
Modelos físicos aplicados a dinámica de opiniones: Comparación entre modelo discreto (*Voter Model*) y continuo (*Deffuant-Wiesbuch Model*) y su aplicación a grupos sociales

Dieter Loesener Ferguson



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Modelos físicos aplicados a dinámica de opiniones:
Comparación entre modelo discreto (*Voter Model*)
y continuo (*Deffuant-Wiesbuch Model*) y su
aplicación a grupos sociales**

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Dieter Loesener Ferguson
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala
2024

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades




**Modelos físicos aplicados a dinámica de opiniones:
Comparación entre modelo discreto (*Voter Model*)
y continuo (*Deffuant-Wiesbuch Model*) y su
aplicación a grupos sociales**


Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Dieter Loesener Ferguson
para optar al grado académico de Licenciado en Física

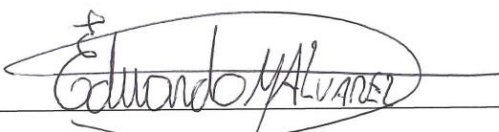
Guatemala
2024


Vo.Bo:

(f) 
Lic. Sergio López

Tribunal Examinador:

(f) 
Lic. Sergio López

(f) 
MSc. Eduardo Álvarez

(f) 
MSc. José Méndez

Fecha de aprobación: Guatemala, 2 de diciembre del 2024

La elaboración del presente trabajo de graduación fue motivada por la curiosidad y la pasión por la física. Estos temas fueron enseñados e impulsados hacia mi persona por mi asesor y profesor, el Lic. Sergio López, quien me introdujo en el área de la Mecánica Estadística, el Modelo de Ising y la Física Computacional. El poderoso concepto de ver el todo como la suma de pequeños grupos me fascinó, ya que observar el mundo como una sumatoria de posibles estados y probabilidades abre la puerta a un mundo de posibilidades. Estos temas me llenaron de intriga, en gran parte por los laboratorios con el Lic. López, quien me apoyo y me instruyó en el área.

El propósito en este trabajo es mostrar la versatilidad de la física mediante un estudio interdisciplinario, y además, ilustrar cómo la física está involucrada en situaciones cotidianas del ser humano, como la toma de decisiones grupales o el debate.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. primero, se presentan las secciones introductorias al tema. En el capítulo IV, se encuentra el Marco Teórico, que resume los temas básicos de la Termodinámica, la Teoría de Mecánica Estadística y el Modelo de Ising, para luego presentar la conexión con la Sociología y los modelo de Dinámica de Opinión, incluyendo el *Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model*. El capítulo V describe los trabajos previos que inspiraron esta investigación. Luego, en el capítulo VI, se aborda la aplicación del Modelo de Ising en la dinámica de opinión y su relación con aspectos sociales a modo de introducción.

EL capítulo VI, sigue se explican ambos algoritmos (*Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model*), detallando su funcionamiento y eficiencia. En el capítulo VII se realiza la implementación de ambos modelos, describiendo las simulaciones en detalle y presentando los resultados que caracterizan cada modelo. Finalmente, se presenta una discusión de los resultados y su relación con el modelo de Ising, concluyendo con recomendaciones para futuras investigaciones en este campo.

Por la realización de este trabajo, primero agradecer a Dios por la fortaleza y el acompañamiento que me ha dado durante estos 5 años de estudio, más durante este último año al realizar mi trabajo de graduación.

Quisiera agradecer a la Universidad del Valle de Guatemala por brindarme una educación de alta calidad, herramientas y experiencias durante toda mi carrera. Agradezco al departamento de Física por mantener en alto mis expectativas, mi motivación y mi pasión por la ciencia y la física a lo largo de mi formación, con la posibilidad de aprender de mis docentes como un profesional y persona excepcional.

Agradezco a mi asesor y amigo el Lic. Sergio López por su tiempo y sabiduría, por brindarme apoyo en los tiempos difíciles en este trabajo. De igual manera a mi director MSc. Eduardo Ál-

varez por sus consejos, sabiduría y apoyo a lo largo de mi licenciatura, al brindarme las mejores oportunidades y atención como estudiante y futuro colega.

Dar las gracias a mis padres y mi familia por ser quienes han confiado en mi, apoyándome desde el primer año de mi carrera, mostrando su amor incondicional todo el tiempo al estar a mi lado en este viaje. Gracias por siempre apoyar mis sueños y motivarme a terminar lo que empiezo y a hacerlo bien, por enseñarme a siempre dar lo mejor de mi como persona y como profesional, siendo dedicado.

También quiero agradecerme a mi persona por nunca rendirme, luchar por mis sueños y perseguirlos sin importar el costo, mostrándome lo capaz que soy y por confiar en mis habilidades y conocimientos. A mis amigos y compañeros de universidad quienes me acompañaron en este viaje y han dejado huella en mi, siempre ayudándome e impulsándome a mejorar. Por último darle las gracias a mi pareja, Lucía, quien me apoyó en este tiempo, acompañándome durante largas noches de trabajo, mostrándome su amor y apoyo incondicional, además de un genuino interés en mis metas y sueños.

Darle las gracias a todas las personas especiales en mi vida que me han apoyado y han creído en mi. Gracias por estar, sin ustedes no habría llegado a donde me encuentro.

Prefacio	IV
Lista de figuras	VIII
Lista de cuadros	VIII
Resumen	IX
I. Introducción	1
II. Objetivos	3
A. Objetivos generales	3
B. Objetivos específicos	3
C. Objetivos institucionales	3
III. Justificación	5
IV. Marco teórico	6
A. Introducción a la Mecánica Estadística	6
1. Termodinámica	6
2. Ensembles	12
3. Conceptos estadísticos	20
B. Modelo de Ising	24
1. Contexto histórico	24
2. Desarrollo teórico del modelo	24
3. Dimensionalidad del modelo	28
4. Simulaciones	31
C. Sociología	33
1. Sociedad	34
2. Interacciones sociales	35
D. Dinámica de grupo	35
1. Grupos sociales	36
2. La opinión y su dinámica	36
3. Variables de la opinión	37
4. Sociofísica	38
E. Modelos de dinámica de opinión	38
1. Modelos discretos	39

2. Modelos continuos	39
3. Modelos más famosos	40
F. <i>Voter Model</i>	41
1. Definición e interacciones	41
2. Aplicaciones	42
G. <i>Deffuant-Weisbuch Model</i>	42
1. Definición e interacciones	42
2. Aplicaciones	43
V. Antecedentes	44
VI. Aplicación del Modelo de Ising: dinámica de opinión	45
A. Modelo de dinámica de opinión discreto: <i>Voter Model</i>	46
1. Algoritmo	46
2. Eficiencia	47
B. Modelo de dinámica de opinión continuo: <i>Deffuant-Weisbuch Model</i>	50
1. Algoritmo	50
2. Eficiencia	51
VII. Implementación de los modelos	55
A. <i>Voter Model</i>	55
1. Simulación	55
2. Resultados	57
B. <i>Deffuant-Weisbuch Model</i>	57
1. Simulación	57
2. Resultados	59
VIII. Discusión de resultados	63
IX. Conclusiones	67
X. Recomendaciones	68
XI. Referencias	69
XII. Anexos	71
A. Especificaciones de hardware y software	71
B. Archivos adjuntos	71
1. <i>Voter Model</i>	71
2. <i>Deffuant-Weisbuch Model</i>	72
C. Listado de símbolos	72

Lista de figuras

IV.1. Movimiento de partículas en un volumen cerrado	11
IV.2. Reservorio a temperatura T conectado a un sistema	13
IV.3. Distribución de Boltzmann.	14
IV.4. Diagrama de fase de un fluido. Diagrama PT.	24
VI.1. Simulación teórica de Magnetización (T) en función de la temperatura (K°)	45
VI.2. Diagrama de Flujo algoritmo de <i>Voter Model</i>	47
VI.3. Tiempo contra interacciones	48
VI.4. Tiempo por proporción inicial de la minoría	49
VI.5. Interacciones por proporción inicial de la minoría	49
VI.6. Diagrama de Flujo algoritmo de <i>Deffuant-Wiessbuch Model</i>	50
VI.7. Tiempo contra interacciones	51
VI.8. Tiempo promedio contra cantidad de individuos	52
VI.9. Tiempo promedio contra cantidad de individuos por tipo de consenso	52
VI.10. Tiempos por cada umbral de tolerancia	53
VI.11. Interacciones por cada umbral de tolerancia	54
VII.1. Estados iniciales base 1 corrida 4	56
VII.2. Estados finales base 1 corrida 4	56
VII.3. Estados iniciales base 1 corrida 0	56
VII.4. Estados finales base 1 corrida 0	56
VII.5. Porcentaje convencido en función del porcentaje inicial de la minoría	57
VII.6. Estado inicial $d = 0.9, \mu = 0.5$	58
VII.7. Estado final $d = 0.9, \mu = 0.5$	58
VII.8. Estado inicial $d = 0.9, \mu = 0.1$	59
VII.9. Estado final $d = 0.9, \mu = 0.1$	59
VII.10. Parámetro de convergencia por cada umbral de tolerancia	59
VII.11. Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.1$	60
VII.12. Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.3$	60
VII.13. Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.5$	60
VII.14. Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.1$	61
VII.15. Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.3$	61
VII.16. Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.5$	62
VII.17. Tipos de consenso por cada parámetro de convergencia	62
VII.18. Frecuencia del resultado de consenso en función de la cantidad de individuos	62
VIII.1. Porcentaje de población consiguiendo el consenso en función del tamaño de la minoría	64
VIII.2. Gráficas de convergencia temporal	65

Lista de cuadros

VI.1. Tiempo e interacciones promedio 48

El desarrollo de la física moderna en años recientes ha permitido la implementación de modelos físicos para abordar problemáticas de diversas disciplinas. Uno de los modelos mecánico-estadísticos más famosos es el modelo de Ising, ampliamente utilizado en estudios interdisciplinarios en área como las ciencias sociales, genético, biología, economía y lingüística, entre otras. Unas de las principales aplicaciones en en la sociología, específicamente en la dinámica de opinión de grupos sociales, donde se utiliza como base para diversos modelos que predicen el comportamiento de un grupo al tomar decisiones colectivas.

Este trabajo contribuyó al entendimiento de la aplicación del modelo de Ising mediante el uso de conocimientos en mecánica estadística, investigación bibliográfica, programación y simulaciones adquiridos durante la licenciatura. Se desarrollaron dos códigos en Python: el primero, para validar el modelo discreto *Voter Model*, y el segundo, para validar el modelo continuo *Deffuant-Weisbuch Model*, se analizó cada modelo para identificar las situaciones sociales en las que mejor se adapta.

Estos modelos se aplicaron para estudiar el comportamiento de una población al tomar decisiones amplias y binarias, y verificar si se alcanzó un consenso. Los resultados de este trabajo demostraron cómo el modelo de Ising puede aplicarse a situaciones sociales cotidianas, mostrando que los modelos físicos son herramientas versátiles y útiles en diversos contextos. Asimismo, se ilustró la importancia de la física computacional y las simulaciones en la predicción del comportamiento de sistemas complejos.

La mecánica estadística es una rama de la física enfocada en el estudio de sistemas físicos complejos con un gran número de partículas. En lugar de abordar cada partícula individualmente, la mecánica estadística se centra en el comportamiento colectivo de estas, utilizando herramientas estadísticas y probabilísticas para describir fenómenos a nivel macroscópico, basándose en propiedades microscópicas. Este enfoque es esencial para comprender una amplia variedad de sistemas, desde gases y líquidos hasta materiales sólidos y otros que, a primera vista, podrían parecer externos a la física.

Dentro del marco teórico de la mecánica estadística existen muchos modelos para analizar el comportamiento de las partículas. Uno de los fenómenos característicos que se estudian en este campo es la magnetización, y uno de los modelos que la explica es el modelo de Ising. Propuesto por el físico Ernst Ising, este modelo, aunque sencillo, es sumamente poderoso para el estudio de transición de fase y comportamientos magnéticos en materiales ferromagnéticos. Describe un conjunto de espines (momentos magnéticos) dispuestos en una red, donde cada espín puede tener dos estados posibles: hacia arriba o hacia abajo. A través de interacciones entre espines vecinos y un campo magnético externo, el modelo de Ising proporciona una descripción del fenómeno de magnetización y de la transición de fase orden-desorden en sistemas magnéticos, así como en otros campos de aplicación.

A partir del siglo XX, los modelos mecánico-estadísticos comenzaron a aplicarse en diversas áreas de estudio. El modelo de Ising se ha convertido en el cimiento de modelos que buscan explicar sistemas complejos en genética, biología, sociología, entre otros. En el ámbito sociológico, el modelo de Ising sirve como base para desarrollar modelos de dinámica de opinión, que exploran la convergencia de decisiones en un grupo social mediante interacciones entre individuos o entre un individuo y su entorno. Existen modelos de dinámica de opinión tanto discretos como continuos, cada uno de los cuales aborda diferentes escenarios complejos.

El *Voter Model*, un modelo discreto, emplea la interacción entre individuos para analizar la opinión de un grupo social, generando simulaciones y gráficos de la evolución temporal de la decisión grupal. Por otro lado, el modelo continuo *Deffuant-Weisbuch Model* estudia la influencia de las interacciones entre individuos y el impacto de la publicidad en la opinión pública, observando la evolución temporal y la variación de decisiones en un grupo. Estos modelos permiten analizar diversas situaciones y explorar cómo distintos contextos afectan la dinámica de opinión en grupos sociales.

Este trabajo tiene como objetivo realizar una comparación entre ambos modelos, mostrando en qué contextos cada uno es más efectivo. Se espera obtener dos simulaciones y varias gráficas de

evolución de la opinión, utilizando dos bases de datos (escenarios) diferentes. Esto permitirá evaluar la aplicabilidad del modelo de Ising en una problemática social, uniendo dos áreas de estudio para abordar un problema interdisciplinario de alta complejidad.

A. Objetivos generales

Utilizar el modelo de Ising como base para comparar un modelo discreto y un modelo continuo sobre la dinámica de opinión para explicar decisiones sociales.

B. Objetivos específicos

- Validar el modelo *Voter Model* por medio de un programa en Python, que sea capaz de dar solución a problemas de grupos sociales, basados en dinámica de opinión.
- Validar el modelo *Deffuant-Weisbuch Model* por medio de un programa en Python, que sea capaz de dar solución a problemas de grupos sociales, basados en dinámica de opinión.
- Analizar la interacción social y la influencia externa en la opinión de un grupo de individuos, a través de los resultados de la implementación de los modelos *Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model*, para estudiar el efecto de estas variables en la toma de decisiones de un grupo social.
- Utilizar algunas de las situaciones más comunes en la toma de decisiones de un grupo social, para identificar a cuales de estas se adaptan mejor los modelos *Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model*.

C. Objetivos institucionales

- Proporcionar a la Universidad del Valle de Guatemala un campo de investigación en sociofísica, para así generar un enlace interdisciplinario entre el Departamento de Física y la Facultad de Ciencias Sociales.
- Aportar conocimiento científico significativo a la Universidad del Valle de Guatemala y a la Academia Guatemalteca en el campo de la sociofísica, por medio de los resultados obtenidos en la investigación.

- Contribuir a la Universidad del Valle de Guatemala y sus centros de investigación del área social, por medio de un modelo para estudiar las decisiones de una sociedad.

Las sociedades actuales son extremadamente complejas, y comprender su evolución es esencial. La toma de decisiones es una característica inherente del ser humano, y el estudio de cómo esta decisión se ve influenciada es un tema fascinante, más allá del valor social que se le asigna. La sociofísica, en este siglo, ha desarrollado una variedad de modelos físicos y matemáticos que permiten cuantificar y caracterizar las decisiones, utilizando enfoques interdisciplinarios en colaboración con la sociología. Los modelos que predicen el comportamiento de la sociedad en función de sus decisiones son indispensables para entender la dinámica de opinión social que define los consensos y desacuerdos en grandes grupos de personas.

Entre estos modelos, el *Voter Model* y el *Deffuant-Weisbuch Model* destacan por su aplicación en situaciones cotidianas del ser humano, como la toma de decisiones individuales o colectivas, responder una encuesta o, en escenarios más complejos, como la predicción de elecciones presidenciales. La comparación de estos modelos permite observar la amplia gama de escenarios en los que cada uno es útil, así como identificar los contextos específicos en los que cada modelo se adapta mejor. Esto ayudará a establecer una base para realizar predicciones precisas en situaciones específicas de toma de decisiones. A menudo, los estudios teóricos limitan el análisis de estos modelos, sin una validación experimental exhaustiva (Deffuant, Neau, Amblard, y Weisbuch, 2000) (Yang, 2023). Sin embargo, investigaciones recientes han abordado casos reales, demostrando que los modelos son aplicables en contextos prácticos (Carpentras, Maher, O'Reilly, y Quayle, 2022). Comparar un modelo discreto y uno continuo a través de situaciones reales permitirá validar la efectividad de cada uno.

En Guatemala, esta investigación puede beneficiar los estudios poblacionales, particularmente aquellos realizados en el interior del país para comprender costumbres, cultura y patrones de decisión en diversas poblaciones. En el ámbito político, también será útil para realizar predicciones en elecciones presidenciales. Este trabajo abre las puertas a nuevas áreas de innovación y estudios en un país con una gran riqueza social y cultural, brindando herramientas para implementar modelos capaces de describir y analizar el comportamiento social de manera efectiva.

A. Introducción a la Mecánica Estadística

1. Termodinámica

La termodinámica se define como el estudio de las transformaciones de energía a nivel macroscópico donde interviene calor, trabajo mecánico y otras formas de energía. La termodinámica es aquella rama de la física clásica, que da explicación a fenómenos naturales relacionados a la liberación y extracción de energía de diferentes formas, tales como motores de combustión interna, refrigeradores, procesos bioquímicos, la estructura interna de las estrellas y el movimiento de las partículas en gases. (H. D. Young y Freedman, 2013)

Además la termodinámica estudia las propiedades térmicas de macro sistemas, por lo general se enfoca en el equilibrio térmico de los sistemas. De esta manera es posible conseguir magnitudes como energía, entropía, volumen, temperatura, masa, densidad y entre otras. La termodinámica se compone por 3 leyes, que son axiomas matemáticos que definen modelos matemáticos acerca de fenómenos relacionados a las transferencias de energía. (Blundell y Blundell, 2006) (Huang, 1987)

En los siglos XIX y XX con las teorías atómicas y moleculares se abrió la puerta al estudio de los sistemas microscópicos y la termodinámica, que en ese entonces era una teoría macroscópica, no se quedaría atrás. El punto de vista de la Termodinámica estadística es el complemento de la termodinámica clásica. La termodinámica estudia entonces el comportamiento de cantidades macroscópicas que se interpretan como promedios de cantidades microscópicas. Los sistemas termodinámicos están compuestos por un gran número de partículas interactuantes entre si. La termodinámica se define como una teoría fenomenológica de la materia formada a partir de lo que pasa a niveles microscópicos. (Ponciano, 2021) (Huang, 1987)

Constante de Boltzmann

Dentro de la teoría molecular con frecuencia se encuentra el siguiente término, la proporción R/N_A , donde R es la constante de los gases ideales y N_A es el número de Avogadro. A esta proporción

es a la que se le conoce como la constante de Boltzmann por cada molécula.

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314 \text{ J/molK}}{6.022 \times 10^{23} / \text{mol}} = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (\text{IV.1})$$

Esto indica que se puede considerar la constante de Boltzmann k como una constante de los gases “por molécula”, en vez de R que es “por mol” como normalmente se usa. Como se verá más adelante, la constante de Boltzmann interviene en el movimiento de las partículas en un gas ideal, jugando un rol importante en la energía promedio de las partículas. (H. D. Young y Freedman, 2013) (Tong, 2012)

Nota: Comunmente en la literatura la constante de Boltzmann se encuentra como k o k_B . De este punto en adelante se utilizará la segunda forma de escritura.

Ecuaciones de estado

Kerson y Huang indican que una ecuación de estado es una relación funcional entre parámetros termodinámicos sobre un sistema en equilibrio. Por lo general, los parámetros son presión, volumen y temperatura $f(P, V, T)$. Otra definición indica que una ecuación de estado es una función matemática que relaciona variables termodinámicas de un sistema en equilibrio. (Zemansky y Dittman, 1997)

El gas ideal posee una ecuación de estado bien conocida y estudiada que relaciona 3 variables termodinámicas $f(P, V, T)$. Sabiendo las siguientes relaciones:

- Ley de Avogadro: $V \propto n$
- Ley de Boyle: $V \propto 1/p$
- Ley de Gay-Lussac: $V \propto T$

Para un gas ideal entonces se obtiene al combinar las 3 relaciones la ecuación de estado para un gas ideal:

$$pV = RnT \quad (\text{IV.2})$$

Donde R es la constante de proporcionalidad de gas ideal. (H. D. Young y Freedman, 2013)

- Temperatura: la temperatura es la relación que existe entre la presión P y el volumen V . Además es una propiedad intensiva de un sistema termodinámico ya que no depende de la cantidad de material. La ecuación de temperatura proviene de [IV.2](#)

$$T = \frac{pV}{nR} \quad (\text{IV.3})$$

Donde el número de partículas n y la constante de los gases ideales R , son valores fijos. Además el cambio infinitesimal de un estado de equilibrio a otro, una variación de variable de estado es definida en el cambio de las otras variables de estado.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV \quad (\text{IV.4})$$

(Zemansky y Dittman, 1997)

- Presión: la presión es definida como la fuerza perpendicular sobre unidad de área, donde un fluido comúnmente, la ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido. La presión aumenta dentro de un fluido con la profundidad. La presión se expresa en términos de atmósferas (atm), que es decir la presión media que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar. Sin embargo la unidad del SI es el Pascal (Pa) que equivale a un Newton por unidad de área. Cuando se habla de gases ideales es la relación que existe entre el volumen y la temperatura. La ecuación de presión proviene de [IV.2](#) [\(H. D. Young y Freedman, 2013\)](#):

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (\text{IV.5})$$

Donde el número de partículas n y la constante de los gases ideales R , son valores fijos. Además el cambio infinitesimal de un estado de equilibrio a otro, una variación de variable de estado es definida en el cambio de las otras variables de estado.

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV \quad (\text{IV.6})$$

[\(Zemansky y Dittman, 1997\)](#)

- Volumen: el volumen es conocido como la extensión de un cuerpo en las 3 dimensiones espaciales. En termodinámica se asocia el volumen a la relación que existe entre la presión y la temperatura. Además, se relaciona directamente con la masa e inversamente con la densidad de los objetos. La ecuación del volumen proviene de [IV.2](#) [\(H. D. Young y Freedman, 2013\)](#):

$$V = \frac{nRT}{P} \quad (\text{IV.7})$$

Donde el número de partículas n y la constante de los gases ideales R , son valores fijos. Además el cambio infinitesimal de un estado de equilibrio a otro, una variación de variable de estado es definida en el cambio de las otras variables de estado.

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \quad (\text{IV.8})$$

[\(Zemansky y Dittman, 1997\)](#)

- Entropía: la entropía es una medida cuantitativa del desorden. Considere una expansión isotérmica infinitesimal de un gas ideal. Se agrega calor dQ y el gas se expande apenas lo suficiente para mantener constante la temperatura. Puesto que la energía interna de un gas ideal solo depende de su temperatura, la energía interna también es constante; por lo que, por la primera ley de la termodinámica, el trabajo dW efectuado por el gas es igual al calor agregado dQ .

$$dQ = dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV \rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dQ}{nRT} \quad (\text{IV.9})$$

El gas está más desordenado después de la expansión, porque las moléculas se mueven en un mayor volumen y son más aleatorias en su posición. Por lo tanto el cambio fraccionario de volumen dV/V es una medida de aumento del desorden y se introduce el símbolo S para entropía del sistema. Al ser un cambio infinitesimal reversible se escribe de la siguiente manera:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{IV.10})$$

La entropía tiene unidades de energía dividida entre unidades de temperatura. En el SI es J/K. Esta relación muestra como la temperatura aumenta al desorden en el movimiento de las partículas. [\(H. D. Young y Freedman, 2013\)](#)

- Energía interna de un gas: la energía interna se asocia comúnmente al cambio de estado de los materiales. En termodinámica la energía interna de un sistema es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas, más la suma de todas las energías potenciales de interacción entre ellas. Es de notar que la energía potencial no se incluye debido a que la interacción del sistema y su entorno, es cerrado. Se utiliza el símbolo U para denotar esta energía. Se piensa un gas contenido en un volumen, si a este sistema se le aplica calor y se expande realizando trabajo contra su entorno. Entonces la energía interna de un gas se relaciona con el calor y el trabajo (H. D. Young y Freedman, 2013):

$$\Delta U = Q - W \quad (\text{IV.11})$$

Donde Q es calor y W es trabajo que puede ser realizado por el sistema o recibido. Vale la pena indicar que $W = -pdV$.

