$

Entonces, definiendo $a_{ij} = L_j/1_{ij}$ y sustituyendo los subíndices x y y por 1 y 2 respectivamente, podemos reescribir la expresión anterior como

$$a_{21} \leq a_{22} \text{ y } a_{11} \leq a_{12}.$$

Podemos resumir el resultado de esta sección con el siguiente teorema

TEOREMA Con las condiciones dadas en este capítulo, una condición necesaria y suficiente para que el patrón de especialización j - j sea un óptimo es:

$$1_{ij}/1_{jj} \leq u^*_i/u^*_j, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

VII EQUILIBRIO GENERAL DEL COMERCIO Y LA PRODUCCION MUNDIAL

A Elementos del Análisis de Actividades

Conjunto de Producción (Posibilidades) es el conjunto de procesos de producción disponibles en una economía dada.

Un elemento de este conjunto es una n -ada ordenada que describe la relación tecnológica de la combinación salida-entrada de un proceso de producción. A un elemento de este conjunto se le llama **Proceso o Actividad**.

Bienes. Son todos los elementos de la economía como materia prima servicios, factores de producción, producto terminado, etc. Cada bien queda determinado al especificar todas sus características físicas como su disponibilidad de localización o su fecha de disponibilidad. Por ejemplo, un bien en dos lugares distintos, representa dos bienes distintos. Todos los bienes aparecen en cualquier actividad aún que en algunos casos, su coeficiente sea 0.

B Modelo Matemático

Sea Y el conjunto de todos los procesos de producción técnicamente posibles en una economía dada.

Asumimos que $Y \subset \mathbb{R}^n$ y que $y \in Y$ representa un proceso de producción en la economía.

Vamos a convenir que y_i representa una salida si $y_i > 0$ y una entrada si $y_i < 0$. $|y_i|$ significa la cantidad del i -avo bien usado en el proceso y .

Damos los siguientes postulados:

1] ADICION

$$y \in Y \text{ y } y' \in Y \Rightarrow y + y' \in Y$$

2] PROPORCIONALIDAD

$$y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y \text{ para todo } \alpha \geq 0$$

Y es entonces un Cono Convexo.

Por la Proporcionalidad, el proceso j o actividad y^j en Y puede ser escrito como:

$$y^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix} \alpha_j \text{ donde } \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha_j \geq 0$$

o escrito en forma corta:

$$y^j = a^j \alpha_j$$

Aquí a_{ij} representa la cantidad del bien i involucrada en una unidad del nivel de operación de la j -ava actividad y α_j representa el nivel de actividad de la j -ava actividad.

Damos ahora el Tercer Postulado:

3] NUMERO FINITO DE ACTIVIDADES BASICAS

Existe un número finito de a^j tal que Y es un Cono Poliedro Convexo descrito por estos a^j . Los a^j son llamados **Actividades Básicas**.

En otras palabras, un típico elemento y en Y puede ser expresado como una combinación lineal no negativa de a^1, a^2, \dots, a^m donde m es un entero positivo.

De acuerdo con los tres postulados, el conjunto de producción Y en el Análisis de Actividades, puede ser escrito como

$Y = \{y: y = A\alpha, \alpha \geq 0\}$, donde A es una matriz $n \times m$ formada por $[a^1, \dots, a^m]$ y α es un m -vector cuyo j -avo elemento es α_j .

El hecho que Y sea un Cono Poliedro Convexo implica que

a) $0 \in Y$ (posibilidad de inactividad) Esto quiere decir que es posible para los productores, no hacer nada.

b) Y es un conjunto cerrado.

T. C. Koopmans propone los siguientes postulados:

4] **PRODUCTIVIDAD**

Existe al menos un elemento positivo para algún y en Y .

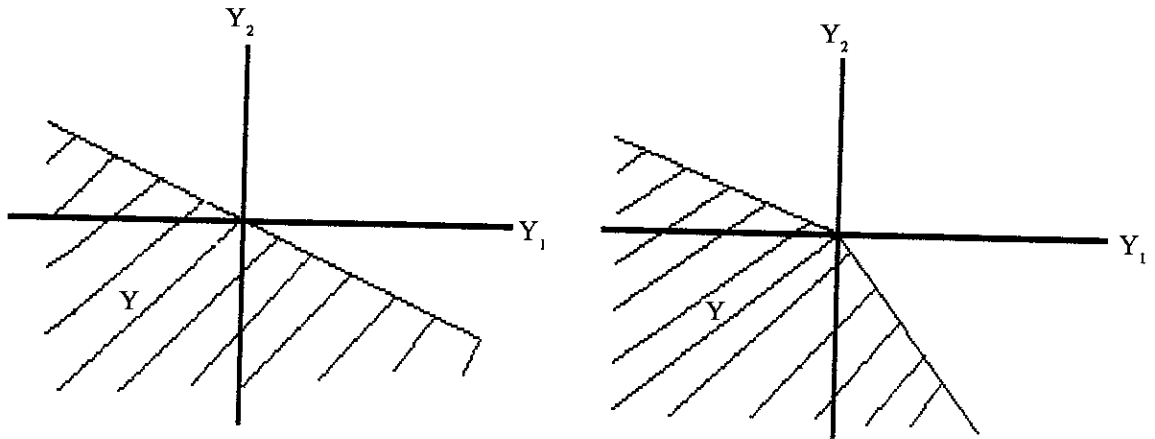
5] **NO ES TIERRA DE JAUJA**

$y \geq 0 \Rightarrow y \notin Y$, ó $Y \cap \Omega = \{0\}$

6] **IRREVERSIBILIDAD**

$y \in Y \Rightarrow -y \notin Y$, ó $Y \cap (-Y) = \{0\}$

Las figuras siguientes ilustran el sentido de los postulados anteriores.



TEOREMA 1. Sea $Y = \{y: y = A\alpha, \alpha \geq 0\}$. Y satisface el postulado 5 si y sólo si existe $p > 0$ tal que $p \cdot y \leq 0$ para todo $y \in Y$.

Prueba

- i) (Suficiencia): $y \geq 0 \Rightarrow p \cdot y > 0$ para cualquier $p > 0$. De aquí, por el supuesto, $y \notin Y$.
- ii) (Necesidad): El teorema de Separación de un conjunto Convexo y un punto establece que, dado un conjunto $Y \in \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado; $y' \notin Y$. Entonces existe un $p \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

i) $py' > \alpha$

ii) $py \leq \alpha$ para todo $y \in Y$

Con esto, si hacemos $\alpha = 0$ y tomamos del Postulado 5 que $y' \notin Y$, tenemos que $py \leq 0$ para todo $y \in Y$.

DEFINICION

Si Y representa la colección de combinaciones de entradas y salidas tecnológicamente posibles en una economía dada y cuando no se restringe a Y a ser un Cono poliedro convexo, Y se llama un **Conjunto General de Producción**.

