

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Educación



Análisis y estimación de la prevalencia del error en la operación de la división en los alumnos de 6to grado de primaria

Trabajo de graduación presentado por
Lucia Isabel Solís Claveríe

para optar al grado académico de Maestría en Medición,
Evaluación e Investigación Educativas.

Guatemala
2018

Análisis y estimación de la prevalencia del error en la operación de la división en los alumnos de 6to grado de primaria

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Educación



Análisis y estimación de la prevalencia del error en la operación de la
división en los alumnos de 6to grado de primaria

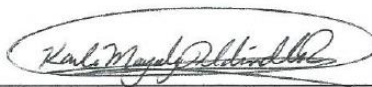
Trabajo de graduación presentado por
Lucia Isabel Solís Claveríe

para optar al grado académico de Maestría en Medición,
Evaluación e Investigación Educativas.

Guatemala
2018

Vo. Bo.:

(f)



M.A. Karla Magaly Roldan de la Rosa de Rojas
Asesor

Tribunal Examinador:

(f)



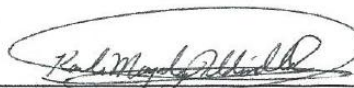
M.A. Ana Aide Cruz Grunebaum

(f)



M.A. Justo Magzul C.

(f)



M.A. Karla Magaly Roldan de la Rosa de Rojas

Fecha de aprobación: Guatemala, 9 de octubre de 2018

DEDICATORIA

A Dios

A mi esposo, Beto

A mis hijos

A mis padres

A mi familia

A la niñez y juventud de Guatemala

“Las matemáticas son importantes para la formación de un ciudadano porque constituyen un poderoso instrumento de análisis de la realidad, de comprensión del mundo y de desarrollo de la capacidad de crítica para intervenir” (Montserrat Alguacil de Nicolás, 2016).

“Eso son las matemáticas: preguntarse, jugar, divertirse uno mismo con la imaginación...Esta rica y fascinante aventura de la imaginación ha sido reducida a un conjunto estéril de ‘hechos’ para memorizar y de procedimientos para seguir... Las matemáticas no consisten en seguir instrucciones, sino en crear nuevas direcciones que seguir” (Lockhart, 2009).

“El conocimiento es una aventura incierta que conlleva en sí misma y permanentemente el riesgo de ilusión y de error” (Morín, 1999).

“La información tiene un significado matemático muy preciso de reducción de la incertidumbre” (Pozo, 1997).

“La cosa más valiosa que puedes hacer es cometer un error no puedes aprender de ser perfecto” (Osborne, 1973).

“El cerebro necesita emocionarse para aprender.” (Thorndike, 1910)

“No hay hombre más sabio que aquel que pone en práctica lo que ha aprendido de sus errores” (Confucio, 551 a. C. - 479 a. C.).

PREFACIO

En este trabajo de investigación un principal antecedente surge y se constituye a partir del trabajo de campo realizado por esta autora sobre un estudio de caso “Estudio del análisis del error del proceso aritmético de la división en 59 alumnos de 6º primaria de la Escuela San Miguel Escobar Matutina” elaborado durante el segundo semestre del año 2015. En ese trabajo se recopila el análisis del error categorizado según el análisis de Ann Newman (1977). Además, se propuso categorizar los errores en la operación aritmética de la división y la hipótesis formulada (Hr) en esa investigación fue la siguiente: “Se presenta evidencia que el análisis de los tipos de error revela errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de falta de fluidez para los estudiantes de 6to grado de primaria de la Escuela San Miguel Escobar Matutina.” Se concluyó que efectivamente los errores con más incidencia fueron la deformación del algoritmo de la división, fallas en el razonamiento lógico y errores de cálculo.

Este estudio sobre el análisis del error es importante, para apoyar en otorgar más información sobre las categorizaciones y la tipología de los errores más recurrentes. Finalmente, con toda esta información recopilada, apoyar en las discusiones sobre la problemática del bajo rendimiento educativo en las pruebas de matemática en Guatemala. Se muestra la relevancia de este tema y sobre su alto aporte en contenido ya que, para la mejora de la calidad educativa surge la alta necesidad de continuar indagando sobre la categorización, tipología de errores y sobre cuáles son los más comunes al trabajar los alumnos de sexto grado de primaria la operación aritmética de la división en las pruebas de matemática.

Este trabajo intenta realizar un análisis y clasificación o categorización de los errores que cometen alumnos de sexto grado de primaria en relación con la

operación aritmética de la división. Los docentes pueden valerse de esta información, para profundizar la relación existente entre las concepciones, obstáculos y errores de los alumnos y su alcance en el nivel de logro en matemática. Se sugiere luego de este análisis que los docentes al determinar los orígenes de estos puedan así intervenir y sugerir mejores procedimientos o estrategias didácticas que ayuden a sus alumnos a corregirlos.

Se sugiere que los docentes deban adecuar la didáctica matemática al alumno de tal forma que se le permita lograr alcanzar el aprendizaje. En este trabajo investigativo se plantearán entonces, recomendaciones en cuanto a la didáctica matemática que surjan a raíz de la información recolectada a partir del meta-estudio sobre la teoría fundamentada además de la información recolectada es del tipo cooperativa y voluntaria de entrevistas a 6 expertos y de la información recuperada al aplicar una encuesta a 24 maestros.

Es consideración de esta investigación el que se apoye a aproximarse a la comprensión del error en la matemática para aportar elementos al diseño de las situaciones didácticas matemáticas y que permitan el desarrollo del conocimiento docente a nivel profesional. El conocimiento profesional de los docentes de matemáticas con una concepción constructiva del aprendizaje debe permitirles la comprensión de los errores de sus alumnos y así apoyarlos en superarlos. El propósito entonces es encontrar el *loci* de los errores en las divisiones largas para que, los maestros trabajen más para enfatizar su correcta instrucción durante la enseñanza aprendizaje y prácticas diarias. Además, es la intención el descubrir si hay una relación cercana entre los errores en procesos fundamentales aislados como la resta o la multiplicación o bien solamente durante los procesos de las divisiones largas. El estudio también pretende estudiar si la frecuencia del error difiere al considerar el género y finalmente, conocer si los errores tienen una tendencia a decrecer en frecuencia según la escuela a la cual pertenezca el estudiante.

Este trabajo de investigación fue realizado gracias al apoyo del Centro de Investigaciones Educativas de la Universidad del Valle de Guatemala quien permitió a la autora analizar 368 hojas de trabajo (lápiz y papel) utilizadas en las pruebas de matemáticas de 8 escuelas del municipio de Antigua Guatemala en alumnos de 6to grado de primaria. El Centro de Investigaciones Educativas (CIE) desarrolló las pruebas de lectura y matemática de sexto grado de primaria las cuales fueron previamente sometidas a diversas pruebas de validación. Se agradece al Centro de Investigaciones Educativas y en especial a su director y asesor de esta investigación Lic. Andrés Gálvez MA por el permitir a la autora explorar y analizar las hojas de trabajo que los alumnos utilizaron para operar la división de cuatro problemas y en dos tipos de formas.

Se agradece la información proporcionada en la serie de entrevistas al grupo de profesionales expertos: la investigadora independiente Lic. Bianca Argueta, M A. cuyo trabajo “Categorización de errores en pruebas estandarizadas en 6º primaria: Resolución de Problemas fue ponencia en el Congreso de Educación de la Universidad Rafael Landívar” y fue guía de la autora para el trabajo de campo y trabajo de investigación para la tesis, Lic. Carmen Benavides, PhD Vice –Principal Colegio Interamericano y catedrática del curso Calculo Avanzado o *APCalculus*, Lic. Silvia Edith Rosal Lazo MA Área Científica y Educación Primaria, Directora del Profesorado de Enseñanza Media especializada en Matemática y Ciencias Físicas y Matemática y Computación, además Directora del programa de Licenciatura de la Matemática y Física, Química y Biología de la Facultad de Educación de la Universidad del Valle, consultora en Matemática Lic. Claudia Lara de Zaghi, Lic. Bayardo Mejía Jefe de la División de Evaluación y Acreditación de la Universidad San Carlos de Guatemala y experto docente en la Universidad del Valle en Estadística, Ing. Magda de Schwendener catedrática de la Facultad de Matemática de Modelos Matemáticos 1, Bases de Matemática, Matemática Básica II, Cálculo I, II y Álgebra Lineal I en la Universidad del Valle.

Por último, y con gran gratitud, al aporte proporcionado de información basado en las entrevistas a 6 profesionales expertos en matemáticas y estadística, como a la participación a la encuesta de los 24 catedráticos y docentes en las diversas instituciones educativas en Guatemala, que realizan una loable labor.

CONTENIDO

PREFACIO	vi
LISTA DE CUADROS	xii
LISTA DE ECUACIONES	xiii
LISTA DE ESQUEMAS	xiv
LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE GRAFICAS	xvi
LISTA DE TABLAS	xvii
RESUMEN	xviii
I. INTRODUCCIÓN	1
II. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	4
III. JUSTIFICACIÓN	5
IV. MARCO CONTEXTUAL	9
V. MARCO TEÓRICO	17
VI. MARCO METODOLÓGICO	150
VII. RESULTADOS	185

VIII. DISCUSIÓN ENTREVISTAS	252
IX. DISCUSIONES FINALES	304
X. CONCLUSIONES	309
XI. RECOMENDACIONES	314
XII. BIBLIOGRAFÍA	316
XIII. ANEXOS	327
XIV. GLOSARIO	416

LISTA DE CUADROS

Cuadro	Página
1. E_T5_ÍTEM_11_T4_DIVISION	201
2. E_T5_ÍTEM_11_T4_MULTIPLICACION	201
3. E_T5_ÍTEM_11_T4_RESTA	202
4. E_T5_ÍTEM_12_T4_DIVISION	202
5. E_T5_ÍTEM_12_T4_MULTIPLICACION	203
6. E_T5_ÍTEM_12_T4_RESTA	203
7. E_T5_ÍTEM_13_T4_DIVISION	204
8. E_T5_ÍTEM_13_T4_MULTIPLICACION	205
9. E_T5_ÍTEM_13_T4_RESTA	205
10. E_T5_ÍTEM_14_T4_DIVISION	206
11. E_T5_ÍTEM_14_T4_MULTIPLICACION	206
12. E_T5_ÍTEM_14_T4_RESTA	207
13. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) ítem11	208
14. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) ítem12	208
15. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) ítem13	209
16. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) ítem14	209

LISTA DE ECUACIONES

Ecuación	Página
1. Fórmula tasa del error	159
2. Razón de aprendizaje (b)	159
3. Razón de error (a)	159

LISTA DE ESQUEMAS

Esquemas	Página
1. Modelo Hayes (PROCESS) análisis tipo moderador	217
2. Mapa de Nodos según análisis NVIVO: entrevista a expertos y encuesta a docentes	251

LISTA DE FIGURAS

Figuras	Página
1. Evidencia fotografía C1	162
2. Evidencia fotografía C2	163
3. Evidencia fotografía C3	163
4. Evidencia fotografía C7.1	165
5. Evidencia fotografía C7.2a	165
6. Evidencia fotografía C7.2b	166
7. Evidencia fotografía C7.3	166
8. Evidencia fotografía C7.4a	167
9. Evidencia fotografía C7.4b	167
10. Evidencia fotografía C7.4c	168
11. Evidencia fotografía C7.5	168
12. Evidencia fotografía C7.6	169
13. Evidencia fotografía C8.1	170
14. Evidencia fotografía C8.2	170
15. Evidencia fotografía C8.3	171
16. Evidencia fotografía C9.1	171
17. Evidencia fotografía C9.2	172
18. Evidencia fotografía C9.3	172
19. Evidencia fotografía C9.4a	173
20. Evidencia fotografía C9.4b	173
21. Evidencia fotografía C9.5	174
22. Evidencia fotografía C9.6	174
23. Evidencia fotografía C9.7a	175
24. Evidencia fotografía C9.7b	175
25. Evidencia fotografía C9.8	176
26. Evidencia fotografía C9.9	176
27. Evidencia fotografía C9.10	177
28. Evidencia fotografía C9.11	178
29. Evidencia fotografía C9.12	178
30. Evidencia fotografía C9.13	179
31. Evidencia fotografía C9.14	179
32. Evidencia fotografía C9.15	180
33. Evidencia fotografía C9.16	180
34. Evidencia fotografía C9.17	181
35. Evidencia fotografía C9.18	182
36. Evidencia fotografía C9.19a	182
37. Evidencia fotografía C9.19b	183
38. Evidencia fotografía C9.20	183
39. Evidencia fotografía C9.21	184

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica	Página
1. Distribución Normal prueba pretest matemática 6° grado primaria	193
2. Distribución Normal prueba posttest matemática 6° grado primaria	194
3. Curva característica ítems prueba matemática (problemas 11 al 14)	194
4. Impacto de la tasa del error sobre el aprendizaje bajo la influencia de la habilidad de cada estudiante	225
5. Tasa error (%) por escuela	227
6. Histograma de la tasa de error	229
6(a). Residuales modelos 4 de Regresión Lineal	233
7. Diagrama pareto tasa del error	235
8. Curva logarítmica de la razón del aprendizaje	235
9. Ítem1 Nivel académico	236
10. Ítem2 Razón de ser docente	237
11. Ítem3 Razones que los docentes encuentran como retos en la instrucción matemática	238
12. Ítem4 Metodologías que se prefieren para enseñar matemáticas	239
13. Ítem5 Situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala	240
14. Ítem6. Ámbitos que inciden en la situación actual en Guatemala	241
15. Ítem7 Aspectos que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza en la matemática	242
16. Ítem8 Práctica pedagógica escolar de éxito	243
17. Ítem9 Fortalezas de la enseñanza de la matemática en el país	244
18. Ítem 10 Tendencias en la enseñanza y aprendizaje	245
19. Ítem 11 Utiliza el proceso del análisis del error	246
20. Ítem 12 Tipo de evaluación utilizada en la mayoría de las veces	247
21. Ítem 13 Utiliza metodología participativa en la instrucción matemática	248
22. Ítem 14 Como motiva a sus estudiantes en el aula durante la clase de matemática	249

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
1. Lista de obstáculos que se encuentran en los estudiantes	63
2. Resumen de especialistas en análisis y categorización del error (1910-2015)	82
3. Ejemplos de simuladores ITS (<i>Intelligent Tutoring Systems</i>) del estudio de patrones de errores	127
4. Tabla de tabulación de datos	156
5. Frecuencia de errores en la resta	185
6. Frecuencia de errores en la multiplicación	185
7. Frecuencia de errores en la división	186
8. Frecuencia de errores por escuela ítem 11	187
9. Frecuencia de errores por escuela ítem 12	188
10. Frecuencia de errores por escuela ítem 13	189
11. Frecuencia de errores por escuela ítem 14	189
12. Frecuencia de errores C10 <i>careless</i> /dejadez o sin evidencia	190
13. Frecuencia de errores procedurales (Process skill) por escuela	191
14. Frecuencias y porcentajes de errores por establecimiento y tipo de categorización del error	192
15. Descripción de los errores más comunes en las Escuelas Familias de la Esperanza	210
16. Tasa del error por escuela	227
17. Datos sobre el aprendizaje de las Escuelas Familias de la Esperanza	230
18. Resumen datos Escuelas Familias de la Esperanza	231
19. Análisis chi cuadrado χ^2	234

RESUMEN

Este es un estudio investigativo con un enfoque cualitativo y cuantitativo que incluye el análisis de los procedimientos a lápiz y papel de cuatro problemas en la división presentes en las pruebas de matemáticas de ocho escuelas de la comunidad Familia de la Esperanza en el departamento Sacatepéquez en la Antigua Guatemala. En ese contexto, esta investigación desde un enfoque mixto no experimental trata sobre los tipos de errores o la categorización de los errores y los patrones de los errores sistemáticos.

Se analizan las 425 pruebas para un total de 1700 problemas de la división. De estos problemas, 1034 problemas presentan evidencia y pudieron ser analizados. Los errores totales del tipo procedural o "*Process Skill*" fueron un 47.83% (176 estudiantes) con una ocurrencia o tasa (porcentaje) de error entre el 11 al 20% es decir que de cada cuatro problemas que realice el estudiante por lo menos un error es encontrado y es del tipo procedural. El 0.8% de los ítems analizados evidencian un error de lectura, no se presenta evidencia del tipo comprensión ni de transformación porque, no se incluyeron las entrevistas por alumno para esta investigación. Debido a que el dato del error de lectura es muy poco significativo y no concluyente se considera irrelevante y recomendable el incluir en una futura investigación, todo el aspecto a evaluar utilizado en el proceso de categorización de Ann Newman (1977) que incluye una serie de entrevistas y de preguntas a cada estudiante para evaluar la lectura, comprensión, transformación y habilidades procedurales.

En cuanto a los errores más comunes presentados por el grupo de estudiantes en este estudio fue el error en la operatividad o deformación del algoritmo de la división, error en el proceso de completar el cociente en el algoritmo de la división; error en el proceso de multiplicar: error de operar no según el orden o jerarquía de la operación, no opera desde el dígito más a la derecha y hacia la izquierda y error de no finalizar el proceso de multiplicar; error operatividad de restar: suma en vez de restar y prestar no decrementa el dígito; deficiencia del concepto del cero; deficiencia en el concepto del sentido numérico y el error en lectura.

Al analizar los datos con PROCESS (Hayes, 2018) en SPSS se puede interpretar como que el efecto de la tasa (porcentaje de error) sobre el aprendizaje de los 368 estudiantes de 6º primaria, se aconseja incluir como variable moderadora la variable habilidad. Esta relación moderadora con la variable habilidad, muestra el efecto de la relación de la tasa de error en el aprendizaje. Al analizar los resultados se concluye que el efecto de la variable habilidad de cada estudiante es significativo y mayor entre las habilidades entre 2.4 a 3.2 en la escala de dominio determinado entre 1 a 4. Los resultados del análisis muestran que entre más veces realicen los ejercicios: mejor desempeño tendrá en la realización de la prueba de matemática de 6º grado de primaria, mejores resultados en el rendimiento, y menores patrones de errores ya que la tasa del error es menor debido a que el aprendizaje se consolida.

Las escuelas que presentan la mayor cantidad de problemas sin evidencia de procesos de lápiz y papel fueron las escuelas Ciudad Vieja y la Escuela San Miguel Milpas Altas. Sí existe además diferencia significativa entre las medias de las tasas (porcentaje) de error entre, por lo menos, un par de grupos de escuelas al momento de realizar la operación aritmética de la división con un $\alpha = 0.05$. Con los datos analizados de las pruebas de matemáticas de 6º grado de primaria se puede explicar que no existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasa (porcentaje) de error con un $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.

La otra parte de este estudio de investigación es de carácter cualitativo porque tiene como objetivo el conocer el documentar las experiencias y las opiniones de los 6 profesionales expertos en matemática y encuestar a 24 docentes expertos sobre los temas relevantes a la investigación. Estas opiniones, sugieren la importancia del fomento de los estudios del error. Además, se incluye una serie de discusiones a manera de aporte adicional, como de importantes sugerencias para los docentes en cuanto a las mejores prácticas didáctico-matemáticas.

Palabras clave: matemática, análisis del error, patrones del error, categorización del error, división, didáctica

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación amplía el tema del análisis y categorización del error de la investigación elaborada para el curso de Trabajo de Campo que se realizó con el apoyo del Centro de Investigaciones Educativas de la Universidad del Valle. Se utilizó en esa oportunidad un modelo de categorización de Ann Newman (1977) el cual fue completado en la metodología de la categorización del error por un algoritmo de la división¹. De esta manera se logró adecuarlo de un modelo de categorización para pruebas orales o dialógicas entre docentes y alumnos, de técnica evaluativa “*think aloud*”², a un procedimiento sistemático de categorización del error para pruebas escritas de matemática.

La UNESCO en su proyecto de recopilación de informes para los docentes de la educación primaria y secundaria “Educar para un futuro sostenible” incluye las reflexiones por el filósofo francés Edgar Morín. Morín comenta que el desarrollo del conocimiento científico es un medio poderoso de detección de errores y de lucha contra las “ilusiones” o del conocimiento irracional, incoherente y carente de un propósito concreto. La tarea de la educación es criticar al propio conocimiento de los paradigmas. Considerando que no obstante los paradigmas que controlan la ciencia pueden desarrollar ilusiones y ninguna teoría científica está inmunizada para siempre contra el error. Además, el conocimiento científico no puede tratar únicamente los problemas epistemológicos, filosóficos y éticos. La educación debe entonces, dedicarse a la identificación de los orígenes de errores, de “ilusiones” o de cegueras (Morín, 1999).

Al agregar a la educación el tema de las ciencias y tópicos que se incluyen sobre todo en matemáticas de donde se generan incertidumbres, deben los estudiantes aprender a vislumbrar una variedad de alternativas o de posibilidades de solución, con la finalidad de preparar las mentes y enfrentarlos al error o a lo

¹ Ver Anexo 01 y Anexo 02

² Técnica de evaluación de prueba pensar en voz alta

no esperado, de lo contrario estarán condenados al rezago que provoca inseguridades.

Socas (2011) reconoce tres etapas de investigación de los errores en matemáticas. La primera etapa está caracterizada por el recuento de estos, su clasificación y asociación de causas relativas al contenido matemático. En la segunda etapa se reconoce al error como elemento natural del proceso de aprendizaje, intentando comprender el pensamiento de los alumnos. Por último, en la tercera etapa se trabaja en clasificar los errores y conocer su origen, favoreciendo procedimientos que ayudan a los alumnos a corregirlos con la intervención directa del docente a cargo.

Se considera investigar como una primera etapa el análisis de la categorización del error que se presenta en este trabajo de investigación. Adicionalmente, se complementará con el análisis del tipo de error o “*bugs*”, de categorización de errores de habilidades procedimentales “*Repair Theory*” de los investigadores educativos: John Seely Brown y Kurt Van Lehn (1980), en el cual incluyen un catálogo de 96 tipos de errores. A su vez, se incluirán como recomendaciones el continuar con la segunda y tercera etapa descritas por Socas (2011) para completar la tercera intervención a los grupos de estudio. Además se apoyará en un enfoque lógico semiótico el cual se caracteriza por ser una investigación vía la elaboración de modelos de competencias (comprensión lectora, procedimentales) para el estudio de los errores.

El propósito de esta investigación radica en identificar los tipos más frecuentes de error, categorizarlos e identificar su posible causa, desarrollar una propuesta para trabajar la mejora en la instrucción matemática y, de ser posible mitigar los errores entre los alumnos apoyando con una propuesta de didáctica para la mejora de la enseñanza de la matemática.

Para el desarrollo de esta investigación, se hizo un diseño de investigación del tipo de enfoque mixto y “*ex post facto*”, en donde la tipificación del error se

realizó según la secuencia de pasos del procedimiento y la resolución del algoritmo de la división, que se obtuvieron en los 4 problemas de la división contenida en la prueba de matemáticas de los alumnos de 6º grado de primaria de 8 escuelas pertenecientes a Familias de Esperanza en Sacatepéquez. Con toda esta información obtenida, se estudiaron las relaciones con un análisis cuantitativo y se elaboran gráficos que representan las tipificaciones de error más comunes entre los alumnos. Para el análisis de los datos que se obtuvieron por medio de entrevistas y de encuestas se recurre a una metodología cualitativa, que permita estudiar las opiniones de los profesionales expertos, en cuanto a los procesos de resolución de la operación de la división y los errores más comunes entre los alumnos de 6º grado de primaria.

Esta investigación se divide en dos partes: La primera trata sobre los orígenes del error especialmente en la matemática que incluirá una disertación sobre la problemática actual y retos en Guatemala. Se analizan y se discuten los resultados de 368 pruebas estandarizadas pretest y posttest de matemática de estudiantes de 6º grado de primaria en 8 escuelas públicas de Familias de Esperanza en Sacatepéquez. Estas pruebas fueron previamente aplicadas por el Centro de Investigaciones Educativas de la Universidad del Valle en el año 2015. El análisis del error se hizo solamente en las operaciones aritméticas de la división de la prueba.

En la segunda parte se plantean sugerencias para trabajar los errores y de ser posible, para mitigarlos con una propuesta que se obtuvo de la información recopilada en una serie de entrevistas y encuestas a profesionales expertos. Estos comentarios y opiniones se transcriben literalmente, para ser analizados posteriormente.

II. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Los resultados presentados por el DIGEDUCA en el 2015 son lamentables y cuestionan el sistema educativo. A su vez, estos demandan la búsqueda inmediata de información puntual y específica que permita brindar insumos que posibiliten el diseño de iniciativas de intervención para elevar los niveles de desempeño de los estudiantes en matemáticas. El problema que plantea este estudio se divide en dos áreas, interdependientes: si los factores asociados³ inciden en el buen desempeño de los estudiantes y si han sido variados los estudios que lo muestran (Saz, 2006; DIGEDUCA, 2010; TERCE, 2015). Es momento de tomar la ruta de la mejora educativa con dos aspectos que podrían ser controlables hasta cierto punto: los docentes y los estudiantes en el aula.

A nivel de país, es momento de replantearse estrategias de mejora para cambiar los resultados en matemática, los cuales continúan siendo muy bajos (Castillo, DIGEDUCA, 2016). Es importante conocer en qué, cómo y por qué fallan los alumnos durante las operaciones aritméticas en especial durante la operación de la división, para la creación de un sistema de retroalimentación que incluya los procedimientos de la categorización y análisis del error. Estos sistemas ayudan a centrar la atención del docente en procesos de aprendizaje abstractos que configuran el conocimiento matemático, y apoyan a comprender los pasos seguidos por el alumno en la formulación del error en la división. Por ende, toda esta información que se obtiene del error tiene como fin el de apoyar a los docentes en la mejora de las estrategias didácticas matemática (Rico, *et al.*, 1995; Engler 2003). El problema que se desea resolver se plantea como: ¿Cuáles son los tipos de error que los alumnos de 6º grado de primaria de las 8 escuelas pertenecientes al proyecto Familias de Esperanza en el departamento de Sacatepéquez, presentan al momento de operar la división?

³ Saz, Marco Antonio (2006) *Análisis de los factores asociados con el rendimiento de los estudiantes de tercero básico en matemática y lectura, del año 2006* (Tesis de Maestría). Universidad del Valle de Guatemala.

III. JUSTIFICACIÓN

Según Castillo (DIGEDUCA, 2016) para un gran número de alumnos, la matemática es una asignatura compleja y que no pueden dominar ya que consideran que unos pocos alumnos nacieron con las habilidades necesarias para dominar la disciplina, reflejándose en los resultados de bajo rendimiento en las pruebas estandarizadas en Guatemala. Sumado a lo anterior, según Valverde (2012), a pesar del hecho de que los docentes suelen ser bastante conscientes de sus limitaciones en los conocimientos y destrezas matemáticas, muchos no reconocen el probable impacto que tiene esta limitación sobre sus alumnos. Con frecuencia atribuyen el bajo rendimiento a distracciones, falta de interés o motivación, factores culturales, factores asociados en sus alumnos, y no a errores en el enfoque y a la didáctica matemática.

Actualmente en Guatemala se cuenta con muy bajos resultados en alcance de nivel de logros en las evaluaciones de matemática lo cual señala la existencia de deficiencias en la didáctica de esta. Dada la importancia del adecuado desarrollo de las habilidades vinculadas con esta área del aprendizaje, es evidente que es urgente la investigación en este tema, para poder identificar los elementos que permitan buscar las formas de mejorar el aprendizaje de los estudiantes (DIGEDUCA, 2016).

Es preocupante cómo los porcentajes de logro en el área de matemáticas de primaria apenas superaron el 50 % en el año 2007 con los estudiantes de sexto primaria y en el 2008 con toda la primaria, mostrando una tendencia a la baja en años posteriores. En el caso de los estudiantes de sexto primaria en el año 2007, los resultados fueron los siguientes: el 2.78 % quedó por debajo del nivel I de desempeño, y en el nivel I y II del estudio se ubicó el 75.74 % de los estudiantes; por lo que, en sexto primaria, el 78.52% de los estudiantes guatemaltecos quedó ubicado por debajo o en los dos niveles más bajos de desempeño en matemáticas (Valdés, *et al.*, 2008).

El Ministerio de Educación –MINEDUC- realiza pruebas de lectura y matemática a nivel nacional para evaluar el aprendizaje que están teniendo los alumnos en estas dos áreas. Los resultados en la prueba en matemática para los alumnos de 6º primaria, de 2010 a 2014 se muestra una disminución en el logro que pasa de 45.6% a 44.5%. El Acuerdo Nacional de Desarrollo Humano ha definido una meta mínima de 75% de logro. (Empresarios por la Educación, 2016). A nivel nacional los resultados muestran que 1 de cada 10 alcanza el logro en matemática. En forma puntual para el departamento de Sacatepéquez, los resultados de la prueba de graduandos para el 2015 del departamento de Sacatepéquez muestran que el 90.29 % no alcanzó el logro en matemática y que el 9.71% si lo logró (DIGEDUCA, 2015).

Las carencias que evidencian los estudiantes en cuanto a conocimientos, habilidades y destrezas en la temática, se reflejan no solamente en los resultados anteriores de estas evaluaciones o en los estudios regionales, sino también en las evaluaciones regulares a las que los alumnos son sometidos en los centros educativos. A largo plazo, estas carencias impactarán negativamente en las capacidades generales de los estudiantes para desempeñarse adecuadamente en los diferentes ámbitos de la vida, ya que sin duda las habilidades matemáticas tienen también sentido fuera de un contexto exclusivamente escolar.

Como es evidente y reflejado en estas estadísticas, la educación de la matemática enfrenta serios problemas en Guatemala y es en la investigación sobre el conocimiento de la matemática, especialmente como es el proceso de pensar en los estudiantes lo que coadyuva a cambiar el paradigma de la instrucción del tipo magistral teórica y técnica hacia una instrucción que se construye desde el estudiante (DIGEDUCA, 2016).

