UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Una aplicación de modelos probabilísticos a la teoría financiera: Valuación de Arrow-Debreu para activos financieros

Trabajo de investigación para optar al grado académico de

Licenciada en Matemática

Por

Nancy Anely Zurita Villagrán

Guatemala

Noviembre, 2004

Una aplicación de modelos probabilísticos a la teoría financiera: Valuación de Arrow-Debreu para activos financieros

Vo. Bo:

(f) ______________________________

Dr. Raúl González de Paz

Tribunal:

(f) ______________________________

Licenciada Maria Eugenia Contreras Pinillos de Nieves

(f) ______________________________

Dr. Raúl González de Paz

(f) ______________________________

Licenciado Dorval Carias Samayoa

Fecha de aprobación: 16 de marzo de 2005

A **Dios** por la inteligencia que me dió.

A mi esposo **Byron Calgua** por su apoyo y amor eterno. Gracias por la paciencia e incansable ayuda.

A mis padres **Rudy Zurita** y **Estela Villagrán de Zurita** por su ejemplo, amor y ayuda incondicionales que hicieron de mi la persona que soy.

A mis hermanos **Alejandro** y **Ricardo** por su paciencia y cariño desinteresado.

A mis **suegros y cuñados** por su ayuda y cariño.

A mis **amigos** por contribuir siempre en algo bueno a mi vida.

A mis **maestros** por querer compartir un poco de su conocimiento conmigo.

RESUMEN

En el estudio de la teoría financiera moderna de los mercados de activos financieros, se utiliza la matemática como su herramienta principal. En el recorrido de este trabajo se construyen los elementos básicos de dicha teoría con una estructura basada en definiciones y teoremas para hacer de fácil comprensión. En dicha estructura se definen los activos Arrow-Debreu que proponen las condiciones necesarias para calcular la valuacion de activos contingentes. Además, se hace una clasificación de los mercados que depende del comportamiento de dichos activos. Al finalizar se presentan algunas de las posibles aplicaciones de los teoremas y resultados más importantes a los diferentes tipos de mercados.

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos han sido una herramienta de gran utilidad en diversas áreas. En los últimos veinte años la modelación matemática de la teoría financiera ha tomado un gran auge como lo demuestra la adjudicación del Premio Nobel de Economía en 1998 a Myron Scholes y Robert Merton con el desarrollo de modelos de valuación de opciones financieras. Como una consecuencia de ese desarrollo se han propuesto modelos que pueden representar los mercados de activos financieros, haciendo así una conexión entre la matemática y las finanzas. Dichos modelos se pueden trabajar utilizando variables en forma continua y en forma discreta.

Este trabajo tiene como finalidad construir el modelo de mercado de activos financieros en forma discreta utilizando el modelo original de Kenneth Arrow y Gerard Debreu. Se inicia la presentación desde la forma más simple (modelo en un período) para exponer todos los elementos necesarios de esta teoría. Luego se generaliza el modelo en un período para construir un modelo multiperiódico. Se exponen los resultados principales del modelo mediante una estructura de teoremas y propiedades con demostraciones a un nivel elemental que no se encuentra disponible en la bibliografía actual en castellano y por lo tanto representa la principal contribución de este ensayo.

Después de una breve introducción a los elementos de la teoría de probabilidades, se construye el modelo básico, que posteriormente es generalizado. Se dan a conocer las aplicaciones básicas al evaluar activos contingentes utilizando como herramienta básica los activos de Arrow-Debreu.

El principal resultado es un teorema de valuación de activos financieros contingentes que propone las condiciones necesarias para calcular tal valuación.

II. REVISIÓN DE ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

Para dar inicio a la teoría de probabilidades que nos llevará al manejo de procesos estocásticos es necesario definir algunos resultados que son de suma importancia.

A. Definiciones de la teoría de probabilidades

Definición (2.1):

Para cualquier experimento aleatorio se define un *espacio muestral* (Ω) como la colección de todos los posibles resultados del mismo.

Definición (2.2) :

Dado que muchas veces la definición del espacio muestral es difícil de manejar se define una *variable aleatoria* como una función de dicho espacio muestral a los números reales.

Las variables aleatorias se denotan como X donde X: $\Omega \rightarrow$R, donde $X(\omega_i) = x_i$ para cada $\omega_i \in \Omega$. Se denota S el subconjunto de R tal que $x_i \in S, \forall \omega_i \in \Omega$.

Definición (2.3):

Se dice que los resultados de los experimentos son inciertos, por lo tanto existe una *probabilidad* ($pr(X = x)$) asociada a dichos resultados. Una *medida de probabilidad* es una función que asocia un número p_i a cada x_i. Además $p_i > 0, \forall x_i \in S$ y $\sum_{x \in S} p_x = 1$.

Nota:

i. $p_i = P(\omega_i) = pr(X = x_i), x_i \in S$.

ii. La función distribución de probabilidad de una variable aleatoria se refiere a $F(x) = pr(X \leq x)$.

Definición (2.4):

Sean $X_1, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias. Se dice que dichas variables aleatorias son independientes si y sólo si su función de distribución de probabilidad conjunta es igual a la multiplicación de cada una de las funciones de probabilidades de cada una de las variables aleatorias.

Definición: (2.5)

i. El *valor esperado* de una variable aleatoria X se define como

$$E[\mathrm{X}] = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{X}(\omega_{\mathrm{k}})P(\omega_{\mathrm{k}})$$

ii. La *varianza* de una variable aleatoria X se define como

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

iii. Dadas dos variables aleatorias X y Y la *covarianza* de dichas variables se define como:

$$CoV[XY] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Definición (2.6):

El *valor esperado condicionado* de una variable aleatoria, Y, dado un evento fijo, A, se define en términos de probabilidades condicionadas de la siguiente forma:

$$E[Y|A] = \sum_{y} yP\{Y = y|A\}$$

Definición (2.7):

Dada un álgebra (*vid.* Capitulo IX) de subconjuntos, F, del espacio muestral, Ω, se define $E[Y|F]$ como el resumen de todos los valores esperados condicionales $E[Y|A]$, si el evento A ocurre en el álgebra F. La idea es que $E[Y|F]$ está definida como $E[Y|F]1_A = E[Y|A]$ para todo $A \in Pa$, donde Pa es la partición correspondiente al álgebra.

Propiedad (2.1):

$$E[E[Y|F]] = EY$$

Propiedad (2.2):

Si $f_1 \subset f_2$ entonces $E[E[Y|f_2]|f_1] = E[Y|f_1]$

Propiedad (2.3):

Dadas las variables aleatorias X_1, X_2, Y_1, Y_2 con $X_1, X_2 \in F$ se tiene que $E[X_1Y_1 + X_2Y_2|F] = X_1E[Y_1|F] + X_2E[Y_2|F]$.

Propiedad (2.4):

Dada una variable aleatoria cualquiera, Y, el valor esperado condicional $E[Y|F]$ es la única variable aleatoria tal que

i. $E[Y|F] \in F$

ii. $E[E[Y|F]1_A] = E[Y1_A]$ para todo $A \in F$

B. Procesos estocásticos

Definición (2.8):

Un *proceso estocástico* (o aleatorio) es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde X_t representa una situación en el instante t. Los valores que puede tomar X_t son llamados estados y los cambios de dicho valor son las transiciones entre sus estados.

Definición (2.9):

Dado un espacio muestral filtrado en un proceso estocástico adaptado (*vid.* Capítulo V), $Z = \{Z_t \ni t = 0,1,\dots,T\}$. El proceso Z, se dice que es una *martingala* si:

$$E[Z_{t+s}|f_t] = Z_t \quad \text{para todo } s,t \geq 0$$

Teorema (2.1):

Dado $X = \{X_t \ni t = 0,1,\dots,T\}$ un proceso estocástico adaptado, entonces las siguientes son equivalentes:

i. X es una martingala

ii. $X_t = E[X_T|f_t]$ para $t = 0,1,\dots,T-1$

iii. $E[\Delta X_{t+1}|f_t] = 0$ para $t = 0,1,\dots,T-1$

Definición (2.10):

Un *proceso de Markov* es un proceso estocástico $\{Z_t : t \in T \subseteq (-\infty,\infty)\}$ para el cual, dado el valor de Z_t, la distribución de $Z_s(s > t)$ no depende en forma alguna de un conocimiento de $Z_u(u > t)$. El comportamiento futuro, cuando se conoce el estado presente del proceso, no se altera por el conocimiento adicional a cerca de su comportamiento pasado.

Propiedad de Markov:

Sea $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces las distribuciones conjuntas de $Z_{t_1},\dots,Z_{t_n}|Z_{\tau_0} = z_0,\dots,Z_{\tau_k} = z_k$ y de $Z_{t_1},\dots,Z_{t_n}|Z_{\tau_k} = z_k$ son las mismas.

III. MERCADOS DE ACTIVOS FINANCIEROS EN UN PERÍODO

A. Especificaciones del modelo

El modelo de mercados de activos financieros en un período consta de varios procesos estocásticos que constan de:

i. *Etapas de tiempo*: Una etapa inicial $t = 0$ y una etapa final $t = 1$, en las cuales se puede comprar y consumir.

ii. *Espacio muestral*: $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_k\} \ni k < \infty +$ en el que cada ω_i representa los escenarios o estados posibles en el tiempo $t = 1$.

iii. *Medida de probabilidad*: $P: \Omega \rightarrow R$ tal que $P(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$.

iv. *Estrategias de mercados*: $H \in R^{N+1}$ $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)$ donde $N < \infty$, describe el portafolio de la etapa inicial, $t = 0$, a la final, $t = 1$.
   - H_0 representa la cantidad monetaria invertida en la cuenta de banco.
   - H_n, con $n \geq 1$, representa las unidades monetarias que se invierte en cada acción. Cada H_n puede ser positiva, si se compra una acción, o negativa, si se hace algún préstamo de dinero.

Dichos procesos estocásticos son:

i. *Proceso de cuenta bancaria (o numerario)*: $B = \{B_t \ni t = 0,1\}$ donde $B_0 = 1$ y B_1 es una variable aleatoria tal que $B_1(\omega) > 0$ y $B_1(\omega) \geq 1, \forall \omega \in \Omega$. De lo anterior, se puede entender como que en la etapa inicial $t = 0$ se tenía una unidad monetaria y que esto aumentó en la etapa $t = 1$ por medio de una tasa de interés r y por lo tanto $r = B_1 - 1 \geq 0$.

ii. *Proceso de precios*: $S = \{S_t \ni t = 0,1\} \ni S_t = \{S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t)\}$ donde $N < \infty$ y cada $S_n(t)$ representa el valor del activo n del portafolio en el la etapa t. $S_n(1)$ es una variable aleatoria.

iii. *Proceso de valuación*: $V = \{V_t \ni t = 0,1\}$, este proceso describe el valor del portafolio en cada etapa tiempo. Depende de la estrategia de mercado que se utilice y V_1 es una variable aleatoria.

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t) \text{ para } t = 0,1$$

- Se puede interpretar $V_1(\omega)$ como la etapa en la que se paga el activo dado en el estado ω.
- V_0 se puede interpretar como la etapa en la que se da el valor del activo.

iv. *Proceso de ganancia*: es una variable aleatoria que describe la ganancia total (o pérdida) del portafolio cuando se pasa a la etapa final, $t = 1$.

$$G = H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n \ni \Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$$

Propiedad (3.1):

$V_1 = V_0 + G$

Demostración:

$$V_0 + G = \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right) + \left(H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n \right) =$$

$$= \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right) + \left(H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n (S_n(1) - S_n(0)) \right) =$$

$$= H_0(B_0 + r) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) - \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) =$$

$$= H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) = V_1$$

■

Es necesario normalizar los precios de tal manera que la el proceso de cuenta bancaria (o numerario) se haga constante. Para esto se define:

i. *Proceso de precio descontado*: $S^* = \{S_t^* \ni t = 0,1\} \ni S_t^* = \{S_1^*(t), S_2^*(t), \ldots, S_N^*(t)\}$

donde $S_n^*(t) = \dfrac{S_n(t)}{B_t}$

ii. *Proceso de valuación descontado*: $V^* = \{V_t^* \ni t = 0,1\} \ni V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$

iii. *Proceso de ganancia descontado*: $G^* = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*(t) \ni \Delta S_n^*(t) = S_n^*(1) - S_n^*(0)$

Propiedad (3.2):

i. $V_t^* = \dfrac{V_t}{B_t}$

ii. $V_1^* = V_0^* + G^*$

B. Medida lineal de valuación y otras especificaciones del modelo

Para poder aplicar este modelo a la economía definimos lo siguiente:

Definición (3.1):

Una estrategia de mercado $\hat{H}$ se dice *dominante* si existe otra estrategia de mercado $\widetilde{H} \ni \hat{V}_0 = \widetilde{V}_0$ y $\hat{V}_1(\omega) > \widetilde{V}_0(\omega), \forall \omega \in \Omega$.

Lo que significa una estrategia dominante en el ámbito económico es que si se tienen dos estrategias en las cuales se invierte la misma cantidad en la etapa inicial, la dominante obtendrá más dinero en la etapa final.

Teorema (3.1):

Existe una estrategia dominante si y solo sí existe una estrategia de mercado que satisface $V_0 = 0$ y $V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$.

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Sea H una estrategia de mercado tal que $V_0 = 0$ y $V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow H$ es dominante con respecto de la estrategia que inicia con nada de dinero y no invierte en la siguiente etapa.

$(\Rightarrow)$

Sea $\hat{H}$ una estrategia que domina a $\widetilde{H}$ y sea $H = \hat{H} - \widetilde{H} \Rightarrow V_0 = \hat{V}_0 - \widetilde{V}_0 = 0$ ya que $\hat{V}_0 = \widetilde{V}_0$ y como $\hat{V}_1(\omega) > \widetilde{V}_0(\omega), \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \hat{V}_1(\omega) - \widetilde{V}_0(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$.

■

Teorema (3.2):

Existe una estrategia dominante si y solo sí existe una estrategia de mercado que satisface $V_0 < 0$ y $V_1(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$.

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Supóngase que existe una estrategia dominante $\Rightarrow \exists \quad H = (H_1, H_2, \ldots, H_N) \ni V_0 = 0$ y $V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Dado que $B_t > 0 \Rightarrow V_0^* = 0$ y $V_1^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$, y dado que $V_1^* = V_0^* + G^* \Rightarrow V_1^* = V_0^* + G^* = 0 + G^* = G^* \Rightarrow G^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Ahora defínase $\widetilde{H} \ni \widetilde{H}_n = H_n$ para $n = 1,2,\ldots N$ y tal que $\widetilde{H}_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) - \delta$ donde $\delta = \min_{\omega} G^*(\omega) > 0$. Al construir el proceso de valuación tenemos que $\widetilde{V}_0^* = \widetilde{H}_0 + \sum_{n=1}^{N} \widetilde{H}_n S_n^*(0) = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) - \delta = -\delta$ y como $\delta > 0 \Rightarrow$ $\widetilde{V}_0^* = -\delta < 0 \Rightarrow \quad \widetilde{V}_0^* < 0$. Además, $\widetilde{V}_1^*(\omega) = \widetilde{V}_0^* + \widetilde{G}^*(\omega) = -\delta + \widetilde{G}^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$ $\Rightarrow \widetilde{V}_1^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$.

