

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE  
GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades



Aplicación de Conjuntos Difusos  
al Análisis de Decisiones

Rodrigo Caal Riveiro

DEL VALLE DE

Guatemala

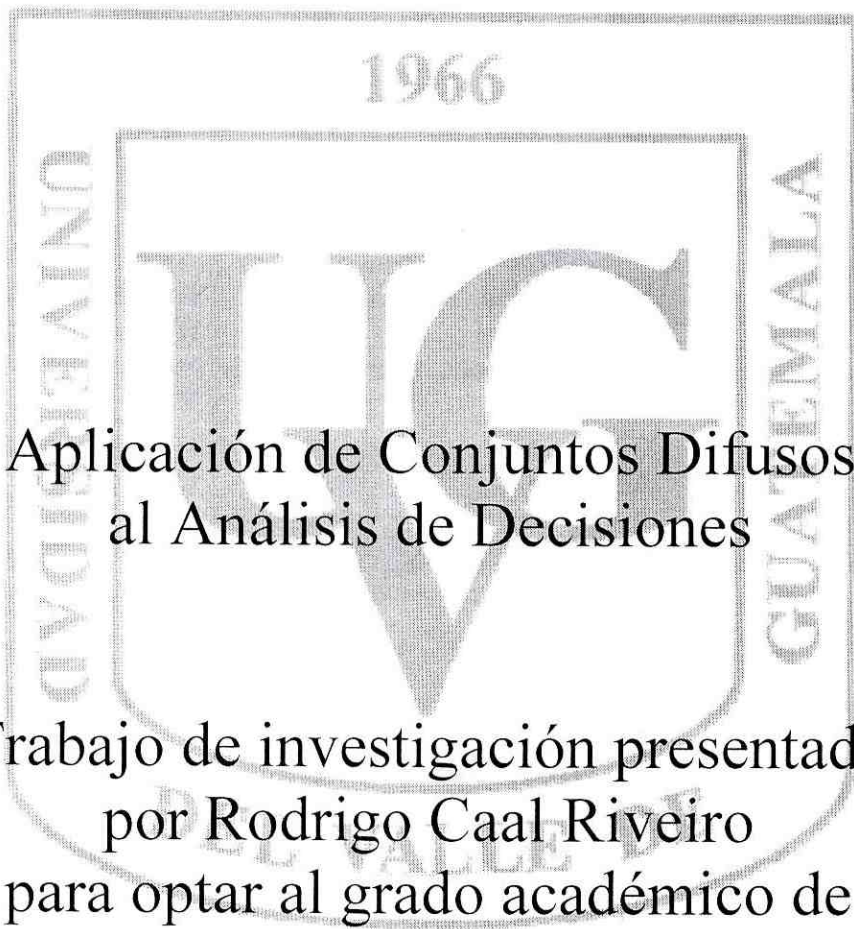
1998



# Aplicación de Conjuntos Difusos al Análisis de Decisiones

# UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

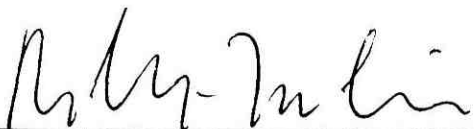


## Aplicación de Conjuntos Difusos al Análisis de Decisiones

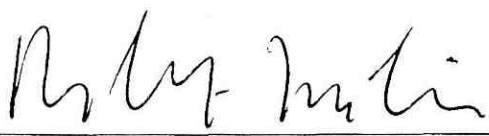
Trabajo de investigación presentado  
por Rodrigo Caal Riveiro  
para optar al grado académico de  
Licenciado en Matemática

Guatemala  
1998

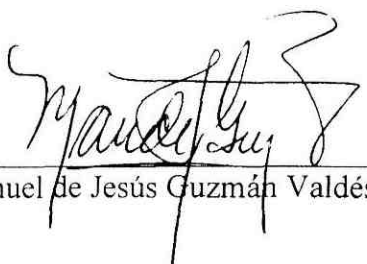
Vo.Bo. :

(f)   
MSc. Roberto A. Molina Cruz  
Asesor

Tribunal:

(f)   
MSc. Roberto A. Molina Cruz

(f)   
Dr. Juan Francisco Escamilla Castillo

(f)   
Lic. Manuel de Jesús Guzmán Valdés

Fecha de aprobación: 19 de junio de 1998

# CONTENIDO

	Página
LISTA DE GRÁFICAS	vi
RESUMEN	vii
Capítulos	
I. INTRODUCCIÓN .....	1
II. GENERALIDADES .....	3
III. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS .....	4
IV. LÓGICA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS .....	15
V. NÚMEROS DIFUSOS .....	19
VI. LAS FUNCIONES GENERALIZADAS DE CONJUNCIÓN-DISYUNCIÓN .....	38
VII. APLICACIÓN PRÁCTICA: UN MODELO DE EVALUACIÓN Y DECISIÓN ..	50
VIII. CONCLUSIONES .....	61
IX. BIBLIOGRAFÍA .....	62

## LISTA DE GRÁFICAS

Gráficas	Página
3.1. Conjunto ordinario en $\mathbf{R}$ .....	11
3.2. Conjunto difuso normal en $\mathbf{R}$ .....	11
6.1. Función generalizada de conjunción-disyunción .....	49
6.2. Estructura de agregación.....	49
7.1. Función de Tipo I.....	53
7.2. Función de Tipo II .....	53
7.3. Agregación de parámetros .....	55
7.4. Región de punteo satisfactorio.....	58
7.5. Región de costo satisfactorio.....	58
7.6. Región de relación costo-beneficio satisfactoria.....	59
7.7. Región de punteo y de costo satisfactorios.....	59
7.8. Región de punteo y de relación costo-beneficio satisfactorios.....	59
7.9. Región de costo y de relación costo-beneficio satisfactorios.....	59

# RESUMEN

Durante las cuatro últimas décadas se han desarrollado y aplicado en Investigación de Operaciones, un gran número de métodos matemáticos. Normalmente estos métodos requieren que un problema haya sido planteado formalmente de manera adecuada y exacta. A pesar de que este tipo de modelaje es una tarea importante de la Investigación de Operaciones, todavía hacen falta herramientas eficientes que le sirvan de soporte. Esto ocurre principalmente cuando los problemas a ser resueltos son del tipo mal estructurados, cuando hay vaguedad e incertidumbre o cuando la información que alimentaría el modelo no es totalmente exacta. Con frecuencia los métodos tradicionales de Investigación de Operaciones son rechazados en la resolución de este tipo de problemas, ya que su uso se restringe a problemas bien estructurados.

Un ejemplo de este tipo de problemas lo constituye el análisis de evaluación y de decisión, en el cual numerosas decisiones se toman en base a la apreciación subjetiva de uno o más evaluadores y no se cuenta con información exacta y precisa que permita tomar una decisión plenamente objetiva. Esto coloca a los problemas de decisión dentro de la categoría de problemas de incertidumbre, vaguedad y flexibilidad.

En este trabajo se muestra que este tipo de problemas puede modelarse adecuadamente mediante elementos de teoría de conjuntos difusos y las funciones generalizadas de conjunción - disyunción, concluyendo con una aplicación práctica: el desarrollo de un modelo de evaluación y decisión.

# I. INTRODUCCIÓN

Durante las cuatro últimas décadas se han desarrollado y aplicado en Investigación de Operaciones un gran número de métodos matemáticos. Normalmente estos métodos requieren que un problema haya sido planteado formalmente de manera adecuada y exacta. A pesar de que esta forma de desarrollar modelos es una tarea importante de la Investigación de Operaciones, todavía hacen falta herramientas eficientes que le sirvan de soporte. Esto ocurre principalmente cuando los problemas a ser resueltos son mal estructurados, cuando hay vaguedad e incertidumbre, cuando la información que alimentaría al modelo no es totalmente exacta. Con frecuencia los métodos tradicionales de Investigación de Operaciones son rechazados en la resolución de este tipo de problemas, ya que su uso se restringe solamente a problemas bien estructurados.

La existencia de numerosos problemas mal estructurados, así como el surgimiento de los Sistemas Expertos, como una posible e interesante herramienta potencial para los Investigadores de Operaciones, ha hecho que científicos teóricos y aplicados dediquen su atención a los mismos.

Un ejemplo importante de este tipo de problemas lo constituye el análisis de evaluación y de decisión. Frecuentemente ocurre que dos expertos no están de acuerdo sobre la calidad de un producto, la viabilidad de un proyecto, etcétera. Numerosas decisiones deben tomarse en base a la apreciación subjetiva de uno o más evaluadores. No se cuenta con información exacta y precisa que permita tomar una decisión plenamente objetiva. Esto coloca a los problemas de decisión dentro de la categoría de problemas de incertidumbre, vaguedad y flexibilidad.

Dentro de los problemas de toma de decisiones, un ejemplo claro de un problema de apreciación subjetiva que necesita de una decisión objetiva, es la evaluación y selección de sistemas complejos de computación y productos complejos de software. Se necesita de herramientas que contribuyan a toma de decisiones acertadas, basados en una sobreabundancia de parámetros de estudio, inexactitud de información y complejidad de los productos evaluados.

En este trabajo se analizan algunos de los enfoques que se han desarrollado, principalmente la teoría de los conjuntos difusos y las funciones generalizadas de conjunción - disyunción, concluyendo con una aplicación práctica: el desarrollo de un modelo de evaluación y decisión.

Este modelo de evaluación y decisión constituye una guía, paso a paso, de las actividades a seguir para efectuar una evaluación objetiva de los productos alternativos que se incluyen en el proceso de evaluación, concluyendo con la clasificación de las distintas opciones, de la más adecuada a las necesidades de la Organización a la menos adecuada. El modelo es presentado utilizando ejemplos de decisión en la adquisición de un bien informático, aunque no se restringe su utilización a las ciencias de la computación.

En el capítulo II, se presenta la idea general del funcionamiento del modelo, la que sirve también de guía para la lectura de esta tesis.

El modelo está matemáticamente fundamentado en la teoría de los conjuntos difusos y las funciones generalizadas de conjunción - disyunción. Es por ello que para introducir este tema, en el capítulo III se presenta una explicación de las generalidades de dicha teoría, entrando en aspectos más específicos en el capítulo IV donde se presenta la lógica difusa y en el capítulo V donde se estudian los números difusos y sus propiedades. Todo lo anterior constituye la base para construir las funciones generalizadas de conjunción-disyunción que se presentan en el capítulo VI. Estas funciones constituyen un componente esencial dentro del modelo que en el capítulo VII se describe paso a paso. En el capítulo VIII se presentan las conclusiones de este trabajo.

Pese a la solidez del fundamento matemático, el modelo es de fácil comprensión y aplicación, así como de gran utilidad en la toma práctica de decisiones.

## II. GENERALIDADES

A continuación se describe en este capítulo la forma en que opera el modelo:

- Se determinan todas las características de importancia (requerimientos) que deben cumplir las alternativas a analizar.
- Las características se clasifican de acuerdo a su importancia en grupos tales como: esenciales, deseables, opcionales, etcétera. Dentro de cada grupo, las características del mismo tendrán un peso, el cual será calculado de acuerdo a su importancia relativa.
- Se busca un nivel de “castigo” a las características deficientes, o también se puede “premiar” las características muy buenas. Esto se hace dentro de cada uno de los grupos definidos anteriormente, y también para sumar dos o más grupos.
- La suma final de características y grupos da la calificación final.
- Finalmente se usan distintos conceptos costo/beneficio, de acuerdo a requerimientos mínimos de calificación y costos máximos posibles, para luego tomar la decisión final.

Un aspecto altamente importante dentro del modelo es la manera en que se suman o agregan distintos valores que son el resultado de evaluar una característica. Tradicionalmente, cuando un evaluador desea unir  $n$  valores, simplemente los suma u obtiene el promedio simple de los valores. Si desea ser más exacto, le da un peso o ponderación a cada valor y obtiene un promedio ponderado, también llamado media aritmética. Más adelante, en la descripción de las funciones generalizadas de conjunción-disyunción, se muestra que frecuentemente el promedio ponderado conduce a resultados falsos y conclusiones erróneas, mientras que el método utilizado en el modelo es mucho más general y exacto.

Sin embargo, para poder introducir estas funciones es necesario su fundamento teórico, consistente en la teoría de los conjuntos difusos que se describe brevemente en el próximo capítulo.

### III. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

#### A. Introducción

A continuación se esquematizan algunos enfoques para modelar incertidumbre. Sin embargo, antes de estudiarlas en detalle es conveniente definir el significado de algunos términos. Las palabras "vago", "incierto", "difuso" no están clara y unívocamente definidas en nuestro idioma. Todos estos términos se refieren a situaciones que no son dicotómicas en su naturaleza, sino que más bien expresan un grado. Se utilizará el vocablo "incertidumbre" como el término más general que incluye a todas las demás situaciones no dicotómicas. "Estocástico" denotará incertidumbres relacionadas con la ocurrencia de eventos, mientras que "vago" y "difuso" se utilizarán para caracterizar eventos, conjuntos o relaciones que no estén claramente definidos. Se ilustra la aplicación de los términos anteriores mediante el examen de las siguientes proposiciones:

1. La impresora es a colores.
2. La probabilidad de falla de la impresora en un mes es 0.005.
3. La perspectiva de obtener un alto rendimiento es buena.
4. La experiencia del experto A sugiere convincentemente que el diseño del sistema es correcto, pero el experto B no cree que se pueda utilizar con éxito.

La proposición 1 es obviamente clara y determinística. Está bien definido lo que es una impresora y se puede establecer con certeza si es a colores o no. En la proposición 2, el evento sufrir una falla también está claramente definido. La incertidumbre sólo se da en la ocurrencia del evento pero no en la definición del evento. Se trata de una proposición del tipo estocástico y la teoría de probabilidades permite estudiarla convenientemente. La proposición 3 también es del tipo estocástico. Sin embargo, difícilmente se puede estudiar el evento por medio de la teoría clásica de probabilidades, dado que ni la probabilidad (de buena perspectiva), ni el evento (alto rendimiento) están claramente definidos. En el caso de la proposición 4 es aún más difícil hacer un estudio por medio de la teoría de probabilidades. Por una parte, el evento está vagamente definido (estructura confiable) y por otra, hay necesidad de combinar de alguna manera las opiniones divergentes de ambos expertos dentro de una sola proposición.

Los ejemplos proporcionados por las proposiciones 3 y 4, claramente relacionados con la toma de decisiones, son los que interesan en el marco del presente estudio.

La vaguedad de un evento puede tener diferentes orígenes: puede ser intrínseco al término (estructura confiable, alto rendimiento) o puede deberse a la falta de información que permita definir unívocamente un término.

Situaciones similares a las mencionadas anteriormente se dan en aspectos de teoría de control automático. Esto lo podemos apreciar estudiando las siguientes reglas de control:

- Si la temperatura del freno es tibia y la velocidad es no muy rápida, entonces la presión del freno debe ser ligeramente reducida.
- Si la temperatura del freno es mayor que 280 y la velocidad es menor que 45, entonces la presión del freno debe ser 190.

Como puede verse, la primera de estas reglas está definida en términos imprecisos pero amplios y naturales, mientras que la segunda es muy exacta y expresiva, pero se necesitaría de muchas como ella para cubrir lo que abarca la primera.

Es claro entonces que la matemática tradicional sólo es adecuada para modelar problemas claramente definidos o problemas en los que la incertidumbre sea del tipo estocástico.

En el caso específico del análisis de decisiones, la mayor parte de los problemas involucran variables que no pueden ser conocidas en forma exacta, eventos definidos en forma vaga, criterios divergentes y probabilidades no claramente definidas. Por lo anterior, se necesitan herramientas que permitan modelar de una mejor manera este tipo de situaciones. Algunas soluciones se examinan a continuación.

## B. Teorías para modelar incertidumbre

1. Lógicas polivaluadas. Históricamente, la forma de representación más sencilla para la toma de decisiones ha sido la lógica tradicional de dos valores (verdadero y falso). Ésta se ha venido utilizando desde el tiempo de los griegos. En términos de conjuntos, la aplicación inmediata que esta lógica tiene se puede describir por medio de un conjunto  $A$  y un elemento  $x$ . La lógica tradicional nos dice que  $x$  pertenece a  $A$  ( $x \in A$ ) o (exclusivo)  $x$  no pertenece a  $A$  ( $x \notin A$ ). En términos de proposiciones, la lógica bivalente está restringida a decir si una proposición es verdadera o falsa.

El gran obstáculo que esto presenta es la imposibilidad de representar un elemento que tenga algún grado de semejanza con los elementos de  $A$ , diferente de otros elementos que no pertenecen a  $A$ , pero que de todos modos no es elemento de  $A$ .