Esta teoría constructivista apoya el criterio de que las capacidades de interpretar, identificar, calcular, recodificar, graficar, comparar, resolver, optimizar, demostrar, aproximar, comunicar, entre otras, proporcionan al estudiante la

preparación para desenvolverse con éxito en la vida social de un mundo en constante cambio y afrontar los retos del futuro (Bronzina, *et al.*, 2009).

Uno de los trabajos más delicados del docente es el de guiar a los alumnos, partiendo de los errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento oficial que pueda ser validado matemáticamente. La negociación del contrato didáctico, la transposición del conocimiento para la instrucción y los obstáculos epistemológicos hacia las nuevas concepciones son todas áreas activas de investigación (Rico, *et al.*, 1995).

Este estudio aportará en delimitar la importancia del error como una oportunidad de retroalimentar a los docentes para que, a pesar de los desafíos en cuanto a recursos económicos como los relacionados a factores asociados que se presentan en el país, se logre mejorar la calidad educativa a una población en donde el 56.2% es menor de 19 años y el promedio máximo de escolarización aún es de 4 a 6 años. Estos datos muestran que todavía en Guatemala se está a 3 grados de diferencia de lo que prescribe el artículo 74 de la Constitución Política de Guatemala como educación obligatoria.

Según Rico, *et al.*, (1995), los resultados e interpretaciones más valiosos del procesamiento cognitivo, es la información que se ha encontrado estudiando los errores. La utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores.

Al estudiar los errores de acuerdo a las dificultades encontradas por los alumnos se debería reconocer que los errores son también función de otras variables del proceso educativo: docente, el currículo, el entorno o ámbito social en que se enmarca la institución educativa, el medio cultural y sus relaciones, y cómo las interacciones entre estas variables (Saz, 1995).

Es primordial considerar que el error debe ser tratado como un momento o una “fotografía” de cómo piensan y razonan los estudiantes en determinado momento de su aprendizaje. (DIGEDUCA, 2016).

Finalmente, para esta investigación, es importante abordar el tema sobre el error, porque retroalimenta tanto al docente como a las instituciones educativas, tanto públicas como privadas, para la toma de decisiones en cuanto a cambios de políticas educativas, mejoras en las estrategias, metodologías o dinámicas de instrucción. Bajo la misma línea del cambio de paradigmas, abordar el error como una oportunidad que ofrece información al obtenerlo en las diversas formas de la evaluación, sea de índole sumativa y/o formativa.

Otra premisa que busca analizar este estudio es que el estudiante aprende mejor y en forma permanente, construyendo su propio aprendizaje.

IV. MARCO CONTEXTUAL

A. Realidad educativa en Guatemala

A nivel mundial el Informe Pisa (2016) evalúa cada tres años los rendimientos alcanzados en ciencias, lectura y matemáticas por jóvenes de 15 años en 72 países y economías participantes. La edición del año 2015 se centró en la cultura científica. Los primeros puestos de esta clasificación que mide las destrezas de unos 540 mil estudiantes representativos de unos 29 millones de estudiantes lo ocupan alumnos de Asia y Europa. Entre estos destaca Singapur con 556 puntos liderando a su vez en lectura y en matemáticas. En el año 2000 el referente era Finlandia ahora lo es Singapur. Los profesores de Singapur tienen una formación inicial sólida, gozan de una formación docente continua, son evaluados regularmente y tienen buenos salarios. Singapur le sigue Japón (538), Estonia (534), Taipéi (532) y Finlandia (531). Finlandia ha perdido en los últimos tres años 11 puntos.

Comparado a nivel mundial a Guatemala, como se menciona en el documento “Más Inversión: hemos avanzado, pero la niñez y adolescencia necesitan más inversión social” UNICEF (2015)⁴, Guatemala es un país con población joven, lo que representa desafíos particulares de políticas educativas, sociales y presupuestarias, así como grandes oportunidades de crecimiento, desarrollo y bienestar. Se estima que el 56.2% de la población es menor de 19 años de edad. Si se incluyen las personas menores de 34 años el porcentaje alcanza al 74.6% de la población total (DIGEDUCA, 2016)⁵.

⁴ UNICEF (2015) *Más inversión. Hemos avanzado, pero la niñez y adolescencia necesitan más inversión social*.

⁵ DIGEDUCA/MINEDUC (2016) *Así estamos enseñando matemáticas: Situación de la enseñanza de la matemática en Guatemala. Una perspectiva de docentes de matemáticas y de profesionales expertos en el área*. Guatemala.

El gasto público en educación como un porcentaje del PIB (producto interno bruto) está para Guatemala en un 2.8% (el 88% de este presupuesto se utiliza para el pago de maestros y administradores) a diferencia de otros países en América Latina que en promedio están en un 5% (BID⁶, 2016).

Para el 2017, en la prueba diagnóstica para docentes se reporta que, el 51% domina el lenguaje, el 37% domina en matemáticas y el 54% de los docentes aprueba en estrategias de enseñanza (CIEN⁷, 2017).

En Guatemala el promedio de años aprobados para la población mayor a 15 años es de 4.9 años de estudio. Al analizar a la población comprendida en el rango de edad de 15 a 24 años, el promedio de escolaridad se incrementa significativamente al pasar a 6.5 años aprobados. Al analizar la información desagregada por etnia y sexo, se observan las diferencias existentes entre hombres y mujeres, destacando la baja escolaridad en las mujeres indígenas. Por su parte, al analizar el rango de personas de entre 15 y 24 años, el promedio de años de escolaridad sube significativamente, mostrando una reducción de las diferencias entre etnia y sexo. A nivel de escolaridad en el área rural y urbana en total es de 4.9 años para la población indígena y 6.5 años para la población no indígena tanto en el área rural como urbana (INE/ENCOVI, 2015)⁸.

La escolaridad promedio de las mujeres que forman parte de las personas económicamente activas es mayor que para todas las mujeres de ese rango de edad: 6.7 años promedio para la no indígena y 5.6 años promedio de escolaridad para la mujer indígena. Asimismo, es posible percibir que la acumulación de años

⁶ BID/ICEFI - Banco Interamericano de Desarrollo (2016) *La Eficiencia del Gasto Público en Educación y Salud en Guatemala, 2003 – 2013*.

⁷ CIEN – Centro de Investigaciones Económicas Nacionales <http://cien.org.gt/>

⁸ INE/ENCOVI - Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía de Guatemala. República de Guatemala. (2015). *Encuesta Nacional de Condiciones de Vida. Principales Resultados*. Guatemala.

de estudio es mayor para aquellas sin hijos que para el promedio con hijos (INE/ENEI 2014).⁹

Según el Centro de Investigaciones Económicas Nacionales (CIEN) quien evalúa datos del MINEDUC¹⁰ del 2012- 2016, la tasa de escolaridad descendió del 60.3% al 56% en todos los niveles primario y diversificado.

En la actualidad (2015) en Guatemala hay 4.1 millones de niños y adolescentes que asisten a centros educativos. En primaria, el primer grado registró el 20.52% de la población estudiantil. Los indígenas matriculados fueron menos de un millón (933,696). Al menos 1.8 millones de jóvenes se encuentran fuera del sistema educativo. Guatemala invirtió 2.9% del producto interno bruto (PIB) en educación (13,937 millones de quetzales), por lo que es el gasto más bajo comparable en América Latina. El nivel educativo que más inscripciones reportó es la primaria, con 2.4 millones, seguido de los tres grados del ciclo básico (769,163). Sin embargo, del total de inscritos solo fueron promovidos en ese periodo 3,438,634 alumnos, lo cual marca un retroceso sistemático. El Compendio Estadístico del Instituto Nacional Estadístico – INE- (2015) se muestra una serie que la deserción a nivel primario se ha reducido significativamente en los últimos 15 años entre los años 2000 al 2015, pasando entre 10.9% a 3.6% en los niños y de 9.8% a 3.2% entre las niñas. Los varones inscritos repitentes representan el 57%. Se hace notar que la deserción es sostenidamente mayor entre los alumnos varones ya que la gran mayoría empiezan a trabajar.

En general, las niñas presentan menores tasas de deserción en primaria que los niños. La tasa más alta de deserción tanto para niñas como para niños se ubica en Petén (8.3% y 9.3% respectivamente) y la menor deserción en 1.3% en niños y un 1.2% en niñas en el departamento de Sololá. En la capital Guatemala tiene un 2.2% de deserción en niños y un 1.7% de deserción en niñas. La tasa de repitencia a nivel primario de los varones muestran tasas más altas que las niñas

⁹ INE/ENEI (2014) Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía de Guatemala. *Encuesta Nacional de Empleos e Ingresos 1-2014*. Guatemala.

¹⁰ Ministerio de Educación de Guatemala

para el 2015 con una tasa de repitencia de varones fue de 10.7% y en las niñas fue del 8.5%. Para el 2015, la tasa de repitencia en primaria por departamento muestra que en Alta Verapaz presenta las tasas más altas con un 16.3% en mujeres y un 17.8% en niños y la menor es en departamento de Guatemala con un 3.4% en niñas y un 5% en niños.

En Guatemala, en promedio el 15% de los estudiantes de primaria alcanzan las habilidades básicas requeridas en matemáticas comparado contra el 30% en el resto de los países de América Latina (BID, 2018).¹¹

En la prueba TERCE (2013) Guatemala se encuentra 43 puntos de aprendizaje por debajo de lo esperado, equivale a un año y medio de atraso escolar aproximadamente.

En la prueba de lectura (2014) de cada 100 estudiantes de sexto primaria del sector oficial 40 tuvieron un nivel de logro y en el caso de matemática fueron 45. En lectura del año 2010 al 2014 se muestra un aumento en el logro del 30.1% al 40.4%. Sin embargo, para matemáticas del año 2010 al 2014 se muestra una disminución en el logro del 45.6% al 44.5%.

Un alumno de cada tres repite el ciclo escolar, según el Ministerio de Educación en Guatemala (2013). Los resultados a nivel nacional muestran que primer grado de primaria es el año más difícil ya que el 20.8% lo pierde. La cifra equivale a un quinto de la población estudiantil tanto en sectores privados como públicos. El alto índice de repitencia es muestra de cómo el repetir los errores es un problema sistemático de enseñanza aprendizaje, ya que una y otra vez no se logra alcanzar el nivel de logro satisfactorio. La repitencia escolar es un fenómeno que afecta a todo nivel y se da porque el estudiante no desarrolla lo que se espera de él, aumentando su rezago académico. El sistema educativo tiene un pénsun cerrado por lo que el alumno si reprueba más de tres materias debe volver a cursar el grado si el centro educativo lo permite.

¹¹ Estudio del Banco Interamericano del Desarrollo BID (2018) *Aprender mejor: Políticas públicas para el desarrollo de habilidades*.

Los datos del año 2015 muestran que, el nivel primario es el nivel que más preocupa, ya que uno de cada diez alumnos vuelve a cursar algún grado entre primero y quinto. En nivel de básico el 4.5% repite y en diversificado es menos del 1%. Reprobar un año es una de las principales causas de deserción escolar según el Ministerio de Educación de Guatemala – MINDEDUC-. El alumno se siente desmotivado y opta por trabajar y no continuar estudiando, principalmente los alumnos de escuelas públicas y rurales. En el año 2013 la tasa de fracaso escolar (que mide repitencia y deserción) fue del 18.6% y en la capital fue de un 16.6%. Estos datos muestran el contexto educativo que se presenta en Guatemala.

B. Instituciones y organizaciones involucradas en el estudio de investigación

1. UVG/CIE. La Universidad del Valle de Guatemala, es un centro universitario sin fines de lucro, en donde se incluye la labor del Centro de Investigaciones Educativas, quien brinda estudios de evaluación de rendimiento escolar, capacitaciones a docentes y directores, capacitación en el uso y manejo de pruebas psicométricas a profesionales del área de recursos humanos. Elabora materiales didácticos de apoyo y aplican pruebas con estándares internacionales fundamentadas en los conceptos pedagógicos más actuales, construidas por equipos multidisciplinarios internacionales. Cuenta con instrumentos que permiten evaluar a los estudiantes en diferentes áreas: Aptitud académica, orientación vocacional, lectura, habilidad general, intereses vocacionales, personalidad y conocimiento.

2. Familias de La Esperanza¹². Es una organización sin fines de lucro con oficinas centrales en Minnesota, Estados Unidos de América, el proyecto en Guatemala está ubicado en Antigua Guatemala, Sacatepéquez su misión es romper con el ciclo de pobreza a través de la educación. Utilizan el patrocinio de personas que viven en el extranjero (Estados Unidos de América), y luego subsidian con los ingresos económicos a los estudiantes en escuelas publicas

¹² www.commonhope.org

apropiadas. A pesar de que la educación es gratis en Guatemala, la organización apoya en pagar los costos adicionales que se necesitan cubrir como uniformes, costos de inscripción y útiles escolares, entre otros.

El costo anual de las escuelas pertenecientes a la organización es de aproximadamente Q320¹³ por alumno. Estando estas familias en pobreza y pobreza extrema aún el costo siendo tan bajo, no lo pueden cubrir. Además de cubrir este apoyo económico a los hijos de estas familias que se afilien, gozan del acceso a centros de salud gratis, psicólogos y trabajadores sociales para apoyarles en mejoras familiares. Cada familia cuenta con un trabajador social que los apoya en alcanzar sus metas y para lograr salir del círculo de pobreza y de pobreza extrema.

C. Ubicación geográfica (departamento, ciudad o colonia) del estudio de investigación

La Antigua Guatemala y Sacatepéquez eran dos departamentos que pertenecían al departamento de Chimaltenango, el 12 de septiembre de 1839, la Asamblea Nacional Constituyente declaró a Sacatepéquez como departamento independiente y designó a La Antigua Guatemala como su cabecera. El departamento de Sacatepéquez que fue creado por decreto el 11 de diciembre en el año 1897, estuvo integrado por 24 municipios, algunos de estos fueron nombrados aldeas tiempo después, como el caso de San Pedro Las Huertas; en la actualidad Sacatepéquez se encuentra conformada por 16 municipios, los cuales son: La Antigua Guatemala, Ciudad Vieja, Jocotenango, Magdalena Milpas Altas, San Antonio Aguas Calientes, San Bartolomé Milpas Altas, San Lucas Sacatepéquez, San Miguel Dueñas, Santa Catarina Barahona, Santa Lucía Milpas Altas, Santa María de Jesús, Santiago Sacatepéquez, Sumpango y Santo Domingo Xenacoj. Los municipios cuentan con 24 aldeas y 23 caseríos.

Es en estas comunidades en donde se ubican ocho escuelas en Antigua Guatemala, las cuales reciben patrocinio de la comunidad Familias Esperanza, y

¹³ US\$41.56 al tipo de cambio (2018) Q7.7 por US\$1.00 de Estados Unidos de América

cuyas pruebas se analizarán en esta investigación¹⁴ para un total de 368 estudiantes.

A continuación, se listan las ocho Escuelas de Familias de la Esperanza:

- Santa Catarina Bobadilla con 30 estudiantes
- San Miguel Escobar Matutina con 57 estudiantes
- San Juan del Obispo con 64 estudiantes
- San Miguel Escobar Vespertina con 45 estudiantes
- Guardianía con 22 estudiantes
- Ciudad Vieja con 74 estudiantes
- San Pedro Huertas Vespertina con 22 estudiantes
- San Miguel Milpas Altas 54 estudiantes

D. Descripción de la comunidad

La organización Familias de Esperanza apoya a familias que en promedio tienen cinco integrantes. Sin embargo, también se encuentran familias numerosas. En cuanto a grupos étnicos, existen tanto población indígena como ladina y existen personas que han migrado de otras regiones como de El Quiché y algunos de Sololá. En las poblaciones de Sacatepéquez dominan el español, aunque también hablan *k'iché* y *Q'eqchi'* y *Kaqchiquel*. En Ciudad Vieja se hablaba *Ishkual* la cual ya es lengua muerta porque ya no se utiliza. La gran mayoría de los vecinos son de religión católica y entre las festividades que celebran sobresalen la fiesta titular del 29 de junio, Día San Pedro y San Pablo apóstoles. El plato típico es el pepián de tres carnes, chiles rellenos y los “*tayuyos*”¹⁵ como también la tradición del paseo de los Gigantes.¹⁶

En apoyo a la problemática educativa, el Ministerio de Educación de Guatemala, presenta en su informe Plan Estratégico de Educación 2016 – 2020 una serie de líneas de acciones guiadas por los ejes u objetivos de acción: cobertura, calidad, equidad e inclusión, modalidades diversas de entrega escolar

¹⁴ González (2014) *Apoyo psicológico y educativo del manejo de emociones en adolescentes que asistieron al Programa Metamorfosis de las Familias afiliadas en la Fundación Familias de Esperanza, en la Antigua Guatemala*. USAC. Guatemala.

¹⁵ Tamales en Guatemala

¹⁶ Lopez, Oscar (2016) *Plan Estratégico de Educación 2016 -2020 MINEDUC*. Guatemala.

y extraescolar, espacios dignos y saludables para el aprendizaje, y gestión institucional transparente y participativa para apoyar las comunidades del Departamento de Sacatepéquez.

V. MARCO TEÓRICO

A. Definición de error

El error es un conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad permanente en el conocimiento científico. La ciencia por otro lado es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores. El objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen los errores sistemáticos. El error es un objeto de estudio para la educación matemática. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento. El error, puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos (Rico, 1995).

El error es importante como organizador didáctico en el aprendizaje de Matemática si se pretenden generar aportes sobre esta problemática. El proceso de diagnóstico del error deberá incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. Lo que más preocupa es la persistencia del error. Los errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que los docentes los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros del aprendizaje. El análisis del error sirve para ayudar al docente a organizar las estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección (Engler, 2003).

Del mismo modo, según Huitrado y Clement (2013) el error es un elemento medular en las propuestas constructivistas de enseñanza de las matemáticas, al ser reconocido como indicador de la comprensión del alumno. El error es un elemento inherente al proceso de aprendizaje.

Citando a Rico (1998), los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos. La presencia constante y el estatus que se concede al error caracterizan la postura de enseñanza que compartimos en donde el error es un indicador del proceso de comprensión del alumno.

Así mismo, el error es un contexto positivo como medio para enseñar y se construye a partir de las aportaciones de Bachelard y Piaget (Astolfi, 1999). Bachelard (1948) plantea el aprendizaje en términos de superación de obstáculos epistemológicos, planteamiento que es recuperado en la teoría de las situaciones didácticas en donde el error está asociado a la existencia de un obstáculo (Brousseau, 1976).

Por lo que, el error es una evidencia de conocimiento, producto de una manera de conocer, es una evidencia de un proceso creativo y un medio para enseñar. El error se considera como un obstáculo o ruptura que interviene en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

En la matemática, los errores construyen los esquemas mentales cognitivos de los estudiantes. Es la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: docente, estudiante, currículo, contexto sociocultural, entre otros factores. Los errores son fuente inagotable de conocimientos que podemos explorar para profundizar en el pensamiento matemático. Para lograr esto se debe atender su problemática y no rechazarla e intentar que los mismos se constituyan en un elemento motivador importante.

En concreto, los errores aparecen en el trabajo de los alumnos principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como menciona Matz (1980), los errores son intentos razonables, pero no exitosos, de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación. Este tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Insistiendo, los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas. Son datos objetivos que se encuentran permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, constituyen un elemento estable de dichos procesos. Muestra si se presenta serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo. Estos pueden ser sistemáticos o al azar, los primeros son más frecuentes y reflejan el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos, ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.

Los errores sistemáticos revelan procesos mentales subyacentes, como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente que el estudiante considera y utiliza como correcto. En contraste, los errores al azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales y carecen de importancia.

Las equivocaciones o errores se pueden estudiar como resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas. El error, es una aplicación de un procedimiento imperfecto sistematizado que el docente, debe identificar. El alumno utiliza procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas que no reconocen el docente y los alumnos ocasionalmente inventan sus propios métodos “originales” o “creativos” para la realización de tareas y resolución de problemas matemáticos.

Entonces, siguiendo con la premisa que la investigación educativa se apoya en la investigación clínica de estudio de casos y fenomenología didáctica, esta investigación pretende analizar la problemática de los alumnos de primaria en el proceso de realizar y completar problemas o ecuaciones de aritmética básica especialmente de la resta. Como se ha señalado, observar y escuchar a los estudiantes al resolver los problemas, ampliará sobre el tema de los obstáculos epistemológicos y sobre la importancia del fomento de un “espíritu científico” o basado en las experiencias personales para lograr en los estudiantes, el trabajo

consciente e inconsciente de un proceso mental esquemático al abordar los problemas en matemática.

El perder el miedo al “error” se basa en un diálogo simple, constante y permanente con el catedrático para que el estudiante piense en la crítica no como un “castigo” sino como una retroalimentación positiva y necesaria para su desarrollo cognitivo integral. Las bases del razonamiento aritmético son esenciales para un logro en el desempeño personal a lo largo de su etapa escolar y universitaria posterior.

1. Fundamentos epistemológicos del estudio del error. Según Rico (1995:1)¹⁷ la fiabilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente de adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de intelectuales a través de la historia.

Las fuentes últimas del conocimiento admiten que el conocimiento humano es una mezcla de errores y prejuicios. Describe que el error es parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable. En esa misma línea, el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos. El conocimiento humano es falible, esto unido a la capacidad que tiene el ser humano de conocer, se halla siempre presente la posibilidad de que conceptos y procedimientos deficientemente desarrollados y aún

¹⁷ Rico, L. (1995) *Error en el aprendizaje de las Matemáticas. Didáctica de la Matemática*.

completamente equivocados, sean considerados como verdaderos (Aguilar, 2017)¹⁸.

Según Vilanova (1997)¹⁹, los errores (situaciones sin solución) se apoyan de diversidad de estrategias para resolver problemas. Tres temas son importantes en el nuevo marco teórico de la educación matemática: el uso de errores, los problemas sin solución con los datos y condiciones (la información), que se suministran y la diversidad de estrategias. El uso del error es importante para lograr reducir la imagen de las matemáticas como verdades absolutas, infalibles, exactas y el miedo psicosocial a equivocarse. Este uso genera una mejor asimilación de las operaciones y propiedades matemáticas: límites y los espacios de aplicación. Los problemas o situaciones de error o sin solución favorecen una lectura crítica de los enunciados y problemas. Esto parte de la vida real: no siempre es posible encontrar la aplicación de procedimientos matemáticos. No siempre se trata de hacer una operación y un cálculo y obtener un resultado, de lo contrario, se trata de discernir cuando es o no posible.

El conocimiento del error y las situaciones posibles de no solución, son una fuente de pensamiento creativo y de una mejor asimilación de las matemáticas y sus instrumentos. Al enfrentar situaciones reales supone integrar varias estrategias matemáticas, lógica, lectura comprensiva (cuidadosa) e incluso sentido común como las que suceden en las experiencias de la vida real y cotidiana. La contextualización de las matemáticas juega un papel importante. No se trata de “revestir el entorno” una operación es más compleja y estimulante: enfrentar una realidad, hacer un tratamiento de la información, determinar los límites y los métodos matemáticos para abordar la situación. Se trata de ofrecer al estudiante una situación problema que le permita usar su mente de una forma

¹⁸ Aguilar, F., et al., (2017) *Fundamentos epistemológicos para orientar el desarrollo del Conocimiento*. Editorial Universitaria Abya-Yala. Quito-Ecuador.

¹⁹ Vilanova, S. et al., (1997) *La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

amplia tomando en cuenta las variables posibles y escoger los recursos e instrumentos apropiados.

En estas interacciones dialécticas, la noción de obstáculo aparece como fundamental debido a que estos surgen en el proceso de aprendizaje por la confrontación de conocimientos que efectúan los estudiantes, enfrentarlo y superarlo las “situaciones problema” para lograr un conocimiento científico.

Según Bachelard (1976), entiéndase por obstáculos epistemológicos las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico. El individuo se confunde por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que hace que los conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, lo que obviamente afecta su aprendizaje. Esto lo confirma Bachelard al expresar:

“Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias aún más que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda” (Bachelard, 1976).

Se presentan cinco clases de obstáculos epistemológicos:

- Primera clase. La experiencia básica o conocimientos previos. Esto carga de subjetividad las observaciones y se pueden tener concepciones erróneas, ya que las cosas se ven tal como nosotros queremos verlas y no como realmente son. Estos conceptos previos, según Ausubel (1986) y Pozo (1989), son muy estables y resistentes al cambio, ya que por lo general son compartidos por muchas personas de diferentes edades, contextos culturales, formación y países. Además, muestran una serie de características relacionados con el origen que tengan. De acuerdo con esto, Pozo y otros (1989), los clasifican en tres grupos: concepciones espontáneas (las descripciones las realizan los niños con base en sensaciones y dejan de lado la definición científica y el lenguaje empleado por el maestro en la escuela), concepciones inducidas. “Cada uno de los individuos presentes en el aula forma sus propias ideas a partir de diversos estímulos, incluyendo las palabras

específicas, leídas u oídas, que hay en ese entorno concreto de aprendizaje" (Osborne y Freyberg, 1998) y concepciones analógicas (para que los estudiantes logren cambiar sus ideas, deben primero estar convencidos de que las que tenían antes no son correctas y ofrecerles una alternativa que les sirva, que la comprendan y que puedan considerarla aceptable y conciliable con los criterios que ya tienen).

- Segunda clase. El obstáculo verbal. Las generalizaciones dejan de lado detalles importantes, que pueden inducir a errores de conceptualización. Al generalizar el niño sale del paso con una explicación sencilla que la aplica a toda una definición, de una forma resumida y concreta. Se dejan detalles de lado que son los que realmente le dan sentido a la definición y, sobre todo, le dan validez científica. De ahí, que, de acuerdo con los resultados obtenidos en el trabajo con los niños, podemos comprobar que realmente tal como lo afirma Bachelard (1976: 66), el conocimiento general se convierte en un obstáculo epistemológico en el proceso de construcción del conocimiento científico.
- Tercera clase. El peligro de la explicación por la utilidad. Para Bachelard, *"La utilidad ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse inducción utilitaria. Ella conduce a generalizaciones exageradas"* (Bachelard, 1976: 109).

Esto obviamente lleva a concepciones erradas y reduce notablemente el significado del concepto

- Cuarta Clase. El obstáculo animista. Como comenta Bachelard: *"Los fenómenos biológicos son los que sirven de medios de explicación de los fenómenos físicos. Esta característica de valorizar el carácter biológico en la descripción de hechos, fenómenos u objetos, representan claramente el carácter del obstáculo animista"* (Bachelard, 1976: 186).

Después de realizar este diagnóstico, se pretende que el docente logre tomar conciencia acerca de la influencia del animismo infantil en la construcción errónea del conocimiento, para que así poco a poco logre convencer a los estudiantes de que estas ideas no son las correctas y se propicie la transformación gradual de las mismas, para que así los niños

puedan construir el concepto correcto. No importa que lo haga con sus propias palabras, por lo contrario, que demuestre que la idea que el niño concibe y expresa con sus propias palabras se acerque a lo correcto.

- Quinta Clase. Conocimiento verbal. Según agrega Bachelard:

“Al asociar a una palabra concreta una palabra abstracta se hace avanzar el pensamiento, cuando en realidad lo que se ha presentado es un movimiento puro y simplemente lingüístico.” “No es tan fácil, como se pretende desterrar a las metáforas en el exclusivo reino de las expresiones. Quiérase o no, las metáforas seducen a la razón. Son imágenes particulares y lejanas que insensiblemente se convierten en esquemas generales” (Bachelard, 1976).

Para solventar las situaciones tipo obstáculos se debe ir más allá, no solo quedarnos en una mera descripción de limitaciones sino pensar en la posibilidad de buscar posibles soluciones, para que los educadores, ya conscientes de estas dificultades, traten de ayudar a los niños a superarlas para que así el proceso de aprendizaje les resulte más agradable, convincente y significativo.

Primero hay que conocer los obstáculos, tomar conciencia de ellos retroalimentando al estudiante. El docente debe detectarlo para iniciar el trabajo didáctico. La toma de conciencia por parte de los estudiantes de sus propios errores, aunque no es suficiente.

Después de identificar el error y el obstáculo epistemológico que le da origen, se produce una desestabilización conceptual y se da un conflicto socio cognitivo en los estudiantes. Esto hace que haya un proceso inicial de confrontación de ideas dentro de la clase. El docente debe motivar a los estudiantes a analizar las diferencias interpretativas acerca del concepto estudiado, para llegar finalmente a una conciliación de las ideas que ellos tienen con respecto al mismo y a la definición del concepto por el docente.

Una vez que se ha tomado conciencia sobre los errores cometidos, y después de una discusión acerca de los mismos, se da el proceso de elaboración de una alternativa conceptual por parte del estudiante. Es necesario disponer de un

nuevo lenguaje para definir conceptos teóricos, se debe tratar de que las explicaciones que dan los estudiantes sean cercanas a las explicaciones que están en los textos, pero con un léxico más sencillo, semejante al cotidiano, de manera que los estudiantes puedan comprender e interiorizar y así utilizarlo con más frecuencia.

De acuerdo con la lógica ortodoxa empirista, la ciencia es “*a posteriori*” con muchos conceptos, contenidos y es en principio de naturaleza falible; la matemática es a diferencia del tipo “*a posteriori*”, tautológica e infalible. La educación en matemática se ha mal interpretado. Entonces, el considerar el trabajo matemático de los estudiantes como de naturaleza infalible ya que se omite el sentido del currículo por competencias o constructivista de la enseñanza-aprendizaje basado en las experiencias y aproximaciones como un trabajo de carácter “científico” por lo que su aproximación es de carácter falible. La “prueba y error” que los estudiantes realizan al trabajar la matemática debe considerarse como una ciencia y de alta prioridad investigar. Es de allí en donde se debe partir este tipo de investigaciones “del error” para fundamentar la mejora en la docencia y conformar estrategias apropiadas para un aprendizaje efectivo.

Fomentando el aprender de los errores los estudiantes logran trabajar con más motivación, autoconfianza y determinación para lograr entender y activamente incorporarse a un espíritu científico integral. Este espíritu científico solo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico. A menudo el hombre de ciencia se confía a una pedagogía fraccionada mientras que el espíritu científico tiende a una reforma subjetiva total. Todo progreso real en el pensamiento científico necesita una conversión.