$(\Rightarrow)$

Sea ahora $\widetilde{H}$ una estrategia tal que $\widetilde{V}_0 < 0$ y $\widetilde{V}_1(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow B_t > 0 \Rightarrow \widetilde{V}_0^* < 0$ y $\widetilde{V}_1^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \widetilde{G}^* = \widetilde{V}_1^*(\omega) - \widetilde{V}_0^* > 0 \Rightarrow \quad \widetilde{G}^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Sea $H = (H_1, \ldots H_N)$ una estrategia tal que $H_n = \widetilde{H}_n$ para $n = 1,2,\ldots N$ y $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)$

$$\Rightarrow V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0^* = \frac{V_0}{B_0} = 0 \Rightarrow$$

$V_0 = 0$. Nótese que $V_1^*(\omega) = V_0^* + \widetilde{G}^*(\omega) = 0 + \widetilde{G}^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \quad \Rightarrow$ $V_1^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow V_0 = 0$ y $V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$, por lo tanto H es una estrategia dominante.

■

El resultado del teorema (3.1) asegura que cualquier inversionista que inicia un portafolio sin invertir nada tiene la garantía de obtener una cantidad positiva de dinero mediante una estrategia dominante. Este resultado no se da en la realidad. Además, el resultado del teorema (3.2) asegura que no solo se puede obtener una ganancia al no invertir nada sino que garantiza al inversionista que presta dinero que puede devolver el dinero siempre. Dada la interpretación de los teoremas anteriores se puede observar que el modelo es inconsistente en la realidad.

Para que la valuación de activos sea consistente es necesario añadir algunas cosas al modelo.

Definición (3.2):

Una *medida lineal de valuación* es un vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \in R^k$ con entradas no negativas tal que para alguna estrategia de mercado H, $V_0^* = \sum_\omega \pi V_1^*(\omega_1) = \sum_\omega \pi \frac{V_1(\omega)}{B_t(\omega)}$.

Teorema (3.3):

El vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \in R^k$ es una medida lineal de valuación si y solo si es una medida de probabilidad en Ω que satisface $S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$ para $n = 1,2,\ldots N$.

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Sea $\pi = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \ldots, \pi(\omega_k))$ una medida lineal de valuación $\Rightarrow$ para alguna estrategia de mercado H, $V_0^* = \sum_\omega \pi(\omega) V_1^*(\omega_1)$. Sabemos que $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(t)$ para $t = 0,1$ $\Rightarrow$

$$V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega) V_1^*(\omega_1) = \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(1)\right)$$ por lo tanto

$$H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(1)\right).$$ Supóngase que $H_1 = H_2 = \ldots = H_N = 0$

$\Rightarrow \ H_0 = \sum_\omega \pi(\omega)(H_0) = H_0 \sum_\omega \pi(\omega) \Rightarrow \ 1 = \sum_\omega \pi(\omega)$. Por lo anterior y el hecho que el vector es de componentes positivas, $\pi = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \ldots, \pi(\omega_k))$ es una medida de probabilidad en Ω.

Por otro lado, considérese una estrategia tal que $H_n = 0, \forall n \neq i$ donde $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ $\Rightarrow$ de lo anterior tenemos que :

$$H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(1)\right)$$

$$\Rightarrow H_0 + H_i S_i^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_0 + H_i S_i^*(i)\right) = \sum_\omega \pi(\omega) H_0 + \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_i S_i^*(i)\right) =$$

$$= H_0 \sum_\omega \pi(\omega) + \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_i S_i^*(i)\right) = H_0 + \sum_\omega \pi(\omega)\left(H_i S_i^*(i)\right)$$

$$\Rightarrow H_0 + H_i S_i^*(0) = H_0 + \sum_\omega \pi(\omega) H_i S_i^*(1) \Rightarrow H_i S_i^*(0) = H_i \sum_\omega \pi(\omega) S_i^*(1)(\omega)$$

$$\Rightarrow S_i^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega) S_i^*(1)(\omega)$$

Por tanto se cumple que $S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega), \forall n = 1,2,\ldots,N$.

($\Rightarrow$)

Sea $\pi = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \ldots, \pi(\omega_k))$ tal que $S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$ para $n = 1,2,\ldots,N$ y sea H una estrategia de mercado $\Rightarrow$ $H_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) H_n S_n^*(1)(\omega)$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{N} S_n^*(0) = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{\omega} \pi(\omega) H_n S_n^*(1)(\omega)\right) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \sum_{n=1}^{N}\left(H_n S_n^*(1)(\omega)\right)$. Sabemos que π es una medida de probabilidad por lo que $1 = \sum_{\omega} \pi(\omega)$ $\Rightarrow$ $H_0 = H_0 \sum_{\omega} \pi(\omega) = \sum_{\omega} \pi(\omega) H_0$ $\Rightarrow$ si sumamos ambos resultados tenemos que

$$H_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) H_0 + \sum_{\omega} \pi(\omega) \sum_{n=1}^{N}\left(H_n S_n^*(1)(\omega)\right) = \sum_{\omega} \pi(\omega)\left(H_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(H_n S_n^*(1)(\omega)\right)\right)$$

que por la definición de $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$ para $t = 0,1$ se transforma en

$$V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega)\left(H_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(H_n S_n^*(1)(\omega)\right)\right) = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^* \qquad \Rightarrow$$

$V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^*$ $\Rightarrow$ $\pi = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \ldots, \pi(\omega_k))$ es una medida lineal de valuación.

∎

El teorema (3.3) propone que el precio inicial de un activo es igual al valor esperado bajo su medida lineal de valuación.

Teorema (3.4):

Existe una medida lineal de valuación si y solo sí no existen estrategias de mercado dominantes.

Demostración:

($\Leftarrow$)

Sea $\pi \in R^k$ un vector. Considérense $Z \in R^{N+1}$ y $\overline{Z} \in R^{N+1} \times R^k$ tales que $Z = \begin{bmatrix} S_1^*(0) \\ \vdots \\ S_1^*(0) \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$\overline{Z} = \begin{bmatrix} S_1^*(\omega_1) & \cdots & S_1^*(\omega_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N^*(\omega_1) & \cdots & S_N^*(\omega_{k1}) \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. Supóngase que existe una medida lineal de valuación, entonces se puede encontrar solución al problema de programación lineal:

$$\max_{\pi \in R^k} 0^T \cdot \pi$$

sujeto a:

$$\overline{Z} \cdot \pi = Z$$

$$\pi \geq 0$$

Sabemos esto porque cualquier vector puede satisfacer ser el máximo de la multiplicación dada, pero las restricciones conforman al vector como un vector con entradas no negativas. Además, nótese que por el teorema anterior si π es una medida lineal de valuación lo siguiente se cumple:

$$\overline{Z} \cdot \pi = \begin{bmatrix} S_1^*(\omega_1) & \cdots & S_1^*(\omega_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N^*(\omega_1) & \cdots & S_N^*(\omega_{k1}) \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi(\omega_1) \\ \vdots \\ \pi(\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_\omega \pi(\omega) S_1^*(\omega) \\ \vdots \\ \sum_\omega \pi(\omega) S_N^*(\omega) \\ \sum_\omega \pi(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^*(0) \\ \vdots \\ S_N^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} = Z$$

Por dualidad (Lancaster, 1987:40), debe existir $h = (h_1, h_2, \ldots, h_{N+1})$, en el problema dual

$$\min_{h \in R^{N+1}} h^T \cdot Z$$

sujeto a:

$$h \cdot \overline{Z} \geq 0$$

tal que $h_{N+1} = h_0$. Este problema tiene solución ya que por el teorema anterior se cumple:

$$h^T \cdot Z = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{N+1} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} S_1^*(0) \\ \vdots \\ S_N^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} = h_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} h_n S_n^*(0) = V_0^*, \text{ y además}$$

$$h^T \cdot \overline{Z} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{N+1} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} S_1^*(\omega_1) & \cdots & S_1^*(\omega_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N^*(\omega_1) & \cdots & S_N^*(\omega_{k1}) \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} h_n S_n^*(\omega_1) \\ \vdots \\ h_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} h_n S_n^*(\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^*(\omega_1) \\ \vdots \\ V_1^*(\omega_k) \end{bmatrix} \geq 0$$

En ambos casos el problema objetivo debe de coincidir y es igual a cero. Por lo tanto, en el problema dual se dice que $V_0^* = 0$ en el problema objetivo y con $V_1^*(\omega) \geq 0$. Esto contradice el teorema 3.2, por lo tanto no existen estrategias dominantes.

$(\Rightarrow)$

Supóngase que no existen estrategias dominantes entonces el problema dual, anteriormente utilizado, tiene solución y por lo tanto por el teorema de dualidad de programación lineal (Lancaster, 1987:40), el primal debe tenerla y dicha solución dual es un vector π que es una medida lineal de valuación.

■

Las medidas lineales de valuación permite que el modelo distinga entre las estrategias de mercado que son dominantes; ya que desde el punto de vista económico generan inconsistencias con la realidad.

Definición (3.3):

Se dice que se cumple la *ley de un precio* si no existen dos estrategias de mercado $\hat{H}$ y $\widetilde{H}$ tales que $\widetilde{V}_1(\omega) = \hat{V}_1(\omega), \forall \omega \in \Omega$ pero $\widetilde{V}_0 > \hat{V}_0$.

La *ley de un precio* hace que no exista ambigüedad entre las etapas inicial y final; ya que si dicha ley no se cumple, existirían dos estrategias en las cuales se invierten montos diferentes y al tiempo final generan la misma cantidad. Esto genera situaciones irreales, ya que en dado caso los inversionistas escogen la estrategia en la que se invierte menos y así generar la cantidad esperada en la etapa final.

Teorema (3.5):

Si no existen estrategias de mercado dominantes la ley de un precio se cumple.

Demostración:

Supóngase que la ley de un precio no se cumple, entonces existen dos estrategias $\hat{H}$ y $\widetilde{H}$ tales que $\hat{V}_1^*(\omega) = \widetilde{V}_1^*(\omega), \forall \omega \in \Omega$ y $\hat{V}_0^* > \widetilde{V}_0^*$ $\Rightarrow$ $\hat{V}_0 - \widetilde{V}_0 > 0$ $\Rightarrow$ $\hat{V}_1^* = \hat{V}_0^* + \hat{G}_0^* = \widetilde{V}_0^* + \widetilde{G}_0^* = \widetilde{V}_1^*$ $\Rightarrow$ $\hat{V}_0^* - \widetilde{V}_0^* = \widetilde{G}_0^* - \hat{G}_0^* > 0$ $\Rightarrow$ $\widetilde{G}_0^*(\omega) - \hat{G}_0^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$.

Defínase ahora una nueva estrategia, H, tal que $H_n = \widetilde{H}_n - \hat{H}_n$ para $n = 1,2,..,N$ $\Rightarrow$ dado que $G_0^* = \widetilde{G}_0^* - \hat{G}_0^*$ $\Rightarrow$ $G_0^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Además, tomando $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(\omega)$ tenemos que $V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(\omega) = 0$. Por otro lado, $V_1^*(\omega) = V_0^* + G^*(\omega) = 0 + G^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Por lo tanto, $V_0^* = 0$ y $V_1^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ $\Rightarrow$ H es una estrategia dominante.

■

C. Las oportunidades de arbitraje

De lo anterior visto, se nota que si existen estrategias dominantes o si la ley de un precio no se cumple, los inversionistas serían capaces de invertir sin riesgo de perder. A esto se le llama oportunidad de arbitraje. Es una forma de hacer dinero sin riesgo alguno.

Definición (3.4):

Se dice que existe una *oportunidad de arbitraje* si y solo sí existe una estrategia de mercado H tal que:

i. $V_0 = 0$

ii. $V_1 \geq 0$

iii. $EV_1 > 0$

Propiedad: (3.2)

Existe oportunidad de arbitraje si y solo si se cumple

i. $V_0^* = 0$

ii. $V_1^* \geq 0$

iii. $EV_1^* > 0$

Teorema (3.6):

Existe una oportunidad de arbitraje si y solo si

i. $G^* \geq 0$

ii. $EG^* > 0$

Demostración:

$(\Rightarrow)$

Sea H una estrategia de mercado en la que existe una oportunidad de arbitraje $\Rightarrow$ $V_0^* = 0$ y $V_1^* \geq 0$ entonces $G^* = V_1^* - V_0^* = V_1^* - 0 = V_1^* \geq 0$. Por otro lado, $EG^* = E[V_1^* - V_0^*] = E[V_1^* - 0] = EV_1^* > 0$.

$(\Leftarrow)$

Sea una estrategia $\hat{H}$ de mercado tal que $G^* \geq 0$ y $EG^* > 0$. Considérese la estrategia $H = (H_0, \hat{H}_1, \ldots, \hat{H}_N)$ tal que $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(\omega)$. Nótese que $V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(\omega) = -\sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(\omega) + \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n^*(\omega) = 0$. Además, $V_1^* = G^* + V_0^* = G^* + 0 = G^* \geq 0$ y $E[V_1^*] = E[G^* + V_0^*] = E[G^* + 0] = EG^* > 0$ por lo que H es una oportunidad de arbitraje.

■

Teorema (3.7):

Si existe una estrategia dominante entonces existe una oportunidad de arbitraje.

Demostración:

Sea H una estrategia dominante $V_0^* = 0$ y $V_1^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow V_0^* = 0$ y $EV_1^*(\omega) > E[0] = 0, \forall \omega \in \Omega$ y además por el teorema 3.2 $V_1^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow$ existe una oportunidad de arbitraje.

■

Con los teoremas anteriores podemos clasificar los mercados de tal forma que se adecuen a los mercados reales sin generar inconsistencias. En la Figura 3.1 se muestra dicha clasificación:

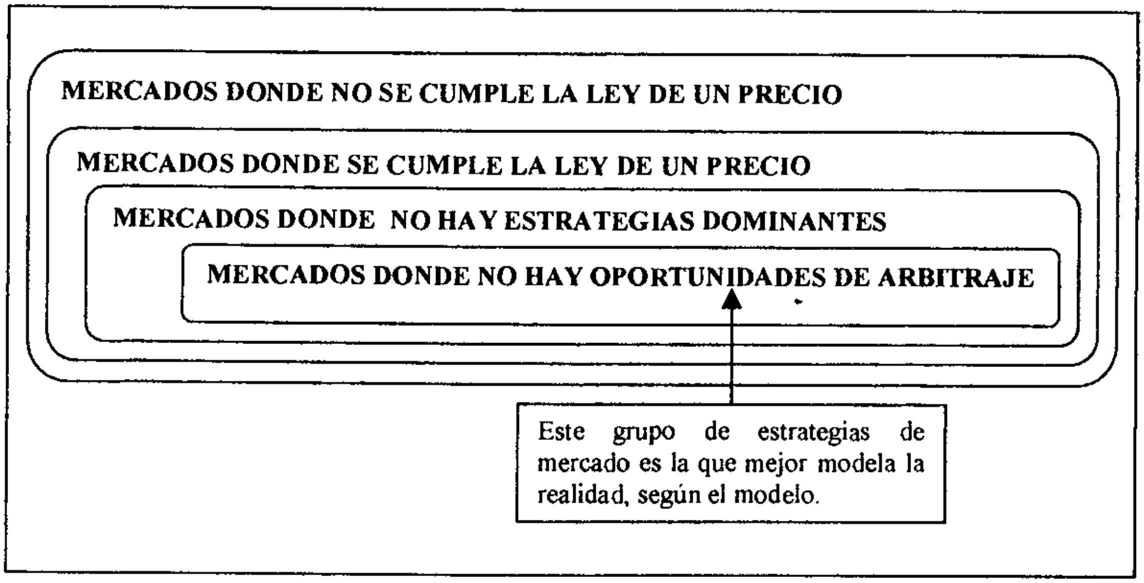

Figura 3.1

D. Medidas de probabilidad neutrales al riesgo

Definición (3.5):

Una *medida de probabilidad*, Q, es neutral al riesgo si cumple:

i. $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$

ii. $E_Q[\Delta S_n^*] = 0$

Propiedad (3.3):

Si existe una medida neutral al riesgo, Q, entonces se cumple $E_Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0)$.