Como tentativa de solución a este problema se desarrolló a principios de siglo la lógica trivalente. En ella los valores de verdad ya no son sólo 0 y 1, sino que son 0,  $\frac{1}{2}$  y 1. Diversos matemáticos han desarrollado tablas de verdad distintas para manejar estos tres valores. En términos de conjuntos, se puede ahora decir que un elemento  $x$  ya no está limitado a pertenecer a un conjunto  $A$  o a su complemento, sino

que ahora puede estar en otro conjunto más. En términos de proposiciones ya no se diría únicamente que “un producto es bueno” o “un producto es malo”, sino que se puede decir que “un producto es regular”.

Es obvio que la lógica trivalente sigue teniendo restricciones fuertes, por lo que no es de extrañar que en la década de 1930 se desarrollaran lógicas de  $n$  valores, con  $n \geq 2$ . Los valores de verdad corresponden a números racionales distribuidos uniformemente en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . De esta manera, el conjunto  $T_n$  de valores de verdad en una lógica  $n$ -valente es:

$$T_n = \{ 0, 1/(n-1), 2/(n-1), \dots, (n-2)/(n-1), 1 \}$$

Naturalmente, estos  $n$  valores de verdad expanden considerablemente las posibilidades de trabajo. Un elemento puede pertenecer a  $n$  conjuntos y una proposición puede presentar  $n$  calificativos distintos.

Sin embargo sigue teniendo restricciones. Esto se deriva de que los valores de verdad siguen siendo discretos. No permiten representar correctamente un problema que sea continuo en su estructura.

2. Teoría de probabilidades y teoría de evidencia. La teoría de probabilidades es conocida ampliamente dada la abundancia de textos y cursos que existen sobre la misma. El conocimiento de esta área se ha expandido considerablemente en las últimas décadas. Es por tanto innecesario detenerse a exponer en qué consiste la teoría de probabilidades.

Sin embargo, es oportuno explicar algunos de sus inconvenientes. El primero consiste en que pueden plantearse y estudiarse problemas bajo la perspectiva de la teoría de probabilidades, aun cuando estos problemas no tengan una naturaleza probabilística.

Un segundo inconveniente es la necesidad de asignar valores puntuales a las probabilidades de los eventos, valores que pueden ser fácilmente aproximaciones inexactas basadas en un débil conocimiento de la ocurrencia de un evento, aun estando claramente definido.

Este último inconveniente es relevante desde el punto de vista de las aplicaciones. Es por ello que se desarrolló la teoría de la evidencia. En ella ya no se asume que se pueden estimar valores puntuales a eventos sencillos, sino que el analista de decisiones puede asignar un intervalo de valores a las probabilidades. Los extremos de estos intervalos se llaman *elementos focales*. Naturalmente, esto reduce considerablemente la cantidad y la calidad de la información que debe reunir el analista, y constituye además un punto de vista más realista sobre la información reunida.

Se ilustra la teoría de la evidencia por medio del siguiente ejemplo: se asume que se cuenta con la siguiente información inexacta, acerca del número de hijos de los empleados de una empresa:

Código de empleado	Número de hijos	¿Entre 3 y 5 hijos?
1	1 ó 2	imposible
2	1	imposible
3	4 ó 5	seguro
4	5 ó 6	posible
5	6	imposible

Se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántos empleados tienen entre 3 y 5 hijos? (que se puede interpretar como ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado tenga entre 3 y 5 hijos?). Se calcula la probabilidad inferior como la porción de subconjuntos (elementos focales) para los cuales la condición es claramente verdadera, y la probabilidad superior como la porción de elementos focales para los cuales la condición es posiblemente verdadera, o sea 1 menos la porción para la cual la condición es claramente falsa. En este ejemplo estas probabilidades son claramente  $1/5$  y  $2/5$  respectivamente.

La probabilidad inferior también es llamada la medida de creencia,  $Cr(A)$ , y la probabilidad superior la medida de plausibilidad,  $Pl(A)$ . Mientras que  $Cr(A)$  utiliza evidencia que apoya a  $A$ ,  $Pl(A)$  considera evidencia que apoya lo contrario. Al denotar el universo de valores posibles que pueden asumir las variables bajo estudio por medio del símbolo  $U$  y el conjunto vacío por medio de  $\emptyset$ , y siendo  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera, se dan las siguientes relaciones:

$$Pl(U) = Cr(U) = 1$$

$$Pl(\emptyset) = Cr(\emptyset) = 0$$

$$Pl(A) = 1 - Cr(\sim A)$$

$$Pl(A \cap B) \leq Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cup B)$$

$$Cr(A \cap B) \geq Cr(A) + Cr(B) - Cr(A \cup B)$$

3. Teoría de posibilidades. La teoría de posibilidades está principalmente enfocada en la imprecisión intrínseca de los lenguajes naturales. Por tanto, el término variable se utiliza frecuentemente más en un sentido lingüístico que en uno estrictamente matemático.

Para iniciar el tema de la teoría de las posibilidades es necesario introducir el concepto de conjunto difuso. Los conjuntos difusos constituyen una generalización de la noción tradicional que tenemos de conjuntos. En un conjunto no difuso, los elementos del universo siempre cumplen con una y sólo una de las siguientes dos condiciones: pertenecen o no al conjunto en cuestión. En un conjunto difuso, la pertenencia

puede tomar además de estos dos valores cualquier otro valor intermedio, lo que significa que cada elemento puede tener distinto grado de membresía.

Uno de los conceptos esenciales de la teoría de posibilidades es el de distribución de posibilidad (en analogía a la distribución de probabilidad). Con el objeto de definir una distribución de posibilidad es conveniente introducir la noción de lo que es una restricción difusa. Para visualizar lo que es una restricción difusa es útil imaginarse una valija elaborada con material elástico que actúa como restricción del máximo volumen que puede contener. Para una valija hecha con material rígido el volumen que puede contener es un número fijo claramente determinado. En el caso de la valija suave el volumen de su contenido depende, hasta un cierto límite, de la fuerza con que se estire. En este caso, el volumen de la valija es una variable. Los valores que esta variable puede asumir pueden ser  $u \in U$  y el grado de posibilidad o facilidad con que la variable  $X$  puede tomar diferentes valores de  $u$  está expresado por  $\mu_F(u)$ , donde  $F$  representa la restricción elástica de los valores que puede tomar  $u$ .

El siguiente ejemplo ilustra la diferencia entre probabilidad y posibilidad: considérese la proposición "La impresora imprime  $X$  miles de hojas en un día".  $X=\{1,2,\dots\}$ . Una distribución de posibilidad, así como una distribución de probabilidad, puede ser asociada con  $X$ . La distribución de posibilidad  $IX(u)$  puede interpretarse como el grado de facilidad o comodidad con que la impresora puede imprimir  $u$  miles de hojas, mientras que la distribución de probabilidad puede establecerse contando las hojas impresas por la impresora en 100 días diferentes. Los valores de  $IX(u)$  y  $PX(u)$  pueden ser como los mostrados en la tabla siguiente:

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$IX(u)$	1	1	1	1	.8	.6	.4	.2
$PX(u)$	.1	.8	.1	0	0	0	0	0

Nótese que un mayor grado de posibilidad no necesariamente implica un grado mayor de probabilidad. Sin embargo, si un evento no es posible, también es improbable.

La posibilidad de la intersección (respectivamente unión) de dos eventos A y B está determinada por el operador mínimo (respectivamente máximo). Es decir:

$$Pos(A \cap B) = \min \{Pos(A), Pos(B)\}$$

$$Pos(A \cup B) = \max \{Pos(A), Pos(B)\}$$

Haciendo una analogía con la definición de plausibilidad y creencia, se puede definir la medida de posibilidad como la posibilidad superior y la medida de necesidad como la posibilidad inferior. La medida

de posibilidad de un conjunto  $A$  se denota por  $\Pi(A)$ , mientras que la medida de necesidad se denota por  $N(A)$ . Se dan las siguientes relaciones:

$$\text{Medida de Posibilidad } \Pi(A \cup B) = \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(B)\}$$

$$\text{Medida de Necesidad } N(A \cap B) = \text{mín}\{N(A), N(B)\}$$

con las siguientes propiedades:

$$\text{mín}\{N(A), N(\sim A)\} = 0$$

$$\text{máx}\{\Pi(A), \Pi(\sim A)\} = 1$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$$

$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$$

El siguiente ejemplo ilustra estas nuevas definiciones: se retoma el ejemplo del número de hijos de cada empleado visto en la sección anterior. Se asumirá que además de tener los intervalos antes vistos, se cuenta también con las distribuciones de posibilidad del número de hijos de los empleados, como se aprecia en el siguiente cuadro:

Código de empleado	Número de hijos	¿Entre 3 y 4 hijos?
1	(1, .8), (2, 1)	imposible
2	(1, 1)	imposible
3	(4, .6), (5, 1)	posible
4	(5, .8), (6, 1)	imposible
5	(6, 1)	imposible

Se hace la siguiente pregunta: ¿Cuál es la posibilidad de que un empleado tenga 3 ó 4 hijos? Se llamará  $P$  a la pregunta y  $f$  a los elementos focales. Se denotará por  $\pi_i$  a las posibilidades de la variable "número de hijos" para cada empleado.

Se tiene:

$$\Pi(P) = \text{máx}\{\pi_i\} = 0.6$$

$$P \cap f \neq \emptyset$$

$$N(P) = \text{mín}\{1 - \pi_i\} = \text{mín}\{.2, 0, 0, 0, .2, 0, 0\} = 0$$

$$P \cap f = \emptyset$$

La respuesta es: "La posibilidad de que un empleado tenga 3 ó 4 hijos es 0.6 y la necesidad es 0".

#### 4. Teoría de conjuntos difusos

a. **Introducción.** Se han introducido las nociones esenciales de este tema en las secciones anteriores. Sin olvidar la definición de conjunto difuso planteada en la sección anterior, es necesario recordar los aspectos mencionados al final de la sección donde se presentó a las lógicas polivalentes. Allí se concluyó con una lógica que tenía  $n$  valores de verdad posibles, sin imponer una cota superior al valor de  $n$ . A continuación se presentan algunos avances adicionales en esta teoría.

El matemático Lukasiewicz no se limitó a los  $n$  valores de verdad, sino que extendió el rango de valores de verdad hasta incluir todos los números racionales en  $[0,1]$ . Finalmente, la extendió a todos los reales en ese intervalo. Esta lógica continua es utilizada para trabajar los conjuntos difusos. En este tipo de lógica se emplea el operador generalizado  $t$  que se define así:

$$t: \{Proposiciones\} \rightarrow [0,1].$$

Esto significa que a cualquier proposición lógica se le asigna un valor de verdad real entre 0 y 1. En la lógica de Lukasiewicz, se definen los valores de verdad para los siguientes conectores lógicos, donde  $A$  y  $B$  representan dos proposiciones:

$$t(A \wedge B) = \min(t(A), t(B)) \text{ (conjunción)}$$

$$t(A \vee B) = \max(t(A), t(B)) \text{ (disyunción)}$$

$$t(\sim A) = 1 - t(A) \text{ (negación)}$$

Hacia 1937 el filósofo Max Black aplicó esta lógica continua a la teoría de conjuntos, pero luego de esta época de intenso trabajo matemático el tema de las lógicas multivaluadas no tuvo mayor desarrollo. Sin embargo, en el año de 1965 el Dr. Lofti A. Zadeh publicó el artículo titulado "Fuzzy Sets" (Conjuntos Difusos). Allí él desarrolla formalmente una teoría de conjuntos en el ambiente de una lógica polivalente e introduce el término "fuzzy", "difuso" o "borroso" en español, a la literatura científica. A continuación se describen aspectos relevantes de esta teoría.

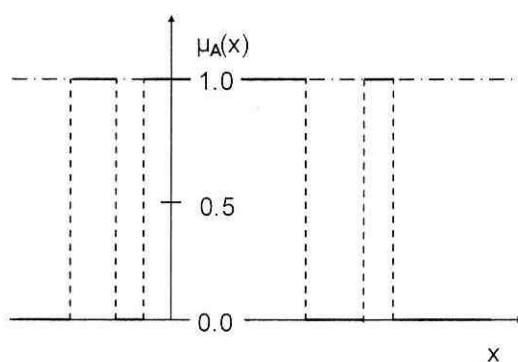
b. **Definiciones.** La teoría de conjuntos difusos es aún más general y abarcadora que la teoría de las posibilidades. A continuación se presentan las definiciones básicas.

Si  $X$  es una colección de objetos denotados por  $x$ , entonces un conjunto difuso  $A$  en  $X$  es un conjunto ordenado de parejas:

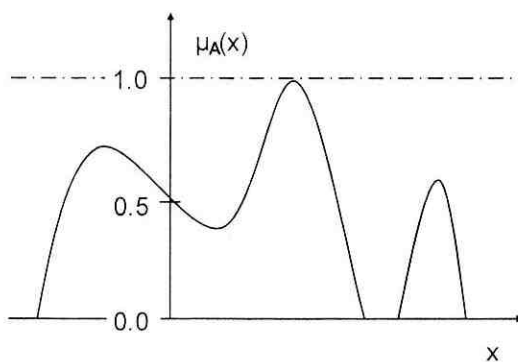
$$A = \{(x, \mu_{A(x)}) \mid x \in X\}$$

$\mu_{A(x)}$  es llamada *la función de pertenencia*, el grado de pertenencia, el grado de compatibilidad o el grado de verdad de  $x$  en  $A$ , que mapea  $X$  en un espacio de membresía  $L$ . (Cuando  $L$  contiene únicamente los dos puntos 0 y 1,  $A$  es no difuso y  $\mu_{A(x)}$  es idéntica a la función característica de un conjunto no difuso.) La imagen de una función de membresía es un subconjunto de los reales no negativos cuyo supremo es finito. Los elementos que tienen un grado de pertenencia igual a cero generalmente no son enunciados. Si se asume que la imagen de la función de membresía es el intervalo  $[0,1]$  entonces se dice que este conjunto es normal. La gráfica 3.1 muestra un conjunto ordinario en  $\mathbf{R}$  (la imagen de la función de membresía es el conjunto  $\{0,1\}$ , es decir, esta función es una función característica), mientras que la gráfica 3.2 muestra un conjunto difuso normal en  $\mathbf{R}$  (la imagen de la función de membresía es el intervalo  $[0,1]$ ).

**Gráfica 3.1**



**Gráfica 3.2**



A continuación se analizará un ejemplo. Un proveedor de computadoras personales desea clasificar la comodidad que ofrece a sus clientes, tomando como base el número de usuarios y el número de computadoras a instalarles. Lo ideal es que cada usuario tenga una computadora. Sin embargo, para algunos clientes que haya una o dos computadoras menos que usuarios puede resultar favorable, ya que no las utilizan todo el tiempo y podrían así ahorrarse una suma de dinero. En otros casos sucede lo contrario. Es tal la necesidad del equipo que es mejor tener una o dos computadoras de respaldo, aunque ello resulte más caro. Se tomará como indicador el número de computadoras a instalar. Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  el número de

computadoras a instalar para  $x$  = número de usuarios en una oficina. Entonces el conjunto difuso "cantidad de computadoras a instalar en una oficina de 4 usuarios" puede ser descrito como:

$$A = \{(1, .1), (2, .3), (3, .7), (4, 1), (5, .7), (6, .3)\}$$

c. Operaciones básicas. Las operaciones con y sobre conjuntos difusos se definen por medio de sus funciones de pertenencia. A continuación se presentan las más importantes de ellas.

1) Complemento. El complemento de una función de pertenencia se define como una función

$$C: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_{A(x)} \rightarrow C(\mu_{A(x)})$$

Esta función indica el valor de membresía de un elemento  $x$  en el conjunto que consiste en la negación del concepto representado por  $A$ . Para que una función pueda considerarse un complemento difuso, ésta ha de cumplir las condiciones siguientes:

- $C(0) = 1$  y  $C(1) = 0$ .  $C$  es una extensión de la función complemento (o negación) de la lógica bivalente.
- $\forall a, b \in [0, 1]$ , si  $a < b$  entonces  $C(a) \geq C(b)$ . Esto significa que  $C$  es una función monótona decreciente.

Para propósitos prácticos es conveniente que además se cumplan las dos condiciones siguientes:

- $C$  es una función continua
- $C$  es involutiva, es decir,  $C(C(a)) = a$ ,  $\forall a \in [0, 1]$

La función complemento más sencilla y más utilizada es:

$$C(x) = 1 - x$$

Es fácil comprobar que esta función cumple con todas las reglas enunciadas anteriormente. Nótese que la función complemento corresponde a la negación en la lógica bivalente.