Finalmente, los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero. El proceso usual de construcción de los conocimientos (constructivismo) matemáticos presentan de forma sistemática errores. Este proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica entre los estudiantes y sus docentes.

2. Orígenes. El análisis del error ha sido en el tiempo desarrollado por diversos esquemas e intereses los cuales apoyan en el campo de la pedagogía y la psicología. El estudio del análisis del error cuenta con sus orígenes primordiales desde la Antigua Grecia hasta Alemania, Rusia, España y en los Estados Unidos de América.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que pueden desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre ellos Sócrates, Russell, Bachelard, Popper, Lakatos, Ball, Brousseau, Davis y Werner.

En esa vía del racionalismo que dialoga con la investigación científica que se plantea en este estudio investigativo es el de apoyarse en los teóricos filosóficos racionalistas, que presentan a los errores como material de investigación y para luego dilucidar un camino de solución a una problemática que parece ser la constante en diversas instituciones educativas.

A continuación, un desglose de las ideas de algunos filósofos pensadores destacados sobre el tema del error, con una mención a Sócrates quien aseveró:

“Nadie yerra voluntariamente. Sócrates afirmaba que todos podemos errar en la búsqueda de la verdad y que es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar esos errores para recuperar el rumbo hacia el conocimiento verdadero” (Sócrates, citado en Del Puerto, 2004).

a. Sócrates (470 – 399 AC). Sócrates adelantó una solución en la doctrina de la falibilidad: todos podemos errar en el camino de la verdad, con frecuencia se “erra” en forma individual como en forma colectiva, la idea del error y la falibilidad que podemos buscar la verdad, y la verdad objetiva aún cuando por lo general se presente una equivocación por amplio margen. Si se respeta la verdad se debe aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y autocrítica. El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente en la

modificación del conocimiento anterior. A través de la crítica racional y la autocrítica es cómo podemos examinar y corregir esos errores para recuperar el rumbo hacia lo genuino. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es una estrategia de enseñanza aprendizaje muy importante inculcar a los docentes en las aulas (Rico, 1995).

El pensador Sócrates propuso y adelantó una doctrina de la falibilidad: todos podemos errar y con frecuencia erramos individual y colectivamente. La idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad y la verdad objetiva, aún cuando por lo general se presente una equivocación por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

b. Russell, Bachelard, Popper y Lakatos (s XIX – s XX). La aritmética y el conocimiento numérico constituyen el área que predomina en la mayoría de los estudios sobre errores en matemáticas escolares. El error en la matemática es objeto de estudio en la Educación principalmente desde el siglo XX. La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que se destacan a Russell, Bachelard, Popper y Lakatos.²⁰

El filósofo Russell (1927) fue probablemente el primer filósofo racionalista moderno en aseverar la evidencia de que la matemática es de carácter inductivo. Se basó a su vez en sus estudios acerca de las verdades matemáticas y cómo

²⁰ La reflexión sobre la Ciencia ha constituido tanto para Bachelard como para Popper uno de los puntos clave de la reflexión filosófica. Bachelard, G. *La Filosofía del no*. Buenos Aires. Amorrutu editores. 1978 (p 7-9); Popper K.R. *Sociedad Abierta. Universo Abierto*. Madrid, Tecnos, 1984. p 84.; Imre Lakatos (1976) *Proofs and Refutations The logic of Mathematical Discovery*; Bertrand Russell (1935). Martínez Velasco (Colegio Universitario Soria, España) *Bachelard, Popper y el Compromiso Racionalista de la Ciencia*. (p76-97); *Appraising Lakatos Mathematics, Methodology and the Man* edited by George Kampis, Ladislav Kvasz and Michel Stoltzner. (2002) Vienna Circle Institute Library Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London.

permanecen inexpugnables y en duda, y que sus procedimientos son de carácter empírico hasta que se demuestran que son correctas.

Según Gastón Bachelard (1938)²¹, en las aulas, se presentan causas de inercia que mantiene a la educación en rezago en materia del conocimiento y de la mejora del pensamiento cognitivo. Los “obstáculos epistemológicos” o de origen que motivan a un error sistemático en los estudiantes desde inicios escolares, son de variadas causas y han conllevado a completar variados estudios de fundamento que apoyan la teoría de la constructivista de aprender del error. Al regresar a los errores apoyaba en encontrar “la verdad” o la solución a la problemática, sin temor y con firmeza (Rico, 1995).

Bachelard (1938), planteó la noción del obstáculo epistemológico como explicación para la aparición inevitable de los errores, que constituye una parte importante del avance en el conocimiento. En su obra *La formación del espíritu científico*, Bachelard desglosa las siguientes ideas:

- Primera. Hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos, en el acto mismo de conocer en donde aparecen. Los entorpecimientos y las confusiones son ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso como también, es ahí donde se presentará la inercia que se llamará obstáculo epistemológico.
- Segunda. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. La verdad, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza.
- Tercera. La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

²¹ Bachelard, G. (1938) *La formación del espíritu científico*. La fenomenotecnia extiende a la fenomenología. Un concepto se habrá vuelto científico en la proporción en que se haya vuelto técnico, en que esté acompañado de una técnica de realización.

- Cuarta. En educación, la noción de obstáculo epistemológico es desconocida y son pocos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión.
- Quinta. Los errores no se destruyen uno por uno con facilidad ya que están coordinados. El espíritu científico sólo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico.

Posteriormente, las ideas del error se empezaron a complementar con las del constructivismo, especialmente por los psicólogos Jean Piaget y Lev Vygotsky. Jean Piaget (1970) se interesa más por el resultado final que obtienen los niños de diferentes edades que por las formas de razonar ante los diferentes problemas y por los errores que se cometen en las diferentes edades. En especial, presta atención a los errores en ítems que implican aspectos de lógica, cuya resolución parecía especialmente difícil. Así, Piaget se da cuenta de que sus intereses epistemológicos son susceptibles de ser tratados empíricamente por lo que, comienza a utilizar el método de entrevista clínica. En este, él pregunta a los niños sobre su ejecución y comprensión de los ítems.

Vygotsky (1978) con un punto de vista diferente a Piaget (1970), pero complementario, enfatiza los roles sociales del aula en la apropiación del conocimiento y propuso que el desarrollo cognitivo no procede al desarrollo en la socialización del individuo, ya que las estructuras sociales y las relaciones apoyan a la mejora de las funciones mentales en sus llamada zonas del desarrollo actual (*"zone of actual development – ZAD"*). En esta zona los estudiantes trabajan en forma independiente, pero para poder estar en esta zona deben primero afianzar la zona de desarrollo próximo (*"zone of proximal development – ZPD"*). En la zona de desarrollo próximo o social (ZPD) el estudiante requiere de un apoyo de adultos o compañeros de estudio los cuales aún no pueden cumplir a totalidad un proyecto individual sin ayuda. El permanecer en la zona ZPD puede evitar que el estudiante logre el trabajo independiente y además adecue el conocimiento o la información transmitida. Los docentes pueden apoyarse entonces de ambas teorías para

utilizar estrategias de instrucción efectivas basadas en las teorías psicológicas del desarrollo cognitivo de Jean Piaget y de Lev Vygotsky.

Ambas teorías coinciden que:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido al menos en parte a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
- Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.

Luego, Popper (1979) uno de los grandes filósofos de la ciencia del siglo XX, en su documento *Conjeturas y Refutaciones*, delibera que el problema de cuál es la fuente última del conocimiento se torna en: ¿cómo podemos detectar y eliminar el error? y, propone a diferencia del empirismo y el racionalismo, el racionalismo crítico como la mejor postura para explicar el avance de la ciencia. El avance del conocimiento consiste en la modificación del conocimiento anterior a partir de someter a prueba las afirmaciones tenidas por verdaderas hasta el momento y como paradigmas. Es decir, las conjeturas tornarse en conocimiento verdadero. Las observaciones, el razonamiento y la intuición tienen como función contribuir a la adquisición del conocimiento.

Así mismo, Popper (1979), considera que la teoría científica y el conocimiento humano en general conlleva muchas conjeturas o hipótesis, y es generado por una imaginación creativa para resolver los problemas que surgen en ciertos ambientes históricos culturales. Además, considera que hay básicamente dos respuestas clásicas a la cuestión anteriormente planteada; la proporcionada por el empirismo, que señala que la observación como fundamento último del conocimiento y la proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico que

considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas. Destaca en estas dos posiciones el optimismo epistemológico sobre las posibilidades humanas de conocimiento: todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, bien en su capacidad de percepción sensorial o en su facultad de intuición intelectual.

“El hombre es capaz de conocer, por lo tanto, puede ser libre”
(Popper, 1979).

Por lo que, Popper (1979), se sustenta en la teoría de la verdad manifiesta. La verdad es siempre reconocible como verdad si no es así sólo es necesario develar esa verdad o descubrirla. Esta doctrina de que la verdad es manifiesta plantea la necesidad de explicar la falsedad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es manifiesta? Una respuesta posible considera que la ignorancia es obra de poderes que conspiran para mantenernos en ella, que fomentan nuestros prejuicios para que no podamos ver la verdad manifiesta. Popper (1979) sostiene que, esta explicación es un mito, la realidad es que la verdad es difícil de alcanzar, y una vez encontrada se puede volver a perder fácilmente. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia en franca oposición a la experiencia.

Para Popper (1979), no hay ningún criterio que permita reconocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que con suerte permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad, pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad. Popper (1979), señala que no hay fuentes últimas del conocimiento, admite que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios. Con ello se llega a admitir al error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. Idea complementaria de la presencia del error es la necesidad de un ejercicio constante de la crítica, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable de las consideraciones anteriores.

En su libro *Conjectures and Refutations* (Conjeturas y Refutaciones), Popper (1959) considera que la fuente última del conocimiento apoya en reconocer el papel que los errores tienen en la adquisición del conocimiento científico. Considera que básicamente se tiene el empirismo que señala la observación como fundamento último del conocimiento, proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas. Todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, tanto como facultad sensorial o en su facultad de intuición intelectual. Contrapone estas posiciones con la creencia según la cual, en ausencia de una verdad objetiva y discernible, hay que optar entre aceptar la autoridad de la tradición o el caso, posición a la que llama tradicionalista. El racionalismo epistemológico ha defendido el derecho de la razón y de la ciencia a criticar y rechazar toda autoridad cuando se encuentra basada en la sinrazón, el prejuicio o el accidente. El rechazo del autoritarismo lleva a someter las propias teorías y conocimientos a un examen crítico minucioso. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia. La teoría de la verdad puede conducir al autoritarismo. Esto quiere decir que la verdad simplemente no se manifiesta y necesita de modo constante de una reinterpretación o reafirmación. El apoyo de encontrar la verdad según Popper (1959), enunciado en su primer gran tratado, que es con el racionalismo crítico para detectar y eliminar el error. No existe ningún criterio único que permita conocer la verdad, pero sí poseemos criterios que permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican error.

Karl Popper examina temas relativos al desarrollo del conocimiento, vistas a través del método científico y expone la tesis que de que podemos aprender de nuestros errores. Se trata de una teoría acerca del conocimiento y de su desarrollo, una teoría de la razón y una teoría de la experiencia que afirma que la ciencia debe progresar a pesar de las equivocaciones. La ciencia avanza a través de anticipaciones injustificadas, de presunciones, de soluciones tentativas a conjeturas o problemas y que son posibles de criticar o refutar. La crítica de las conjeturas pone de manifiesto los errores, nos hace comprender las dificultades

de un problema que estamos tratando de resolver. De esa manera se llega a adquirir un conocimiento más profundo del problema y a estar en condiciones de proponer soluciones maduras: las refutaciones de una teoría o solución siempre es un paso hacia adelante para acercarse a la verdad.

Asevera Popper (1959) que, ningún número de resultados positivos a nivel experimental pueden confirmar una teoría científica, pero un solo contraejemplo es lógicamente decisivo, lo que puede mostrar que la teoría de la cual la implicación es derivada es falsa.

Según Imre Lakatos (1978) ²² en su documento *Proofs and Refutations: The logic of Mathematical Discovery* (Pruebas y Refutaciones: La lógica del Descubrimiento Matemático) se muestran diálogos entre los alumnos y sus profesores, y revela como el aprendizaje de la matemática es una actividad de diálogo permanente.

Así mismo, Lakatos (1978) aporta elementos en el mismo sentido que Popper (1959), al referirse a las conjeturas que se plantean para tratar de resolver un problema abierto: a la propuesta de una conjetura sigue la crítica de la misma a la luz de los contraejemplos y la eventual superación a un juego dialéctico en el que la detección y la utilización positiva del error tienen un rol fundamental en la transformación o el enriquecimiento de una teoría (citado en Rico, 1995).

En efecto, Imre Lakatos con el documento *Pruebas y Refutaciones* apoya en lo relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos matemáticos, con la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen una respuesta a un problema en cuestión, en una forma abierta. Se crítica a las conjeturas mediante contraejemplos globales o locales y la superación mediante un aumento del contenido y una limitación en la extensión de los conceptos. Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falibilidad o falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático.

²² Imre Lakatos British Journal for the Philosophy of Science, (1978) *Proofs and Refutations*. 7-25.

Popper (1979)²³ y Lakatos (1978) son de la teoría de que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. El conocimiento matemático es construido a través de la abstracción reflexiva. Las estructuras cognitivas o mentales se activan en los procesos de construcción. Por ende, importante enfocarse en una educación del tipo constructivismo metodológico y positivista (Popper y Lakatos, citados en Rico, 1995)

Estos filósofos están de acuerdo en considerar a la investigación científica del error, como poseedora de una aportación teórica importante, que apoyan en la que la creación de ideas y representaciones en base a experiencias personales. Las investigaciones del error, cobran un papel de importancia en la investigación educativa. Es el compromiso de racionalizar el error lo que se toma en consideración, basándose en los escritos de los filósofos racionalistas como Bachelard (1988), Popper (1978), Lakatos (1978) y Russell (1927) (citado en Rico, 1995).

Tienen como denominador común, Karl Popper y Imre Lakatos, que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. En esencia, se cambia el estatuto positivo (epistemología positiva) que toma la verdad como patrón por el vaciado en negativo de la verdad, la falsedad.

La preocupación por el conocimiento erróneo por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance en la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de los filósofos de la ciencia y epistemólogos entre ellos Popper (1959), Bachelard (1988), Russell (1927) y Lakatos (1978). Es entonces que, el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos.

²³ Karl Popper (1979) *Conjectures and Refutations*. Psychology Press.

c. Ball, Brousseau, Davis y Werner, Carpenter, Fennema, Loef, Levi, Empson (s XX y s XXI). En la matemática debe prevalecer un acercamiento de refutaciones y conjeturas para al final encontrar a base de la prueba y error las verdades infalibles de las respuestas consideradas como correctas. La madurez matemática de los alumnos se logra si ellos reflexionan a profundidad todos los temas y al dialogar con su profesor determinen el camino apropiado y conveniente a seguir (Atkins, 1997)²⁴.

El ambiente en el aula debería cambiar su cultura y la forma de renegociar para que los estudiantes respondan a los comentarios de unos a otros en vez de que sea el maestro que filtre lo comentado. El único inconveniente sería el control de la disciplina asertiva y que el docente debe considerar como manejar y controlar al grupo de estudiantes.

Deborah Loewenberg Ball (1993)²⁵ establece que el maestro necesita una perspectiva “bifocal” percibiendo a la matemática a través de la mente del estudiante mientras se percibe la mente del alumno a través del proceso matemático y del propio. El docente infiere la matemática que el estudiante ha elaborado el razonamiento a través de esas construcciones. El docente otorga tareas que ofrecen introspección en el razonamiento lógico del estudiante (Atkins, 1997).

Desde 1970 se plantearon proyectos científicos que tratan de construir el modelo de las situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas (y de criticarlas). Guy Brousseau en su libro *Didáctica de la Matemática*, apoya en la investigación de la didáctica de la matemática en Francia.

El proyecto IREM (Instituto de Investigaciones sobre la enseñanza de las Matemáticas) y la regulación de las reformas de los años 1970, hacen resurgir

²⁴ Sandra L. Atkins (1997) *Lakatos's Proofs and Refutations Comes Alive in an Elementary Classroom*. John Wiley and Sons, Inc.

²⁵ Ball, Deborah L. (1993) *With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics*. The Elementary School Journal Vol. 93, No. 4 (Mar. 1993), 373-397.

este aporte. Se observa que buscar las condiciones de existencia de un saber constituye un medio apropiado para la investigación y para la reingeniería de la didáctica. La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los docentes acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar como ellos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones. La teoría de las situaciones didácticas aparece entonces, como un medio para comprender lo que hacen los docentes y los alumnos. Además, produce problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para finalmente otorgar un medio de comunicación entre los investigadores y los docentes.

Una situación de aprendizaje es en la que el alumno debería adaptarse a una situación objetiva (y no a una relación dual con el docente) produciendo él mismo el conocimiento, sin el auxilio de la solución, por supuesto, puesto que se trata de construir o de adquirir. El alumno debe poder esbozar con sus conocimientos actuales, una estrategia de base que responda a la consigna que se le dió. El conocimiento nuevo es entonces, un medio para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura y eficiente. Los conocimientos están en competencia y los motivos de aprendizaje se manifiestan al alumno mismo. El sentido de este saber estará representado no por su adecuación a las respuestas, sino por un universo de situaciones [didácticas] determinado por sus propias analogías. Así mismo, la enseñanza de la división separa el aprendizaje del algoritmo, a un aprendizaje con sentido algorítmico.

El alumno debe estar suficientemente seguro del aprendizaje adquirido para identificar las fuentes de error y en caso dado discutir las con el docente o bien con sus compañeros de estudio. Esta confianza en los métodos exige a su vez, una posición reflexiva con respecto a ellos, es decir, un metaconocimiento, un metalenguaje y finalmente, todo aquello constituye la conversión de ciertos conocimientos en saberes.

Aprender las prácticas parciales de la división de correcta manera, implica que el docente la enseña, las exige y las corrige, las hace imitar y repetir, y después

las integra. En ningún momento el estudiante está en condiciones aún para establecer por sí mismo la finalidad de la acción y para corregir sus errores. Lo ideal es, continuar utilizando estas prácticas, pero utilizarlas mejor en función de sus características particulares a situaciones didácticas particulares de cada estudiante para adecuar el conocimiento y el aprendizaje.

A continuación, una cita de Brousseau (1983) al respecto del error:

“Un error no es sólo consecuencia de la ignorancia, de la inseguridad o de un accidente. Un error puede ser consecuencia de un conocimiento previo que tuvo su propio interés, su éxito pero que aparece como falso bajo nuevas circunstancias, o más simplemente adaptado. Así en un análisis didáctico, los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos sino más bien como síntomas de la naturaleza de las concepciones que subyacen en sus actividades académicas” (Brousseau, 1983).

Mantener una relación de conversación matemática es un proceso evolucionario. El tono y la calidad de la conversación cambia según lo que el docente percibe de sus estudiantes y al notar el grado de interacciones reflejan lo que han aprendido, al sentirse cómodos y motivados. Las conversaciones matemáticas proveen información del desarrollo del nivel de entendimiento, permiten a los participantes el aprender acerca de las construcciones matemáticas de otros y otorga a los participantes las oportunidades para reflejar en su propio entendimiento matemático. La selección de las apropiadas preguntas, utilizadas por los docentes, son vitales para el acercamiento con los estudiantes. En suma, la distribución física de los alumnos en el aula afecta a la calidad de estas conversaciones. El poner a los alumnos uno enfrente del otro o bien, en forma de que todos se puedan ver unos a otros, si el tamaño del grupo lo permite, motiva mayores y mejores diálogos entre ellos e incrementa la ocurrencia (*“likelihood”*) de que el maestro sea sólo un miembro más, y no un líder o alguien ajeno al grupo, tornándose en una comunidad matemática. Los estudiantes empiezan a formar una relación colegial (*“collegial relationship”*) en donde son retados, modelados, y reconstruyen unos con otros sus ideas al ser retroalimentados unos con otros (Atkins, 1997).

El estudio de los errores, tomando como referencia el descrito en Socas (1997) se considera tres ejes, que permiten analizar el origen del error. Se puede situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas y emocionales

Se considera el obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard,1938; Brousseau,1983).

La presencia de obstáculos epistemológicos, fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos. Deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia. Así también como, se debe a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la resistencia de esas concepciones en los alumnos. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al docente, en la búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede en ningún caso, aportar por sí sólo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos.

Los errores forman parte de los procesos mentales en alumnos durante el aprendizaje de la matemática. Frecuentemente, los alumnos piensan acerca de la matemática de un modo muy original o creativo, bastante diferente de lo que esperan sus docentes. Cuando esta vía de pensamiento creativo se muestra “útil” o verdadero al alumno se le considera hábil en su competencia matemática para resolver problemas o ecuaciones y se tiene al alumno como de una comprensión “inusual” o compleja e integral, pero, si al estudiante le cuesta y presenta los obstáculos del tipo epistemológicos o de origen entonces, su pensamiento al

obstaculizar u ocasionar un “*impasse*” se le presentan los “errores”. El docente critica, muy negativamente, desmotivando al alumno y el alumno comienza a perder interés en la retroalimentación y en construir su propio razonamiento deductivo o inductivo. Otra consecuencia negativa es que el alumno, pierde el espíritu científico que le puede ayudar en las futuras tomas de decisiones (Carpenter, Fennema, Loef, Levi, Empson, 2015)²⁶.

La pedagogía actual encuentra importante considerar los procesos de enseñanza -aprendizaje como procesos de comunicación en donde el papel importante del docente es de reconocer, que es lo que los alumnos están pensando y no limitarse a suposiciones sobre esas ideas. Es importante que el docente se sorprenda de los resultados, no esperados en la mayoría de las veces, del desempeño de los alumnos al no restringir la creatividad en ellos (Carpenter, Fennema, Loef, Levi, Empson, 2015).

Se hace evidente, que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección. El procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno en forma consistente y confiado (Brousseau, Davis y Werner, 1986)²⁷.

Según Ball (2005), que tan bien los docentes conocen matemática corresponde a su capacidad de cómo utilizan eficazmente el recurso matemático. Si los docentes evalúan el progreso de los estudiantes pueden realizar las reflexiones acertadas en cuanto a cuándo presentar y enfatizar la secuencia de los temas y conceptos matemáticos.

La calidad de la enseñanza matemática depende del contenido del conocimiento docente. Lo que se busca mejorar en forma general es el dominio de los contenidos y habilidades de los docentes para que la generación de estudiantes mejore a la siguiente generación de posibles docentes y de esta forma

²⁶ Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, Megan Loef Franke, Linda Levi, Susan B. Empson. Heinemann (2015) *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. USA.

²⁷ Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986) *Observing Students at work. Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht, Reidel Publishing Company.

piramidal se logren alcanzar los logros en matemática esperados. Lo que se necesita más, son programas de investigación en docencia que apoyen en la preparación de lo que se debe instruir a los docentes en cuanto a los conocimientos para que, los estudiantes alcancen los logros satisfactorios. Para ello, los docentes deben poseer un alto entendimiento del razonamiento matemático, alta reflexión, pensamiento crítico y habilidades de comunicación, fluidez de determinar que ejemplos son los más convenientes y mucho entendimiento de la naturaleza de la competencia matemática. A su vez, es importante considerar que los docentes antes de instruir a los estudiantes en utilizar un algoritmo confiable para calcular su respuesta deben considerar primero, explicar adecuadamente los conceptos.

Los docentes deben explicar, escuchar y examinar los trabajos de los alumnos, como también, escoger modelos de ejercicios útiles. Durante este proceso se requiere una reflexión y entendimiento matemático adicional. Para el efecto, es importante analizar la fuente de error. Los errores requieren más análisis matemático. Muchas veces se puede regresar al alumno para que explique qué hizo, pero si se tiene más de treinta alumnos, siempre se debe hipotetizar cuál fue la base o que causa el error. Además de resolver dudas o preguntas el docente debe analizar el error en los procesos de sus alumnos. La mejor manera de hacerlo es explicar utilizando representaciones gráficas o material lúdico. Estas representaciones gráficas apoyan en hacer las necesarias conexiones para la apropiada instrucción.

Los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas (*"misconceptions"*), acerca de los aspectos fundamentales de las matemáticas. Cuando se observa a los alumnos o se comunica el maestro con ellos, se puede notar que estos tienen con frecuencias procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores (Carpenter, Fennema, Loef, Levi, Empson, 2015).

De todas las anteriores reflexiones puntuales de cada uno de los filósofos y psicólogos teóricos en temas de educación citados, se pueden sintetizar las ideas relativas a los procesos de enseñanza aprendizaje:

- Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje
- Los errores no aparecen al azar, sino que surgen en un marco conceptual basado en el conocimiento adquirido previamente y en forma consistente
- Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de estos, reemplazandola por la previsión de los errores y su consideración en el proceso de aprendizaje
- Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores. Un estudiante puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente
- Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los demás que lo puedan ayudar y apoyar en complementar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba equivocado

3. Evolución del estudio investigativo del error y características. Los estudios del error en el aprendizaje de las matemáticas han sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática. Estos estudios, se han enfocado en errores en contenidos de áreas aritméticas y álgebraicas, procesos conscientes e inconscientes en los incorrectos intentos para resolver problemas, causas detalladas del error derivadas de los efectos de interactuar entre las variables que intervienen en los procesos de enseñanza aprendizaje (docente, currículo, el estudiante, entre otros) desarrollo de ayudas de didácticas especiales para tratar dificultades o errores de aprendizaje.

Los estudios de los errores consistían en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones y, en hacer un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permita examinar cómo estos surgen a partir de la solución correcta y hacer inferencias

sobre qué factores del contenido matemático pudo haber conducido al error. Las respuestas incorrectas que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en lograr un correcto aprendizaje.

En Estados Unidos Thorndike (1917) difunde los primeros trabajos sobre la determinación de los errores. En la década de los años 1930, se priorizo el análisis de dificultades especiales, la persistencia de técnicas erróneas individuales y la agrupación y clasificación de errores (Rico, 1995).

En Alemania entre el año 1922 y el año 1928, se trató de establecer patrones de errores en todas las materias, fundamentar psicológicamente los errores matemáticos, estudiar la actitud de las personas al equivocarse y clasificar las causas del error. El gran interés de los alemanes en el análisis del error durante la época de la década de 1920 debe entenderse, por un lado, como debido a la creciente importancia de la pedagogía empírica científica, el cual utilizó ideas o teoría de una psicología del tipo experimental, mayormente, debido a una filosofía pedagógica de su rol predominante luego de la Primera Guerra Mundial. Por otro lado, un programa de reforma empieza a tener efecto en el tiempo que se abogó por fomentar la individualidad, adaptando todo el trabajo de educación al hijo con sus características, y con la etapa respectiva de desarrollo del estudiante.

En la parte de la psicología tres escuelas del pensamiento empezaron a ser reconocidas: psicoanálisis, teoría Gestalt, y la psicología del pensamiento (*“denkpsychologie”*). Estas teorías, sin embargo, resumen sus muy complejas inconsistencias internas. Sigmund Freud en particular, subraya el análisis del error como un método epistemológico en sus primeras lecturas.

En Alemania, Weimar (del año 1922 al año 1939) es considerado el fundador de la investigación de la didáctica orientada al error. Su objetivo era establecer un patrón de error en orden de explicar los errores individuales para todas las materias educativas y para todos los grupos. Para hacerlo, el distinguió bajo el concepto general de equivocado (*“wrong”*) (*“das falsche”*) entre la equivocación (*“irrtum”*), falsificación (*“falschung”*) y error o falta (*“bug”*) (*“fehler”*).

Posteriormente, este último concepto ‘bug’ es cambiado por un algoritmo que incurre en un patrón de error por Van Lehn (1980).

Una larga tradición de la investigación del análisis del error en las matemáticas en los Estados Unidos fue Buswell (1925) con una monografía que incluye una recopilación de treinta y un estudios que ya se habían hecho en ese tiempo los cuales explícitamente se relacionan con los errores aritméticos. Entre estos está el de Uhl (1917), es especialmente importante ya que posteriormente por primera vez, incluye el análisis de ejercicios por escrito por medio de la observación en el aula y el diagnóstico por medio de entrevistas a los alumnos para analizar técnicas del error y sus causas. Por este estudio de investigación de muchos niveles, Buswell pudo identificar una gran serie de tipos de errores en los cálculos de los cuatro tipos (*“rule of four”*) de cálculos aritméticos.

Buswell and Judd (1925) explica treinta estudios que se relacionan con el diagnóstico de errores aritméticos. En Alemania también por esa época se empezó el tema del diagnóstico del error con Weimer en el año 1925 y Seemann en el año 1929. El análisis de los errores de los estudiantes se caracterizó por muy diferentes puntos de vista e intereses, principalmente por la diferencia en la *“Zeitgeist”* relativa a la investigación psicológica y educativa diferencias en política educacional y a la estructura de las escuelas. Los métodos y las hipótesis de las investigaciones de los americanos sobre los errores fueron orientadas a *“behaviorism”* (conductismo). Mientras que, en Europa, los aspectos de la teoría de la Gestalt y de las ideas reformas pedagógicas han sido de bastante influencia.

En la Unión Soviética, la educación también sufrió importantes cambios. Estas diferencias de investigación fueron varias y se compartieron entre los investigadores europeos y americanos.

Un estudio importante es el llevado a cabo por Buswell y John (1926). Muchos autores han fomentado la idea de que la técnica diagnóstica por entrevista en donde oralmente el alumno describe el método de proceder a través del algoritmo. Es probable que esta técnica provea más criterios de pensamiento o tipo *“insight”*

en el actual manejo del razonamiento de la causa del error que al compararlo al análisis de una prueba escrita.