Demostración:

$$0 = E_Q[\Delta S_n^*] = E_Q[S_n^*(1) - S_n^*(0)] = E_Q[S_n^*(1)] - E_Q[S_n^*(0)] =$$

$$= E_Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0)$$

$$\Rightarrow$$

$$0 = E_Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0)$$

$$\Rightarrow$$

$$S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)]$$

■

Para los siguientes corolarios y teoremas considérense los siguientes conjuntos:

i. $W = \{X \in R^K \ni X = G^* \text{ para algún } H\}$

ii. $A = \{X \in R^K \ni X \geq 0 \text{ y } X \neq 0\}$

iii. $W^\perp = \{X \in R^K \ni X \cdot Y = 0 \ \forall \ X \in W\}$

iv. $P^+ = \{X \in R^K \ni \sum x_i = 1 \text{ y } x_i > 0 \ \forall \ i = 1,\ldots,k\}$

v. $M = \{Q \in R^K \ni Q \text{ es una medida neutral al riesgo}\}$

vi. $A^+ = \{X \in A \ni EX \geq 1\}$

Corolario (3.1):

Existe oportunidad de arbitraje si y sólo si $W \cap A \neq \varnothing$.

Demostración:

Nótese que existe una oportunidad de arbitraje si y solo si $G^* \geq 0$ y $EG^* > 0$. Además, $W \cap A = \{X \in R^K \ni X = G^* \geq 0 \text{ y } G^* \neq 0 \text{ para algún } H\}$ por lo que las condiciones para que exista arbitraje se cumplan si y solo si $W \cap A \neq \varnothing$.

■

Corolario (3.2):

No existen oportunidades de arbitraje si y sólo si $W \cap A = \varnothing$.

Demostración:

Considérese el corolario 3.1.

■

Corolario (3.3):

$$M = W^{\perp} \cap P^{+}$$

Demostración:

$(\subseteq)$

Sea $Q \in M$ entonces por definición de medida neutral al riesgo sabemos que $\sum Q(\omega_i) = 1$ y $Q(\omega_i) > 0 \ \forall\, i = 1,\ldots,k$ por lo tanto $Q \in P^{+}$. Por otro lado, sea $X \in W$ entonces $X = G^{*}$ para alguna estrategia H $\Rightarrow$ $Q \cdot X = Q \cdot G^{*} = E_Q[G^{*}] = E_Q[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^{*}] = \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\Delta S_n^{*}] = \sum_{n=1}^{N} H_n \cdot 0 = 0$ por lo que $Q \in W^{\perp} \Rightarrow Q \in W^{\perp} \cap P^{+} \Rightarrow M \subseteq W^{\perp} \cap P^{+}$.

$(\supseteq)$

Sea $Q \in W^{\perp} \cap P^{+}$ entonces dada la estrategia $H = (0,\ldots,H_n,\ldots,0)$ para cualquier $n = 1,2,\ldots,N$, $G^{*} = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^{*} = \Delta S_n^{*}$ y $\Delta S_n^{*} \in W$ entonces $0 = Q \cdot \Delta S_n^{*} = E_Q[\Delta S_n^{*}]$. Por otro lado, sabemos que $Q \in P^{+}$ entonces $\sum Q(\omega_i) = 1$ y $Q(\omega_i) > 0 \ \forall\, i = 1,\ldots,k \Rightarrow Q$ es una medida neutral al riesgo $\Rightarrow Q \in M$ $\Rightarrow W^{\perp} \cap P^{+} \subseteq M$.

■

Corolario: (3.4)

Si $W^{\perp} \cap P^{+} \neq \varnothing$ entonces existen medidas neutrales al riesgo

Demostración:

Por el corolario 3.2 sabemos que $M = W^{\perp} \cap P^{+}$ y M es el conjunto de medidas neutrales al riesgo. Por lo tanto para que existan medidas neutrales al riesgo $W^{\perp} \cap P^{+} = M \neq \varnothing$

■

Corolario: (3.5)

A^{+} es un conjunto cerrado y convexo.

Demostración:

Por la definición del conjunto A^{+}, sabemos que es una bola cerrada, entonces es un conjunto cerrado. Sean $x, y \in A^{+}$ y $\lambda \in R \ni 0 < \lambda < 1 \Rightarrow E[\lambda x + (1-\lambda)y] = \lambda E[x] + (1-\lambda)E[y]$. Además, $E[x] \geq 1 \Rightarrow \lambda E[x] \geq \lambda$ y $E[y] \geq 1 \Rightarrow (1-\lambda)E[y] \geq (1-\lambda) \Rightarrow$

$\lambda E[x]+(1-\lambda)E[y] \geq \lambda+(1-\lambda)=1$ por lo tanto $E[\lambda x+(1-\lambda)y] \geq 1 \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y \in A^+ \Rightarrow A^+$ es convexo.

■

Teorema (3.8):

No existen oportunidades de arbitraje si y solo sí existe una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Demostración:

Supóngase que $N = 1$ (i.e. un solo activo).

($\Leftarrow$)

Sea H una oportunidad de arbitraje $0 \leq G^* = H_1 \Delta S^* \Rightarrow$ existen dos opciones

i. $\Delta S^* \geq 0$ con $\Delta S^*(\omega) > 0$ para algún $\omega \in \Omega$

ó

ii. $\Delta S^* \leq 0$ con $\Delta S^*(\omega) < 0$ para algún $\omega \in \Omega$

Considérese Q, una medida tal que $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow E_Q[\Delta S_n^*] > 0$ en el caso que (i) se cumpla ó $E_Q[\Delta S_n^*] < 0$ en el caso que (ii) se cumpla. En ambos casos $E_Q[\Delta S_n^*] \neq 0$, por lo que Q no es una medida neutral al riesgo.

($\Rightarrow$)

Supóngase que (i) e (ii) no se cumplen $\Rightarrow \exists\ Q$ tal que $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ y $E_Q[\Delta S_n^*] = 0$ para algún $H \Rightarrow$ no existe oportunidad de arbitraje.

Supóngase ahora que $N \geq 2$ (i.e. varios activos)

Nótese que por los corolarios 3.2 y 3.4 el enunciado del teorema a demostrar se puede escribir de la siguiente forma:

$$W \cap A = \varnothing \text{ si y solo si } M \neq \varnothing$$

($\Rightarrow$)

Supóngase que $W \cap A = \varnothing$ entonces $W \cap A^+ = \varnothing$. Por el corolario 3.5, sabemos que A^+ es cerrado y convexo, entonces por el *Teorema de Minkowski* (*vid.* Capítulo IX) tenemos que $\exists\ Y \in W^{\perp} \ni X \cdot Y > 0,\ \forall X \in A^+$. Sea $X_S = (0,\ldots,x_s,\ldots,0) \in A^+$ tal que $s = 1,\ldots,k$ y $x_s > 0 \Rightarrow X_S \cdot Y = x_s y_s > 0$ y como $x_s > 0 \Rightarrow y_s > 0\ \ \forall\ \ s = 1,\ldots,k$ $\Rightarrow Y > 0$.

Definase $Q \in R^K \ni Q(\omega_i) = \dfrac{Y(\omega_i)}{\sum_K Y(\omega_i)} \quad \forall\ i = 1,\ldots,k$. Nótese que

$$\sum_K Q(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} \frac{Y(\omega_i)}{\sum_K Y(\omega_i)} = \frac{\sum_{k=1}^{K} Y(\omega_i)}{\sum_K Y(\omega_i)} = 1, \text{ y como } Y > 0 \Rightarrow Q > 0 \Rightarrow Q \in A^+.$$

Por otro lado, si $X \in W \Rightarrow$

$$Q \cdot X = X_1 Q(\omega_1) + \ldots + X_2 Q(\omega_2) = \frac{X_1 Y(\omega_1)}{\sum_K Y(\omega_K)} + \ldots + \frac{X_K Y(\omega_K)}{\sum_K Y(\omega_K)} =$$

$$= \frac{1}{\sum_K Y(\omega_K)}(X_1 Y(\omega_1) + \ldots + X_K Y(\omega_K)) = \frac{1}{\sum_K Y(\omega_K)}(X \cdot Y) = \frac{1}{\sum_K Y(\omega_K)}(0) = 0$$

$\Rightarrow Q \in W^{\perp} \Rightarrow Q \in P^+ \cap W^{\perp} = M \Rightarrow M \neq \varnothing$

$(\Leftarrow)$

Sea $Q \in M$ entonces para alguna estrategia de mercado H se cumple $E_Q G^* = 0$ pero $Q \cdot G^* = E_Q G^* = 0$ entonces G^* no satisface las ecuaciones $G^* \geq 0$ y $EG^* > 0$ al mismo tiempo, por lo tanto no existen oportunidades de arbitraje $\Rightarrow W \cap A = \varnothing$.

■

IV. VALUACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES

En el contexto financiero actual se utilizan una serie de instrumentos financieros conocidos como instrumentos derivados. Casos específicos son los contratos a futuro y las opciones de compra y venta (Díaz, 1998:75), que desde el punto de vista teórico financiero se denominan activos contingentes. El propósito de este capítulo es presentar una formalización matemática de tales instrumentos.

A. Activos contingentes

Definición (4.1):

Un *activo contingente* es una variable aleatoria, X, que representa un pago de un portafolio de mercado en la etapa $t = 1$.

Se puede entender un activo contingente como el contrato que un vendedor y un comprador hacen en la etapa $t = 0$. El vendedor promete pagar al comprador $X(\omega)$ en la etapa $t = 1$ si se da $\omega \in \Omega$; es por eso que un activo contingente es una variable aleatoria, pues depende de algún estado. Se debe notar que el valor acordado no puede depender de las preferencias, o función utilidad, de ambas partes. De lo contrario se darían oportunidades de arbitraje.

Definición (4.2):

Un activo contingente se dice que es *asequible* si existe una estrategia H, llamada portafolio replicante, tal que $V_1 = X$, donde V_1 es el valor del portafolio en la etapa $t = 1$. Se dice que H genera a X.

Teorema (4.1):

Si Q es una medida neutral al riesgo entonces para toda estrategia H se cumple que $E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right] = V_0$.

Demostración:

Sea Q una medida neutral al riesgo y H alguna estrategia de mercado entonces:

$$V_0 = V_0^* = E_Q[V_0^*] = E_Q[V_1^* - G^*] = E_Q[V_1^*] - E_Q[G^*] = E_Q[V_1^*] - E_Q\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\right] =$$

$$= E_Q[V_1^*] - \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\Delta S_n^*] = E_Q[V_1^*] - \sum_{n=1}^{N} H_n \cdot 0 = E_Q[V_1^*] = E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right]$$

■

El teorema 4.1 propone que el valor esperado de V_1, bajo la medida neutral al riesgo, debe ser el valor inicial del portafolio, que es V_0. Lo anterior indica que el precio que el inversionista espera la etapa $t = 1$ es el mismo que sabe en la etapa $t = 0$. Por otro lado, el resultado del teorema no depende de la media neutral al riesgo Q; esto significa que para cualquier medida neutral al riesgo el valor esperado de V_1, bajo la misma, es constante.

Teorema (4.2):

Si la ley de un precio se cumple entonces el valor de un activo contingente asequible, X, en la etapa $t= 0$ es $V_0 = H_0B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_nS_n(0)$, donde H es el portafolio replicante de dicho activo.

Demostración:

Supóngase que se cumple la ley de un precio y que existe un activo contingente asequible, X, tal que H es su portafolio replicante, entonces $X = V_1$. Sea V_0 el valor inicial de dicho portafolio. Por otro lado, supóngase que existe un portafolio $\hat{H}$ tal que replica a X, es decir $X = \hat{V}_1$, y además, $\hat{V}_0$ es el valor inicial de dicho activo contingente tal que $V_0 \neq \hat{V}_0$. Entonces dado que existen estrategias de mercado H y $\hat{H}$ tales que $V_1 = \hat{V}_1$ y $V_0 \neq \hat{V}_0$ entonces no se cumple la ley de un precio. Dado que lo anterior genera una contradicción se debe cumplir que $V_0 = \hat{V}_0$, es decir que el valor inicial de un activo contingente asequible es igual al valor inicial de su portafolio replicante que por definición es $V_0 = H_0B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_nS_n(0)$.

■

Corolario (4.1):

Si no existen oportunidades de arbitraje la ley de un precio se cumple.

Demostración:

Supóngase que no existen oportunidades entonces al tomar el converso del teorema 3.7 entonces no existen estrategias dominantes. Además por el teorema 3.6 si no existen estrategias dominantes se cumple la ley de un precio.

■

Teorema: (4.3)

Si el modelo de un período está libre de oportunidades de arbitraje entonces el valor, en la etapa *t=0*, de un activo contingente asequible, X, es $E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$, donde Q es una medida neutral al riesgo.

Demostración:

Supóngase que no existen oportunidades de arbitraje entonces por teorema 3.8 existe una medida neutral al riesgo, Q. Además por el corolario 4.1 y el teorema anterior si X es un activo contingente asequible y H su portafolio replicante entonces $X = V_1$ y V_0 es su valor inicial. Por otro lado, por el teorema 4.1 $V_0 = E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right] = E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$.

■

Al teorema 4.3 se le llama *Principio de valuación neutral al riesgo.*

Definición (4.3):

Para el modelo de un período con un espacio muestral $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ se tienen k activos llamados *Arrow-Debreu o activos puros,* $e_1, \ldots, e_k$; dichos activos son tales que cada $e_j(\omega_i) = \delta_{ij}$ [1], para toda $j = 1, \ldots, k$ en la etapa $t = 1$.

Definición (4.4):

Sea π una medida lineal de valuación, entonces por definición $V_0 = \sum_{i=1}^{K} \pi_i V_1^*(\omega_i)$.

Considerando los activos de Arrow-Debreu $V(e_j)(\omega_i) = \sum_{i=1}^{K} \pi_i e_j(\omega_i) = \pi_j$. A los valores π_j, $j = 1, \ldots, k$ se les llama *precios estado de los activos Arrow-Debreu.*

Definición (4.5):

A los activos que paga un precio fijo en cualquier escenario en la etapa $t = 1$, se les llama activos libres de riesgo. Dichos activos toman un valor inicial igual al recíproco de su rendimiento $1 + r$, donde r es la tasa de interés libre de riesgo.