En un sistema hidrostático cuando existen cambios infinitesimales en el sistema se utiliza la forma diferencial llegando a su ecuación de estado. Tomando en cuenta de que variables depende la función, se trabaja la energía interna. Usando las variables de estado P , V o T . Por ejemplo si la energía interna está dada en función de T y V :

$$dU(T, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (\text{IV.12})$$

Esto puede variar dependiendo que par de variables de estado se utilicen. (Zemansky y Dittman, 1997)

- Capacidad calorífica: algo que siempre importa es entender a gran detalle como agregar calor puede cambiar la energía interna de un gas. En general la energía interna es una función en términos de la temperatura y el volumen, por lo tanto se puede escribir la energía U como $U = U(T, V)$. Un pequeño cambio en la energía interna puede ser relacionado a cambios en T y V partiendo de [IV.12](#) y [IV.11](#) podemos obtener:

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad (\text{IV.13})$$

se puede dividir entre dT y obtener lo siguiente:

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \frac{dV}{dT} \quad (\text{IV.14})$$

es valido para para cualquier cambio de T y V . De cualquier forma lo que se necesita saber es cual es la cantidad de calor que se debe de agregar para tener un cambio en la temperatura bajo ciertas circunstancias. Una de las circunstancias es que el volumen debe ser constante. Además, utilizando la definición de capacidad calorífica a volumen constante:

$$C_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V \quad (\text{IV.15})$$

Entonces de la ecuación [IV.14](#) se realiza la sustitución del calor y el segundo término desaparece:

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad (\text{IV.16})$$

la capacidad calorífica es la variación de la energía respecto de la temperatura. También existe capacidad calorífica a presión constante C_p , sin embargo no es necesario en este momento. (Blundell y Blundell, 2006)

- Energía libre de Helmholtz: la energía de Helmholtz es una medida de la cantidad de energía que se debe de poner para crear un sistema, una vez que ya se ha efectuado la transferencia de energía del medio ambiente. Usualmente se relaciona a los baños calientes. También se define la energía de Helmholtz de la siguiente manera (Mandl, 1976) (Olmo y Nave, 2010):

$$F = E - TS \quad (\text{IV.17})$$

donde E es la energía interna del gas (U), T la temperatura y S es la entropía del sistema. Zemansky la define de la siguiente manera:

$$A = U - TS \quad (\text{IV.18})$$

Además cuando hay variaciones infinitesimales el cambio en la energía de Helmholtz se puede definir de la siguiente manera en términos de volumen y temperatura, conocida como una de las relaciones de Maxwell.

$$dF = -SdT - PdV \quad (\text{IV.19})$$

Teoría cinética de gases

En la mecánica estadística el sistema que más se estudia es el del gas ideal de átomos. Un gas ideal es aquel cuyos componentes, átomos o moléculas se mueven como partículas libres entre colisiones elásticas, ya sea entre ellas mismas o con sus alrededores. En una primera aproximación a estas partículas se desprecia el movimiento rotacional y vibracional. La teoría cinética de gases empezó a ser desarrollada en el siglo XVIII por Bernoulli, con el objetivo de describir propiedades macroscópicas a partir de la dinámica microscópica de sus partículas. (Ponciano, 2021). Además se define la teoría cinética de gases como aquella teoría que trata de determinar las propiedades de los gases, considerando distribuciones de probabilidad asociadas al movimiento individual de cada partícula constituyente del gas (Blundell y Blundell, 2006).

Considérese un gas ideal de N partículas de misma masa M ocupando un recipiente de volumen V tal que: $V = L_x \times L_y \times L_z$. Las densidades de número y masa del gas de partículas son respectivamente $\nu = N/V$ y $\rho = NM/V$. La fuerza promedio que el gas ejerce sobre las paredes del recipiente, se piensa en el eje x para empezar, donde la fuerza es perpendicular. La velocidad de una partícula al chocar contra una pared cambia solamente su dirección (v_{ix}'), no su magnitud:

$$v_{ix}' = -v_{ix} \quad (\text{IV.20})$$

Cuando sucede la colisión la partícula transfiere su impulso a la pared, sabiendo que impulso es el cambio del momento $J = \Delta p$ entonces

$$J_{ix} = 2Mv_{ix} \quad (\text{IV.21})$$

Una partícula individual se encuentra a una distancia Δx de la pared. La partícula alcanza la pared en un tiempo Δt . La partícula entonces se encontrará a una distancia máxima de $\Delta x_i = v_{ix} \Delta t$ donde se mueve a velocidad constante.

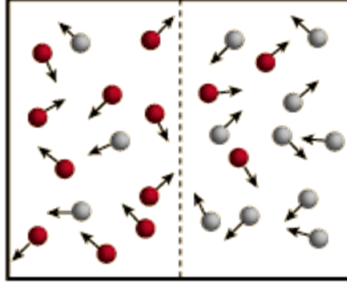


Figura IV.1: Movimiento de partículas en un volumen cerrado
Fuente: C.R. Nave, 2010

En [IV.1](#) se muestra un volumen V completo. Nótese la línea punteada que puede separar a la mitad el volumen. Tomando la mitad izquierda ΔV su volumen se define como

$$\Delta V = A\Delta x_i \quad (\text{IV.22})$$

con área $A = L_y \times L_z$. La probabilidad que la partícula se encuentre en el volumen de la izquierda ΔV es:

$$P(\Delta V) = A\Delta x_i/V \quad (\text{IV.23})$$

Tomando en cuenta que la partícula se puede acercar o alejar de la pared, la probabilidad de chocar contra la pared en el intervalo de tiempo es la mitad, ya que puede estar en una de dos mitades y es:

$$P(\Delta V) = \frac{1}{2} \frac{A\Delta x_i}{V} = \frac{1}{2} \frac{Av_{ix}\Delta t}{V} \quad (\text{IV.24})$$

Ahora partiendo del concepto del impulso [IV.21](#) para encontrar la fuerza, según la probabilidad de estar en el volumen se tiene:

$$F_{ix} = \frac{J_{ix}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{Av_{ix}\Delta t}{V} = \frac{A}{V} Mv_{ix}^2 \quad (\text{IV.25})$$

Como este concepto de fuerza es por una sola partícula, de este modo entonces la fuerza total ejercida por todas las partículas es:

$$F_x = \sum_{i=1}^N F_{ix} = \frac{A}{V} \sum_{i=1}^N Mv_{ix}^2 = \frac{A}{V} N \langle Mv_x^2 \rangle \quad (\text{IV.26})$$

La presión sobre la pared del recipiente es la fuerza perpendicular a la pared por unidad de área:

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{N}{V} \langle Mv_x^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left\langle \frac{M}{2} v^2 \right\rangle \quad (\text{IV.27})$$

En la última expresión de [IV.27](#) se utiliza la norma de la velocidad $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, junto a otros criterios de simetría que conducen a la igualdad de la velocidad en las 3 dimensiones. La relación se puede reescribir como:

$$pV = \frac{2}{3}N \left\langle \frac{M}{2}v^2 \right\rangle \quad (\text{IV.28})$$

que establece que la presión de un gas es proporcional al promedio de la energía cinética de las partículas del gas. En un gas ideal, la temperatura absoluta T del gas es una medida de la energía cinética promedio del gas. Se define como:

$$\left\langle \frac{M}{2}v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_B T \quad (\text{IV.29})$$

La temperatura siempre es positiva $T \geq 0$, la igualdad se alcanza solamente en el caso donde las partículas estén en reposo. Si se sustituye [IV.29](#) en la expresión de la presión y el volumen [IV.28](#) se obtiene:

$$pV = Nk_B T \quad (\text{IV.30})$$

También se puede escribir la ley de los gases ideales en términos de la energía promedio del gas. Para un gas mono-atómico ideal, sin grados de libertad internos, la energía se reduce a la suma de energías cinéticas de todas las partículas. Por lo tanto sería

$$\langle E \rangle = N \left\langle \frac{M}{2}v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (\text{IV.31})$$

o equivalentemente,

$$pV = \frac{2}{3} \langle E \rangle \quad (\text{IV.32})$$

Con todo esto se indica con la demostración de la existencia de los átomos y moléculas llevó al descubrimiento de la mecánica estadística. Se comenzó tratando de describir los estados microscópicos individuales de un sistema y por medio de métodos estadísticos llegar a las propiedades macroscópicas. Además este acercamiento recibió un complemento más con la llegada de la teoría cuántica que enseña explícitamente como describir los estados cuánticos microscópicos de diferentes sistemas. El comportamiento termodinámico de un sistema es una aproximación asintótica de los resultados mecánico estadísticos en el límite termodinámico, i.e. cuando el número de partículas tiende al infinito.

De esta forma surge la mecánica estadística a partir de las relaciones termodinámicas y el estudio de los gases compuestos por infinidad de partículas. También se define la mecánica estadística como un acercamiento probabilístico al equilibrio de propiedades macroscópicas de un gran número de grados de libertad. ([Blundell y Blundell, 2006](#)) ([Kardar, 2007](#))

2. Ensembles

Como indica la sección anterior, la mecánica estadística utiliza la probabilidad para describir sistemas termodinámicos. Se repiten los experimentos para medir las propiedades de los sistemas una y otra y otra vez, esto debido a que no podemos controlar las propiedades microscópicas. En 1878 Josiah Willard Gibbs introdujo el concepto ensemble para formalizar estas mediciones. La idea es hacer una gran cantidad de “fotocopias” mentales del sistema, cada una representa cada

uno de los posibles estados en los que puede encontrarse el sistema. Existen 3 tipos de ensembles: Microcanónico, Canónico y Gran Canónico. (Blundell y Blundell, 2006)

De forma similar el ensemble se define como un conjunto de sistemas con diferentes configuraciones de sus componentes internas (microestados), pero idénticos en su descripción macroscópica. *Idénticos* significa que todos los sistemas tienen las mismas restricciones externas, simetrías y constantes de movimiento. En lugar de considerar un sistema simple durante su evolución temporal, se considera un número enorme de sistemas idénticos independientes en un tiempo determinado. La hipótesis detrás de esto es que, en equilibrio, el promedio temporal de un solo sistema es el mismo que el promedio sobre muchos sistemas independientes idénticos. (Ponciano, 2021)

La teoría habla acerca de los 3 tipos de ensembles que existen. En este trabajo se tratan a detalle el **Ensemble Canónico** y **Ensemble Gran Canónico** debido a sus utilidades en los modelos utilizados en el mismo. A continuación más detalle acerca de los ensembles a utilizar:

- **Canónico:** Un ensemble de este tipo es aquel que puede cambiar su energía con el paso del tiempo por medio de un gran reservorio de calor. Esto a su vez ayuda a determinar y a nivelar la temperatura del sistema. Considere dos sistemas unidos donde pueden intercambiar energía. Uno es mucho más grande que el otro, a este enorme sistema le llamaremos reservorio (también conocido como baño de calor). Por el otro lado el sistema pequeño será conocido como el sistema. (Blundell y Blundell, 2006) (Rief, 1965)

Un reservorio es aquel que mantiene temperaturas de equilibrio, donde la energía del sistema ahora pasa a ser despreciable, caso contrario a un ensemble microcanónico que es en función de la energía. (Ponciano, 2021)

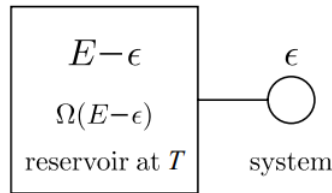


Figura IV.2: Reservorio a temperatura T conectado a un sistema
Fuente: Blundell, 2006

Primero se asume que para cada energía permitida en el sistema completo solamente hay un microestado específico, por lo tanto el valor de microestados $\Omega(E) = 1$. Entonces ahora el valor de energía del sistema más el reservorio será E . Por lo tanto la energía del reservorio debe de ser $E - \epsilon$, por lo tanto la energía del sistema es ϵ , como se muestra en la Figura IV.2. La situación de que un sistema entre en contacto térmico con un reservorio es muy importante y a esto es a lo que se le conoce como un ensemble canónico.

La probabilidad $P(\epsilon)$ de que el sistema se encuentre en el estado de energía ϵ es proporcional al número de micro-estados que son accesibles para el reservorio multiplicado por el número de micro-estados que son accesibles para el sistema mayor por lo tanto:

$$P(\epsilon) \propto \Omega(E - \epsilon) \times \Omega(\epsilon) \quad (\text{IV.33})$$

La energía del reservorio se aproxima a la energía total del sistema debido a la diferencia de tamaños. Entonces podemos hacer la siguiente afirmación $\epsilon \ll E$. Con una buena aproximación, el desarrollo del logaritmo del número de micro-estados accesibles al reservorio cuando el sistema está en un estado de energía específico ϵ_i , por medio de una expansión de Taylor es:

$$\ln \Omega(E - \epsilon_i) = \ln \Omega(E) - \frac{d \ln \Omega(E)}{dE} \epsilon_i + \dots \quad (\text{IV.34})$$

Usando la definición estadística para la temperatura cuando dos sistemas están en contacto, afectando los micro-estados, y sus energías se suman para obtener la energía de un ensamble canónico se tiene:

$$\frac{d \ln \Omega(E)}{dE} = \frac{1}{k_B T} = \beta \quad (\text{IV.35})$$

Donde k_B es la constante de Boltzmann [IV.1] T es la temperatura del reservorio y β es una constante comúnmente utilizada, siendo inversamente proporcional a la temperatura. Por lo tanto si se hace dicha sustitución en [IV.34]

$$\ln \Omega(E - \epsilon_i) = \ln \Omega(E) - \frac{1}{k_B T} \epsilon_i + \dots \quad (\text{IV.36})$$

Claramente se pueden ignorar los demás términos en la expansión de la serie de Taylor, por su irrelevancia numérica. Y si trabajamos la expresión, quitando los logaritmos naturales obtenemos que los micro-estados del sistema del reservorio:

$$\Omega(E - \epsilon_i) = \Omega(E) e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (\text{IV.37})$$

Entonces usando la ecuación [IV.33] haciendo la sustitución:

$$P(\epsilon) \propto \Omega(E) e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \times \Omega(E) \quad (\text{IV.38})$$

Recordando, se asume que para cada energía permitida en el sistema completo solamente hay un micro-estado específico permitido el valor de los microestados del sistema en realidad es 1 por lo tanto la probabilidad pasa a ser:

$$P(\epsilon) \propto e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (\text{IV.39})$$

Ahora que el sistema ya se encuentra en equilibrio con el reservorio, debe tener casi la misma temperatura del reservorio. Pero es de notar que si se cambia la temperatura T , su energía ϵ no es una constante, es gobernada por la probabilidad de distribución [IV.39] Esta es conocida como la **Distribución de Boltzmann** y como la **Distribución canónica**. La exponencial es conocida como el **Factor de Boltzmann** que muestra la cantidad de situaciones físicas posibles de encontrar en el sistema.

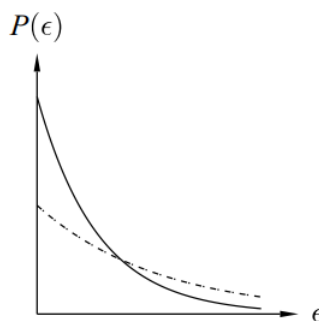


Figura IV.3: Distribución de Boltzmann.
Fuente: Blundell, 2006

La línea puntuada en la gráfica indica la relación entre la temperatura y la energía, es una temperatura más baja que la línea continua.

Ahora existe una distribución de probabilidad, que describe exactamente como un sistema pequeño se comporta al entrar en contacto con un reservorio a temperatura T . El sistema tiene una oportunidad de alcanzar cierta energía ϵ que es menor al factor β , pero la exponencial en la distribución de Boltzmann comienza a disminuir muy rápidamente la probabilidad de alcanzar una energía mucho mayor al factor β . Como sea, para cuantificar esto se necesita normalizar la distribución de probabilidad para encontrar una posible energía específica:

$$P_i = \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}} \quad (\text{IV.40})$$

Donde el denominador asegura la normalización de la probabilidad. La suma del denominador es llamada **Función partición** y es comúnmente conocida con el símbolo Z , más adelante se hablará de esta función. Esta probabilidad es importante para poder estudiar las características macroscópicas de un sistema por medio de sus propiedades microscópicas y sus estados, por ejemplo al estudiar la energía. (Blundell y Blundell, 2006) (Börner, Borchert, Loche, Daldrop, y Bonthuis, 2019)

- Gran Canónico: el ensemble canónico y microcanónico devuelven resultados muy similares, conceptualmente el emsemble canónico corresponde más a situaciones físicas. En experimentos jamás se trabajará con sistemas completamente aislados, tampoco se puede medir directamente la energía total del sistema macroscópico. Usualmente se trata de sistemas con una temperatura específica. De igual manera no tenemos un número exacto del número de partículas en un sistema macroscópico, para el cual nunca va a ser precisamente conocido ese número. Todo lo que se puede encontrar de los experimentos es el número promedio de partículas. Esto es por lo cual se introduce el **Ensemble Gran Canónico**, en donde los sistemas pueden tener cualquier número de partículas, con el número promedio determinado por medio de las condiciones externas del sistema. Es un análogo a la situación del Enesemble Canónico, donde la energía promedio de un sistema está determinada por la temperatura del calor brindado por el reservorio que está en contacto.

Función partición

La función partición como se vió con anterioridad, es el factor de normalización que aparece en la distribución de Boltzmann. Este factor Z es una de las cantidades más importantes de la Mecánica Estadística. Contiene toda la información del sistema. (Ponciano, 2021)

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (\text{IV.41})$$

También se define la función partición como la suma, sobre el factor de Boltzmann, de todos los posibles estados energéticos del sistema. La función partición es el factor de proporcionalidad entre la probabilidad $P(E_i)$ y el factor de Boltzmann IV.39 (Kittel y Kroemer, 1980) (Zgrablich, 2009)

Entropía

En 1877 Boltzmann enunció un postulado básico para un sistema aislado a partir del cual estableció un puente entre la descripción macroscópica y la descripción microscópica del sistema. Llamó a esta nueva cantidad *Entropía*, y la definió a partir del número de microestados accesibles del sistema. La entropía S de Boltzmann o entropía estadística de un sistema está dada por:

$$S = k_B \ln \Omega(E) \quad (\text{IV.42})$$

donde $\Omega(E)$ es el número de microestados entre E y $E + dE$. La constante k_B es arbitraria a priori. Gibbs generalizó esta definición y estableció que para un ensemble en general, conviene definir la entropía como:

$$S = -k \sum_{[n]} \rho[n] \ln \rho[n] \quad (\text{IV.43})$$

$\rho[n]$ se refiere a la distribución de probabilidad asociada a la probabilidad de encontrar el sistema en el estado n . Entonces en los sistemas donde se utiliza la probabilidad de distribución de Boltzmann, es decir la función partición, se vería de la siguiente manera:

$$S = -\frac{k_B}{Z} \sum_n e^{-\beta E_i} \ln \left(\frac{\beta E_i}{Z} \right) \quad (\text{IV.44})$$

La entropía se puede relacionar con los posibles estados de energía y la función partición. Por lo tanto se toma la última expresión y trabajándola se llega a relacionar:

$$S = -\frac{k_B}{Z} \sum_n e^{-\beta E_i} [-\beta E_i - \ln(Z)] = \frac{k_B}{Z} \sum_n [e^{-\beta E_i} \beta E_i + e^{-\beta E_i} \ln(z)]$$

$$S = \frac{k_B \beta}{Z} \sum_n [e^{-\beta E_i} E_i + \frac{e^{-\beta E_i} \ln(z)}{\beta}]$$

Si se mete a la sumatoria la constante β y la función partición Z :

$$S = k_B \sum_n \frac{E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{k_B T Z} + \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \ln(Z)$$

El término de la exponencial partido la función partición es la probabilidad total de todos los estados que es igual a 1. Notese que es la regla de la cadena lo que sucede entre T y logaritmo natural de Z :

$$S = -k_B \left(T * \frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} + \ln(Z) * \frac{\partial T}{\partial T} \right) = -k_B \frac{\partial}{\partial T} (T * \ln(Z)) \quad (\text{IV.45})$$

(Blundell y Blundell, 2006) (Zgrablich, 2009)

Temperatura

Uno de los problemas más comunes en la naturaleza es la interacción térmica. Cuando dos o más sistemas interactúan térmicamente llegan a un equilibrio térmico donde ciertas condiciones se deben satisfacer. Este tipo de problemáticas conduce a un resultado y definición precisa de temperatura absoluta de un sistema.

Considere dos sistemas A_1 y A_2 que son libres de intercambiar energía entre ellos, la energía transferida se conoce como calor. Puede ser también considerado un gran sistema subdividido entre

2 subsistemas más con energías respectivas E_1 y E_2 , tal que $E = E_1 + E_2$. Aplicando la condición de equiprobabilidad de estados a un sistema combinado. Cada uno de los dos subsistemas pueden estar en varios micro-estados $\Omega(E)_1$ y $\Omega(E)_2$ respectivamente. El número de micro-estados del sistema compuesto escritos en términos de un solo sistema es:

$$\Omega(E, E_1) = \Omega(E_1, E_2) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1) \quad (\text{IV.46})$$

Se usa el hecho que los subsistemas intercambian energía de tal manera que llegan al equilibrio luego de un tiempo transcurrido suficientemente largo. Durante este tiempo el sistema pasa por todos sus posibles micro-estados y gasta el mismo tiempo en cada uno.

La energía de equilibrio de cada subsistema es la que maximiza el número de micro-estados del sistema combinado. Es decir que el macro-estado con el número más grande de micro-estados es el más probable. La probabilidad $P(E_1, E - E_1)$, de ocurrencia de un estado en particular corresponde a la energía E_1 es:

$$P(E_1, E - E_1) = \frac{\Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1)}{\Omega_{Tot}(E_1)} \quad (\text{IV.47})$$

donde:

$$\Omega_{Tot}(E_1) = \sum_{E_1} \Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1) \quad (\text{IV.48})$$

Cuando el sistema alcanza el equilibrio, la energía correspondiente de cada subsistema maximiza el número de estados $\Omega_{Tot}(E_i)$. De tal manera que, usando la restricción se debe examinar la ecuación.

$$\frac{d}{dE_i}(\Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2)) = 0 \quad (\text{IV.49})$$

que se trabaja con propiedades de las derivadas:

$$\frac{d\Omega_1(E_1)}{dE_1}\Omega_2(E_2) + \Omega_1(E_1)\frac{d\Omega_2(E_2)}{dE_2}\frac{dE_2}{dE_1} = 0 \quad (\text{IV.50})$$

o bien, dado que $dE_2 = -dE_1$, se simplifica en:

$$\frac{1}{\Omega_1}\frac{d\Omega_1}{dE_1} - \frac{1}{\Omega_2}\frac{d\Omega_2}{dE_2} = 0 \quad (\text{IV.51})$$

de manera que esto implica la relación:

$$\frac{d \ln \Omega(E_1)}{dE_1} = \frac{d \ln \Omega(E_2)}{dE_2} \quad (\text{IV.52})$$

La condición anterior define la división más probable de energía entre dos sistemas que son libres de intercambiar energía. Equivalentemente, en el equilibrio, la energía maximiza a la entropía del sistema combinado. Teniendo en cuenta la restricción $E = E_1 + E_2$, la condición de equilibrio se traduce en:

$$\frac{\partial S(E, E_1)}{\partial E_1} = 0 = \frac{\partial S_1(E_1)}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial E_1} \quad (\text{IV.53})$$

Eso da la relación:

$$\frac{\partial S_1(E_1)}{\partial E_1} = -\frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2(E_2)}{\partial E_2} \quad (\text{IV.54})$$

La condición de equilibrio consiste en la derivada parcial de la entropía con respecto a la energía tome el mismo valor en los dos sistemas en contacto. La temperatura T de un sistema es la cantidad que, intuitivamente, se ha usado para establecer el equilibrio termodinámico de un sistema. A la luz de la discusión anterior sobre el estado con mayor probabilidad de ocurrencia, $\frac{\partial S}{\partial E}$ debe tener la interpretación de una función de la temperatura. En Mecánica Estadística, la temperatura se define como:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (\text{IV.55})$$

(Ponciano, 2021) (Tong, 2012)

Energía

La energía promedio de un ensemble canónico es:

$$\langle E \rangle = \sum_n P(n) E_n = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} \quad (\text{IV.56})$$

Note que $\langle E \rangle$ se puede escribir como:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (\text{IV.57})$$

Que en términos de la función partición se puede escribir de la siguiente manera:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (\text{IV.58})$$

También existe la dispersión de las energías en torno al promedio. Esta dispersión es capturada por la varianza.

$$\Delta E^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \quad (\text{IV.59})$$

Ya que se expresó la energía media en términos de la función partición. De manera similar,

$$\langle E^2 \rangle = \sum_n P(n) E_n^2 = \frac{1}{Z} \sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad (\text{IV.60})$$

En términos de la función partición, la dispersión de energía entonces se escribe como:

$$\Delta E^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \quad (\text{IV.61})$$

(Ponciano, 2021) (Börner y cols., 2019) (Pathria y Beale, 2012)

Capacidad calorífica

La capacidad calorífica de un ensemble canónico, partiendo de lo conseguido en la sección de termodinámica [IV.16](#) tenemos:

$$C_v = \left. \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right|_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \quad (\text{IV.62})$$

Se sabe por definición que $\beta = \frac{1}{k_B T}$ entonces derivando $d\beta = -\frac{1}{k_B T^2} dT$. Entonces el segundo término de la razón entre β y T tenemos:

$$C_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} * -\frac{1}{k_B T^2} \rightarrow C_v = \frac{\Delta E^2}{k_B T^2} \quad (\text{IV.63})$$

Y de esta forma la fluctuación de energía puede ser expresada como:

$$\Delta E^2 = k_B T^2 C_v \quad (\text{IV.64})$$

La capacidad calorífica C_v mide la respuesta de un sistema al cambio de temperatura. Dicho en otras palabras C_v es la capacidad que tiene un sistema particular para disipar o absorber energía. La ecuación anterior relaciona C_v a las fluctuaciones de energía de los sistemas en equilibrio. Este es un ejemplo básico del resultado general conocido como *Teorema de fluctuación/disipación*. [\(Ponciano, 2021\)](#) [\(Börner y cols., 2019\)](#) [\(Morgado, 2016\)](#)

Energía libre de Helmholtz

Partiendo de la definición termodinámica de la Energía de Helmholtz [IV.17](#) Primero hay que explorar una forma de escribir la entropía [\(Blundell y Blundell, 2006\)](#) :

$$S = \frac{E}{T} + k_B \ln(Z) \quad (\text{IV.65})$$

Entonces sustituyendo esa expresión en la expresión de la energía de Helmholtz:

$$F = E - T \left[\frac{E}{T} + k_B \ln Z \right] = E - E - k_B T \ln Z = -k_B T \ln Z \quad (\text{IV.66})$$

La cantidad correspondiente de la energía libre de Helmholtz es entonces:

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N) \quad (\text{IV.67})$$

[\(Mandl, 1976\)](#) [\(Zgrablich, 2009\)](#)

Magnetización

La magnetización es el momento magnético neto por unidad de volumen, sin embargo no es su única interpretación, también se relaciona con la temperatura. [\(Rief, 1965\)](#).