2. Unión. La unión de dos conjuntos difusos es definida por una función de la forma:

$$U: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \rightarrow \mu_{A \cup B(x)}$$

La función  $U$  debe cumplir las condiciones siguientes:

- $U(0, 0) = 0$ ,  $U(0, 1) = U(1, 0) = U(1, 1) = 1$ . La unión de conjuntos difusos constituye una extensión de la unión definida por la lógica bivalente.

- b)  $U(a,b) = U(b,a)$ . Cumple con conmutatividad.
- c) Si  $a \leq a'$  y  $b \leq b'$ , entonces  $U(a,b) \leq U(a',b')$ . Es monótona creciente.
- d)  $U[U(a,b),c] = U[a,U(b,c)]$ . Cumple con asociatividad.

Además es deseable que se cumplan las condiciones siguientes:

- e)  $U$  es una función continua.
- f)  $U(a,a) = a$ .  $U$  es idempotente.

La función original para la unión, propuesta por el propio Zadeh, es:

$$U(a,b) = \max(a,b)$$

Nótese que la operación de unión corresponde al “o inclusivo” de la lógica de proposiciones. Esta operación también es llamada disyunción.

3. Intersección. La intersección de dos conjuntos difusos es definida por una función

$$I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \rightarrow \mu_{A \cap B(x)}$$

La función  $I$  debe cumplir las condiciones siguientes:

- a)  $I(1,1) = 1$ ,  $I(0,1) = I(1,0) = I(0,0) = 0$
- b)  $I(a,b) = I(b,a)$ . Cumple con conmutatividad.
- c) Si  $a \leq a'$  y  $b \leq b'$ , entonces  $I(a,b) \leq I(a',b')$ . Es monótona creciente.
- d)  $I[I(a,b),c] = I[a,I(b,c)]$ . Cumple con asociatividad.

Otras condiciones deseables son:

- e)  $I$  es continua
- f)  $I(a,a) = a$ .  $I$  es idempotente.

La función de intersección original es:

$$I(a,b) = \min(a,b)$$

Nótese que la operación de intersección corresponde a la operación “y” de la lógica de proposiciones. Esta operación también es llamada conjunción.

4. Operaciones de agregación. Las operaciones de agregación tienen la forma:

$$H: [0,1]^n \rightarrow [0,1], \text{ para algún } n \geq 2.$$

Estas operaciones combinan varios conjuntos difusos y los transforman en un nuevo conjunto difuso. Al igual que las funciones de unión y de intersección, la operación de agregación actúa sobre las funciones de membresía de cada conjunto. Así, si la operación  $H$  actúa sobre  $A_1, A_2, \dots, A_n$  para obtener el conjunto  $A$ , se tiene:

$$\mu_{A(x)} = H(\mu_{A_1(x)}, \mu_{A_2(x)}, \mu_{A_3(x)}, \dots, \mu_{A_n(x)}), \quad \forall x \in X$$

Las funciones de agregación deben cumplir con las reglas siguientes:

- a)  $H(0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $H(1, 1, \dots, 1) = 1$
- b)  $H$  es monótona creciente.

Además es deseable que cumpla también con lo siguiente:

- c)  $H$  es una función continua.
- d)  $H$  es simétrica en todos sus argumentos. Esto significa que para cualquier permutación de los argumentos de  $H$ , el resultado que se obtiene es el mismo.

La aplicación principal de la operación de agregación se da cuando se tiene un problema que ha sido descrito por medio de varias restricciones difusas, cada una de ellas definiendo un conjunto difuso. El problema puede ser precisamente un problema de evaluación y decisión en el cual cada conjunto difuso representa un parámetro de evaluación. Cuando el detalle ya no interesa sino que se prefiere obtener un resultado global para poder tomar una decisión, se aplica la función de agregación, la que devuelve un nuevo conjunto difuso, el cual reúne las características de los anteriores conjuntos. La manera cómo reunirá estas características depende de la función de agregación que se utilice. Más adelante se trata este tema con mucho más detalle.

Es importante notar que de la definición de la función de agregación es fácil deducir que las funciones unión e intersección son casos especiales de funciones de agregación. Aunque anteriormente estas dos funciones se definieron para dos argumentos, es fácil extenderlas a cualquier número de argumentos debido a la condición que garantiza la asociatividad de las operaciones.

## IV. Lógica de los conjuntos difusos

### A. Introducción

La lógica como una herramienta para el razonamiento puede ser dividida esencialmente en tres áreas independientes del contexto: tablas de verdad, vocabulario (operadores) y procedimiento de razonamiento (tautologías, silogismos).

En la lógica de Boole los valores de verdad sólo pueden ser 0 (falso) ó 1 (verdadero) y en base a estos valores el vocabulario (operadores) está definido por medio de tablas de verdad. Si se tienen dos proposiciones,  $A$  y  $B$ , cada una de las cuales pudiendo ser verdadera o falsa, esto es, pudiendo tener el valor 0 ó 1, se pueden construir tablas de verdad que correspondan a los operadores que se definan. En este caso existen  $(2^2)^2 = 16$  tablas de verdad, cada una definiendo un operador. Asignarle un significado a estos operadores es fácil en el caso de operadores conocidos como "y", "o inclusivo", "o exclusivo", "implicación" y "equivalencia". Sin embargo, sería difícil dar una interpretación a varios de los demás operadores en términos de nuestro lenguaje. Si en lugar de tener dos proposiciones se tuvieran tres, la tarea de asignar significados a las tablas de verdad se vuelve aún más difícil.

Hasta ahora se ha asumido que cada proposición puede claramente clasificarse como verdadera o falsa. Si se modificara lo anterior y se introdujeran nuevos valores de verdad, como por ejemplo, "similar" o "indeciso", se llegaría a los ya mencionados sistemas de lógica multivaluada. Es evidente que la dificultad de asignarle un significado a los operadores o tablas de verdad se incrementa al moverse hacia la lógica multivaluada. Siempre manteniendo dos proposiciones, pero tres posibles valores de verdad, se tienen  $(3^2)^3 = 729$  tablas de verdad. Además se pierde la interpretación única de las tablas de verdad que ocurre en el caso de la lógica booleana, ya que muchas de las tablas de verdad en el caso de la lógica trivaluada son muy similares.

De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, es claro que en la lógica de conjuntos difusos no es posible restringir los valores de verdad a solamente cero y uno. Es por tanto necesario definir las reglas de la lógica de conjuntos difusos.

### B. Lógica Difusa

1. Introducción. Como se ha mencionado, en el caso de la lógica difusa, no tiene sentido restringir los valores de verdad a cero y uno. Sin embargo, es indispensable evitar la explosión combinatoria que ocurriría al tener múltiples valores de verdad posibles. Para evitar esto es necesario utilizar valores continuos en lugar de valores discretos. A fin de formalizar lo anterior, se introduce el concepto de variable lingüística.

Una variable lingüística se caracteriza por un conjunto ordenado  $(x, T(x), U, G, M)$  donde  $x$  es el nombre de la variable;  $T(x)$  denota el conjunto de nombres de valores lingüísticos de  $x$ , siendo cada valor una variable difusa denotada por  $x$ , variando sobre un universo  $U$ ;  $G$  es una regla sintáctica para generar el nombre  $X$ , tomado entre los valores de  $x$ ; y  $M$  es una regla semántica que asocia a cada  $X$  su significado  $M(X)$ , que es un subconjunto difuso de  $U$ . Un  $X$  particular, es decir un nombre generado por  $G$ , se denomina un término.

Para un mejor entendimiento de este concepto considérese el siguiente ejemplo. Sea la variable “temperatura”, la cual puede tomar un conjunto de valores reales infinito. Si se quiere clasificar la temperatura por intervalos se pueden crear intervalos de números reales. Pero esto no es lo que interesa. En cambio se desea obtener conjuntos difusos caracterizados por valores lingüísticos. Supóngase que estos conjuntos están definidos por las temperaturas “caliente”, “tibio”, “templado”, “fresco” y “frío”. En este caso  $x$  = “temperatura”,  $T(x) = \{\text{“caliente”, “tibio”, “templado”, “fresco”, “frío”}\}$ .  $U$  es el conjunto de palabras en español y  $G$  y  $M$  corresponden a las reglas del idioma español.

Entonces, los valores de verdad se consideran variables lingüísticas en lugar de valores numéricos discretos. Esto se muestra claramente en la representación de la variable lingüística “temperatura”. En resumen, en la lógica difusa todos los componentes de las proposiciones siguen siendo claramente definidos, pero los valores de verdad son considerados variables lingüísticas.

2. **Proposiciones.** Las proposiciones en la lógica bivalente tradicional son declaraciones expresadas en algún lenguaje y que deben ser verdaderas o (exclusivo) falsas. Es claro que en la lógica difusa el concepto de proposición es más flexible, dado que el conjunto de valores de verdad es infinito. Los valores que toma la proposición son subconjuntos difusos del conjunto de valores. Por ejemplo, sea el conjunto de valores de verdad el intervalo en los reales  $[0,1]$ . La proposición “el agua hirviendo es caliente” tiene un grado de verdad cercano a 1, mientras que “el agua hirviendo es tibia” lo tiene menor (podría ser 0.2 ó 0.3) y “el agua hirviendo es fría” tiene un grado de verdad nulo.

3. **Predicados.** En la lógica clásica, un predicado es la parte de una proposición en la cual se afirma o niega algo acerca del sujeto de la proposición. Los predicados de la lógica clásica están limitados al hecho de que su definición debe ser perfectamente clara. En cambio, un predicado difuso puede expresar una idea que no es del todo clara, pero representa un subconjunto difuso de un universo dado. Por ejemplo, el predicado de la proposición “el motor tiene una temperatura mayor o igual a  $50^\circ \text{C}$ ” está perfectamente definido, mientras que el predicado de la proposición “el motor está caliente” corresponde a un subconjunto difuso contenido en el universo de las temperaturas.

4. **Cuantificadores y modificadores.** La lógica tradicional admite únicamente dos cuantificadores: “para todo” y “existe”. La lógica difusa es mucho más extensa y admite variedad de cuantificadores que caracterizan de una forma imprecisa la cardinalidad del conjunto. Así se tienen cuantificadores como “muchos”, “algunos”, “pocos”, etcétera. También existen los llamados modificadores difusos que corresponden a los adverbios en gramática. Ejemplos de modificadores difusos son “bastante”, “más o menos”, “un poco”, etcétera. Estos modificadores combinados con predicados difusos permiten la valoración de una variable lingüística. De esta manera la variable lingüística “temperatura” puede tomar, además de los valores antes mencionados, otros valores como “muy caliente”, “ligeramente frío”, etcétera.

5. **Conectivos.** Las proposiciones se pueden combinar utilizando los conectivos lógicos. Se puede definir una función lógica que tome un número determinado de variables lógicas y les asigne un valor de verdad particular para cada combinación de valores de verdad de las variables involucradas. El total de funciones posibles depende del número de variables y del número de valores de verdad. Es evidente por la naturaleza misma de la lógica difusa que ésta no tiene un número finito de funciones lógicas.

## C. Funciones de pertenencia

Es evidente que las funciones de pertenencia y los operadores son elementos cruciales de la teoría de conjuntos difusos. Para consideraciones puramente teóricas es claro que es suficiente asumir o definir modelos matemáticos para estos componentes, y en base a esto continuar con el análisis de la teoría. Sin embargo, es importante recordar que el propósito de esta teoría y de este estudio es la aplicación a problemas reales, para los cuales no basta contar con modelos matemáticos abstractos, sino que es necesaria una mejor comprensión de estos componentes.

La función de pertenencia depende de los contenidos semánticos de la categoría subjetiva que representa. Su forma también depende de cómo se derivó la función de pertenencia. Puede consistir simplemente de los distintos grados de pertenencia de aquellos elementos que tienen un grado positivo de pertenencia dentro de un determinado conjunto difuso. Es muy posible que no exista una función analítica que describa una función de pertenencia de este tipo. Sin embargo, es de mayor interés el estudio de aquellas funciones de pertenencia que pueden ser descritas por medio de una función analítica. Aunque aún hace falta una mayor investigación en este campo, a continuación se exponen algunos resultados que se han alcanzado. Ha sido posible establecer dos conceptos subyacentes a la escala de medición:

1. **El concepto de juicio.** El ser humano juzga (mide, evalúa) objetos o características de objetos con respecto a una escala dada (porcentaje, metros, kilogramos). Las características podrían ser por ejemplo: rendimiento, largo, peso.

2. El concepto de evaluación. Este concepto presupone un estándar (punto de referencia) con respecto al cual un cierto desempeño o funcionamiento pueda ser evaluado. Este estándar podría ser un nivel de educación, un criterio social, experiencia, etcétera. Ejemplos de aspectos evaluados pueden ser estatura, confort, seguridad, etcétera. El aspecto a evaluar no necesariamente tiene que poder medirse por medio de una escala física, sino que puede ser el resultado de la agregación de múltiples sub-aspectos. Entonces, aunque éstos sean determinísticos y medibles con respecto a una escala dada, el resultado global es difuso, ya que la agregación de dichos aspectos es subjetiva y sujeta al criterio del evaluador. Esto significa que el aspecto evaluado es difuso por causa de una abundancia de información.

Ahora bien, dos tipos de funciones de pertenencia han sido establecidos:

a. Funciones de tipo I. Este tipo de función de pertenencia expresa una escala de evaluación.

Expresa el grado de pertenencia de objetos dentro de conjuntos difusos tales como "personas confiables", "productos de alta calidad", etcétera.

b. Funciones de tipo II. Si la escala de juicio y la escala de evaluación se refieren a la misma clase de objetos, entonces se puede ver a las funciones de tipo II como la distancia entre las dos escalas para objetos contenidos en un conjunto difuso. Por ejemplo, si la escala de juicio es aplicada a edad (medida en años) y la escala de evaluación a edad relativa, es decir, el grado según el cual un hombre es joven o viejo, entonces una función de tipo II aplicada al conjunto difuso "hombres jóvenes", va a asociar edades medidas en años con el grado de ser joven o viejo.

## V. NÚMEROS DIFUSOS

### A. Introducción

Otro concepto interesante relacionado con la teoría de los conjuntos difusos es el de los números difusos. Este concepto también tiene aplicación en la teoría de decisiones. Existen al menos dos enfoques para definir los números difusos. Uno está basado en intervalos de confianza y el otro en la teoría de los conjuntos difusos. Dado que ya se han introducido los conceptos fundamentales de dicha teoría, se utiliza este último enfoque para presentar la definición, presentando posteriormente la perspectiva con base en los intervalos de confianza.

### B. Definiciones

Se denotará por  $\mathbf{R}$  al conjunto de números reales y por  $\mathbf{R}^+$  al conjunto de los reales no negativos.

Sea  $A$  un conjunto difuso definido sobre los reales,  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$ , es decir que su función de pertenencia está definida de los números reales al intervalo  $[0,1]$ . Se dice que un conjunto difuso es *convexo* si todo subconjunto  $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0,1]$ , es convexo en  $\mathbf{R}$ , es decir, es un intervalo en  $\mathbf{R}$ .

Una definición alternativa es:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  y  $\forall \lambda \in [0,1]$ , se tiene:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(\lambda x_1), \mu_A(\lambda x_2)].$$

A continuación se define la normalidad. Un subconjunto difuso  $A$ , con función de membresía sobre  $\mathbf{R}$ , es *normal* si:

$$\max \mu_A(x) = 1, \text{ para } x \in \mathbf{R}$$

Esto quiere decir que el mayor valor de  $\mu_A(x)$  es igual a 1. Este máximo puede o no ser único.

Ahora se ha llegado al punto en el cual se puede dar una definición para números difusos. Un número difuso en  $\mathbf{R}$  es un subconjunto difuso con función de membresía en  $\mathbf{R}$ , que es a la vez convexo y normal. A continuación, para una mejor comprensión del concepto, se analiza la relación que existe con los intervalos de confianza.

## C. Intervalos de confianza

1. **Introducción.** En esta sección se busca extender el concepto de intervalo de confianza hasta llegar al concepto de número difuso visto en la sección anterior. Con ello se obtiene una visión más clara acerca de lo que es un número difuso.

La extensión que se busca hacer está basada en la siguiente idea: en lugar de considerar un intervalo de confianza a un único nivel, se considera a varios niveles y de manera más general, a todos los niveles desde 0 hasta 1. Se define que el máximo de presunción está en el nivel 1 y el mínimo en el nivel 0.