[1] *Delta de Kroenecker* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Corolario (4.1):

Suponiendo que en el modelo no existen oportunidades de arbitraje. Sea Q un vector con entradas positivas tal que $\sum_{i=1}^{K} Q(\omega_i) = 1$ y para cualquier estrategia de mercado H se cumple que $E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right] = V_0$ entonces Q es una medida neutral al riesgo.

Demostración:

Sea Q un vector con entradas positivas tal que $\sum_{i=1}^{K} Q(\omega_i) = 1$ y para cualquier estrategia de mercado H se cumple que $E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right] = V_0$ entonces se cumple que $V_0^* = V_0 = E_Q\left[\frac{V_1}{B_1}\right] = E_Q[V_1^*]$ entonces $E_Q[V_0^*] = V_0^* = E_Q[V_1^*]$ que por definición implica que

$$E_Q\left[H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)\right] = E_Q\left[H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)\right] \Rightarrow$$

$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q\left[S_n^*(1)\right] = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q\left[S_n^*(0)\right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q\left[\Delta S_n^*\right] = 0$ entonces como H_n es la cantidad del activo invertida no puede ser igual a cero, además dado que no existen oportunidades de arbitraje $E_Q\left[\Delta S_n^*\right] = 0$ entonces la medida de probabilidad Q es una medida neutral al riesgo.

■

Teorema (4.4):

Los precios de los activos Arrow-Debreu definen una medida neutral al riesgo Q.

Demostración:

Sea X un activo contingente asequible. Nótese que si $\{X_r\}_{r=1}^{K}$ es el conjunto de todos los posibles valores del activo contingente en cada escenario entonces $X(\omega_j) = \sum_{i=1}^{K} e_i(\omega_j) X_i$ para todo $\omega \in \Omega$. Sean $\{\psi_i\}_{i=1}^{K}$ los precios estado de los activos Arrow-Debreu entonces el valor del activo contingente es $V_0 = \sum_{i=1}^{K} \psi_i X_i$. Por otro lado, sea $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_K$ y definase $Q = \{q_s\}_{s=1}^{K}$ tal que $q_s = \frac{\psi_s}{\psi_0}$. Nótese que $\sum_{s=1}^{K} q_s = 1$ y dado que los precios estado de los activos

Arrow-Debreu son positivos, q es una medida de probabilidad. Además, $X_0 = V_0 = \psi_0 \sum_{i=1}^{K} q_i X_i$ entonces $V_0 = \psi_0 E_Q[X]$. Por otro lado, el valor de ψ_0 puede ser interpretado como el valor inicial del activo $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_K = (1,1,\ldots,1)$ que es un activo libre de riesgo, pues paga uno no importando el escenario. Entonces si r es la tasa libre de riesgo $\psi_0 = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{B_1}$. Por lo tanto, $V_0 = \psi_0 E_Q[X] = \frac{1}{B_1} E_Q[X] = E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$ y por el corolario 4.1, Q es una medida neutral al riesgo.

■

Nótese que con la demostración del teorema anterior, los activos contingentes se pueden escribir como una combinación lineal de activos Arrow-Debreu. Además, el valor de dicho activo contingente se puede escribir también como una combinación lineal en donde las constantes son los precios estado.

En la vida real los inversionistas desean aplicar estrategias de inversión que les generen ganancias. Algunas de estas estrategias de inversión se pueden modelar utilizando activos contingentes. Un ejemplo de dichos activos contingentes son las *opciones europeas*. Las *opciones* son contratos que dan al tenedor o al comprador el derecho, sin obligación, de comprar o vender algun activo (activo subyacente) en una fecha determinada. El precio de la compra o venta del activo se fija y es llamado *precio de ejercicio*. Si la opción le da al tenedor el derecho de comprar una acción en una fecha determinada a un precio preestablecido entonces la opción es de *compra*; y éste se asegura que el emisor le venda el activo. Por otro lado, si la opción le da al tenedor el derecho de vender un activo en una fecha determinada a un precio preestablecido entonces la opción es de *venta*; y éste se asegura que el emisor le compre el activo.

Este tipo de instrumento financiero tiene por objeto proteger al inversionista del riesgo financiero y le permite así especular o simplemente invertir en el momento indicado. Además, nótese que el inversionista no compra si no le conviene y compra si su ganancia es mayor que el precio de ejercicio, creando así una oportunidad de arbitraje. Esto se da porque el inversionista siempre obtiene una ganancia mayor o igual a cero.

El valor de este tipo de activos se puede representar matemáticamente de la siguiente forma:

Definición (4.6):

Considérese el modelo en un periodo con un activo (i.e $N = 1$). Sea X un activo contingente tal que $X = (S_1 - E)^+ = \max\{0, S_1 - E\}$. Dicho activo contingente se le llama *opción de compra* (*call*). Al valor E se le llama *precio de ejercicio*. Por otro lado, si se considera $X = (E - S_1)^+ = \max\{0, E - S_1\}$ se tiene una *opción de venta* (*put*).

Nótese que el precio del activo subyacente S es una variable aleatoria y por consiguiente X es una variable aleatoria y se le llama valor intrínseco de la opción (Díaz, 1998:75). Para observar el comportamiento de dichas opciónes (*vid.* Figura 4.1) del punto de vista del tenedor (opción larga) o del emisor (opción corta).

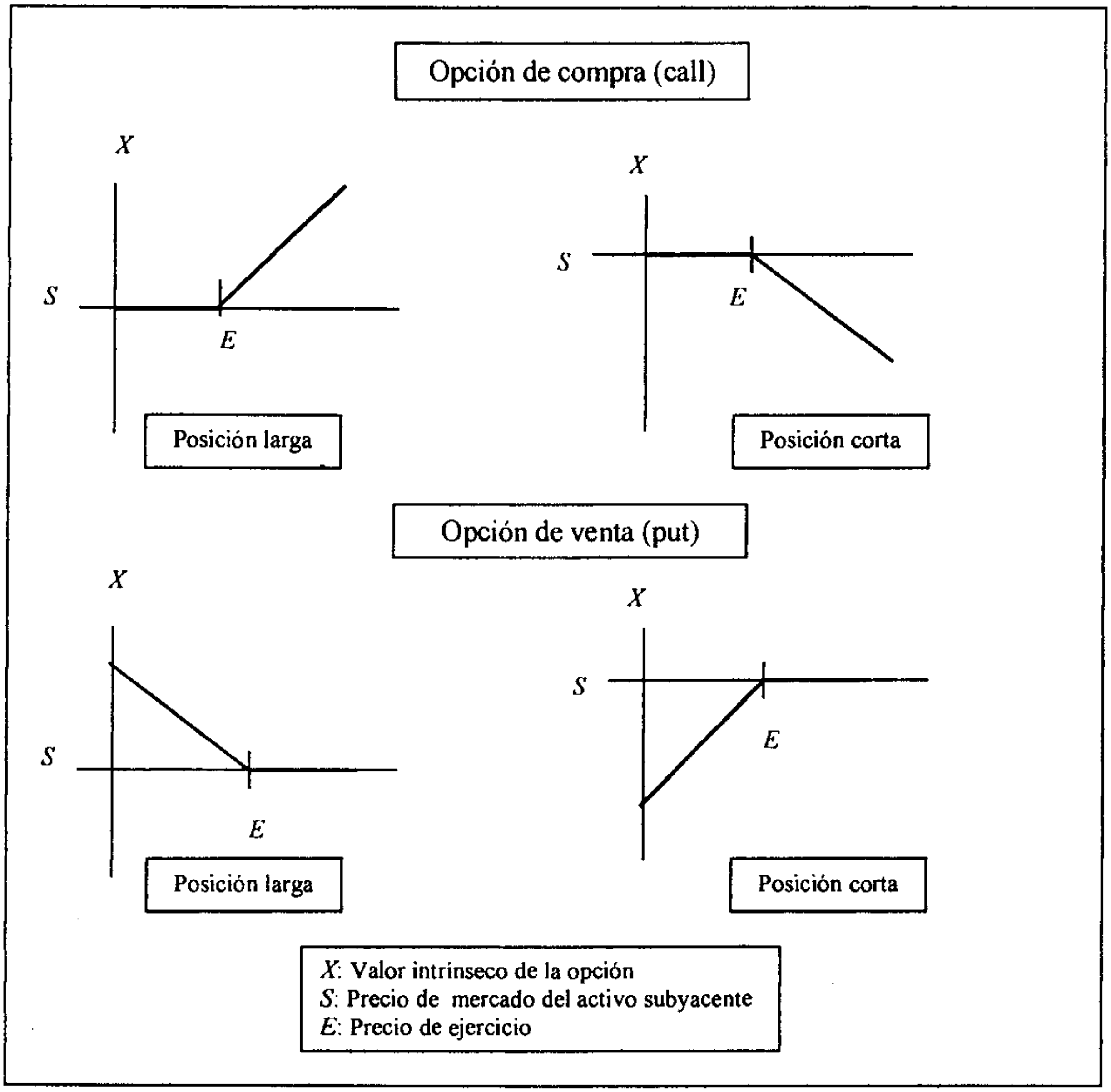

Figura 4.1

B. Mercados completos e incompletos

Dado que no todo activo contingente es asequible, no se puede saber su valor en el tiempo inicial, ya que el teorema 4.3 no sería aplicable. Por lo tanto es necesario conocer cuándo un mercado es asequible o no.

Definición (4.7):

El modelo de mercado de un periodo se dice que es *completo* si cada activo contingente X puede ser replicado por alguna estrategia de mercado. De lo contrario se dice que el mercado es *incompleto*.

Teorema (4.5):

Suponiendo que no existen estrategias de arbitraje. El modelo se dice que es completo si y sólo si el número de estados en Ω es igual al número de vectores linealmente independientes en $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_N(1)\}$.

Demostración:

Sea $A \in R^{K\times(N+1)}$ tal que $A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix}$ y considérense los vectores $H = (H_0, \ldots, H_N)$ y $X = (X_1, \ldots, X_K)$. Utilizando la matriz y los vectores anteriores el teorema se puede reescribir de la forma: El modelo es completo si y solo si el sistema $AH^T = X$ tiene solución H para todo X.

Nótese que al utilizar la herramienta de álgebra lineal, lo anterior es cierto si y solo si la matriz tiene rango K, que significa K columnas linealmente independientes.

■

Teorema (4.6):

Un activo contingente, X, es asequible si y sólo si toma el mismo valor $E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$ para todo $Q \in M$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$

Sea X un activo contingente asequible, entonces existe H, su portafolio replicante, tal que $X = V_1$ y V_0 es su valor inicial. Sea Q una medida de probabilidad neutral al riesgo entonces por el teorema 4.3 $V_0 = E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$. Nótese que dicho valor no depende de Q, por lo que debe tomar el mismo valor para todo $Q \in M$.

($\Leftarrow$)

Supóngase que X es un activo contingente no asequible. Además, sean $A \in R^{K\times(N+1)}$, $H \in R^{N+1}$ y $X \in R^K$ tales que $A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix}$, $H = (H_0,\ldots,H_N)$ y $X = (X_1,\ldots,X_K)$. Por otro lado, si no hay solución H para el sistema $AH^T = X$ tenemos que por la variante del *Teorema de Farkas* (*vid.* Capítulo IX) debe existir el vector $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_K)$ tal que $\pi A = 0$ y $\pi X > 0$. Sean $\hat{Q} \in M$ y $\lambda \in R$ tales que $Q(\omega_i) = \hat{Q}(\omega_i) + \lambda\pi_i B_1(\omega_i)$ para todo $i = 1,\ldots,K$. Nótese que como $\pi A = 0$ entonces:

$$0 = \pi A = [\pi_1,\ldots,\pi_K]\cdot\begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{K} B_1(\omega_i)\pi_i \quad \sum_{i=1}^{K} S_1(1)(\omega_i)\pi_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{K} S_N(1)(\omega_i)\pi_i\right]$$

Esto implica que $\sum_{i=1}^{K} B_1(\omega_i)\pi_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{K} S_s(1)(\omega_i)\pi_i = 0$ para todo $s = 1,\ldots,N$.

Además, como $B_1(\omega_i) > 0$, $\pi_i > 0$ y $S_s(1)(\omega_i) > 0$ para todo i = 1,...,K entonces $B_1(\omega_i)\pi_i = 0$ y $S_s(1)(\omega_i)\pi_i = 0$ i = 1,...,K. Del resultado dado tenemos que $Q(\omega_i) = \hat{Q}(\omega_i) + \lambda\pi_i B_1(\omega_i) = \hat{Q}(\omega_i) + \lambda(0) = \hat{Q}(\omega_i) > 0$, entonces Q es una medida de probabilidad.

Por otro lado, nótese que:

$$E_Q[S_n^*(1)] = \sum_{i=1}^{K} \frac{Q(\omega_i)S_n(1)(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{Q}(\omega_i) + \lambda\pi_i B_1(\omega_i)S_n(1)(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{Q}(\omega_i)S_n(1)(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} + \lambda\pi_i S_n(1)(\omega_i) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{Q}(\omega_i)S_n(1)(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{K} \hat{Q}(\omega_i)S_n^*(1)(\omega_i)$$

sabemos que $\hat{Q} \in M$ entonces $\sum_{i=1}^{K} \hat{Q}(\omega_i)S_n^*(1)(\omega_i) = S_n^*(0)$ entonces $E_Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0)$ por lo que $Q \in M$.

Sea $\delta = \pi X > 0$ entonces:

$$E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = \sum_{i=1}^{K} \frac{Q(\omega_i)X(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{Q}(\omega_i) + \lambda\pi_i B_1(\omega_i)X(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{Q}(\omega_i)X(\omega_i)}{B_1(\omega_i)} + \lambda\pi_i X(\omega_i) = E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] + \lambda\sum_{i=1}^{K} \pi_i X(\omega_i) = E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] + \lambda\pi X =$$

$$= E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] + \lambda\delta$$

Por lo tanto Q y $\hat{Q}$ son dos medidas neutrales al riesgo tales que $E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] \neq E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$.

■

Teorema (4.7):

El modelo es completo si y sólo si M consiste exactamente una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Sea M un conjunto unitario (i.e sólo existe una medida neutral al riesgo) y X un activo contingente entonces $E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right]$ es constante para todo $Q \in M$. Entonces por el teorema 4.6, X es asequible y por lo tanto el modelo es completo.

$(\Rightarrow)$

Supóngase que el modelo es completo entonces todo activo contingente, X, es asequible. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que existen dos medidas neutrales al riesgo, Q y $\hat{Q}$, diferentes. Entonces debe existir algún $\omega_j \in \Omega$ tal que $Q(\omega_j) \neq \hat{Q}(\omega_j)$. Considérese el activo contingente $X(\omega_i) = \begin{cases} B_1(\omega_j) & \omega_i = \omega_j \\ 0 & \omega_i \neq \omega_j \end{cases}$, entonces $E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] = Q(\omega_j) \neq \hat{Q}(\omega_j) = E_{\hat{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right]$. Por el teorema anterior X no es asequible y por lo tanto en modelo no es completo. Es decir que no es posible tener dos medidas neutrales al riesgo diferentes, lo que implica que M es unitario, que es lo mismo que sólo exista una medida neutral al riesgo.