De la definición anterior, puede notarse que Y carece de limitaciones de recursos. Podemos considerar a Y como conjunto de producción para el cual existen

limitaciones de recursos. Por ejemplo, Y puede indicar un cono poliedro convexo 'truncado', tal como $\{y: y = A\alpha, \alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}^n, y + \bar{z} \geq 0\}$, donde $\bar{z} \geq 0$ indica las limitaciones de recursos de la economía. Por el Postulado 5, este conjunto no es mayor que un cono poliedro convexo, sin embargo sigue siendo convexo. Nótese que este conjunto es ahora compacto.

DEFINICION

Sea Y un Conjunto General de Producción. Un punto y^* en Y es llamada un Punto Eficiente de Y , si no existe $y \in Y$ tal que $y \geq y^*$.

TEOREMA 2. Sea Y un Conjunto General de Producción en \mathbb{R}^n . Si existe un y^* en Y y un $p > 0$ tal que $p \cdot y^* \geq p \cdot y$ para todo $y \in Y$, entonces y^* es un Punto Eficiente.

Prueba

Supongamos que lo propuesto no es cierto. Entonces existe un $y \in Y$ tal que $y \geq y^*$. Así $p \cdot y > p \cdot y^*$, ya que $p > 0$, lo cual es una contradicción.

TEOREMA 3. Sea Y un Conjunto General de Producción en \mathbb{R}^n , el cual es convexo. Si y^* es un Punto Eficiente en Y , entonces existe un $p \geq 0$ tal que $p \cdot y^* \geq p \cdot y$ para todo $y \in Y$.

Prueba

y^* define un Hiperplano que separa a Y . Si tomamos $y' \notin Y$ entonces por el Teorema de Separación de Conjuntos Convexos, $\exists p \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$i) p \cdot y' > \alpha$$

$$ii) p \cdot y \leq \alpha$$

Si hacemos el Hiperplano con $py^* = \alpha$ tenemos que $py \leq py^*$ para todo y lo cual demuestra el teorema.

El teorema 3 asocia el concepto de punto eficiente con la maximización de la utilidad. Esto es, maximizar $p \cdot y$ respecto de y sobre Y . La existencia de una solución a este problema es garantizado, por ejemplo, si Y es compacto, ya que el producto interno es una función continua. Esto nos permitiría usar técnicas de cálculo como el simplex, para resolver problemas de Análisis de Actividades.

C Concepto de Vector Máximo

INTRODUCCION

Un problema ordinario de Programación No Lineal, pretende mostrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que maximice $f(x)$ sujeto a $g_j(x) \geq 0$, $j=1, \dots, m$ y $x \geq 0$. f y g_j son funciones de variable real definidas en \mathbb{R}^n .

Utilizando la teoría de la Programación No Lineal, podemos plantear el siguiente teorema.

TEOREMA 4. Sea $f(x)$ una función cóncava, y supongamos válidas las siguientes condiciones:

1. g_j , $j=1, \dots, m$ son lineales
2. $g_j(x)$, $j=1, \dots, m$ son todas cóncavas y existe un $\bar{x} \geq 0$ tal que $g_j(\bar{x}) > 0$
para todo $j=1, \dots, m$

Entonces, una de las dos condiciones siguientes es necesaria y suficiente para que x^* sea una solución del anterior problema de Programación No Lineal.

- i. Las condiciones (KTL) son válidas ó
- ii. Las condiciones (SP) son válidas

Recordatorio:

Si $\Phi(x, \alpha) = f(x) + \alpha \cdot g(x)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}^m$ y $g(x)$ es un m -vector m cuya j^{va} componente es $g_j(x)$

$$\text{esto es } \alpha \cdot g_j(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x). \text{ Con esto, las condiciones (KTL) y (SP) pueden}$$

escribirse como:

KTL Existe un $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\Phi_x^* \leq 0, \Phi_x^* \cdot x^* = 0, g(x^*) \geq 0, \alpha^* \cdot g(x^*) = 0 \text{ y } \alpha^* \geq 0, x^* \geq 0 \text{ donde } \Phi_x^*$$

es un n -vector cuya j^{va} componente es $\partial\Phi/\partial x_j$ valuada en (x^*, α^*) .

SP Existe un $\alpha^* \in \mathbb{R}^m, \alpha^* \geq 0$, tal que

$$\Phi(x, \alpha^*) \leq \Phi(x^*, \alpha^*) \leq \Phi(x^*, \alpha) \text{ para todo } x \geq 0 \text{ y } \alpha \geq 0.$$

Recordatorio:

En la formulación anterior del problema de programación No Lineal y el Teorema 4, asumimos que f y las funciones g_j , son definidas en \mathbb{R}^n . En general podemos decir que f y las funciones g_j son definidas sobre algún subconjunto, S , de un Espacio Vectorial (llamado \mathbb{R}^n). Para contar con la concavidad de las funciones, S es un conjunto Convexo. Para la diferenciabilidad de las funciones, S debe ser un conjunto abierto. Si tomamos un subconjunto convexo de S , llamamos X , nuestro problema puede ser reescrito como: Maximizar $f(x)$ sujeto a $g_j(x) \geq 0, j=1, \dots, m, x \in X$. Si X es no vacío y compacto, la existencia de la solución es garantizada por el teorema de Weierstrass (asumiendo la continuidad de f).

Con esto las condiciones (KTL) pueden reescribirse como

$$\Phi_x^* \leq 0, \Phi_x^* \cdot x^* = 0, g(x^*) \geq 0, \alpha^* \cdot g(x^*) = 0 \text{ y } \alpha^* \geq 0, x^* \in X$$

Las condiciones (SP) se reescriben como

$$\Phi(x, \alpha^*) \leq \Phi(x^*, \alpha^*) \leq \Phi(x^*, \alpha) \text{ para todo } x \in X \text{ y } \alpha \geq 0.$$

El problema de Vector Máximo es similar al problema general de programación No Lineal, con la diferencia que $f(x)$ no es una función de variable real, sino que es una función vectorial. Esto es, $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$. Luego de esta introducción, damos la siguiente definición.

DEFINICION. Sean $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ y $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ funciones de variable real sobre X en \mathbb{R}^n . Decimos que x^* ejecuta un **Vector Máximo** de $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ si no existe un x en X tal que:

$$f_i(\tilde{x}) \geq f_i(x^*) \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, k,$$

$$f_{i_0}(\tilde{x}^*) > f_{i_0}(x^*) \text{ para algún } i_0 \text{ y}$$

\tilde{x} y x^* satisfacen las restricciones:

$$g_j(\tilde{x}) \geq 0, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$g_j(x^*) \geq 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Por otro lado, debemos notar que el concepto de punto eficiente en el Análisis de Actividades, es un caso especial del Vector Máximo, con $f(x) = x$. Debe notarse también que el problema del Vector Máximo tiene relevancia inmediata sobre el concepto del Optimo de Pareto, que es un concepto importante en Economía.

Observación

Se sigue de la anterior definición que si $f(x^*)$ es un vector máximo de restricciones, entonces:

x^* maximiza $f_{i_0}(x)$ [esto es $f_{i_0}(x^*) \geq f_{i_0}(x)$]

sujeto a

$$f_i(x) \geq f_i(x^*), i = i_0,$$

$$g_j(x) \geq 0, j=1, \dots, m, x \in X$$

donde la selección de i_0 es arbitraria.