Se ilustra el concepto que se desea introducir con base en el siguiente ejemplo. Considérese una situación en la cual se busca determinar el valor de una variable  $x$ , cuyo valor exacto obviamente se desconoce. Se sabe por la naturaleza del problema que esta variable acepta únicamente valores en los reales. Sea  $I$  un intervalo de confianza al cual se ha podido determinar que pertenece dicha variable. Esto significa que si  $I = [a_1, a_2]$ , entonces  $x$  es mayor o igual que  $a_1$  y menor o igual que  $a_2$ . Este tipo de situación es común en la investigación científica y en la ingeniería.

En algunos casos, como por ejemplo cuando se está estimando el valor de una variable mediante un muestreo estadístico, el valor esperado de la variable está en el punto medio del intervalo, es decir, se espera que el valor real de la variable  $x$  esté cerca o coincida con el punto medio y que dicho valor no corresponda a uno de los extremos del intervalo. Esto significa que no todos los puntos del intervalo están al mismo nivel de presunción. Por ello se puede considerar que el intervalo completo está en un nivel de presunción 0, es decir el mínimo de presunción. Un intervalo más pequeño que el intervalo original, alrededor del punto medio, tiene un mayor nivel de presunción y el punto medio del intervalo o una vecindad pequeña alrededor del mismo tiene el mayor nivel de presunción, al cual se le asigna el nivel 1.

Como puede verse, en la medida que aumenta el nivel de presunción el tamaño del intervalo se reduce. Esto puede verse de la siguiente manera. Para cada nivel de presunción  $\alpha$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ , se tiene un intervalo de confianza  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ . Esta correspondencia es una función monótona decreciente de  $\alpha$ , es decir, si  $\alpha > \alpha'$ , entonces  $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ . Esto también puede escribirse de la siguiente manera: si  $\alpha > \alpha'$ , entonces  $[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \subseteq [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}]$ .

2. **Suma de intervalos de confianza.** Sean los siguientes intervalos de confianza en  $\mathbf{R}$ :

$$A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2].$$

Si  $x \in A, y \in B$ , entonces  $x + y \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ , dado que al ser  $x \geq a_1$  e  $y \geq b_1$ , entonces  $x + y \geq a_1 + b_1$ , y además, dado que  $x \leq a_2$  e  $y \leq b_2$ , entonces  $x + y \leq a_2 + b_2$ .

Se puede entonces introducir la siguiente notación:

$$\begin{aligned} A (+) B &= [a_1, a_2] (+) [b_1, b_2] \\ &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2]. \end{aligned}$$

Para definir la resta de intervalos de confianza, se toma  $x \in [a_1, a_2]$ ,  $y \in [b_1, b_2]$ , entonces,

$$(x - y) \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1].$$

Se puede escribir lo anterior, con una notación como la de arriba, así:

$$\begin{aligned} A (-) B &= [a_1, a_2] (-) [b_1, b_2] \\ &= [a_1 - b_2, a_2 - b_1]. \end{aligned}$$

También es posible considerar un intervalo en  $\mathbf{R}$  como un conjunto con un único elemento, lo que corresponde ya no al valor posible de una variable aleatoria sino a un número dado. En este caso se puede escribir  $L = [\ell, \ell]$  o aún, utilizando la relación entre el conjunto y su único elemento,  $\ell = [\ell, \ell]$ . Esta definición permite sumar o restar un número real positivo a un intervalo de confianza.

Por otra parte, se sabe que si  $x \in [a_1, a_2]$ , entonces  $-x \in [-a_2, -a_1]$ . Por tanto, si  $A$  es un intervalo de confianza, su *imagen* está definida por:

$$A^- = [-a_2, -a_1].$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} A (+) A^- &= [a_1, a_2] (+) [-a_2, -a_1] \\ &= [a_1 - a_2, a_2 - a_1] \neq 0. \end{aligned}$$

Las definiciones vistas anteriormente conllevan que la suma es conmutativa y asociativa. Además existe un elemento neutro, el número  $0 = [0, 0]$ , el cual es neutro al sumarlo tanto a la derecha como a la izquierda. Sin embargo, también se vio que la imagen no es simétrica. Estas propiedades muestran que el conjunto de intervalos de confianza en  $\mathbf{R}$ , tiene una estructura de monoide para la suma pero no tiene una estructura de grupo. El monoide es además conmutativo.

Las definiciones anteriores también conllevan que la resta no es ni monoidal ni asociativa.

3. Multiplicación de intervalos de confianza. Si se trabaja sobre intervalos de confianza en

$\mathbf{R}^+$ , y si  $x \in [a_1, a_2]$ ,  $y \in [b_1, b_2]$ , entonces  $x \cdot y \in [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$ . Se puede entonces escribir:

$$\begin{aligned} A (\cdot) B &= [a_1, a_2] (\cdot) [b_1, b_2] \\ &= [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]. \end{aligned}$$

Cuando  $A$  y  $B$  son intervalos de confianza en  $\mathbf{R}$  en lugar de  $\mathbf{R}^+$ , entonces el resultado es más complicado, ya que los extremos de los intervalos pueden ser negativos. En ese caso, se dan nueve combinaciones posibles. Éstas no se presentan aquí ya que el concepto que se maneja es el mismo, y además la complejidad únicamente se da en cuanto a la operatoria y a lo extenso de los cálculos.

También es posible definir la división entre dos intervalos de confianza en  $\mathbf{R}^+$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A (/) B &= [a_1, a_2] (/) [b_1, b_2] \\ &= [a_1/b_2, a_2/b_1]. \end{aligned}$$

Si  $b_1 = 0$ , entonces el límite superior del intervalo es  $+\infty$ .

Por otra parte, se sabe que si  $x \in [a_1, a_2] \subset \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ , entonces  $1/x \in [1/a_2, 1/a_1]$ , y

$$\begin{aligned} A^{-1} &= [a_1, a_2]^{-1} \\ &= [1/a_2, 1/a_1]. \end{aligned}$$

A partir de estas definiciones es trivial mostrar que la multiplicación es conmutativa. Tampoco es difícil comprobar que es asociativa. El elemento  $1 = [1, 1]$  es neutro a la izquierda y a la derecha. Sin embargo, el inverso no es simétrico en el sentido de teoría de conjuntos, es decir:

$$\begin{aligned} A (\cdot) A^{-1} &= [a_1, a_2] (\cdot) [1/a_2, 1/a_1] \\ &= [a_1/a_2, a_2/a_1] \neq 1. \end{aligned}$$

Estas propiedades muestran que el conjunto de intervalos de confianza en  $\mathbf{R}^+$ , tiene una estructura de monoide para la multiplicación pero no tiene una de grupo. El monoide es además conmutativo.

Supóngase además que se tiene un  $k \in \mathbf{R}^+$ , entonces es posible escribir  $k = [k, k]$  y entonces,  $\forall A$  intervalo en  $\mathbf{R}^+$ :

$$\begin{aligned} k \cdot A &= k \cdot [a_1, a_2] \\ &= [k, k] (\cdot) [a_1, a_2] \\ &= [ka_1, ka_2]. \end{aligned}$$

La división por  $k > 0$  es equivalente a la multiplicación por  $1/k$ .

4. Definición de números difusos con base en intervalos de confianza. La discusión anterior permite llegar a la definición de número difuso y a sus propiedades.

Se sabe que un intervalo de confianza es una manera de reducir la incertidumbre, al utilizar cotas inferior y superior para establecer dónde se encuentra el valor de una variable. Es un procedimiento lógico y práctico para enfrentar la incertidumbre cualquiera que sea la información disponible. Esta información puede ser objetiva (existe seguridad de que el valor de la variable se encuentra entre dos datos medidos con exactitud) o subjetiva (la información obtenida proviene de experimentos y observaciones o de la opinión de expertos).

Retomando la discusión presentada en la introducción de esta sección, es posible tener un intervalo de confianza y el centro del mismo constituye el valor esperado de la variable bajo estudio. Al intervalo completo y al valor esperado es posible asignarles distintos niveles de presunción. Por ejemplo, puede asignársele 0 al intervalo completo y 1 al valor esperado. Por supuesto, como se ha indicado en capítulos anteriores, no existe razón alguna por la cual limitarse a estos dos únicos valores. Se puede considerar asignar todos los valores entre 0 y 1 (o al menos varios de ellos) a distintos subintervalos del intervalo original. A mayor presunción el intervalo será siempre más pequeño, aunque siempre contendrá también al valor esperado. Formalmente se puede escribir esto de la manera siguiente:

$$\forall \alpha, \alpha' \in [0, 1], \text{ si } \alpha > \alpha', \text{ entonces } [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \subseteq [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}].$$

Esto significa que si  $\alpha$  crece, el intervalo de confianza nunca crece.

En la anterior discusión se han relacionado dos conceptos: el nivel de presunción y el intervalo de confianza. La asociación entre el nivel de presunción y el intervalo de confianza, es decir, la manera según la cual va variando el intervalo de confianza al variar el nivel de presunción, constituye la definición de un número difuso con base en los intervalos de confianza.

Con base en esta definición, así como las propiedades de intervalos de confianza vistas anteriormente, es fácil definir la suma y el producto de números difusos.

## D. Adición y resta

1. Definición de la adición de números difusos. Ya se vio la manera en que pueden sumarse dos intervalos de confianza. La suma de números difusos es similar pero la operación se repite para cada nivel de presunción. Por ejemplo, sean A y B dos números difusos y  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  sus respectivos intervalos de confianza para el nivel de presunción  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0,1]$ . Podemos entonces escribir:

$$\begin{aligned}(A + B)_\alpha &= A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (+) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}],\end{aligned}$$

donde  $(A + B)_\alpha$  representa el intervalo de confianza para el nivel de presunción  $\alpha$ , para el número difuso  $A + B$ .

2. Ejemplo en los reales. Lo anterior puede aclararse mediante el siguiente ejemplo numérico.

Sean los números difusos A y B con sus correspondientes funciones de membresía  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  definidas de la siguiente manera:

$\forall x \in \mathbf{R} :$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5, \\ x/3 + 5/3, & -5 \leq x \leq -2, \\ -x/3 + 1/3, & -2 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x, \end{cases}$$

y,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ x/7 + 3/7, & -3 \leq x \leq 4, \\ -x/8 + 12/8, & 4 \leq x \leq 12, \\ 0, & 12 \leq x. \end{cases}$$

Estos son llamados números difusos *triangulares* dado que al dibujar las gráficas correspondientes la figura que se obtiene es un triángulo. A continuación, es necesario calcular los intervalos de confianza que corresponden a cada nivel  $\alpha$ , lo cual se hace describiendo las pendientes triangulares en función de  $\alpha$ .

Para el número difuso A se tiene:

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} / 3 + 5/3, \text{ y}$$

$$\alpha = -a_2^{(\alpha)} / 3 + 1/3.$$

Entonces, el intervalo de confianza correspondiente al nivel  $\alpha$  está dado por:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \\ = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1].$$

Para el número difuso B se tiene:

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} / 7 + 3/7, \text{ y} \\ \alpha = -b_2^{(\alpha)} / 8 + 12/8.$$

Entonces, el intervalo de confianza correspondiente al nivel  $\alpha$  está dado por:

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12].$$

Entonces, añadiendo ambos intervalos se obtiene:

$$(A + B)_\alpha = A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \\ = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1] (+) [7\alpha - 3, -8\alpha + 12] \\ = [10\alpha - 8, -11\alpha + 13].$$

Dado que:

$$a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} = 10\alpha - 8$$

y además:

$$a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} = -11\alpha + 13,$$

se obtiene:

$$\mu_{A(+)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -8, \\ x/10 + 8/10, & -8 \leq x \leq 2, \\ -x/11 + 13/11, & 2 \leq x \leq 13, \\ 0, & 13 \leq x. \end{cases}$$

Naturalmente los anteriores cálculos fueron muy simples por el hecho de tratarse de la suma de números difusos triangulares. Sin embargo, dicho procedimiento puede ser utilizado de manera análoga para cualquier forma en que se definan los números difusos a ser sumados.

3. Ejemplo en los naturales. A continuación vemos un ejemplo de adición de números difusos tomados sobre los naturales.

A =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
	0	0.1	0.3	0.8	1	0.7	0.3	0	0	...

Este número difuso se interpreta de la siguiente manera. El elemento  $x = 0$  no pertenece al conjunto difuso, es decir que su grado de membresía es cero. El elemento 1 pertenece al conjunto con un grado de membresía de 0.1. El elemento 4 pertenece al conjunto con un grado de membresía 1. Los números mayores o iguales a 7 no pertenecen al conjunto.

Ahora se interpretará el número desde la perspectiva de los intervalos de confianza. Al nivel de presunción 0.1, el intervalo de confianza es  $[1,6]$  ya que todos sus elementos tienen un grado de membresía mayor o igual a 0.1. A los niveles de presunción 0.2 y 0.3, el intervalo de confianza es  $[2,6]$ , ya que todos los elementos del mismo tienen un grado de membresía mayor o igual a dichos valores y no existe ninguno cuyo grado de membresía sea 0.2. Al nivel 0.7, el intervalo es  $[3,5]$ . Al nivel 0.8, éste es  $[3,4]$  y al nivel 1 se encuentra el conjunto de un único elemento  $\{4\}$ .

Nótese que este conjunto difuso es convexo ya que al aumentar el nivel de presunción, los intervalos quedan contenidos en los de más baja presunción. Además, es normal ya que el grado de membresía del elemento 4 es 1.

A continuación se define el número difuso B:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
B =	0	0.3	0.6	1	0.7	0.2	0.1	0	0	...

La interpretación que se ha dado de los números difusos A y B con base en intervalos de confianza permite visualizar la suma  $A (+) B$  de la siguiente manera:

		elementos							
nivel	0	1	2	3	4	5	6	7	
1					x				
.9					x				
.8				x	x				
.7				x	x	x			
.6				x	x	x			
.5				x	x	x			
.4				x	x	x			
.3			x	x	x	x	x		
.2			x	x	x	x	x		
.1		x	x	x	x	x	x		
0	x	x	x	x	x	x	x	x	
	0	0.1	0.3	0.8	1.0	0.7	0.3	0	

**A**

		elementos							
nivel	0	1	2	3	4	5	6	7	
1				x					
.9				x					
.8				x					
.7				x	x				
.6			x	x	x				
.5			x	x	x				
.4			x	x	x				
.3		x	x	x	x				
.2		x	x	x	x	x			
.1		x	x	x	x	x	x		
0	x	x	x	x	x	x	x	x	
	0	0.3	0.6	1.0	0.7	0.2	0.1	0	

**B****(+)**

		elementos													
nivel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1								x							
.9								x							
.8							x	x							
.7							x	x	x	x					
.6						x	x	x	x	x					
.5						x	x	x	x	x					
.4						x	x	x	x	x					
.3				x	x	x	x	x	x	x	x				
.2				x	x	x	x	x	x	x	x	x			
.1			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	0	0	0.1	0.3	0.3	0.6	0.8	1.0	0.7	0.7	0.3	0.2	0.1	0	

**A(+)**B****

Los anteriores cuadros deben interpretarse así: para cada elemento (colocado en la parte superior de cada cuadro) se coloca en la parte inferior su grado de membresía. Esto permite llenar los cuadros con una equis hasta llegar al nivel que le corresponde. Esto da la facilidad de visualizar el nivel de presunción horizontalmente a la derecha del nivel que se desee observar.

La suma se puede interpretar de la siguiente manera: a cada nivel de cada sumando se establece el valor inferior y el superior del intervalo de confianza. Por ejemplo, al nivel 0.3 de A el mínimo es 2 y el máximo 6, y de B el mínimo es 1 y el máximo 4. Esto significa que para A(+)B, siempre al nivel 0.3, el mínimo será la suma de los mínimos ( $2+1=3$ ) y el máximo la suma de los máximos ( $6+4=10$ ). Entonces en la tabla de A(+)B se observa que, al nivel 0.3, estarán llenas con equis todas las casillas desde el elemento mínimo (3) hasta el máximo (10). De manera análoga se procede para todos los niveles.

Entonces si  $C = A (+) B$  es posible escribir:

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 & \dots \\ \hline \end{array}$$

#### 4. Teoremas fundamentales.

##### Teorema 5.1.

Si A y B son números difusos en  $\mathbf{R}$ , entonces A(+)B es también un subconjunto difuso convexo en  $\mathbf{R}$ .