■

Nótese que si el modelo es incompleto sólo se sabe el valor de los activos contingentes asequibles. Pero para los activos no asequibles no se puede determinar el valor en el que no se permitan oportunidades de arbitraje. Por lo tanto debe existir el conjunto $\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$ de los posibles valores en los que no hay arbitraje financiero. Dicho conjunto tiene las cotas $V_+(X) = \sup\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$ y $V_-(X) = \inf\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$, por lo tanto el precio del activo contingente puede ser acotado de la forma $V_-(X) \leq V(X) \leq V_+(X)$. Del resultado anterior podemos proponer el siguiente teorema.

Teorema (4.8):

Si $M \neq \varnothing$ entonces para cualquier activo contingente, *X*, se tiene que el conjunto $\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$ es acotado. Es decir existen los valores $V_+(X) = \sup\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$ y $V_-(X) = \inf\left\{E_Q\left[\frac{X}{B_1}\right] \ni Q \in M\right\}$.

Propiedad (4.1):

Si un activo contingente, *X*, es asequible entonces $V_+(X) = V_-(X)$ y es el precio del activo.

V. MERCADOS DE ACTIVOS FINANCIEROS MULTIPERIÓDICOS

El modelo de mercados de activos multiperiódico es un modelo más realista que el modelo en un período. Es más aplicable a la teoría financiera, ya que puede modelar el movimiento de los activos durante varios estados de tiempo.

A. Especificaciones del modelo

La construcción de este modelo es por medio de diferentes procesos estocásticos se necesitan los siguientes elementos y procesos básicos:

i. *Etapas de tiempo*: $T + 1$, $t = 0, 1, \ldots, T$.

ii. *Espacio muestral*: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ con $K < \infty$ estados o escenarios.

iii. *Medida de probabilidad*: $P: \Omega \to R$ tal que $P(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

iv. *Filtración*: $F = \{f_t \ni t = 0,1,\ldots,T\}$, es un submodelo que describe como la información de los precios de los activos es transmitida a los inversionistas.

Nótese que en la etapa $t = 0$, todos los escenarios $\omega \in \Omega$ son posibles y en la etapa $t = T$ los inversionistas obtendran un escenario ω que será el único verdadero. Sin embargo, ¿qué información pueden obtener los inversionistas para $0 < t < T$? Se puede observar que, al pasar de una etapa a otra, algunos estados no son posibles. Por lo tanto, se permite construir una sucesión de conjuntos, $\{A_t\}$ de Ω tal que $A_0 = \Omega$, $A_T = \{\omega\}$, donde ω es el escenario verdadero, y $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_{T-1} \supseteq A_T$. Es decir, se sabe que el escenario verdadero está en cada A_t pero no se está seguro de cuál es, en cada subconjunto se va dando a conocer más información del mismo. Por otro lado, cada escenario es posible en éste modelo, por lo tanto deben existir K posibles sucesiones de conjuntos (una para cada escenario $\omega \in \Omega$). Es por esto que si se toma el subconjunto A_t, para cada escenario se puede encontrar una partición del conjunto Ω. Es decir que para tomar en cuenta a todos los posibles escenarios en cada tiempo t es necesario construir una secuencia de particiones de Ω, $\{P_0, P_1, \ldots, P_T\}$ tal que $P_0 \equiv \Omega$, $P_T \equiv \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\ldots,\{\omega_K\}\}$ y satisface la propiedad que cada $A \in P_t$ es la unión de algunos elementos de P_{t+1} para todo $t < T$. Estas particiones se pueden representar de dos formas: por medio de un secuencia de diagramas que representan las particiones que suceden en los tiempos posibles (*vid.* Figura 5.1) o por medio de un árbol, en el que cada nodo representa un elemento de A_t y cada arco va desde un nodo hacia el nodo correspondiente a algún $A_{t+1} \subseteq A_t$ (*vid.* Figura 5.2).

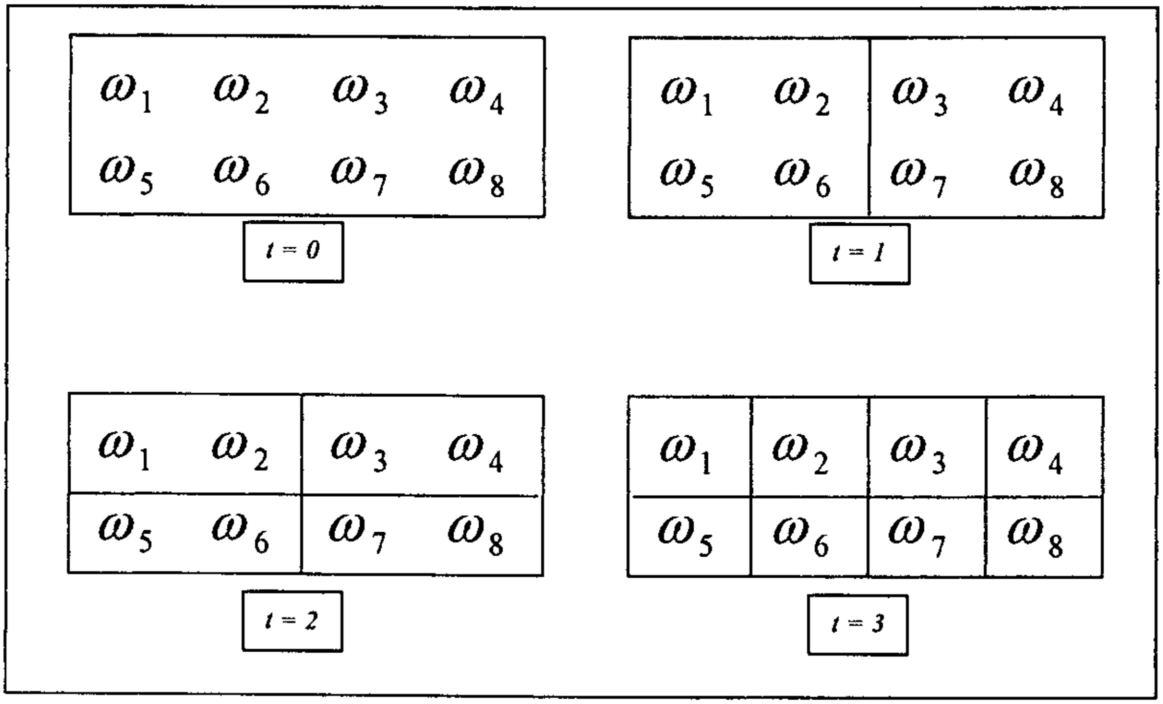

Figura 5.1

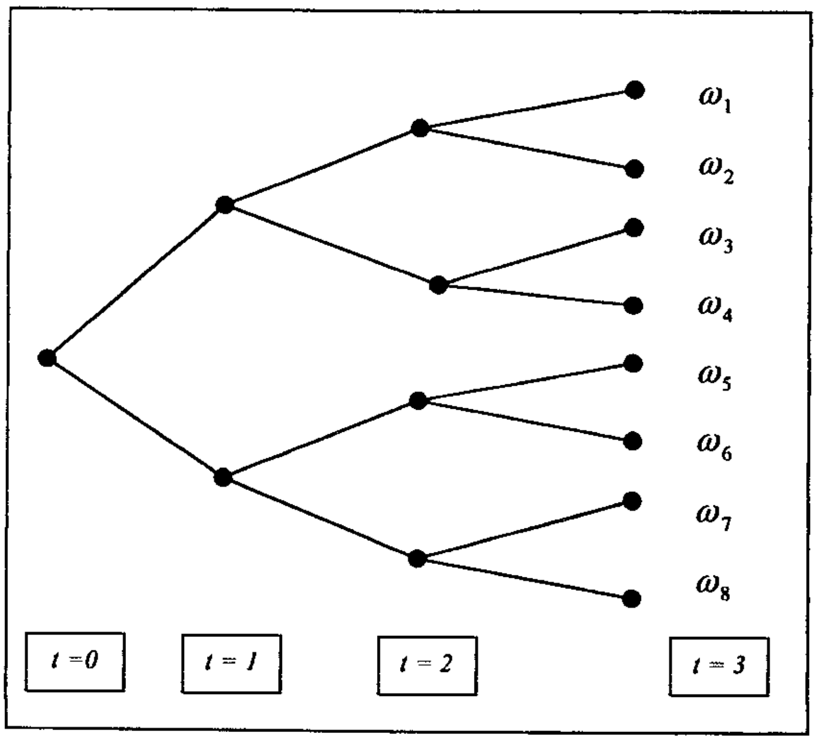

Figura 5.2

Los elementos de la filtración resumen las particiones del espacio muestral con la característica de ser álgebras de conjuntos (*vid.* Capítulo IX). Nótese que $f_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ y f_T consiste de todos subconjuntos unitarios de Ω. Por otro lado, como cada conjunto de la partición de la etapa t es igual a la unión de algunos conjuntos de la partición en la etapa $t + 1$, decimos que la filtración es una colección encestada de subconjuntos de Ω y $f_{t-1} \subseteq f_t$.

v. *Proceso de cuenta bancaria (o numerario)*: $B = \{B_t \ni t = 0,1,\ldots,T\}$, donde B es un proceso estocástico con $B_0 = 1$ y $B_t(\omega) > 0$, para todo t y ω. Se debe entender B_t como el valor del activo de cuenta libre de riesgo en el tiempo t cuando se deposita un dólar en el tiempo inicial, $t = 0$. Usualmente, B es un proceso no decreciente, y $r_t = \dfrac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} \geq 0,\ t = 0,1,\ldots,T$, debe interpretarse como la tasa de interes perteneciente al intervalo de tiempo $(t-1, t)$.

vi. *Proceso de precios*: $S_n = \{S_n(t) \ni t = 0,1,\ldots,T\}$, donde S_n puede interpretarse como el precio del activo en la etapa t. Por ejemplo, el precio de una acción de cualquier corporación.

Es importante que en el modelo sea consistente con la estructura de información que da la filtración y es por eso que se debe definir lo siguiente:

Definición (5.1):

Una variable aleatoria X se dice *medible* con respecto al álgebra A si $X: \Omega \to R$ es tal que $X(\omega)$ es constante en cualquier conjunto de la partición correspondiente de A. Equivalentemente, para todo número real x, el conjunto $\{\omega \in \Omega \ni X(\omega) = x\}$ es un elemento del álgebra A.

Definición (5.2):

Un proceso estocástico $\{X_n\}$ se dice que está *adaptado* a una filtración F si la variable aleatoria es medible con respecto a f_t para todo $t = 0,1,\ldots,T$.

Los procesos estocásticos necesarios para el modelo son:

i. *N procesos de precios*: S_n es un proceso simple, sin embargo, se convierte en un proceso estocástico ya que en cada etapa se dan diferentes escenarios y dado el escenario se comporta de diferentes formas en las etapas que le siguen. Se define entonces el proceso estocástico como la función $S_n: \{0,1,\ldots,T\} \times \Omega \to R$.

Nótese que si se fija un valor t, la función anteriormente mencionada es una variable aleatoria.

Definición (5.3):

Se llama un *trayectoria muestral* a la función $S_n:\{0,1,\ldots,T\}\times\Omega\rightarrow R$, si en ésta se fija un valor ω.

Es necesario establecer desde este punto que el proceso de precios de los activos son adaptados por la filtración. De esta manera los inversionistas tendrán amplio conocimiento en cualquier etapa de tiempo.

Definición (5.4):

Una filtración se dice que es *generada* por el proceso de precios si es construida por dicho proceso estocástico.

ii. *Estrategias de mercado*: $H=(H_0,H_1,\ldots,H_N)$ es un vector de procesos estocásticos $H_n=\{H_n(t):t=1,\ldots,T\}$. Nótese que $H_n(0)$ no está especificado; esto es porque para $n\geq 1$, $H_n(t)$ debe ser interpretado como el número de unidades que el inversionista posee desde la etapa *t – 1* a la etapa *t*. Al mismo tiempo, $H_0(t)B_{t-1}$ representa la cantidad de dinero invertida en una cuenta de banco en la etapa *t – 1*. $H_n(t)$ puede ser negativo cuando el inversionista presta dinero o vende algún activo.

Las estrategias de mercado pretenden mostrar la posición del inversionista en cada etapa, pero en ningún momento muestra el futuro de sus activos. Además, están relacionadas con la filtración.

Definición (5.5):

Un proceso estocástico H_n se dice *predecible* con respecto a la filtración *F*, si cada variable aleatoria $H_n(t)$ es medible con respecto a f_{t-1} para todo $t = 1,2,\ldots,T$. Dado que $f_{t-1}\subseteq f_t$, se puede decir que todos los procesos estocásticos son adaptados.

Para que el modelo sea consistente se tomará en cuenta que las estrategias de mercado son predecibles.

iii. *Proceso de valuación*: $V=\{V_t \ni t=0,1,\ldots,T\}$ es un proceso estocástico que está definido por $V_t=\begin{cases} H_0(1)B_0+\sum_{n=1}^{N}H_n(1)S_n(0), & t=0 \\ H_0(t)B_t+\sum_{n=1}^{N}H_n(t)S_n(t), & t\geq 1\end{cases}$. Se dice que V_0 es el valor inicial del portafolio y para $t \geq 1$, V_t es el valor del portafolio en la etapa t antes de que se realice cualquier transacción.

iv. *Proceso de ganacia*: $G = \{G_t \ni t = 1,\ldots,T\}$ es un proceso estocástico que está definido por $G_t = \sum_{u=1}^{t} H_0(u)\Delta B_u + \sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n(u)$ para $t \geq 1$, donde $\Delta S_n(t) = S_n(t) - S_n(t-1)$ y $\Delta B_t = B_t - B_{t-1}$. Éste proceso representa la ganancia o pérdida acumulativa del portafolio durante la etapa t.

Propiedad (5.1):

Los procesos de valuación y de ganancia son procesos adaptados.

Nótese que V_t representa el valor del portafolio en la etapa t, justo antes de hacer alguna transacción. Por otro lado, $H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$ para $t \geq 1$ representa el valor del portafolio después de haber realizado t transacciones, es decir antes de pasar a la etapa $t + 1$. Esto significa que durante la etapa t se puede añadir o quitar dinero del portafolio, sin embargo, en las etapas $t = 0$ y $t = T$ dicho dinero no puede ser añadido ni quitado.

Definición (5.6):

Una estrategia de mercado, H, se dice *autofinanciable* si $V_t = H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$ para $t=1,\ldots,T-1$.

Esta definición significa que no se añade ni se quita dinero del portafolio durante las etapas $t = 0$ y $t=T$, entonces cualquier cambio de valor en el portafolio se debe a la ganancia o pérdida de la inversión.

Propiedad:(5.2)

Una estrategia de mercado es autofinanciable si y solo si $V_t = V_0 + G_t$ para $t=1,\ldots,T$.