Si no fuera así, entonces existe un \tilde{x} y un \tilde{i} tal que

$$f_{\tilde{i}}(\tilde{x}) > f_{\tilde{i}}(x^*) \text{ y}$$

$$f_i(\tilde{x}) \geq f_i(x^*), \text{ para todo } i \neq \tilde{i}$$

$$g_j(\tilde{x}) \geq 0, j=1, \dots, m, \tilde{x} \in X.$$

Esto es una contradicción por el supuesto que x^* es un Vector Máximo.

Utilizando la observación anterior, se puede probar muy fácilmente el siguiente teorema, que corresponde al TEOREMA 4.

TEOREMA 5. Sean $f_i(x)$, $i=1, \dots, k$ y $g_j(x)$, $j=1, \dots, m$, funciones de variable real en \mathbb{R}^n .

Supóngase que una de las dos condiciones siguientes es válida.

1. $g_j(x)$, $j=1, \dots, m$ son todas lineales.

2. $g_j(x)$, $j=1, \dots, m$ son todas cóncavas y existe un $x \geq 0$ tal que $g_j(x) > 0$

para todo $j=1, \dots, m$.

Entonces si x^* da un vector máximo de $f(x)=[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ sujeto a $g_j(x) \geq 0$, $j=1, \dots, m$ y $x \geq 0$, entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $\alpha > 0$ y un $\beta^* \in \mathbb{R}^m$, $\beta^* \geq 0$ tal que alguna de las siguientes condiciones es válida

1. $(KTL)_v$: $\Phi_x^* \leq 0$, $\Phi_x^* \cdot x^* = 0$, $g(x^*) \geq 0$, $\beta^* \cdot g(x^*) = 0$, $\beta^* \geq 0$ y $x^* \geq 0$ donde

$$\Phi(x, \beta) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x), \quad g(x) \equiv [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)] \text{ y } \Phi_x^* = \partial\Phi/\partial x$$

valuada en (x^*, β^*) .

$$2.(SP_{\downarrow}): \Phi(x, \beta^*) \leq \Phi(x^*, \beta^*) \leq \Phi(x^*, \beta) \text{ para todo } x \geq 0, \beta \geq 0.$$

También si $f_i(x)$, $i=1, \dots, k$ y $g_j(x)$, $j=1, \dots, m$ son todas cóncavas y si existe un $\alpha \in \mathbb{R}^k$ tal que $\alpha_i > 0$ para todo $i=1, \dots, k$, y si (KTL_{\downarrow}) ó (SP_{\downarrow}) es válido, entonces x^* da un vector máximo de $f(x)$ sujeto a $g(x) \geq 0$ y $x \geq 0$, además tenemos $\beta^* \cdot g(x^*) = 0$.

Observación

Podemos suponer que las funciones f_i y g_j , son definidas en un subconjunto S , abierto y convexo, de un espacio vectorial (como \mathbb{R}^n) y entonces considerar un problema de vector máximo en un subconjunto X de S , convexo y compacto. (Esto es, maximizar $[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ sujeto a $g_j(x) \geq 0$, $j=1, \dots, m$ y $x \in X$. La condición (KTL_{\downarrow}) puede escribirse como

$$\Phi_x^* \leq 0, \quad \Phi_x^* \cdot x^* = 0, \quad g(x^*) \geq 0, \quad \beta^* \cdot g(x) = 0, \quad \beta^* \geq 0 \text{ y } x^* \in X$$

También, la condición (SP_{\downarrow}) puede escribirse como

$$\Phi(x, \beta^*) \leq \Phi(x^*, \beta^*) \leq \Phi(x^*, \beta) \text{ para todo } x \in X, \beta \geq 0.$$

Es importante notar que en el Teorema 5, el vector máximo es realmente convertido a problema ordinario de programación no lineal, con $\alpha \cdot f(x)$ a ser maximizado sujeto a $g(x) \geq 0$ y $x \geq 0$. Considerando los α_i como parámetros, podemos llamar a esta conversión como la parametrización del problema del vector máximo.

El Teorema 3, uno de los teoremas fundamentales del Análisis de Actividad, puede ser fácilmente probado usando el Teorema 5. Para hacer esto, sea a_{ij} la cantidad del bien i involucrado en una unidad de operación de la actividad j y sea a^j el vector para la j^{ava} actividad donde el i^{vo} elemento es a_{ij} . Asumimos que hay n bienes y m actividades. Sea x_j el nivel de actividad de la j^{ava} actividad y sea x el vector de actividad cuyo elemento j es x_j . Entonces el conjunto de producción Y es:

$$Y = \{y: y = Ax, x \geq 0\}, \text{ donde } A = [a_{ij}]; \text{ ó}$$

$$Y = \{y: y = \sum_{j=1}^m a^j x_j, x \geq 0\}$$

Un punto eficiente de Y , y^* , es un punto tal que no existe un $y \in Y$ tal que $y \geq y^*$. En otras palabras, y^* puede ser obtenido como una solución del siguiente problema de vector máximo.

Maximizar y sujeto a $y \in Y$.

Entonces por el Teorema 5, si y^* es una solución para este problema, entonces existe un $p \geq 0$ tal que

$$p \cdot y^* \geq p \cdot y \text{ para todo } y \in Y.$$

También se puede probar que si existe $p > 0$ tal que $p \cdot y^* \geq p \cdot y$ para todo $y \in Y$, entonces y^* es un punto eficiente de Y .

Problema con Restricciones

Asumimos ahora que tenemos restricciones de recursos, lo cual escribimos como $y + \bar{z} \geq 0$, $y \in Y$, donde \bar{z}_i , la componente i de \bar{z} , denota la cantidad de este bien i (recurso) disponible en esta economía. El conjunto factible Y_F para esta economía es entonces

$$Y_F = \{y: y \in Y, y + \bar{z} \geq 0\}.$$

Un punto eficiente de Y_F puede ser obtenido como una solución del siguiente problema de vector máximo.

Maximizar y sujeto a $y + \bar{z} \geq 0$, $y \in Y$.

Si asumimos que existe un $\tilde{y} \in Y_F$ tal que $\tilde{y} + \bar{z} > 0$. Entonces usando el Teorema 5, si y_F^* es una solución de este problema, existe $\alpha \geq 0$ y un $\beta^* \geq 0$ tal que

$$(SP): \Phi(y_F, \beta^*) \leq \Phi(y_F^*, \beta^*) \leq \Phi(y_F^*, \beta) \text{ para todo } y \in Y, y \beta \geq 0, \text{ donde } \Phi(y, \beta) \equiv \alpha \cdot y + \beta \cdot (y + \bar{z})$$
$$\text{y } \beta^* \cdot (y_F + \bar{z}) = 0.$$

La primera desigualdad de la condición anterior, puede ser escrita como

$$\alpha \cdot y + \beta^* \cdot (y + \bar{z}) \leq \alpha \cdot y_F^* + \beta^* \cdot (y_F^* + \bar{z}) \text{ para todo } y \in Y,$$

o como

$$p \cdot y \leq p \cdot y_F^* \text{ para todo } y \in Y, \text{ donde } p \equiv \alpha + \beta^*$$

En el otro sentido, si existe $\alpha > 0$, un $\beta^* \geq 0$ y un y_F^* tal que la condición (SP) anterior es válida, entonces y_F^* es una solución del problema de vector máximo presentado anteriormente.