##### Demostración:

Para cada nivel de presunción  $\alpha$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ , se tiene un intervalo de confianza  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ . Esta correspondencia es una función monótona decreciente de  $\alpha$ , es decir, si  $\alpha > \alpha'$ , entonces  $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ . Esto también puede escribirse de la siguiente manera: si  $\alpha > \alpha'$ , entonces  $[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \subseteq [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}]$ . Se consideran 2 niveles  $\alpha$  y  $\alpha'$ , donde  $\alpha' > \alpha$ . Es posible escribir:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}],$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}],$$

$$A_{\alpha'} = [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}],$$

$$B_{\alpha'} = [b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}],$$

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}]) \subseteq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}],$$

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}]) \subseteq [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}].$$

Por construcción,

$$A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}],$$

$$A_{\alpha'} (+) B_{\alpha'} = [a_1^{(\alpha')} + b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} + b_2^{(\alpha')}].$$

Entonces se tiene:

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha')} + b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} + b_2^{(\alpha')}]) \subseteq [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}].$$

Lo anterior demuestra que la convexidad es preservada por la suma.

**Teorema 5.2.**

Si A y B son números difusos en  $\mathbf{R}$ , entonces  $A (+) B$  es un subconjunto difuso normal en  $\mathbf{R}$ .

**Demostración:**

En el nivel  $\alpha = 1$ , se tiene:

$$A_{\alpha=1} = [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}], \text{ y}$$

$$B_{\alpha=1} = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}].$$

Entonces:

$$A_{\alpha=1} (+) B_{\alpha=1} = [a_1^{(1)} + b_1^{(1)}, a_2^{(1)} + b_2^{(1)}] \neq \emptyset.$$

Esto prueba que  $A (+) B$  es normal.

**Corolario:**

Si A y B son números difusos en  $\mathbf{R}$ , entonces  $A (+) B$  es también un número difuso. Esto se desprende directamente de los dos teoremas anteriores.

5. Estructura algebraica. Para examinar las propiedades algebraicas de la suma de números difusos, basta considerar las características ya vistas de la suma de intervalos de confianza, para cada nivel  $\alpha$ . Se tiene entonces que para A, B y C números difusos en  $\mathbf{R}$ , lo siguiente:

$$A (+) B = B (+) A, \text{ (conmutatividad)}$$

$$(A (+) B) (+) C = A (+) (B (+) C), \text{ (asociatividad).}$$

El elemento neutro, tanto a la izquierda como a la derecha, es el número 0. Entonces:

$$A (+) 0 = 0 (+) A = A.$$

Sin embargo, la suma de un elemento con su imagen no es el elemento neutro, ya que para todo número difuso A se tiene:

$$A (+) A^- = A^- (+) A \neq 0$$

Esto significa que los números difusos tienen una estructura monoidal con respecto a la suma que es conmutativa.

6. Resta de números difusos. La definición de suma puede extenderse para ofrecer la definición de resta. Considérese la siguiente definición y notación:

$$\forall \alpha \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} (A - B)_\alpha &:= A_\alpha (-) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (-) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]. \end{aligned}$$

Es claro que la resta es de hecho la suma de A con la imagen de B,  $B^-$ , donde

$$\forall \alpha \in [0, 1], \text{ se tiene:}$$

$$B^-_\alpha = [-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)}].$$

La resta no es conmutativa ni asociativa. Dado que la resta, con base en la definición anterior, puede visualizarse como una suma, los procedimientos para efectuar restas de números difusos, tanto en los reales como en los enteros, son análogos a los de la suma y es por ello que no se hace necesario presentar ejemplos.

## E. Multiplicación y división

1. Definición de la multiplicación de números difusos. Ya se vio la manera en que pueden multiplicarse dos intervalos de confianza en  $\mathbf{R}^+$  y en  $\mathbf{N}$ . El producto de números difusos es similar, pero la operación se repite para cada nivel de presunción. Sean A y B dos números difusos y  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  sus respectivos intervalos de confianza para el nivel de presunción  $\alpha$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_\alpha &:= A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (\cdot) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]. \end{aligned}$$

2. Ejemplo en los reales. Lo anterior puede aclararse mediante el siguiente ejemplo numérico.

Sean los números difusos A y B con sus correspondientes funciones de membresía  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  definidas de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbf{R}:$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3, \\ -x/2 + 5/2, & 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & 5 \leq x. \end{cases}$$

y,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ x/2 - 3/2, & 3 \leq x \leq 5, \\ -x + 6, & 5 \leq x \leq 6, \\ 0, & 6 \leq x. \end{cases}$$

Nótese que nuevamente es presentado un ejemplo con números difusos triangulares dado lo sencillo que resulta trabajar con ellos. A continuación es necesario calcular los intervalos de confianza que corresponden a cada nivel  $\alpha$ , lo cual se hace describiendo las pendientes triangulares en función de  $\alpha$ .

Para el número difuso A, se tiene:

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2, \text{ y}$$

$$\alpha = -a_2^{(\alpha)} / 2 + 5/2.$$

Entonces el intervalo de confianza correspondiente al nivel  $\alpha$  está dado por:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$

$$= [\alpha + 2, -2\alpha + 5].$$

Para el número difuso B se tiene:

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} / 2 - 3/2, \text{ y}$$

$$\alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6.$$

Entonces el intervalo de confianza correspondiente al nivel  $\alpha$  está dado por:

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$= [2\alpha + 3, -\alpha + 6].$$

Multiplicando ambos intervalos se obtiene:

$$A_\alpha(\cdot) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]$$

$$= [\alpha + 2, -2\alpha + 5] (\cdot) [2\alpha + 3, -\alpha + 6]$$

$$= [(\alpha + 2)(2\alpha + 3), (-2\alpha + 5)(-\alpha + 6)]$$

$$= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30].$$

Ahora es necesario resolver las siguientes ecuaciones:

$$2\alpha^2 + 7\alpha + 6 - x = 0$$

$$2\alpha^2 - 17\alpha + 30 - x = 0.$$

Dado que únicamente se conservan las raíces en  $[0,1]$  se tiene de la primera ecuación:

$$\alpha = \frac{-7 + \sqrt{1+8x}}{4}$$

y por la segunda,

$$\alpha = \frac{17 - \sqrt{49+8x}}{4}.$$

Finalmente se obtiene:

$$\mu_{A(\cdot)B}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 6, \\ \left[ \frac{-7 + \sqrt{1+8x}}{4} \right], & 6 \leq x \leq 15, \\ \left[ \frac{17 - \sqrt{49+8x}}{4} \right], & 15 \leq x \leq 30, \\ 0, & 30 \leq x. \end{cases}$$

Nótese que la curva descrita por las anteriores ecuaciones no corresponde a un triángulo, lo que significa que el producto de números triangulares no necesariamente es un número triangular.

3. Ejemplo en los naturales. A continuación se muestra un ejemplo efectuado con números difusos tomados sobre los naturales.

A =	2	3	4	5	6	...
	0	0,4	1	0,7	0	...

B =	2	3	4	5	6	7	...
	0	0,1	0,8	1	0,3	0	...

La definición dada anteriormente, así como la representación utilizada en la suma de números difusos, permite llegar a la siguiente representación de  $A(\cdot)B$ :



El producto debe interpretarse de la siguiente manera: a cada nivel de cada factor se establece el valor inferior y el superior del intervalo de confianza. Por ejemplo, al nivel 0.1 de  $A$  el mínimo es 3 y el máximo 5, y de  $B$  el mínimo es 3 y el máximo 6. Esto significa que para  $A(\cdot)B$ , siempre al nivel 0.1, el mínimo será el producto de los mínimos ( $3 \times 3 = 9$ ) y el máximo el producto de los máximos ( $5 \times 6 = 30$ ). Entonces en la tabla de  $A(\cdot)B$  se observa que al nivel 0.1 estarán llenas con equis todas las casillas desde el elemento mínimo (9) hasta el máximo (30). De manera análoga se procede para todos los niveles.

Entonces, si  $C = A(\cdot)B$ , podemos escribir:

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
C=	0	.1	.1	.1	.4	.4	.4	.4	.8	.8	.8	.8	1	.7	.7	.7	.7	.7	.3	.3	.3	.3	.3	0

4. Teoremas fundamentales. Aunque el siguiente teorema es presentado únicamente para  $\mathbf{R}^+$ , el mismo también es válido para  $\mathbf{R}$  y la demostración cambia únicamente en la complejidad de la operatoria pero no en el concepto de la misma.

### Teorema 5.3.

Si  $A$  y  $B$  son números difusos en  $\mathbf{R}^+$ , entonces  $A(\cdot)B$  es también un subconjunto difuso convexo.

### Demostración:

Para cada nivel de presunción  $\alpha$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ , se tiene un intervalo de confianza  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ . Esta correspondencia es una función monótona decreciente de  $\alpha$ , es decir, si  $\alpha' > \alpha$ , entonces  $A_{\alpha'} \subset A_\alpha$ . Esto también puede escribirse de la siguiente manera: si  $\alpha' > \alpha$ , entonces  $[a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}] \subseteq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$ . Se consideran 2 niveles  $\alpha$  y  $\alpha'$ , donde  $\alpha' > \alpha$ . Es posible escribir:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}], \\ B_\alpha &= [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}], \\ A_{\alpha'} &= [a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}], \\ B_{\alpha'} &= [b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}], \\ (\alpha' > \alpha) &\Rightarrow ([a_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')}] \subseteq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]), \\ (\alpha' > \alpha) &\Rightarrow ([b_1^{(\alpha')}, b_2^{(\alpha')}] \subseteq [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]). \end{aligned}$$

Por construcción,

$$\begin{aligned} A_\alpha(\cdot)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}], \\ A_{\alpha'}(\cdot)B_{\alpha'} &= [a_1^{(\alpha')} \cdot b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} \cdot b_2^{(\alpha')}] \end{aligned}$$

Entonces se tiene:

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha')} \cdot b_1^{(\alpha')}, a_2^{(\alpha')} \cdot b_2^{(\alpha')}] \subseteq [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]).$$

Lo anterior demuestra que la convexidad es preservada por el producto.

**Teorema 5.4.**

Si  $A$  y  $B$  son números difusos en  $\mathbf{R}^+$ , entonces  $A (\cdot) B$  es un subconjunto difuso normal en  $\mathbf{R}^+$ .

**Demostración:**

En el nivel  $\alpha = 1$ , se tiene:

$$A_{\alpha=1} = [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}]$$

$$B_{\alpha=1} = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}].$$

Entonces:

$$A_{\alpha=1} (\cdot) B_{\alpha=1} = [a_1^{(1)} \cdot b_1^{(1)}, a_2^{(1)} \cdot b_2^{(1)}] \neq \emptyset.$$

Esto prueba que  $A (\cdot) B$  es normal.

**Corolario:**

Si  $A$  y  $B$  son números difusos en  $\mathbf{R}^+$ , entonces  $A (\cdot) B$  es también un número difuso.

Esto se desprende directamente de los dos teoremas anteriores.

5. Estructura algebraica. Para examinar las propiedades algebraicas del producto de números difusos, basta considerar las características ya vistas del producto de intervalos de confianza para cada nivel  $\alpha$ . Se tiene entonces que para  $A$ ,  $B$  y  $C$  números difusos en  $\mathbf{R}$ , lo siguiente:

$$A (\cdot) B = B (\cdot) A, \text{ (conmutatividad)}$$

$$(A (\cdot) B) (\cdot) C = A (\cdot) (B (\cdot) C), \text{ (asociatividad).}$$

El elemento neutro, tanto a la izquierda como a la derecha, es el número 1. Entonces:

$$A (\cdot) 1 = 1 (\cdot) A = A.$$

Sin embargo, el producto de un número difuso con su inverso no es el elemento neutro, ya que para todo número difuso  $A$  se tiene:

$$A (\cdot) A^{-1} = A^{-1} (\cdot) A \neq 1$$

Esto significa que los números difusos tienen una estructura monoidal para el producto que es conmutativa.

6. División de números difusos. La definición de producto puede extenderse para ofrecer la definición de división. Considérese la siguiente definición y notación:

$\forall \alpha \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} (A / B)_\alpha &:= A_\alpha (/) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (/) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}], b_2^{(\alpha)} > 0. \end{aligned}$$

Es claro que la división es de hecho el producto de  $A$  con el inverso de  $B$ ,  $B^{-1}$ , donde

$\forall \alpha \in [0, 1]$ , se tiene:

$$B^{-1}_\alpha = [1/b_2^{(\alpha)}, 1/b_1^{(\alpha)}], b_2^{(\alpha)} > 0.$$

La división no es conmutativa ni asociativa. Dado que la división, con base en la definición anterior, puede visualizarse como un producto, los procedimientos para efectuar divisiones entre números difusos son análogos a los del producto y es por ello que no se hace necesario presentar ejemplos.

7. Multiplicación de un número difuso por un escalar. Sea  $A$  un número difuso en  $\mathbf{R}$  y  $k$  un número real estrictamente positivo. Se tiene:

$$\begin{aligned} (k \cdot A)_\alpha &:= k \cdot A_\alpha = [k, k] (\cdot) [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \\ &= [ka_1^{(\alpha)}, ka_2^{(\alpha)}], \end{aligned}$$

o bien,

$\forall x \in \mathbf{R}$ :

$$\mu_{k \cdot A}(x) = \mu_A(x/k).$$

A continuación se presenta un ejemplo con un número difuso triangular:

$\forall x \in \mathbf{R}$ :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x/3 + 1/3, & -1 \leq x \leq 2, \\ -x/6 + 8/6, & 2 \leq x \leq 8, \\ 0, & 8 \leq x. \end{cases}$$

Entonces, si  $k = 3$ , con base en la definición se obtiene:

$\forall x \in \mathbf{R}$ :

$$\mu_{3A}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ x/9 + 1/3, & -3 \leq x \leq 6, \\ -x/18 + 8/6, & 6 \leq x \leq 24, \\ 0, & 24 \leq x. \end{cases}$$

8. Distributividad en  $\mathbb{R}^+$ . Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son números difusos en los reales positivos, entonces:

$$(A (+) B) (\cdot) C = (A (\cdot) C) (+) (B (\cdot) C).$$

Es claro que esta propiedad se desprende directamente de la distributividad en los números reales, es decir, es heredada de los reales.

Por otra parte,

$$(A (\cdot) B) (+) C \neq (A (+) C) (\cdot) (B (+) C),$$

ya que en los reales:

$$(a \cdot b) + c \neq a \cdot c + b \cdot c.$$

## F. Mínimos y máximos

Sean los siguientes números difusos:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}],$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}].$$

Estos números no son necesariamente comparables, pero si,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , se tiene:

$$a_1^{(\alpha)} \leq b_1^{(\alpha)} \text{ y } a_2^{(\alpha)} \leq b_2^{(\alpha)},$$

entonces podemos escribir  $A \leq B$ . Si la anterior condición, o la inversa  $A \geq B$ , se cumple, se dice que  $A$  y  $B$  son comparables y, en caso contrario, se dice que no son comparables. Por tanto, los números difusos no tienen una estructura de orden total, sino de orden parcial.

Se define el mínimo difuso entre  $A$  y  $B$  como el número:

$$\forall \alpha \in [0, 1]:$$

$$\begin{aligned} \min(A_\alpha, B_\alpha) &= \min([a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}], [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]) \\ &= [\min(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}), \min(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)})]. \end{aligned}$$

El máximo se define de manera análoga.

# VI. LAS FUNCIONES GENERALIZADAS DE CONJUNCIÓN-DISYUNCIÓN

## A. Introducción

A continuación se define una familia de funciones llamadas funciones generalizadas de conjunción-disyunción, las cuales cumplen con las características requeridas para las funciones de agregación en el contexto de operaciones entre conjuntos difusos. Más aún, las funciones generalizadas de conjunción-disyunción abarcan una gran parte de las funciones candidatas a ser funciones de agregación, por lo que constituyen una familia importante de funciones de agregación. Más adelante se señalan también propiedades sumamente útiles que tienen estas funciones en aplicaciones prácticas.

Estas funciones permiten efectuar operaciones de agregación entre conjuntos difusos de una manera mucho más general y apropiada que las funciones tradicionalmente señaladas en los tratados sobre conjuntos difusos. El utilizar las funciones generalizadas de conjunción-disyunción para la agregación de conjuntos difusos y el demostrar la validez de su aplicación, constituye un aporte importante de este trabajo a la literatura de conjuntos difusos. En efecto, en la literatura existente acerca de conjuntos difusos se aborda de manera pobre el tema de la agregación de conjuntos difusos, así como la aplicación que dicha operación tiene en el análisis de decisiones.

Este estudio muestra cómo un modelo de decisiones puede elaborarse tomando como fundamento la teoría de los conjuntos difusos, efectuando operaciones de agregación sobre los mismos mediante las funciones generalizadas de conjunción-disyunción. También muestra una aplicación más de dicha teoría, aplicación que puede resultar de utilidad en muy diversos campos. Esto constituye una contribución de importancia en la teoría y aplicación de los conjuntos difusos.