De igual forma que en el modelo de un periodo es necesario normalizar los valores de los precios para poder manejar su comportamiento absoluto. Y de igual forma se normaliza el proceso de cuenta bancario utilizándolo como el numerario. Se tiene entonces los procesos descontados de la siguiente forma:

i. *Proceso de precio descontado*: $S_n^* = \{S_n^*(t) \ni t = 0,1,\ldots,T\}$ definido por $S_n^*(t) = \dfrac{S_n(t)}{B_t}$

para $t = 0,1,\ldots,T$ y $n = 1,2,\ldots,N$.

ii. *Proceso de valuación descontado*: $V^* = \{V_t^* \ni t = 0,1,\ldots,T\}$ definido por

$$V_t^* = \begin{cases} H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(0), & t = 0 \\ H_0(t)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)S_n^*(t), & t \geq 1 \end{cases}$$

iii. *Proceso de ganacia descontado*: $G^* = \{G_t^* \ni t = 1,\ldots,T\}$ definido por

$G_t^* = \sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n^*(u)$ para $t \geq 1$, donde $\Delta S_n^*(t) = S_n^*(t) - S_n^*(t-1)$.

Propiedad (5.3):

$V_t^* = \dfrac{V_t}{B_t}$ para $t = 0,1,\ldots,T$.

Propiedad (5.4):

Una estrategia de mercado es autofinanciable si y solo si $V_t^* = V_0^* + G_t^*$ para $t=1,\ldots,T$.

B. Las oportunidades de arbitraje

En el modelo de un período las oportunidades de arbitraje dependían de las medidas neutrales al riesgo. En el caso multiperiódico, se trabaja de forma análoga.

Definición (5.7):

Una estrategia de mercado *H*, se dice que es una oportunidad de arbitraje si y solo si:

i. $V_0 = 0$

ii. $V_T \geq 0$

iii. $EV_T > 0$

iv. *H* es autofinanciable

Propiedad (5.5):

Una estrategia de mercado, H, autofinanciable es una oportunidad de arbitraje si y solo si:

i. $V_0^* = 0$

ii. $V_T^* \geq 0$

iii. $EV_T^* > 0$

Propiedad (5.6):

Una estrategia de mercado, H, autofinanciable es una oportunidad de arbitraje si y solo si:

i. $G_T^* \geq 0$

ii. $EG_T^* > 0$

Definición (5.7):

Una *medida de probabilidad neutral al riesgo (medida martingala)* es una medida de probabilidad Q tal que:

i. $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$

ii. el proceso de precios descontado S_n^* es una martingala (*vid.* Capítulo II) bajo Q, para todo $n = 1, \ldots, N$

Nótese que, al tomar la definición de martingala, la definición 5.7 propone lo siguiente:

$$E_Q[S_n^*(t+s) \mid f_t] = S_n^*(t) \text{ para } t, s \geq 0$$

Teorema (5.1):

Si Z es una martingala y H es un proceso predecible entonces $G_t = \sum_{u=1}^{t} H_u \Delta Z_u$ es una martingala también.

Demostración:

Sean $s, t \geq 0$ arbitrarios, entonces por propiedades de los valores esperados condicionados:

$$E[G_{t+s} \mid f_t] = E[G_{t+s} - G_t + G_t \mid f_t] = E[H_{t+1}\Delta Z_{t+1} + \ldots + H_{t+s}\Delta Z_{t+s} \mid f_t] + G_t =$$

$$= E[H_{t+1}\Delta Z_{t+1} \mid f_t] + \ldots + E[H_{t+s}\Delta Z_{t+s} \mid f_t] + G_t =$$

$$= E[E[H_{t+1}\Delta Z_{t+1} \mid f_t] \mid f_t] + \ldots + E[E[H_{t+s}\Delta Z_{t+s} \mid f_t] \mid f_t] + G_t =$$

$$= E[H_{t+1} E[\Delta Z_{t+1} \mid f_t] \mid f_t] + \ldots + E[H_{t+s} E[\Delta Z_{t+s} \mid f_t] \mid f_t] + G_t =$$

$$= E[H_{t+1} \cdot 0 \mid f_t] + \ldots + E[H_{t+s} \cdot 0 \mid f_t] + G_t = 0 + G_t = G_t$$

■

Teorema (5.2):

Si Q es una medida martingala y H es una estrategia de mercado autofinanciable, entonces V^* es una martingala bajo Q.

Demostración:

Esto se cumple por la propiedad 5.4 y el teorema 5.1.

■

Nótese que si se toma un nodo no terminal correspondiente al árbol que representa la información del modelo. Éste representa un modelo uniperíodico. Es decir que si el modelo multiperiódico tiene oportunidades de arbitraje los modelos uniperiódicos que lo conforman también tienen oportunidades de arbitraje. De este resultado el siguiente teorema:

Teorema (5.3):

Si el modelo multiperiódico no tiene oportunidades de arbitraje, entonces ninguno de sus modelos uniperiódicos que lo conforman tienen oportunidades de arbitraje.

Teorema (5.4):

No existen oportunidades de arbitraje si y solo si existe una medida martingala, Q.

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Supóngase que H es una estrategia de mercado autofinanciable tal que $V_T^* \geq 0$ y $EV_T^* > 0$. Entonces $E_Q V_T^* > 0$, y por el teorema 5.2, V^* es una martingala bajo Q entonces $V_0^* = E_Q V_T^* > 0$. Entonces por la propiedad 5.5, H no puede ser una oportunidad de arbitraje.

$(\Rightarrow)$

Supóngase que no existen oportunidades de arbitraje. Entonces por el teorema 5.3 no existen oportunidades de arbitraje para ningún modelo en un período que conforman al modelo multiperiódico. Entonces por el teorema 3.8 existen medidas de probabilidad neutrales al riesgo para cada uno de los modelos simples. Y al conformar todas esas medidas neutrales al riesgo, se genera una medida martingala Q. Esto es porque para cada A de las particiones de la filtración se tiene que $E_{Q(t,A)}[\Delta S_n^*(t+1)] = 0$ para todo $n=1,\ldots,N$, $t<T$ y $A \in P_t$. Entonces, $E_Q[\Delta S_n^*(t+1) | f_t] = 0$ para $n = 1,\ldots,N$ y $t < T$. Tómense $s, t \geq 0$ arbitrarios,

$$E_Q[S_n^*(t+1)|f_t] = E_Q[\Delta S_n^*(t+s)+...+\Delta S_n^*(t+1)+S_n^*(t)|f_t] =$$

$$= E_Q[E_Q[\Delta S_n^*(t+s)|f_{t+s-1}]|f_t]+...+E_Q[E_Q[\Delta S_n^*(t+1)|f_t]|f_t]+S_n^*(t) =$$

$$= E_Q[0|f_t]+...+E_Q[0|f_t]+S_n^*(t) = S_n^*(t)$$

Por lo tanto, Q es una medida martingala.

■

Definición (5.8):

Una medida lineal de valuación es un vector con entradas no negativas $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_K) \in R^K$ tal que, para cada estrategia de mercado autofinanciable, H, se tiene que $V_0 = \sum_\omega \pi(\omega)V_T^*(\omega)$.

Teorema (5.5):

Un vector $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_K) \in R^K$ es una medida lineal de valuación si y solo si es una medida de probabilidad sobre Ω tal que el proceso de precios descontado es una martingala.

Definición (5.9):

Se dice que la *ley de un precio* se cumple si no existen dos estrategias de mercado, H y $\hat{H}$, tales que $V_T(\omega) = \hat{V}_T(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$ pero $V_0 \neq \hat{V}_0$.

Propiedad (5.7):

Si existe una medida lineal de valuación entonces la ley de un precio se cumple.

Nótese que el modelo multiperiódico tiene un comportamiento casi igual que el modelo en un perído; ya que entre cada dos etapas se puede hacer corresponder un modelo en un período. Es decir que el modelo multiperíodico es una sucesión de modelos en un periódo.

VI. APLICACIONES

A. Activos de Arrow-Debreu en mercados completos

Existen dos situaciones que se deben asumir y que son de suma importancia para los inversionistas:

i. Siempre tienden a querer más riqueza de la que poseen y toman decisiones para maximizarla.

ii. No les gusta arriesgar su dinero y modifican sus decisiones en torno a los valores esperados que se les muestre.

Dado que es más fácil medir la forma de maximizar la riqueza, las metodologías de valuación son más existosas. Es claro que los inversionistas desean maximizar sus riquezas tomando todas las posibles oportunidades de arbitraje que se les presente. ¿Cómo lo hacen? Minimizan el costo de la compra de un portafolio, en el que se pueden comprar o vender activos, sujeto a que cada activo pague una cantidad. Es decir, se plantea el siguiente problema de programación lineal:

$$\min_{h} h^T \cdot Z$$

sujeto a:

$$h \cdot \overline{Z} \geq 0$$

donde $Z = \begin{bmatrix} S_1^*(0) \\ \vdots \\ S_1^*(0) \end{bmatrix}$ es el vector de precios iniciales y $\overline{Z} = \begin{bmatrix} S_1^*(\omega_1) & \cdots & S_1^*(\omega_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N^*(\omega_1) & \cdots & S_N^*(\omega_{k1}) \end{bmatrix}$ es la matriz que representa los precios de los activos en la etapa final.

Al analizar la solución se debe notar lo siguiente:

i. Si $h^T \cdot Z < 0$ los activos prestan dinero para cubrir el costo del portafolio.

ii. Si $h^T \cdot Z = 0$ los activos no tienen costo alguno.

Por lo tanto, se debe concluir que la solución ideal debe ser no negativa (es decir que exista arbitraje para que los inversionistas maximicen su riqueza).

El que no existan arbitrajes implica que existe un equilibrio en el mercado y se pueda encontrar un precio equilibrado para los activos financieros. De esto, las condiciones de arbitraje financiero son las premisas más importantes para la mayoría de las metodologías que tratan de calcular precios en los activos financieros.

Si se considera que no existen oportunidades de arbitraje entonces el problema del dual puede ser considerado como:

$$\max_{\pi \in R^k} 0^T \cdot \pi$$

sujeto a:

$$\overline{Z} \cdot \pi = Z$$

$$\pi \geq 0$$

Nótese que el vector π es el vector de precios estado, es decir que para resolver este problema se deben de utilizar los activos de Arrow-Debreu.

Al tomar en cuenta que a los inversionistas no les gusta arriesgar su dinero, es importante construir las medidas neutrales al riesgo, Q. Y estas pueden ser construidas utilizando los precios estado, como se demostró en el teorema 4.4. Entonces $Q = \frac{\pi}{\sum_{i=1}^{K} \pi_i}$.

Si se considera el modelo en el que hay dos activos y dos escenarios en la etapa final y tomando el problema dual se tiene que el sistema:

$$\begin{cases} S_1(1)(\omega_1)\pi_1 + S_1(1)(\omega_2)\pi_2 = S_1(0) \\ S_2(1)(\omega_1)\pi_1 + S_2(1)(\omega_2)\pi_2 = S_2(0) \end{cases}$$

se debe resolver para π de lo cual se obtiene que:

$$\pi_1 = \frac{S_1(0)S_2(1)(\omega_2) - S_2(0)S_1(1)(\omega_2)}{S_1(1)(\omega_1)S_2(1)(\omega_2) - S_1(1)(\omega_2)S_2(1)(\omega_1)}$$

$$\pi_2 = \frac{S_1(0) - S_2(1)(\omega_1)\left(\frac{S_1(0)S_2(1)(\omega_2) - S_2(0)S_1(1)(\omega_2)}{S_1(1)(\omega_1)S_2(1)(\omega_2) - S_1(1)(\omega_2)S_2(1)(\omega_1)}\right)}{S_2(1)(\omega_2)}$$

Además, para encontrar los precios iniciales libres de riesgo se debe utilizar la medida neutral al riesgo y se obtienen por $S_i(0) = (\pi_1 + \pi_2)\big(S_i(\omega_1)Q(\omega_1) + S_i(\omega_2)Q(\omega_2)\big)$, donde i representa algún activo del modelo.

Ejemplo numérico:

Si $\overline{\overline{Z}} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ y $Z = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.4 \end{bmatrix}$ entonces los precios estado son $\begin{matrix} \pi_1 = 0.5 \\ \pi_2 = 0.4 \end{matrix}$. De estos se obtienen la medida neutral al riesgo $Q = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.44 \end{pmatrix}$. Si se define un tercer activo en el que su precio en el escenario 1 es 5 y 8 en el segundo, se tiene que su precio libre de riesgo es $S_3(0) = (0.5 + 0.4)(5(0.56) + 8(0.44)) = 5.7$.

B. Activos de Arrow-Debreu en mercados incompletos utilizando el modelo multiperiódico

Considérese el modelo en un período que consta de dos activos y tres escenarios. Por el teorema 4.5 se puede establecer que el modelo es incompleto. Por otro lado, si se considera la aplicación anterior, deben existir los activos Arrow-Debreu asociados a los escenarios para hacer uso de sus precios estado (en el caso del modelo completo, el número de activos es igual al número de escenarios). Sin embargo, en el modelo que presentamos no se pueden construir dichos precio estado. Para lograr construirlos es necesario transformar el modelo a un modelo multiperiódico. Este nuevo modelo es construido al añadir una etapa intermedia entre las etapas que ya tiene el modelo inicial (Aziz, 1998:47). Esto se logra haciendo que a cada etapa los activos tengan dos estados disponibles únicamente (*vid.* Figura 6.1).

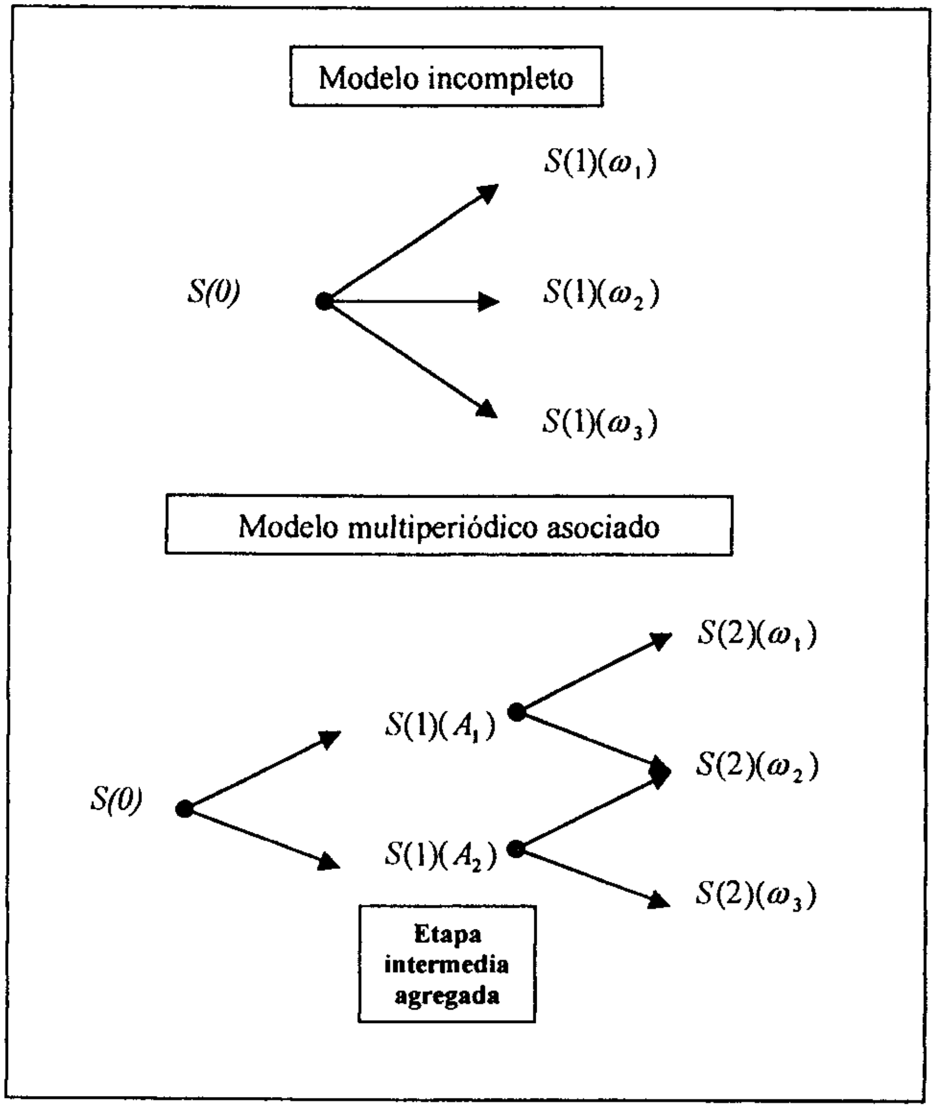

Figura 6.1

¿Cómo se encuentran los precios estado?