Para este trabajo se hablará más adelante de la magnetización en el Modelo de Ising. En este momento se define como magnetización promedio a (Tong, 2012):

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \log(Z)}{\partial B} \quad (\text{IV.68})$$

Otra definición matemática para la magnetización neta viene dada por:

$$\bar{M}(B, T) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln(Q_N)}{\partial B} \right)_T = - \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_T \quad (\text{IV.69})$$

Siendo $\ln(Q_N)$ el logaritmo natural de la función partición para N moléculas, A es la función de la Energía Libre de Helmholtz y B es el campo magnético que somete a los átomos. (Pathria y Beale, 2012) (Morgado, 2016) (Landau y Binder, 2015)

Susceptibilidad magnética

La Susceptibilidad Magnética es aquella que indica cuanto cambia un parámetro extensivo cuando un parámetro intensivo aumenta. Esto es, cuanto cambia la susceptibilidad en función de la temperatura y está dada por (Morgado, 2016):

$$\chi_o = \frac{1}{N} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} \quad (\text{IV.70})$$

Otra definición, sabiendo que a grandes temperaturas el aporte cuántico a la estadística es irrelevante. La Susceptibilidad Magnética es la medida de que tan sencillo es magnetizar sustancias. Esta medida se define de la siguiente forma (Tong, 2012):

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial B} \quad (\text{IV.71})$$

La susceptibilidad isotérmica se relaciona con las fluctuaciones de la magnetización influidas por el campo magnético. (Landau y Binder, 2015)

3. Conceptos estadísticos

La estadística se define como el arte y la ciencia de recolectar, analizar e interpretar datos. (Anderson, Sweeney, y Williams, 2012)

El Webster's New Collegiate Dictionary define estadística como una “rama de las matemáticas que estudia la recolección, análisis, interpretación y presentación de masas de información numérica”. Además la estadística se ocupa del diseño de experimentos e investigaciones. Se implica que la estadística es una teoría de información, siendo la inferencia su objetivo. (Wackerly, Mendenhall III, y Scheaffer, 2010)

Distribuciones de probabilidad

Es necesaria la probabilidad de un evento observado para hacer inferencias acerca de una población. Los eventos de interés son con frecuencia numéricos (o representados numéricamente) y

corresponden a valores de variables aleatorias discretas. Por tanto, es imperativo que se conozcan estas probabilidades. Con frecuencia se presentan variables aleatorias en la práctica, por ello es de utilidad tener disponible la probabilidad de cada valor de una variable aleatoria. Este conjunto de probabilidades recibe el nombre de *distribución de probabilidad* de la variable aleatoria discreta. También las hay para variables aleatorias continuas. (Wackerly y cols., 2010)

La probabilidad tiene un gran impacto en termodinámica. Usualmente son de interés los sistemas con un gran número de partículas, para que las predicciones basadas en probabilidades sean muy precisas. Muchas veces las variables en las que hay interés, son conseguidas por medio de la suma de contribuciones individuales de los átomos. Lo que se utiliza es el promedio ya que cada átomo puede contener diferente información, por eso es necesario extraer información de estas distribuciones de probabilidad. Se consideran dos tipos de distribución de probabilidad *discreta* y *continua*. (Blundell y Blundell, 2006)

- Variables aleatorias discretas: a modo de notación se utiliza la letra Y como una variable aleatoria y la letra y , para denotar un valor particular que puede tomar una variable aleatoria. Por ejemplo si tiramos un dado de 6 caras, denotamos con Y cualquiera de los seis posibles valores que puede tomar la cara superior al leer el dado. Después de ser lanzado, el número observado será denotado con y . Observe que Y es una variable aleatoria, pero el valor específico que se observa y , no es aleatorio.

Ahora es de importancia hablar acerca de la probabilidad de que Y tome el valor de y , denotado como $P(Y = y)$. La probabilidad de que Y tome el valor de y , $P(Y = y)$, se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales a los que se asigna el valor y . A veces se denotara como $p(y)$. (Wackerly y cols., 2010)

Las variables aleatorias discretas solamente pueden ser valores finitos enteros. Por ejemplo un dado que tiene 6 caras, puede optar por números del 1 al 6. Similarmente como en el párrafo anterior si se toma x como una variable aleatoria discreta que puede tomar un valor x_i con una probabilidad P_i . La suma de las probabilidades para cada posible resultado se escribe como:

$$\sum_i P_i = 1 \tag{IV.72}$$

Esto quiere decir que la probabilidad individual de cada evento se encuentra en un rango $0 \leq P_i \leq 1$. Además existen varias distribuciones de probabilidad como binomial, geométrica, hipergeométrica, de Poisson, binomial negativa y entre otras. (Blundell y Blundell, 2006) (Wackerly y cols., 2010)

- Variables aleatorias continuas: una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor en un intervalo se denomina continua. Las distribuciones de probabilidad para una variable aleatoria continua no es igual que para una variable aleatoria discreta. Se denota Y a cualquier variable aleatoria. La función de distribución de Y , denotada por $F(y)$, es tal que $F(y) = P(Y \leq y)$ para $-\infty < y < \infty$ (Wackerly y cols., 2010)

Si x es una variable aleatoria continua que tiene una probabilidad $P(x) dx$ de tener un valor en el intervalo entre x y $x + dx$. Las variables aleatorias continuas pueden tener valores de un rango posible, no se restringen a un grupo finito de valores. De forma similar a los valores discretos, la probabilidad de total de ocurrencia debe ser 1 y al estar en el caso continuo la suma se convierte a una integral:

$$\int P(x)dx = 1 \tag{IV.73}$$

(Blundell y Blundell, 2006) (Börner y cols., 2019)

Distribución binomial

Algunos experimentos consisten en la observación de una secuencia de intentos idénticos e independientes, cada uno de los cuales puede resultar en una de dos salidas. Por ejemplo en una elección local cada una de las n personas entrevistadas puede estar a favor o en contra. Este tipo de distribución se interesa en experimentos, conocidos como experimentos binomiales, que deben tener las siguientes características:

- Consiste en un número fijo n , de pruebas idénticas.
- Cada prueba resulta en uno de dos resultados, depende del contexto.
- La probabilidad de un resultado en una sola prueba es igual a un valor p y es el mismo de una prueba a la otra. La probabilidad del otro resultado es igual a $q = 1 - p$.
- Las pruebas son independientes.

Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución binomial basada en n pruebas con probabilidad p de éxito si y solo si:

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, n; 0 \leq p \leq 1 \quad (\text{IV.74})$$

(Wackerly y cols., 2010)

Valor esperado

El valor esperado es un análogo a un valor medio. Como su nombre indica es el valor que en promedio se espera obtener. Hay valores esperados para el tipo de variable, sea discreta o continua:

- Variable aleatoria discreta: sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad $p(y)$. Entonces el valor esperado de Y , $E(Y)$ se define como:

$$E(Y) = \sum_y yp(y) \quad (\text{IV.75})$$

Además en una orientación más física se define también el promedio, media o valor esperado de una variable aleatoria discreta como:

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i P_i \quad (\text{IV.76})$$

(Wackerly y cols., 2010) (Blundell y Blundell, 2006)

- Variable aleatoria continua: el estudio de variables aleatorias continuas lleva a sus medias, varianzas y desviaciones estándar, con lo cual adquieren medidas descriptivas numéricas asociadas con sus distribuciones. El valor esperado de una variable aleatoria continua Y es:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy \quad (\text{IV.77})$$

Donde $f(y)$ es la función densidad de probabilidad o probabilidad tal cual dentro de la integral por ser continua. (Wackerly y cols., 2010)

Además en una orientación más física también el valor esperado, que su probabilidad es continua es definida en la literatura como:

$$\langle x \rangle = \int xP(x)dx \quad (\text{IV.78})$$

(Blundell y Blundell, 2006)

Varianza

La varianza es una medida de variabilidad empleada en la estadística, es una función de desviaciones (o distancias) de las mediciones muestrales desde la media de los valores. La varianza de una muestra de mediciones y_1, y_2, \dots, y_n es la suma del cuadrado de las diferencias entre las mediciones y su media, dividida entre $n-1$. Simbólicamente, la varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{IV.79})$$

La correspondiente varianza poblacional está denotada por el símbolo σ^2 . Además la desviación estándar de la muestra de mediciones es la raíz de la varianza, esto es:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (\text{IV.80})$$

La correspondiente desviación estándar poblacional se define igual. (Wackerly y cols, 2010)

En el ámbito físico la varianza se escribe de forma diferente. Es sabida la forma de calcular el valor promedio de un conjunto de valores, pero hay que ver la dispersión de los datos. De primera instancia hay que cuantificar esta dispersión en una distribución hay que considerar la desviación de cada partícula respecto al promedio para x . Se define como:

$$x - \langle x \rangle \quad (\text{IV.81})$$

Esta cantidad indica que tanto un valor particular está por encima o por debajo del valor medio. Ahora se pueden trabajar el promedio de la desviación. El problema es que la desviación es a veces positiva y a veces negativa, esto puede llegar a cancelarse. Una forma útil de utilizar esta cantidad es con el módulo de la desviación,

$$|x - \langle x \rangle| \quad (\text{IV.82})$$

que siempre es positivo, pero esto sufre de la desventaja que el signo del modulo en el álgebra puede ser confuso. Por ello otro acercamiento es utilizar otra cantidad que siempre será positiva que es usar el cuadrado de la desviación $(x - \langle x \rangle)^2$. Esta cantidad es lo que se necesita: que sea siempre positivo y fácil de manipular algebraicamente. Entonces el promedio recibe el nombre de varianza. Y se define de la siguiente manera:

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (\text{IV.83})$$

Y la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. (Blundell y Blundell, 2006)

B. Modelo de Ising

1. Contexto histórico

Las sustancias pueden hallarse en gran variedad de estados, cada uno de los cuales se caracteriza por los valores de sus variables termodinámicas. Cada estado presenta ciertas propiedades macroscópicas que se conservan al evolucionar, pero existen intervalos muy pequeños de estas variables en los que los sistemas cambian notablemente sus propiedades, a esto se le conoce como transición de fase. Las transiciones de fase se discutirán más a profundidad en esta sección, las más conocidas son líquido-gas, sólido-gas y sólido-líquido de un fluido clásico por ejemplo, sin embargo hay una gran variedad como las ferromagnéticas, ferro-eléctricas, fluido-superfluido, entre otras.

En el año 1920, el físico alemán Wilhelm Lenz propuso un modelo para explicar algunos aspectos del magnetismo en los materiales que se conocían experimentalmente y sus transiciones de fase. Años después Lenz propuso un problema a uno de sus alumnos del doctorado. Hizo la sugerencia de un problema a resolver a Ernst Ising, él desarrolló su trabajo de tesis doctoral estudiando el problema en una dimensión, siendo supervisado por el mismo Lenz. Con el trabajo realizado, Ising mostró que el modelo unidimensional no muestra una transición de fase en los materiales para $T > 0$, y extendió esta conclusión a dos y tres dimensiones. Años más tarde Lars Onsager, físico y químico noruego que ganó un premio Nobel en química, demostró que la afirmación era incorrecta para el caso bidimensional. A partir del trabajo de R. Peirls en 1936, titulado *On Ising's Model of Ferromagnetism*, el modelo fue bautizado como *Modelo de Ising*

Este modelo pertenece a una clase de modelos en donde los sistemas se modelan como una red con una base de micro-sistemas en los sitios de la red, dichos micro-sistemas pueden tener un número discreto o continuo de estados y habrá una cierta interacción definida entre los sitios. El modelo de Ising ha sido estudiado en diversos tipos de redes, en su versión original se asocian dos estados a cada uno de los micro-sistemas y se establece una interacción a primeros vecinos. (Gelover-Santiago 2005)

2. Desarrollo teórico del modelo

En la sección anterior se habló acerca de las transiciones de fase, un aspecto muy importante para entender el desarrollo de este modelo. Las primeras teorías surgieron del estudio de las *transiciones de fase clásicas* como la teoría de Van der Waals de las transiciones de fase líquido-gas, la teoría de Lev Landau de las transiciones de fase que él denomina continuas y la teoría de Curie-Weiss de las transiciones de fase magnéticas. Considere la siguiente imagen

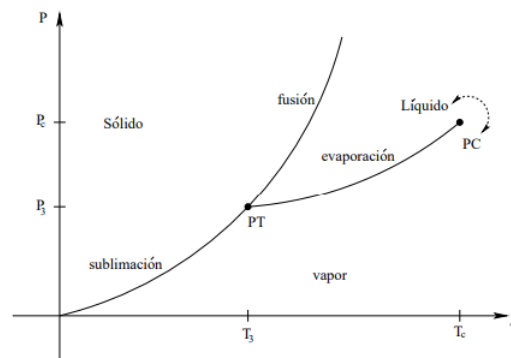


Figura IV.4: Diagrama de fase de un fluido. Diagrama PT.
Fuente: Gelover, 2005

donde se muestra el diagrama de transición de fase de un fluido. Se ve que en el diagrama existen dos puntos interesantes, el *punto terminal* (PT) y el *punto crítico* (PC), en el punto terminal se observa un calor latente así como una discontinuidad en la densidad. Mientras que en el punto crítico, para el cambio de fase de líquido-gas, no hay un calor latente ni discontinuidad de densidad. Desde el punto de vista termodinámico existen dos tipos de transiciones de fase, aquellas que presentan calor latente y aquellas donde no. La primera transición de fase fue propuesta por Paul Ehrenfest basada en potenciales termodinámicos, en transiciones de primer orden y las de segundo orden, dependiendo en el orden de la derivada de un potencial termodinámico.

Uno de los tipos de transición de fase más estudiados son acerca de las propiedades ferromagnéticas. Los fenómenos de tipo magnéticos que se han observado en los materiales son alrededor de catorce, que pueden dividirse en dos grandes grupos, los del tipo no cooperativo y los de tipo cooperativo. En los primeros no hay interacción entre los espines magnéticos, mientras que los cooperativos las interacciones entre los espines son intrínsecamente importantes. Los fenómenos ferro y antiferromagnéticos pertenecen al segundo grupo, pues se deben a las interacciones entre los momentos magnéticos atómicos. (Gelover-Santiago, 2005)

El momento magnético atómico se asocia al espín. El Espín es el momento angular intrínseco asociado a los electrones, aunque en la actualidad se sabe que varias partículas tienen. Este espín no se relaciona con el movimiento orbital en el átomo. Esto se puede visualizar en un modelo clásico como si la partícula girara sobre su propio eje, como una rotación. Este momento angular intrínseco tiene asociado un momento magnético intrínseco que da paso a los fenómenos magnéticos macroscópicos y aplicaciones como resonancias magnéticas. Los materiales tienen tres grandes clases de comportamiento magnético que ocurren: paramagnetismo, diamagnetismo y ferromagnetismo. (R. A. Young Hugh D.and Freedman, 2013) En el Modelo de Ising el enfoque es en el estudio de materiales ferromagnéticos.

Los materiales ferromagnéticos como el hierro, níquel, cobalto y demás aleaciones que tienen dichos elementos tienen una particularidad. En este tipo de materiales hay interacciones fuertes entre los momentos magnéticos atómicos que los alinean paralelamente entre sí en regiones llamadas dominios magnéticos, aún cuando no esté presente un campo externo. Cuando existe un campo magnético externo que va creciendo, se alcanza un momento en el que casi todos los momentos magnéticos en el material ferromagnético se alinean paralelamente al campo externo. A esta condición se le conoce como magnetización de saturación, es cuando la magnetización llega a un límite, la magnetización ya no aumenta. (R. A. Young Hugh D.and Freedman, 2013)

Las transiciones de fase se pueden ver involucradas en modelos dinámicos. Existe una gran cantidad de sistemas físico-químicos que se someten a la transición de fase, representado por un arreglo de redes, con solamente interacción entre vecinos cercanos que depende del posicionamiento de las partículas. Este tipo de modelos son bastante buenos para proveer una base teórica unificada para dar a entender una gran variedad de fenómenos como el ferromagnetismo y anti ferromagnetismo por ejemplo. Este modelo simplifica considerablemente los sistemas físicos reales, conservando las características físicas esenciales de los problemas. Como consecuencia conduce al inicio de una transición de fase del sistema, que surge de la naturaleza de un fenómeno cooperativo. (Pathria y Beale, 2012)

El modelo de Ising es un pilar de la física moderna, un sistema simple que exhibe un comportamiento no trivial muy interesante. El modelo de Ising consiste en una red d dimensional de N espacios. En cada espacio de la red existe un espín, es decir una red de espines, que pueden estar en dos posibles estados: espín arriba o espín abajo. Se le llamara al eigenvalor del espín en la i -ésima plaza en la red s_i . Si el espín es para arriba, $s_i = +1$; si el espín es para abajo, $s_i = -1$. Los espines se sitúan en un campo magnético B que representa una interacción que se traduce como energía:

$$E_B = -B \sum_{i=1}^N s_i \quad (\text{IV.84})$$

El sistema de red con energía E_B es equivalente a un sistema de dos estados, los más comunes en la mecánica estadística. Sin embargo en el modelo de Ising hay una complicación adicional que vuelve este problema interesante la cual es: la interacción entre los espines vecinos. La energía total del sistema, o el hamiltoniano asociado al sistema es:

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i \quad (\text{IV.85})$$

La notación $\langle ij \rangle$ quiere decir la suma sobre todos los pares de “vecinos cercanos” en la red. El número de los pares depende de la dimensión en la que se trabaja y del tipo de la red. Se denota el número de vecinos cercanos como q . Por ejemplo si la red es de dimensión $d = 1$ los vecinos cercanos son $q = 2$, si $d = 2$ entonces $q = 4$. Una red cuadrada de dimensión d se cumple la igualdad $q = 2d$. (En otras literaturas la energía se denota con H de hamiltoniano y el espín se denota con σ)

Si $J > 0$, los espines cercanos prefieren estar alineados ($\uparrow\uparrow$ o $\downarrow\downarrow$). En el contexto del magnetismo se le conoce como sistema ferromagnético. En caso contrario si $J < 0$, los espines cercanos prefieren estar desalineados ($\uparrow\downarrow$). Esto es el anti-ferromagnetismo.

Al utilizar el caso $J > 0$. Se trabaja en el ensemble canónico y se empieza por la función partición:

$$Z = \sum_{s_i} e^{-\beta E[s_i]} \quad (\text{IV.86})$$

Mientras que el efecto para el caso donde $J > 0$ Y $B \neq 0$ hace la red energéticamente preferible para alinear los espines, la temperatura vuelve a aleatorizar los espines, y la entropía ganando a la energía. El mayor interés se encuentra en el espín promedio del sistema, es decir la magnetización (Tong, 2012):

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial B} \quad (\text{IV.87})$$

Este modelo no es exactamente resoluble en general. La dimensión juega un rol muy importante. En una dimensión, la solución es bien conocida. En dos dimensiones, la solución de Onsager del modelo ($B = 0$) es uno de los resultados mas laureados en la física estadística. En dimensiones de tres para arriba el sistema ha sido estudiado por medio de soluciones numéricas (método Monte Carlo) y por cálculos teóricos de campo (renormalización de grupo), pero no existen soluciones exactas, solamente aproximaciones numéricas. Existen muchas interpretaciones del hamiltoniano, la definición que más común es la siguiente, se utilizará de aquí en adelante:

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - B \sum_{i=1}^N s_i \quad (\text{IV.88})$$

donde H es el hamiltoniano (i.e. energía del sistema), el primer término se refiere a la interacción de intercambio entre los espines de las partículas que son idénticas, este tipo de interacciones son debido a las funciones de onda que representan a los espines, son de origen puramente cuántico, donde el término J es el acoplamiento de los espines que habla de la dirección de los espines, el segundo término es la interacción individual de los espines con el campo magnético externo B . Se

sabe que $s_i = \pm 1$ y se utiliza una condición de contorno periódica la cual es: $s_{N+i} = s_i$, es decir que el último elemento de la cadena de N elementos es el primero nuevamente como si de un anillo se tratara. Debido a las condiciones simétricas del contorno se reescribe de la siguiente forma el hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - \frac{B}{2} \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}) \quad (\text{IV.89})$$

Entonces la función partición canónica viene dada por:

$$Z_N = \sum_{s_i} \exp \left\{ K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}) \right\} \quad (\text{IV.90})$$

donde $K \equiv \beta J$ y $h \equiv \beta B$. Nótese que la función de partición puede ser escrita de la forma:

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \prod_{i=1}^N T_{s_i, s_{i+1}} \quad (\text{IV.91})$$

donde:

$$T_{s_i, s_{i+1}} = \exp \left\{ K s_i s_{i+1} + \frac{h}{2} (s_i + s_{i+1}) \right\} \quad (\text{IV.92})$$

Esta expresión puede ser interpretada como un elemento de una matriz 2×2 simétrica, indexada por los valores de las variables de espín $s_i = \pm 1$. Se define entonces la **matriz de transferencia**:

$$T = \begin{pmatrix} T(+1, +1) & T(+1, -1) \\ T(-1, +1) & T(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.93})$$

Así se escribe la función partición como:

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{s_4=\pm 1} \cdots \sum_{s_{N-1}=\pm 1} \sum_{s_N=\pm 1} T_{s_1, s_2} T_{s_2, s_3} T_{s_3, s_4} T_{s_4, s_5} \cdots T_{s_{N-1}, s_N} T_{s_N, s_{N+1}} \quad (\text{IV.94})$$

Recordando que T es una matriz simétrica de 2×2 , la multiplicación de matrices entonces es elevar al cuadrado mientras que los sub índices dictan la matriz resultante para su dimensión:

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} T_{s_1, s_5}^3 \cdots T_{s_{N-1}, s_{N+1}}^2 \quad (\text{IV.95})$$

Es decir que los sub índices siguen bajando hasta que se obtiene la matriz de transferencia de $T_{s_1, s_{N+1}}^N$, lo cual debido a las condiciones de contorno es entonces:

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm 1} T_{s_1, s_1}^N \quad (\text{IV.96})$$

Este resultado indica que se debe realizar una suma sobre valores (1, 1) y (-1, -1), lo cual indica que es sobre la traza de la matriz T elevada a la potencia N:

$$Z_N = \text{Tr}\{T^N\} \quad (\text{IV.97})$$

la matriz T es simétrica por construcción y por lo tanto sus autovalores son reales. El álgebra lineal permite conocer los valores de esta matriz, que son la suma de la traza, e.i. sus autovalores λ_{\pm} , entonces:

$$Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (\text{IV.98})$$

ahora bien en el límite termodinámico, cuando N es muy grande, el término que sea mayor de los autovalores predomina sobre el otro, por lo tanto se puede quedar con el autovalor máximo entre ambos cuando $N \rightarrow \infty$. Los autovalores de la matriz de transformación son triviales y son L.i. Los autovalores son los siguientes:

$$\lambda_{\pm} = e^K [\cosh h \pm \sqrt{\cosh^2 h^2 - 2e^{-2K} \sinh 2K}] \quad (\text{IV.99})$$

de estos autovalores, es notable cual es el mayor de ambos debido a la fórmula cuadrática. Por lo tanto entonces la función partición del sistema se resume a:

$$Z_N = e^{KN} [\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h^2 - 2e^{-2K} \sinh 2K}]^N \quad (\text{IV.100})$$

Ahora lo que más interesa en este modelo es el fenómeno magnético que se presentan. Por este motivo existe un gran interés en la magnetización. Tomando la definición [IV.68](#) y la relación con la función partición y la energía libre de Helmholtz [IV.69](#) se obtiene el siguiente resultado:

$$M = - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_{T,N} = \frac{N \sinh(\beta B)}{\sqrt{\sinh^2(\beta B) + e^{-4\beta J}}} \quad (\text{IV.101})$$

Ahora bien, este resultado muestra un problema. Independientemente del valor de la temperatura, la magnetización se vuelve cero cuando el campo magnético es cero. En otras palabras este resultado no predice que el sistema tenga una transición ferromagnética. Sin embargo el sistema si posee bien definida una susceptibilidad magnética. De la definición en la sección anterior:

$$\chi(T) = \frac{1}{N} \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} = \frac{e^{\frac{2J}{k_B T}}}{k_B T} \quad (\text{IV.102})$$

en la expresión de la susceptibilidad es de notar que al ser en función de la temperatura, si la temperatura es muy alta la susceptibilidad decrece. Esto cumple entonces con lo que predice la ley de Curie. [\(Anónimo, 2021\)](#) [\(Dr. Zanette, 2023\)](#)

La Ley de Curie es aquella ley que obedece a los sistemas magnéticos, la cual establece que la susceptibilidad magnética es inversamente proporcional a la temperatura, entonces a temperaturas bajas incrementa mucho, cuando $T = 0$ es donde falla la Ley de Curie, esto siendo una de las consecuencias de la tercera ley de la termodinámica. [\(Blundell y Blundell, 2006\)](#)

3. Dimensionalidad del modelo

El modelo bidimensional fue resuelto por primera vez usando la técnica de matriz de transferencia por Onsager con campo nulo y por Yang con campo magnético, como se vió en el caso unidimen-

sional. Posteriormente fue resuelto por diferentes autores usando diferentes técnicas de cálculo. En cualquiera de ellas, la resolución es muchísimo más complicada que en el caso unidimensional. Los resultados principales son de suma importancia y las consecuencias posteriores de estos. En el límite termodinámico (en la red cuadrada y a campo nulo) la energía libre por partícula resulta:

$$\beta f(T) = -\ln(2 \cosh(2\beta J)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi} \right) \right] \quad (\text{IV.103})$$

donde:

$$\kappa = \frac{2 \sinh(2\beta J)}{\cosh^2 2\beta J} \quad (\text{IV.104})$$

La energía interna por espín viene dada por:

$$u(T) = \frac{\partial(\beta f(T))}{\partial \beta} = -2J \tanh(2\beta J) + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{d\kappa}{d\beta} \int_0^\pi d\phi \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(1 + \Delta)} \quad (\text{IV.105})$$

donde $\Delta(\phi) = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}$. Se verifica facilmente que:

$$\int_0^\pi d\phi \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(1 + \Delta)} = \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\pi}{\kappa^2} \quad (\text{IV.106})$$

Reemplazando este resultado en [IV.105](#) se obtiene, con algo de trabajo, que:

$$u(T) = -J \coth(2\beta J) \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \quad (\text{IV.107})$$

donde:

$$K_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} \quad (\text{IV.108})$$

es una integral elíptica completa de primera especie y

$$\begin{aligned} k' &\equiv 2 \tanh^2(2\beta J) - 1 \\ \kappa^2 + \kappa'^2 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.109})$$

Derivando la ecuación de la energía interna respecto de la temperatura se puede obtener, con cierto trabajo, el calor específico:

$$c(T) = \frac{du(T)}{dT} = \frac{2k_B}{\pi} (\beta J \coth(2\beta J))^2 2K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} \kappa' K_1(\kappa) \right] \quad (\text{IV.110})$$

donde:

$$E_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{IV.111})$$

es una integral elíptica completa de segunda especie. La integral elíptica $K_1(\kappa)$ tiene una singularidad en $\kappa = 1$ ($\kappa' = 0$), en cuyo entorno se tiene que:

$$\begin{aligned} K_1(\kappa) &\sim \ln \frac{4}{|\kappa'|} \\ E_1(\kappa) &\sim 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.112})$$