Finalmente, consideraremos el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar $\alpha \cdot y$, sujeto a $y + \bar{z} \geq 0$ y además $y \in Y$, donde $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$

y

O, maximizar $\alpha \cdot (Ax)$, sujeto a $Ax + \bar{z} \geq 0$ y $x \geq 0$, donde $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$.

x

Claramente, estos dos problemas son equivalentes. De aquí, si x_F^* es una solución del segundo de los problemas, $y_F^* = Ax_F^*$ es una solución del primer problema si y solo si existe un $\beta^* \geq 0$ tal que

(SP): $\Phi(y_F, \beta^*) \leq \Phi(y_F^*, \beta^*) \leq \Phi(y_F^*, \beta)$ para todo $y \in Y$, y $\beta \geq 0$, donde $\Phi(y, \beta) \equiv \alpha \cdot y + \beta \cdot (y + \bar{z})$.

La condición (SP) establece que si y_F^* es una solución del problema de vector máximo con restricciones, entonces esta es una solución del problema de programación lineal. En sentido contrario, si podemos mostrar una solución x_F^* del problema de programación lineal, con $\alpha > 0$, entonces $y_F^* = Ax_F^*$ es una solución del problema de vector máximo con restricciones, que provee un punto eficiente de Y_F . Si hacemos variar α , podemos obtener el conjunto completo de puntos eficientes de Y_F .

D El Conjunto de la Producción Mundial y la Caracterización de los Puntos Eficientes

Asumimos que l_{ij} , la cantidad de mano de obra requerida para producir una unidad del bien i en el país j , es constante para todo i y j independiente del nivel de producción. Esto se ilustra en la siguiente tabla, donde cada columna puede ser considerada como un proceso de producción.

	País 1				País m			
Bien 1	1,	0,	...,	0 ...	1,	0,	...,	0
Bien 2	0,	1,	...,	0 ...	0	1,	...,	0
.
.
Bien n	0,	0,	...,	1 ...	0,	0,	...,	1
Mano de Obra País 1	-1_{11} ,	-1_{21} ,	...,	-1_{n1} ...	0,	0,	...,	0
Mano de Obra País 2	0,	0,	...,	0	0
.
.
Mano de Obra País m	0,	0,	...,	0 ...	-1_{1m} ,	-1_{2m} ,	...,	-1_{mm}

Descrito el modelo clásico de esta manera, los siguientes supuestos resultan obvios:

1. Existe sólo una actividad (proceso) para producir cada bien en cada país.
2. No existe producción conjunta.
3. La mano de obra es el único factor de producción.
4. Los bienes intermedios (no terminales ni materia prima) son suprimidos.

La intención de esta sección es construir un modelo general que no es restringido por estos supuestos y la caracterización de este modelo. Esta caracterización se realizará usando los conceptos de análisis de actividades y la programación no lineal.

Primero clasificamos los bienes en dos categorías, aquellos que son internacionalmente movibles con costos insignificantes de transporte, llamados **Bienes** y los que son completamente inamovibles internacionalmente, llamados **Factores**. Asumimos que ambos son completamente movibles y con costos de transporte insignificante dentro de cada país.

Sea b^{jk} el vector de combinaciones de entrada-salida de bienes (actividades) para una unidad de operación de la actividad k en el país j . Sea a^{jk} el vector de combinaciones de entrada-salida de factores para una unidad de operación de la actividad k en el país j . Elementos negativos en ambos vectores, significan entradas. Sea t^{jk} el nivel de actividad de la actividad k en el país j . Sea $I_j = \{1, 2, \dots, k_j\}$ el conjunto de índices de los procesos de producción disponibles en el país j .

$$a^j = [a^{j1}, \dots, a^{jk}], b^j = [b^{j1}, \dots, b^{jk}], \text{ y } t^j = \begin{vmatrix} t_{j1} \\ t_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{jk_i} \end{vmatrix}$$

Considerando ahora la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} b^1, b^2, \dots, b^m \\ a^1, 0, \dots, 0 \\ 0, a^2, \dots, 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0, 0, \dots, a^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_g \\ Z_f^1 \\ Z_f^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_f^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_g \\ Z_f \end{vmatrix}$$

z_g y z_f^j se definen de la siguiente manera

$$z_g \equiv \sum_{j=1}^m b^j \cdot t^j, \quad \text{y} \quad z_f^j \equiv a^j \cdot t^j$$

En forma abreviada podemos escribir

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} B \\ \\ A \end{array} \right| \quad t = z \quad \text{ó} \quad Dt = z \quad \text{con} \quad D = \left| \begin{array}{c} B \\ \\ A \end{array} \right| \end{array}$$

Si z^j denota el vector de recursos disponibles en el país j y asumimos que \bar{z}^j es un vector fijo, que puede dividirse en dos vectores \bar{z}_g^j , el de bienes y \bar{z}_f^j , el de factores. Entonces el vector mundial de recursos puede escribirse como

$$z \equiv \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} m \\ \sum_{j=1}^m \bar{z}_g^j \\ \bar{z}_f^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{z}_f^m \end{array} \right| \end{array}$$

Vamos a convenir que los elementos de \bar{z}^j son todos no negativos. Ya que en el Análisis de Actividad, todas las entradas son representadas por números negativos, las restricciones de recursos mundiales pueden escribirse como $-z \leq \bar{z}$ o $z + \bar{z} \geq 0$. Así, el conjunto truncado de producción mundial puede ser expresado como:

$$Z \equiv \{z: z = Dt, t \geq 0, -z \leq \bar{z}\}.$$

Tenemos luego que z^* es un punto eficiente en Z si no existe un $z' \in Z$ tal que $z' \geq z^*$. Entonces si z^* es un punto eficiente en Z , este es una solución del siguiente problema de vector máximo.

Vector Maximizar z para todo $z \in Z$

De aquí si $z^* = \begin{pmatrix} z_g^* \\ z_f^* \end{pmatrix}$ es un punto eficiente de Z , entonces existe

un vector $(p, w) \geq 0$, $(p, w) \neq 0$ tal que

$$p \cdot z_g^* + w \cdot z_f^* \geq p \cdot z_g + w \cdot z_f \text{ para todo } z \in Z. \quad \text{I}$$

Por otro lado, si existe un $(p, w) > 0$ tal que la relación de la línea anterior es válida, entonces z^* es un punto eficiente.