Antes de proponer la forma de construir los precios estado se propone la siguiente notación que fácil manejo:

$$S(0)=\begin{pmatrix}a_{101}\\ a_{201}\end{pmatrix},\quad S(1)(A_j)=\begin{pmatrix}a_{1j1}\\ a_{1j1}\end{pmatrix}\ \text{para } j=1,2 \text{ y } S(2)(\omega_j)=\begin{pmatrix}a_{1j2}\\ a_{1j2}\end{pmatrix}\ \text{para } j=1,2,3.$$

Al recordar que los modelos multiperiódicos son formados de submodelos en un período, se encontrarán los precios estados de dichos submodelos, denotados por $\pi_{i,k}(a,b)$, donde *i* representa el activo del precio estado, *k* el escenario hacia donde va, *a* es el escenario de donde inicia y *b* es la etapa donde inicia. Luego, se hará la generalización para el modelo multiperiódico.

Para encontrar los precios estado de cada escenario se multiplicarán todos los precios estado que se encuentran en la trayectoria hacia dicho escenario. Si existen varias trayectorias se sumarán. Es decir, $\pi_1=\pi_{1,1}(1,0)\pi_{1,2}(1,1)$, $\pi_2=\pi_{1,1}(1,0)\pi_{2,2}(1,1)+\pi_{2,1}(1,0)\pi_{2,2}(2,1)$ y $\pi_3=\pi_{2,1}(1,0)\pi_{3,2}(2,1)$.

Para comprender esto se propone el siguiente ejemplo numérico:

$$S(0)=\begin{pmatrix}36\\ 24\end{pmatrix}\qquad S(1)(A_1)=\begin{pmatrix}48\\ 36\end{pmatrix}\qquad S(1)(A_2)=\begin{pmatrix}31\\ 17\end{pmatrix}$$

$$S(2)(\omega_1)=\begin{pmatrix}60\\ 44\end{pmatrix}\qquad S(2)(\omega_2)=\begin{pmatrix}40\\ 32\end{pmatrix}\qquad S(2)(\omega_3)=\begin{pmatrix}25\\ 5\end{pmatrix}$$

Primero se encuentran los precios estado del submodelo que va de la etapa uno hacia la etapa dos, y haciendo uso del procedimiento del la aplicación anterior (*vid.* Figura 6.2.).

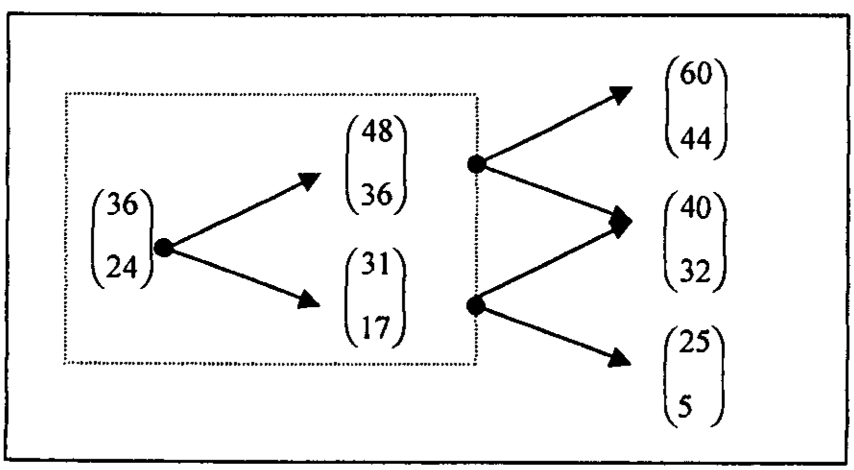

Figura 6.2

Entonces los valores de los precios estado son
$$\begin{array}{l}\pi_{1,1}(1,0)=0.44\\ \pi_{2,1}(1,0)=0.48\end{array}.$$

Segundo, se encuentran los precios estado que van desde el escenario uno de la etapa dos hacia la etapa tres (*vid.* Figura 6.3).

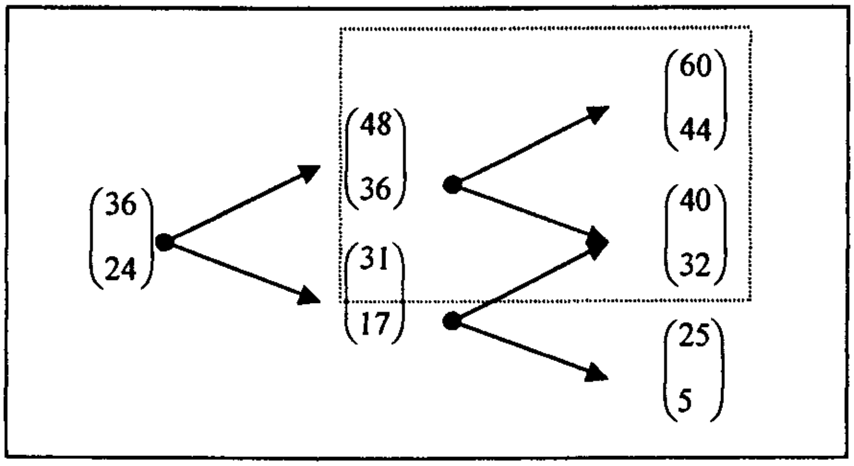

Figura 6.3

Los valores de los precios estado son
$$\begin{array}{l}\pi_{1,2}(1,1)=0.6\\ \pi_{2,2}(1,1)=0.4\end{array}.$$

Por último, se encuentran los precios estado que van desde el escenario dos de la etapa dos hacia la etapa tres (*vid.* Figura 6.4).

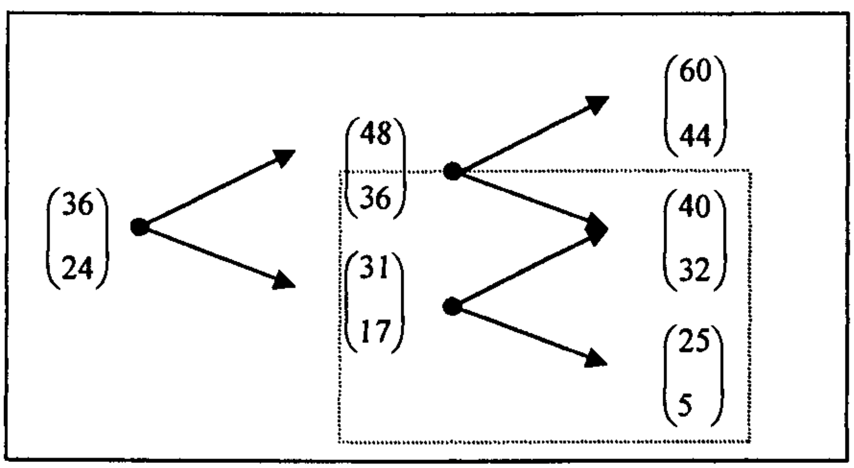

Figura 6.4

Los valores de los precios estado son $\begin{array}{l}\pi_{2,2}(2,1)=0.45\\ \pi_{3,2}(2,1)=0.52\end{array}$.

Ya teniendo los precios estado de cada submodelo tenemos que los precios estado que corresponden a cada escenario son:

$$\pi_1=(0.44)(0.6)=0.264$$

$$\pi_2=(0.44)(0.3)+(0.48)(0.45)=0.348$$

$$\pi_3=(0.48)(0.52)=0.2496$$

C. Mercado incompleto en un período

El siguiente es un ejemplo sencillo de un mercado incompleto:

Considérese el modelo en un período tal que se tiene un bono sin riesgo con rendimiento (o tasa de interés) r, que paga una unidad monetaria en la etapa $t = 1$. Además, el modelo tiene un activo con riesgo S, tal que su valor en la etapa $t = 0$ es $S(0) = p$ y los valores de cada escenario en la etapa $t = 1$ son $S(1)(\omega_1)=up$, $S(1)(\omega_2)=mp$ y $S(1)(\omega_3)=dp$, donde $d<m<u$. Nótese que este mercado es incompleto, ya que se tienen tres escenarios y únicamente dos activos, y por el teorema 4.5. Además, si se consideran los precios estado π_1,π_2,π_3 se deberán satisfacer las siguientes ecuaciónes:

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=\frac{1}{1+r}$$

$$u\pi_1+m\pi_2+d\pi_3=1$$

Nótese que este sistema de ecuaciones tendrá soluciones positivas, es decir no habrá arbitraje financiero, y tendrá soluciones:

i. $\pi_1=\dfrac{(1+r)-d}{(1+r)(u-d)}$, $\pi_2=0$, $\pi_3=\dfrac{u-(1+r)}{(1+r)(u-d)}$ en el caso de $d<1+r<u$,

ii. $\pi_1=0$, $\pi_2=\dfrac{m-(1+r)}{(1+r)(m-d)}$, $\pi_3=\dfrac{(1+r)-d}{(1+r)(m-d)}$ en el caso $m\geq 1+r$, y

$$\pi_1 = \frac{(1+r)-m}{(1+r)(u-m)}$$

iii. $\pi_2 = \dfrac{u-(1+r)}{(1+r)(u-m)}$ en el caso de $m < 1 + r$.

$$\pi_3 = 0$$

En cada caso se estiman los valores de los precios estado basados en la información disponible.

Ahora considérese la opción de compra sobre S, con el precio de ejercicio E, tal que $pm < E < pu$. Entonces los pagos de dicha opción en cada escenarió son $X(\omega_1) = pu - E$, $X(\omega_2) = 0$ y $X(\omega_3) = 0$. Las cotas entre las cuales se encuentra el valor de la opción son $V_+(X) = \dfrac{(1+r)-d}{(1+r)(u-d)}(pu-E)$ y $V_-(X) = \dfrac{(1+r)-m}{(1+r)(u-m)}(pu-E)$. Debe notarse que el valor de la opción que se encuentra entre las cotas dadas es libre de oportunidades de arbitraje.

D. Una aplicación de las opciones en el modelo en un período

Considérese el modelo en un periodo con $N = 2$ y $K = 3$ tal que el valor de los activos en el precio en la etapa incial es $S(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y los precios en los escenarios en la etapa $t = 1$ son $S(1)(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 7.2 \end{pmatrix}$, $S(1)(\omega_2) = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 4.5 \end{pmatrix}$ y $S(1)(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.8 \end{pmatrix}$. Se desea verificar si existen oportunidades de arbitraje, encontrando los valores necesarios de una estrategia de mercado, $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, y para esto se utilizará el problema de programación lineal:

$$\min(2H_1 + 3H_2)$$

sujeto a:

$$\begin{cases} 1.2H_1 + 7.2H_2 \geq 0 \\ 2.4H_1 + 4.5H_2 \geq 0 \\ 6H_1 + 1.8H_2 \geq 0 \\ -1 \leq H_1 \leq 1 \ \text{y} \ -1 \leq H_2 \leq 1 \end{cases}$$

Nótese que la única solución para este problema es H = (0,0) y por lo tanto el valor en la etapa inicial del portafolio es igual a cero y no cambia en la etapa final. Entonces no existen oportunidades de arbitraje. Ademá, en la Figura 6.5, se puede comprender el resultado tal que el vector de precios en la etapa inicial se encuentra dentro del cono generado por los vectores de precios en cada escenario.

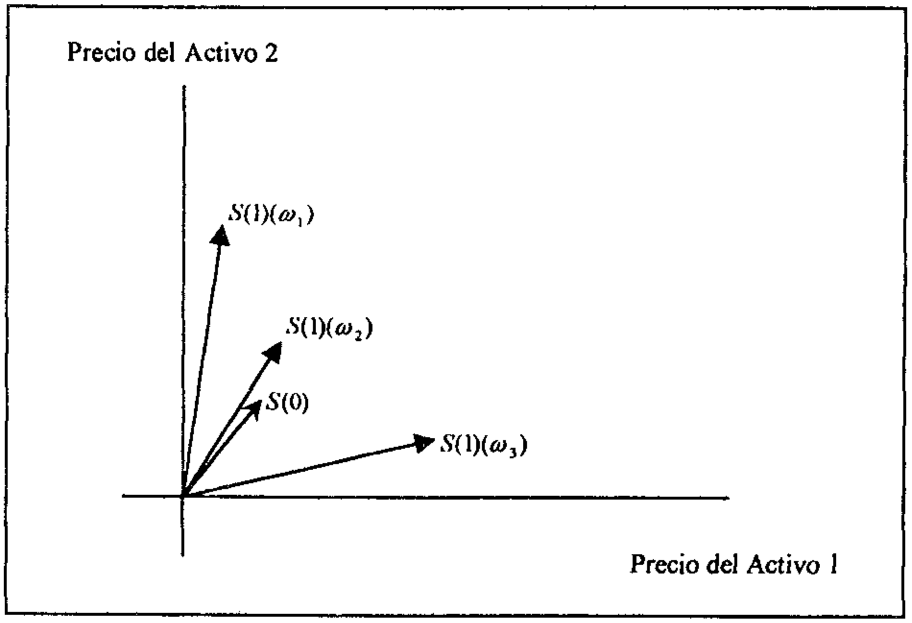

Figura 6.5

Defínase ahora una opción de compra sobre el activo 1, tal que $X(\omega) = [S_1(1)(\omega) - E]^+ = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.9 \\ 5.5 \end{pmatrix}$, donde el precio de ejercicio es $E = 0.5$. Para encontrar la cota mínima y la cota máxima entre las cuales se encuentra el valor de la opción, en la etapa inicial, se debe resolver los siguientes problemas de programación lineal:

$$\min_{\lambda(\omega)\geq 0}\left(\sum_{\omega}\lambda(\omega)[S_1(1)(\omega) - E]^+\right) \qquad \max_{\lambda(\omega)\geq 0}\left(\sum_{\omega}\lambda(\omega)[S_1(1)(\omega) - E]^+\right)$$

sujeto a: sujeto a:

$$\sum_{\omega}\lambda(\omega)S_1(1)(\omega) = S_1(0) \qquad \sum_{\omega}\lambda(\omega)S_1(1)(\omega) = S_1(0)$$

$$\sum_{\omega}\lambda(\omega)S_2(1)(\omega) = S_2(0) \qquad \sum_{\omega}\lambda(\omega)S_2(1)(\omega) = S_2(0)$$

Entonces se deben resolver:

$$\min_{\lambda(\omega)\geq 0}(V_-(X) = 0.7\lambda_1 + 1.9\lambda_2 + 5.5\lambda_3) \qquad \max_{\lambda(\omega)\geq 0}(V_+(X) = 0.7\lambda_1 + 1.9\lambda_2 + 5.5\lambda_3)$$

sujeto a: y sujeto a:

$$\begin{cases} 1.2\lambda_1 + 2.4\lambda_2 + 6\lambda_{13} = 2 \\ 7.2\lambda_1 + 4.5\lambda_2 + 1.8\lambda_{13} = 3 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.2\lambda_1 + 2.4\lambda_2 + 6\lambda_{13} = 2 \\ 7.2\lambda_1 + 4.5\lambda_2 + 1.8\lambda_{13} = 3 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Al resolver tenemos que para encontrar la cota mínima $\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0.64 \\ \lambda_3 = 0.08 \end{matrix}$ y para la cota máxima $\begin{matrix} \lambda_1 = 0.35 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0.26 \end{matrix}$ entonces $V_-(X) = 1.64$ y $V_+(X) = 1.69$. Por lo tanto el valor inicial de la opción está localizada en el intervalo $1.64 \leq V \leq 1.69$.