## B. Definiciones

A continuación se utilizará la misma notación que en el capítulo III. Si  $X$  es una colección de objetos denotados por  $x$ , entonces un conjunto difuso  $A$  en  $X$  es un conjunto ordenado de parejas:

$$A = \{(x, \mu_{A(x)}) \mid x \in X\}, \mu_{A(x)} \text{ es la función de pertenencia.}$$

Sean  $n$  conjuntos difusos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Se desea obtener un conjunto difuso  $A$  que sea el resultado de la agregación de los  $n$  conjuntos difusos. Se designa por  $x_i$  al valor de la función  $\mu_{A_i(x)}$ , es decir,  $x_i = \mu_{A_i(x)}$ . Conviene recordar que lo que se busca es una función  $H$ :

$$H: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1], \text{ para algún } n \geq 2,$$

donde  $\mu_{A(x)} = H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\forall x \in X$ .

Sean además  $w_1, w_2, \dots, w_n$  pesos que corresponden a los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  respectivamente, los cuales expresan la importancia que cada conjunto difuso tiene dentro de la función de agregación. Estos pesos se escogen positivos y normalizados, es decir,  $\sum w_i = 1$ . Para algún  $r \in \mathbf{R}$ , sea la siguiente función de agregación  $H_r$ , llamada la media ponderada de potencias:

$$H_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1 \cdot x_1^r + w_2 \cdot x_2^r + \dots + w_n \cdot x_n^r)^{1/r}$$

Al hacer que  $r$  adopte todos los valores posibles en el sistema extendido de números reales, se obtiene una familia de funciones llamadas funciones generalizadas de conjunción-disyunción.

A continuación se verifica que la media ponderada de potencias cumpla con las dos reglas básicas de la agregación, es decir:

1.  $H_r(0, 0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $H_r(1, 1, 1, \dots, 1) = 1$

2.  $H_r$  es monótona creciente.

Para el inciso 1. es claro que:

$$(w_1 \cdot 0^r + w_2 \cdot 0^r + \dots + w_n \cdot 0^r)^{1/r} = 0$$

$$(w_1 \cdot 1^r + w_2 \cdot 1^r + \dots + w_n \cdot 1^r)^{1/r} = 1$$

En la siguiente sección se demuestra que  $H_r$  es monótona creciente.

Anteriormente también se comentó que era recomendable que  $H_r$  cumpliera con:

3.  $H_r$  es una función continua

4.  $H_r$  es simétrica en todos sus argumentos.

Para el inciso 3. es claro que  $H_r$  es función continua en el intervalo  $[0, 1]^n$ .

Para el inciso 4.  $H_r$  es simétrica si todos los pesos son iguales a  $1/n$ . En la práctica generalmente lo más conveniente es que  $H_r$  no sea simétrica, pero si una aplicación particular así lo requiere ésta tendrá la característica de que los pesos serán iguales a  $1/n$ .

## C. Propiedades

A continuación se enuncian y analizan algunos casos especiales para valores particulares de  $r$ :

### 1. Caso $r = -\infty$

Al hacer tender  $r$  hacia menos infinito, se asume sin pérdida de generalidad que  $e_j$  tiene el valor mínimo de entre los valores  $e_1, \dots, e_n$ . Se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} (w_1 \cdot e_1^r + w_2 \cdot e_2^r + \dots + w_n \cdot e_n^r)^{1/r} = \lim_{r \rightarrow -\infty} [e_j^r (w_1 (e_1/e_j)^r + \dots + w_n (e_n/e_j)^r)]^{1/r}$$

Como los  $(e_i/e_j)$  son mayores o iguales a 1 para  $i=1..n$ , al elevarlos a una potencia que tiende a menos infinito, éstos tienden a cero. Únicamente queda el peso que multiplica a  $e_j$  y los que multiplicarían a aquellos otros valores que fuesen iguales a  $e_j$ , en el caso en que el mínimo no sea único. Sea  $w$  la suma de estos pesos. El anterior límite se convierte en:

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} [w \cdot e_j^r]^{1/r} = \lim_{r \rightarrow -\infty} w^{1/r} \cdot [e_j^r]^{1/r} = \lim_{r \rightarrow -\infty} w^{1/r} \cdot \lim_{r \rightarrow -\infty} [e_j^r]^{1/r} = e_j$$

Luego se concluye que la media ponderada de potencias tiende al valor mínimo cuando  $r$  tiende a  $-\infty$ , es decir, en este caso la media ponderada de potencias corresponde a la función “mínimo” y a la conjunción en el caso de las lógicas polivaluadas.

### 2. Caso $r = +\infty$

Al hacer tender  $r$  hacia más infinito, efectuando un razonamiento análogo al anterior, se llega a la conclusión que la media ponderada de potencias corresponde a la función “máximo” y a la disyunción en el caso de las lógicas polivaluadas.

Entonces en los casos extremos esta función de agregación corresponde a la conjunción y a la disyunción, y haciendo barrer el valor de  $r$  entre estos dos valores extremos se obtiene una familia de funciones, cada una con un cierto “grado” de conjunción o disyunción, y de allí se obtiene el nombre de funciones generalizadas de conjunción-disyunción.

### 3. Caso $r = 1$

En el caso  $r = 1$ , se obtiene la ya ampliamente conocida media aritmética. La media aritmética es un caso particular dentro de esta familia de funciones.

### 4. Caso $r = -1$

En este caso se obtiene la media armónica. Ésta constituye otro caso particular dentro de esta familia de funciones.

## 5. Caso $r < 0$

Cuando  $r$  es negativo, la media ponderada de potencias tiene la interesante propiedad de que si alguno de los valores  $e_1, \dots, e_n$  es cero, el resultado global también es cero. Además tiene la propiedad de que si uno de los valores es cercano a cero, aunque los otros valores sean grandes, en el resultado global pesa mucho el valor cercano a cero. Las anteriores propiedades son muy útiles en el contexto de evaluación y toma de decisiones, ya que si se desea evaluar algo cuyas características particulares son medibles y si alguna de sus características se le asigna un valor muy bajo, el resultado global será también bajo.

## D. Teoremas fundamentales

En los resultados que se presentan a continuación se asume que la media ponderada de potencias,  $H$ , es aplicada a  $n$  números que tienen todos la misma ponderación. Los resultados no se ven afectados por la existencia o carencia de dicha ponderación.

### Lema 6.1.

Si el producto de  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es igual a 1, la suma de los mismos no es menor que  $n$ , es decir, si  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , entonces  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ .

### Demostración.

La demostración se realizará utilizando el método de inducción matemática. Primero se comprobará para el caso  $n = 2$ , es decir, se demostrará que si  $x_1 \cdot x_2 = 1$ , entonces,  $x_1 + x_2 \geq 2$ .

Para el efecto, se consideran los dos casos siguientes:

$$1) x_1 = x_2 = 1$$

En este caso, se tiene que  $x_1 + x_2 = 2$ , con lo cual se cumple lo establecido en el teorema para  $n = 2$ .

2)  $0 < x_1 < x_2$ , lo cual se puede asumir sin pérdida de generalidad.

En este caso, se tiene que  $x_1 < 1$  y  $x_2 > 1$  en virtud de que el producto es igual a 1. De la igualdad

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 - 1$$

se deduce que

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1)$$

Pero  $x_1 \cdot x_2 = 1$ , entonces la igualdad anterior se escribe:

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1)$$

Finalmente, puesto que  $x_1 < 1 < x_2$ , el último número es positivo y por eso:

$$x_1 + x_2 > 2.$$

Entonces, el teorema queda demostrado para  $n = 2$ . Nótese que la igualdad

$$x_1 + x_2 = 2$$

se cumple sólo cuando  $x_1 = x_2 = 1$ . En cambio, para  $x_1 \neq x_2$  se tiene  $x_1 + x_2 > 2$ .

Con base en el método de inducción matemática, se supone que el teorema es válido para  $n = k$  y se demostrará para  $n = k + 1$ .

Se pueden presentar dos casos:

1) Todos los factores son iguales, o sea,  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$

En este caso, todos los factores son iguales a uno y la suma de los mismos es igual a  $k + 1$ , es decir,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k + 1.$$

2) Entre todos los factores hay al menos uno mayor que uno y uno menor que uno.

Se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $x_l < 1$  y  $x_{k+1} > 1$ . Se tiene:

$$(x_l \cdot x_{k+1}) \cdot x_2 \cdots x_k = 1$$

Sea  $y = x_l \cdot x_{k+1}$ , se tiene:

$$y \cdot x_2 \cdots x_k = 1$$

Esta igualdad corresponde al producto de  $k$  números positivos que es igual a uno, por lo que, por hipótesis de inducción, la suma de los mismos no es menor que  $k$ , es decir,

$$y + x_2 + \dots + x_k \geq k$$

Pero,

$$x_l + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = (y + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1} - y + x_l \geq$$

$$k + x_{k+1} - y + x_l = (k + 1) + x_{k+1} - y + x_l - 1$$

Pero  $y = x_l \cdot x_{k+1}$ , entonces:

$$x_l + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq (k + 1) + x_{k+1} - x_l \cdot x_{k+1} + x_l - 1 = (k + 1) + (x_{k+1} - 1) (1 - x_l)$$

Dado que  $x_l < 1$  y que  $x_{k+1} > 1$ , se tiene que  $(x_{k+1} - 1) (1 - x_l) > 0$  y, por consiguiente,

$$x_l + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq (k + 1) + (x_{k+1} - 1) (1 - x_l) > k + 1$$

Con esto queda demostrado el lema 6.1.

### Teorema 6.1.

La media geométrica de números positivos no pasa de la media aritmética de estos mismos números.

Si los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  no son todos iguales, la media geométrica de estos números es estrictamente menor que su media aritmética.

### Demostración.

Sea  $a = H_l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es decir,  $a$  es la media aritmética de los  $n$  números y sea  $g$  su media geométrica.

Se sabe que  $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ , de lo que se deduce que

$$g^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n,$$

lo que equivale a:

$$\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{g} = 1.$$

Esto es el producto de  $n$  números positivos y dicho producto es igual a 1, lo que implica, al aplicar el lema 5.1., que la suma de estos  $n$  números no es menor que  $n$ , es decir,

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \dots + \frac{x_n}{g} \geq n.$$

Al multiplicar por  $g$  y dividir entre  $n$  la expresión anterior de ambos lados, se obtiene:

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq g.$$

Nótese que la igualdad sólo se da cuando:

$$(x_1/g) = (x_2/g) = (x_3/g) = \dots = (x_n/g) = 1, \text{ o sea, } x_1 = x_2 = \dots = x_n = g.$$

En caso contrario se obtiene:  $a > g$ .

### Lema 6.2. (desigualdad de Bernoulli)

Si  $x \geq -1$  y  $0 < \alpha < 1$ , entonces:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

En cambio, si  $\alpha < 0$  ó  $\alpha > 1$ , se tiene:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Además, en las ecuaciones anteriores la igualdad sólo se cumple si  $x = 0$ .

### Demostración.

Se supondrá que  $\alpha$  es un número racional con la particularidad de que  $0 < \alpha < 1$ . Sea  $\alpha = \frac{m}{n}$ , donde

$m$  y  $n$  son números enteros positivos y  $1 \leq m < n$ . Dado que, por hipótesis  $1+x > 0$ , utilizando el resultado se tiene:

$$(1+x)^n = (1+x)^m \cdot 1^{n-m} = \sqrt[n]{(1+x)(1+x)\dots(1+x) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_{n-m}} \leq$$

$$\frac{(1+x) + (1+x) + \dots + (1+x) + (1+1+\dots+1)}{n} =$$

$$\frac{m(1+x) + n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x$$

La igualdad tiene lugar únicamente si todos los factores que figuran debajo del radical son iguales, es decir, si  $1+x = 1$ ,  $x = 0$ .

### Definición.

Se define la media geométrica de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números reales positivos como:

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

La media geométrica fue estudiada por el matemático francés Cauchy quien demostró a principios del siglo XIX la desigualdad  $g \leq a$ , donde  $a$  representa la media aritmética de estos mismos  $n$  números (teorema 5.1.).

### Teorema 6.2.

Si los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son reales positivos y si  $\alpha < \theta < \beta$ , se tiene:

$$H_\alpha \leq g \leq H_\beta,$$

es decir, la media de potencias no pasa de la media geométrica y la media de potencias de grado positivo no es menor que la media geométrica.

### Demostración.

Por el teorema 5.1., se sabe que  $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ .

Al hacer  $x_i = a_i^\alpha$  para  $1 \leq i \leq n$ , se obtiene:

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leq (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)/n.$$

Al elevar ambos miembros de esta desigualdad a la potencia  $1/\alpha$  y tomando en cuenta que por hipótesis  $1/\alpha > 0$ , se obtiene:

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \left[ (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)/n \right]^{1/\alpha} = H_\alpha.$$

Esto demuestra la primera desigualdad del teorema. La segunda se demuestra análogamente.



Nótese que la igualdad  $H_\beta = k = H_\alpha$  se da sólo si en todas las desigualdades del anterior sistema se da también la igualdad, es decir, si  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , según lo establece el lema 6.2. Esto significa que también se tiene  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$  y, por tanto  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = k$ . En cambio si estos números no son iguales se tiene:  $H_\beta > H_\alpha$ . Esto demuestra el teorema para el caso  $0 < \alpha < \beta$ .

Si  $\alpha < \beta < 0$  se tiene  $0 < \beta/\alpha < 1$ . Repitiendo los razonamientos anteriores se obtiene un sistema de desigualdades y una ecuación (II), todos similares a los expuestos más arriba pero con signos de desigualdad opuestos. Pero como  $\beta < 0$ , de la desigualdad

$$(d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha}) / n \leq 1$$

se deduce que:

$$H_\beta / k = [(d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha}) / n]^{1/\beta} \geq 1^{1/\beta} = 1,$$

es decir,

$$H_\beta \geq k = H_\alpha.$$

Esto demuestra completamente el teorema.

Corolario.

Como consecuencia inmediata de los teoremas anteriores es posible adoptar la siguiente notación:  $H_r = g$  ya que para todo  $H_r$ , si  $r \leq 0$ ,  $H_r \leq g$  y si  $r \geq 0$ ,  $H_r \geq g$ , y además  $H_r$  es monótona creciente a medida que crece  $r$ .

## E. Grado de conjunción

La lógica de dos valores, con sus operaciones de conjunción y disyunción, tiene aquí sus equivalentes en las funciones mínimo ( $r = -\infty$ ) y máximo ( $r = +\infty$ ) respectivamente. Cuando  $r = 1$  se obtiene la media aritmética. Se puede considerar que de la familia de funciones de agregación la media aritmética representa el punto medio. Cuando  $r$  es mayor que 1 se obtiene un cierto grado de conjunción y, cuando  $r$  es menor que 1 se obtiene un grado de disyunción.

Formalmente es posible construir un conjunto difuso. Utilizando la misma notación que se ha utilizado anteriormente, sea  $X$  el conjunto de las funciones generalizadas de conjunción - disyunción. Sea  $C$  una función de pertenencia,  $C : X \rightarrow [0, 1]$ .  $C$  le asocia a una función generalizada de conjunción - disyunción el grado de conjunción que ésta tiene. Por ejemplo,  $C(\text{función mínimo}) = 1$  (conjunción pura),  $C(\text{función máximo}) = 0$  (disyunción pura). Lo anterior define un conjunto difuso que establece el grado de conjunción que una función tiene.

Naturalmente la mente humana no puede manejar todos los números reales, por lo que sería imposible trabajar con todos. Es por ello que es necesario definir una variable lingüística  $(x, T(x), U, G, M)$  donde  $U$  es el conjunto de palabras en español y  $G$  y  $M$  corresponden a las reglas del idioma español.  $x$  es el nombre de la variable. En este caso  $x$  es el grado de conjunción. Un posible conjunto para  $T(x)$  es:  $T(x) = \{\text{disyunción pura, fuerte cuasi-disyunción, mediana cuasi-disyunción, débil cuasi-disyunción, media aritmética, débil cuasi-conjunción, mediana cuasi-conjunción, fuerte cuasi-conjunción, conjunción pura}\}$ . Podemos asociar los valores de  $T(x)$  con los de  $C(x)$  como se muestra en la tabla I:

**Tabla I**

T(x)	Abreviatura	C(x)
disyunción pura	D	0
fuerte cuasi-disyunción	D+	1/8
mediana cuasi-disyunción	DA	1/4
débil cuasi-disyunción	D-	3/8
media aritmética	A	1/2
débil cuasi-conjunción	C-	5/8
mediana cuasi-conjunción	CA	3/4
fuerte cuasi-conjunción	C+	7/8
conjunción pura	C	1

Es claro que es posible definir el conjunto  $T(x)$  de infinidad de maneras diferentes, pero la manera en que se hizo arriba es fácilmente manejada por la mente humana.