Alternativamente, podemos escribir el problema anterior como sigue:

Vector-Maximizar Dt sujeto a $Dt + \bar{z} \geq 0$ y $t \geq 0$. Entonces por el Teorema 5, si t^* es una solución de este problema (esto es $z^* \equiv Dt^*$ es un punto eficiente), entonces existen vectores $\alpha \geq 0$, $q^* \geq 0$ y $\alpha \neq 0$ tal que:

$$\alpha \cdot (Dt^*) + q^* \cdot (Dt^* + \bar{z}) \geq \alpha \cdot (Dt) + q^* \cdot (Dt + \bar{z}) \text{ para todo } t \geq 0 \quad \text{II}$$

$$\alpha \cdot (Dt^*) + q^* \cdot (Dt^* + \bar{z}) \leq \alpha \cdot (Dt^*) + q^* \cdot (Dt^* + \bar{z}) \text{ para todo } q \geq 0 \quad \text{III}$$

$$q^* \cdot (Dt^* + \bar{z}) = 0 \quad \text{IV}$$

En sentido contrario, si existe un $\alpha > 0$ y un $q^* \geq 0$ tal que las expresiones II y III son válidas entonces $z^* = Dt^*$ es un punto eficiente. Haciendo $\tilde{p} = (\alpha + q^*)$, podemos reescribir la relación II de la siguiente manera.

$$\tilde{p} \cdot (Dt^*) \geq \tilde{p} \cdot (DT) \text{ para todo } t \geq 0. \quad \text{II'}$$

Esto es claramente equivalente a la expresión I con $\tilde{p} = (p, w)$.

La relación III puede reescribirse como

$$q^* \cdot (Dt^* + \bar{z}) \leq q \cdot (Dt^* + \bar{z}) \text{ para todo } q \geq 0. \quad \text{III'}$$

Si hacemos $y = y^*$ y $x = x^*$, excepto para la actividad k en el país j , en la relación I, esto significa, fijar $t = t^*$ excepto para t_{jk} . Entonces obtenemos $p \cdot (b^{jk} t_{jk}^*) + w^j \cdot (a^{jk} t_{jk}^*) \geq p \cdot (b^{jk} t_{jk}) + w^j \cdot (a^{jk} t_{jk})$ para todo $t_{jk} \geq 0$. V

Ya que la escogencia de j y k es arbitraria, la anterior desigualdad es válida para todo $j=1, \dots, m$ y $k=1, \dots, k_j$. En sentido contrario, si la desigualdad es válida para todo j y k , entonces la relación II es válida. La última expresión proporciona una completa (necesaria y suficiente) caracterización de los puntos eficientes del conjunto de posibilidades de producción mundial. Interpretando p como el vector de precios de los bienes y w como el vector de precio de los factores, encontramos que la expresión anterior establece que la utilidad es maximizada para cada actividad al operar en un punto eficiente. Bajo esta interpretación de p y w , la expresión II establece que la utilidad del mundo como un todo, es también maximizada.

Debe notarse que un punto eficiente puede también caracterizarse como una solución del siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \text{(M)} \quad & \text{Maximizar } \alpha \cdot (Dt) \\ & t \\ & \text{Sujeto a} \end{aligned}$$

$$Dt + \bar{z} \geq 0 \quad y$$

$$t \geq 0.$$

El dual de este problema es

(m) Minimizar $v \cdot \bar{z}$

$$v$$

Sujeto a

$$-D^T v \geq D^T \alpha \quad y$$

$$v \geq 0$$

El teorema de dualidad establece que existe una solución para (M) si y sólo si existe una solución para (m), y que si t^* es una solución de (M) y v^* es una solución de (m), entonces

$$i. \quad \alpha \cdot (Dt^*) = v^* \cdot \bar{z}$$

$$ii. \quad (Dt^* + \bar{z}) \cdot v^* = 0, \quad Dt^* + \bar{z} \geq 0 \quad y$$

$$iii. \quad [D^T(\alpha + v^*)] \cdot t^* = 0, \quad D^T(\alpha + v^*) \leq 0.$$

La relación iii puede ser reescrita como

$$iii'. \quad (\alpha + v^*) \cdot (Dt^*) = 0, \quad D^T(\alpha + v^*) \leq 0.$$

Si hacemos $\tilde{p} = \alpha + v^*$ podemos escribir la expresión como:

$$\tilde{p} \cdot (Dt^*) = 0, \quad D^T \tilde{p} \leq 0 \quad \text{ó} \quad \text{VI}$$

$$\tilde{p} \cdot (Dt^*) = 0, \quad \tilde{p} \cdot (Dt) \leq 0 \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad \text{VII}$$

Esta última expresión corresponde a II'. De hecho, la expresión VII también proporciona alguna clarificación a la relación anterior, en cuanto a que ésta especifica que la utilidad total máxima en un punto eficiente, es cero.

Haciendo $t = t^*$, excepto para t_{jk} , podemos obtener la relación V (donde $\tilde{p} = (p, w)$, y

$$p \cdot (a^{jk} t_{jk}^*) + w^j \cdot (b^{jk} t_{jk}^*) = 0. \quad \text{VIII}$$

Las relaciones V y VII dicen que ningún proceso de producción obtiene una ganancia positiva y que todos los procesos usados actualmente, obtienen ganancia cero. Con esto se entiende que los puntos eficientes son precisamente aquellos que pueden aparecer en un equilibrio competitivo. Así, si podemos mostrar que existe un vector de precios que es compatible con las condiciones de demanda, entonces hemos demostrado que existe un equilibrio competitivo en nuestro modelo de la economía mundial.

Bajo los supuestos siguientes: a) una actividad para cada bien, b) no hay producción conjunta, c) un factor en cada país (mano de obra), y d) el mismo número de bienes y países, se observa que las expresiones V y VII implican el Teorema de McKenzie-Jones.

El Teorema de Heckscher-Ohlin está relacionado con el caso en que a) el conjunto de producción de cada país es el mismo, pero las restricciones de recursos \bar{z} , son

diferentes, esto es $I_j = I$ para todo j , $a^{jk} = a^k$ y $b^{jk} = b^k$ para todo j ; b) no hay producción conjunta; c) sólo hay dos factores de producción; y d) los bienes intermedios son suprimidos.

E Una Teoría del Equilibrio del Libre Comercio

En esta sección se hace una extensión de los modelos descritos anteriormente, en especial por una modificación en el tratamiento del modelo en los siguientes tres aspectos:

1. Generalizar el conjunto mundial de producción, tanto como sea posible.
2. Permitir la posibilidad que cada persona en cada país tenga una función de utilidad diferente, y que ésta no sea una función de utilidad agregada.
3. No Considerar los patrones de especialización como en el problema de Mill o el Teorema de McKenzie-Jones. En su lugar, considerar algunas otras caracterizaciones del equilibrio del libre comercio.

Se construirá un modelo general de la producción mundial y se mostrará que éste es un tipo de mercado competitivo. Probaremos entonces la muy conocida caracterización en términos de la optimalidad de Pareto y se probará su existencia en un equilibrio de comercio libre.