Al incluir un activo libre de riesgo al modelo se tiene que $S(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y los precios en los escenarios en la etapa *t* = *1* son $S(1)(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 7.2 \end{pmatrix}$, $S(1)(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.4 \\ 4.5 \end{pmatrix}$ y $S(1)(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 6 \\ 1.8 \end{pmatrix}$.

Para verificar si existen estrategias de arbitraje se debe resolver el problema de programación lineal como se resolvió sin el activo libre de riesgo. Se tiene entonces que $H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$.

Al buscar la solución del problema:

$$\min(H_0 + 2H_1 + 3H_2)$$

sujeto a:

$$\begin{cases} 1.1H_0 + 1.2H_1 + 7.2H_2 \geq 0 \\ 1.1H_0 + 2.4H_1 + 4.5H_2 \geq 0 \\ 1.1H_0 + 6H_1 + 1.8H_2 \geq 0 \\ -1 \leq H_1 \leq 1 \text{ y } -1 \leq H_2 \leq 1 \end{cases}$$

se tiene que $H = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.13 \\ 0.18 \end{pmatrix}$. Nótese que el valor inicial del portafolio $H_0 + 2H_1 + 3H_2 = -0.21$ es

$$1.1H_0 + 1.2H_1 + 7.2H_2 = 0.352$$

negativo y $1.1H_0 + 2.4H_1 + 4.5H_2 = 0.022$ entonces el portafolio en la etapa *t = 1* es positivo en

$$1.1H_0 + 6H_1 + 1.8H_2 = 0.004$$

cada escenario. Por lo tanto, existe una oportunidad de arbitraje.

VII. CONCLUSIONES

Básicamente, el modelo presentado asume que el inversionista tiene una actitud indiferente al riesgo, de allí la denominación neutral al riesgo, la cual es modelada mediante la medida Q. Además, es interesante hacer notar que, si bien el inversionista busca oportunidades de arbitraje para maximizar el valor de su inversión, en el momento que dichas oportunidades existan, el modelo de mercado deja de ser neutral al riesgo. Esto podría interpretarse com un cambio de actitud frente al riesgo por parte del inversionista.

Los activos contingentes son una herramienta útil para la construcción de portafolios de inversión. Dichos activos son utilizados para llevar a cabo coberturas de riesgo (*Risk-hedginng*). Siendo instrumentos cuyo valor depende de los escenarios que sucedan. En la actualidad, otra aplicación importante en el campo de las finanzas corporativas es la evaluación de proyectos, mediante el uso de las llamadas opciones reales. Uno de los mayores retos de la teoría financiera actual ha sido cómo estimar el valor de tales activos. El modelo propuesto permite analizar las condiciones bajo las cuales tal valuación es posible, ya que ésta depende de la completitud del mercado. Sin embargo, es posible generar estimaciones para el caso de un mercado incompleto.

El modelo no hace más que formalizar matemáticamente el paradigma de la teoría económica, según el cual los precios son generados con base en las expectativas del mercado y la información disponible.

El modelo discreto presentado es una etapa inicial en un análisis que puede generalizarse a variables de tipo continuo, ya que los distintos elementos del modelo tales como los activos Arrow-Debreu, la medida neutral al riesgo, la noción de mercados completos, etc., pueden ser ampliadas a un contexto teórico de variables continuas.

El modelo tiene como principal ventaja el ser fácil de comprender y puede ser la base para algoritmos computacionales. Este trabajo es una contribución al desarrollo de esta teoría.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

Aziz, Andrew. 1998. «Algo Academy notes». *Algo research quarterly.* I (1): 47 – 54

Aziz, Andrew. 1998. «Algo Academy notes». *Algo research quarterly.* I (2): 59 – 70

Coleman, Rodney. 1986. *Procesos estocásticos.* Volumen 14. 1a ed. México, Limusa. 131 págs.

Danthine, Jean-Pierre. 2002. *Intermediate Financial Theory.* 1a ed. Estados Unidos, Prentince Hall. 324 págs.

Díaz, Jaime y F. Hernandez. 1998. *Futuros y opciones financieras, una introducción.* 2a ed. México, Limusa. 171 págs.

Lancaster, Kelvin. 1987. *Mathematical Economics.* 1a ed. New York, Estados Unidos, Dover. 411 págs.

Pliska, Stanley. 1997. *Introduction to mathematical finance.* 1a. Ed. Oxford, UK. Blackwell Publishers Inc. 262 págs.

Varian, Hal. 1987. «The arbitrage principle in financial economics». *Economic Perspectives.* I (2): 55-72.

IX. APÉNDICE

A. Teorema de Minkowski, del hiperplano separante (Lancaster, 1987:264):

Si S es un conjunto cerrado y convexo y $\bar{z}$ es un punto exterior de S, entonces existe un vector p y un punto $\bar{x} \in S$ tal que $px \geq p\bar{x} > p\bar{z}$ para todo $x \in S$.

Demostración:

Sea $\bar{x} \in S$ tal que x minimice la expresión $(\bar{z} - x)'(\bar{z} - x)$ para todo $x \in S$ (es decir que $\bar{x}$ es el punto más cercano de S a $\bar{z}$). Este mínimo existe porque $(\bar{z} - x)'(\bar{z} - x) \geq 0$ y únicamente puede ser cero si $\bar{z} = x$ pero dado que $x \in S$ y $\bar{z} \notin S$, entonces el producto de ambos es diferente de cero y está acotado y tiene un mínimo.

Si x es cuaquier punto de S, entonces $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in S$ para $0 \leq \lambda \leq 1$, ya que S es convexo. Entonces $[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) - \bar{z}]'[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) - \bar{z}]' \geq [\bar{x} - \bar{z}]'[\bar{x} - \bar{z}]'$ por la propiedad de mínimo de $\bar{x}$. Al reorganizar términos tenemos que $\lambda^2(x - \bar{x})'(x - \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x} - \bar{z})'(x - \bar{x}) \geq 0$. Al dividir por λ, $\lambda(x - \bar{x})'(x - \bar{x}) + 2(\bar{x} - \bar{z})'(x - \bar{x}) \geq 0$, si $\lambda \to \infty$ tenemos que $(\bar{x} - \bar{z})'(x - \bar{x}) \geq 0$. Sea $p = (\bar{x} - \bar{z})'$, y escríbase $x - \bar{x} = (x - \bar{z}) - (\bar{x} - \bar{z}) = (x - \bar{z}) - p'$ entonces $p(x - \bar{z}) - pp' \geq 0$. Por otro lado, nótese $pp' > 0$ entonces $p(x - \bar{z}) > 0$ y por lo tanto $p'(x - \bar{x}) > 0$. Al unir todas las desigualdades se tiene que $px \geq p\bar{x} > p\bar{z}$.

■

El teorema demostrado asegura la existencia del hiperplano $px = p\bar{z}$ que contiene a $\bar{z}$ y es tal que S está contenido en una de sus subespacios. De esto se puede decir que para cualquier hiperplano $px=c$, donde p es tal que $p\bar{x} > c > p\bar{z}$ tiene un elemento $\bar{z}$ en uno de sus subespacios y S está en el otro.

B. Variante del teorema de Farkas (Lancaster, 1987:253):

i. $Ax = b$ tiene una solución $x \geq 0$

ó

ii. las desigualdades $yA \geq 0$ y $yb < 0$ tienen solución

Demostración:

Para dar inicio a la demostración es de importancia verificar que i. e ii. no pueden darse al mismo tiempo. De i. tenemos que $Ax = b \Rightarrow yAx = yb$ al multiplicar por y, y por otro lado, de ii. $yA \geq 0 \Rightarrow yAx \geq 0$ al multiplicar por $x \geq 0$ y además $yb < 0$, esto genera una contradicción. Por lo tanto no se pueden dar las dos condiciones al mismo tiempo.

Si i. no tiene solución entonces existe una solución para $yAx = 0, yb = c$, si $c < 0$ entonces se tiene solución para ii..

Para probar que i. tiene una solución que no sea no negativa, y concluir que ii. tiene solución se utiliza el procedimiento de inducción. Para la matriz con dimensión $m \times 1$, i. se transforma en $xA^1 = b$ donde x es un escalar. Si $y = -b'$ entonces $\begin{array}{l} yA^1 = -b'A^1 = -x(A^1)'A^1 > 0 \\ yb = -b'b < 0 \end{array}$ tal que $y = -b'$ es una solución de ii., probando el teorema .

Asúmase que el teorema se cumple para una matriz de dimensión $m \times (k-1)$, se verificar qué sucede cuando el número de columnas se incrementa a k.

Por hipótesis, $Ax = \sum_{j=1}^{k} x_j A^j = b$ tiene una solución no negativa. Entonces el sistema $\sum_{j=1}^{k} x_j A^j = b$ tiene una solución necesariamente no negativa, de lo contrario esta solución con la componente adicional $x_k = 0$ sería una solución no negativa. Como el teorema se cumple para $k - 1$ columnas, las desigualdades $\begin{array}{l} yA^j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,k-1 \\ yb < 0 \end{array}$ tienen una solución $\bar{y}$. Si $\bar{y}A^k \geq 0$ el teorema está probado, y para eso se debe considerar el caso $\bar{y}A^k < 0$.

$$\alpha_j = \bar{y}A^j$$

Para simplificar notación, considérense $-\alpha_k = \bar{y}A^k$, dado que $\bar{y}$ es solución se tiene que

$$-\beta = \bar{y}b$$

$\alpha_j \geq 0$, $\beta > 0$ y por hipótesis $\alpha_k > 0$. Fórmense los siguientes vectores columna $\hat{A}^j = \alpha_j A^k + \alpha_k A^j$, $\hat{b} = -\beta A^k + \alpha_k b$

y entonces el nuevo sistema $\sum_{j=1}^{k-1} x_j \hat{A}^j = \hat{b}$ con solución no negativa $\hat{x}$. Al hacer algunas substituciones de los sistemas tenemos que:

$$\sum \hat{x}_j(\alpha_j A^k + \alpha_k A^l) = -\beta A^k + \alpha_k b$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum (\hat{x}_j \alpha_j + \beta) A^k + \alpha_k \sum \hat{x}_j A^j = \alpha_k b$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha_k} \sum (\hat{x}_j \alpha_j + \beta) A^k + \sum \hat{x}_j A^j = b)$$

de lo cual los números $\hat{x}_j, \alpha_j$ son no negativos y α_k, β son positivos. Entonces $\gamma = \frac{1}{\alpha_k} \sum (\hat{x}_j \alpha_j + \beta)$ es un número positivo. Denótese ahora $\tilde{x}$ el vector cuyas componentes son

$\tilde{x}_j = \bar{x}_j$, para $j = 1,2,\ldots,k-1$

$\tilde{x}_k = \gamma$

. Entonces $\tilde{x}$ es un vector no negativo y además se tiene que las

$$A\tilde{x} = b$$

ecuaciones anteriores son equivalentes a $\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_j A^j = b$.

Con lo anterior, se ha probado que las soluciones son no negativas, pero la hipótesis dice que no deben tener solucions no negativas. Dado que las ecuaciones $\sum_{j=1}^{k-1} x_j \hat{A}^j = \hat{b}$ tienen únicamente *k – 1* columnas, el teorema se cumple para las mismas, entonces debe existir una vector $\tilde{y}$ tal que

$\tilde{y}\hat{A}^j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,k-1$

$\tilde{y}\hat{b} < 0$

Al hacer un arreglo con lo construido se puede construir la solución para ii). Al utilizar los vectores $\bar{y}$ y $\tilde{y}$ se puede construir el vector $y = (\tilde{y}A^k)\bar{y} - (\bar{y}A^k)\tilde{y}$, del cual tenemos que $yA^j = (\tilde{y}A^k)(\bar{y}A^j) - (\bar{y}A^k)(\tilde{y}A^j) = \alpha_j \tilde{y}A^k + \alpha_k \tilde{y}A^j = \tilde{y}(\alpha_j A^k + \alpha_k A^j) = \tilde{y}\hat{A}^j$.

De manera similar se puede probar que $\begin{matrix} yA^k = 0 \\ \tilde{y}b = \tilde{y}b \end{matrix}$. De todo lo anterior se tiene que

$$\begin{matrix} yA^j = \tilde{y}\hat{A}^j, \text{ para } j = 1,2,\ldots,k-1 \\ yA^k = 0 \\ yb = -\tilde{b} < 0 \end{matrix}$$

, por lo que y es la solución para ii.

■

C. Propiedades de las álgebras de conjuntos

Defınción (9.1) :

Una colección F de subconjuntos de Ω es llamada álgebra en Ω si:

i. $\Omega \in F$

ii. $f \in F \Rightarrow f^c = \Omega \setminus f \in F$

iii. $f, g \in F \Rightarrow f \cup g \in F$

Propiedad (9.2):

Si F es un álgebra en Ω entonces

i. $\varnothing \in F$

ii. $f, g \in F \Rightarrow f \cap g \in F$

Propiedad (9.3):

Dada un álgebra en Ω, denotada F, siempre se puede enocntra una única colección $\{f_n\}$ tal que:

i. cada $f_n \in F$

ii. los subconjuntos $\{f_n\}$ son disjuntos

iii. $\bigcup f_n = \Omega$

De la propiedad 9.3 se puede decir que existe una única partición del conjunto Ω correspondiente al álgebra F.

Propiedad (9.4):

Existe una relación uno a uno entre las particiónes posibles del conjunto Ω y las álgebras en Ω.