Kiebling (1932) estaba predominantemente preocupado por la llamada propensión al error (*fehlsamkeit*) como una disposición personal para las equivocaciones (no intencionales y errores no frecuentes), y para las teorías de la evaluación del error y la prevención del error. Mientras Fettweis (1929) mostró errores en álgebra, Rose (1961) trató de establecer una clasificación de las causas del error en la educación matemática (inatención, reglas de la ignorancia, confusión de conceptos, inhabilidad de reconocer las características del problema matemático).

Este ímpetu en el desarrollo del análisis del error fue abruptamente interrumpido en el año 1933 por los Nazis en Alemania ya que, se oponían a la base individualista que prevalecía hasta ese entonces en el sistema educativo, y consideraban a la matemática como menos importante, comparado con otras materias para adoctrinar, y les parecía menos apropiada fomentar para el nacionalismo nazi de ese entonces.

Continuando estos estudios Brueckner²⁸ (1935) y Burdge (1932) trató de tipificar el error (*error techniques*). Estos investigadores se enfocaron en:

- Listar todas las técnicas potenciales del error
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas del error a través de variados grupos de edades
- Analizar dificultades especiales, particularmente encontradas cuando se realiza la división por escrito, y cuando se opera con el cero
- Determinar la persistencia de una técnica de error individual
- Clasificar y agrupar los errores como fue el estudio de 1939 con Grossnickle, Holland, Buswell, Schonell, Brueckner, *et al.*). Estos estudios

²⁸ Brueckner, L.J. (1935) *Diagnosis in Arithmetic*, editado por L.J. Brueckner.USA.

continúan en años recientes con los estudios de Roberts (1968), Lankford (1972), Engelhard (1975) y Cox (1975).

El investigador Grossnickle (1939) encontró cincuenta y siete errores en la división con un solo dígito. Por otro lado, el investigador Holland (1942) se refiere a muchos tipos de dificultades encontradas en las divisiones largas. Ella menciona los problemas como las dificultades de los hechos de la división, dificultades con la resta y la multiplicación, dificultades que se encuentran cuando las operaciones fundamentales son puestas en un ámbito de divisiones largas, dificultades con la ubicación de los dígitos, dificultades en la estimación de cociente y de las dificultades con el cero. Holland (1942) apoya al trabajo de Grossnickle (1936, 1939).

Los investigadores Weimer (1939) y Seemann (1949) eran menos preocupados por el diagnóstico de un deficiente desempeño individual que desarrolla una apropiada ayuda que es resultado de una base psicológica, un método o estrategia didáctica para enseñar la matemática. Para ellos, los errores matemáticos no fueron el resultado del cambio, sino más bien del fenómeno que resulta de leyes que fueron creadas por una equivocada combinación de determinadas tendencias, el susodicho principio del mínimo esfuerzo. Para la aritmética, Seemann (1949), distinguía tres grupos de errores: errores mecánicos, errores asociativos, y errores funcionales.

En el año 1955 con Brueckner y Bond²⁹ dedicaron todo un capítulo en su libro sobre la diagnosis en aritmética. Los autores se refirieron a los errores encontrados en el estudio de Buswell y John (1926)³⁰ (citado por Radatz, 1980)

El investigador F. J. Schonell (1957), en el libro "*Diagnosis and Remedial Teaching in Arithmetic*", contiene los mismos errores que los encontrados en su libro del año 1937. En muchos casos esta información puede derivarse del escrutinio de la evaluación del trabajo de los alumnos, pero en la mayoría de las

²⁹ Brueckner, L J and Bond, G I, (1955, 1980) *The Diagnosis and Treatment of Learning Difficulties*. Appleton-Century-Croft. New York.

³⁰ Buswell, G T and John, L., (1926) *Diagnostic Studies in Arithmetic*. Chicago: University of Chicago. USA.

instancias, particularmente con los alumnos que tienen mucho rezago en la aritmética, es entonces que se debe realizar observaciones de los hábitos en los procesos o procedimientos aritméticos y de incluir un análisis del tipo oral apoyando lo realizado en la parte escrita.

Un estudio de Harvey y Kyte (1965)³¹, trató de determinar los efectos de un programa de enseñanza designado para aislar errores específicos que incluye el cero en la multiplicación de números enteros y el trabajar con él para instrucción remedial. Este estudio con una muestra de 15 alumnos de 6º grado de primaria (517 estudiantes). Las pruebas diagnósticas fueron administradas en septiembre y luego en el mes de febrero. Un total de 22 tipos de errores de la multiplicación relacionadas con el cero fueron incluidas en las pruebas pre y post. Las pruebas no fueron administradas individualmente. Luego de pretest en donde los 517 estudiantes erraron 915 veces, a los docentes se les capacitó con un récord detallado de cada error hecho por cada alumno en su clase. En la base de la información de los errores los investigadores promovieron una instrucción individual, como de grupo, para alcanzar las necesidades de los estudiantes. La prueba post revela un total de 246 errores, un decremento del 73.1% del error comparado a la prueba *pretest*. Los resultados de este estudio mostraron que el programa de diagnosis y de remediales fue muy efectivo. El análisis de los resultados para todas las clases revela que muy pocos alumnos por clase fallaron en corregir la mayoría de los errores. Se eliminaron muchos tipos de errores que involucran el cero.

Una publicación en el “*School Science and Mathematics*” por P.C. Burns en el año 1965 enfatiza la necesidad de una buena prueba analítica que ayude a encontrar las dificultades aritméticas que los alumnos presenten. Burns (1965) apela por utilizar la entrevista diagnóstica, su artículo se refiere principalmente a la sustracción de los números enteros. En este estudio se desglosan siete tipos de errores.

³¹ Harvey, 1 F and Kyte, C.C., (1965) *Zero Difficulties in Multiplication* In: *1st grade Arithmetic Teacher*, 12, S 45- 50.

A partir de la década de los setenta, se intentó diseñar actividades, metodologías y organización en el currículo escolar para disminuir errores. R.B. Ashlock (1972) también apoya por una entrevista diagnóstica. Ashlock identifica un patrón de errores en el proceso de cómputo de las operaciones aritméticas. Se refiere a cuatro tipos de errores en cada una de las cuatro operaciones aritméticas.

El investigador F.K. Reisman en el año 1972 en su libro *A Guide to Diagnostic Teaching of Arithmetic*, lista 46 errores que cometen los estudiantes al hacer cálculos con los números enteros. Apoya la idea de la entrevista diagnóstica.

Es importante mencionar que el investigador L.S. Cox (1975) apoya la idea del proceso diagnóstico a los niños. Cox (1975) considera que primero, se les pasa una prueba escrita sin la supervisión directa del maestro. El maestro necesita ver si el estudiante resuelve y trabaja sin la presencia del maestro. Es bajo esta condición en donde el estudiante debe funcionar. El papel del estudiante debe ser analizada para tabular los errores sistemáticos. Siguiendo el análisis y luego de una diagnosis tentativa, el docente debe observar al estudiante trabajar problemas similares, se debe procurar evitar que la presencia del docente altere el trabajo del alumno. Muchos estudiantes miran al docente para una aprobación o desaprobación no verbal. Luego del anterior procedimiento, el docente debe preguntarle al estudiante que pensó durante el trabajo de los problemas, o hacer que el estudiante diga que piensa mientras trabaja los problemas. La última técnica requiere que el estudiante sea muy explícito verbalmente y muchos de los estudiantes que realizan errores sistemáticos tienen insuficientes competencias verbales. Luego de realizar una serie de métodos de análisis y de observación el docente realiza un diagnóstico sobre la naturaleza del error.

Muchos de los autores anteriores hacen una técnica de entrevista en donde oralmente el estudiante describe su método de cómo procedió a través del algoritmo. Es probable que tal técnica provea una mejor comprensión en el actual entrenamiento del pensamiento lógico (*"train of thought"*) y sobre la causa de errores que el análisis de las pruebas escritas provee. Sin embargo, hay muchos

docentes, que están entrenados para preparar o administrar las pruebas diagnósticas.

Durante las últimas décadas ha sido muy difícil el discernir una investigación sistemática de la teoría del error con la base matemática. En las siguientes décadas es muy difícil discernir entre una investigación sistemática en la teoría del error y la didáctica matemática.

A partir de la década de los sesenta y setenta, se volvieron a estudiar y retomar estos temas: Schlaak (1968), Gluck (1971) y Pipping (1977). Dos importantes estudios continuaron la discusión de distinguir los cinco errores que menciona Gluck fue Pipping. Pipping (1977) considera a los errores como teniendo causa primaria, los mecanismos de psicología de un proceso imitativo. Pipping (1977) considera los esfuerzos dirigidos al estudio del cálculo de los errores de los estudiantes especialmente importante como la habilidad de resolver problemas formales si es necesario como condición para adquirir un alcance en la educación matemática. En la contribución de sobrellevar el pensamiento de los errores, Pipping (1977) trata los errores y dificultades encontradas cuando trabaja con problemas de texto. El investigador Pipping (1977), describe las causas del error en las diferentes etapas del proceso de solución.

En la Unión Soviética los principales referentes son Kuzmitskaya y Menchinskaya (s.f.). Schlaak (1968), ha observado ciertos puntos focales del error: entendimiento inadecuado de los textos, incorrecto número de determinación, entre otros.

En España la década de los años cincuenta, se trata de determinar los errores frecuentes, interpretarlos y presentar bases para la enseñanza correctiva. Gluck (1971) trató los errores como errores de cálculo. Pudo distinguir cinco tipos de errores: cambios de la operación, suma o proximidad multiplicativa, resultados por parte, primer dígito sólo correcto, y copia de errores.

En Estados Unidos de América han continuado las contribuciones a este tópico esencialmente concerniente con las oportunidades que el análisis del error ofrece

al docente de matemáticas, con actividades curriculares y metodológicas adaptadas para éste y con pruebas de eficiencia de programas especiales de entrenamiento para reducir la frecuencia de los errores. Relacionado a estos esfuerzos para sensibilizar a los docentes para el llamado diagnóstico de la enseñanza aprendizaje, en donde el análisis de los errores de los estudiantes juega un papel importante Ashlock (1975), Reisman (1972), Robitaille (1976) o informarles de este método.

Una tercera orientación investigativa puede ser vista en Erlwanger (1973) o Ginsburg (1977) con intentos de utilizar el análisis del error como un método de investigación de estructuras básicas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. En esto las ideas de Jean Piaget están fuertemente influenciadas, ya que sus estudios están predominantemente basados en charlas y entrevistas diagnósticas y en analizar los casos individuales. Para Erlwanger (1973) y para Ginsburg (1977) y otros, la mayoría de los errores de los estudiantes no son de carácter accidental, sino dados por problemas en las estrategias y en las reglas de la resolución de problemas los cuales se inician de la experiencia temprana y de la comprensión conceptual de la matemática. Estos estudios son los más recientes en cubrir investigaciones del análisis del error y sus métodos y en sus consideraciones particulares con soporte fundamentado de estudios de Rusia y de Francia (Brousseau, Jaulin – Mannoni ,1980) (citado por Salin, 1978, 2001)³².

Brikhan (1978) ha utilizado el análisis del error de los estudiantes, como una herramienta de la psicología cognitiva, con el sistema conceptual de la teoría del procesamiento de la información como fondo.

Según Radatz (1979)³³ quien comenta que hay un desacuerdo con respecto a las pruebas basados en norma con respecto a las pruebas basados en criterio al medir los logros en matemáticas, existe un escepticismo que ha aumentado por

³²Salin, M.H. (1978) *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*. Bourdeaux: IREM. Marie-Hélène Salin (2001), *Décrit une situation d'énumération*. Francia.

³³ Radatz, H. (1979, 1980) *Error Analysis in the Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education Vo. 9, 163-172.

los aspectos diagnósticos de la enseñanza. Algunas reformas del currículo en matemáticas conllevan a nuevos errores en los contenidos específicos.

En años recientes se ha incrementado el estudio y análisis del error y no únicamente limitado a evaluar o diagnosticar los errores en el cálculo.

Las razones son estas:

- Desacuerdo y escepticismo acerca de las evaluaciones referidas a normas y criterios referidos únicamente a los resultados en las pruebas en matemáticas ha incrementado la atención a los aspectos del diagnóstico de la enseñanza.
- Reforma del contenido matemático del currículo probablemente derivó no en pocas dificultades y errores, sino derivó en nuevas y en errores de contenido específico.
- La individualización y diferenciación de la instrucción matemática requiere de una hábil y específica diagnosis de las dificultades, modelos de acciones de docentes para el diagnóstico de la enseñanza en qué aspectos del contenido matemático están integrados los hallazgos de la psicología educativa y social. Un análisis de las diferencias individuales, en la ausencia de la consideración del contenido de la instrucción matemática, puede entregar a la práctica docente una instrucción individualizada o proveer de una terapia para las dificultades en el aprendizaje de ciertas tareas.
- Críticas contra los paradigmas tradicionales de la investigación empírica (por ejemplo, la ficción de que existe un estudiante promedio) se ha estimulado otros métodos de investigación de la educación de la matemática (investigación clínica, estudios de casos, didáctica fenomenológica).

La individualización y diferenciación de la instrucción matemática requiere como un proceso de socialización y comunicación en el aula, de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas. Los maestros necesitan modelos de

actuación para diagnosticar la enseñanza en los que los aspectos del contenido matemático están integrados con apoyo de la psicología educativa y social.

En la década de los ochenta, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores no únicamente desde cuestionarios generales sino además el de profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como un recurso para saber en qué están pensando.

Brousseau, Davis y Werner (1986) plantean que, según cómo el estudiante resuelve las tareas o situaciones matemáticas, el docente lo interpreta como una forma original e inusual o, se le diagnostica como un error. En ambos casos las ideas de los alumnos no son las que el docente espera. Describen, además, que los errores que cometen los alumnos muestran en algunos casos un patrón consistente, los alumnos con frecuencia realizan concepciones inadecuadas (*misconceptions*) sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores, llegan a utilizar en algunos casos métodos propios ignorando el método propuesto por el docente. Esto muestra y señala posibles rutas en las cuales el error puede presentarse como consecuencia de concepciones inadecuadas, como de aplicación de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, como consecuencia del uso de métodos propios carentes de referencias o conceptos básicos del estudiante inexperto y, en general los del tipo informal.

Otro referente son las investigaciones de Mulhern (1989) que hace una caracterización de los errores como que surgen espontáneamente, son persistentes, particulares, difíciles de superar, predominan los sistemáticos, con respecto a los errores por azar u ocasionales. No son conscientes por parte del alumno, algunos surgen de la comprensión que hace el alumno de la información dada.

A continuación, se muestra la variedad de métodos de investigación que se habían utilizado hasta finales de los ochenta para el estudio de los errores en matemática:

- Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas (método diagnóstico de orientación psicométrica)
- Análisis de los tipos de errores cometidos: técnica que implica la clasificación de errores y el análisis de cómo se desvían los errores de la solución correcta para hacer inferencias sobre los factores que han originado el error
- Análisis de patrones de error que se dan en problemas contruidos para provocar errores: técnica que permite observar los patrones de error que cometen los individuos y especular sobre las posibles causas de estos errores y se basa en el supuesto de que nuevos problemas de la misma naturaleza conducirán a errores similares.

En la Unión Soviética, un número de preguntas y problemas surgió por el cambio fundamental en la estructura educativa y la reforma curricular relacionada al empiezo de los sesenta. Estos problemas tendieron a enfocarse en muchos esfuerzos de investigación pedagógicas didácticas. Entre estos el analizar los errores de los estudiantes o las dificultades del aprendizaje académico individual son los métodos favoritos para ganar el nuevo aprendizaje de las específicas habilidades matemáticas y a los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. Fundamento que se vio bloqueado, por la psicología marxista y por mucho tiempo estas investigaciones no fueron diseminadas al mundo occidental sino muchos años luego de la apertura soviética a principios de los ochentas.

Ejemplos de esta visión, son los estudios de Kuzmitskaya (s.f.) y de Menchinskaya (s.f.) citado por Engler *et al.*, (2006). Kuzmitskaya determinó cuatro causas fundamentales del error en sus estudios sobre las dificultades encontradas en estudiantes con memoria a corto plazo, insuficiente comprensión a las condiciones del problema, ausencias de las competencias de reglas de cálculo

oral, y un incorrecto uso de las cuatro operaciones básicas aritméticas: suma, resta, la multiplicación y la división.

El Dr. Luis Rico (1995) hace un vasto estudio sobre el análisis, causas, elementos, clasificaciones de los errores, trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores, estudios de la formación de los docentes en cuanto a su capacidad para tratar con los errores. Incluye, trabajos técnicos que consideran las técnicas estadísticas como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

El investigador, Socas (2008) explica en su estudio que los errores que se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, se delimitan cuatro etapas: errores de origen en la aritmética, de procedimiento, debido a características propias del lenguaje o símbolos matemáticos y errores de origen en actitudes afectivas o emocionales.

4. Especialistas notables en el desarrollo del estudio del error en la matemática sobre la categorización y clasificación. Estudios. La categorización nos permite atender a los diferentes aspectos, una evaluación y diagnóstico más eficaz, ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y al desarrollo de una actitud racional.

El análisis del error en la educación matemática posee una extensa historia, y está caracterizada por muchas y variados enfoques e intereses, los cuales fueron moldeados por la corriente contemporánea de las ciencias concernientes a la pedagogía y a la psicología y por los objetivos y formas de organización determinadas por las respectivas políticas educativas. Tres enfoques principales o tendencias se pueden encontrar:

- Aritmética la cual constituye la materia dominante por la mayoría de los estudios
- La teoría del error fue desarrollada en Alemania esporádicamente entre grandes intervalos y con poca continuidad, como fue lo opuesto en el desarrollo en Estados Unidos.

- Se presenta un pluralismo de los enfoques teóricos y de los intentos exploratorios sobre las causas del error en los estudiantes en el proceso de aprendizaje matemático, mientras las técnicas del error en ciertas materias pueden ser descritas en breve.

A continuación, se presenta una serie de autores investigadores en la matemática especialmente en el estudio del error:

a. L. Thorndike (1922) *The Psychology of Arithmetic*. Los cambios en la educación enfatizaron el estudio desde un nuevo punto de vista concerniente al proceso general del aprendizaje en la aritmética. En este estudio, se plantea que se entiende que el aprendizaje es esencialmente la transformación de las conexiones o uniones entre las situaciones y las respuestas, de que el nivel de satisfacción en el resultado es la fuerza primordial que los forma, y las reglas del hábito en la conformación del pensamiento lógico es verdaderamente importante para la adecuación de la acción de sumar, restar, multiplicar y dividir. En segunda instancia es el gran incremento en el conocimiento de la cantidad, razón, y condiciones de superación en todos estos grupos organizados de jerarquías de hábitos los cuales llamamos habilidades, como la habilidad para sumar o la habilidad para leer. La práctica y la superación no son generalidades vagas, pero cambios concernientes los cuales son definidos y medibles por pruebas estándares y de escalas. En tercero, es ahora mejor el entendimiento de la llamada análisis de la abstracción de los procesos superiores ("*higher processes*"), la noción de formaciones generales y del razonamiento.

La visión anticuada en donde las sensaciones son conformadas a preceptos, los preceptos fueron duplicados por imágenes, preceptos e imágenes son amalgamadas a abstracciones y conceptos, y estas son manipuladas por el razonamiento ha dado lugar al entendimiento de las respuestas de las leyes de los elementos o a los aspectos de las situaciones matemáticas.

La psicología de las materias escolares está sujeta o empiezan en nuestro sentido común y trata de definirse el conocimiento, el interés, poder, habilidad o bien el ideal en cuestión. Es importante diagnosticar las tendencias originales y

las ya adquiridas antes de iniciar el ciclo escolar lo cual ayuda u oculta el progreso en las materias escolares elementales, para examinar los motivos que pueden o no ser utilizados para realizar las conexiones deseadas para satisfacer el examinar cualquier condición especial de mejora y de notar cualquier factor concerniente a las diferencias individuales que son de especial importancia para conducir el trabajo en el nivel primario escolar matemático.

Thorndike (1917) apoyó el estudio sobre el aprendizaje “prueba y error” parte de una psicología conductual condicionamiento clásico (Pavlov, 1900). Es un aprendizaje reflexivo (insight learning), un aprendizaje latente (latent learning) y un aprendizaje tipo observacional (observational learning).

La ley de la práctica es base fundamental del aprendizaje prueba y error ya que se aprende de hacer repeticiones de tareas. Se enfatiza la ley del uso, la ley del desuso y la ley del efecto. Bajo la ley del efecto, se produce una satisfacción que se deriva de la repetición, el cual crea una recompensa de sentir que logra alcanzar entender el tema o concepto). La ley del efecto va muy ligado a la ley de la motivación que apoya en continuar con el aprendizaje. Thorndike establece que la clave del aprendizaje es la emoción y la repetición de hacer los ejercicios en forma “correcta” o “fluida” ayuda a apoyar realizar la conexión con bienestar y auto recompensa. Si el estudiante, percibe una recompensa positiva el efecto en el aprendizaje tiene mayor alcance.

b. Walter S. Monroe (1926) *“Ten years of Educational Research: Project V Analysis of arithmetical abilities and study of pupils’ errors.”* Monroe (1926) explica, que el propósito de la enseñanza de la aritmética es apoyar a los estudiantes a prepararse con un equipamiento mental necesario para responder satisfactoriamente a ciertos tipos de situaciones matemáticas que pueden encontrar en su experiencia escolar y luego del colegio. Esta es la habilidad a la aritmética que se debe fomentar. Las habilidades o competencias aritméticas indican que consisten en muchos elementos. El estudiante debe dominar el concepto del número, vocabulario de la aritmética, además de dominar las cuatro operaciones fundamentales, los pasos para las divisiones largas se deben hacer

en una secuencia ordenada, el procedimiento apropiado, el uso del cero en situaciones en el cociente y finalmente reconocer cuando el proceso está completo y correcto. Por concepto del número se dá a entender cómo los números (figuras) representan a los números.

Es evidente que los niños deben desarrollar la habilidad del concepto del número rápidamente que representa cada figura (número) de acuerdo con su valor de lugar, y permitir comparar los números como a su magnitud. Esto es, cada niño debe reconocer y saber rápidamente que 8 es mayor que 4. A su vez, también el concepto del número debe reconocerse como la habilidad de distinguir entre sumar, restar, multiplicar y dividir. El niño debe comprender lo que significan palabras como tiempo, sumar, adicionar, cociente y otras palabras que son útiles para trabajar las divisiones largas.

Los pasos que los niños deben dominar en orden secuencial son dividir, multiplicar, comparar, restar, comparar y bajar el siguiente dígito. El conocimiento de un procedimiento apropiado en una división larga incluye la habilidad de realizar correctamente los pasos para la gran división en orden de secuencia, el apropiado puesto de las figuras de los cocientes y conocer cuando el ejercicio es correcto o no está correcto.

Poseer toda esta información y habilidades relacionadas como conceptos, apoyan a los niños a desarrollar el correcto desarrollo de los procesos de la división larga. El hecho es que, muchos niños no resuelven los problemas de las divisiones largas adecuadamente, por lo que el análisis de los errores de los niños en las divisiones (largas) pueden probar que puede ser un concepto y estudio de retroalimentación importante.

Este estudio sobre las divisiones largas fue hecho posible por la cooperación de los administradores de las escuelas públicas de Arizona. Se aplicó a cuatro escuelas. Escuela I (4 A), Escuela II (5 A), Escuela III (6 A) y Escuela IV (4 A, 5 A y 6 A), haciendo un total de seis grupos en cuatro escuelas diferentes.

La prueba se administró a 164 niños. Las pruebas se dieron en mayo 10 a las 14 y dos semanas antes de cerrar el ciclo escolar 1936 al 1937. Al terminar el semestre fue escogido como el mejor tiempo para administrar las pruebas de 4o grado ya había cubierto todo el material de las divisiones largas. Se incluyeron en esta investigación los grupos de los siguientes grados en primaria: 4 grado A un grupo de 55 estudiantes; 5º grado A un grupo de 56 estudiantes y para 6º grado A un grupo de 53 estudiantes.

Las pruebas incluyeron dos partes, de 30 minutos cada una, en dos días consecutivos, 24 horas entre una y otra parte. Todos los estudiantes tomaron la prueba y fueron analizadas, excepto tres que no se completaron porque estuvieron tres ausencias en la segunda parte de esta prueba. A los alumnos no se les pidió que lo hicieran rápido, pero se les pidió hicieran lo mejor posible. La maestra de grado en el tiempo de la prueba estaba presente pero no administró las pruebas. En orden de aprender de los errores los alumnos deben enfocarse en los elementos que los alumnos son deficientes. Se preparó una prueba de 60 minutos. La prueba incluye situaciones con: un residuo, no residuo, un cero en el cociente, dos ceros en el cociente, un cero al final del cociente, ceros dispersos en el cociente y pruebas de cocientes.

Las divisiones largas se quebraron en varios elementos, en partes. Estos elementos se agruparon en varias secciones que pueden revelar errores de un tipo particular de alumnos que fueron susceptibles a cometer dichos errores. El partir estas divisiones por partes sirve para doble chequear los errores de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Se realizó un análisis crítico se hizo de todos los errores de las 164 pruebas. Hubo 17 ejercicios de sumas en las preguntas aisladas, hubo 164 alumnos que hicieron la prueba, por lo que resultaron 278 tipos de errores en la suma. Se presentaron 36 errores en la suma por lo que el 1.29% de los errores fue hecho por los 164 niños en la suma. Los porcentajes de los procesos fundamentales de mayor a menor frecuencia son: división, resta, suma y multiplicación.

Las características de los problemas en aritmética se los clasifica en problemas de error o categorías de errores de: Simple terminología (S), Terminología técnica (T), Error en abstracción (A), Error en concreto (C), Error de no considerar toda la información (R), Error de incluir datos irrelevantes (I).

c. Buswell and John (1926) "*Diagnostic Studies in Arithmetic*". Buswell and John (1926) (citado por Blankenship, 1978)³⁴, condujeron un experimento analizando el trabajo aritmético. Analizaron para entender el error del trabajo de cientos de niños. Las conclusiones muestran las frecuencias de errores que ocupan un orden. Se realizaron comparaciones, a mayor grado, más deficiente es la suma. Debido a menores prácticas o los alumnos son más errores del tipo dejadez "*careless*".

Las restas están mejor al avanzar de grado. Una explicación a esta situación fue grandemente especulativa, es que la resta es mejor a mayor grado que se avance debido a la madurez que se obtiene de la práctica y por el avance de la edad o madurez de los alumnos. El grado 4º sección A pasa en habilidad de matemática a los estudiantes de 5º grado sección A (*law of recency*). Los de 6º grado sección A se desempeñan mejor en las multiplicaciones.

El error de escribir cero en el cociente es un tipo de error que se evidencia. Se aconseja que los alumnos puedan poner flechas a los dígitos los cuales hay que bajar el dígito. El mayor número de errores es en la resta. Otro error es poner cero en el cociente. Muchos cometieron el error de poner el cero en el dividendo y otros estudiantes, fallaron al incluir dos ceros en el cociente.

d. Newman, Ann (1977) "*An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks*". Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39, 31-43. Australia. Desde el año 1977, la educadora matemática australiana Ann Newman (1977) sugirió cinco esquemas significativos para ayudar a determinar cuáles errores pueden ocurrir durante los intentos de los estudiantes en solucionar

³⁴ Blankenship, Colleen (1978) *Remediating Systematic Inversion Errors in Subtraction through the use of Demonstration and Feedback*. Vol 1, Issue 3 Learning Disability Quarterly, 12 – 22.

los problemas. Una gran corriente de investigadores publicó luego de este estudio muchos estudios del error: Casey (1978); Clarkson (1980, 1982, 1991); Clements (1980, 1982); Marinas & Clements (1990); Watson, (1980); Hollander (1978); Lankford (1974); Radatz (1979); Dickson, Brown & Gibson (1984); Mellin-Olsen (1987); Zepp (1989) y Clarke (1989).

En el modelo de análisis del error de Newman (1977), los estudiantes pueden hacer equivocaciones al responder las preguntas o enunciados matemáticos por diversas razones. La investigación de Anne Newman elabora en los diversos inconvenientes, dificultades u obstáculos (*“hurdles”*) que los estudiantes pasan y se tropiezan al responder un problema contextual de matemática. Los obstáculos más conocidos por los docentes son el de lectura y el de comprensión.

La investigación de Ann Newman en Australia y en Sud Asia encontró que el 60% de los errores de los estudiantes al responder las preguntas escritas de enunciados matemáticos ocurre antes que los estudiantes lleguen al nivel de habilidades o destrezas de procedimiento (*“Process Skill”*). En contraste para algunos programas de mejorar el rendimiento educativo de los estudiantes que se enfocan únicamente en la parte de habilidades o destrezas de procesos.

Newman preparó las siguientes preguntas:

- Por favor lea la pregunta para mí. Si no sabe la palabra, entonces déjela y continúe leyendo.
- Cuente qué es lo que la pregunta le pide realizar
- Cuente qué hará para resolver y lograr la respuesta o solución
- Muestre cómo obtiene su respuesta. Platíquelo o *“talk aloud”* mientras lo realiza, para que yo pueda entender lo que usted está pensando.
- Ahora escriba el proceso y la respuesta a la pregunta

Durante el punto “Muestre como obtiene su respuesta”, escuche detenidamente lo que el estudiante dice y decide. En este punto el estudiante muestra sus puntos de debilidad, dificultad o error (o equivocación) si lo presenta.

Luego, clasifíquelo según la Tabla 1. Lista de Obstáculos (ver página 63) que se encuentran en los estudiantes. La investigadora Newman (1977) hace las siguientes consideraciones: al conducir la entrevista trate de hacerlo en una forma muy amigable. Aclare que al hacerlo de esta forma está apoyándolo en su aprendizaje de la matemática. Explique en qué consiste esta metodología de que le hará una serie de preguntas. Anime a el estudiante a mostrar su trabajo no diga nada hasta que todo termine. No apoye durante el proceso de preguntas y respuestas al estudiante y preste atención cuidadosa a todo lo que el estudiante le indique. Escoja entre la clasificación del error (según Ann Newman), cual le corresponde al estudiante en dado caso que se equivoque o cometa un error.