Descripción del Modelo

Consideramos un mundo de m países. Existe 1 recursos primarios en el mundo que son suplidos exógenamente. No es necesario que todos los países tengan alguno de

cada recurso primario antes del comercio y tampoco es necesario que todos los recursos primarios sean inamovibles internacionalmente. Existen n bienes (y servicios) en el mundo. No es necesario que cada país sea capaz de producir cada uno de estos bienes. No se hace distinción entre bienes intermedios y bienes finales, ya que el mismo bien puede pertenecer a ambas categorías. Los servicios internacionales de transporte no son incluidos en la lista de bienes; son listados separadamente. Son estos los únicos bienes que cuyos precios necesariamente deben ser los mismos entre los países. Existen \bar{n} servicios internacionales de transporte. No se asume que cada país tiene el mismo número de actividades de producción, así el país j selecciona de entre k_j diferentes actividades de producción. Producciones conjuntas son permitidas. Los costos de transporte no son ignorados.

Sea a^{jk} el I -componente vector columna de cantidades de recursos primarios involucrados en un nivel unitario de operación de la actividad k en el país j . Existen k_j actividades en el país j , numeradas de 1 a t_j-1 divididas en bienes y servicios. Las actividades numeradas de t_j a k_j son los servicios internacionales de transporte disponibles en el país j . Todos los elementos de a^{jk} , $k=1, \dots, t_{j-1}$ son no positivos debido a la convención usual del análisis de actividad. No se asume que los recursos primarios sean completamente inamovibles entre países, pero asumimos que la actividad de transporte puede utilizar los recursos primarios de cualquier país. Entonces a_{ijk} , el elemento i de a^{jk} , $k=t_j, \dots, k_j$, es la cantidad del recurso i del país j requerido para una unidad de operación de la actividad de transporte k si $a_{ijk} < 0$, o la cantidad del recurso i transferido al país j por esta actividad de transporte si $a_{ijk} > 0$.

Ahora definimos las matrices:

$$A_G^j \equiv [a^{j1}, a^{j2}, \dots, a^{jt_{j-1}}], \quad A_T^j \equiv [a^{jt_{j-1}}, a^{jt_{j-2}}, \dots, a^{jk_j}]$$

$$A^j \equiv \left| \begin{array}{cc} 0 & A_T^1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ A_G^j & A_T^j \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & A_T^m \end{array} \right|$$

Sea b^{jk} el n -componente vector columna, cuyo elemento i , b_{ijk} , denota la cantidad del bien i producido en el país j (o transportado al país j) si $b_{ijk} > 0$, o la cantidad del bien i requerido como un bien intermedio en el país j (o transportado desde el país j) si $b_{ijk} < 0$, por un nivel unitario de operación en la actividad k . Definimos las siguientes matrices:

$$B_G^j \equiv [b^{j1}, b^{j2}, \dots, b^{j_{j-1}}],$$

$$B_T^j \equiv [b^{jt_j}, b^{jt_{j+1}}, \dots, b^{jk_j}],$$

$$B^j \equiv \left| \begin{array}{cc} 0 & B_T^1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ G_G^j & B_T^j \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & B_T^m \end{array} \right|$$

Asumimos que hay \tilde{n} servicios internacionales de transporte. Sea \tilde{b}^{jk} un \tilde{n} -componente vector columna cuyo elemento i , \tilde{b}_{ijk} , denota el servicio internacional de transporte i producido ($\tilde{b}_{ijk} > 0$) o requerido ($\tilde{b}_{ijk} < 0$) para un nivel unitario de operación de la actividad k (en el país j).

Consideremos la siguiente matriz:

$$\tilde{B}^j \equiv \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{1j} & \dots & \tilde{b}_{1kj} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{nj} & \dots & \tilde{b}_{nkj} \end{vmatrix}$$

$$= [0 \dots 0 \ b_i^j \dots \tilde{b}_i^k] = [0 \ \tilde{B}_T^j].$$

Definimos:

$$A \equiv [A^1, \dots, A^m], \quad B \equiv [B^1, \dots, B^m], \quad \tilde{B} \equiv [\tilde{B}^1, \dots, \tilde{B}^m].$$

Sea t el nivel de actividad, definido como:

$$t \equiv \begin{vmatrix} t^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ t^m \end{vmatrix}, \quad \text{donde } t^j \equiv \begin{vmatrix} t_{j1} \\ \vdots \\ \vdots \\ t_{jkj} \end{vmatrix}$$

Sea r el vector de oferta de recursos, entonces

$$r \equiv \begin{vmatrix} r^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r^m \end{vmatrix}, \quad \text{donde } r^j \equiv \begin{vmatrix} r_{j1} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{jt} \end{vmatrix}$$

Sea x el vector de bienes de salida, entonces

$$x \equiv \begin{vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^m \end{vmatrix}, \quad \text{donde } x^j \equiv \begin{vmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{jn} \end{vmatrix}$$

Sea \tilde{x} el vector de oferta de servicios de transporte internacional

$$\tilde{x} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^m \end{pmatrix}, \text{ donde } \tilde{x}^j \equiv \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_{jn} \end{pmatrix}$$

Entonces nuestro sistema de producción mundial, puede ser descrito como sigue:

$$\begin{aligned} At + r &\geq 0, & t &\geq 0, & \dots\dots\dots & 1 \\ x &= Bt, & t &\geq 0, & \dots\dots\dots & 2 \\ \tilde{x} &= \tilde{B}t, & t &\geq 0, & \dots\dots\dots & 3 \end{aligned}$$

Definimos la matriz:

$$D \equiv \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \\ A \end{pmatrix}, \text{ y los vectores correspondientes,}$$

$$z \equiv \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \\ At \end{pmatrix} \text{ y } z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones 1, 2 y 3 pueden ser reducidas a:

$$z = Dt, \quad z + \bar{z} \geq 0, \quad \text{y } t \geq 0.$$

El conjunto de posibilidades mundiales de producción se define como:

$$Y_w \equiv \{z: z = Dt, t \geq 0\}, \text{ con } z + \bar{z} \geq 0, \text{ ó}$$

$$Y_w \equiv \{z: z = Dt, z + \bar{z} \geq 0, t \geq 0\}.$$

Sea c_j el vector agregado de consumo [esto es, un $(n + \tilde{n} + 1)$ -vector] para el país j . Entonces tenemos

$$\sum_{j=1}^m c_j \leq z + \bar{z}, z \in Y_w.$$

Debe notarse que los recursos primarios pueden ser consumidos por los consumidores finales, y que los servicios internacionales de transporte también pueden ser consumidos por los consumidores finales (por ejemplo, agencias de viajes).

Hacemos c_{sj} como el vector de consumo del individuo s de país j . Claramente, $\sum_s c_{sj} = c_j$. Sea $u_{sj}(c_{sj})$ su función de utilidad.

Sea C_{sj} su conjunto de posibilidades de consumo. En el análisis usual de comercio internacional, C_{sj} es tomado en el ortante no negativo para todo s y j . En este caso, simplemente suponemos que C_{sj} es un subconjunto convexo del ortante no negativo del espacio de bienes

DEFINICION (Factibilidad) Un arreglo de vectores de consumo $\{c_{sj}\}$ es llamado **factible** si existe un vector de producción z tal que

$$z + \bar{z} \geq \sum_{j=1}^m c_j \text{ con } c_{sj} \in C_{sj} \text{ para todo } s \text{ y } j; z \in Y_w.$$

DEFINICION (Optimo de Pareto) Un arreglo factible de vectores de consumo $\{c_{sj}^*\}$ es llamado **Optimo de Pareto** si no existe un arreglo factible de vectores de consumo $\{c_{sj}\}$ tal que $u_{sj}(c_{sj}) \geq u_{sj}(c_{sj}^*)$ para todo s y con desigualdad estricta para al menos un s .