En dicho punto todas las funciones termodinámicas son no-analíticas. La temperatura crítica resulta entonces de la condición:

$$\kappa = \frac{2 \sinh(2\beta_c J)}{\cosh^2(2\beta_c J)} = 1 \quad (\text{IV.113})$$

o bien que $\kappa' = 0$

$$2 \tanh^2(2\beta_c J) = 1 \quad (\text{IV.114})$$

de donde resulta:

$$k_B T_c / J = \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \quad (\text{IV.115})$$

Otra relación satisfecha por T_c es: $\sinh^2(2\beta_c J) = 1$. En el entorno de la temperatura crítica se tiene entonces que la capacidad calorífica:

$$c(T) \sim -\frac{2k_B}{\pi} \left(\frac{2J}{k_B T_c} \right)^2 \ln |\kappa'| \quad (\text{IV.116})$$

Pero:

$$\kappa' = 2 \tanh^2(2\beta J) - 1 = 2 \tanh^2(2\beta J) - 2 \tanh^2(2\beta_c J) \sim D(T - T_c) \quad (\text{IV.117})$$

donde D es una constante. Así entonces la capacidad calorífica:

$$c(T) \sim -\frac{2k_B}{\pi} \left(\frac{2J}{k_B T_c} \right)^2 \ln \left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| \quad (\text{IV.118})$$

donde se presenta una singularidad logarítmica, en contraste con la predicción de campo medio de una discontinuidad. El parámetro de orden, esto es, la magnetización por partícula que es:

$$m(T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ (1 - [\sinh(2\beta J)]^{-4})^{-1/8} & T \leq T_c \end{cases} \quad (\text{IV.119})$$

En el entorno del punto crítico, que es donde interesa, se tiene que:

$$m(T) \sim [\sinh^4(2\beta J) - \sinh^4(2\beta_c J)]^{1/8} \sim A(T_c - T)^{1/8} \quad (\text{IV.120})$$

donde A es una constante. El exponente crítico del parámetro de orden resulta ser 1/8. En dimensiones $d \leq 3$ no se conoce hasta hoy una solución exacta del modelo de Ising en ningún tipo de red. Sin embargo, existen numerosas soluciones aproximadas, así como resultados de simulaciones numéricas, las cuales permiten obtener la temperatura crítica y los exponentes críticos en 3 dimensiones. (Anónimo, 2021)

4. Simulaciones

Método Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo son algoritmos que se emplean para analizar fenómenos por medio de la generación de números aleatorios. Estos son especialmente útiles para modelar procesos estocásticos, fenómenos con componentes arbitrarios o encontrar soluciones de problemas analíticamente complejos. Por ejemplo el modelado del movimiento de partículas microscópicas en un determinado ambiente. (Mariscorvetere, 2020)

En una simulación de Monte Carlo se espera poner mucha atención en la dependencia del tiempo de un modelo, para el cual el cambio o crecimiento no son predefinidos. Sin embargo es más en una manera estocástica que depende una secuencia de números aleatorios que son generados durante la simulación. Considerando problemas de Mecánica Estadística, se puede intentar establecer una región de espacio de fase para estimar ciertas propiedades del modelo. El objetivo de la mecánica estadística en equilibrio es calcular promedios térmicos de sistemas de muchas partículas interactuantes. Las simulaciones Monte Carlo pueden realizar esos cálculo, utilizando el recuento de las fluctuaciones estadísticas y sus efectos sobre el sistema. (Landau y Binder, 2015)

Cadenas de Markov

El concepto de una Cadena de Markov es crucial para las simulaciones de Monte Carlo, a continuación se muestra una breve descripción de las ideas básicas. Se define un proceso estocástico en tiempos discretos, nombrado consecutivamente t_1, t_2, t_3, \dots para un sistema con un conjunto finito de estados posibles S_1, S_2, S_3, \dots y se denota como X_t al estado del sistema en el tiempo t . Considerando la probabilidad condicionada $X_{t_n} = S_{i_n}$,

$$P(X_{t_n} = S_{i_n} | X_{t_{n-1}} = S_{i_{n-1}}, X_{t_{n-2}} = S_{i_{n-2}}, \dots, X_{t_1} = S_{i_1}), \quad (\text{IV.121})$$

dado que al momento antes, el sistema se encuentra en el estado $X_{t_{n-1}}$ estaba en el estado $S_{i_{n-1}}$. A este proceso se le conoce como un proceso de Markov, si la probabilidad es independiente de todos los demás estados excepto del estado anterior inmediato, i.e. $P(X_{t_n} = S_{i_n} | X_{t_{n-1}} = S_{i_{n-1}})$. La secuencia que corresponde a los estados de X_t es llamada una Cadena de Markov, y la condicional anterior de probabilidad es interpretada como la probabilidad de transición de pasar de un estado a otro. (i a j).

$$W_{ij} = W(S_i \rightarrow S_j) = P(X_{t_n} = S_j | X_{t_{n-1}} = S_i) \quad (\text{IV.122})$$

Además es requerido que se cumpla

$$W_{ij} \geq 0, \quad \sum_j W_{ij} = 1 \quad (\text{IV.123})$$

para transiciones de probabilidad. También es importante realizar la probabilidad total $P(X_{t_n} = S_j)$ que al tiempo t_n el sistema se encuentra en el estado S_j como $P(X_{t_n} = S_j) = P(X_{t_n} = S_j | X_{t_{n-1}} = S_i) P(X_{t_{n-1}} = S_i) = W_{ij} P(X_{t_{n-1}} = S_i)$. La ecuación principal considera el cambio de la probabilidad con tiempo t . (si el tiempo se trata como algo continuo en vez de discreto se puede escribir entonces la probabilidad $P(X_{t_n} = S_j) = P(S_j, t)$)

$$\frac{dP(S_j, t)}{dt} = - \sum_i W_{ij} P(S_j, t) + \sum_i W_{ij} P(S_i, t) \quad (\text{IV.124})$$

Esta ecuación puede ser considerada como “ecuación de continuidad”, expresando que la probabilidad total se conserva y toda probabilidad para el estado i que se “pierde” por la transición al estado j . La ecuación anterior describe el equilibrio al ganar y perder procesos: partiendo de la probabilidad de los eventos $S_j \rightarrow S_{i_1}, S_j \rightarrow S_{i_2}, S_j \rightarrow S_{i_3}$ son mutuamente excluyentes, la probabilidad total de alejarse del estado j es simplemente la sumatoria de la ecuación de continuidad. La ecuación [IV.124](#) muestra la propiedad básica de un proceso de Markov: i.e. el conocimiento del estado al tiempo t determina el futuro de la evolución temporal, no hay conocimiento del pasado. Esta propiedad es especial, y solamente algunos sistemas reales poseen una dinámica física compatible con la ecuación de continuidad. Sin embargo el mayor significado de [IV.124](#) es la importancia de probar el proceso de Monte Carlo, siendo interpretado como un proceso de Markov, con un decisión particular para la transición de probabilidad: debe de satisfacer el principio de balance detallado con la probabilidad de equilibrio $P_{eq}(S_j)$.

$$W_{ij} P_{eq}(S_i) = W_{ji} P_{eq}(S_j) \quad (\text{IV.125})$$

[\(Landau y Binder, 2015\)](#)

Algoritmo de Metrópolis

En el caso clásico, las configuraciones del método Metrópolis son generadas desde un estado previo, usando una probabilidad de transición que depende de la diferencia de energía entre el estado inicial y el estado final. La secuencia de estados producidos sigue una trayectoria ordenada en el tiempo, pero el tiempo en este caso se refiere a “tiempo de Monte Carlo” que es no determinista. Para modelos como el modelo de Ising, la dependencia del tiempo es descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = - \sum_{n \neq m} [P_n(t) W_{n \rightarrow m} - P_m(t) W_{m \rightarrow n}], \quad (\text{IV.126})$$

donde $P_n(t)$ es la probabilidad del sistema para estar en el estado n al tiempo t , y $W_{n \rightarrow m}$ es tasa de transición de $n \rightarrow m$. En equilibrio la ecuación se iguala a 0 y los dos términos del lado derecho de la ecuación se igualan. La expresión resultante es conocida como “equilibrio detallado”, como fue mencionado en las Cadenas de Markov

$$P_n(t) W_{n \rightarrow m} = P_m(t) W_{m \rightarrow n} \quad (\text{IV.127})$$

La probabilidad de un n -ésimo estado que ocurre en un sistema clásico está dado como:

$$P_n(t) = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{Z} \quad (\text{IV.128})$$

donde Z es la función partición. Esta probabilidad no es bien conocida por su denominador; sin embargo se puede abordar esto generando una cadena de estados de Markov, i.e. generar cada nuevo estado directamente del estado anterior. Si se produce el n -ésimo estado desde el m -ésimo estado, la probabilidad relativa es la relación de la probabilidad individual y el denominador se cancela. Como resultado, solamente la diferencia de energía entre los dos estados es requerido, e.g.

$$\Delta E = E_n - E_m \quad (\text{IV.129})$$

Cualquier cambio de transición que satisfaga el balance detallado es aceptable. La primera opción de cambio que se usa en física estadística es la forma de Metrópolis

$$W_{m \rightarrow n} = \tau_0^{-1} \exp(-\Delta E/k_B T) \quad \Delta E > 0 \quad (\text{IV.130})$$

$$= \tau_0^{-1} \quad \Delta E < 0 \quad (\text{IV.131})$$

donde τ_0 es el tiempo requerido para intentar cambiar la orientación del espín. La forma en la que el algoritmo de Metrópolis es implementado se describe sencillamente en ciertos pasos:

1. Escoge un estado inicial
2. Escoge un sitio i
3. Calcula el cambio de energía ΔE que resulta si el espín está volteado en un espacio i
4. Genera un número aleatorio r , tal que $0 < r < 1$
5. Si $r < \exp\{-\Delta E/k_B T\}$, se volteo el espín.
6. Va al siguiente sitio y empieza nuevamente desde el paso 3.

Después de haber considerado el número de espines de un conjunto, las propiedades del sistema son determinadas y agregadas a un promedio estadístico. Es de notar que el número aleatorio r debe ser escogido uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, y los números aleatorios sucesivos no deben estar correlacionados. (Landau y Binder, 2015)

C. Sociología

Max Weber es considerado como el científico y teórico social más notable de todo el siglo XX. La mayor parte de la sociología posterior está en deuda con él, tanto la que con propiedad puede ser descrita como weberiana como todas las demás, puesto que las escuelas alternativas se han sentido obligadas a reaccionar frente a ella. El imperativo principal de la metodología sociológica weberiana es el de la necesidad de incorporar significados a la conducta humana. El de entender la conducta como acción, o al hombre como ser capaz de comportamiento intencional y significativo. Como él dice:

la palabra 'sociología' se usa en diversos sentidos. En el que aquí se adopta, sociología designa la ciencia cuyo objeto es interpretar el significado de la acción social, así como dar en su virtud una

explicación del modo en que procede esa acción y de los efectos que produce. En esta definición se comprende por 'acción' aquella conducta humana que su propio agente o agentes entienden como subjetivamente significativa, y en la medida en que lo es. Tal conducta puede ser interna o externa y puede consistir en que el agente haga algo, se abstenga de hacerlo o permita que se lo hagan. Por acción 'social' se entiende aquella conducta en la que le atribuye al agente o agentes un significado respecto a una conducta de otra u otras personas y en las que tal relación determina el modo en que procede dicha acción.

La sociología, pues, para Weber, interpreta acción -es decir no sólo conducta observable- sino conducta significativa, para lo cual tiene que inferir el contenido valorativo y credencial de conciencia de los sujetos, puesto que para éstos lo tiene. Y lo tiene como indican las palabras recién citadas -con las que se abre el tratado general de Weber *Economía y sociedad*- no solo con respecto a valores y creencias sino con respecto a otros seres humanos: actuamos según las expectativas de conducta de los demás. Nos imaginamos qué esperan de nosotros, cómo reaccionarán, cómo se comportarán ante lo que digamos, hagamos o dejemos de hacer. El animal social que es el hombre está determinado en su comportamiento por el de los demás y por lo que supone que los demás harán. Nuestras expectativas de conducta ajena son parte del significado que otorgamos a la nuestra. (Giner 2011)

1. Sociedad

Para Blumer la sociedad no se compone de macro estructuras. La esencia de la sociedad ha de buscarse en los actores y la acción: “La sociedad humana a de considerarse como un conjunto de personas que actúan y la vida de la sociedad consiste en las acciones que éstos realizan”. La sociedad humana es acción; la vida grupal constituye una “actividad compleja en curso”. Sin embargo, la sociedad no consiste en una serie de actos aislados. En ella también se produce también una acción colectiva realizada por “Individuos que acomodan unos a otros sus líneas de acción... participantes que se hacen indicaciones unos a otros, no solo así mismos”. Esto lleva a lo que Mead denominó *acto social* y Blumer *acción conjunta*.

De acuerdo con Maines “la clave para entender el análisis de Blumer sobre las grandes organizaciones reside en su concepción de la acción conjunta”. Una acción conjunta no es simplemente la suma de todos los actos individuales, sino que tiene un carácter propio. Una acción conjunta, pues, no es externa o coercitiva para los actores y sus acciones; antes bien, la crean los actores y sus acciones. Para Blumer, el estudio de la acción conjunta es el dominio de la sociología. Su análisis sugiere que el acto conjunto es casi totalmente flexible, es decir, que la sociedad puede convertirse virtualmente en cualquier cosa que deseen los actores. Sin embargo, Blumer no quería ir tan lejos. Afirmaba que cada ejemplo de acción conjunta adoptaba formas diferentes, pero reconocía que la acción conjunta solía adoptar “formas reiterativas y firmemente establecidas”. Además de reconocer que la mayor parte de las acciones conjuntas adoptaban formas pautadas, Blumer admitía también que esta acción se regía por sistemas de significados preestablecidos, como la cultura y el orden social.

Parece que Blumer reconocía la existencia y la importancia de las grandes estructuras. Sin embargo, estas estructuras desempeñan un papel sumamente limitado en el intercambio simbólico. Por un lado, Blumer señalaba con frecuencia que las grandes estructuras eran poco más que “contextos” dentro de los cuales se enmarcan los aspectos verdaderamente importantes de la vida social: *la acción* y *la interacción*. Las grandes estructuras establecen las condiciones y limitan la acción humana, pero no la determinan. En su opinión, las personas no actúan dentro del contexto de estructuras tales como la sociedad; antes bien, actúan en situaciones. Las grandes estructuras son importantes en la medida en que dan forma a las situaciones en las que los individuos actúan y proporcionan a los actores el conjunto de símbolos establecidos que necesitan para actuar. (Ritzer 1997)

2. Interacciones sociales

Algunas puntualizaciones y matizaciones sobre lo hablado anteriormente, realizadas por el propio Max Weber:

La acción social (que incluye la abstención de actuar y también el ser objeto de ella) puede estar relacionada con el pasado, el presente o con la conducta futura anticipada de otras personas. Las 'otras personas' pueden ser individuos particulares conocidos del agente, o un grupo ampliamente indefinido, donde no conozca a ningún otro miembro. No toda suerte de acción es acción 'social'. La conducta externa no es 'acción social' cuando es la resultante de expectativas de comportamiento de objetos materiales. Un contacto humano es social sólo cuando la conducta de una persona se relaciona en su significado al comportamiento de los demás. La acción social no debe identificarse ni a) con varias personas que se comportan de manera semejante ni b) con una persona que actúe bajo el influjo de la conducta ajena. El individuo que se encuentra en medio de un gentío se hallará muy fuertemente influido en su acción por ese hecho, su conducta es condicionada por el gentío o multitud, ello puede ocurrir aunque no haya ninguna relación significativa entre la conducta de los individuos y el hecho de que sean miembros de esa multitud.

Con estas observaciones Weber quiere desgajar la conducta consciente y finalista de los seres humanos de aquella que es meramente instintiva así como de la colectiva que se halla dominada por los sentimientos de las muchedumbres. Así, Weber alude a la psicología de las turbas para poner en duda que la conducta del público en un mitin o la de la gente en un estadio, por ejemplo, merezca el nombre pleno de acción social.

Weber identifica cuatro tipos principales de acción humana. Son tipos puros de acción (Idealtypen) que prácticamente nunca se hallan en la realidad, valga la redundancia, en estado puro. Lo que solemos encontrar son mezclas de ellos en las que, eso sí, con cierta frecuencia aparece una suerte de acción que predomina sobre las demás. A pesar de tal mescolanza, necesitamos concebirlos por separado para estar así en condiciones de ejercer un análisis eficaz de las situaciones y conductas que examinamos. La acción es, según él, de cuatro especies: a) acción dotada de un propósito respecto a su fin, u orientada a su fin; en lenguaje de Weber, *zweckrational*; b) acción racional según el valor que la inspira, o racional valorativa *wertrational*; c) acción afectiva o emocional *affektuell*, y d) acción tradicional, o engendrada por el hábito o la costumbre.

Las primeras dos, aunque distintivas, apuntan a la categoría de conducta consciente y reflexiva, propia de los humanos, que constituyen la preocupación hegemónica dentro de toda la filosofía weberiana: la racionalidad. Las otras dos expresan una reflexividad mucho más mitigada o hasta inexistente, pues o bien las emociones o bien el comportamiento social automático controlan la conducta. Sería más que prematuro, sin embargo, avanzar a lo que el progreso de la teoría sociológica había de lograr mucho más tarde a través de la hábil síntesis que Talcott Pearson (1902-1979) elaboró con todas estas interpretaciones tan afines. (Giner, 2011)

D. Dinámica de grupo

La dinámica de grupo es el estudio científico de la interacción dentro de los grupos pequeños. Por ejemplo, Beales desarrolló un método para estudiar la interacción dentro de un grupo pequeño que trataba de resolver un problema. El grupo fue observado a través de un espejo transparente, y cada una de las afirmaciones de las personas se registró para el “análisis del proceso de interacción” bajo una de doce categorías, como : muestra solidaridad, levanta el estatus de otros, ayuda recompensa; está de acuerdo, muestra aceptación pasiva, comprende, coincide, complica; pide opinión, evaluación, análisis, expresión de sentimientos; muestra antagonismo, rebaja el estatus de otros, defiende o se impone. Cuando las afirmaciones o respuestas se ponían en un gráfica, se podía trazar un perfil de interacción de cada persona, podían documentar las pautas del liderazgo o resistencia y se podía

mostrar un perfil compuesto del comportamiento de todo el grupo. En el proceso para resolver un problema se podían reconocer las etapas de una secuencia compuesta de tres: 1) etapa de orientación: los miembros piden y dan información; 2) etapa de evaluación: los miembros juzgan la información, comparten opiniones; 3) etapa de control: los miembros siguen soluciones, llegan a una conclusión. Este fue uno de los primeros esfuerzos por observar sistemáticamente a un grupo en acción y por trazar o diagramar su comportamiento. (Horton y Hunt, 1990)

1. Grupos sociales

A pesar de que el “grupo” es uno de los conceptos más importantes en sociología, no hay un acuerdo sobre su definición. Tal confusión no se debe a que los sociólogos no se decidan. La confusión persiste porque la mayor parte de los conceptos en sociología no se inventan y luego se ponen en circulación; por el contrario, la mayor parte de los términos sociológicos son palabras familiares que los sociólogos utilizan con significados especiales. En consecuencia hay varios significados de ‘grupos’ en la literatura sociológica. En una de las formas en que se emplea el término denota *cualquier conjunto físico de personas*. Otro uso define a un grupo como *un número de personas que comparten algunas pautas organizadas de interacción recurrente*. La esencia del grupo social no es la cercanía física, sino la conciencia de interacción.

Hay algunos grupos a los que yo pertenezco -mi familia, mi iglesia, mi camarilla, mi profesión, mi raza, mi sexo, mi nación-, es decir, cualquier grupo al que yo puedo anteponer el pronombre “mi”. Estos son grupos de pertenencia, porque siento que pertenezco a ellos. Hay otros grupos a los que no pertenezco, estos son grupos de no pertenencia, porque estoy fuera de ellos.

Los grupos de pertenencia y de no pertenencia son importantes porque afectan el comportamiento. De los compañeros de un grupo de pertenencia esperamos reconocimiento, lealtad y ayuda por ejemplo. Como una definición más general el grupo es cualquier número de personas que comparten una conciencia de pertenencia y de interacción; con frecuencia se emplea indistintamente por agregado, colectividad o categoría. (Horton y Hunt, 1990)

2. La opinión y su dinámica

El acuerdo es uno de los aspectos más importantes en la dinámica de los grupos sociales. Cada día se presentan múltiples situaciones en donde es necesario, como grupo, llegar a decisiones en común. El acuerdo es bastante fuerte y tiene un amplio impacto en la sociedad. La dinámica del acuerdo o desacuerdo entre individuos es compleja, porque los individuos también lo son. La física estadística trabaja en la dinámica de opinión definiendo el estado en el que se encuentra la opinión de la población, así como el proceso principal que determina la transición entre estados de la opinión. En cualquier modelo matemático, la opinión se trata como una variable o un grupo de variables, i.e. una colección de números. Más adelante se hablará a detalle acerca de la interpretación de la opinión como variable. Cada día de la vida, las personas se enfrentan a problemas con un número limitado de posturas, que usualmente se reduce a dos: izquierda/derecha, Windows/Linux, comprar/vender, etc. Si la opinión se pudiese representar por medio de números, el reto es encontrar una regla matemática adecuada para describir el mecanismo responsable de su evolución temporal.

El desarrollo de la dinámica de opinión hasta ahora ha sido descoordinado y muy individual, donde los mecanismos sociales razonablemente considerados por los autores que lo matematizan sin tener conocimientos previos de sociología. El primer modelo de dinámica de opinión realizado por un físico fue el modelo propuesto por Weidlich en 1971. El modelo está basado en la estructura probabilística de la dinámica social. Luego el modelo de Ising hizo su primera aparición en la dinámica de opinión. El acoplamiento de espín-espín representado por la interacción de pares entre agentes, y el campo magnético es como hablar de un trasfondo cultural mayoritario o propagandas. Además se

introducen los campos individuales que determinan preferencias personales hacia otra orientación. Dependiendo de la fuerza del campo individual, el sistema puede converger a una de dos opciones posibles, o un estado en el que ambas coexisten. En la última década, los físicos han trabajado activamente en la dinámica de opinión y muchos modelos han sido diseñados.

(Castellano, Fortunato, y Loreto, 2009)

3. Variables de la opinión

En los primeros modelos sociofísicos, los agentes eran definidos por una sola característica: su opinión. En cambio, hoy en día prácticamente todos los modelos incluyen agentes definidos también por alguna o algunas otras variables relacionadas con la influencia social. Como sostiene Sobkowicz, esta innovación es una mejora general del realismo de los modelos que abre la puerta a asignar roles y poderes diferenciados a los agentes. A continuación se discuten brevemente algunas de esas características típicas y relevantes para el trabajo. (Tena y León, 2019)

Reflexión

La reflexión es un proceso externo que permite a los agentes cambiar su opinión en la ausencia de interacción. Es decir, cuando el agente no se encuentra interactuando con otro aún puede cambiar su opinión. Este proceso busca describir la influencia de las redes, propagandas, editoriales periodísticas, etc, que influyen en los individuos para la formación de la opinión de este. Como también el propio análisis y reflexión sobre lo que escuchamos o leemos. La idea es que el individuo puede “darse cuenta” de si algo es correcto o no. Para describir este fenómeno, se debe pensar que la reflexión es un proceso que ocurre únicamente en la ausencia de interacción. Durante el tiempo que el agente se encuentra libre, este tiene una determinada probabilidad de cambiar su opinión por propia reflexión. (Neme, 2017)

Persuasión

Muchos modelos incorporan diferentes grados de persuasión (capacidad de hacer cambiar a otro de opinión) y de apoyo (capacidad de reforzar la opinión de otros que ya piensan como uno mismo). Los primeros modelos que incorporaban estos parámetros se basaban en la teoría del impacto social de Latané (1981), aunque hoy en día muchos modelos incorporan estas características. (Tena y León, 2019)

Compromiso

En multitud de modelos los agentes tienen diferentes grados de compromiso con su propia opinión, a saber, están más o menos convencidos de la bondad de la misma. A partir de aquí, los diferentes modelos asumen la tesis progresivamente más fuerte respecto a la importancia del compromiso. Una idea compartida por todos es que a los agentes más comprometidos con sus creencias les cuesta más cambiarlas (son más resistentes a la influencia social). Esta idea ya estaba en los trabajos clásicos de Kuran, quien sostenía que las creencias puede ubicarse en un continuo desde las creencias *soft* (construidas con base en la heurística de la prueba social) hasta las *hard* (construidas a partir de la experiencia, conocimiento experto, etc.). Según Kuran las creencias *hard* son más resistentes a la influencia. (Tena y León, 2019)

4. Sociofísica

A pesar del rápido progreso de la sociofísica en las décadas recientes, el estudio de las sociedades humanas con las herramientas que ofrece la física y la matemática no es una idea reciente. Las raíces de la sociofísica fueron sembradas poco antes de la llegada de la física moderna. En el siglo XVII el filósofo inglés Thomas Hobbes fue fascinado por el proceso racional de entender el mundo por medio de la lógica y la deducción, un acercamiento para leer y descubrir que puede llegar a convertirse en una revolución científica. En su tesis, el compara a los humanos con máquinas que son sumamente complejas y siguen obedeciendo las leyes del movimiento como cualquier otro objeto ordinario. Entonces su dinámica puede ser estudiada y predecida usando principios similares a las que gobiernan sistemas mecánicos. (Yang, 2023)

La sociofísica tiene un objetivo principal el cual es usar conceptos y técnicas que son extraídas de la física estadística, investigando casos de índole política y social. El propósito no pretende una descripción exacta de la realidad asociada con todos los detalles.