Ahora debe enfrentarse el problema de cómo establecer el grado de conjunción de una función dada, es decir para un valor de  $r$  fijo y conocido.

Para relacionar los valores de  $c$  y  $r$ , se toma el valor promedio de la media ponderada de potencias:

$$E(r, n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left( \frac{1}{n} \cdot e_1^r + \cdots + \frac{1}{n} \cdot e_n^r \right)^{1/r} de_1 \cdots de_r$$

$E(r, n)$  es el valor esperado de la agregación de  $n$  valores con igual ponderación, donde todas las posibles combinaciones de valores son igualmente probables.

Al aumentar la conjunción (es decir al disminuir el valor de  $r$ ),  $E(r, n)$  es estrictamente decreciente. Esto significa que  $E(r, n)$  alcanza su valor mínimo cuando  $r = -\infty$  y su valor máximo cuando  $r = +\infty$ . Entonces se define el grado de conjunción  $c$  como la interpolación lineal entre los valores mínimo y máximo de los valores de  $E(r, n)$ , para un valor fijo de  $n$ :

$$c = \frac{E(+\infty, n) - E(r, n)}{E(+\infty, n) - E(-\infty, n)}$$

Existe una correspondencia biyectiva entre los valores de  $c$  y  $r$  para un  $n$  fijo. En la tabla II pueden verse algunos valores de  $r$  asociados con casos particulares de  $c$  y  $n$ . Estos valores se obtienen al resolver las ecuaciones anteriores por medio de métodos numéricos.

**Tabla II**

Operación	Símbolo	Grado de Conjunción	V A n = 2	L O n = 3	R E S n = 4	D E r n = 5
Disyunción	D	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Fuerte CD	D+	1/8	9.52	11.09	12.28	13.16
Media CD	DA	¼	3.93	4.45	4.82	5.09
Débil CD	D-	3/8	2.02	2.19	2.30	2.38
Media Aritmética	A	½	1.00	1.00	1.00	1.00
Débil CC	C-	5/8	0.26	0.20	0.17	0.16
Media CC	CA	¾	-0.72	-0.73	-0.71	-0.67
Fuerte CC	C+	7/8	-3.51	-3.11	-2.18	-2.61
Conjunción	C	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

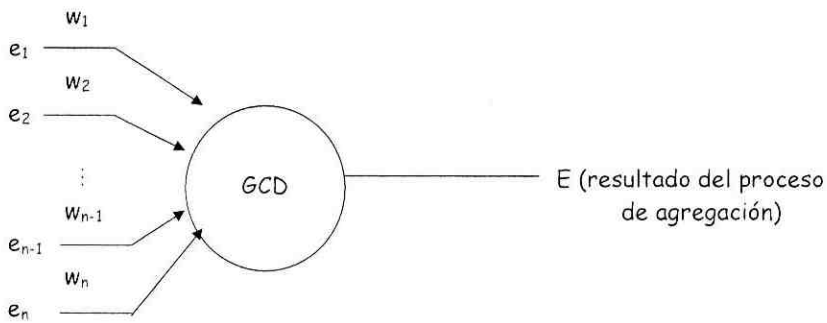
## F. Estructuras de agregación y notación

Cuando se tiene un problema complejo de decisión, es claro que no se limita a agregar  $n$  valores. En un caso complejo, el árbol de requerimientos tiene varios niveles y distintas categorías. En cada nivel y en cada categoría hay que efectuar agregación de valores, y luego hay que agregar los resultados obtenidos con los de otros niveles y otras categorías. Es necesario entonces poder definir las funciones que se utilizarán para llevar a cabo este proceso. Para ello se define entonces el siguiente concepto:

Una *estructura de agregación* es una composición de funciones de agregación que produce un resultado global partiendo de punteos elementales. Es decir que los valores  $e_1, \dots, e_n$ , en lugar de ser agregados por una sola función, son agregados por una composición de funciones, o sea por una estructura de agregación.

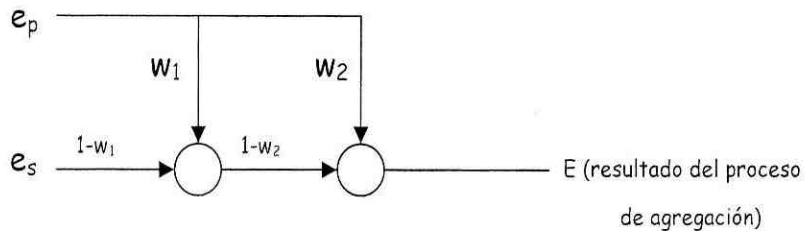
Una función generalizada de conjunción-disyunción (GCD) será representada por un círculo, recibiendo como entrada los valores  $e_1, \dots, e_n$  y teniendo como salida el valor  $E$  que es el resultado de agregar estos  $n$  valores por medio de la función (ver gráfica 6.1).

**Gráfica 6.1**



Una estructura de agregación, como se mencionaba antes, es la composición de dos o más funciones. Un ejemplo de una estructura de agregación que sirve para agregar una calificación principal, designada por  $e_p$ , y una calificación secundaria, designada por  $e_s$ , aparece en la gráfica 6.2.

**Gráfica 6.2**



## VII. APLICACIÓN PRÁCTICA: UN MODELO DE EVALUACIÓN Y DECISIÓN

### A. Introducción

A continuación se describe una de las aplicaciones prácticas que se le ha dado a la teoría anteriormente expuesta. Se trata de un modelo matemático que es útil en la evaluación, comparación y selección de diversos productos alternativos que tengan múltiples características y cuyo costo es alto.

En estos casos es necesario hacer una evaluación sistemática y cualitativa. Una decisión bien justificada es esencial. Uno de los objetivos del presente modelo es eliminar juicios subjetivos, preferencias personales e ideas preconcebidas. Lo que se persigue es tener un juicio plenamente objetivo basado en un estudio cualitativo y apegado a la realidad de las características de los productos a evaluarse.

Un buen ejemplo de un problema complejo de decisión lo constituye la evaluación, comparación y selección de bienes informáticos. Un equipo de computación para una empresa, un sistema automatizado, un sistema operativo o un manejador de bases de datos son ejemplos de bienes informáticos cuya evaluación suele ser compleja.

El modelo de evaluación será presentado utilizando como ejemplo la evaluación de una impresora de alta capacidad y con múltiples características que buscan ser evaluadas.

### B. Análisis de requerimientos y definición de parámetros

Para poder efectuar una comparación entre distintas alternativas, cuyos objetivos y diseños suelen ser diferentes entre ellas, es necesario establecer un conjunto de parámetros comunes para poder efectuar comparaciones que tengan sentido. Este conjunto de parámetros debe abarcar tanto los costos como los beneficios, o sea la capacidad de satisfacer los requerimientos de la organización que efectúa la evaluación.

Se persigue dividir el conjunto de parámetros de costo y beneficio para identificar las principales categorías del producto en base a los requerimientos específicos de la organización.

Para ello es necesario crear lo que se llamará el *árbol de requerimientos y parámetros* (que se abreviará por ARP). El árbol posee un nodo raíz que representa el producto completo. Se divide en sus

categorías principales, cada una de las cuales es representada por un nodo en el primer nivel. Cada uno de estos nodos puede seguir siendo subdividido.

Los niveles superiores del árbol corresponden a niveles bien conocidos por las personas que ocupan los puestos de decisión y que han definido los requerimientos. Los niveles inferiores están constituidos por detalles técnicos y características específicas que son familiares al personal técnico, quien frecuentemente es el encargado de la implementación del producto a adquirir.

Cada nodo del árbol debe ser descompuesto en un subárbol siempre y cuando esta descomposición contribuya a facilitar la asignación de pesos relativos y a cuantificar el beneficio que la característica representada por el nodo aporta, dado que generalmente es más fácil y exacto evaluar algo uniendo subcomponentes que evaluando el todo. También es conveniente subdividir los nodos para facilitar el cómputo de costos.

En resumen, el propósito principal de subdividir un nodo es hacer que el cómputo de costos y la cuantificación del beneficio (por medio de la asignación de un puntaje) sea más fácil y exacta. En la medida en que los parámetros de evaluación se vuelvan más específicos, el cálculo de costos y puntajes es más específico, más fácil de definir y tan objetivo como sea posible.

Luego, a cada nodo del árbol se le hace corresponder una terna que aquí será representada por tres letras mayúsculas, las cuales corresponden a lo siguiente:

- La primera posición indica la importancia del nodo dentro del árbol. Los valores que puede tener son: R, que significa se trata de una característica requerida, esencial; D, que corresponde a una característica deseable; y O, que corresponde a una característica opcional.
- La segunda posición indica si se trata o no de una característica a la que pueda asignársele un puntaje. Si es posible se pondrá la letra P. En caso contrario se omite.
- La tercera posición indica si la característica tiene un costo. En caso afirmativo se utilizará la letra C, y en caso contrario se omite.

Para ilustrar lo anterior, utilizaremos como ejemplo la compra de una impresora central para una organización que maneja un alto volumen de impresiones. La característica “impresión en papel de cualquier tamaño” puede ser requerida. Se puede considerar deseable la característica “impresión en todos los colores” y sólo requerir “impresión en blanco y negro más un color”. La característica “servicio del proveedor las 24 horas” puede ser opcional.

Debe notarse que no a todas las características les corresponde un punteo. Por ejemplo, puede ser que sea necesario contratar un programador u operador para utilizar la impresora del ejemplo anterior. Esto tiene un costo que puede variar dependiendo del equipo que se adquiera, y por tanto debe considerarse dentro del árbol. Sin embargo, no puede otorgársele un punteo a cada opción de compra, ya que obviamente la contratación de esta persona no viene incluida dentro de la compra del equipo.

También es importante notar que no todas las características tienen un costo. Algunos proveedores ofrecen opciones adicionales sin costo al comprar los componentes principales. En estos casos el nodo correspondiente debe considerarse dentro del árbol, ya que el punteo que se le asigne a estas características sin costo puede variar dependiendo de la opción que se evalúe.

Una vez desarrollado el árbol éste podrá ser dividido en dos: un árbol de características a evaluar por medio de la atribución de punteos (éste incluye todos aquellos nodos marcados con la letra P) y un árbol de costos el cual incluye los nodos marcados con C.

Al árbol de características a cuantificar otorgando punteos deberá asignársele un punteo a cada una de sus hojas. Esto es lo que se tratará en la siguiente sección.

Antes de concluir debe notarse que el conjunto definido por las distintas opciones a evaluar, junto con el apego que tienen a las necesidades planteadas por la organización (lo que incluye costos y beneficios), constituyen un conjunto difuso. La función de pertenencia está dada por: “la opción  $x$  tiene un grado de apego  $y$  a las necesidades de la organización”. El grado de apego  $y$  es lo que se busca determinar con la mayor exactitud posible.

## C. Formulación de calificaciones elementales

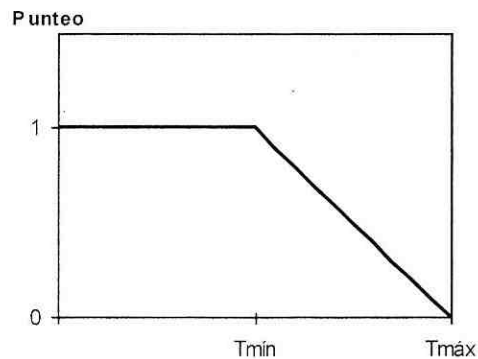
A continuación debe asignarse un punteo o calificación a cada uno de los nodos hoja del árbol. Esta calificación será un mapeo entre los distintos valores que puede tener el parámetro que se está evaluando y el intervalo  $[0,1]$ . Lo anterior define un conjunto difuso ya que la calificación expresa el grado de apego que la característica evaluada tiene con respecto a los criterios formulados por el evaluador. En otras palabras, el punteo asignado expresa el grado de satisfacción que el evaluador percibe en relación a la característica. El mapeo que asigna las calificaciones constituye la función de pertenencia del conjunto difuso.

Como se mencionaba anteriormente (sección 3.3.), existe variedad de maneras de formular estas calificaciones elementales, es decir varias formas de definir funciones de pertenencia. Sin embargo, la mayoría de ellas entran dentro de los siguientes dos grupos:

- Funciones que expresan una medición de la característica evaluada (Tipo I), y
- Funciones que mezclan una medición con comparaciones relativas a una escala predeterminada (Tipo II).

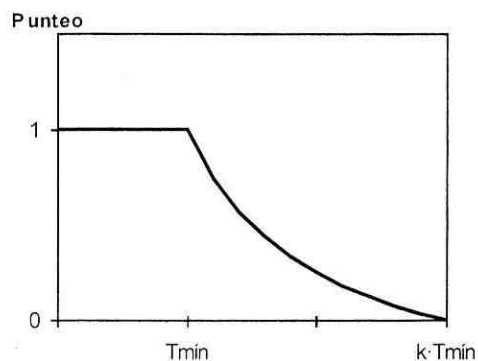
Como ejemplo de función de Tipo I se muestra en la gráfica 7.1, una función que permite evaluar el tiempo promedio de respuesta de la impresora evaluada. Se define un tiempo mínimo y uno máximo aceptable y se efectúa la interpolación lineal entre ambos. El tiempo mínimo se define como el tiempo de respuesta que es tan adecuado como cualquier otro valor más bajo de la característica evaluada. Esta función es de Tipo I porque mide la característica evaluada de manera independiente y absoluta para cada opción. No es una manera de medir que sea relativa a las opciones evaluadas.

**Gráfica 7.1**



Para ilustrar las funciones de Tipo II, puede verse en la gráfica 7.2 que aquí se ha tomado como mínimo el tiempo mínimo de todas las impresoras evaluadas. El tiempo máximo está basado también en este tiempo mínimo y los valores intermedios también dependen de él. Este tiempo mínimo no es absoluto, sino que es relativo a los productos evaluados. Sí es una escala objetiva y bien definida pero es relativa a las opciones en consideración. Es por ello que es una función de Tipo II.

**Gráfica 7.2**



## D. Agregación de punteos

En la definición de las funciones generalizadas de conjunción-disyunción se expuso la utilización de dichas funciones para realizar la agregación de los punteos. A continuación se ampliará acerca del mejor aprovechamiento de dichas funciones de agregación.

Como primer paso es necesario clasificar los nodos y subárboles de un árbol de requerimientos y parámetros en las siguientes tres categorías: esencial, deseable y opcional. Es común que haya subárboles que no tengan nodos en alguna de las categorías. Por ejemplo, un subárbol puede tener únicamente nodos esenciales y deseables y no tener ninguno opcional.

Los parámetros *esenciales* corresponden a facilidades que el producto evaluado *debe* poseer para satisfacer los requerimientos del subárbol. Si una característica esencial está ausente el resultado global de este método para el subárbol en cuestión será castigado tan fuertemente que, para fines prácticos, será considerado como cero.

Los parámetros *deseables* corresponden a características fuertemente deseadas, pero que no son absolutamente indispensables para satisfacer los requerimientos del subárbol. A diferencia de los parámetros esenciales, uno deseable puede faltar sin que el resultado global para el subárbol caiga a cero.

Los parámetros *opcionales* describen características no esenciales. Su presencia o ausencia tiene un impacto mínimo en el resultado global del subárbol. La inclusión de los parámetros opcionales generalmente no influye significativamente en el resultado global, pero se incluyen con el fin de tener información completa con respecto al producto evaluado.