DEFINICION (Equilibrio del Libre Comercio) $[p^*, \{c_{sj}^*\}, z^*]$ con $p^* \geq 0$, $c_{sj} \in C_{sj}$ y $z^* \in Y_w$

es llamado un **equilibrio del libre comercio** si:

1. $u_{sj}(c_{sj}^*) \geq u_{sj}(c_{sj})$ para todo $c_{sj} \in C_{sj}$, con $p^* \cdot c_{sj} \leq p^* \cdot c_{sj}^*$ para todo s, j .
2. $p^* \cdot z^* \geq p^* \cdot z$ para todo $z \in Y_w$.

$$3. z + \bar{z} \geq \sum_{j=1}^m c_j^* \text{ y } p^* \cdot (z + \bar{z} - \sum_{j=1}^m c_j^*) = 0.$$

Si en la condición 2 anterior, hacemos $t_{jk} = t_{jk}^*$ (donde t_{jk}^* corresponde a z^*) excepto para $j = j_0$ y $k = k_0$, entonces obtenemos la condición de maximización de utilidad para la actividad k_0 en el país j_0 . Ya que la escogencia de j_0 y k_0 es arbitraria, se entiende que la utilidad es maximizada para todos los procesos de producción en todos los países. En el otro sentido, si la utilidad es maximizada en todos los procesos en todos los países, entonces la condición 2 es válida.

Por las consideraciones de la sección anterior, se entiende que la condición 2 establece que z^* es un punto eficiente en Y_w . Entonces la existencia de un equilibrio de libre comercio implica que la producción toma lugar en un punto eficiente.

DEFINICION (Satisfacción) Un individuo s de un país j se satisface en c'_{sj} si

$$u_{sj}(c'_{sj}) \geq u_{sj}(c_{sj}) \text{ para todo } c_{sj} \in C_{sj}$$

Antes de presentar el siguiente teorema, se establecen los siguientes supuestos:

Supuesto 1: Existe $c_{sj}^0 \in C_{sj}$ para todo s y j y un $z^0 \in Y_w$ tal que

$$\sum_{s,j} c_{sj}^0 < z^0 + \bar{z}$$

Supuesto 2: $u_{sj}(c_{sj})$ es una función continua y cóncava para todo s y j .

Supuesto 3: Dado un punto c_{sj}^* y un predefinido vector de precios p^* , entonces

existe un $c_{sj}^0 \in C_{sj}$ tal que $p^* \cdot c_{sj}^* > p^* \cdot c_{sj}^0$ para todo s y j .

TEOREMA 6 Bajo los supuestos 1 y 2, si $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ es un punto optimal de Pareto, entonces existe un $p^* \geq 0$ tal que $[p^*, \{c_{sj}^*\}, z^*]$ es un equilibrio de libre comercio.

Demostración Sea u una función vectorial cuyo elemento típico es $u_{sj}(c_{sj})$. Ya que $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ es un punto optimal de Pareto, este es una solución del siguiente problema de vector máximo:

Maximizar u sujeto a $\sum_{s,j} c_{sj} \leq z + \bar{z}$, $c_{sj} \in C_{sj}$, $z \in Y_w$.

Entonces, por los supuestos 1 y 2, existen vectores $\alpha \geq 0$, $p^* \geq 0$, $\alpha \neq 0$ tal que

$$\alpha \cdot u^* + p^* \cdot (z^* + \bar{z} - \sum_{s,j} c_{sj}^*) \geq \alpha \cdot u + p^* \cdot (z + \bar{z} - \sum_{s,j} c_{sj}) \quad \dots I$$

para todo $c_{sj} \in C_{sj}$ (para todo s y j) y para todo $z \in Y_w$ y

$$p^* \cdot (z^* + \bar{z} - \sum_{s,j} c_{sj}^*) = 0, \quad z^* + \bar{z} - \sum_{s,j} c_{sj}^* \geq 0. \quad \dots II$$

La condición 3 del Equilibrio del Libre Comercio se sigue directamente de la expresión II.

Si hacemos $c_{sj} = c_{sj}^*$ para todo s y j en la relación I, entonces la condición 2 del ELC se da.

Finalmente, haciendo $c_{sj} = c_{sj}^*$ para todo s excepto $s = s_0$ y $z = z^*$, se tiene:

$$\alpha_{s_0j} u_{s_0j}(c_{s_0j}^*) - \alpha_{soj} u_{soj}(c_{soj}) \geq p^* \cdot c_{soj}^* - p^* \cdot c_{soj} \quad \text{para todo } c_{soj} \in C_{soj}. \quad \dots III$$

Si $\alpha > 0$, entonces la condición 1 del ELC es satisfecha para el individuo s_o del país j . Si $\alpha_{soj} = 0$, implica que $p^* \cdot c_{soj}^* \leq p^* \cdot c_{soj}$ para todo $c_{soj} \in C_{soj}$, lo cual contradice el supuesto 3. De aquí, $\alpha_{soj} > 0$. Ya que la escogencia de s_{oj} es arbitrario, esto establece el teorema.

COROLARIO Si existe al menos un consumidor, por ejemplo el individuo s_o del País j , que no se satisface en c_{soj}^* , entonces $p^* \neq 0$

Prueba Sabemos que la expresión III del teorema anterior es válida con $\alpha_{soj} > 0$, Supóngase que $p^*=0$, entonces $u_{soj}(c_{soj}^*) \geq u_{soj}(c_{soj})$ para todo $c_{soj} \in C_{soj}$.

Esto contradice el supuesto que el señor s_o del País j no queda satisfecho en c_{soj}^* .

Antes de probar la existencia de un ELC, agregamos los siguientes supuestos:

Supuesto 4: C_{sj} es compacto para todo s y j .

Supuesto 5: (no-satisfacción) Para todo $c_{sj} \in C_{sj}$, existe un c_{sj}^o que es preferido

a c_{sj} .

Supuesto 6: Todo consumidor puede sobrevivir en ausencia de comercio sobre la base que sus bienes están disponibles.

Nótese que el ELC, como fue definido anteriormente, puede ser obtenido asignado el ingreso total mundial, $p^* \cdot (z + \bar{z})$, de modo que el consumidor s del País j recibe $p^* \cdot c_{sj}^*$. En otras palabras, sin tal reasignación del ingreso, un óptimo de Pareto no puede, en general, ser soportado por un precio competitivo. Para probar la existencia de un ELC,

tenemos que probar la existencia de un vector de precios que soporte las condiciones de ELC sin la reasignación del ingreso. De aquí, podemos presentar de otra forma la condición 1 del ELC. Primero notemos que la renta del consumidor s del País j , denotado por M_{sj} , dado el vector de precios p^* y el vector de salida z^* , puede ser escrita como:

$$M_{sj}(p^*, z^*) \equiv \max\{0, \theta_{sj} p^* \cdot (\bar{z} + z^*)\}.$$

donde θ_{sj} es la cuota del ingreso mundial recibida por el señor s del País j , y $\sum \theta_{sj} = 1$

TEOREMA 7 Bajo los supuestos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 existe un ELC con un vector de precios no igual a cero.