Para el problema que se pueda presentar, si el alumno tiene un error del tipo Lectura radica en que los estudiantes no pueden leer las palabras o símbolos correctamente y los estudiantes no pueden entender el significado de dichos símbolos o palabras. Una solución, es el de apoyar en que tenga un apoyo en la lectura en clase, un apoyo puntual en casa de los padres de familia o tutores y que se realizan muchos ejercicios de lectura de enunciados tipo problema y tablas describiendo situaciones o fenómenos constantemente y que los interpreten en clase.

En el problema que se presenta de comprensión, lo que es mejor es el de asegurarse que el estudiante entienda el vocabulario utilizado en los problemas, que se familiaricen los estudiantes que las características del texto y enseñar a los estudiantes a cómo identificar y utilizar vital e importante lenguaje matemático. Para las estrategias de apoyo en este error es de fomentar un currículo de enunciados en donde deben interpretarlo en forma literal, interpretativo ú oculto e inferencial o lógica.

Muchos estudiantes pueden encontrar que se pregunta en un problema matemático, pero no significa que entiendan lo que se pide encontrar en un problema. Las estrategias para la mejora en la comprensión son estrategias del tipo cognitivo y metacognitivo los cuales son utilizados para lograr alcanzar una

mejor comprensión: realizar ejercicios de hacer conexiones, predecir, cuestionar, monitorear, visualizar y resumir o sintetizar.

Para realizar una estrategia de comprensión metacognitiva los estudiantes deben realizar una conexión personal sobre los temas con algo que se relacione con sus propias vidas o experiencias, otro documento que tengan para relacionar lo aprendido como un texto y algo que esté ocurriendo en el mundo (texto al mundo). Para que los estudiantes comprendan debe entender qué es lo que realmente saben del problema y si han elaborado o trabajado algo similar anteriormente.

Los estudiantes deben utilizar la información de las gráficas, textos o bien experiencias para anticipar qué es lo que esperan ver u obtener y activamente ajustar la comprensión mientras leen. Especialmente se preguntan: ¿qué es lo que la operación en el problema espera haga, la respuesta es mayor o menor que los números que cuenta ya enunciados el problema, que espero encontrar en el problema y cuáles de mis predicciones son acertadas y por qué? Cuando se cuestionan en esta fase los estudiantes ponen y responden a preguntas para clarificar el significado y promover un profundo entendimiento del texto. Las preguntas pueden ser generadas por el estudiante, compañero o del docente. ¿Qué información del problema me ayuda a reconocer que se debe hacer? ¿Cuándo se lee el problema le recuerda a uno algo que uno haya conocido o hecho antes?

Durante las situaciones matemáticas, los estudiantes paran a pensar sobre el texto y que deben hacer cuando el significado es interrumpido. ¿El problema hace sentido? ¿Necesito releer o ver el problema de nuevo? ¿Qué me puede apoyar para completar la información perdida? Visualizando, los estudiantes crean una imagen mental del texto que leen o revisan. La visualización brinda al texto a la vida, motiva a la imaginación y utiliza todos los sentidos. ¿Cómo puede representar visualmente el problema? ¿Puedo yo describir la visión que yo realizo del problema? ¿Cómo lo que se visualiza apoya en comprender el problema? Sintetizar, los estudiantes identifican y acumulan las más importantes ideas para

reafirmarlas en sus propias palabras. ¿Cuáles son las ideas principales y el detalle del significado en el problema? ¿Si le dice a otra persona como resolver el problema como lo cuenta a otros? ¿Qué información le ayuda a resolver el problema?

Para sobrellevar este obstáculo, los estudiantes deben construir una representación visual del problema es decir un diagrama o mapa mental. Luego el problema debe moldearse en diversas formas, una buena comprensión de los textos matemáticos apoya a la transformación. El escribir sus propios problemas puede apoyar en construir la familiaridad necesaria característica de los problemas tipo palabras. Tener distractores en los problemas lo que ayuda es a forzar a explorar un rango de estrategias para resolver problemas. Tener los textos alterados para diferentes operaciones y hacer que los estudiantes identifiquen las palabras principales y las claves que pueden apoyar la selección de las operaciones. Explícitamente discutir las claves visuales dentro de cada diagrama.

Los estudiantes deben indicar la estrategia a seguir para encontrar la respuesta: para este punto la función de comprender le toma sobre la función de lectura. El enlace entre la comprensión y la transformación es muy fuerte y puede requerir que el estudiante vaya a través de varios ciclos para preguntar por la pregunta y trate de encontrar formas de encontrar la respuesta. La densidad del lenguaje de la matemática es útil para encontrar si contiene lo necesario para resolver el problema. ¿Leer la primera oración para ver qué quiere decir que es lo que se sabe? Realizar los mapas mentales para asistir a los estudiantes y desarrollar un lenguaje de las matemáticas.

A continuación, se muestra la Tabla 1. Lista de obstáculos que se encuentran los estudiantes según la Categorización del Error de Ann Newmann y describe los procesos de lectura, comprensión, transformación, habilidades de proceso, decodificar y de descuido.

Tabla 1. Lista de obstáculos que se encuentran en los estudiantes.

Proceso	Traducción al español	Descripción
<i>Reading</i>	Lectura	Lee el problema. El estudiante no puede leer un símbolo, numeral o palabra clave del problema al punto que no le permite proceder.
<i>Comprehension</i>	Comprensión	Comprende lo que lee. El estudiante puede leer todo el enunciado o problema matemático, pero no logra entender el significado de todas las palabras o símbolos por lo que no puede continuar el proceso de resolver
<i>Transformation</i>	Transformación	Busca realizar una transformación con las palabras del problema para la selección de la estrategia matemática apropiada. El estudiante puede leer, interpretar ya que entiende lo que se le pide, pero no puede identificar la operación matemática o secuencia de operaciones necesaria para resolver el problema.
Process Skills	Habilidades del Proceso	Aplicar las competencias, habilidades o destrezas necesarias para seleccionar la estrategia a utilizar para resolver y obtener la respuesta utilizando procedimientos
<i>Encoding</i>	Decodificar	Decodificar la respuesta en una forma aceptable. Encontrar la respuesta al problema o enunciado matemático. ¿Puede el estudiante interpretar sus respuestas en relación al problema?
<i>Careless</i>	Descuido	Si un estudiante falla un proceso de obtener la respuesta y es incorrecta y el estudiante solicita hacerlo de nuevo porque sabe que no está bien la respuesta y realiza todo el proceso por segunda vez y obtiene la respuesta correcta entonces el docente interpreta que el estudiante tuvo un descuido y de esta forma se clasifica el error.

Fuente: Elaboración propia (2017), según Ann Newman (1977)

Es importante preguntarse: ¿Cuál es el problema de los enunciados de palabras en matemáticas? Lo que deseamos es que los estudiantes piensen acerca de cómo los números están relacionados en un problema con cada uno.

Para ello, se les exhorta a los estudiantes que elaboren un diagrama. Los diagramas pueden ser utilizados para proveer de un marco referencial de trabajo y utilizar los diagramas como herramientas de pensamiento. Un diagrama tipo película (“*tape diagram*”) ofrece a los estudiantes de una herramienta de pensamiento para visualmente representar un problema matemático y transformar las palabras en una operación numérica apropiada. Enseñando transformación con los diagramas tipo película (“*tape*”). Para la parte de habilidades en procesos, se pueden apoyar los estudiantes en recursos de conteo con los dedos, libros educativos en matemática, juegos de contar, unidades de trabajo, trabajar patrones y álgebra, juegos de fracciones y apoyo con la tecnología que busca aumentar los cálculos mentales y la solución de problemas utilizando la lógica matemática.

Lo que es importante apoyar, es que el estudiante no adivine la respuesta sin antes comprender el problema, por lo que pueda habituarse a utilizar sistemáticamente un proceso incompleto o incorrecto. Debe preguntarse qué es lo que necesito saber, ¿comprender y conocer para encontrar la respuesta? Apoyar en realizar un link de palabras que puedan asociarse a el proceso. ¿Por último al encontrarse en la fase de decodificar (*encoding*) deben preguntarse qué hace sentido?, Si la respuesta corresponde a la pregunta que se hace? Piensa en las formas de registrar la respuesta. ¿Utiliza las unidades correctas?

Por último, escribe la respuesta a la pregunta. Al escribir la respuesta hay que tener en cuenta que algunos estudiantes pueden olvidar que en realidad pregunta el problema especialmente en preguntas de medición y no responden a la pregunta utilizando las unidades correctas. Una estrategia didáctica podría ser en hacer que antes de entregar el trabajo los estudiantes releen la pregunta y lo comparen con la forma que responden.

e. Radatz, Hendrik (1979) *Student's Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey*. Comenta que los errores son el resultado o el producto de experiencias previas en el aula de matemáticas. Los errores de los estudiantes son determinados por casualidad y son muy sistemáticos, son

persistentes y pueden tardar muchos años sin la adecuada intervención del docente. Los patrones de errores, pueden ser analizados y descritos con técnicas diagnósticas de error. Los errores pueden ser derivados como de otras causas, de ciertas dificultades experiencias previas, mientras reciben y procesan la información en el proceso de aprendizaje matemático o de los efectos de interacción con variables actuando sobre la educación matemática (el docente, currículo, estudiante, ambiente académico, entre otros).

El investigador Radatz (1979), clasifica los errores a partir del procesamiento de la información como errores debido a dificultades del lenguaje, a dificultades para obtener información espacial, a un lenguaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Los errores de los estudiantes ilustran dificultades individuales, ellos muestran que los estudiantes han fallado en entender o entender conceptos, técnicas o problemas en una forma científica o adulta. Al analizar los errores en los estudiantes puede revelar una falta en el proceso de solución de problemas, y proveer información en las actitudes para la resolución de problemas.

De esta perspectiva, el análisis del error gana su importancia relacionado con dos aspectos. Primero, en el tema de los requerimientos de la práctica académica, como una oportunidad de diagnosticar las dificultades del aprendizaje, y como un método de desarrollar el criterio para diferenciar la educación matemática, y como un medio para crear mayor conciencia y apoyo para el desempeño y entendimiento de los estudiantes. Segundo el análisis del error parece ser un punto importante para empezar la investigación de la enseñanza aprendizaje matemático. El análisis del error puede ser considerado una prometedora estrategia de investigación para clarificar algunas preguntas fundamentales del aprendizaje de las matemáticas.

Así mismo, Radatz (1979) estaba preocupado de apuntar la lógica y el carácter regular de la mayoría de las equivocaciones en la educación matemática y con el intento de reagrupar las causas del error a través de áreas de contenido

matemático de acuerdo con ciertos aspectos de recibir y procesar la información por los estudiantes. Se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesores, currículo, contexto (sociocultural, institucional) y de sus interacciones lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las matemáticas y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos.

Por último, Radatz (1979) teniendo presente la teoría de procesamiento de la información sugiere que el modelo que provee la clasificación de las causas del error se describen por cinco mecanismos que hacen inclinarse al error a través de diversos tópicos matemáticos: errores debidos a dificultades del lenguaje, errores de obtener información espacial, errores debido a una deficiente habilidad de habilidades, hechos o conceptos previos, errores ocasionados por una incorrecta asociación o rigidez del pensamiento y de errores debido a una aplicación de irrelevantes reglas o estrategias.

f. Van Lehn, Kurt (1980) *Repair Theory: A generative Theory of Bugs in Procedural Skills*. Este estudio hecho desde el centro de investigaciones de Xerox Palo Alto, describe la teoría generativa de los “bugs” o errores del tipo patrón. Este describe que todos los patrones de errores del tipo habilidades procedurales pueden ser derivadas de una gran problemática en la forma de solucionar problemas actuando en procedimientos incompletos. Estos procedimientos están caracterizados por una omisión en las operaciones que modelan un aprendizaje incompleto y de olvido. El solucionador de problemas y el operador omitido han sido contenidos para hacer imposible el derivar errores de patrón en los algoritmos que son tan obvios que los expertos diagnosticadores acuerdan que el algoritmo nunca será observado como un patrón de errores. La teoría no sólo genera los errores de patrones observados, sino que además genera errores en el algoritmo. La teoría ha sido probada en una extensa base de datos de patrones de errores para restas de varios dígitos que fue recolectada con la ayuda de sistemas de diagnóstico llamado BUGGY y DEBUGGY. En suma, para predecir la ocurrencia de patrones de error, prediciendo la frecuencia y la

estabilidad de los patrones de error, como también la ocurrencia de ciertas fallas en el proceso durante la prueba. Los argumentos son dados que la teoría puede ser aplicada a los otros dominios de la resta y de que pueden ser extendidos para proveer de una teoría de aprendizaje procedural que tome en cuenta los posibles patrones de error. En definitiva, se debe tomar un especial cuidado en hacer que la Teoría de la Reparación no se pueda alterar para evitar los errores.

El estudio de Van Lehn (1980), presenta los esfuerzos actuales en formar una teoría generativa de patrones de errores durante las habilidades procedurales o momentos procedurales de los alumnos. Dado una habilidad procedural, este predice que error sistemático o patrón de error (*"bugs"*) pueden ocurrir en el comportamiento del aprendizaje de la habilidad de los estudiantes.

En otro estudio realizado por Van Lehn (1982) con un grupo de 895 estudiantes de tercero, cuarto y quinto grado de primaria de una escuela en Nicaragua, 182 (20%) son analizados por el sistema DEBUGGY como se conocía el correcto algoritmo de la resta, pero hacían un error tipo dejadez o *"careless"* durante las pruebas de matemática. Cuando se pasó la prueba nuevamente la mitad de los estudiantes que lo habían resuelto correctamente en la segunda vez realizaron errores por omisión o dejadez. Estos resultados evidencian que los errores por dejadez son no intencionales, son errores de omisión y que no requieren mucho cuidado por parte de los docentes, estos errores son del tipo ruido en el proceso más que un error del tipo conceptual.

Los otros 80% de errores cometidos por los estudiantes al realizar las pruebas de matemática son del tipo sistemáticos y es conveniente prestar mucha atención y tratarlos ya que son identificados como errores referentes al dominio o referidos al criterio. Entre estos 80% de errores se clasifican en las siguientes proporciones: 60% de los errores presentan de uno a un error y el 20% errores que presentan reparaciones no efectivas y errores que no se pueden clasificar o categorizar porque no se entienden que representan.

En los últimos años, este grupo de investigadores de las teorías de los patrones de error o *'bugs'* se han encargado de utilizar las herramientas computacionales

para modelar técnicas de la ciencia cognitiva en orden de construir sistemas de diagnóstico sistemático de errores de los estudiantes. Estos sistemas de diagnóstico BUGGY o más recientemente DEBUGGY, han sido utilizados para analizar miles de trabajos de los estudiantes (Brown and Burton, 1978; Burton, 1981; Van Lehn&Friend, 1980) y han permitido a los investigadores el construir un catálogo extensivo de 96 tipos de errores sistemáticos de errores o patrones de errores para la resta (*"place value subtraction"*). Muchas otras investigaciones de los errores en la aritmética han descubierto el mismo fenómeno de patrón de errores (Buswell, 1926; Brownell, 1941; Roberts, 1968; Lankford, 1972; Cox, 1975; Ashlock, 1976; Young & O'Shea, etcétera).

Los errores son sistemáticos si existe un procedimiento que produce respuestas erróneas. En la mayoría de los casos, hemos encontrado los errores sistemáticos como pequeñas perturbaciones del correcto procedimiento para esa habilidad. Precisamente definidos variaciones de errores al procedimiento son conocidos como patrones de errores o *"bugs"*. Para decir que cierto sujeto tiene un cierto patrón de error es predecir no sólo cuáles problemas el estudiante, va a responder incorrectamente en una prueba sino también el predecir que dígitos de estas respuestas. Hay una probabilidad que los patrones de errores sean al azar. Sin embargo, los patrones de errores son complejos, acciones intencionales reflejando creencias erradas sobre una habilidad. Esto no quiere decir que los errores al azar, por dejadez y no sistemáticos también ocurran. Estos pueden ocurrir, pero estos tipos de errores se les considera como deslices, donde el estudiante, hace algo que no era su intención realizar (Norman, 1979).

El sistema de la Teoría de la Reparación de patrones de errores BUGGY y DEBUGGY provee una notación precisa para describir los patrones de errores y es una herramienta de diagnóstico poderosa que podemos utilizar para alcanzar grandes cantidades de datos de los estudiantes en búsqueda de errores no contabilizados., los cuales luego deben ser analizados a mano para determinar si ellos derivan de un nuevo tipo de patrón de error.

Así mismo, esta base de datos de patrones de errores es extensa y apoya en estudiar preguntas más profundas sobre el error, por ejemplo, qué causa los errores y porque sólo estos tipos de patrones de errores predominan. A la vez, se hizo un esfuerzo por explicar los errores de los estudiantes como síntomas manifestados por patrones de error en un procedimiento “correcto”, el actual esfuerzo es explicar estos errores conocidos en términos de un conjunto de principios formales que transforman una habilidad de procedimiento (*“Process Skill”*) en todas sus posibles variantes de error. Se le llama al conjunto de principios que los interpreta como una teoría generativa de patrones de error y lo cual conlleva a errores del tipo sistemático.

Muchos patrones de error aparecen con una base racional. Esto es, que es fácil construir una teoría del patrón de error de como cierto error ha sido adquirido por el estudiante. Los modelos de errores se pueden construir editando un modelo de habilidad del proceso que sea correcta de tal manera, que la mayoría de las ediciones tengan soporte de explicaciones admisibles.

g. Robert B. Davis (1984) *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. En este documento de investigación se refiere a los errores como tipo “bugs” o patrones de errores, como es usualmente utilizado en la computación, referido como una falla específica en un procedimiento. Este término se utiliza para analizar el trabajo de los estudiantes en matemáticas (citado por Brown y Burton ,1978). Lo que es novedoso de estos análisis es su especificidad y su determinismo. Los errores de los estudiantes no son causa del azar como las personas imaginan. Al contrario, los errores de los estudiantes son muy regulares y sistemáticos y es posible predecir exactamente cuál respuesta errada es la más posible que sea dada por un estudiante particular.

Desde tiempos de Sigmund Freud, la confusión lingüística otorga claves del proceso de pensamiento humano. Respuestas sistemáticas del error están dados por el estudiante y pueden otorgar claves de cómo el estudiante piensa sobre ciertos problemas en matemática. Esta investigación se enfoca en especificar los tipos de errores.

El concepto de estructura o marco conceptual puede o no proveer una correspondencia con la data de entrada de datos primitiva ("*primitive input data*"). Es muy relacionado a los conceptos de Piaget sobre la asimilación y la acomodación. Cuando el juicio es hecho de tal forma que el marco conceptual corresponde con la entrada de datos podemos decir que la asimilación ocurre. Si este juicio es tal que la correspondencia es no aceptable, tenemos una precondition por la acomodación que se hace, por lo que más pasos son necesarios antes de que la acomodación puede ser considerada completa. Puede ser que lo que se necesita es una recopilación de un nuevo marco conceptual. Una vez que un marco conceptual "*mindset*" es aceptado el subsecuente procesamiento de información utilizada es instaurada como el verdadero marco conceptual en la parte cognitiva del alumno o en su personal base de datos cognitiva.

Algunos errores clasificados son: errores clásicos son reversiones binarias ($4 \times 4 = 8$); errores inducidos por el lenguaje o la notación $2x - x = 2$; errores por recuperación de un esquema previo; errores producidos por una representación inadecuada y, errores por reglas que producen reglas.

h. Booth, Lesley R. (1984) *Álgebra: Children's strategies and errors*. Esta investigación es un Proyecto sobre los conceptos de las matemáticas a nivel secundaria (diversificado) titulado "*Concepts in Secondary Mathematics and Science Project*". Identifica tanto la jerarquía de niveles del entendimiento en las diversas áreas del nivel secundario y el número de errores particulares y las estrategias que aparecen que den lugar a sugerir que el uso de métodos informales en procesos matemáticos ha surgido y conlleva una limitada aplicabilidad y es usual en la mayoría de los estudiantes de Londres, Reino Unido.

Se sugiere que deben aparecer dos sistemas de matemática que coexistan a nivel del aula en secundaria: a nivel de instrucción formal y otro sistema de métodos incorporados al alumno el cual estaba basado en un sistema de recuento, adición y de construcción y por el cual los alumnos intentan resolver problemas matemáticos utilizando un marco referencial con sentido humano

(“*human sense framework*”). Las dificultades que algunos estudiantes tienen en matemáticas son sugeridas en parte, por ésta no apropiada iniciación hacia un sistema de instrucción formal. La implicación para esta visión de este tipo de instrucción e investigación está contraindicada en esta investigación.

Los errores son atribuidos a la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras. El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas es en el álgebra. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes. El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento se considera importante abordar.

i. Movshovitz – Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) *An empirical classification model for errors in High School Mathematics*. Clasifican empíricamente a partir de la construcción de las soluciones de los alumnos los datos mal utilizados, la interpretación incorrecta del lenguaje, inferencias no válidas lógicamente, teorema o definiciones deformados y la falta de verificación en la solución como en los errores técnicos.

Este estudio, pretendía analizar los errores a nivel de secundaria, ya que la mayoría de los estudios han sido para analizar errores en la aritmética en primaria. Este estudio, presenta seis categorías de error: datos mal utilizados, lenguaje malinterpretado, inferencias lógicas inválidas, teoremas distorsionados, soluciones no verificadas y errores técnicos. Muchos de los estudios del estudio del error han sido elaborados para listar todas las técnicas potenciales de errores, determinar la distribución de frecuencias de estos errores técnicos por los grupos por edad, analizar las dificultades particularmente las encontradas cuando se hacen las divisiones y cuando se opera con el cero, determinar la persistencia de los errores técnicos individuales y clasificar los grupos de errores o categorización de errores.

El mismo Luis Rico (1995) manifiesta que, en una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos:

- Datos mal utilizados. Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. puede ser porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
- Interpretación incorrecta del lenguaje. Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
- Inferencias no válidas lógicamente. Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
- Teoremas o definiciones deformados. Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.
- Falta de verificación en la solución. Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
- Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

En esta investigación en Israel, un gran porcentaje de estudiantes en escuelas secundarias en exámenes de graduación presentaron errores sistemáticos y comunes. Este estudio fue llevado a cabo para desarrollar una clasificación empírica del modelo de errores en la matemática a nivel de secundaria y demostrar su confiabilidad. La hipótesis que se presenta es que los errores de los estudiantes de secundaria que son cometidos en matemáticas no son accidentales sino se derivan de procesos cuasi lógicos que de alguna manera hacen sentido al alumno. Esta hipótesis es una extensión a la que se presenta en el estudio de Ginsburg (1977) en que los errores que se presentan en la aritmética no son accidentales sino se derivan de procesos cuasi lógicos que de alguna manera hacen sentido al alumno.

El estudio delimitó una serie de categorías del error, las cuales no son elaboración previa de otros estudios o investigadores. Los errores fueron analizados en una forma cualitativa y se le llamó un análisis constructivo del error. La pregunta que se plantearon fué: ¿Con cuáles preguntas (ítems) la solución es equivocada o la solución es correcta? Se identificaron cinco tipos de errores: el estudiante agrega o ignora algunos datos específicos, el estudiante traslada una expresión verbal a una expresión matemática que tiene un significado diferente, la inferencia del estudiante fue lógicamente inválida, el estudiante aplicó una versión inapropiada de la definición de un teorema, y el estudiante realiza un error de habilidades básicas.

j. Garofalo and Lester (1989) *The role of metacognition y Mathematical problems solving = a story of two seven grade classes*. Elaboraron un reporte de alumnos de 6o grado de primaria en un estudio del rol de la metacognición (el control y el conocimiento de la cognición). Más específicamente fue diseñado para:

- Evaluar las creencias metacognitivas y procesos e investigar cómo afectan en el comportamiento de resolver problemas matemáticos.
- Explorar el alcance de que estos estudiantes puedan ser enseñados en formas estratégicas y más conscientes de sus comportamientos en resolución de problemas.

Durante el curso del estudio de las fases de evaluación, tanto antes como después de la instrucción, fueron ampliados en su alcance para incluir una investigación del nivel en que los estudiantes estaban conscientes en utilizar los recursos matemáticos, control y toma de decisiones de las conductas de solución de problemas, creencias y actitudes relevantes a la matemática, y las creencias, actitudes y emociones relevantes a su propio desempeño matemático.

Los autores asociaron las conductas metacognitivas con las fases de resolución de problemas para identificar los posibles errores del tipo:

- Orientación (Lectura, subsecuente representación, análisis de la información y condiciones, evaluación de dificultad del problema)
- Organización (Identificando metas y submetas, elaborando un plan global, Implementando un plan global, dibujando diagramas y organizando la información en otros formatos)
- Ejecución (Desempeño en las metas locales, monitoreo del progreso de metas locales y globales, realizando cálculos, redirigiendo esfuerzos)
- Verificación (evaluando decisiones, chequeando los cálculos)

k. Esteley, Cristina y Mónica Villareal (1990-1992-1996) (citado por Florencia Ramells, 2014)³⁵. Al referirse a la investigación: *La Categorización de los Errores en Matemática* (1990). Estas investigadoras realizaron estudios sobre los errores al operar con números reales en cálculos, planificación y resolución de ecuaciones.

Las investigadoras Esteley y Villareal (1996) comentan que, los alumnos presentan errores cuando no emplean toda la información o hace uso parcial de la información, cuando los alumnos no verificación de resultados totales o parciales, cuando hacen un empleo incorrecto de propiedades y definiciones, cuando no hacen una verificación en condiciones de aplicación de teoremas, definiciones en un caso particular, cuando hacen una deducción incorrecta de información o inventar datos, cuando se presentan errores de lógica y cuando se presentan errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

El objetivo global de este proyecto es el de categorizar los errores cometidos por los alumnos de primer año de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina de 399 alumnos y de otro grupo de 247 alumnos al resolver problemas o ejercicios sobre función, límites y continuidad de funciones reales de una variable. Para lograr la categorización se parte de las categorías empíricas ya construidas en un trabajo anterior (Esteley *et al.*, 1990).

³⁵ <https://prezi.com/nlagbzvqpxyf/los-errores-en-el-aprendizaje-de-matematica/>

Se dice que esta categorización es empírica porque no se parte de ninguna teoría del aprendizaje. Se toma como base los principios Ginsburg (1977) los cuales enuncian:

- Los errores resultan de aplicar estrategias y reglas organizadas. Exige generalmente una razón para estos errores y la razón es la aplicación de una regla sistemática.
- Las reglas erróneas en las que se basan tienen un origen sensible. Generalmente se derivan de lo que ya se ha enseñado, objetivamente las derivaciones son ilógicas e incorrectas, pero psicológicamente tienen sentido para quien lo aplica.
- A menudo los niños ven la matemática como aislada de sus preocupaciones ordinarias. Ven la matemática como una especie de juego con sus propias reglas no relacionadas con otras actividades.
- Los niños muestran tener un abismo entre el conocimiento formal y el informal. Para ellos la matemática escrita es un juego y no la relacionan al conocimiento informal, ya existente, que tienen de la matemática. Citando a Davis (1986) asume la idea de que los errores no son al azar y además toma como base de sus estudios sobre errores la Teoría del Procesamiento de la Información.

A partir de ello clasifica los errores presentes en el manejo de los conceptos del límite y continuidad, como errores de representación y errores de reconocimiento. Esteley y Villareal citan a Williams (1991) quien realiza un trabajo en el que asume que los errores no son al azar y además que las preconcepciones de los alumnos juegan un importante rol en la formación de conceptos. Entonces se logra identificar seis tipos de concepciones erróneas en el concepto del límite de una función y una gran resistencia para modificarlos.

El procedimiento utilizado para categorizar es el que sólo tiene en cuenta lo que alumno realiza sin considerar que no entiende. Una vez identificados los errores por ejercicio e ítem, se determina la frecuencia de cada uno de ellos y se comparan con las categorías ya creadas con el fin de estudiar si estas contienen

todos los errores encontrados o si es necesario crear nuevas categorías. No se determina la frecuencia por categoría ya que este dato no aporta elementos respecto de los errores propios de los temas estudiados en este trabajo. Se tipifican y analizan los errores característicos de los conceptos en función, límite y continuidad sin perder de vista que estos errores son dependientes de los ejercicios seleccionados y del modo en que son desarrollados en las clases. Finalmente, se comparan los errores entre el grupo uno y el dos.

I. Rico, Luis (1995) *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*. El investigador Luis Rico, parte de las premisas:

- La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada.
- El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad y una realidad, permanente en el conocimiento científico.
- La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores.
- El objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.
- El error es un objeto de estudio para la educación matemática.

Radatz (1979), citado por Rico (2005), ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis.

- Errores debido a dificultades de lenguaje: El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.
- Errores debido a dificultades para obtener información espacial. Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Errores provenientes de la producción de

representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.

- Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aún cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información.

En general, son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:

- Errores por perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática.

Según Rico (1995) concluye que, con la revisión bibliográfica sobre el error, la presencia de los errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión muy compleja y delicada. El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es también una posibilidad, y una realidad, permanente en el pensamiento científico. Concluye a su vez, que la ciencia es conocimiento verdadero y que está plagado de errores que hay que corregir, solventar y enmendar.

m. Azcarate C.; Bosch, D; Casadevall, M.Y Casellas, E. (1996) *Cálculo Diferencial e Integral*. En esta investigación de la didáctica matemática sobre el cálculo diferencial cita y revisa una investigación por Orton (1983) un estudio del entendimiento del cálculo diferencial en estudiantes de 16 a 22 años y menciona tres tipos identificados de errores: errores estructurales, arbitrarios y ejecutivos. Esta investigación clínica se utiliza la técnica investigativa de entrevistar a los estudiantes. El análisis de las respuestas concernientes al tema de la diferenciación y la tasa de cambio que se tiene en el transcurso de la investigación. Se midió la tasa de cambio concerniente al grado de entendimiento que se adquiere, sobre los errores frecuentes (varían las categorías del error según una categorización del error tipo “contextualizada” al grupo en estudio) y las concepciones erróneas del tema.