La sociofísica trata con uno de los sueños más antiguos de la humanidad, el cual es a su vez una pesadilla, i.e. la capacidad de predecir y también controlar el comportamiento humano. La sociofísica no puede encontrar una descripción exacta de un grupo humano, sin embargo tiene como objetivo mostrar un nuevo enfoque a los fenómenos sociales humanos, que son más complicados que sumir una verdad engañosa, y eventualmente incorrecta. Detrás de la palabra “física” en lo que se le llama “sociofísica” se encuentra la forma en que la física procede en buscar entender las leyes de la materia inerte, en vez del uso de las leyes de la física tal cual. (Galani, 2012)

La sociofísica también puede ser definida como una rama de la física de sistemas complejos, centrada en el análisis de la emergencia de fenómenos sociales. Utiliza modelos que se sitúan en la ciencia moderna social analítica y generativa. La sociología comparte con la sociofísica el proyecto de explicar los fenómenos sociales macroscópicos como efecto de interacciones locales entre entidades microscópicas. (Tena y León, 2019)

E. Modelos de dinámica de opinión

Existen muchas maneras de abordar el estudio teórico de sistemas físicos. A cortesía de las técnicas analíticas establecidas en física por siglos en el estudio del mundo natural que nos rodea, existen grupos de herramientas matemáticas listas y disponibles para trabajar en la sociofísica.

Una descripción natural de la sociedad humana es un sistema que consiste de un gran número de agentes independientes que tienen la posibilidad de interactuar con su entorno. Como consecuencia de esas interacciones, los agentes muy probablemente intenten cambiar ciertos aspectos de ellos mismos para acomodarse dentro de la sociedad. Los modelos que describen directamente estas interacciones se conocen como Modelos basados en agentes (ABM), que son comúnmente implementados como simulaciones numéricas con una regla de actualización basada en probabilidad. El incremento en el poder computacional de los computólogos en las décadas recientes ha abierto muchas oportunidades a analizar los modelos sociofísicos por medio de simulaciones.

Mientras que los modelos ABM reflejan el entendimiento intuitivo de las sociedades como una colección de individuos, los físicos prefieren modelos con poco más de rigor matemático para obtener acercamientos más analíticos. Aproximaciones de campo medio ayudan a expresar los ABM en términos de dinámica macroscópica tomando el promedio de cantidades relevantes sobre todos los agentes; las interacciones y evolución de los agentes son traducidas a la dinámica de las cantidades macroscópicas. Esto es conseguido analizando las ecuaciones modelo directamente, aproximando a una simulación numérica donde el número de agentes se acerca al límite termodinámico, es decir a infinito, y los agentes interactúan con todos los demás agentes simultáneamente, por lo que los

efectos locales del modelo son promedio.

Ningún modelo es superior a otro. En los modelos dinámicos macroscópicos, es muy sencillo extraer las estadísticas al ser ya explícitamente parte del modelo, y las ecuaciones diferenciales permiten a los físicos a usar un conocimiento analítico en el entendimiento de las dinámicas del sistema. En la otra mano, los ABM son posiblemente más precisos con las sociedades reales, modelando individuos en vez de un sistema como el todo. (Yang, 2023)

1. Modelos discretos

El origen de estos AMB se ubican en los años 1940, con la introducción de Von Neumann y Ulam para la noción autómeta celular, e.g., una máquina compuesta por una colección de células en una red. Cada célula se encontraba en un estado discreto y se actualizaba en un tiempo discreto de tiempo de acuerdo con el estado de sus células vecinas. De allí donde se conocen como modelos discretos, donde los estados y tiempos de actualización son valores exactos. (Castellano y cols., 2009)

Cuando la opinión es discreta, es decir el acuerdo o desacuerdo es más definido, es lo que representa la opinión, dos casos en dos extremos. Para estos modelos de casos discretos, los extremos, simulados por una influencia inicial de la red, es muy probable que cambie la opinión de la población. Basado en una opinión central contagiando a sus vecinos. Los primeros modelos fueron discretos donde solamente existían dos opciones. Son modelos que tienen valores fijos y exactos. (Stauffer, Moss de Oliveira, De Oliveira, y Sá Martins, 2006)

2. Modelos continuos

Los modelos más comunes son aquellos donde se utiliza la opinión como variable discreta, que ayuda a describir razonablemente varias ocasiones. Sin embargo, existen casos en la dinámica de opinión donde la opinión individual puede variar de un extremo a otro suavemente en un rango de elección. Como ejemplo, se puede pensar en la orientación política de un individuo, no se encuentra restringido a las orientaciones de extrema derecha/izquierda, pero si tiene todas las opciones entre ambos extremos.

Los modelos de opinión continua, como lo dice su nombre con opiniones continuas, invalidan ciertos conceptos adoptados en los modelos con opciones discretas, como los conceptos de mayoría de opinión o igualdad de opinión. En efecto, la dinámica de opinión continua ha seguido históricamente un camino alternativo. Los primeros estudios fueron realizados por matemáticos y fueron dirigidos a identificar las condiciones sobre las cuales un panel de expertos querían conseguir una decisión en común. El estado inicial es usualmente una población de N agentes con opiniones asignadas aleatoriamente, representadas por números reales en ciertos intervalos. En contraste con la dinámica de opinión discreta, en este caso todos los agentes usualmente empiezan con opiniones diferentes y los escenarios son más complejos, con grupos de opiniones emergiendo en el estado estacionario final. Los grupos de opinión puede ser uno (consenso), dos (polarización) o más (fragmentación). En principio, cada agente puede interactuar con cualquier otro agente, no importa cual sea su opinión. En la práctica, existe una verdadera discusión acerca de si la opinión de las personas es suficientemente cercana al resto de individuos. Este aspecto tan humano en la comunicación se llama *confianza limitada* (BC en inglés); en la literatura es expresada por medio de la introducción de un número real ϵ , la incertidumbre o tolerancia, tal que un agente, con opinión x , solo interactúa con las opiniones de sus semejantes cuya opinión se encuentra en el intervalo $[x-\epsilon, x+\epsilon]$. En la sección de modelos continuos se encuentran los modelos de confianza limitada más famosos, i.e., el modelo *Deffuant model* y el modelo *Hegselmann-Krause model*.

3. Modelos más famosos

A continuación se presentan los trabajos seminales de las familias más importantes de modelos sociofísicos. En los últimos años la investigación se ha expandido en múltiples direcciones. Por un lado, existe una multitud de desarrollos de estos modelos (por ejemplo en diferentes redes). Por otro lado, dentro de la comunidad sociofísica han aparecido nuevos modelos, de última generación, que no se pueden categorizar en estas familias. Los primeros que se aplicaron a este campo de la sociofísica fueron los modelos binarios, como el *voter model*, el *Sznajd model* o el *majority rule model* entre otros, aunque rápidamente aparecieron los modelos continuos, los *bounden confidence models*, entre los que destacan el *Deffuant-Weisbuch model* y el *Hegselmann-Krause model*. A continuación se presenta una breve descripción junto con características principales de dichos modelos. (Tena y León, 2019)

Voter Model

En el modelo del votante los agentes se colocan en una cuadrícula. Cada casilla representa a un agente que puede estar en dos estados alternativos (puede tener dos opiniones) (± 1). Los agentes tan solo pueden interactuar con sus vecinos adyacentes. La dinámica del modelo es también extremadamente simple. En cada ronda se forman parejas de agentes. Si ambos agentes comparten el mismo estado, nada sucede; de lo contrario, uno adopta el estado del otro. (Tena y León, 2019)

Majority Model

Como en el caso anterior, los agentes en este modelo pueden tener dos opiniones (± 1). En este caso, no obstante, cada agente puede comunicarse con cualquier otro agente de la población. En cada ronda se forman grupos de agentes (el tamaño de los grupos varía de una ronda a otra). En cada ronda, todos los agentes adoptan la opinión mayoritaria dentro de su grupo. (Tena y León, 2019) (Nemel, 2017)

Sznajd Model

En el artículo, publicado en el año 2000, de K. Sznajd-Weron y J. Sznajd propusieron un modelo simple, que con el tiempo se conoció como el modelo de Sznajd, cuyo objetivo era investigar cómo se expanden las opiniones en una sociedad. Consideraban una cadena de agentes interaccionantes descritos por una variable de espín como Ising, que representa una situación binaria (1 para si, -1 para no). La diferencia más importante con el modelo de Ising es el sentido en el que la información fluye. En Sznajd, un grupo de dos espines es el que influye sobre sus vecinos. El sistema siempre termina en una de dos situaciones finales: un consenso, análogo al estado ferromagnético, o un estancamiento, análogo al estado antiferromagnético. (García Berdote, 2018)

En su versión más simple, los agentes están colocados en una matriz de una única dimensión (una cadena lineal). Una vez más, cada agente puede tener una de dos opiniones (± 1). En cada ronda se forman parejas de agentes adyacentes. Si ambos agentes tienen la misma opinión, sus dos vecinos adyacentes a izquierda y derecha se contagian de la misma. En cambio, si discrepan, cada agente le contagia su opinión al vecino del otro. (Tena y León, 2019)

Deffuant-Weisbuch Model

Varios modelos de dinámica de opinión hace una suposición realística que, a pesar que los individuos pertenezcan a redes sociales, las interacciones son mayormente uno a uno y de este modo, cada

interacción social tiene la capacidad de ajustar la opinión de alguien. El modelo de Deffuant captura este mecanismo, con sus individuos ajustando sus opiniones (con valores entre 0 hacia 1) para cada interacción entre parejas si la diferencia entre las opiniones es menor que el límite impuesto. Una consecuencia de dicha suposición es que el reforzamiento es debilitado debido a que un individuo, en cada interacción, influye a otro y con ello algunas estructuras se vuelven irrelevantes. (Zarei, Gandica, y Rocha, 2024)

Los modelos sociofísicos continuos introducen la cuestión de la homofilia, como se habló antes. Se asume la plausible idea de que las personas no suelen interactuar (o, si interactúan, no suelen dejarse influir) por aquellas personas que albergan opiniones muy diferentes de las suyas. En el Deffuant, los agentes están enraizados en una determinada estructura de red. Cada agente solo puede interactuar con los agentes a los que está conectado. En cada ronda se forman parejas de agentes. Ahora bien, en estos modelos, además de la opinión (un valor asignado al azar en el intervalo continuo $[0,1]$), los agentes están dotados de un *confidence level* el cual es un umbral. Si la diferencia de opinión entre ambos agentes excede su *confidence level*, no sucede nada. De lo contrario, sus opiniones se aproximan en alguna medida (habitualmente, ambos agentes convergen en la media de sus opiniones). (Tena y León, 2019)

Hegselmann-Krause Model

Finalmente, el modelo de Hegselmann-Krause es un modelo que trata de capturar la misma idea que el de Deffuant a partir de una regla de actualización de creencias muy diferente. En este caso, en cada ronda los agentes interactúan con todos los agentes de la población que queden dentro de su *confidence level*. Como resultado del encuentro, todos los agentes en un grupo pasarán a compartir la misma opinión, que será la media de las opiniones previas de todos los agentes en el grupo. (Tena y León, 2019)

De igual manera Volkova indica que en el modelo de Hegselmann-Krause es donde se considera un grupo de m individuos donde cada uno tiene su propia opinión representada por un número real. Existe un vector llamado un perfil de opinión a un tiempo determinado. Un individuo i interactúa con aquellos individuos que su opinión difiere pero no más de un cierto nivel de confianza que tienen los individuos y de esta forma los individuos pueden o no cambiar de opinión, donde todos los individuos llegarán a compartir la misma opinión. (Volkova, Manita, y Manita, 2019)

F. Voter Model

1. Definición e interacciones

El modelo de Voter ha sido llamado de esta forma debido a interpretación natural de sus reglas en términos de dinámica de opinión. La definición es extremadamente simple: cada agente está dotado con una variable binaria $s = \pm 1$. A cada tiempo un agente i es seleccionado junto con uno de sus vecinos cercanos j y $s_i = s_j$, i.e., el agente toma la opinión de su vecino. Esta regla de actualización implica que los agentes imitan a sus vecinos. Ellos sienten la presión de la mayoría de sus compañeros, solamente hablando en un sentido de promedio: el estado de mayoría no juega un papel directo y más fluctuaciones pueden ser esperadas respecto al 0 absoluto en la dinámica de Glauber. El exceso de ruido es ausente en este modelo, por lo que los estados iguales (consenso) son absorbidos. Empezando de una condición inicial desordenada, la dinámica de Voter tiende a incrementar el orden del sistema, como un proceso de engrosamiento esperado. La pregunta es si es alcanzado el consenso completo en un sistema de tamaño infinito. En una red uni-dimensional las dinámicas son exactamente las mismas a las dinámicas de Glauber a temperatura cero. Los patrones que se generan en redes dos-dimensionales indican que los dominios crecen pero las interfaces son

muy toscas.

Estudios previos realizados por probabilistas, han explotado el factor de que el modelo puede ser mapeado en un modelo de caminantes al azar que se unen al encontrarse. Esta propiedad dual permite usar el poder de la teoría de las caminatas aleatorias. (Castellano y cols., 2009)

En el caso bidimensional las interacciones cambian. Se pasa de ser una cadena unidimensional que se cierra como anillo, a una red rectangular que cierra como un toroide debido a las condiciones de frontera. Por lo tanto las interacciones cambian ligeramente. Como mencionado anteriormente suponga que los agentes pueden tener 1 de 2 opiniones ($s = \pm 1$). Por lo tanto la opinión de un agente seleccionado al azar toma la opinión de uno de sus 4 vecinos elegido al azar también. Entonces considere una población de N agentes i con opiniones discretas x_i . A cada paso de tiempo un agente aleatorio se selecciona. Luego se selecciona uno de cuatro posibles vecinos. El vecino ajusta la opinión del agente seleccionado y adoptan la misma opinión. Suponga que x es la opinión del agente y x' es la opinión del vecino seleccionado; entonces la opinión se ajusta acorde a:

$$x = x'_i \quad , i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{IV.132})$$

donde i puede ser 1 de 4 vecinos. Esto muestra la influencia de los vecinos próximos a la opinión.

2. Aplicaciones

Siendo este modelo una dinámica simple de no equilibrio con un comportamiento no trivial, el modelo de Voter ha sido investigado con respecto a muchas propiedades en los últimos años, incluyendo persistencia, evolución y filtración correlacionada. Sin embargo, muchas modificaciones al modelo original han sido propiedades en orden de varios tipos de modelos o fenómenos, o bien para probar la versatilidad de la fenomenología del votante.

Una variante realizada al modelo original es el modelo del votante constreñido, donde los agentes pueden tener 3 estado en vez de 2, usualmente utilizado en cuestiones de 3 opiniones posibles, e.g., en posturas políticas como centristas, izquierdistas y derechistas. Otra variante de dicho modelo original ha sido utilizada para estudiar problemas ecológicos. Publicaciones recientes en la literatura de la física se centran en estudiar la diversidad en comunidades de plantas, o la investigación en la fijación en la evolución de especies competidoras. También existe un análisis general de una variante del modelo en redes en topologías genéricas que se presentan en (Baxter et al., 2008), con una referencia particular en aplicaciones en genética poblacional y estudios de biodiversidad, mucho enfoque en área biológica. (Castellano y cols., 2009)

G. *Deffuant-Weisbuch Model*

1. Definición e interacciones

Considérese una población de N agentes i con opiniones continuas x_i . A cada paso del tiempo dos agentes aleatorios se van a encontrar. Ellos ajustan su opinión cuando la diferencia entre sus opiniones es más pequeña en magnitud que el límite establecido d . Suponga que dos agentes tienen opiniones x y x' eso quiere decir $|x - x'| < d$; entonces las opiniones son ajustadas acorde a:

$$\begin{aligned} x &= x + \mu * (x' - x) \\ x' &= x' + \mu * (x - x') \end{aligned} \quad (\text{IV.133})$$

donde μ es el parámetro de convergencia tomado entre 0 y 0.5 durante las simulaciones.

Lo normal para la condición limitante es que los agentes solamente interactúan cuando sus opiniones se encuentran lo suficientemente cercanas entre sí; de lo contrario ni si quiera vale la pena entrar en discusión. La razón de tal comportamiento puede que sea por ejemplo falta de entendimiento, conflictos de interés o presión social. A pesar de no haber razón de suponer la viabilidad de discusión, representado por el umbral d , es constante en toda la población o bien simétrico en la ocasión de un encuentro binario, siempre se toma como un parámetro de simulación constante.

La evolución de las opiniones puede ser predicha matemáticamente en el caso límite de valores pequeños de d . Variaciones de densidad $\delta\rho(x)$ de la opinión x obedecen la siguiente dinámica:

$$\delta\rho(x) = \frac{d^3}{2} * \mu * (\mu - 1) * \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.134})$$

Esto implica que empezar de una distribución inicial de opiniones en la población, amplifica cualquier densidad de opinión local alta. Los picos de opinión incrementan y los valles disminuyen hasta picos muy estrechos donde quedan entre un desierto de opiniones intermedias. (Deffuant y cols., 2000) (Zarei y cols., 2024) (Aguilar, S.F.)

Castellano también habla y hace mucho énfasis en el parámetro μ y en la evolución del sistema. El modelo de Deffuant está basado en una estrategia de compromiso: después de un debate constructivo, las posturas de los agentes que interactúan se vuelven más cercanas entre si, por la cantidad relativa del parámetro de convergencia. Si $\mu = 0.5$, dos agentes van a converger al promedio entre sus opiniones antes de discutir. Para cualquier valor de d y μ , la opinión promedio de los pares de agentes es la misma antes y después de la interacción, por lo que la opinión promedio de la población es invariante en las dinámicas de Deffuant. La evolución es debido a una inestabilidad de la configuración uniforme inicial cercana al límite de la opinión. (Castellano y cols., 2009)

2. Aplicaciones

Este modelo y sus variantes son modelos capaces de explicar como posiciones extremas, inicialmente compartidas por una minoría de la población, pueden llegar eventualmente a dominar una sociedad (movimientos políticos). En una variante del modelo (Ben-Naim, 2005) donde la estrategia de Deffuant es combinada con cambios espontáneos en la opinión de los agentes ha sido estudiada. El último fenómeno es descrito como un proceso de difusión en un espacio de opinión, el cual afecta la formación de grupos y su evolución, con un gran número de grupos estables tomando otros más grandes. Es muy utilizado para aplicaciones donde se involucre la propaganda y se influya a las personas, de tal forma que se puedan estudiar sociedades más complejas. (Castellano y cols., 2009)

Inicialmente, el modelo de Ising comenzó como un problema de doctorado para Ernst Ising. Este modelo, presentado originalmente como parte de la mecánica estadística, se utiliza para estudiar sistemas de partículas magnéticas. Con el paso del tiempo, se han encontrado diversas aplicaciones, siendo la sociofísica una de ellas. La dinámica de opinión es uno de los aspectos donde más se utiliza el modelo de Ising, que es esencial para estudiar las formaciones de consenso y decisiones poblacionales, además de investigar el efecto de la presión social e influencias de vecinos. (Galam, 2012)

A inicios del siglo XXI, comenzó el uso de modelos de dinámica de opinión; se desarrollaron modelos de tipo discreto y continuo para dar explicación a fenómenos sociales y entender a profundidad las decisiones poblacionales. (Castellano y cols., 2009). El *Voter Model*, inspirado en el modelo de Ising, es uno de los más populares en el estudio de la dinámica de opinión discreta. Entre los resultados de mayor interés provienen de dos estudios del año 2018 (Centola, Becker, Brackbill, y Baronchelli, 2018) y (García Berdote, 2018). En ambos trabajos se estudia el modelo de Sznajd en dos dimensiones, que, según Castellano (Castellano y cols., 2009), son modelos muy similares y pueden tomarse como iguales. Los resultados muestran una relación muy particular entre las minorías y los consensos, revelando que una minoría es capaz de cambiar la postura de toda una población. También hay estudios recientes que muestran el funcionamiento más detallado al variar diferentes tipos de variables, como el tamaño de las poblaciones y la forma de interacción, llegando a conclusiones fascinantes sobre el comportamiento de las poblaciones y cómo consiguen el consenso. (Wołoszyn, Masłyk, Pająk, y Malarz, 2024)

Por otro lado, el *Deffuant-Weisbuch Model*, también influenciado por el modelo de Ising, introduce una dinámica de opinión continua en lugar de opiniones binarias. Este modelo ha tenido más desarrollo que los anteriores. En un estudio reciente de este año (Zareí y cols., 2024), se muestran variantes del modelo original, haciendo cambios en el dominio temporal de interacciones y observando el comportamiento de los subgrupos formados, para finalmente estudiar cómo se alcanzan los consensos en este modelo. Este trabajo ofrece, de forma experimental, una comprensión más profunda del *Deffuant-Weisbuch Model*.

Este trabajo busca, de forma experimental, relacionar el *Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model* con el modelo de Ising, evidenciando el uso del modelo de Ising como base. Además, se compara el modelo continuo con el discreto, evidenciando las diferentes situaciones en las que cada modelo actúa. Se presenta la aplicación del modelo de Ising para un estudio interdisciplinario, que da paso a ramas de la física que aportan al estudio de sociedades y la dinámica de sus opiniones.

Aplicación del Modelo de Ising: dinámica de opinión

Como se mencionó en el marco teórico el modelo de Ising es un sistema simple que muestra un comportamiento interesante. El modelo consiste en una red de espines que interactúan entre sí y con su entorno. Uno de los objetivos de este modelo es dar una explicación a fenómenos magnéticos por medio del uso del espín magnético intrínseco de las partículas, mostrando así relaciones de magnetismo y temperatura principalmente (Gelover-Santiago, 2005). A esta relación se le conoce como transición de fase magnética, que es básicamente cuando un material alinea sus espines magnéticos por efectos de la temperatura y un material se magnetiza. Esto se puede visualizar de la siguiente manera:

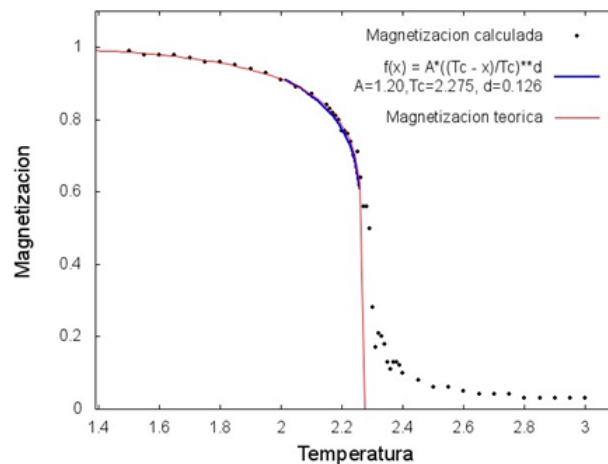


Figura VI.1: Simulación teórica de Magnetización (T) en función de la temperatura (K°)
Fuente: Berdote, 2018

Los autores muestran como la magnetización tiene una transición de fase donde el magnetismo depende exclusivamente de la temperatura. Teóricamente las simulaciones realizadas en (García Ber-

(dote, 2018) muestran que la temperatura crítica es $T_c = 2.275K$. Esto indica que cuando la temperatura es menor a dicho valor la magnetización es total, mientras que pasado ese valor la magnetización es nula. Existen muchas otras variables en el modelo de Ising, sin embargo para este trabajo es de interés solamente la transición de fase magnética.

Este modelo es muy versátil y muestra una relación muy poderosa entre dos variables. Por esto mismo es que ha sido un pilar base para estudios interdisciplinarios. Obteniendo así un rol principal en las diversas aplicaciones que tiene como por ejemplo genética, biología, economía, sociología entre otros. En este trabajo el interés es hablar de la aplicación del Modelo de Ising al dominio de la sociología, para ser más precisos para la dinámica de opinión.

Han existido múltiples trabajos donde se utiliza el modelo de Ising como la base teórica para resolver problemáticas sociales. En (Galam, 2012) Galam indica que desde ya hace tiempo se viene hablando del modelo de Ising para temas sociales y sobre todo en dinámicas de opinión, él mismo ha trabajado en estos temas. Con todo esto en mente el modelo de Ising se empezó a traducir en términos sociales, usando la misma fenomenología que con los espines magnéticos de las partículas pero adoptando una postura social con agentes de una población.

En el modelo de Ising se consideran ciertas variables físicas como magnetización, temperatura, espines magnéticos, partículas, energía y entre otros. Ahora bien para realizar la transición al contexto social el modelo se ajusta a las variables que existen en una sociedad. Es evidente que en muchos de los trabajos en sociofísica cuando se hace este salto a la sociología se habla acerca de muchas variables, aquí se hablará de agentes, opiniones, consenso, masas entre otros.

En este trabajo se busca observar el comportamiento de la opinión diferente de los agentes, como es que al interactuar estos pueden ajustar sus opiniones y alinearse todos en una misma dirección o diferir y eventualmente llegar o no a un consenso, analizando la cantidad de agentes, proporciones de minorías, influencias externas y restricciones de interacción. En el contexto físico los espines magnéticos de las partículas se alinean para magnetizar un material, esto depende de la temperatura. Ahora bien, para la dinámica de opinión los agentes interactúan para ajustar su opinión y buscan alinearse para obtener un consenso poblacional, todo esto dependerá de las proporciones iniciales de diferentes opiniones de la población y las interacciones existentes entre agentes.

A. Modelo de dinámica de opinión discreto: *Voter Model*

El objetivo de este modelo, dada la opinión como valores discretos, es conseguir el consenso de una población en uno de dos posibles estados finales. A continuación se presenta el algoritmo utilizado y la eficiencia del modelo.

1. Algoritmo

Para este algoritmo se utilizaron los paquetes *NumPy*, *CSV*, *Pandas*, *Matplotlib.pyplot*, *Matplotlib.animation*, *Time*, *Tkinter* y *Os*. El programa hace uso de los valores en el CSV, convirtiendo los valores de opinión *A favor* y *En contra* a valores numéricos 1 y -1 respectivamente. Luego los agentes de la malla bidimensional interactúan entre sí hasta llegar a un consenso unánime para la población, obteniendo así el tiempo en segundos y las interacciones hasta llegar al consenso, además del tipo de consenso al que se llegó.

Diagrama de flujo

El siguiente diagrama de flujo muestra el funcionamiento del algoritmo expuesto en este capítulo.