Prueba Sea $U \equiv \sum_{s,j} \alpha_{sj} u_{sj}(c_{sj})$ y considérese el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} & \sum_{s,j} c_{sj} z \\ & \text{Maximizar } U \text{ sujeto a} \\ & \sum_{s,j} c_{sj} \leq z + \bar{z}, c_{sj} \in C_{sj}, z \in Y_w. \end{aligned}$$

Si $[\{c'_{sj}\}, z']$ es una solución de este problema, entonces existe un $p' \geq 0$, tal que

$$U' + p' \cdot (z' + \bar{z} - \sum_{s,j} c'_{sj}) \geq U + p' \cdot (z + \bar{z} - \sum_{s,j} c_{sj}),$$

$$\text{para todo } c_{sj} \in C_{sj} \text{ y } z \in Y_w, \text{ donde } U' \equiv \sum_{s,j} \alpha_{sj} u_{sj}(c'_{sj}); \text{ y}$$

$$p' \cdot (z' + \bar{z} - \sum_{s,j} c'_{sj}) = 0, \quad z' + \bar{z} - \sum_{s,j} c'_{sj} \geq 0.$$

De una manera similar a como se hizo en el Teorema 1, podemos mostrar que

$$p' \cdot z' \geq p' \cdot z, \text{ para todo } z \in Y_w;$$

$$u_{sj}(c'_{sj}) \geq u_{sj}(c_{sj}), \text{ para todo } c_{sj} \in C_{sj}, \text{ con } p' \cdot c'_{sj} \geq p' \cdot c_{sj}, \text{ si } \alpha_{sj} > 0; \text{ y}$$

$$p' \cdot c_{sj} \geq p' \cdot c'_{sj}, \text{ para todo } c_{sj} \in C_{sj}, \text{ si } \alpha_{sj} = 0.$$

1* Por los supuestos, no existe un paquete de consumo de satisfacción en C_{s_j} , $p' \neq 0$. De esto, podemos normalizar p' tal que resulte una unidad de simplex. Sea α un vector cuyo elemento típico es α_{s_j} . Suponemos que en el problema de maximización, α es una unidad simplex.

Ya que C_{s_j} y Y_w son acotados, existe un número M tal que

$$\sum_{s,j} \left| M_{s_j}(p,z) - p \cdot c_{s_j} \right| < M \text{ para todo } c_{s_j} \in C_{s_j} \text{ y } z \in Y_w$$

Definimos $u_{s_j} \equiv \max \{0, \alpha_{s_j} + [M_{s_j}(p,z) - p \cdot c_{s_j}]/M\}$, y $\alpha_{s_j}' = u_{s_j}/\sum u_{s_j}$

Ahora consideremos un mapeo $[\alpha, \{c_{s_j}\}, z] \rightarrow [\alpha', \{c_{s_j}'\}, z', p']$.

Mostraremos que este es un mapeo semicontinuo superior ⁽¹⁾ de un conjunto convexo en si mismo, cuya imagen es no vacía y convexa. Entonces por el teorema de punto fijo de Kakutanis ⁽²⁾, existe un punto fijo $[\alpha^*, \{c_{s_j}^*\}, z^*, p^*]$. Se muestra que en este punto todas las condiciones ELC son satisfechas.

(1) Mapeo Semicontinuo Superior

$F: X \rightarrow Y$ es una función multivaluada. $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^n$.

F es un Mapeo Semicontinuo Superior en el punto $x^0 \in X$ si $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$

$$y^k \in F(x^k) \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y^0 \Rightarrow y^0 \in F(x^0)$$

(2) Teorema de Punto Fijo de Kakutanis

Sea X un conjunto no vacío, convexo y compacto en \mathbb{R}^n . Si f es un mapeo semicontinuo superior de X en X y el conjunto $f(x)$ es no vacío y convexo, entonces existe un x^* (llamado punto fijo) tal que $x^* \in f(x^*)$

TEOREMA 8 Si $[\{c_{sj}^*\}, z^*, p^*]$ es un ELC en el Teorema 2, entonces $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ es un óptimo de Pareto.

Prueba Debe notarse que $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ maximiza $\sum_{s,j} \alpha_{sj}^* u_{sj}(c_{sj})$ (donde $\alpha_{sj} > 0$ para todo s y j),

sujeto a la condición factible.

Supongamos que $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ no es óptimo de Pareto, entonces existe $c_{sj}^o \in C_{sj}$ para todo s y j y un $z^o \in Y_w$ tal que $u_{sj}(c_{sj}^o) \geq u_{sj}(c_{sj}^*)$ es válido para todo s y j , y válido con la desigualdad estricta para al menos un s y un j , y $\sum_{s,j} c_{sj}^o \leq z^o + z^*$.

En otras palabras, existe un $[\{c_{sj}^o\}, z^o]$ factible tal que $\sum_{s,j} \alpha_{sj}^* u_{sj}(c_{sj}^o) > \sum_{s,j} \alpha_{sj}^* u_{sj}(c_{sj}^*)$, lo cual

contradice la condición que $[\{c_{sj}^*\}, z^*]$ es un máximo.

VIII BIBLIOGRAFIA

Ferguson Ch. E. y Gould, J. P., **Teoría Microeconómica**, 2da. ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1987.

Fulks, Watson, **Cálculo Avanzado**, 1a. ed. Editorial Limusa, México, 1973.

Gass, Saul J., **Programación Lineal: Métodos y Aplicaciones**, 2da. ed. Compañía Editorial Continental, México, 1977.

Henderson, James H. and Quandt, Richard E., **Microeconomic Theory: A Mathematical Approach.**, Second Edition, McGRAW-HILL, 1971.

Herstein, J. N., **Algebra Moderna**, 1a. ed. Editorial Trillas, México, 1973.

Intriligator, Michael D., **Mathematical Optimization And Economic Theory**, 1a. ed. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1971.

Lay, Steven R., B, **Convex set and their applications.**, 1a. ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.

Lipschutz, Seymour, **Algebra Lineal**, 3a. ed. McGRAW-HILL, México.

MacLane, Saunders And Birkhoff, Garrett, **Algebra**, The Machillan Company, London, 1970.

Márquez Diez-Canedo, Javier, **Fundamentos de Teoría de Optimización.**, 2da. ed. Editorial Limusa, México, 1987.

Salvatore Dominick, **Economía Internacional**, 1a. ed. McGRAW-HILL, Bogotá, Colombia, 1986.

Taha, Handy A., **Investigación de Operaciones**, 5ta. ed. Alfaomega, 1991.

Takayama, Akira, **International Trade. An Approach To The Theory.** 1a. ed. Holt, Rinehart And Winston, Inc. New York, 1972.