Algunas conclusiones, se inclinaron al grado en que los docentes diferencian su instrucción y la tasa de cambio del aprendizaje.

n. Astolfi, Jean Pierre (2004) *El error un medio para enseñar*. Los errores debido a redacción y comprensión de instrucciones. Los errores son resultados de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas. Son ligados a las operaciones intelectuales aplicadas, son el resultado de las concepciones alternativas de los alumnos, se presentan errores en los procesos adaptado, errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad, errores que tienen su origen en otra disciplina y errores causados por la complejidad propia del contenido.

Según Astolfi (2004), esta representación los errores solo pueden ser “fallos” de un sistema que no ha funcionado correctamente, fallos que hay que castigar, y esto se traduce de muchas maneras convergentes. La primera es el “síndrome del rotulador rojo”. En el mismo momento en que se percibe un error, el reflejo casi “pavloviano” es el de subrayar, tachar, materializar la falta en el cuaderno o en el control. Antes de pararse a pensar en si tendrá alguna utilidad en términos didácticos, se siente la incapacidad de actuar de otro modo. Interminables y agotadoras correcciones, sin pensar que vayan a ser eficaces, y sin creer que los alumnos van a tenerlas en cuenta.

Debe existir un sentimiento de obligación “moral, con la idea de la acción y de los deberes del docente de notarse que al menos los alumnos podrán ver que “está corregida la prueba o tarea”. También puede tener que ver con el justificable miedo que se siente a la opinión de los padres y a las Instituciones educativas si ven que “los docentes dejan pasar las faltas o fallas”.

La segunda percepción, más íntima y penosa, es que los errores de los alumnos hacen que los docentes duden de sí mismos y que piensen en lo ineficaz de la enseñanza impartida. Algo se ha resistido a nuestras explicaciones y nuestro deseo de explicar, incluso a la “esencia” del poder pedagógico. Por tanto, sienten malestar y despecho cuando los alumnos cometen esos errores, que se habían tratado de evitar por todos los medios. El castigo, pues, será reactivo: si se da una evaluación negativa de los alumnos.

Tanto más cuando el que sabe minimiza el coste cognitivo del que aprende, ya que no es consciente de las operaciones mentales que domina. Este aspecto se explica tanto desde el punto de vista de Piaget (1970) como desde los modelos actuales de la memoria. Es usual, mientras se explica, introducir la expresión “es fácil” siendo esta expresión la negación —involuntaria— de su esfuerzo. Los estudiantes preferirían percibir algo más de comprensión y de empatía hacia las dificultades que están pasando, y de las que no pueden desembarazarse. A los estudiantes les gustaría que se les reconociera (y que se les dijera) lo que sufren en sus “trabajos forzados”.

Una tercera percepción es el malestar que sienten los docentes ante la idea de adecuarse en la mente de los alumnos. El saber establecido tiene su aspecto protector: da respuestas y da seguridad. Sin embargo, entrar en el mundo de las explicaciones a los alumnos, dar toda esa información y muchas veces sin planificar adecuadamente tiende a dar “miedo”. Preocupa que la mayoría de los docentes con la programación, ya les es difícil conjugar la lógica del saber y la lógica de los alumnos, no se diga, cuando no la incluyen adecuadamente.

Podríamos citar este extracto de La formación del espíritu científico, de Gastón Bachelard (1985):

“Los profesores, sobre todo los de ciencias, no comprenden que los alumnos no comprenden. Se imaginan que la mente sigue los mismos pasos que una lección; que los alumnos pueden hacerse con una cierta “cultura” si los profesores les imparten la misma clase una y otra vez, o que pueden llegar a entender una demostración si se les repite paso a paso” (Bachelard,1985).

Se puede comprender que, frente a una situación tan poco reconfortante, los estudiantes, eviten en lo posible cometer un error. Cuando el estudiante encuentra el error, pueden reaccionar siguiendo dos actitudes simétricas:

- El castigo, que puede llegar a comprenderse como un reflejo de reafirmación.
- El esfuerzo del docente de adecuar y replantear la programación de su instrucción.

En el primero de los casos el estatus del error es el de “falta”, con todas las connotaciones moralizantes asociadas al término. En el segundo, es el de un fallo de programa. La primera actitud carga el error en la cuenta del alumno y en la de sus esfuerzos de adaptación a la situación didáctica. La segunda se lo carga al que concibió la programación y a su falta de capacidad del docente para adaptarse al nivel real de los alumnos.

Precisamente, el tercer elemento en común es el acto de aprender es igualmente minusvalorado, reducido al proceso silencioso del “mito naturalista”.

Los modelos subyacentes el estatus didáctico que se dá al error es un buen indicador del modelo pedagógico utilizado en el aula.

Es cierto también que se considera una pedagogía para el éxito, y que se dan los medios para llegar al comportamiento esperado y para verificar su obtención. Pero este segundo modelo, diseñado a partir de la psicología llamada conductista, está basado en la transferencia al hombre del condicionamiento animal. No sólo un condicionamiento “que responda”, al modo de los reflejos condicionados de Pavlov, sino un condicionamiento “operativo” como el que desarrollaron James Watson y Burrhus Skinner. La aproximación de reflejos condicionados permite evitar errores, puesto que toda programación didáctica está concebida así para evitarlos. Pero, todo ello a costa de un recorrido estrechamente guiado y predeterminado, que no tiene en cuenta la autonomía intelectual que debe adquirir el estudiante.

Por último, el error conserva su estatus negativo, puesto que se emplea todo el ingenio y la energía para evitar que aparezca. Ya en 1970 Pierre Bourdieu y Jean-Claude Passeron escribían en su célebre libro titulado *La Reproducción*:

“Cuando los profesores bromean acerca de ‘los disparates’, se olvidan de que estos fallos del sistema encierran la verdad” (Bourdieu, Passeron, 1970).

Los errores señalaban su significado didáctico. Los modelos constructivistas, que están adquiriendo un fuerte desarrollo en estos tiempos. se esfuerzan, contrariamente a los anteriores, por no eliminar el error y darle un estatus mucho más positivo. El error en muchas situaciones no es fruto del azar ni de la falta de atención y de sus calculadoras programables. El error se reencuentra aquí con su etimología latina de “errar” como el ir de un lado a otro, en sentido figurado, como incertidumbre e ignorancia.

Ahora, el error adquiere un nuevo estatus: el de indicador y analizador de los procesos intelectuales puestos en juego, que no se tienen en cuenta cuando se corrige con el lápiz o lapicero rojo, se trata de profundizar en la lógica del error y

de sacarle partido para mejorar los aprendizajes. El error tiene sentido. La idea esencial al considerar el error desde un punto de vista constructivista es renunciar a lo que Jean Piaget denominaba el “*n’importe quisme*” (no importaquismo). Por extrañas que parezcan las respuestas, se trata de buscarles sentido, de encontrar las operaciones mentales de las que ellas son la pista.

Con los modelos de aprendizaje constructivistas (que no son uniformes), el error adquiere el estatus de indicador de tareas intelectuales que los alumnos van resolviendo y de los obstáculos con que se enfrenta su pensamiento a la hora de resolverlas. El obstáculo consiste en actuar y reflexionar con los medios de los que se dispone, mientras que el aprendizaje consiste en construir medios mejor adaptados a la situación.

Esto explica Michel Sanner (citado por Astolfi, 2004)

“En pedagogía, si se quiere que la noción de obstáculo epistemológico sea operativa, no basta con reconocer el derecho al error, sino que se debe emprender el camino del conocimiento real del error” (Sanner, 1983).

A continuación, la Tabla 2 la cual, muestra un resumen cronológico de los estudios más sobresalientes sobre la categorización del error en las matemáticas.

Tabla 2. Resumen de especialistas en análisis y categorización del error (1910-2015)

Nombre	País	Descripción del estudio en análisis y categorización del error
Thorndike	Estados Unidos de América 1910 – 1922. Importancia de la Determinación de Errores. Estudio del aprendizaje tipo “prueba y error” (<i>“trial and error”</i>)	1. Errores por falta de habilidad, 2. Errores por falta de concepto y 3. Errores de Lectura inadecuada. Estudios del error en el tema de la dinámica “prueba y error”. En donde se concluye la hipótesis que a mayor práctica es mejor el logro del aprendizaje.
Weiner	Alemania 1920	1. Errores familiares 2. Errores de perseverancia 3. Errores similares 4. Errores mixtos 5. Errores debido a la emoción teniendo en cuenta ideas psicoanalíticas
Monroe	1926	Errores por S=simple terminología; errores por T= terminología técnica; errores por A= en abstracción; errores por C= en concreto; errores por R= no considerar toda la información; errores por I= incluir datos irrelevantes

Nombre	País	Descripción del estudio en análisis y categorización del error
Brueckner	Estados Unidos de América 1930	1. Combinación de errores 2. Errores de conteo 3. Errores por prestar 4. Procedimientos fallidos 5. Errores por lapsus u otras misceláneas faltas 6. Errores tipo " <i>scratch used paper</i> " tipo borrador
Brueckner y Burdge	Estados Unidos de América 1932	1. Errores y hábitos en obtener combinaciones 2. Errores y hábitos en prestar 3. Errores irregulares y de hábitos 4. Errores en el hábito de uso del cero 5. Errores en el posicionamiento parcial de productos 6. Errores y hábitos en suma parcial de productos 7. Errores y hábitos misceláneos
Buswell y John	Estados Unidos de América 1930 - 1932	1. Errores en la combinación de números 2. Errores al contar en varias maneras 3. Procesos fallidos y lapsus 4. Errores en subir cantidades en la suma y la multiplicación 5. Reagrupar la resta 6. Dificultades del residuo en la división 7. Errores en el cálculo de los números enteros
Gaston Bachelard, Karl Popper, Imre Lakatos y Bertrand Russell, Brousseau	Filósofos Racionalistas (Francia, Austria, Hungría, Inglaterra 1960 – Fenomenotecnia del pensamiento lógico-matemático hasta 1986)	1. Obstáculos, 2. concepciones inadecuadas, 3. ausencia de sentido, 4. actitudes (emotivas y afectivas)
Ann Newman	Estados Unidos de América, Australia 1977 – Métodos Análisis de Errores	1. Errores en lectura (<i>Reading</i>), 2. errores en comprensión (<i>comprehension</i>), 3. errores en transformación (<i>transformation</i>), 4. errores en habilidades de proceso (<i>process skill</i>), 5. errores en decodificación (<i>encoding</i>) y 6. errores por descuido (<i>careless</i>).
Radatz	1979	1. Errores debido a dificultades del lenguaje. 2. Errores debido a dificultades de obtener información espacial 3. Errores debido a un lenguaje deficiente por deficiencia en conceptos previos 4. Errores por aplicaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento lógico 5. Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
Van Lehn, Kurt	1980 Estados Unidos de América. Estudios sobre " <i>bugs</i> " o patrones de errores. Tipificó 96 tipos de errores en el proceso de la resta. Teoría Generativa de Patrones de error (" <i>Repair Theory</i> ")	1. Errores por procedimientos incompletos. 2. Errores por omisión (" <i>careless</i> ") o por olvido. 3. Errores por algoritmos de procesos aritméticos deformados. 4. Errores sistemáticos. 5. Errores tipo patrones de error o " <i>bugs</i> "

Nombre	País	Descripción del estudio en análisis y categorización del error
Davis, Booth	1984	1. Errores tipo patrones de errores o “bugs”. 2. Errores sistemáticos. 3. Errores clásicos son reversiones binarias. 4. Errores inducidos por el lenguaje o notación. 5. Errores por recuperación de un esquema previo. 6. Errores por representación inadecuada (reglas que producen reglas). 7. Errores por símbolos y letras. 8. Errores por uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento.
Ivan Watson, Movshovitz-Hadar, Mulhern, Radatz	Estados Unidos de América, Israel, 1987	1. Errores por datos mal utilizados. 2. Errores por interpretación incorrecta del lenguaje. 3. Errores por inferencias no válidas lógicamente. 4. Errores por teoremas o definiciones deformados. 5. Errores por falta de verificación en la solución. 6. Errores tipo técnicos (mal uso del algoritmo o proceso).
Garofalo, Lester, Mulhern	1989	1. Errores de orientación. 2. Errores de organización. 3. Errores de Ejecución y desempeño. 4. Errores de verificación evaluando decisiones y chequeando los cálculos.
Esteley, Villareal	1990 Argentina	1. Errores de no incluir toda la información o hacer uso parcial de la información. 2. Errores de verificación. 3. Errores de empleo incorrecto de propiedades y definiciones conceptuales. 4. Errores de deducción incorrecta de la información. 5. Errores de asumir o inventar datos. 6. Errores de lógica. 7. Errores de transcripción incorrecta (o Lectura). 8. Errores de representación. 9. Errores de reconocimiento. 10. Errores no son al azar.
Rico	España 1995	1. Errores por dificultades del lenguaje. 2. Errores debido a la dificultad de obtener información espacial. 3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas o habilidades y conceptos previos. 4. Errores debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento lógico. 5. Errores debido a la falta de flexibilidad de codificar y decodificar (errores por perseveración, por asociación, por interferencia o por asimilación no correcta, por aplicación de reglas o estrategias irrelevantes).
Azcarate, Atkins	1996, 1997 Estudios sobre la medición de la tasa de cambio en el aprendizaje	1. Errores frecuentes (varían las categorías según una categorización contextualizada al grupo estudiado). 2. Errores por concepciones erróneas.
Marcel David Pochulu	Argentina, 1990-2000 – Categorización de errores	

Nombre	País	Descripción del estudio en análisis y categorización del error
Astolfi	2004	1. Errores debido a la redacción y comprensión de instrucciones. 2. Errores debido a malos hábitos escolares. 3. Errores debido a malas interpretaciones de las expectativas sobre los conceptos. 4. Errores debido a una sobrecarga cognitiva. 5. Errores debido a una falta de refuerzo en lectura. 6. Errores debido a la alta complejidad del contenido sin instrucción previa.
Socas	2008	1. Errores matemáticos que tienen origen en la aritmética. 2. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento. 3. Errores de matemáticas debidos a las características propias del lenguaje o símbolos matemáticos. 4. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas o emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración, excesiva confianza, bloqueos, olvidos, obstáculos, etc.
Kuzmitskaya y Menchinskaya		1. Errores debido a la incorrecta implementación de una operación. 2. Errores debido a la calidad insuficiente de la comprensión conceptual. 3. Errores mecánicos debido al deficiente interés o a la diversión. 4. Errores debido a la aplicación de inapropiadas reglas o algoritmos.
Thomas P. Carpenter, Fennema, Loef, Levi, Empson	Estados Unidos de América 2010-2015 – Instrucción cognitiva basada en la retroalimentación y pensamiento reflexivo – lógico - dialógico	

Fuente: Elaboración propia, según, Radatz (1979), Engler (2012), Rico (2005)

B. Análisis del error

Para analizar errores se debe partir de tomarse un tiempo para revisar la información que se presenta en las evidencias y así poder identificar los posibles errores. El estudiante debería buscar errores en su propio razonamiento. En principio se diagnostican los errores y luego se corrigen. Se deben motivar a los alumnos hacia una postura de reflexionar sobre sus ideas erróneas y reflexionando por sí mismo orientarse hacia conceptos más amplios y correctos.

La investigación sugiere al docente llevar una “bitácora” de errores típicos, permitiendo así obtener información de gran utilidad para el docente y sus estudiantes. En general se debe: trabajar los conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva. Asegurar que los objetos matemáticos del sistema de símbolos (antiguo) no presenten dificultades.

El análisis del error pone en relieve las deficiencias en el cómputo de la división que se experimenta por muchos estudiantes. Muchos investigadores del análisis del error indican que el llegar a reconocer el patrón de los errores en los estudiantes es el primer paso para la remediación o recuperación (“*remedial*”) (Cox, 1975).

El proyecto SESM (*Strategies and Errors in Secondary Mathematics*) llevado a cabo en el Reino Unido entre los años de 1980 a 1983 (Booth, 1984) centró su interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos que en tipo de cuestiones que los alumnos resuelven correcta y especialmente, en el caso de que tales errores sean cometidos por un amplio número de estudiantes. Del análisis de errores comunes, observamos que muchos de ellos podían ser atribuidos a aspectos tales como: naturaleza y significado de los símbolos y las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas de álgebra, la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.

Estas investigaciones ponen de manifiesto la importancia que tiene centrar la atención, no solo en las respuestas correctas de los alumnos, sino también en los errores que cometen. Las investigaciones acerca de los errores que cometen los estudiantes han permitido, realizar clasificaciones en relación con los errores de los alumnos. Las investigaciones desarrolladas han logrado profundizar más en el origen y causa de los errores y a revisar los errores desde dos puntos de vista: las dificultades inherentes a las matemáticas y las dificultades inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas en el ámbito escolar (Socas, 1997). Esto conduce a caracterizar de manera más precisa los errores en dos grupos: errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Esto tendría dos procedencias distintas, una relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático; y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

El investigador Ashlock (1998) hace notar que, es sumamente importante que los docentes deben ser sensibles a clasificar los errores de sus estudiantes para que la meta sea lograda por sus estudiantes y logren entender los métodos de procedimiento y razonado para adecuar los conceptos y sea en mejor forma asimilado el aprendizaje. Recomienda que se realicen pruebas diagnósticas a los estudiantes, para luego analizar las respuestas, se complementan con entrevistas personalizadas para identificar en mejor forma en que parte del proceso el estudiante encuentra mayor obstáculo, confusión o error. Cuando los estudiantes analizan e identifican los errores (sobre todo en la parte de qué tipo de procedimientos fueron los utilizados en sus cálculos), estudiando las causas del error. Entonces los docentes pueden reconocer cuales son los problemas en cada uno de sus estudiantes, para luego ser capaces de diseñar estrategias efectivas de instrucción y guía con prácticas e instrucciones adecuadas de apoyo.

Afzal Ahmad *et al.*, (2004) ilustra que una de las dificultades en aprender fracciones, decimales y porcentajes es que ellos tienen multiplicidad de significados a diferencia de los numerales enteros.

Un estudio de Yea Ling (2005) revela que las fracciones son más difíciles que el concepto de los decimales. Los alumnos de bajo rendimiento tienden a utilizar métodos a base de reglas y tienden a utilizar métodos de algoritmos que de métodos que sean del tipo “*number sense based*”.

Los alumnos de sexto grado ya definen su razonamiento de las operaciones aritméticas y desarrollan algoritmos para el cómputo de las divisiones. Si se presentan errores en estos algoritmos son en general sistemáticos y basados en reglas o mis concepciones de las reglas que al azar (Yetkin, 2003). Estos errores pueden ser causados por instrucción mal impartida que se enfoca solamente en la memorización. Muchas veces las respuestas son correctas aún cuando los procedimientos no los son, por lo que los docentes deben tener cuidado de que los estudiantes no sólo memoricen los pasos de los métodos o prescripciones (algoritmos) sino que también razonen el concepto de sentido numérico y la lógica del mismo. Los estudiantes pueden generalizar los procedimientos cuando copian los pasos de los métodos de resolución y ello conlleva en la mayoría de las veces errores. Lo que aconsejan educadores como Wu (2011) es que se utilicen apropiadas representaciones para que los alumnos puedan construir diferentes modelos de estos conceptos.

Los conceptos de fracción deben introducirse previo al de la división y es apropiado el hacerlo en los primeros años de primaria y así que no debe postergarse a grados posteriores como el que se dé el tema de las fracciones luego de impartir el tema de la división.

Uno puede presumir que el análisis del error es como muchos problemas de investigación educativos, en que las diferencias en las metas de alcance de las sociedades (“*societal aims*”) y condiciones en el currículo educativo y en el “*syllabus*” (como en los diferentes algoritmos y diferentes contenidos

matemáticos) hace muy difícil las transferencias y la generalización de los hallazgos específicos.

Cuando se clasifican los errores acordes a las dificultades de los alumnos individuales, se debe considerar a los errores son funciones de otras variables en el proceso educativo (el maestro, el currículo, el ambiente y las posibles interacciones entre las variables). Los errores en el aprendizaje de la matemática resultan de muchos procesos complejos. Una separación de las posibles causas de un error dado es muy difícil, porque hay una interacción entre las causas. La necesidad de la mejora educativa hace imperativo que el docente incluya la investigación de los patrones del error durante la evaluación diagnóstica y antes de la instrucción en el aula de los temas matemáticos.

1. Procedimientos para la categorización del error. En los primeros años del estudio de los errores en la matemática, en la década de los años sesenta, el análisis del error fue del tipo conductista. Se consideraba durante esos años, la importancia en el procesamiento de la información y el análisis del error fue más del tipo diagnóstico y reparador únicamente para los docentes y así ellos modificaran sus estrategias de enseñanza, para ser más eficientes. De tal forma que los docentes, así reforzaran una visión absolutista de la matemática evitando los errores. Luego, la visión del error tuvo una visión más constructivista motivando que sea el estudiante principalmente el que construya su propio conocimiento y aprenda del error.

A partir de la década de los setenta la línea de trabajo sobre el análisis, clasificación y causas de los errores se pueden incluir varios temas de interés: en primer lugar, que algunas investigaciones ponen de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose exclusivamente, en el conocimiento matemático; en segundo lugar, que en las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen

versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, que a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático de los mismos.

Entonces, a partir de la década de los ochenta parece necesario desde la Didáctica de la Matemática, avanzar en la delimitación de las causas posibles de los errores que cometen los alumnos y tener una explicación general de cada error o particular para cada alumno, de manera que se pueda actuar sobre el error a nivel de grupo o a nivel particular, siendo conscientes de las dificultades debidas a las distintas variables que interaccionan en el proceso educativo y que condicionan el error al convertirse en dificultades u obstáculos en el aprendizaje.

a. Método de análisis de categorización del error Ann Newman (1977).

En el método o procedimiento de categorización del error de la educadora Anne Newman según Clements y Ellerton (1992)³⁶ comentan que Ann Newman desarrolló un procedimiento sistemático en pruebas orales de matemática. Según Newman (1977), cualquier persona se confronta en una prueba de matemática con la secuencia en forma de categorías de: Lectura (decodificar), Comprender (entender), transformar (matematizar), destrezas de proceso y luego de codificar. Los errores resultan de factores desconocidos y Ann Newman asigna a esta nueva categoría de “dejadez” o en inglés de “*careless*”. El análisis de Newman pone especial énfasis en los factores del lenguaje en el aprendizaje de la matemática. Probó en sus estudios que los problemas radican en la base de la instrucción matemática por los educadores. Newman logró demostrar que mucha de las dificultades de los estudiantes radica en las estructuras semánticas, el vocabulario y en los simbolismos de la matemática más que del propio algoritmo. Los descubrimientos de la investigación de Newman indican en forma consistente que se hace un esfuerzo innecesario de muchas instituciones educativas el conformar clases remediales en las escuelas ya que se ha sobre enfatizado en la revisión de

³⁶ Nerida Ellerton and Maken Clements (1992) *Implications of Newman Research for the Issue of "WHAT IS BASIC IN SCHOOL MATHEMATICS?"* Faculty of Education Deakin University, USA.

el algoritmo y casi nada de atención se les ha otorgado a las dificultades asociadas con las fases de Comprensión y a la de Transformación.

Estos estudios basados en la categorización del error de Ann Newman (1977) han sido claves en particular porque han enfocado mayor atención que a) la influencia de los factores del lenguaje sobre el aprendizaje de la matemática y b) que muchos programas de remediales de matemática en las escuelas y colegios se ha sobredimensionado al enfocarse únicamente en la elaboración de los algoritmos (Clarke, 1989). De acuerdo con Newman (1977) un estudiante que desea obtener la correcta solución a un problema matemático (*“word problem”*) debe utilizar apropiadamente y proceder a seguir la siguientes jerarquías del proceso:

- Leer el problema
- Comprender lo que lee
- Hacer una transformación razonada y mental de palabras en la pregunta del problema a la selección de la estrategia matemática a utilizar
- Aplicar el proceso de habilidades demandadas por la estrategia seleccionada
- En codificar la respuesta a una aceptable forma escrita o escribirla en forma adecuada la respuesta.

El esquema de jerarquía anterior de Newman (1977) provee una fundamental estructura para secuenciar los pasos esenciales y en ese orden resolver los problemas en matemáticas los errores tipo *“carelessness”* (dejadez) y el de motivación, suelen suceder durante cualquier fase del proceso de resolución de problemas. El de motivación es en particular el que sucede cuando el estudiante pierde interés en intentar resolver el problema. Las preguntas que el docente debe realizar para poder diagnosticar si se presenta un error de concepto o procedural son las siguientes:

- Por favor lea la pregunta en voz alta (Lectura)
- Explique qué es lo que la pregunta trata de decirle (Comprensión)

- Cuente, ¿qué método utilizará para encontrar la respuesta o para resolver? (Transformación)
- Muestre, ¿cómo resolverá el problema? Explicarme el proceso de resolución (Habilidades de proceso)
- Ahora, escriba la respuesta (Encodificar)

De tal forma que se pueda investigar donde radica el error. Mellin-Olsen (1987) comentó que, aunque la jerarquía de Newman (1977) era útil para el docente, puede crear conflicto con el criterio didáctico pedagógico que el estudiante debería experimentar su propia capacidad de desarrollar su propia estrategia de elaborar procesos o procedimientos matemáticos. El método de razonamiento matemático de Polya (1973) se enfoca más a diferencia del método de Ann Newman en la Comprensión y la Transformación de los problemas matemáticos por cada estudiante.

En el estudio inicial de Newman (1977) encontró que lectura, comprensión y transformación radicaban el 13%, 22% y el 12% del total de errores encontrados por 124 estudiantes de 6o grado de primaria. La mitad de los errores ocurrieron antes de hacer el procedimiento en papel por los estudiantes. Se tuvieron otros estudios similares para niveles de primaria en Australia con Casey (1978) un estudio con 116 estudiantes de 6o grado de primaria; Clements(1980) un estudio con 700 estudiantes entre 4o y 6o grado de primaria; Watson (1980) a nivel de preprimaria; Clarkson (1980) un estudio con 13 estudiantes de 6o grado de primaria y, se obtuvieron similares resultados en donde el 50% de los errores totales ocurren antes del paso de “*Process Skill*” (habilidades procedurales): en la parte de lectura, comprensión y transformación En estos estudios se realizaron entrevistas individuales. Lo que estos estudios presentan es una inquietud al respecto de que, porque se le pone tanto énfasis el procedimiento de la aritmética básica y no en la parte del lenguaje para poder leer, comprender y transformar los problemas que se encuentran en la matemática.

Por último, un estudio de Faulkner (1992) utilizó la técnica de Newman para investigar los errores de un grupo de enfermeras y el resultado fue que la mayoría tenía errores de Comprensión y Transformación.

a. Método de análisis de categorización del error “*Repair Theory*” de Seely Brown y Kurt Van Lehn (1980). La clave de la Teoría Generativa para categorizar el error es la noción de reparar (“*Repair Theory*”). El investigador Van Lehn aporta un exhaustivo análisis sobre los mecanismos procesales que rigen la generación de los errores sistemáticos o “*algorithmic bugs*”. Sus investigaciones han generado la existencia de una extensa bibliografía relacionada con el estudio del conocimiento procesal. Al principio fue aplicada al ámbito del procedimiento de la sustracción sus resultados han servido en la actualidad, como plataforma para el trabajo sobre la inteligencia artificial y resolución de problemas en la Física.

Para esta teoría, quien repara es el estudiante cuando desarrolla un procedimiento incompleto que pueda ocasionar un impasse. Luego puede presentarse una reparación es una serie de operaciones o procedimientos para poder continuar y obtener la respuesta. El tipo de reparación depende sólo del procedimiento y el grado de impasse que el estudiante tenga. Con todo ello se profundiza en el fenómeno del error que se presente a nivel cognitivo en el estudiante al operar una división para ser evaluado este error. Los “*bugs*” son resultado infructuoso de intentar extender las reglas existentes y aplicarlas a nuevas situaciones y esta acción conformaría lo que Van Lehn (1980) denomina reparaciones. Las reparaciones pueden programarse y pueden predecirse por la teoría de la reparación que es aplicada para pronosticar los errores de alumnos en la solución de problemas aritméticos.

Un error tipo “*slip*” (omisión) es considerado como un olvido de parte del estudiante son errores del tipo hecho o “*fact errors*”, Estos errores tipo “*careless*” o dejadez son errores no intencionales que ocurren en el diario trabajo de los estudiantes al aprender la aritmética.

El sistema de diagnóstico de patrones de error o bugs lo que apoya es a identificar qué parte del procedimiento presenta una perturbación de un procedimiento. Esta perturbación de los errores se le llama "*bugs*".

La Teoría de la Reparación o "*Repair Theory*" es una teoría generativa que intenta explicar porque encontramos estos patrones o perturbaciones de error. Se puede crear un sistema de diagnóstico contextualizado al grupo de estudiantes para apoyar en corregir el concepto o competencia que muestra errores. Este conocimiento de cuáles patrones de error son los que presentan errores apoyan en entender porque el estudiante o estudiantes cometen este tipo de patrones sistemáticos de error y ello ayuda al docente a planificar mejor la forma de abordar los temas y a mejorar el ambiente de enseñanza aprendizaje que puede inhibir la formación de estos errores. Finalmente, estas investigaciones del error en términos de investigación cognitiva, puede producir muchas reflexiones e ideas de cómo son las representaciones del conocimiento y los mecanismos cognitivos (adquisición de la habilidad o competencia) que son difícil de observar en el aula o a simple vista.

La Teoría de la reparación, se basa en la reflexión de que cuando los alumnos se obstaculizan o quedan inertes mientras ejecutan una operación aritmética, y observar como al pasar un sistema de diagnóstico como resuelve el estudiante el error. Esta forma de solucionar los obstáculos se le llama reparación y no siempre el estudiante lo logra alcanzar ya que puede darse el caso que continúe en el error o deje de realizar del todo el problema. Las reparaciones que hagan los estudiantes pueden ir desde dejar el problema y no seguir tratando de resolver hasta tomar un camino de resolución totalmente personalizado pero que funcione creando su propios métodos o estrategias de resolución al enfrentarse a un problema matemático.