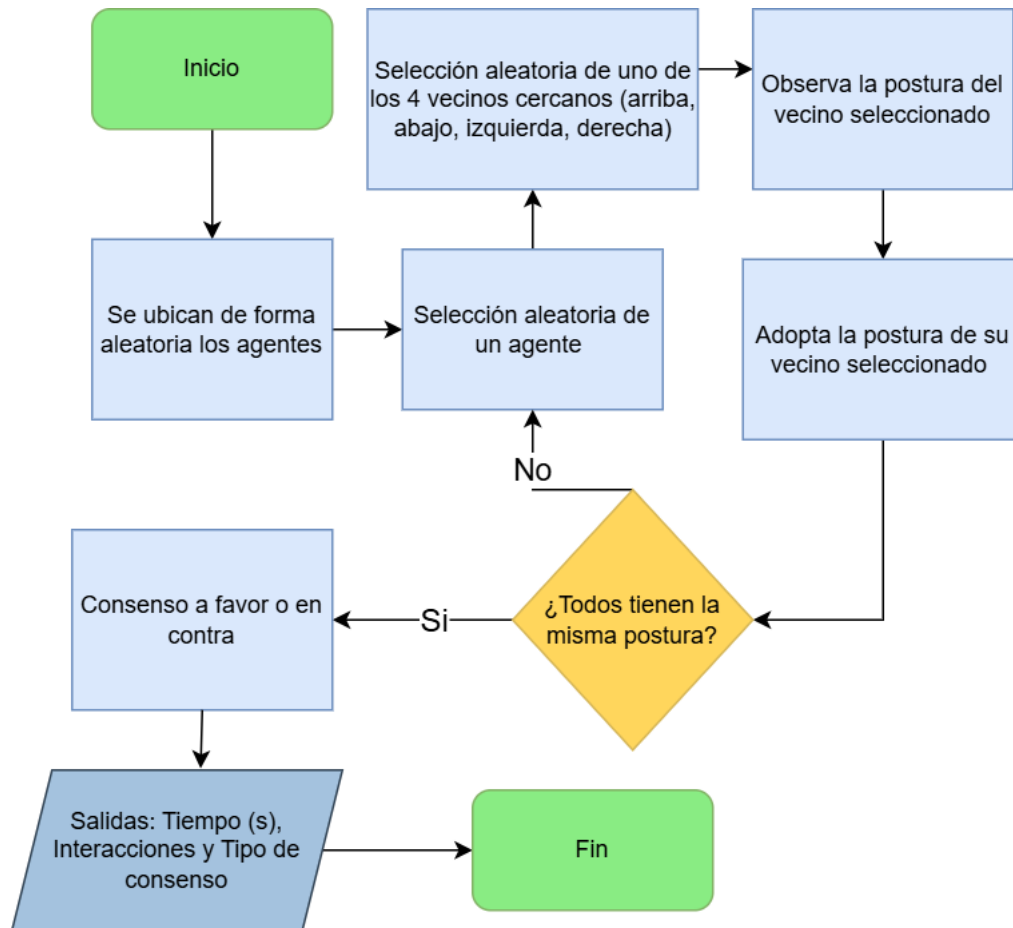


Figura VI.2: Diagrama de Flujo algoritmo de *Voter Model*

2. Eficiencia

Para medir los tiempos se utilizó la herramienta *Time* para medir el tiempo al iniciar y al finalizar, de tal forma que se consiguiera así el tiempo de ejecución para las diferentes corridas que se realizaron. Para las corridas se usaron diversas bases de datos que pueden ser encontradas en anexos [1](#), las bases constan de entre 159-160 datos, es decir la opinión de 159-160 diputados. El número de diputados empezó siendo 159 para el año 2024 debido a que la comisión de Revisión del Congreso decidió no darle posesión como diputado a Julio Héctor Estrada del partido Cabal. Este es el motivo por el cual algunas de las sesiones realizadas por el congreso a inicios del año son de 159 datos, ya que Julio Hector tomó posesión por la tercera semana del mes de Enero del presente año.

En la Figura [VI.3](#) se muestra el tiempo en segundos contra las interacciones producidas necesarias para llegar a un consenso. Se realizó una regresión la cual muestra que las interacciones aumentan linealmente a medida que el tiempo lo hace, mostrando así que el 99.71% de los datos se ajustan según la ecuación que relaciona ambas variables $y = 121.08x$.

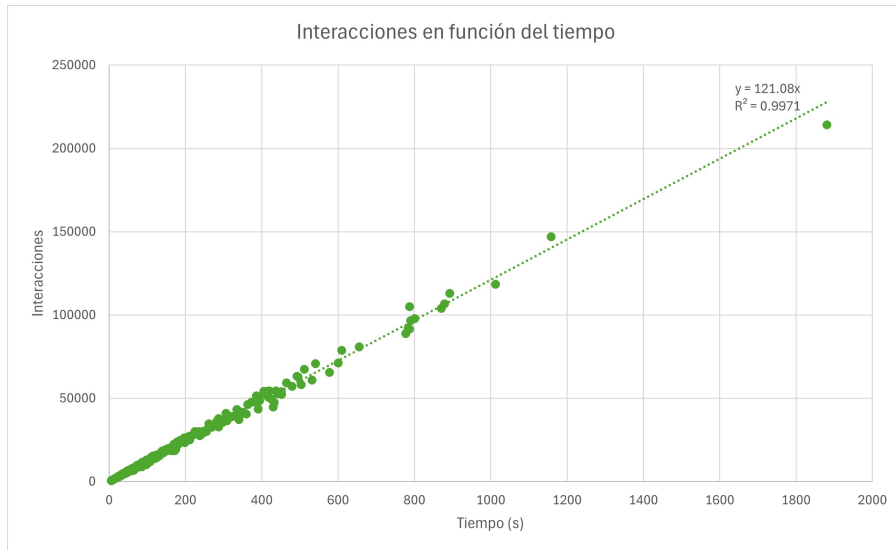


Figura VI.3: Tiempo contra interacciones

Tiempo promedio (s)	235.48
Interacciones promedio	28,797

Tabla VI.1: Tiempo e interacciones promedio

Para definir el funcionamiento y eficiencia del algoritmo en la Tabla [VI.1](#) se consiguieron los datos de tiempo promedio en segundos e interacciones promedio que otorgan los datos de las corridas realizadas. Obteniendo así un tiempo promedio de 235.48 segundos y 28,797 interacciones para llegar a un consenso poblacional en la totalidad de las pruebas.

El modelo muestra un comportamiento en el tiempo variable según la proporción inicial de la minoría en la Figura [VI.4](#). Cabe resaltar que la minoría tomada en este trabajo es "En Contra". Es notable el comportamiento del tiempo, el valor más alto se encuentra cuando la minoría ronda entre 45% y 55%. En caso contrario cuando la minoría se encuentra por debajo de 45% o arriba del 55% los tiempos decrecen. Además, se puede apreciar la caja y los bigotes por cada una de las proporciones iniciales de minoría, conforme la población se acerca a una distribución 50/50 se puede notar que el bigote superior cada vez es más largo, lo que indica variabilidad de tiempos más elevados.

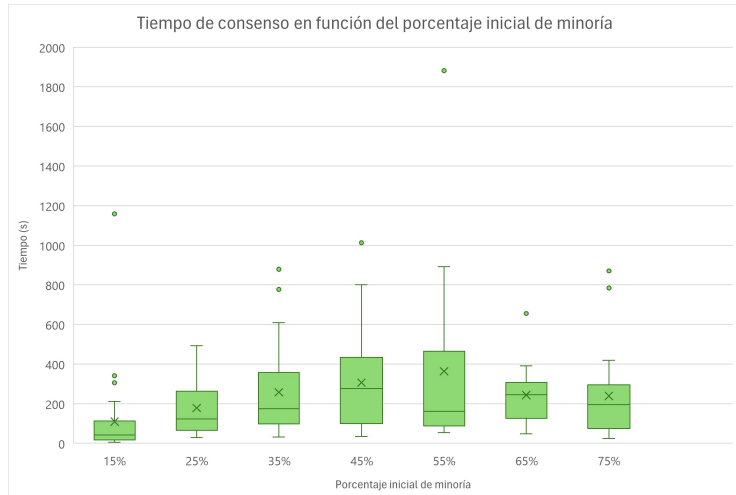


Figura VI.4: Tiempo por proporción inicial de la minoría

La gráfica muestra los promedios de tiempo de cada porcentaje inicial de la minoría. Además se que se encuentran alrededor de los 200 segundos. Este hecho respalda el dato del tiempo promedio en segundos de la Tabla VI.1

Debido a la relación lineal que se mostró en la Figura VI.3 entre el tiempo y las interacciones es de esperarse que la Figura VI.5 muestre el mismo comportamiento que VI.4. Las interacciones más altas son conseguidas entre 45 % y 55 %. En caso contrario cuando la minoría se encuentra por debajo de 45 % o arriba del 55 % las interacciones en su mayoría rondan valores entre 25,000 y 30,000 interacciones. De igual manera que con el tiempo, este modelo presenta los valores más grandes de interacciones conforme la población se acerca a una distribución 50/50.

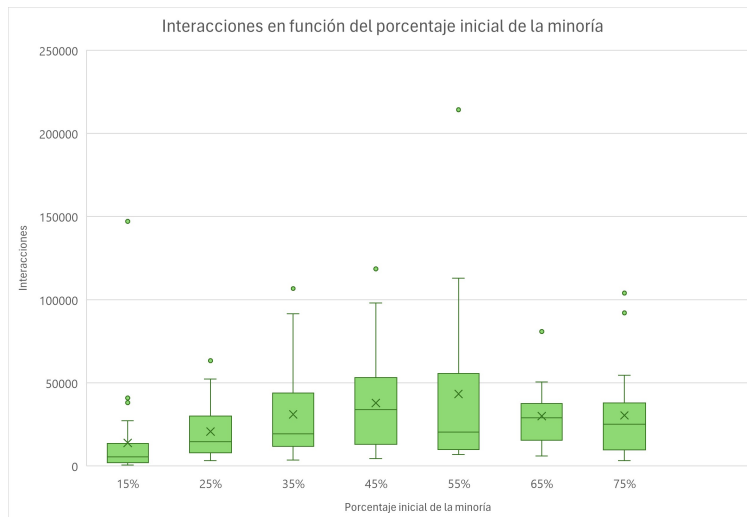


Figura VI.5: Interacciones por proporción inicial de la minoría

Esta gráfica muestra los promedios de interacciones de cada porcentaje inicial de la minoría. Además se que se encuentran alrededor de los 28,000 interacciones. Este hecho respalda el dato del interacciones promedio de la Tabla VI.1

Tanto la Figura VI.4 y VI.5 brindan una gran visibilidad del amplio rango de tiempos que

puede durar la simulación, dependiendo puramente de la proporción inicial de la minoría. Con una densidad de datos muy cercana a los valores mostrados en la Tabla VI.1.

B. Modelo de dinámica de opinión continuo: *Deffuant-Weisbuch Model*

El objetivo de este modelo, dada la opinión como valores en un rango continuo $[0,1]$, es conseguir el consenso de una población de tres posibles escenarios dependiendo de sus estados finales. A continuación se presenta el algoritmo utilizado y la eficiencia del modelo.

1. Algoritmo

En este algoritmo se utilizaron los paquetes y librerías *CSV*, *NumPy*, *Pandas*, *Matplotlib.pyplot*, *Matplotlib.animation*, *Time*, *Tkinter*, *Os*, *Itertools*, *Statistics*, *Random* y *Math*. El programa selecciona N cantidad de datos del CSV usado como base, convirtiendo los valores continuos $[0,10]$ a valores $[0,1]$ respectivamente, situándolos de forma aleatoria en la malla bidimensional. Luego los agentes interactúan entre sí dependiendo del umbral de tolerancia hasta llegar a un consenso, que puede ser de tipo unánime, unánime con extremistas o parcial. De esta manera se obtiene el tiempo en segundos, cantidad de interacciones y el tipo de consenso al que se llegó.

Diagrama de flujo

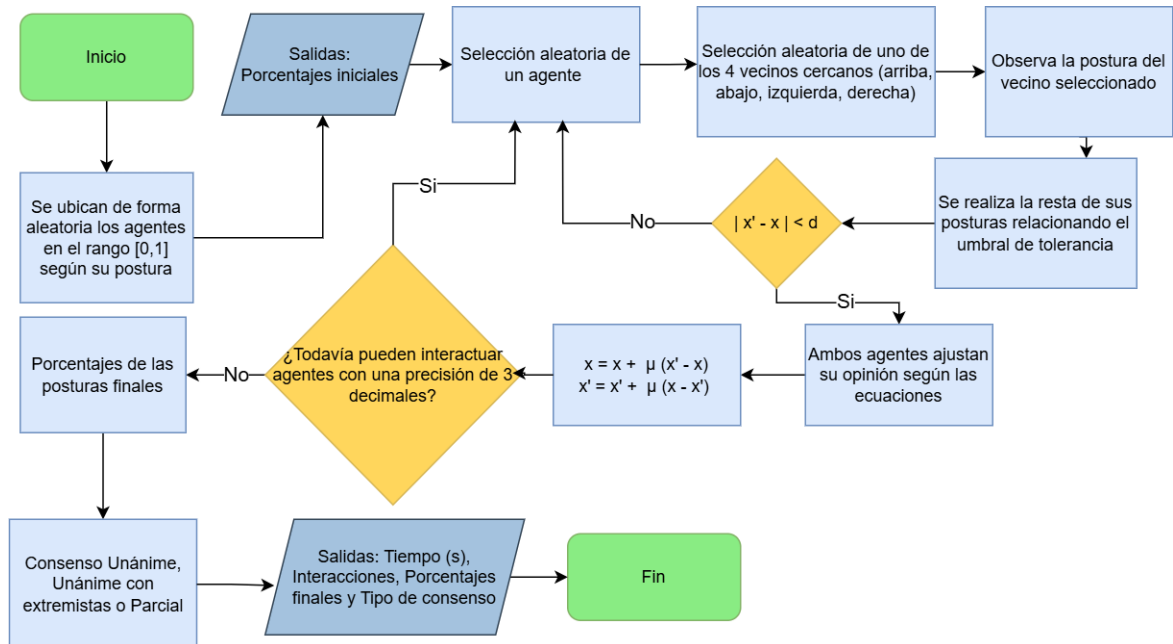


Figura VI.6: Diagrama de Flujo algoritmo de *Deffuant-Weisbuch Model*

2. Eficiencia

Para medir los tiempos se utilizó la herramienta *Time* para medir el tiempo al iniciar y al finalizar, de tal forma que se consiguiera así el tiempo de ejecución para las diferentes corridas que se realizaron con múltiples combinaciones de los parámetros. Para las corridas se trabajó con los siguientes parámetros y así observar la eficiencia del modelo:

- Parámetro de convergencia: $\mu = [0.1, 0.3, 0.5]$
- Umbral de tolerancia: $d = [0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$
- Cantidad de individuos: $N = [50, 100, 150, 200]$

Usando una misma base de datos donde se extraía el número de individuos de forma aleatoria.

En la Figura VI.7 se muestra el tiempo en segundos contra las interacciones producidas necesarias para llegar a un consenso. Se realizó una regresión la cual muestra que las interacciones aumentan linealmente a medida que el tiempo lo hace, mostrando así que el 99.63% de los datos se ajustan según la ecuación que relaciona dichas variables: $y = 102.79x$.

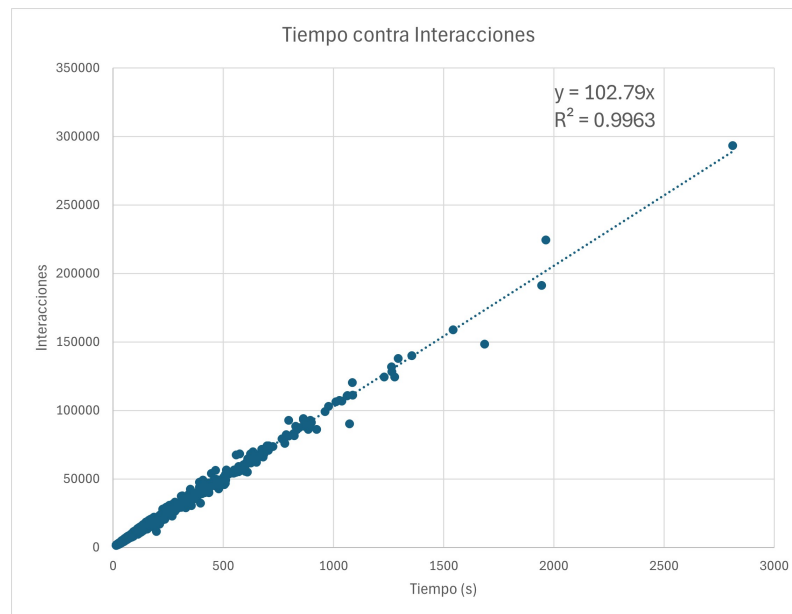


Figura VI.7: Tiempo contra interacciones

Para definir el funcionamiento y la eficiencia del algoritmo las siguientes figuras muestran a vistas generales el comportamiento del tiempo. En la Figura VI.8 se muestra el tiempo promedio para cada N cantidad de individuos.

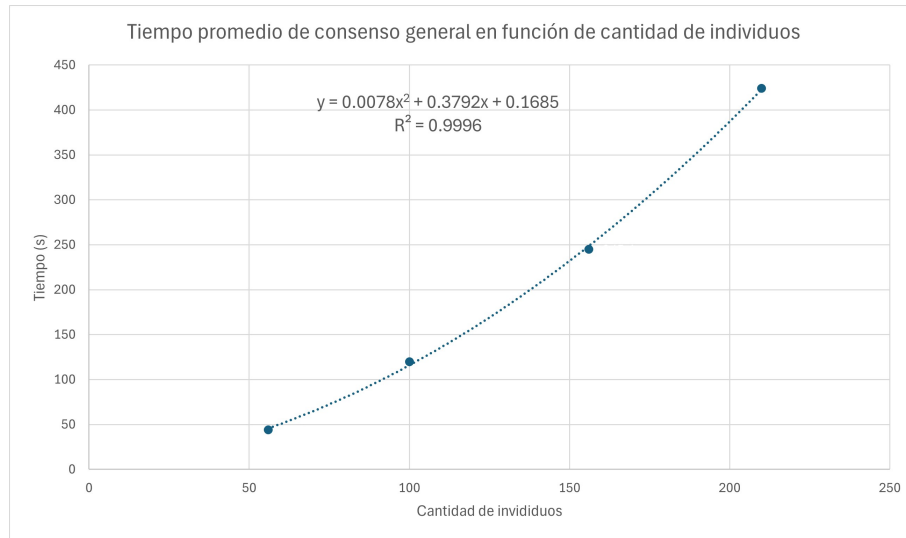


Figura VI.8: Tiempo promedio contra cantidad de individuos

Al aplicar una regresión polinómica de segundo grado se puede notar que los valores muestran una relación del 99.96 %. Estos 4 datos de la cantidad de agentes son suficientes para mostrar la relación cuadrática que existe. La ecuación de la regresión polinómica existente $y = 0.0078x^2 + 0.3792x + 0.1685$ indica explícitamente el grado de complejidad N^2 , donde el tiempo tiene un aumento al cuadrado, a medida que aumentan los agentes en el modelo.

La Figura VI.9 muestra el tiempo promedio en función de la cantidad de individuos para el tipo de consenso al que se llega, mostrando una tendencia de aumento según la cantidad de agentes como ya era sabido según la gráfica anterior. Ahora bien debido a los diferentes resultados de consenso que pueden ser obtenidos, el tiempo cambia para cada uno de ellos.

Para la eficiencia de tiempos del programa se muestra una relación de tipo polinómica de segundo grado para cada uno de los tipos de consenso a los que se llega y como se mantiene la relación que se mostró en la Figura VI.8

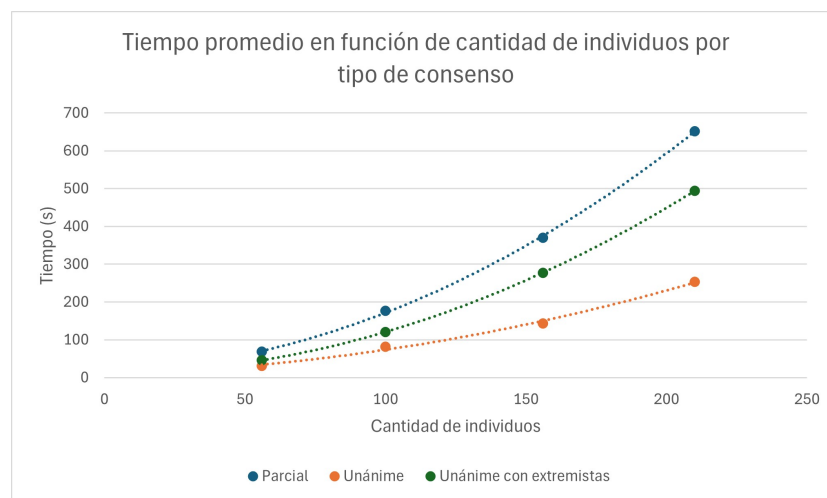


Figura VI.9: Tiempo promedio contra cantidad de individuos por tipo de consenso

La información de las relaciones para cada tipo de consenso se listan a continuación:

- Parcial: $y = 0.0134x^2 + 0.2092x + 17027$
- Unánime con extremistas: $y = 0.011x^2 - 0.009x + 12.026$
- Unánime: $y = 0.0046x^2 + 0.1732x + 9.99634$

Para el consenso de tipo parcial se tiene un relación de datos del 99.97%, para el tipo Unánime con extremistas del 100% y del tipo Unánime del 99.54%. Esto quiere decir que los datos por tipo de consenso tienen una relación cuadrática entre el tiempo y la cantidad de agentes. Mostrando un incremento significativo entre los consensos, siendo el más eficiente el Unánime, luego Unánime con extremistas y por último el Parcial como era de esperarse.

El modelo también muestra un comportamiento en el tiempo variable según el umbral de tolerancia como se aprecia en la Figura VI.10. Es notable el comportamiento de los tiempos y como estos aumentan según el umbral de tolerancia va disminuyendo. En el caso de los valores de umbral de tolerancia 0.9 y 1.0 están muy cercanos a 0.8 y luego de 0.8 a 0.2 se ve bien marcada la tendencia de aumento en los tiempos. Además nótese que los valores atípicos se presentan más en umbrales muy bajos, así como los bigotes de las cajas son mayores en tolerancias pequeñas.

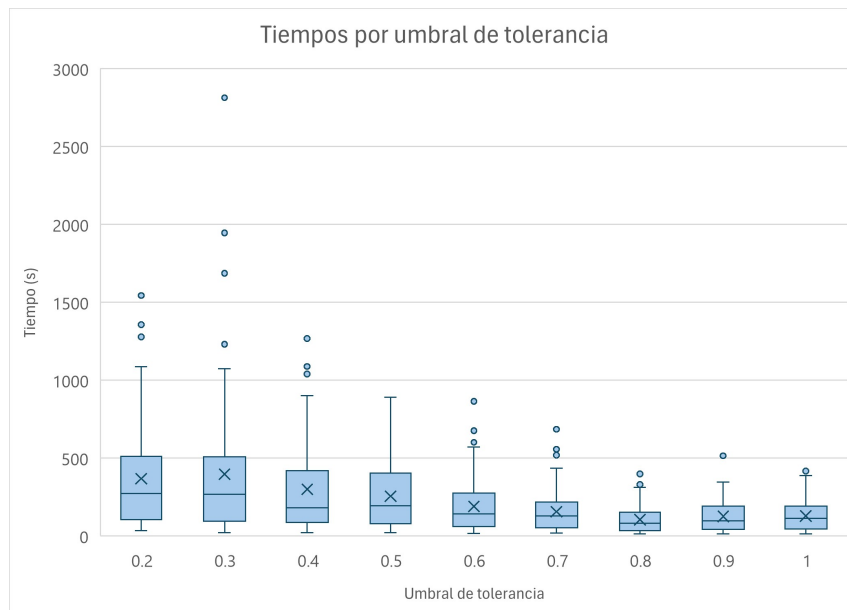


Figura VI.10: Tiempos por cada umbral de tolerancia

Debido a la relación lineal que se mostró en la Figura VI.7 entre el tiempo y las interacciones es de esperarse que la Figura VI.11 muestre el mismo comportamiento que VI.10. Las interacciones más altas son conseguidas para tolerancias bajas, así como valores atípicos y los bigotes más grandes. La tendencia de aumento de interacciones a medida que el umbral de tolerancia disminuye también es evidente.

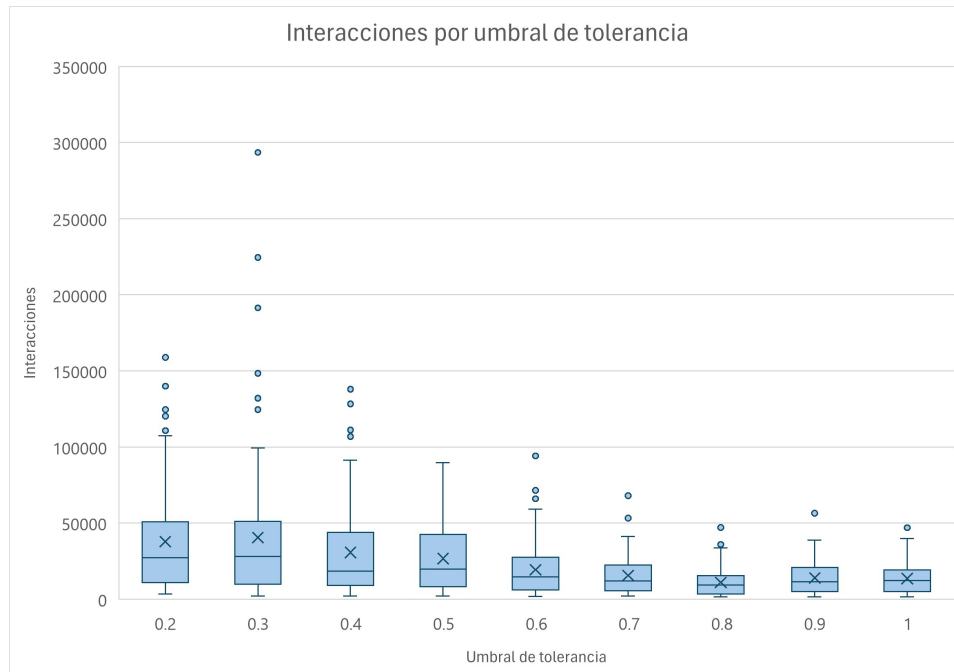


Figura VI.11: Interacciones por cada umbral de tolerancia

Implementación de los modelos

Al implementar ambos modelos se consiguieron resultados de las simulaciones, así mismo datos de dichas simulaciones, los cuales son resumidos e interpretados en diferentes gráficas que muestran ciertos comportamientos que brindan información específica de ambos modelos. El primer modelo a presentar es el modelo discreto *Voter Model*

A. *Voter Model*

1. Simulación

La simulación correspondiente al Voter Model consta de un mapa bidimensional de dos colores: rojo y azul. Los valores del archivo CSV se colocan en una malla bidimensional de forma aleatoria, lo cual indica que cada prueba tiene diferentes condiciones iniciales respecto a la posición de los agentes.