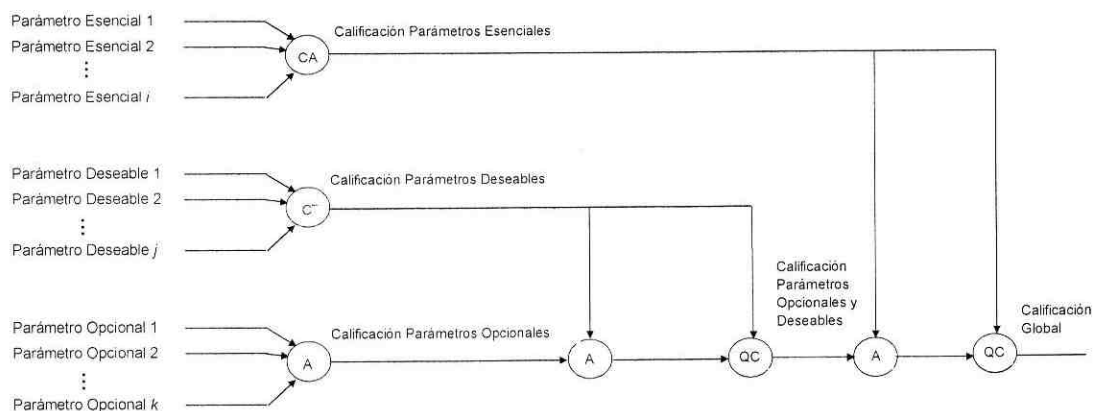
Como segundo paso es necesario agregar todos aquellos parámetros que hayan quedado dentro de la misma clasificación, es decir, agregar los parámetros esenciales entre sí, los deseables entre sí y los opcionales entre sí. Esta tarea no es complicada. Por ejemplo, para unir parámetros opcionales entre sí podemos utilizar la media aritmética; para unir parámetros deseables entre sí podemos utilizar una débil cuasiconjunción y para unir parámetros esenciales se puede utilizar una cuasiconjunción mediana o fuerte.

Como tercer paso deben agregarse los valores encontrados al efectuar el paso anterior. Esto puede hacerse por partes, primero agregando los valores de las categorías opcional y deseable, obteniendo así un resultado parcial. A este resultado parcial se le agrega después el valor obtenido en la categoría esencial.

Al agregar las categorías deseable y opcional el resultado debe estar principalmente determinado por el puntaje de la categoría deseable, siendo mínima la influencia de la categoría opcional. De manera análoga la agregación de este resultado con el puntaje de la categoría esencial debe estar principalmente determinada por la categoría esencial. Efectuando la composición de dos estructuras de agregación se obtiene la estructura final.

La gráfica 7.3 ilustra el proceso que se describió anteriormente.

**Gráfica 7.3**



Naturalmente ésta no es la única manera de efectuar la agregación de categorías esencial, deseable y opcional. Se pueden definir estructuras de agregación que se ajusten de mejor manera a un problema específico. A continuación se presenta un ejemplo numérico.

Sean los siguientes parámetros y calificaciones para una impresora central: (CC abreviará a continuación el término Cuasi-Conjunción)

Característica	Categoría	Pesos	Punteo	Operación	Punteo global
Velocidad	Esencial	0.4	80%	CA Mediana CC	81.4%
Capacidad	Esencial	0.4	90%		
Impresión a color	Esencial	0.2	70%		
Distintos tamaños de hoja	Deseable	0.3	60%	C- Débil CC	62.9%
Soporte Proveedor Local	Deseable	0.3	40%		
Soporte Casa Matriz	Deseable	0.2	80%		
Facilidad de Programación	Deseable	0.2	100%		
Conectividad	Opcional	0.2	20%	A Media Aritmética	28%
Servicio 24 horas	Opcional	0.8	30%		

Los punteos globales se obtuvieron de la siguiente manera:

- Categoría esencial: para 3 valores y mediana CC, corresponde  $r = -.73$ , según la Tabla II. Entonces, la media ponderada de potencias para estos valores se escribe:

$$E = [0.4 * (0.8)^{-.73} + 0.4 * (0.9)^{-.73} + 0.2 * (0.7)^{-.73}]^{1-.73} \approx 0.814 = 81.4\%$$

- Categoría deseable: para 4 valores y débil CC, corresponde  $r = .17$ , según la Tabla II. Entonces, la media ponderada de potencias para estos valores se escribe:

$$E = [0.3 * (0.6)^{.17} + 0.3 * (0.4)^{.17} + 0.2 * (0.8)^{.17} + 0.2 * 1]^{1.0.17} \approx 0.629 = 62.9\%$$

- Categoría opcional: en este caso se utilizó la media aritmética y, por tanto,  $r = 1$ :

$$E = [0.2 * 0.2 + 0.8 * 0.3] = 0.28 = 28\%$$

Claro está que los pesos fueron puestos con base en la importancia que se le quiso dar a cada categoría. Los mismos no son rígidos pudiéndose utilizar otros según los intereses del evaluador. Primero es necesario unir la calificación de la categoría deseable con la de la categoría opcional, por medio de la media aritmética:

$$E = 0.3 * 0.629 + 0.7 * 0.28 \approx 0.3847.$$

Este resultado se combina nuevamente con la categoría deseable: (utilizando  $n = 2$ , Débil CC,  $r = 0.26$ ):

$$E = [0.2 * (0.3847)^{0.26} + 0.8 * 0.629^{0.26}]^{1.0.26} \approx 0.573 = 57.3\%$$

Luego se agrega este resultado, vía media aritmética, con la calificación de la categoría esencial:

$$E = (0.7 * 0.573 + 0.3 * .814) \approx .6453 = 64.53\%$$

Finalmente el valor anterior es agregado nuevamente a la categoría esencial (con  $n = 2$ , Media CC,  $r = -.72$ ):

$$E = [0.2 * 0.6453^{-0.72} + 0.8 * 0.814^{-0.72}]^{1-.72} \approx 0.775 = 77.5\%$$

## E. Análisis costo-beneficio

El cálculo de costos es un cálculo directo basado en la suma de los costos de los componentes del producto evaluado. A cada una de las alternativas bajo evaluación le corresponde un costo.

El análisis costo-beneficio es un procedimiento sistemático para comparar y clasificar alternativas en base a los requerimientos definidos en el árbol de requerimientos y parámetros. Sean las alternativas comparadas denotadas por  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$ , . . . ,  $S^{(n)}$ . Como resultado del análisis de beneficios descrito anteriormente, a cada alternativa le corresponde un puntaje o calificación. Sean estos valores  $E_o^{(1)}$ ,  $E_o^{(2)}$ , . . . ,  $E_o^{(n)}$ , respectivamente. También a cada alternativa le corresponde un costo denotado por  $C_o^{(1)}$ ,  $C_o^{(2)}$ , . . . ,  $C_o^{(n)}$ , respectivamente.

El problema de clasificar  $n$  sistemas es equivalente a definir un criterio para clasificar cada pareja  $(E_o^{(i)}, C_o^{(i)})$ . Dicho de otra manera, es necesario establecer un mapeo entre cada una de estas parejas y algún indicador  $Q^{(i)}$ , que reúna ambas características, clasificando luego en base a los valores de este indicador. A continuación se analizan varias maneras de efectuar este proceso.

Se puede considerar que  $E_o$  y  $C_o$  forman un espacio de dos dimensiones. Cada pareja es un punto en este espacio. Entonces es posible definir una *región de aceptación*, en la cual si un punto cae dentro de la región la alternativa que le corresponde es considerada como aceptable.

Existen diversos criterios para definir la región de aceptación. Ésta varía según la situación. A continuación se muestran las definiciones necesarias para analizar varios casos de regiones de aceptación.

Se define  $E_o^*$  como el valor mínimo aceptable de beneficio que el producto evaluado debe ofrecer. Es decir que este valor es la calificación mínima aceptable para los productos evaluados. Frecuentemente se tiene que  $60\% \leq E_o^* \leq 80\%$ .

Se define  $C_o^*$  como el máximo costo que se puede pagar por el producto. Es decir que este valor es dictado por las limitaciones financieras de la organización.

La pareja  $(E_o^*, C_o^*)$  también corresponde a un punto en el espacio y permite definir las siguientes regiones:

(p):=Región de punteo satisfactorio ( $E_o > E_o^*$ )

(c):=Región de costo satisfactorio ( $C_o < C_o^*$ )

(r):=Región de relación costo-beneficio satisfactoria ( $E_o / C_o > E_o^* / C_o^*$ )

Combinando las regiones anteriores y eliminando las redundancias se obtienen seis posibles maneras de definir la región de aceptación R:

(1) R:=(p)

(2) R:=(c)

(3) R:=(r)

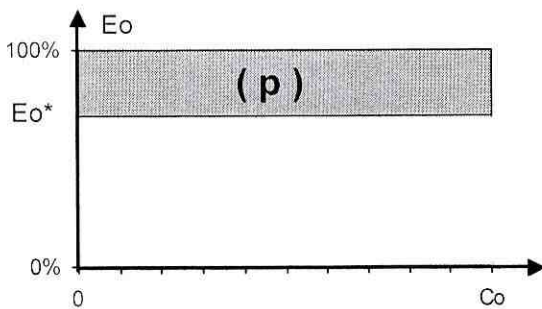
(4) R:=(p)  $\cap$  (c)

(5) R:=(p)  $\cap$  (r)

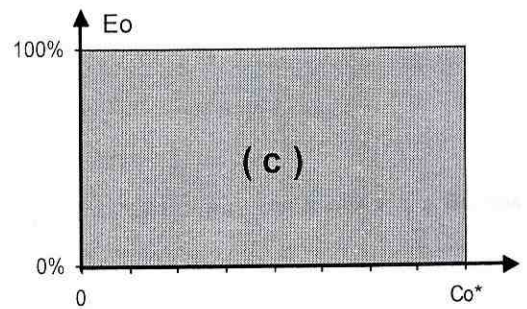
(6) R:=(c)  $\cap$  (r)

Las gráficas 7.4 a 7.9 ilustran, respectivamente, las regiones (1) a (6).

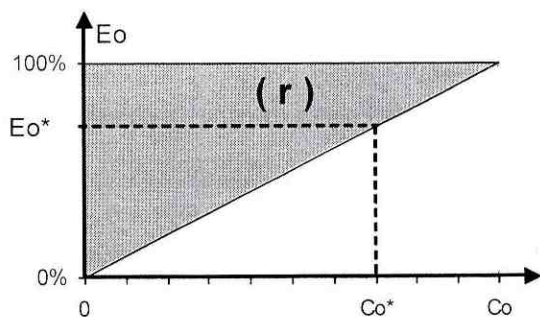
**Gráfica 7.4**



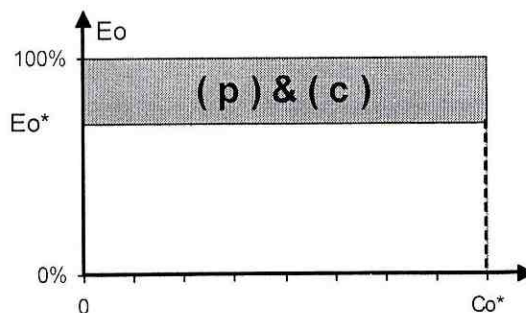
**Gráfica 7.5**



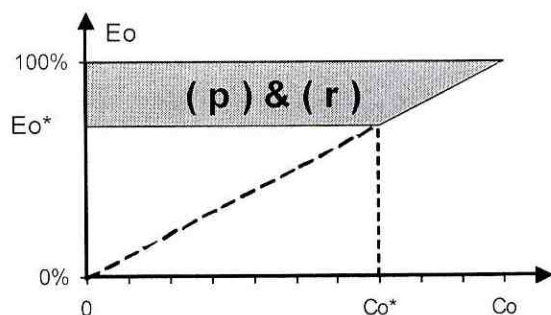
Gráfica 7.6



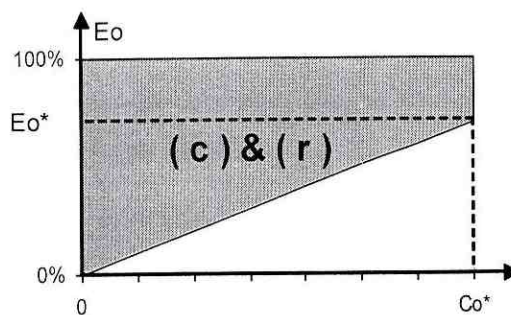
Gráfica 7.7



Gráfica 7.8



Gráfica 7.9



El evaluador debe escoger la región que más convenga a las necesidades de la organización.

Una vez escogida la región se rechazan aquellas alternativas que hayan quedado fuera de la misma. El paso final del análisis costo beneficio es la clasificación y comparación de las alternativas restantes. Es ahora que se necesita obtener el indicador  $Q^{(i)}$  definido anteriormente. Este se puede definir de las siguientes tres maneras:

1. Ordenar con base a puntajes decrecientes:  $Q^{(i)} := E_o^{(i)}$  (del mejor al más bajo puntaje)
2. Ordenar con base a costos crecientes:  $Q^{(i)} := C_o^{(i)}$  (del más barato al más caro)
3. Ordenar con base a relación costo-beneficio decreciente:  $Q^{(i)} := E_o^{(i)} / C_o^{(i)}$  (de la más alta a las más baja relación costo/beneficio)

El indicador  $Q^{(i)}$  refleja la bondad global de la alternativa  $i$ .

Para ejemplificar lo anterior se retoma la impresora vista anteriormente y que obtuvo una calificación global de 77.5 %. A ésta se le denominará impresora  $A$ . Se asume que la misma tiene un costo de \$80,000. Supóngase que otra alternativa es una impresora llamada  $B$ , con calificación global 81.2 % y costo de \$95,000. Se asume que el costo máximo que la Organización puede pagar es de \$100,000 y la satisfacción

mínima requerida es 70 %. La relación costo-beneficio para la A es  $77.5/80 = 0.96875$ , la de la B es  $81.2/95 = 0.8547$ . La mínima relación costo-beneficio aceptable es  $70/100 = 0.7$ . Ambas impresoras son válidas en todas las regiones de aceptación arriba definidas. Sin embargo, la mejor opción depende del criterio que se utilice. Retomando los criterios arriba vistos, se obtiene:

1. Mejor puntaje: primero B ( 81.2 %) y segundo A (77.5 %).
2. Mejor precio: primero A (\$80,000) y segundo B (\$95,000).
3. Mejor costo-beneficio: primero A (0.96875) y segundo B (0.8547).

El lector podrá preguntarse entonces cuál de las dos impresoras es la mejor. La única respuesta que puede darse es que la mejor opción depende de las necesidades y criterios que sean planteados por la Organización.

Este es el último paso del método. Al llegar a este punto el evaluador debe tener todas las alternativas ordenadas de la más a la menos adecuada, según los criterios que se hayan definido.

## VIII. CONCLUSIONES

- En este trabajo se ha efectuado un aporte a la teoría de los conjuntos difusos, al mostrar cómo las funciones generalizadas de conjunción-disyunción permiten efectuar agregación de conjuntos y cómo esto tiene amplia aplicación en el análisis de decisiones.
- Se ha presentado en este trabajo una metodología para efectuar el análisis, comparación y selección de alternativas en el contexto de un problema general de decisión. Pese a que se ha enfocado esta metodología al caso específico de selección de bienes informáticos, el procedimiento mostrado es muy general y aplicable en muy diversos casos.
- La presente metodología, matemáticamente fundamentada en la teoría de conjuntos difusos, posee la bondad de que permite definir y agregar apreciaciones, punteos o calificaciones de una manera sistemática y objetiva.
- El espectro de funciones de agregación, del más alto grado de conjunción al más alto grado de disyunción, le da al analista de decisiones un valioso instrumento para expresar y agregar calificaciones para la evaluación de distintas funciones y facilidades.
- Las estructuras de agregación permiten relacionar de manera lógica y ordenada parámetros interrelacionados de manera compleja, obteniendo como resultado final calificaciones parciales y finales expresadas de una manera no ambigua.
- El presente modelo constituye una poderosa herramienta para el Investigador de Operaciones que persigue tomar decisiones plenamente objetivas, obteniendo el mayor beneficio posible y un costo dentro del presupuesto asignado, lo que redundará en beneficio de las Organizaciones que lo utilizan en el mundo competitivo de la actualidad.

## IX. BIBLIOGRAFÍA

Cox, Earl. 1992. «Fuzzy Fundamentals». *IEEE spectrum*. 29 (10): 58-61.

Kaufman, Arnold y M. Gupta. 1991. *Introduction to fuzzy arithmetic*. New York, Van Nostrand Reinhold. 361 pp.

Korovkin, Pavel. 1976. *Desigualdades*. Moscú, Editorial Mir. 71 pp.

Romero, José y A. Aguilar. 1998. «Fuzzy Mathematical Programming Applied to the Capital Budgeting Problem». *Estudios en Análisis de Datos y Estadística*. (Memorias del *XI Simposio Internacional de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias*), Santa Clara, Costa Rica, J. Trejos y W. Castillo Editores Científicos: 209-214.

Su, Stanley, *et al.* 1987. «A Cost-Benefit Decision Model: Analysis, Comparison, and Selection of Data Management Systems». *ACM Transactions on Database Systems*. 12 (9): 472-520.

Zadeh, Lofti. 1965. «Fuzzy Sets». *Information and Control*. 8 (3): 338-353.

Zimmerman, Hans-Jürgen. 1988. «Modelling flexibility, vagueness and uncertainty in operations research». *Investigación operativa*. 1 (1): 7-34.