C. Didáctica de la matemática

Todas las estrategias de prevención que el docente debe utilizar y estar dirigidas a evitar o minimizar los obstáculos o dificultades para que puedan ser superados a darle de sentido al objetivo y al pensamiento matemático y a crear un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia la matemática. El docente actúa como un facilitador de actividades o dinámicas. Solucionar los problemas de los errores tiene que ver con el día a día con la interacción diaria en clase entre el profesor y el alumno.

El tema del diagnóstico del error en el estudiante es un tema que en el ámbito de la didáctica matemática sale a relucir muy poco o casi nada. Actualmente, se encuentran muy pocos programas de remediales y de diagnóstico en los grados de primaria. Hay que considerar que las pruebas orales toman mucho tiempo y por ello es muy difícil de que se implementen. Hay muy poco tiempo para los maestros en el analizar los errores y pasar pruebas diagnósticas que puedan proveer de la mayor cantidad de errores posible.

A través del tiempo, la problemática educativa en el mundo ha planteado nuevas estrategias o modelos educativos. Desde los años 1970, el constructivismo ha transformado fundamentalmente el conocimiento del aprendizaje y enseñanza de la matemática (Steffe and Kieren, 1994). La matemática es entonces un conjunto de verdades universales, construido socialmente, relacionado por experiencias y adecuada al contexto de los estudiantes. Por lo que, el conocimiento matemático no es un proceso fijo de estructuras o reglas, sino al contrario un flexible y cambiante proceso científico de patrones y cantidades, el cual depende su dominio de la práctica, experimentación, razonamiento y argumentación. En el aula, el aprendizaje matemático no es actualmente considerado como un mapeo “externo” al aula el cual depende de la extensa elaboración de ejercicios monótonos y repetitivos y de la memorización (Cobb, 1994). En cambio, son los estudiantes los cuales deben construir activamente los conceptos matemáticos vía una activa interacción con sus compañeros, maestros y de ser necesario en casa. Los docentes deben

dejar de ser proveedores del conocimiento a ser facilitadores, provocadores o bien cuestionadores en el aula, los cuales deben crear un ambiente propicio y de ser posible una visión matemáticamente constructivista para que sean los estudiantes los que modelen sus vidas alrededor de la materia. (Fosnot, 2005).

El modelo constructivista debe incluir materiales apropiados que motiven a los estudiantes, valoración de las ideas, reflexiones y comentarios de los alumnos, y que provean de evaluaciones pertinentes (Brooks, 1993).

El trabajo remedial debería sugerirse luego de analizar las pruebas escritas, no es muy preciso, como un diagnóstico tipo entrevista, pero para un apoyo temporal esta técnica puede ser de gran ayuda. Esto implica que la persona que diagnostica nunca debe ingresar a la clase. El maestro no es el mismo que analiza las pruebas escritas. Con ello se toma la suficiente imparcialidad y no hay sesgo de interpretar o llenar los espacios de pensamiento que el maestro por considerar conocer a su estudiante pueda interpretar como lo que el alumno quiso escribir en el proceso. El investigador docente diagnostica y sugiere las áreas por las cuales el estudiante puede remediar para mejorar su desempeño.

En la formación inicial y permanente del profesorado se sostiene una parte que el profesor debe tener un conocimiento general de las fundamentaciones teóricas y prácticas sobre las tipologías de los errores, el conocimiento de sus posibles causas, su repercusión en el desarrollo curricular, de forma que les permita hacer un diagnóstico y aportar un tratamiento para la superación de los errores; y por otra se trata de poner en evidencia las concepciones previas del profesorado sobre los errores, para que estos clarifiquen sus concepciones sobre los errores y de paso sobre las matemáticas y su aprendizaje (Tirosh y Graeber, 1989).

En el estudio cualitativo del DIGEDUCA³⁷ (Castillo, 2016) se refleja en sus resultados que uno de los factores más recurrentes responsable de la situación actual en Guatemala es el desconocimiento de la metodologías o didácticas

³⁷ Direccion General de Evaluacion e Investigacion Educativa- Guatemala recuperado en <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/>

específicas para los temas que los docentes deben presentar en el aula. Los docentes desconocen cómo enseñar matemática, y los mismos docentes carecen de un conocimiento completo de la temática que pretenden enseñar. Se presenta en forma recurrente y grave en nivel de primaria y se guían por el “libro de matemática” únicamente. No se pone suficiente énfasis a la instrucción en metodologías de enseñanza del tema específico de la matemática, ni mucho menos en analizar el patrón del error.

Según Frege (1950) filósofo lógico alemán (citado por Dummett, 1991) en su libro Frege: *La Filosofía de la Matemática*, encontraba dos opciones didácticas en la aritmética: la aritmética se deriva de la lógica, más algunas definiciones del vocabulario aritmético, o se funda en la intuición (como en Kant, 1787) Kant es quizá el filósofo con mayor influencia en la filosofía de las matemáticas durante el siglo diecinueve y principios del siglo veinte. Las ideas por Kant vertidas en la *Crítica de la razón pura* fijaron, en gran medida, la agenda de los debates en dicho período. En esa dicotomía él escogía la primera opción. Este gran pensador creía que las matemáticas poseían contenido: objetos abstractos, que no estaban en el espacio ni en el tiempo; es lo que se suele llamar con el nombre de platonismo en las matemáticas.

Las matemáticas obtienen sus nociones elementales del mundo físico, que siempre intervienen las operaciones o acciones que el estudiante realice a partir de aquellas. Las abstracciones originales, las abstracciones " reflexivas" , que son las que señala Piaget, (1969), y todos los diferentes tipos de abstracciones, siempre más o menos subjetivas, están vinculados a la realidad. En la gestación, desarrollo y utilización de los métodos de las matemáticas el sujeto nunca deja de recibir la influencia directa del objeto. Nuestra propia naturaleza posee características generales biológicas o físicas que corresponden al resto del universo. Hay que ver a la matemática como un proceso único en el que ha estado siempre presente una combinación permanente de lo más abstracto con lo más ligado al mundo empírico. Del mundo tridimensional que constituye nuestro

entorno inmediato sacamos los conceptos básicos de la geometría clásica. Nunca hay que, olvidar las dimensiones prácticas, el contacto con el mundo, y el carácter humano e histórico de la construcción matemática.

Ciertos investigadores enfocados en el estudio de las dificultades y errores en el desarrollo curricular o en la formación del profesorado de Matemática como Bell (1986) en la enseñanza diagnóstica en la que se utilizan lecciones con unos cuantos problemas críticos para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución. Los trabajos en didáctica matemática de Borassi (1987), que parten de la idea de que la interpretación exclusiva del error como instrumento de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error cometido. Lo que puede resumirse a que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. Destacando que los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la naturaleza de la Matemática.

Según Labinowicz (1987) en su libro *Introducción a Piaget*, cuando el aprendizaje se desmenuza en pasos minúsculos se niega a los niños el derecho a equivocarse se está rechazando su capacidad para construir su comprensión propia y al negar la complejidad de las ideas se está dando un sentido trivial a la misma matemática. Según Carpenter (1983) y Bell (2010), también se recomienda relacionar las matemáticas con otras materias como el trabajo tipo proyectos (*"project based learning"*).

El docente según Guy Brousseau (1986), realiza el trabajo inverso al del científico: una recontextualización y re-personalización del saber, busca situaciones que den sentido a los conocimientos para enseñar. Si la fase de personalización ha funcionado bien, cuando el alumno ha respondido a las situaciones propuestas no sabe que ha producido un conocimiento que podrá

utilizar en otras ocasiones. Para transformar sus respuestas y sus conocimientos en saber, deberá con la ayuda del docente, re despersonalizar y re descontextualizar el saber que ha producido, para poder reconocer en lo que ha hecho algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable. El alumno debe apropiarse del conocimiento. La situación didáctica implica una interacción del estudiante con situaciones problemáticas, una interacción dialéctica, donde el sujeto anticipa, finaliza sus acciones y compromete sus conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los complementa o los rechaza para formar concepciones nuevas.

Según Middleton y Goepfert (1996), los docentes deben tratar de lograr que las matemáticas sean realistas e interesantes. Estos problemas podrían incluir alguna incertidumbre o crisis que motive el interés de los estudiantes. El incluir juegos matemáticos es recomendable porque pueden brindar un contexto motivante para ejercitar la materia. Los juegos matemáticos también pueden animar a los estudiantes a discutir las estrategias matemáticas con otras personas.

En su centro, las matemáticas tratan con patrones. en su libro *La Ciencia de los patrones*:

“En la ciencia de los patrones abstractos, cualquier aspecto de nuestras vidas se ve afectado por las matemáticas; los patrones abstractos son la verdadera esencia del pensamiento, de la comunicación, de la computación en una sociedad y en la vida misma” (Devlin,1997).

El conocimiento matemático es un tipo de conocimiento de naturaleza dual, que conjuga aspectos intrínsecos, relacionados con su propia estructura formal abstracta, y aspectos extrínsecos relacionados con su aplicación en la resolución de los problemas o situaciones matemáticas (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001).

Según Ausubel (2002) citado por Aguiar Castro (2014: 17), sugiere una serie de principios de instrucción para un aprendizaje significativo:

- Facilitar un aprendizaje con secuencia lógica y organizada fácil de entender
- Se necesita delimitar contenidos, que se abarcara y relacionarlos
- Promover los aprendizajes de contenidos significativos que no se olviden y de forma participativa dentro del aula.

Cabanne (2010) comenta que la didáctica matemática debe ser provocar conceptos, demostraciones elementales, con interés, reflexión, intriga o admiración. La tónica de las actividades diarias en lo posible debe enfocarse a ser del tipo lúdico para provocar el entendimiento y el aprendizaje. Es responsabilidad del docente proponer situaciones o preguntas que motiven a resolver para modificar el conocimiento y que no se trabaje como una obligación.

Desde hace muchos años la educación matemática se ha convertido cada vez más desconectada de la matemática para la vida. Los estudiantes pasan mucho tiempo en las aulas aprendiendo muchos procedimientos y reglas que en muchos casos no volverán a utilizar en sus vidas o en sus trabajos. Un connotado matemático Conrad Wolfram (2010) crítica y comenta que la enseñanza de la matemática continúa siendo demasiado tradicional y que la matemática no debe ser utilizada únicamente para calcular ya que actualmente se cuenta tecnología que calcula y mucho mejor que los humanos.

Wolfram (2010) propone cuatro etapas para la enseñanza de la matemática:

- Poner una pregunta
- Proponer un caso de la vida real a convertirlo en un modelo matemático
- Realizar un cálculo no como fin último sino como un instrumento para obtener una solución a la solución de la pregunta
- Ir del modelo matemático de regreso a el caso de la vida real para asegurarse que la pregunta original se resuelve

Wolfram (2010) asegura que muchos docentes proponen a sus estudiantes únicamente la etapa: realizar un cálculo no como fin último sino como un

instrumento para obtener una solución. En realidad, se necesita es que a los estudiantes se les proponga una acertada e interesante pregunta, el estudiante realice o prepare modelos, analicen los resultados e interpreten las respuestas solución. Lo que se necesita actualmente en el campo laboral, es de personas que sepan cómo pensar y como razonar más que sólo calcular.

Según Mora (2013) se han propuesto algunas estrategias que ayudan a encender la curiosidad y que utilizadas con matices diferentes han sido empleadas por muchos docentes desde la primaria hasta niveles de secundaria. Entre ellas se encuentran las siguientes:

- Comenzar una clase con algo provocador, una frase, un dibujo, un esquema, un diagrama, un pensamiento, un concepto con algo que resulte interesante.
- Presentar un problema cotidiano que lleve a despertar al alumno al principio de las clases “Durante el trayecto a la escuela he visto en un campo una fila de 10 árboles y otra columna de 20 árboles y todos pintados con una franja azul, ¿Porque razón creen que lo anterior se debe? ¿Qué intención tiene quien lo ha hecho? ¿Cuáles razones posibles tendrá?”
- Crear una atmosfera para el diálogo por parte de los alumnos en la que estos se vean relajados y a gusto y no cuestionados sobre si sus preguntas son tontas o sin ningún interés.
- Dar el tiempo suficiente para que algún alumno desarrolle un argumento y se vea con ello motivado a encontrar la solución ante los demás del problema que se plantea
- Hacer preguntas sobre un tema concreto no preguntar sobre un problema ya elaborado, sino incentivar al estudiante a que sea él quien plantee el problema de forma espontánea. Ello estimula su propia autoestima y motivación personal.
- Introducir durante el desarrollo de la clase elementos que impliquen incongruencia, contradicción, novedad, sorpresa, complejidad, desconcierto e incertidumbre.

- Que todo lo anterior se realice adecuadamente sin provocar ansiedad en los alumnos.
- Procurar en las aulas la participación activa del estudiante y su exploración personal
- Reforzar el mérito y el aplauso ante una buena pregunta o resolución de un determinado problema
- Modular, pero no dirigir la búsqueda de una respuesta por parte del alumno y menos proporcionar la respuesta.

Entre los países que logran alcanzar sus metas de rendimiento están los asiáticos, específicamente en China (*Asia Society*, 2005). En la prueba de PISA, la Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OECD, 2012) ha mostrado increíbles resultados ya que se encuentra en el primer lugar a los alumnos de China con una razón de dominio del 75% y en cambio a Estados Unidos de América con uno del 32%. Aún así, China se ha embarcado en dejar de ser tan tradicionalista y busca emular a los Estados Unidos de América en permitir que el conocimiento matemático se construye en el aula por los alumnos, por lo que ha nuevamente reformado su currículo a partir del año 1990, el cual promueve un razonamiento de alto estándar y contextualizado a la vida de los estudiantes.

A diferencia de los docentes en Estados Unidos de América, los docentes de China de matemática en primaria son especialistas en la materia únicamente. En los Estados Unidos de América los docentes son “generalistas” y se les pide que tengan una amplia preparación para impartir todas las materias curriculares en primaria. En China, los docentes de matemática se les permiten tener el tiempo para preparar sus clases y materiales en el aula. Los docentes en China operan bajo un único currículo nacional base que ofrece guías y materiales didácticos sugeridos para impartir los diversos temas de matemáticas de carácter tradicionalista. En cambio, los docentes en Estados Unidos de América no cuentan con ese tiempo “extra” libre durante su jornada laboral y deben permanecer en sus aulas impartiendo las diversas materias en el día, por lo que

tienden a basar su planificación diaria únicamente utilizando los textos de matemática sin ninguna preparación previa en la gran mayoría de los casos.

Los docentes en China de matemática son entrenados luego del nivel de diversificado por tres años más. En cambio, los estadounidenses deben completar un grado universitario ("*Bachelor's Degree*") y además deben seguir con más cursos y entrenamiento para trabajar como docentes. Comparando, los estadounidenses estudian y entrenan tres a cuatro años más que los docentes de China.

Las corrientes didácticas se dividen en el mundo en tradicionalistas como en China con clases donde se cuenta con muchos alumnos y son rígidas estructuras de comportamiento y de corriente ultra progresista como sucede en países como Estados Unidos de América y Finlandia. En la tradicionalista los estudiantes reciben sus clases de matemática y deben mantenerse atentos y obedientes y se les pide realizar prácticas extensas durante el periodo de clases y luego de las mismas. En la corriente ultra progresista es el alumno el que impone su paso de instrucción, con mucha actividad tipo proyecto e investigativa, con poca o nulas tareas y con el maestro siendo un facilitador en todo el proceso.

En la forma balanceada se puede incluir estas dos corrientes didácticas tanto tradicionalistas como ultra progresista dependiendo del tema que se trate en el día escolar. Lo ideal en una clase matemática es que sea el resultado de una buena planeación, adecuado recurso del currículo nacional base, lecciones matemáticas que puedan incorporar una mezcla de exposición, instrucción y de actividades cooperativas e individuales. Debería incluirse una discusión de las ideas de los estudiantes, incluyendo errores y conceptos no muy claros. Algunas lecciones pueden darse muy formales y otras menos formales, pero en general las actividades deben ser retadoras y la práctica de ejercicios debe ser en cantidad y en tiempo adecuadas para el nivel escolar del estudiante. Cada lección debe ser con propósito definido y con objetivos basados en un previo análisis conceptual del tema matemático a tratarse.

Liping Ma (1999) en su libro *“Knowing and Teaching Elementary Mathematics”* comenta que lo ideal es que el docente conozca profundamente la Matemática básica para instruir a nivel de primaria. Sus estudios en China y en Estados Unidos de América le han llevado a concluir que el conocimiento profundo del contenido pedagógico matemático es fundamental para la enseñanza de la matemática en primaria. El docente debe dominar la materia de matemáticas para apoyar a sus estudiantes a aprenderla. Se deben apoyar con contenidos significativos y representaciones que ayuden a los estudiantes a entender por ejemplo en la división las fracciones primero. Se pueden incluir situaciones reales, problemas tipo historias para mostrar la aplicación de contenidos en particular. En la mayoría de los docentes estadounidenses del estudio de Liping Ma encontró que los docentes carecían de las destrezas de aplicar correctamente el algoritmo para explicar el invertir la fracción y multiplicarlo por su recíproco. Algunos lo convertían a decimales. En contraste con los docentes en China quienes pudieron resolver el 90% de los problemas y explicar convenientemente ya que utilizaban la enseñanza por “paquetes”³⁸. Los cuales primero consistían en explicar los conceptos, luego la representación del concepto (signos, formato, algoritmo), y su desarrollo procedimental con variadas formas de poder resolverse y que tenga sentido la interrelación de los “paquetes” de conocimiento o información a los estudiantes para adecuarlo y ponerlo en práctica con el apoyo del docente.

En China, la instrucción de la matemática ocupa el 60% del tiempo de clase lo cual en comparación con Estados Unidos es mucho menor (Wei, 2014)³⁹. Sin embargo, a diferencia de los Estados Unidos de América el tiempo de preparación docente es mucho menor (2 a 3 años luego de graduarse de secundaria). Los padres de familia en Asia están más preocupados por la formación docente. Se puede decir que mucho es debido a familias de un solo hijo y por ello sus expectativas son siempre mucho mayores por tratarse de su único hijo. A su vez la autora del libro Ma, recomienda el aprendizaje a nivel de primaria de secuencias

³⁸ chunk learning

³⁹ Wei, Kan (2014) recuperado en:

<http://theconversation.com/explainer-what-makes-chinese-maths-lessons-so-good-24380>

numéricas y del aprendizaje y competencia y dominio del uso de algoritmos (aprendizaje naturalista) en contraposición con el enfoque más general y disruptivo de los procesos matemáticos. El punto principal de la investigadora Ma es que en cuanto más temprano se formalicen los procesos matemáticos en los niños en la primaria menos dificultades se presentaran en la futura formación educativa de estos mismos niños. Ma comenta en su libro que a pesar de que algunos procesos matemáticos pueden ser “creados” o simplificados por los estudiantes es de reconocer que la base algorítmica del proceso aritmético es recomendable dominarlo, aunque la creatividad no debe menospreciarse en el camino del aprendizaje.

Los docentes asiáticos no permiten el uso diario de las calculadoras o computadoras en las clases de matemática porque enfatizan que sus estudiantes aprendan y comprendan los conceptos primero y las operaciones paso a paso necesarias para obtener los resultados. Los asiáticos no fomentan el uso de la tecnología en forma temprana en la etapa escolar hasta durante la formación secundaria, porque prefieren que los estudiantes tengan las experiencias manipulando objetos concretos para aprender los conceptos convenientemente. A su vez, exhortan a la familia en la etapa primaria a convivir con sus hijos en todas las actividades necesarias para motivar a sus hijos para el gusto de las ciencias especialmente las matemáticas con “noches de matemática en la casa” con auxilio de recursos disponibles para realizar juntamente con los padres de familia en forma positiva, efectiva y alentadora (Stevenson, 2001).

A partir de los 1980's se han adoptado los estándares internacionales de la asociación “*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*” (National Council of Teachers of Mathematics NCTM, 1989) el cual pone énfasis en que los estudiantes afiancen su entendimiento, razonamiento, solución de problemas y la correcta comunicación o exposición. Los estudiantes deben activamente interpretar, organizar y construir el significado de las situaciones matemáticas con un modelo matemático adecuado. Los estudiantes deben acostumbrarse a visualizar, describir y analizar las situaciones en términos

matemáticos y ser capaces de justificar y probar ideas con fundamentos matemáticos. (Fosnot, 2005). En el 2010 los Estados Unidos de América se adopta el *Common Core State Standards* sin lograr aún superar al sistema curricular de China (Wei, Kan 2014). Actualmente muchas escuelas y colegios privados de Estados Unidos tomaron la iniciativa de incorporar el sistema de método Singapur traducido al inglés. En Colombia y Chile se utiliza desde el 2014 el libro de matemática “Método Singapur Pensar sin Límites”⁴⁰.

A partir del año 2015 en muchos países de Europa, se toma la decisión de utilizar la serie de libros “*The Shanghai Maths Textbooks*”, traducidos al inglés del chino tradicional (mandarín) para apoyar a los estudiantes europeos. En el Reino Unido a partir del 2017 se incorporará el método Shanghai (“*The Shanghai Maths Project*”)⁴¹ de China. El método es muy parecido al método Singapur.

En Guatemala además de contar con un Currículo Nacional Base⁴² accesible vía internet desde el año 2014 totalmente socializado entre los docentes. Se trabajó un proyecto con JICA (Cooperación Internacional de Japón en Guatemala) se prepararon las series de cuadernos GUATEMATICA en el año 2002. El proyecto constituye un aporte al desarrollo de la política educativa de “fortalecimiento de un sistema nacional de educación que responde a la política de estándares nacionales e internacionales de calidad educativa”. Para la ejecución del proyecto se seleccionaron especialmente escuelas, en los departamentos de San Marcos, Sololá, Suchitepéquez y Quetzaltenango. La organización de contenidos e indicadores de logro que se proponen para el trabajo de Guatemática responden a las competencias que la alumna y el alumno debe evidenciar como se plantea en el currículo nacional base de Guatemala. Se cuenta con distribución de los cuadernillos para el docente y para el alumno. Sin embargo y a pesar de contar con este recurso, desde la incorporación del proyecto a la

⁴⁰ www.pensarsinlimites.cl

⁴¹ www.collins.co.uk

⁴² Recuperado en www.cnbguatemala.org/wiki/Bienvenidos_al_Curriculum_Nacional_Base

fecha en Guatemala, no se ha mostrado o alcanzado un mejorado o satisfactorio nivel de logro a nivel de País en matemática. (DIGEDUCA, 2016).

Las estrategias cognitivas que asisten a solucionar problemas son utilizando la prueba y el error, otra forma es la de utilizar algoritmos los cuales son procedimientos paso a paso que garantizan una solución. Los algoritmos sin embargo pueden ser muy tediosos y laboriosos. Otra estrategia son los métodos heurísticos los cuales son estrategias de pensamiento simple para reducir el tiempo en resolver los problemas. Puede ser más eficiente, pero conlleva más errores porque no utiliza procesos de comprobación en la mayoría de las veces. Durante el aprendizaje se puede caer en la fijación de un método de pensar para abordar un problema. Lo que puede hacer una predisposición mental puede provocar una obstaculización de resolver el problema. Lo mismo sucede si se utilizara la intuición (forma heurística). Se pueden tomar decisiones basadas en “atajos” mentales que en tiempos prehistóricos si eran útiles para la sobrevivencia, pero para los tiempos actuales al abordar problemas de razonamiento lógico o abstracto como es en el caso de la matemática resulta no necesariamente efectivo para alcanzar las soluciones y que sean pertinentes o exactas.

A pesar de que los maestros conocen la importancia de usar material manipulativo y juegos en la enseñanza de la matemática se conforman con el método tradicional en el aula, esto no propicia aprendizajes significativos en los alumnos por ser actividades del tipo pasivo y receptivo (promueve pocas acciones que involucren a los alumnos para ser partícipes de sus propios aprendizajes (Aguare Castro, 2014)

Según Vigotsky (1978), los alumnos aprenden mejor en colaboración y en tareas significativas e interesantes, se les debe proveer el espacio en clases para el trabajo colaborativo y apoyo en la casa para fortalecer la importancia y utilidad de la matemática. No basta con solo ayudar a los alumnos aprendan sino considerar las oportunidades que lo que aprendan lo aprendan bien. Por lo que, los alumnos deben interactuar con sus compañeros y con situaciones

relacionadas a su propio contexto que los conduzcan al aprendizaje. (NCTM⁴³, 2000).

Según Ausubel (1976, 2002) citado por Lara Galo, Claudia (entrevista Prensa Libre, 2013⁴⁴, entrevista con la autora, UVG 2016) resalta la importancia de que el estudiante parta su aprendizaje de lo conocido para que pueda generar nuevos conocimientos. Entre más relacionado esté lo que estudie con lo que vive en mayor medida dará lugar a aprendizajes significativos. El aprendizaje de la matemática se puede resumir que debe dar en cuatro pasos: concreto y de contexto a la vida del alumno, ilustraciones o gráficos, usar lenguaje comprensible para el alumno y por último utilizar un lenguaje matemático formal ya sea oral y/o por escrito. Muchos docentes se quedan solo con el último paso del proceso CPA⁴⁵.

Las dificultades de aprender el lenguaje matemático en otro idioma que no sea el materno también influye en la etapa preprimaria y primaria. El aprender la matemática en otro idioma que no sea el materno añade las dificultades de comprensión ya que no puede relacionar el estudiante sus experiencias personales que son en su lengua materna con lo impartido en el aula – etnomatemática.

D. Dificultades que se presentan en el aula durante el aprendizaje de la matemática

El fracaso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tiene una alta hegemonía y se muestra partiendo de los estudios de variables que intervienen en la educación: padres (determinantes familiares), profesores (determinantes académicos) y los propios alumnos (determinantes personales) (Friz Carrillo, 2009)⁴⁶.

⁴³ National Council of Teachers of Mathematics (2000) recuperado en <https://www.nctm.org>

⁴⁴ Disponible en http://www.prensalibre.com/revista_d/matematica-puede-divertida_0_917908400.html

⁴⁵ CPA – Concreto, pictórico y abstracto

⁴⁶ Friz Carrillo, Miguel; Carrera Aray, Clemencia; Sanhueza Henríquez, Susan, (2009) Enfoques y concepciones curriculares en la Educación Parvularia. Revista Pedagogía (en línea). Universidad Central de Venezuela. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=65911663003>

Las dificultades que presentan los estudiantes para aprender matemáticas en muchas ocasiones están vinculadas a situaciones didácticas inapropiadas o a la ausencia del conocimiento disciplinar adecuado de los docentes, quienes utilizan la memorización bajo la idea de que un mismo tipo instructivo didáctico es posible aplicar a todas actividades en el aula. Estas creencias son traspasadas de generación a generación de docentes, lo cual solo termina reproduciendo prácticas desactualizadas, proporcionando estudiantes con escasos conocimientos relativos a cómo intervenir frente a diferentes temas en la matemática. Es necesario generar nuevas demandas para la Educación particularmente en la formación inicial de docentes, incorporando contenidos que resulten relevantes y pertinentes. La educación matemática debe apoyarse al conocimiento psicopedagógico asociadas a la problemática de la dificultad de aprendizaje. Los cuales actualmente se abordan en la mayoría de las veces de manera superficial y obstaculiza instalar las competencias necesarias en los estudiantes, sin considerar la diversidad cultural.

Las evidencias indican que los maestros en formación no se encuentran preparados para abordar la diversidad del aula y desconocen las opciones de apoyo específico que proporcionan los centros escolares. Una de las explicaciones de la ausencia de competencias profesionales es proporcionada según Becerril (1999) y señala que los actuales planes de estudios no preparan para la complejidad de los sucesos acontecidos en el aula, existiendo un predominio del conocimiento informal, con ausencia del conocimiento psicopedagógico que, entre otros factores, contempla problemáticas asociadas a las dificultades de aprendizaje. Habitualmente, temáticas relacionadas con la diversidad educativa son abordadas superficialmente y con escaso tiempo en los currículos de formación, lo que obstaculiza instalar competencias que posteriormente respalden el trabajo del docente en el aula (López, 1999).

Las mediciones nacionales e internacionales coinciden en que las matemáticas es una de las áreas más problemáticas en términos de rendimiento de los alumnos. Algunos indicadores son que, muchos estudiantes permanecen en

niveles iniciales en matemática aún en grados en los cuales se espera que: la comprensión de números naturales, realización de los cálculos simples y el estudio de formas geométricas como manejos de conceptos básicos simples en resolución de problemas, sean dominados (MINEDUC, 2016).

El fracaso en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra estrechamente vinculado con los procesos lingüísticos, por ejemplo, en la comprensión del enunciado de un problema. Estudios indican que la probabilidad de responder correctamente a una pregunta de matemáticas no estaría únicamente condicionada por las habilidades matemáticas de los alumnos, sino además por su familiaridad con los distintos formatos de preguntas, del lenguaje en sí (Ramírez, 2002).

Los estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es un área prioritaria dentro de las políticas educativas en Guatemala. Las dificultades de las matemáticas se pueden señalar que, se presentan preferentemente en procesos asociados al cálculo y a la resolución de problemas. Las dificultades del aprendizaje de las matemáticas implican un nivel de rendimiento académico en matemáticas por debajo de lo esperado de acuerdo con la edad cronológica y al nivel de desarrollo mental de los alumnos aún teniendo un cociente intelectual medio y escolaridad regular.

Existen diversos enfoques que explicarían estas dificultades, algunos son más enfoques neurológicos o cognitivos que atribuyen las dificultades principalmente al alumno a un enfoque evolutivo educativo (Miranda, Fortes y Gil, 1998), lo que implica que éstas podrían tener un carácter transitorio y ser prevenidas y o corregidas a través de una estimulación adecuada, principalmente en los primeros años. Un alto porcentaje de alumnos que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no logran responder a las estrategias o metodologías que utilizan sus docentes para enseñar matemáticas, porque estos últimos no recibieron una formación adecuada para atender formas, ritmos y estilos diversos de aprendizaje, lo que indicaría que el problema radica en el aula.