Dichos valores corresponden al voto de opinión de los diputados del Congreso de la República de Guatemala para el año 2024, en diferentes fechas y sesiones, que pueden encontrarse en la base de datos [\[1\]](#). Los diputados tienen dos opciones a elegir: *A favor* o *En contra*. Dentro de los registros que muestra el Congreso de la República existen otros dos tipos de votos: *Ausente* y *Ausente con licencia*. Ambos son votos no tomados en cuenta debido al ausentismo; sin embargo, cuando el diputado tiene licencia, es un permiso que se le otorga para ausentarse.

El color rojo corresponde al voto *En contra*, mientras que el color azul corresponde al voto *A favor*. Como se mencionó anteriormente, estos votos se representan como -1 y 1, respectivamente. Es importante mantener la cantidad de individuos fija al hablar de los diputados de la República. Por ello, los votos *Ausente* y *Ausente con licencia* serán convertidos de manera aleatoria en valores de 1 y -1, obteniendo así solamente dos tipos de posturas. En esta simulación se hizo uso del *upsampling* para equilibrar los datos.

La malla a trabajar es un espacio bidimensional cuadrado, lo que significa que el programa busca realizar un ajuste lo más cuadrado posible a la malla, basado en la cantidad de datos existentes.

Como se mencionó en capítulos anteriores, la población con la que se trabaja es de 159 o 160, debido a situaciones en el Congreso; sin embargo, para completar una malla cuadrada se necesitan agregar más datos. En este momento se hace uso del *upsampling* para agregar datos de manera aleatoria entre 1 y -1, de tal forma que se logre un equilibrio en los datos y se ajuste la malla bidimensional, asegurando que sea lo más cuadrada posible. Esto a su vez garantiza diferentes condiciones iniciales por ordenamiento y proporciones iniciales para observar cómo se comporta el modelo en función de sus agentes.

En la simulación, la imagen inicial muestra los estados iniciales junto con las proporciones de ambas opiniones al establecerlas en la malla. Pasado el tiempo de simulación, se llega a un consenso poblacional, el cual se representa con un color unánime que cubre toda la malla; en este caso, puede ser *A favor* o *En contra*.

A modo de ilustración se muestran dos casos donde se puede visualizar la aleatoriedad de las posiciones y las proporciones, lo cual indica que con diferentes proporciones los resultados pueden cambiar. En las Figuras VII.1 y VII.3 se presentan dos estados iniciales diferentes provenientes de la misma base de datos. Así, la simulación puede terminar siempre en uno de dos posibles estados, que son representados en las Figuras VII.2 y VII.4. El consenso se considerará alcanzado cuando el total de la población opine de la misma manera, asegurando así que sea unánime. Esta simulación muestra posibles escenarios si los diputados debatieran hasta llegar a un consenso unánime.

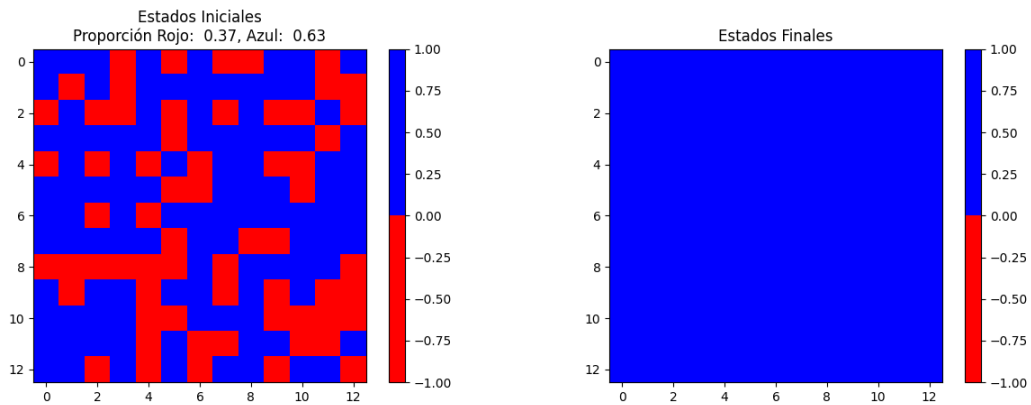


Figura VII.1: Estados iniciales base 1 corrida 4 Figura VII.2: Estados finales base 1 corrida 4

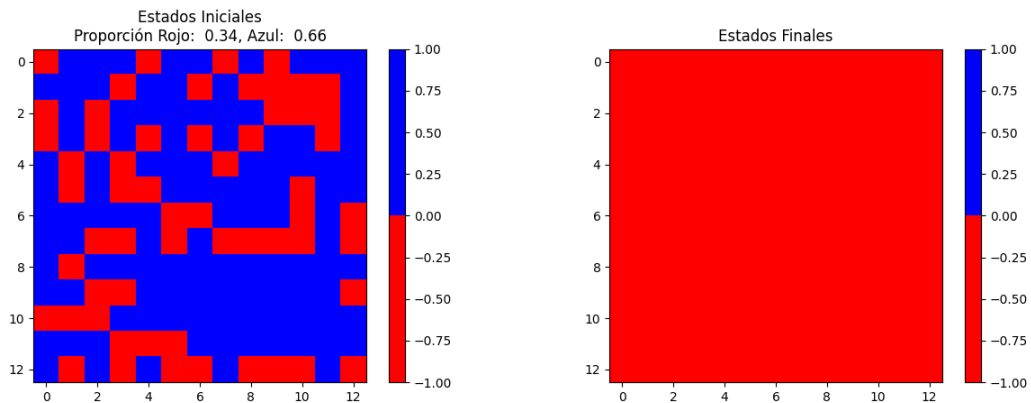


Figura VII.3: Estados iniciales base 1 corrida 0 Figura VII.4: Estados finales base 1 corrida 0

2. Resultados

A continuación en la Figura VII.5 se muestra la relación existente entre el porcentaje inicial de la minoría contra el porcentaje poblacional convencido. La gráfica es solo para hablar de minoría y como esta puede contribuir a la decisión de la población.

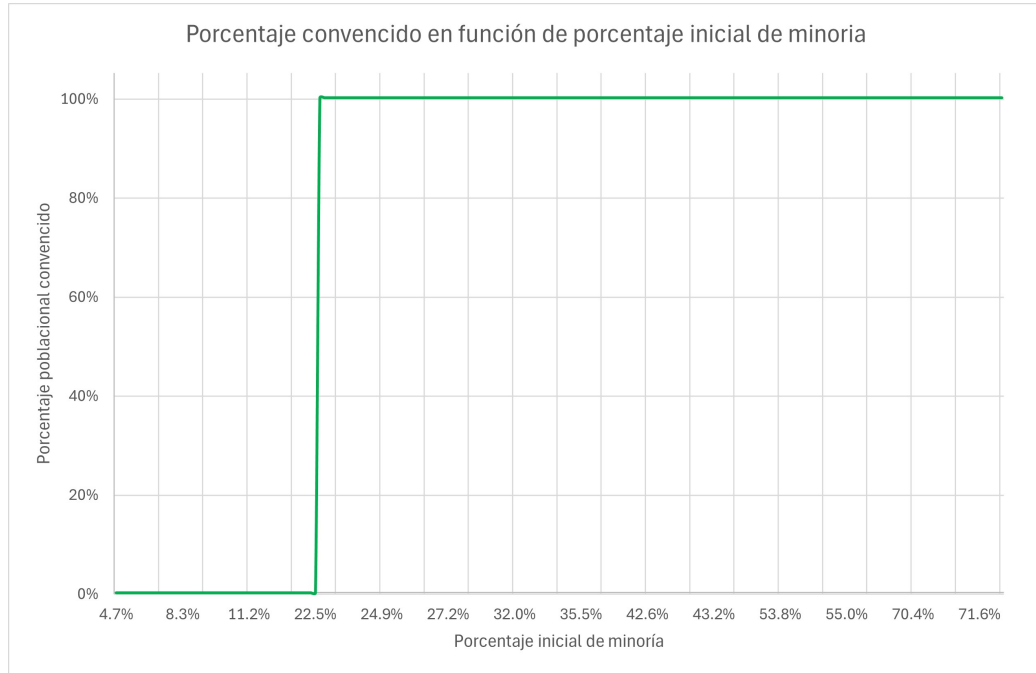


Figura VII.5: Porcentaje convencido en función del porcentaje inicial de la minoría

B. *Deffuant-Weisbuch Model*

1. Simulación

La simulación correspondiente al *Deffuant-Weisbuch Model* consta de un mapa bidimensional multicolor. Se seleccionan N valores del CSV de forma aleatoria y se colocan en la malla bidimensional de forma aleatoria, lo cual indica que cada prueba tiene una diferente condición inicial, diferentes proporciones iniciales y diferentes posiciones iniciales.

Dichos valores fueron extraídos de *Kaggle*, correspondientes a una encuesta *Net Promoter Score* (NPS) para servicios financieros del año 2021 de un banco minorista, donde los agentes daban su opinión de satisfacción entre en un rango del 1 al 10, siendo 1 muy malo y 10 muy bueno. En la simulación se ha dividido cada valor entre 10 para tener un rango de valores $[0,1]$ en incrementos de 0.1. En la malla, el código de colores es visible en las figuras de las simulaciones; a modo de ejemplo, pueden tomarse las figuras de esta sección o ver en anexos 2 las imágenes de distribución de los valores con sus respectivos colores.

En esta simulación entraron en juego tres variables, como se mencionó en el capítulo anterior. La base original consta de 5,000 datos de los cuales se toman diferentes muestras. Para la simulación, al igual que en el *Voter Model*, se hizo uso del *upsampling* para el equilibrio de los datos. El ajuste de los datos puede depender del tamaño de N ; se puede observar que para $N = 50$ aumenta a 56, $N = 100$ se mantiene inmóvil, $N = 150$ aumenta a 156 y $N = 200$ aumenta a 210. Se agregan datos de manera

aleatoria en el rango continuo en el que se está trabajando, con lo que se mantiene la aleatoriedad y se asegura que la malla sea lo más cuadrada posible. Esto asegura diferentes condiciones iniciales debido al ordenamiento y selección de los datos, además de las combinaciones entre las variables existentes, lo que permite observar el comportamiento del modelo.

En la simulación se muestran dos gráficos en una sola imagen. Para las imágenes iniciales, el gráfico de la izquierda presenta un mapa de colores que simula la malla bidimensional con su escala de colores para los valores de satisfacción de la muestra. Mientras que el gráfico de la derecha muestra la opinión de cada agente para ver la distribución por cada posible valor de satisfacción. Estos gráficos se acompañan del umbral de tolerancia y del parámetro de convergencia que se utiliza. Pasado el tiempo, se pueden observar las interacciones entre los agentes y cómo cambian tanto los colores de la malla como la ubicación de los puntos, mostrando las convergencias.

A modo de ilustración, se presentan diversos casos donde se puede visualizar la aleatoriedad de las posiciones y la cantidad de opiniones diferentes, lo cual indica que con diferentes combinaciones de variables, los resultados pueden cambiar. En las Figuras VII.6 y VII.8 se presentan dos estados iniciales diferentes provenientes de la misma base, con diferentes parámetros de convergencia y distinta cantidad de agentes, con un umbral de tolerancia de 0.9 a modo de ejemplo. Así, la simulación puede terminar en muchos estados finales; sin embargo, puede ser uno de tres posibles tipos de consenso. Esto se puede observar en las figuras de estados finales VII.7 y VII.9

Cabe destacar el proceso de agrupado final. Cuando los parámetros de convergencia son muy bajos y el número de agentes muy alto, usualmente los datos no se agrupan de manera correcta; esto se debe a la mecánica de acercamiento que tienen los datos. Por ello, la Figura VII.9 es una muestra de ello, donde se ve el mapa del mismo color; sin embargo, la dispersión de los puntos muestra dos valores diferentes. También, depende del umbral de tolerancia, ya que se pueden llegar a presentar los otros tipos de consensos. En anexos se encuentran las imágenes de cada corrida realizada [2]

El consenso se toma en cuenta cuando no existen más interacciones posibles entre los vecinos cercanos y el agente seleccionado al azar, con una precisión de 3 decimales en sus opiniones. Luego de que se detienen las interacciones, se hace una evaluación acerca de la población final; si el 80 % de la población opina de la misma manera, se obtiene un consenso *unánime con extremistas*; si es 100 % es un consenso *unánime* y, en caso contrario, se tendría un consenso *parcial*. Debido a ello, se evalúan los porcentajes finales y se toma una decisión de consenso.

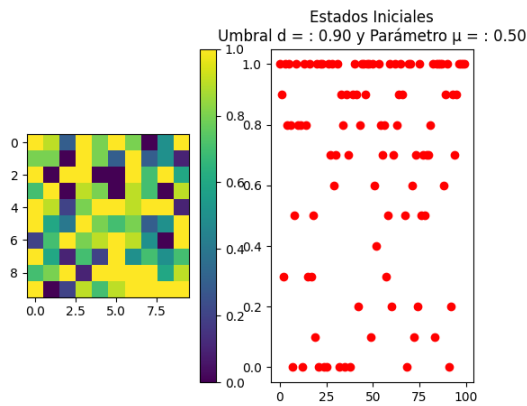


Figura VII.6: Estado inicial $d = 0.9$, $\mu = 0.5$

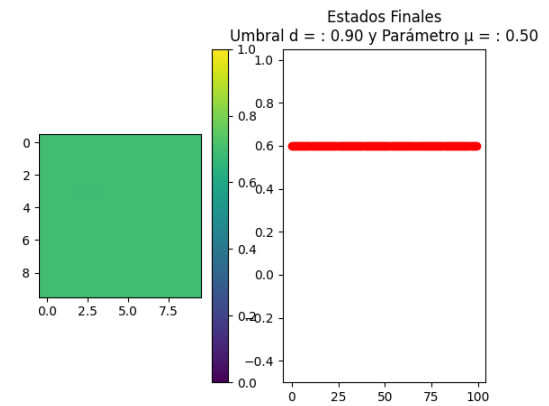


Figura VII.7: Estado final $d = 0.9$, $\mu = 0.5$

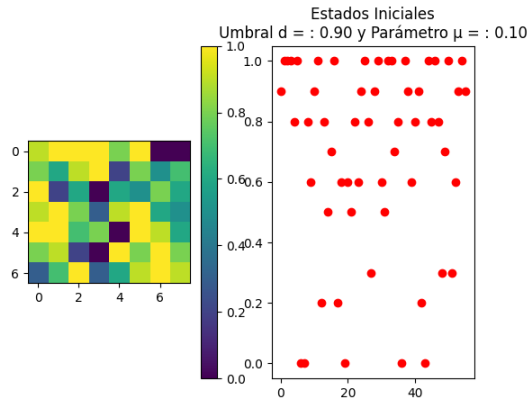


Figura VII.8: Estado inicial $d = 0.9$, $\mu = 0.1$

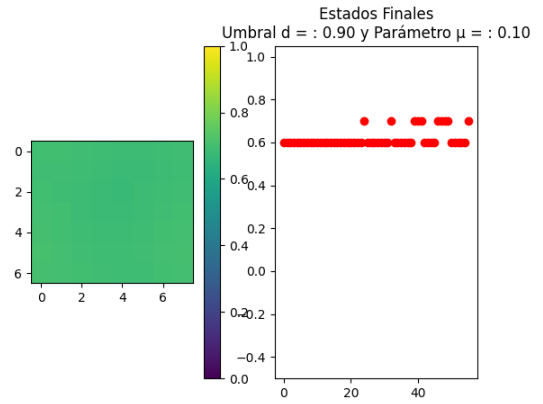


Figura VII.9: Estado final $d = 0.9$, $\mu = 0.1$

2. Resultados

A continuación se muestra el conjunto de resultados obtenidos acerca del modelo.

Las Figuras VII.10a y VII.10b muestran el tiempo e interacciones promedio en función del umbral de tolerancia respectivamente para observar la relación que existe entre el parámetro de convergencia y los valores de tolerancia.

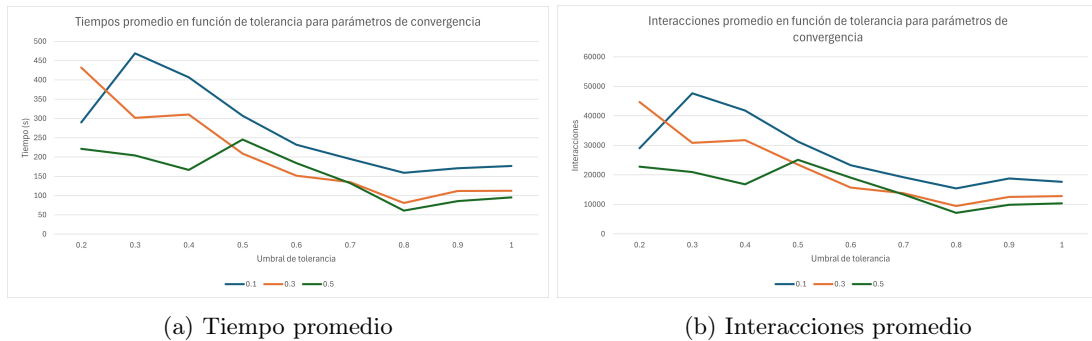


Figura VII.10: Parámetro de convergencia por cada umbral de tolerancia

Las Figuras VII.11a y VII.11b muestran el tiempo e interacciones promedio en función del umbral de tolerancia respectivamente para observar la relación que existe entre la cantidad de individuos y los valores de tolerancia para un valor de convergencia igual a 0.1.

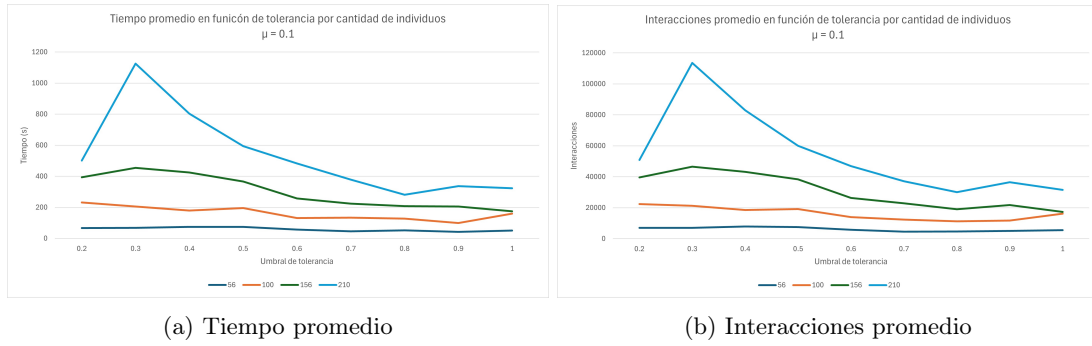


Figura VII.11: Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.1$

Las Figuras VII.12a y VII.12b muestran el tiempo e interacciones promedio en función del umbral de tolerancia respectivamente para observar la relación que existe entre la cantidad de individuos y los valores de tolerancia para un valor de convergencia igual a 0.3.

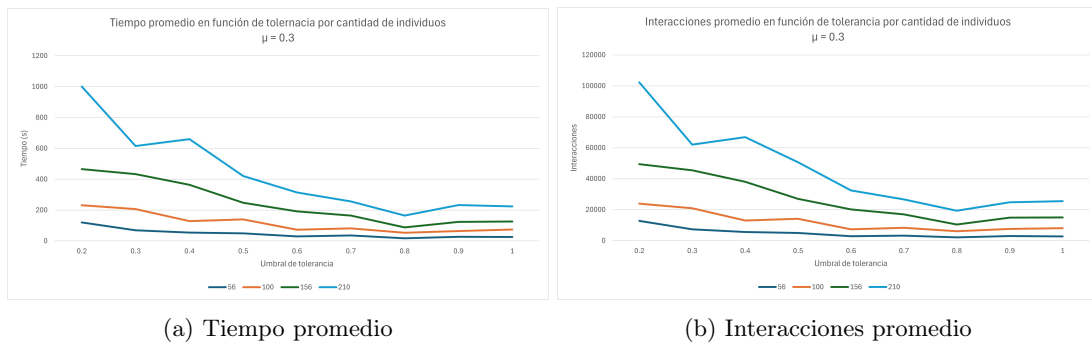


Figura VII.12: Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.3$

Las Figuras VII.13a y VII.13b muestran el tiempo e interacciones promedio en función del umbral de tolerancia respectivamente para observar la relación que existe entre la cantidad de individuos y los valores de tolerancia para un valor de convergencia igual a 0.5.

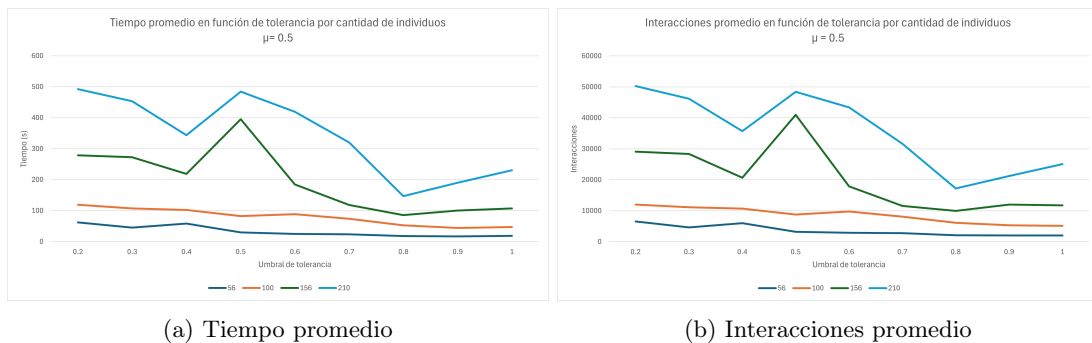


Figura VII.13: Cantidad de individuos por cada umbral de tolerancia para $\mu = 0.5$

En la Figura VII.14a muestra el tiempo promedio en función del umbral de tolerancia para observar la relación temporal que existe entre el tipo de consenso y la tolerancia. La Figura VII.14b muestra la frecuencia de los resultados que existen en función del umbral de tolerancia para cada

tipo de consenso que existe y ver la relación que existe más detallada entre el tipo de consenso y la tolerancia. Todo para un parámetro de convergencia igual a 0.1

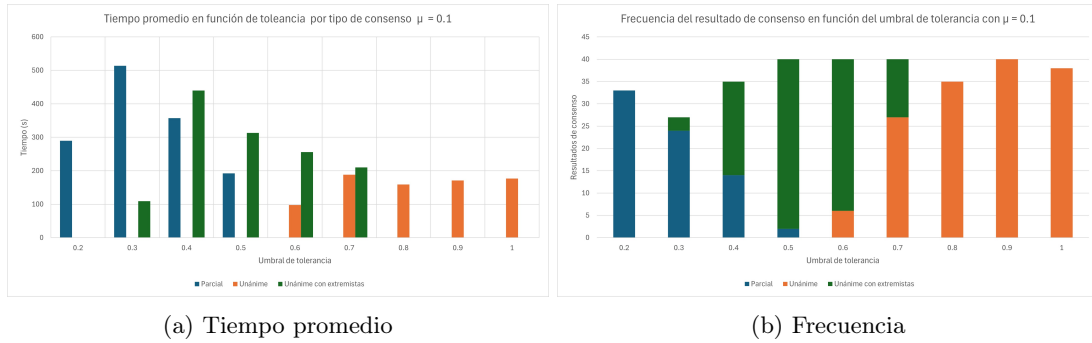


Figura VII.14: Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.1$

En la Figura VII.15a muestra el tiempo promedio en función del umbral de tolerancia para observar la relación temporal que existe entre el tipo de consenso y la tolerancia. La Figura VII.15b muestra la frecuencia de los resultados que existen en función del umbral de tolerancia para cada tipo de consenso que existe y ver la relación que existe más detallada entre el tipo de consenso y la tolerancia. Todo para un parámetro de convergencia igual a 0.3

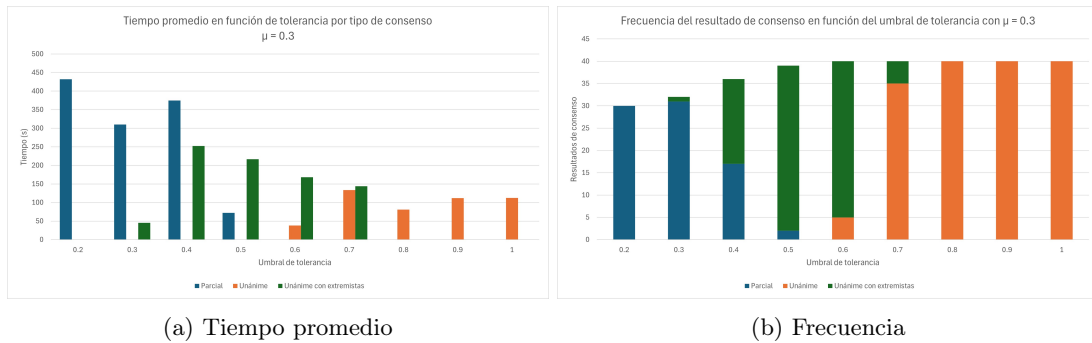


Figura VII.15: Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.3$

En la Figura VII.16a muestra el tiempo promedio en función del umbral de tolerancia para observar la relación temporal que existe entre el tipo de consenso y la tolerancia. La Figura VII.16b muestra la frecuencia de los resultados que existen en función del umbral de tolerancia para cada tipo de consenso que existe y ver la relación que existe más detallada entre el tipo de consenso y la tolerancia. Todo para un parámetro de convergencia igual a 0.5

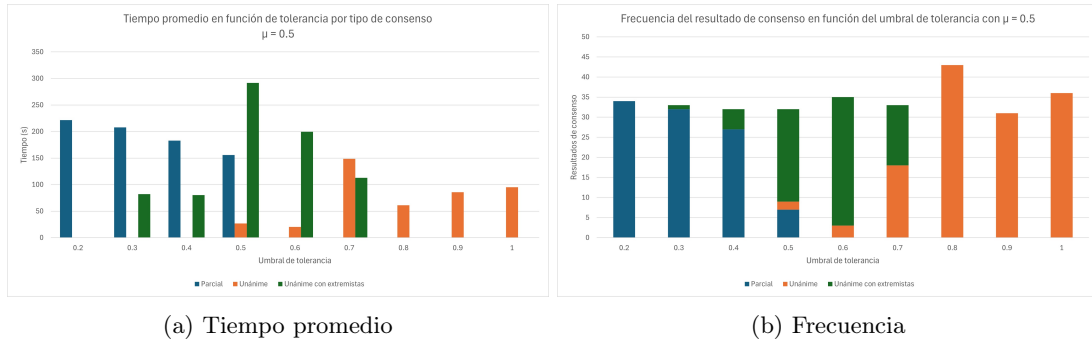


Figura VII.16: Tipo de consenso por cada umbral de tolerancia $\mu = 0.5$

En la Figura VII.17a muestra el tiempo promedio en función del parámetro de convergencia para observar la relación temporal que existe entre el tipo de consenso y la convergencia. La Figura VII.17b muestra la frecuencia de los resultados que existen en función del parámetro de convergencia para cada tipo de consenso que existe y ver la relación que existe más detallada entre el tipo de consenso y la convergencia para todas las tolerancias.

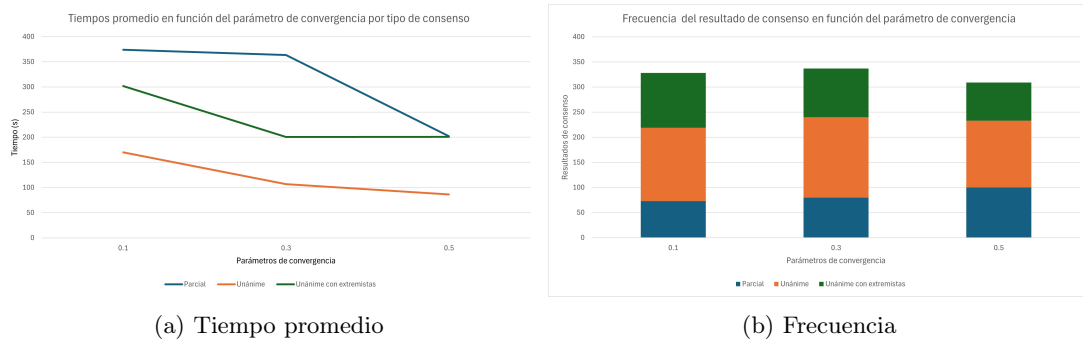


Figura VII.17: Tipos de consenso por cada parámetro de convergencia

La Figura VII.18 muestra la frecuencia de resultados en función del parámetro de convergencia para ver la relación entre el tipo de consenso y la convergencia.

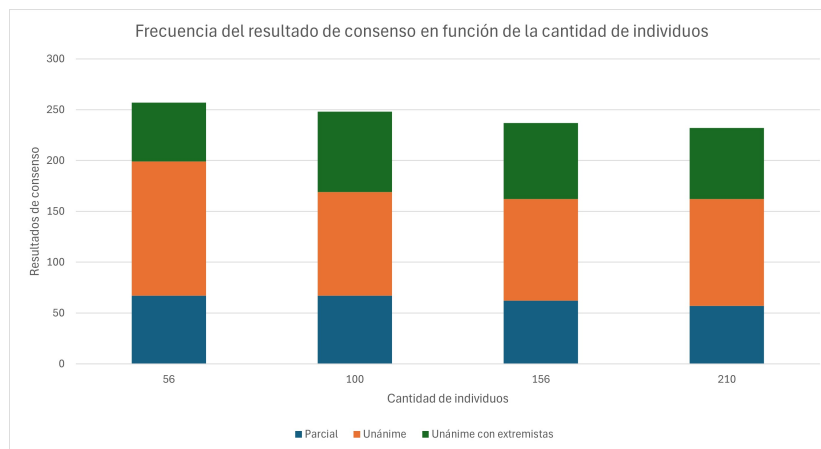


Figura VII.18: Frecuencia del resultado de consenso en función de la cantidad de individuos

Discusión de resultados

Los resultados obtenidos en el capítulo sobre el modelo discreto *Voter Model* (Figura VII.5) muestran claramente que una minoría puede influir en una población y cambiar su opinión a partir de cierto porcentaje inicial. Dado que el modelo se basa en dos opiniones simétricas, los valores de la minoría se han evaluado hasta el 75 %, lo que es suficiente para observar las tendencias sin redundancias debido a la simetría inherente del modelo. La Figura VII.5 muestra un cambio abrupto de 0 % a 100 % en la proporción de población convencida, indicando que la minoría alcanza un punto crítico en el que puede cambiar la decisión de todo el grupo. Esta transición señala el umbral necesario en la proporción inicial de la minoría para disuadir y modificar la opinión de la mayoría, destacando el comportamiento de transición de fase en el modelo.

En su trabajo, (Castellano y cols., 2009) exploran la relación entre el modelo de Sznajd y su variante con el *Voter Model*, señalando que el modelo de Sznajd, comúnmente representado en una dimensión como una cadena de espines, presenta un comportamiento similar al *Voter Model* cuando se extiende a dos dimensiones en una malla. Aunque las dinámicas de ambos modelos son diferentes, la similitud en los resultados permite hacer comparaciones válidas entre ellos. En el estudio de (Centola y cols., 2018) sobre el modelo de Sznajd aplicado a la dinámica de opinión, se destaca el impacto de las minorías en la decisión grupal, lo cual proporciona un marco útil para interpretar los efectos observados en el *Voter Model* sobre la influencia de minorías en la dinámica de consensos.

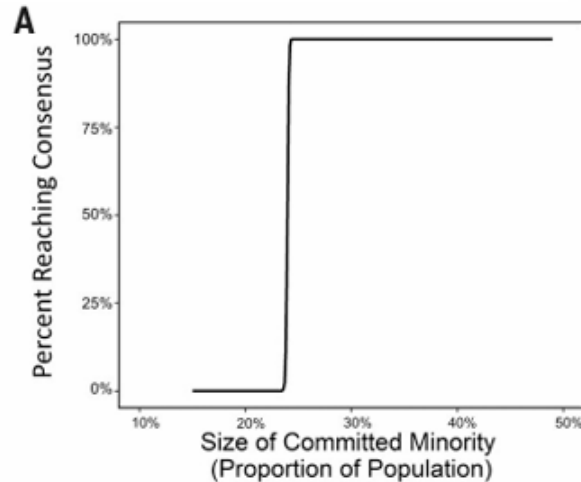


Figura VIII.1: Porcentaje de población consiguiendo el consenso en función del tamaño de la minoría
Fuente: Centola, D. 2018

En el estudio de (Centola y cols., 2018), se introduce el concepto de "*Masa Crítica*", definido como el porcentaje mínimo de minoría necesario para cambiar la opinión de una población, estimado en un 25%. En un estudio experimental similar realizado en España (García Berdote, 2018), el autor halló un valor de Masa Crítica de aproximadamente 10%. Es importante señalar que estos estudios se realizaron en el contexto del modelo de Sznajd. Sin embargo, el *Voter Model*, que presenta un comportamiento análogo, mostró en nuestras simulaciones las simulaciones realizadas un valor de Masa Crítica del 22.5%. La diferencia entre dicho valor y los valores conseguidos en estudios previos se debe a la diferente dinámica que maneja el modelo de Sznajd, a pesar de ser similares en funcionamiento, no son idénticos. A pesar que este valor difiere ligeramente de los estudios previos, es lo suficientemente cercano como para sugerir que, en el *Voter Model*, una minoría del 22.5% es suficiente para provocar un cambio significativo en la opinión de la población y lograr un consenso.

El comportamiento del *Voter Model* puede compararse con el modelo de Ising, especialmente en la gráfica teórica de transición de fase magnética que se muestra en VI.1 para una temperatura específica. Al comparar esta figura con la Figura VII.5, que representa la dinámica de opinión en el *Voter Model*, se observa un comportamiento similar, aunque no idéntico, en términos de transición de fase. En este caso, el punto de Masa Crítica actúa como un punto de transición para el consenso. Estos resultados sugieren una influencia implícita del modelo de Ising en la dinámica de opinión, donde la transición de fase magnética refleja de manera análoga la transición de fase en el consenso grupal. Esto indica que el *Voter Model* puede aplicarse a situaciones de debate o toma de decisiones políticas para analizar cómo se logra el consenso en el tiempo, usando una dinámica similar a la del modelo de Ising.

Por otra parte, los resultados obtenidos para el modelo continuo *Deffuant-Weisbuch Model* presentan un comportamiento completamente diferente al del *Voter Model*. Las Figuras VII.10a y VII.10b muestran un decremento debido al parámetro de convergencia (μ) y la eficiencia en la formación de consensos se ve afectada cuando μ es bajo ($\mu = 0.1$) como es de esperarse, el modelo es incapaz de alcanzar opiniones muy cercanas. Por lo tanto la eficiencia decrece cuando μ también lo hace, aunque entre tolerancias 0.5 y 0.7 esta tendencia no se cumple. Las Figuras VII.11a a VII.13b confirman que un valor pequeño de μ disminuye la eficacia de converger. Además, se observa que una mayor cantidad de individuos reduce la eficiencia del modelo, ya que se requiere de más tiempo e interacciones para alcanzar un consenso. Las Figuras VII.14a a VII.16b muestran que el parámetro de convergencia resulta menos eficaz al ser menor.

En cuanto al tipo de consenso, se nota que depende del umbral de tolerancia (d). Cuando los

umbrales son bajos, solo se observan dos tipos de consensos: *Parcial* y *Unánime con extremistas*. A medida que el umbral crece se encuentran solo los dos tipos de consensos unánimes, independientemente del parámetro de convergencia (μ). Las Figuras VII.17a y VII.17b reflejan esta relación entre el tipo de consenso y el parámetro de convergencia, mientras que la figura VII.18 muestra la cantidad de individuos N también influye en el tipo de consenso. (Deffuant y cols., 2000) señala que los factores N (cantidad de individuos) y μ solo modifican tiempos e interacciones necesarios para llegar al consenso, mientras que el umbral de tolerancia es el factor determinante para el tipo de consenso. Los resultados confirman esta afirmación: las Figuras VII.14a a VII.16b muestran que cuando $d > 7$, el consenso es típicamente unánime; en el rango $4 < d < 7$, el consenso tiende a ser unánime con extremistas, y cuando $d < 4$, el consenso es principalmente parcial, aunque ocasionalmente puede ser unánime con extremistas.

En la literatura original, Deffuant también indica que para valores de tolerancia menores a tres ($d < 3$), los datos tienden a converger a 2 o más picos, lo cual representa una sociedad dividida en diferentes posturas. Esto se observa en la Figura VIII.2, donde ilustran estas divisiones dentro de un contexto de opiniones divergente.

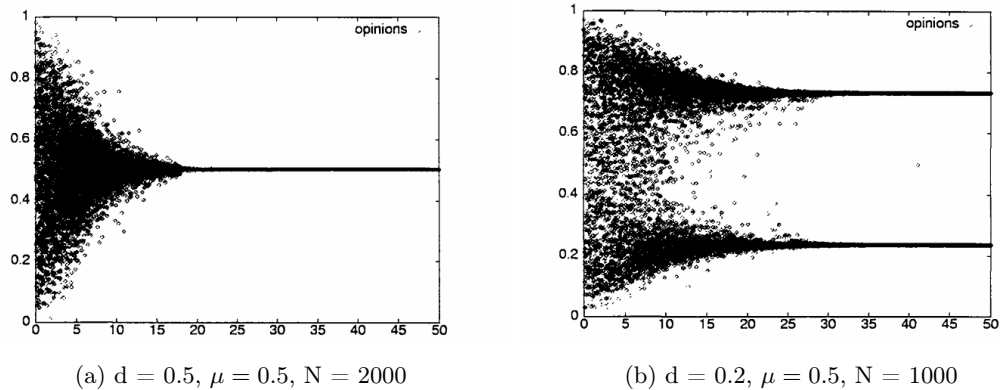


Figura VIII.2: Gráficas de convergencia temporal
Fuente: Deffuant, G. 2000

En este trabajo, sin embargo, los resultados difieren. El umbral de tolerancia más alto en el que se obtuvo un consenso de tipo parcial fue para $d = 0.5$, con un parámetro de convergencia de $\mu = 0.1$. Esta diferencia puede atribuirse a que en las simulaciones los agentes estaban restringidos a interactuar solamente con sus vecinos cercanos lo, cual limita significativamente el intercambio de opiniones. En esencia, estos resultados confirman el planteamiento de Deffuant, los individuos individuo fraternizan con aquellos que comparten opiniones similares. Sin embargo, cuando existe un umbral de tolerancia bajo, la interacción se vuelve limitada, ya que no habrá "apertura" al intercambio de opiniones, esto generará más posturas por lo tanto más subgrupos. Esto explica por qué en las simulaciones 2 es muy extraño ver dos picos de consenso bien definidos, debido a las restricciones que existen entre los individuos para interactuar.

Comparar directamente el *Deffuant-Weisbuch Model* con el modelo de Ising es complejo, ya que el *Deffuant-Weisbuch Model* ha evolucionado significativamente desde los primeros modelos de dinámica de opinión, como el *Voter Model*. A diferencia de este último, el modelo continuo no muestra un comportamiento tan cercano al modelo de Ising. Aunque el modelo de Ising es la base conceptual para muchos modelos de dinámica de opinión, con el tiempo, estos han incorporado particularidades que los hacen menos comparables con su modelo base. Sin embargo, es posible notar la influencia del modelo de ISing en varios modelos continuos de dinámica de opinión, donde las opiniones tienden a alinearse con aquellas que están cercanas en el espectro de posturas, proporcionando una solución a problemáticas sociales que implican un rango continuo de opiniones. Esto indica, que a pesar de sus diferencias, ambos modelos provienen de un mismo fundamento.

Es importante también reconocer que el *Voter Model* y *Deffuant-Weisbuch Model* son aplicables en contextos diferentes debido a la naturaleza discreta del primero y continua del segundo. Por ejemplo, el *Voter Model* es eficaz para situaciones donde se necesita alcanzar si o si un consenso unánime en un grupo con posturas binarias, mientras que el *Deffuant-Weisbuch Model* es más adecuado para poblaciones con opiniones diversas y dispersas, donde las posturas cercanas puedan agruparse para llegar a un consenso. Así, ninguno de los modelos es intrínsecamente superior, simplemente están diseñados para abordar problemáticas distintas de dinámica de opinión.

Conclusiones

A través de Python, se implementaron dos algoritmos para modelos de dinámica de opinión basados en el modelo de Ising. El modelo discreto, *Voter Model*, fue validado mediante un programa que simula una votación en el Congreso de la República de Guatemala para el año 2024 en diferentes escenarios. Los resultados de este modelo mostraron un comportamiento similar a una transición de fase, donde se evidenció cómo una minoría puede influir en la decisión de una población. Esta simulación ilustró una aplicación eficaz del *Voter Model* en situaciones reales de toma de decisiones binarias.

Por otro lado, el modelo continuo, *Deffuant-Weisbuch Model*, se validó a través de un programa que simula una encuesta de satisfacción (NPS) para un banco, variando los parámetros del modelo. Los resultados mostraron cómo las opiniones de la población tienden a alinearse hacia un consenso, mostrando una similitud con el modelo de Ising en términos de influencia de opinión. Esta simulación demostró cómo el *Deffuant-Weisbuch Model* es efectivo en situaciones con múltiples posturas, confirmando su aplicabilidad en problemas con opiniones continuas.

Ambos modelos demostraron la influencia social en la opinión individual, siendo más notable en el modelo continuo debido a la gama de opiniones y los umbrales de tolerancia considerados. En ambas simulaciones, se observó cómo las interacciones sociales y la influencia de agentes externos afectan el estado final de un grupo, favoreciendo una postura sobre otras en función del modelo utilizado. En el modelo discreto, se observó cómo una postura dominante absorbía rápidamente a las minorías, mientras que en el modelo continuo, las opiniones finales podían variar en función de las interacciones. Las posturas iniciales resultaron ser determinantes en el resultado final: cuando existe una mayoría inicial que favorece una postura, esta mayoría influye significativamente en los demás agentes, afectando así las opiniones de las minorías y sesgando el consenso.

Con base en estas simulaciones, se concluye que el *Voter Model* es adecuado para situaciones con dos posturas, como debates o elecciones entre dos candidatos. En cambio, el *Deffuant-Weisbuch Model* se adapta mejor a situaciones con múltiples posturas, como encuestas de satisfacción con varias opciones o elecciones políticas con múltiples candidatos. Cada modelo de dinámica de opinión tiene una utilidad particular, lo que justifica la existencia de diversos modelos en este campo. Estos hallazgos confirman los objetivos planteados, demostrando la versatilidad de la física computacional en el estudio de la dinámica de opinión y su aplicabilidad en distintos contextos sociales.

Recomendaciones

En la simulación del *Voter Model* se observó que los tiempos de ejecución pueden variar significativamente según la proporción inicial de la minoría. Es importante señalar que, para proporciones de minoría muy pequeñas, el tiempo de ejecución puede ser bastante alto. Se recomienda realizar simulaciones adicionales, utilizando un espectro más amplio de valores y, de ser posible, una base de datos diferente, para analizar este comportamiento en mayor detalle. Esto podría proporcionar información valiosa sobre el concepto de masa crítica en el *Voter Model*.

En cuanto a la simulación del *Deffuant-Weisbuch Model*, se encontró que la restricción de interacción solo entre vecinos cercanos puede limitar la aplicabilidad del modelo a situaciones reales. Además, las condiciones iniciales tienden a sesgar los resultados hacia un consenso particular. Para futuras investigaciones, se sugiere realizar comparaciones entre simulaciones con y sin restricciones de interacción, a fin de evaluar la eficiencia y el tipo de consenso alcanzado cuando la interacción es menos limitada.

Por último, en los datos finales recopilados de las simulaciones, se observó una relación importante entre las condiciones iniciales y los resultados finales. Debido a esto, se recomienda explorar el uso de técnicas de *Machine Learning* en futuras investigaciones, con el objetivo de aplicar métodos de aprendizaje automático en la toma de decisiones grupales. Estos métodos podrían permitir la aplicación de predicciones en dinámicas de opinión, basadas en grandes conjuntos de datos, y mejorar el análisis de consenso en diversos contextos.

- Aguilar, E. (S.F.). *Modelo de deffuant dinámica de opinión*. Universidad de los Andes Centro de Física Fundamental Área de Caos y Sistemas Complejos. Descargado de https://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos/PDFs/SEM_160715A.pdf
- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., y Williams, T. A. (2012). *Estadística para negocios y economía 11a edición*. Cengage Learning Editores, S.A.
- Anónimo. (2021). *Notas termo. capítulo 12 modelo de ising*. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (Famaf). Universidad de Nacional de Córdoba. Descargado de https://www.famaf.unc.edu.ar/~cannas/Notas_TermoII/Notas-TermoII-2010-12.pdf
- Blundell, S. J., y Blundell, K. M. (2006). *Concepts in thermal physics*. Oxford University Press.
- Börner, R., Borchert, M., Loche, P., Daldrop, J., y Bonthuis, D. (2019). *Lecture notes. statistical physics and thermodynamics*. Based on the Lecture held by Prof. Roland Netz.
- Carpentras, D., Maher, P. J., O'Reilly, C., y Quayle, M. (2022). Deriving an opinion dynamics model from experimental data. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 25(4), 4. Descargado de <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/25/4/4.html> doi: 10.18564/jasss.4947
- Castellano, C., Fortunato, S., y Loreto, V. (2009). Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81, 591-646. doi: 10.1103/revmodphys.81.591
- Centola, J., Becker, J., Brackbill, D., y Baronchelli, A. (2018). Experimental evidence for tipping points in social convention. *Science*, 360, 1116–1119. doi: 10.1126/science.aas8827
- Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F., y Weisbuch, G. (2000). Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 3, 87-98. doi: 10.1142/S0219525900000078
- Dr. Zanette, D. H. (2023). *Mecánica estadística. clase 22: Modelo de ising*. Universidad de San Carlos Bariloche, Instituto Balseiro. Descargado de <https://www.youtube.com/watch?v=epUGLF1ETu8&t=3159s>
- Galam, S. (2012). *Sociophysics a physicist's modeling of physico-political phenomena*. Springer Science+Business Media.
- García Berdote, A. (2018). *Una revisión del modelo de ising y su aplicación en sociología a través del modelo de sznajd*.
- Gelover-Santiago, A. L. (2005). *Simulación del modelo de ising con el método de monte carlo. 2a edición*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). México.
- Giner, S. (2011). *Teoría sociológica clásica 3a edición*. Editorial Planeta, S.A. Barcelona.
- Horton, P. B., y Hunt, C. L. (1990). *Sociología sexta edición*. McGraw Hill.
- Huang, K. (1987). *Statistical mechanics*. John Wiley & Sons.
- Kardar, M. (2007). *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press.
- Kittel, C., y Kroemer, H. (1980). *Thermal physics*. W.H. Freeman and Company.

- Landau, D. P., y Binder, K. (2015). *A guide to monte carlo simulations in statistical physics fourth edition*. Cambridge University Press.
- Mandl, F. (1976). *Statistical physics*. John Wiley & Sons Ltd.
- Mariscorvetere, P. D. (2020). *Modelos físicos del crimen*.
- Morgado, M. (2016). Proyecto final modelo de ising física computacional. *ResearchGate*.
- Neme, P. J. (2017). *Transiciones abruptas en un modelo de opinión de agentes autopropulsados*.
- Olmo, B., y Nave, R. (2010). *Difusión*. Descargado de <http://hyperphysics.gsu.edu/hbasees/Biology/diffus.html>
- Pathria, R., y Beale, P. D. (2012). *Statistical mechanics third edition*. Butterworth-Heinemann imprint of Elsevier.
- Ponciano, J. A. (2021). *Mecánica estadística*. Descargado de <https://ecfm.usac.edu.gt/japonciano/CursoME.pdf>
- Rief, F. (1965). *Statistical physics berkley physics course volumen 5*. McGraw-Hill Inc.
- Ritzer, G. (1997). *Teoría sociológica contemporánea*. McGraw Hill.
- Stauffer, D., Moss de Oliveira, S., De Oliveira, P., y Sá Martins, J. (2006). *Biology, sociology, geology by computational physicist volume 1*. Elsevier.
- Tena, J., y León, F. (2019). Modelos de dinámicas de la opinión. una revisión de la literatura. *Revista Internacional de Sociología*, 77. Descargado de <https://revintsociologia.revistas.csic.es/index.php/revintsociologia/article/view/1023> doi: 10.3989/ris.2019.77.2.18.049
- Tong, D. (2012). *Statistical physics*. Cambridge. Descargado de <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>
- Volkova, E. S., Manita, L. A., y Manita, A. D. (2019). Hegselmann-krause model of opinions dynamics of interacting agents with the random noises. *Journal of Physics: Conference Series*, 1163(1), 012064. Descargado de <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012064> doi: 10.1088/1742-6596/1163/1/012064
- Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., y Scheaffer, R. L. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones 7a edición*. Cengage Learning Editores, S.A.
- Wołoszyn, M., Masłyk, T., Pająk, S., y Malarz, K. (2024). Universality of opinions disappearing in sociophysical models of opinion dynamics: from initial multitude of opinions to ultimate consensus. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(6). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1063/5.0208843>
- Yang, Y. (2023). *Sociophysics models and aspects of language competition*.
- Young, H. D., y Freedman, R. A. (2013). *Física universitaria volumen 1 13a edición*. Pearson Education.
- Young, R. A., Hugh D.and Freedman. (2013). *Física universitaria con física moderna volumen 2 13a edición*. Pearson Education.
- Zarei, F., Gandica, Y., y Rocha, L. (2024). Bursts of communication increase opinion diversity in the temporal defffuant model. *Nature Scientific reports*, 14(1), 10. doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-52458-w>
- Zemansky, M. W., y Dittman, R. H. (1997). *Heat and thermodynamics an intermediate textbook seventh edition*. The McGraw-Hill Companies, INC.
- Zgrablich, G. (2009). *Elementos de mecánica estadística*. Universidad Autónoma Metropolitana, México.

A. Especificaciones de hardware y software

A continuación se presentan las características del equipo utilizado para realizar las simulaciones y mediciones.

- Procesador: Intel Core i7-1065G7, de 4 núcleos y velocidad de procesamiento 1.30GHz.
- Memoria RAM: 8.0 GB.
- Sistema operativo: Windows 11 Home Single Language.

También se presentan los programas y paquetes utilizados, junto a la versión utilizada.

- Python 3.10.4
 - SciPy 1.11.1
 - NumPy 1.22.3
 - Pandas 1.4.2
 - Matplotlib 3.5.1

B. Archivos adjuntos

Para ambos modelos se adjuntan dos carpetas de Google Drive como anexo. En estas carpetas se encuentran la base de datos de cada modelo y los resultados gráficos obtenidos. También van incluidos en las carpetas ambos programas realizados en Python para correr las simulaciones. Se adjuntará un link para cada modelo a continuación:

1. *Voter Model*

- Carpeta: https://drive.google.com/drive/folders/1Rek_hMraRPyqUSS48b0h6J6FHKc_ckH1?usp=drive_link

- Base de datos original: <https://x.com/derekurizar/status/1774816002913481048?s=48&t=rEGykIcz3qpRtr-IyWC7Dw>

2. *Deffuant-Weisbuch Model*

- Carpeta: https://drive.google.com/drive/folders/1Asi3hz1Kwv0qBHyov3fn8dDvWCnPLc5-?usp=drive_link
- Base de datos original: <https://www.kaggle.com/datasets/charlottetu/npsbank/data>

C. Listado de símbolos

- d : umbral de tolerancia.
- μ : parámetro de convergencia.
- N : cantidad de individuos en la población.