Las dificultades están relacionadas con los niveles de escolarización de los alumnos, por lo tanto, en los primeros años es recomendable el tratar de estimular el desarrollo de funciones básicas vinculando todo tipo de experiencias a su entorno. En la educación general básica recién una vez instalados los procesos de lectura, escritura y matemática básicos, se puede intentar realizar un diagnóstico de las dificultades del aprendizaje de la matemática antes de pasar a niveles más complejos y de mayor complejidad matemática.

A nivel de educación parvulario se desarrollan los procesos básicos de atención, percepción, memorización y diferentes procesos cognitivos y meta cognitivos y aspectos socio personales como el “auto concepto”, y se aconseja el trabajar contenidos como números, orden, correspondencia, clases, agrupación, a través de actividades de lógica, cálculo, medida, relaciones espaciales y temporales con el apoyo de diversos materiales o recursos lúdicos, lógicos, regletas, juegos en computadores, entre otros (García, 2001).

Por su parte, en educación general básica, ya se trabaja el cálculo escrito y ello exige una mayor formalización para seguir unos pasos establecidos por diferentes reglas y algoritmos, todo ello para apoyar el aprendizaje de las cuatro operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y la división. Se incorporan actividades de estimación, redondeo, resolución de problemas y de representaciones geométricas.

Principalmente, tomando en cuenta que la actuación del docente juega un rol fundamental en la autoestima de los alumnos se debe trabajar mucho en la profesionalización o capacitación docente de los temas a abordar, ya que las evidencias demuestran que existe una relación directa entre las actitudes hacia las matemáticas y rendimiento académico (Ramírez, 2005).

Dentro de las dificultades más recurrentes se encuentran las referidas al dominio de la numeración, la falta de habilidad en representar visual o simbólicamente o codificar numéricamente la información, dificultades en la resolución de problemas (lo que supone falta de habilidad lingüística), falta de comprensión de términos, conceptos y formas de comunicar el contenido. La

presencia de alta frecuencia de errores procedimentales está relacionada con el desarrollo adecuado de los procesos perceptivos como las dificultades en la lectura de símbolos numéricos o signos. Otros indicadores de deficiencias son la presencia de problemas de habilidades viso espaciales que impiden procesar la información adecuadamente, déficits atencionales los cuales obstaculizan el reconocimiento de signos matemáticos, el procesamiento auditivo que interviene en la decodificación de la información, en la memoria y en el ámbito motor.

Lo importante es que los docentes vuelvan a repensar sus creencias sobre la enseñanza sobre el aprendizaje y sobre la evaluación, considerando que hay dificultades de aprendizaje de las matemáticas generales y específicas. Muchas de las deficiencias que afectan a la formación de docentes son el resultado de que sus planes de estudio están sobrecargados de asignaturas, muchas de ellas innecesarias y un exceso de contenidos teóricos en detrimento de los prácticos. Las deficiencias estriban especialmente en cómo abordar pedagógicamente las dificultades que tienen los alumnos en el aula (Sanhueza, 2006).

Los docentes cuando se inician profesionalmente a la hora de “dar la clase” tienden a refugiarse en imágenes previas y propias (de los mismos profesores cuando estudiaron en la escuela) y se suelen someter inmediatamente a las demandas del contexto escolar en el que deben trabajar, es decir, aprenden a desaprender lo aprendido en su formación inicial o reaprenden en base de experiencias a través de su propia práctica docente. De esta forma, entran a una contradicción: creencias, percepciones y formas de actuación. De esta cuenta, el docente justifica su forma de actuar llevando a pensar equivocadamente que la experiencia es lo único que cuenta. Muchos docentes, manifiestan en general, una aparente simplicidad conceptual y de pensamiento lógico matemático en general: demasiado intuitivo, no racional, escasez de términos abstractos, actitudes en base a dogmas, decisiones impulsivas, falta de indagación en las acciones, improvisación y justificación basada en la experiencia acumulada (Gilroy, 1993).

Las dificultades del aprendizaje de la matemática demanda una formación inicial de docentes sustentada a un enfoque integrado, en donde las matemáticas

no sean ajenas a la vida cotidiana sino parte de ella y que, en consecuencia, requieren para su aprendizaje la condición de un saber situado.

La mayoría de los docentes están de acuerdo de que las dificultades del aprendizaje de las matemáticas se presentan preferentemente en el dominio de la resolución de problemas, adquisición de funciones básicas, procesos perceptivos y la operatoria. Los docentes en su mayoría opinan que los alumnos que, presentan dificultades no solicitan ayuda al profesor para resolver dudas, prefieren estar distantes en el aula, los alumnos no se esfuerzan en terminar sus deberes, presentan problemas de disciplina y presentan ansiedad ante las evaluaciones. En la mayoría de casos tampoco son alumnos proactivos, aunque en algunos casos parezca proactividad el tratar de llamar la atención del docente de forma tal que sus debilidades o dificultades en la materia las desea superar con llamar la atención del docente o sus compañeros en el aula. Los docentes para mitigar las dificultades en el aula, adaptan el contenido (enfoque curricular normativo centrado en la transmisión de conocimientos) con recursos didácticos, utilizan estrategias como la cognitiva, personalizada y de visualización. Sin embargo, hay que evitar sesgar con estos estereotipos a los alumnos que perjudican y no se benefician en superarse.

La formación inicial docente, debe contemplar problemáticas de dificultades del aprendizaje de las matemáticas e incorporarlas en forma transversal al currículo de formación docente, para desarrollar una actitud positiva hacia el alumnado que mayor atención requiere, además de sensibilizar y motivar a ser futuros docentes más inclusivos.

Los docentes deben estar conscientes al presentarse las dificultades en la matemática, de que, deben tomar decisiones que ayuden a reestructurar programas. De ser necesario, actualizar o replantear contenidos, conceptos, definir metas, revisar la vinculación del medio escolar y reflexionar sobre las propias creencias que pueden ser las que estén obstaculizando o limitando a sus alumnos.

E. Corrientes didácticas en la matemática que se enfocan en el estudio del error

Según George J. Posner (1992) dentro de las teorías o perspectivas curriculares se pueden presentar la del tipo tradicional, experimental, estructura de disciplinas, y la conductual y cognitiva - constructiva. Cada una de las corrientes curriculares cuenta con una aproximación o filosofía y puede contener más de una perspectiva o filosofía curricular. El Currículo Nacional Base de Guatemala, es basado en la corriente constructivista por competencias.

En el siguiente recuadro, se muestran las siguientes sugerencias que se hacen a los docentes en Guatemala:

Sugerencias de estrategias de aprendizaje⁴⁷

1. Para resolver problemas es importante que desarrolle creatividad en sus estudiantes. La creatividad es la habilidad de generar ideas nuevas y resolver problemas y desafíos de cualquier tipo. Algunas técnicas útiles son:
 - Permita que el estudiante proponga distintas formas de resolver un problema. De esta manera no aprenderá de memoria las soluciones y entenderá qué está haciendo cuando se enfrente a los mismos.
 - Divida el grupo de estudiantes en pequeños grupos de 3 o 4 personas y propóngales un problema de aritmética, álgebra, ecuaciones lineales, problemas geométricos. Motive a que piensen la solución en equipo. Con este tipo de actividades logrará que los estudiantes imiten y propongan estrategias de resolución de problemas con menos temor.
 - Hagan mapas mentales antes de resolver un problema. Esto les servirá para que los estudiantes logren identificar todas las partes importantes del problema y elaborar un plan para resolverlo. También ayuda que dibuje diagramas y/o figuras que representen el problema.
2. Enseñe y utilice alguna metodología para la resolución de problemas. La metodología de Pólya (1945) según Nieto (2004) es una de las más fáciles y exitosas que existe. Esta consta de cuatro pasos:
 - Comprensión del problema: Contestar a las preguntas: ¿Qué me piden? ¿Qué datos me dan? Con esta etapa se desea que el estudiante se detenga y reflexione sobre el problema sin resolverlo. La idea es que tenga bien claro qué le están pidiendo.
 - Elaboración de un plan: Contestar a las preguntas: ¿Existe alguna expresión para representar mis datos? ¿Puedo construir un diagrama o una figura que represente mis datos? ¿He resuelto algún problema similar y en qué es diferente? ¿Puedo relacionar todos los datos? Con esta etapa se desea que el estudiante reflexione sobre lo que puede hacer y cómo lo va a hacer. Obliga al estudiante ir sobre conocimientos previos.
 - Ejecución de un plan: Contestar a las preguntas: ¿Puedo ver que mis pasos son claros y correctos? Se desea que el estudiante evalúe si lo que ha propuesto de solución es claro. Algunas veces, las respuestas a la pregunta, nos llevará de regreso a la etapa anterior.
 - Visión retrospectiva: Contestar a las preguntas: ¿Puedo obtener el resultado de otra forma? La idea es que el estudiante verifique de otra manera si su resultado es correcto.

⁴⁷ Disponible en http://cnbguatemala.org/wiki/Serie_Aprender_del_Error/14

Estas sugerencias pueden aumentar la efectividad docente, si además se incluyen didácticas cognitivas que fomenten más a los estudiantes a descubrir el tema o concepto y así lograr adecuar en su mente lo aprendido. La búsqueda de la verdad aumenta la parte emotiva del aprendizaje que hace de la experiencia más interesante para los estudiantes. Los estudiantes curiosos por naturaleza, se ven sorprendidos al ser ellos mismos los que encuentren donde radican sus errores al comprenderlo y así no cometerlos de nuevo.

La filosofía constructivista tiene la misma raíz que la del tipo conductual quien tiene a Aristóteles (384 – 322 a.C.): primer filósofo griego en postular la observación y descripción de la naturaleza. Se le considera el primer científico y su principal exponente.

La corriente constructivista se basa en la del tipo teoría cognitiva la cual tiene como principal pensador a Platón en la cual las ideas o conocimientos son preexistentes en los individuos: todo lo que los docentes deben hacer es permitir que los estudiantes lo recuerden. El constructivismo además de incluir el cognitivismo, incluye el tema de la innovación, creatividad en forma productiva, para darle un sentido a la vida. Se encuentra más énfasis en esta corriente para el entendimiento y en el conocimiento. El currículo permite a los estudiantes el desarrollar su propio aprendizaje en actividades que se requieren juicios, conjeturas, toma de decisiones y solución de problemas.

El Consejo Educativo para la Matemática en Estados Unidos, “*National Council of Teachers of Mathematics*” (NCTM, 2000) describe principios y estándares básicos para las matemáticas en primaria y secundaria. Para primaria especialmente de tercer grado a quinto grado de primaria los estándares que pide son el dominio del razonamiento de la multiplicación. Con este dominio, de la operación de la multiplicación, el alumno desarrolla y construye un razonamiento proporcional necesario, para desarrollar la comprensión de las fracciones que los llevara luego a la comprensión del tema de la operación de la división. Luego de este dominio, sigue el concepto de la equivalencia que ayuda a que los estudiantes aprendan distintas representaciones matemáticas o símbolos, para

explorar luego ideas álgebraicas y, por último, dominio en la fluidez de cálculo. Es durante el cálculo, en donde los estudiantes aprendan métodos eficientes y precisos de cálculo matemáticos, con propiedades adecuadas al haber, al hacer y al saber del estudiante con métodos eficientes, precisos como en forma fluida.

Es por ello, que la entre las didácticas cognitivas recomendables como la del Dr. Lev N. Landa con la Teoría de Instrucción denominada Landamática (*"Landamatics"*). Esta corriente considera imperativo, el retroalimentar al estudiante de sus dificultades para poder luego al dominarlo subir el grado de dificultad y solo hasta entonces, continuar con su aprendizaje. En definitiva, si un estudiante encuentra un obstáculo cognitivo y comete errores, el docente es quien guía y apoya hasta que, el estudiante logre superar el tema o concepto difícil.

Se disponen en la actualidad de diversos abordajes instruccionales para fomentar una didáctica matemática agradable y completa para los estudiantes. Entre otras figuran la didáctica Davydovsiana es basado en Vygotsky fomentando las destrezas sociales en los estudiantes para lograr mejorar su desempeño matemático, Instrucción Cognitiva Guiada los cuales se apoyan de sistemas tecnológicos o inteligentes para seguir los pasos llevados a cabo por los estudiantes al realizar una tarea y diagnosticar en dónde radica la dificultad o patrón el error o "bugs", la neurodidáctica matemática: se apoya de la neurociencia para motivar a los estudiantes al aprendizaje matemático ante los nuevos conceptos con el uso de blogs y de y la didáctica con el apoyo de la inteligencia artificial.

1. Didáctica Landamática (Landamatics) – Didáctica basada en el pensamiento algorítmico. Se considera a la teoría cognitivista como apoyo de corriente psicológica para el estudio en el ámbito de los errores aritméticos, ya que ahonda en la descripción de los procesos que se llevan a cabo consciente e inconscientemente, que generan desde conductas erróneas hasta procesos erróneos por un obstáculo cognitivo. Entre las corrientes de teorías cognitivistas se tiene el educador Dr. Lev N. Landa quien estudió el rendimiento o conducta de los alumnos en tareas determinadas en los procesos matemáticos de la

geometría, hasta en los ocurridos en el estudio de gramática de una lengua extranjera. A estos preceptos o conceptos los aborda como una serie de solución algorítmica en la cual le precede la Teoría de la Gestalt⁴⁸ y otros, de tradición Piagetiana⁴⁹ y de Lev Vygotsky.

Una interesante propuesta, para el apoyo de la fundamentación sobre el modelo de instrucción que apoya al docente en el desarrollo cognitivo de sus estudiantes, es la que planteaba el Dr. Lev N. Landa en su teoría de instrucción “*Landamatics Instructional Design Theory*”⁵⁰(1999). Esta teoría se utiliza para enseñar métodos generales que mejoren la forma de pensar y aprender, basado en algoritmos mentales. Esta fundamentación será base en lo referente a los algoritmos para la enseñanza y el aprendizaje. El principal objetivo de esta teoría de “*Landamatics*”, es enseñar a los estudiantes métodos de pensar del orden superior en habilidades de pensar (*higher order thinking skills*). Es para todos los tipos de contenidos curriculares, los cuales requieren de estructuras lógicas tipo algoritmo (currículo oculto), que permitan al estudiante manejar cognitivamente muchas operaciones mentales básicas de pensamiento lógico.

La Teoría de Instrucción Landamática fue creada por Lev N. Landa (1999), como un método general de aproximación al diseño virtual de cualquier curso o

⁴⁸ Corriente psicológica alemana surgida por el año 1912. Esta corriente describe que la mente configura a través de ciertos principios los elementos sensoriales y de la memoria de experiencias. Describe que el “Todo es más que la suma de sus partes”. Destacaban a la organización y la unidad de los fenómenos. Definían a las experiencias mediatas y consideraban que el individuo se relaciona en forma activa con el entorno en forma de interacciones. El aprendizaje es una experiencia subjetiva y es el resultado entre el observador y los estímulos (Max Wertheimer); el aprendizaje por discriminación con relaciones del tipo *insight* (introspección) (Wilhem Wundt – 1879) el cual conduce al aprendizaje más rápido (Wolfgang Kohler); y que el aprendizaje es por imitación, ideacional y sensor motor (Kurt Koffka).

⁴⁹ Jean Piaget (1929) buscaba encontrar el entender el desarrollo de la inteligencia, estaba interesado en las creencias de los niños con respecto al espacio (volumen, tiempo, fenómenos naturales, etc.). Apoya la corriente a los educadores a un entendimiento profundo de la mente infantil y que los docentes deben esperar a que los alumnos estén cognitivamente listos o preparados antes de abordar conceptos abstractos (como es la matemática). Esta noción de que la mente primero asimila las nuevas ideas y luego debe acomodarlas dentro de sus preexistentes estructuras para poder reacomodarlas dentro de una nueva idea reorganizando toda la estructura de la mente (*mindset*) siendo bases del moderno constructivismo. Lo que Piaget estudiaba en el pensamiento abstracto Noam Chomsky (1968) lo proyectaba en el estudio de los alumnos al adquirir el lenguaje materno siendo además importante para este estudio las corrientes conductuales y cognitivas.

⁵⁰ *Instructional-Design Theories and Models: A new Paradigm of Instructional Theory Volume II* edited by Charles M. Reigeluth

plan de clase. Su abordaje está profundamente ligado a ser del tipo conductual y asociado a las teorías de aprendizaje, es apropiado para cualquier materia. En algunos casos, se ha direccionado mayormente esta metodología didáctica, para materias de lógica y secuencia como en la matemática y para los cursos de lenguas extranjeras. Sin embargo, muchos de sus detractores comentan que el uso reiterado de la didáctica matemática de utilizar procesos algoritmos minimiza el pensamiento creativo y en el decremento de los procesos del pensamiento analítico, como son recomendados por la taxonomía de Bloom (Hsu, Yu Chang, 2010).

La teoría de instrucción Landamática es del tipo descubrimiento guiado, con una enseñanza expositora (es decir una instrucción directa) o bien una combinación de las dos. Enfatiza la enseñanza del pensamiento de orden superior (*“higher order thinking skills”*) lo cual es especialmente importante en esta era de la información.

La teoría de Landamática considera, que una de las principales metas de la educación es enseñar los procesos cognitivos, y esto está alineado con la discusión de la enseñanza de destrezas de pensamiento de alto orden que se encuentra en la mayoría de los países desarrollados, como a la exposición al alumno a las operaciones mentales y de las estructuras lógicas incluidas en los métodos del pensamiento de orden superior (*“higher order thinking – HOT”*) según Tate, R.H (2007) y Hsu, Yu Chang, (2010).

Las estrategias de enseñanza de Landamática fomentan en ayudar a los alumnos a descubrir el conocimiento en forma guiada. Puede ser también con el apoyo de una enseñanza del tipo magistral (pero totalmente planificada con antelación y con tiempo de resolución de dudas. Puede a su vez, ser una combinación de tanto la enseñanza de los temas o conceptos en forma guiada por el docente, a que el alumno descubra el tema o concepto y la del docente explicando el tema o concepto en forma magistral). El alumno descubre un sistema de operaciones mentales ya que, a los estudiantes se les pide que realicen una tarea o problema. Los alumnos logran descubrir qué es lo que han

hecho en sus mentes mientras desarrollan las tareas, luego formulan un método (procedimiento o algoritmo) que corresponda al desarrollo de éste. Los alumnos entonces aprenden a aplicar el método, procedimiento o algoritmo descubierto y luego lo practican usando el método “descubierto” paso a paso y con nuevos casos. El método lo internalizan utilizando nuevos casos y no leyendo las instrucciones sino tratando de realizarlo utilizando la memoria y realizando un proceso lógico. Los métodos se automatizan, es decir, se resuelven los problemas o situaciones en forma rápida y luego se repite el proceso desde la guía por el docente hasta el automatizar el método descubierto por el alumno al continuar realizando los siguientes. Con repetir los pasos de este proceso de aprendizaje gradualmente se incrementa el grado de generalidad para poder “subir” el nivel de dificultad.

Landamática se apoya en los valores de una enseñanza del método general del pensamiento en donde, se identifican las estructuras lógicas de varios temas o conceptos para desarrollar procedimientos o algoritmos en la que puedan aplicarse estas estructuras. La obtención de algoritmos es un requerimiento básico en la enseñanza de la matemática, conseguirlo exige un accionar práctico que establezca la interconexión entre contenidos, cálculos y operaciones de menor complejidad, dándole la posibilidad al docente de utilizarlos en la estructura de los pasos que lo conforman.

En la vida cotidiana, se emplean algoritmos frecuentemente para resolver problemas algunos ejemplos son los algoritmos para usar un aparato o durante las instrucciones que recibe un trabajador por su superior. Algunos ejemplos en matemática son el algoritmo de la división para calcular el cociente de dos números, el algoritmo de Euclides para obtener el máximo común divisor de dos enteros positivos, o el método de Gauss para resolver una situación lineal de ecuaciones.

En matemáticas ciencias de la computación y disciplinas relacionadas un algoritmo del griego latín: “*dixit algorithmus*” y desarrollado por el matemático persa Al Juarismi es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas,

ordenadas y finitas que permiten realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generan dudas a quien deba realizar dicha actividad. Dados un estado inicial y una entrada, siguiendo los pasos sucesivos se llega a un estado final y se obtiene una solución. Los algoritmos son el objeto de estudio de la algoritmia.

La didáctica Landamática apoya, para que los estudiantes analicen las razones y sugieran apropiadas soluciones aplicando sus conocimientos y utilizando las órdenes superiores de habilidades del conocimiento (*higher order thinking skills*), con un razonamiento lógico asertivo y certero. Se busca apoyar a los estudiantes en el cambio de actitud más positiva, entender posibles problemas y predecir sus efectos, se requiere reafirmar el proceso de razonamiento lógico para ello se les ofrece guías a los estudiantes para que estos descubran las operaciones lógicas mentales que necesitan desarrollar como método general de pensamiento. Se apoya a los estudiantes para que puedan reconocer como razonan en sus mentes para realizar una tarea o resolución de problemas y así ellos puedan formular sus propias estrategias o métodos para resolver. Los docentes apoyan entonces que los estudiantes apliquen el método o estrategia de resolución descubierto, apoyan en internalizar este método o estrategia y activan la actitud de auto diagnosticar u autorregular los componentes disonantes en un proceso matemático como un gran *continuum* en la mejor forma de trabajar.

2. Didáctica Davydovsiana. Los estudiantes en algunas situaciones revelan entendimiento de los conceptos matemáticos en forma fragmentada y no interrelacionada. Luego, el currículo al estar fragmentado, textos deficientes, bajas expectativas docentes y pocas o nulas auto demandas de superación de los estudiantes al final afectan en el logro del desempeño. (Lee, Ji Eun, 2002)⁵¹, (Schmidt, McKnight y Raizen, 1997)⁵².

V.V. Davydov tuvo interés en entender las dificultades de los estudiantes al aprendizaje de la matemática que gira desde un interés en una competencia

⁵¹ Ji – Eun Lee (2002) *Dissertation An analysis of difficulties encountered in teaching Davydov's Mathematics Curriculum to Students in a U.S. setting and measures found to be effective in addressing them.*

⁵² Schmidt, W. H., McKnight, C., & Raizen, S. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

individual a un currículo diseñado con métodos de enseñanza aprendizaje o de instrucciones. Si se tiene una buena teoría y se diseña un adecuado currículo con la teoría y con una apropiada pedagogía, se puede mover hacia una adecuada instrucción matemática. En ese aspecto se trata esta tesis de una introducción a la teoría Vygotskiana y de un currículo de matemática en primaria Davydovsiana.

La Didáctica Davydovsiana del currículo de matemática para primaria es construido bajo el legado de Lev Vygotsky, ha sido utilizado por varias décadas en Rusia y otros países de la región. Los educadores rusos han reportado los resultados del efecto de este currículo en las aulas. De acuerdo con los educadores rusos, los estudiantes de primaria tienen un mayor potencial de adquirir mucho más conocimiento que en tiempos anteriores. Las investigaciones aseguran que el currículo Davydov prueba que esta instrucción, puede controlar el desarrollo del pensamiento cognitivo y que los alumnos pueden actualmente aprender en forma abstracta sin contar con ejemplos concretos con antelación.

Esta didáctica captura la noción del pensamiento ejemplificado para el desarrollo de los procesos integrales de los estudiantes, en donde las destrezas sociales, sobre todo orales (habla y gestual) apoyan en servir a las funciones de comunicación social y se internalizan como herramientas del pensamiento para la solución de los problemas. El traslado de la plataforma social hacia la internalización el plano funcional requiere de un compromiso de los estudiantes en la positiva interacción con sus compañeros de aula y de algunos adultos que los apoyen como los padres de familia, tutores y los mismos docentes. Durante las interacciones sociales los estudiantes y sus compañeros utilizan palabras y gestos para regular una interacción proactiva, para conceptualizar objetos, integrando las experiencias individuales, para recordar y reforzar los eventos, definir planes de cómo solucionar los problemas en el trabajo de grupo, y ofreciendo explicaciones.

Es a través de otorgar espacios de socializar y de utilizar el habla durante actividades de matemática que se les permite a los estudiantes el transformar su forma de pensar. Lev Vygotsky no asegura que el sólo hecho de platicar o hablar

en público asegura una mágica fuerza de crear una función intelectual. Asegura, que se adquiere esa capacidad únicamente cuando es además utilizada en un entorno social y se instrumentaliza por el estudiante para aumentar sus capacidades intelectuales. (citado por Levian, 1981). La oportunidad de utilizar el lenguaje sobre todo en actividades de grupo colaborando con otros es central para el desarrollo conceptual desde el punto de vista sociocultural. (citado por Renshaw, Peter, 1996)⁵³.

Lev Vygotsky asegura que un estudiante que domina el álgebra tiene un plano de conocimiento muy alto (Vygotsky, 1986), un nivel de abstracción y generalización que transforma el significado del nivel inferior (aritmética). El desarrollo de este nivel alto algebraico en el conocimiento no solo precede el desarrollo de la aritmética, sino que además se vuelve el principal foco de la educación primaria. El cual es caracterizado por orientar a los alumnos de lo más abstracto y general del entendimiento de la matemática hacia el empiezo de una instrucción formal. Esta orientación para la estructura teórica es mediada manejando las herramientas psicológicas las cuales no se encuentran en forma incidental para la solución de tipos de problemas particulares, porque hay en cambio el foco de una instrucción explícita. Se caracteriza por un desarrollo de un adecuado concepto de base, la incorporación de principios de lógica dialéctica, y un avance de un abstracto para lo concreto en el desarrollo del contenido conceptual. Es el cambio de los preconceptos (los cuales los alumnos de primaria con los conceptos en aritmética ya los cuentan) hacia los conceptos que luego en la adolescencia cambian de nuevo a conceptos de algebraicos.⁵⁴

G.W.F. Hegel⁵⁵ (1821) sugiere no dejar a un alumno mucho tiempo en los conceptos empíricos del pensamiento. D. B. Elkonin⁵⁶ (1971), encontró que los mejores años para un pensamiento teórico son en efecto, durante la primaria

⁵³ Renshaw, Peter (1996) *A sociocultural view of the Mathematics Education of Young Children. Mathematics for Tomorrow's Young Children Volume 16 Springer Netherlands.*

⁵⁴ Schmittau, Jean (2011). *The Role of Theoretical Analysis in Developing Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective.*

⁵⁵ Hegel, G.W.F. (1821) *The Philosophy of Right.* Germany.

⁵⁶ Elkonin, D.B. (1971) *The Psychology of Preschool Children.* Soviet Union.

antes de que ya adolescentes cambien su enfoque por presiones de grupo, relaciones, emociones afectivas y se enfoquen en sus opciones de carreras. En orden de activar el plano más alto de pensamiento es necesario hacerlo antes de la adolescencia.

3. Instrucción Cognitiva Guiada. El análisis, diagnóstico y catalogación del error como modelo cognitivo procesal apoya en ser una plataforma que ha contribuido al diseño y generación de sistemas inteligentes, aplicados a distintos ámbitos de la adquisición del conocimiento matemático. Estos sistemas tecnológicos rastrean los pasos llevados a cabo durante una tarea o prueba, se vuelven objeto de estudio y pueden especificarse habilidades necesarias para poder resolver el proceso. A nivel pedagógico este entorno estructurado, proporciona una herramienta poderosa y motivadora para mantener la atención del estudiante en sus propios procesos de pensamiento matemático (Collins, Brown, 1998).

A su vez, estos sistemas, apoyan a los docentes en esos procesos del aprendizaje abstractos que configuran el conocimiento matemático ayudándole a comprender los pasos seguidos por los estudiantes en la formulación del error algorítmico. Con la corriente cognitiva de teoría psicológica, se define como objetivo el estudio de los errores aritméticos. Se busca una descripción de los procesos que generan tales conductas erróneas. El diagnóstico cognitivo denominado así por Ohlsson, S., Langley, P. (1988) radica en cómo evaluar la presencia o falta de el mismo en los estudiantes. Esta corriente cognitiva vino auspiciado por las aportaciones de la Teoría de la Gestalt y de corriente Piagetiana.

Es en el año 1972 con Newell y Simón que ya se empieza el estudio de la investigación aplicado a los procesos matemáticos. Paulatinamente, reforzado por los inicios de la programación en inteligencia artificial, influye en la informatización del diagnóstico de los errores en la aritmética cuyo objetivo principal era y es la detección y diagnóstico de los "*bugs*", o errores sistemáticos que surgen a raíz del aprendizaje de los procesos matemáticos básicos. Estos estudios juntamente con

la inteligencia artificial construyen los sistemas inteligentes, las que conforman el futuro del nuevo diagnóstico de los procesos matemáticos erróneos. (Belén, 2015)

Para realizar un diagnóstico cognitivo aplicado al algoritmo de la división, hay que primero describir los procesos y subprocesos mentales que un estudiante muestra a través del espacio del problema algorítmico, lo cual permite actuar sobre los procesos que llevan al estudiante a cometer el error. Este monitoreo del error, puede ocasionar engorroso trabajo para el docente pero que con el apoyo de los sistemas inteligentes y programaciones aplicativas puede resultar rápidamente visible. Lo cual significa, que el futuro del diagnóstico cognitivo de los errores cometidos resulta impráctico sino puede ser “informatizado”. Este diagnóstico es eficaz, en la medida que se involucra a las Tecnologías de la Información para el tratamiento de las dificultades presentadas por los estudiantes en la matemática.

El docente puede incluir una instrucción cognitiva guiada - CGI (*Cognitive Guided Instruction*) para cambiar las prácticas didácticas en el aula, para que el desarrollo del conocimiento del pensamiento matemático en el estudiante. Esta tarea puede ser retadora pero los resultados son sorprendentes. Los docentes bajo esta técnica o estrategia didáctica proveen a los estudiantes de una variedad de instrumentos y dinámicas que motivan el uso de la estrategia cognitiva guiada que hace sentido para cada uno de ellos. Los estudiantes resuelven los problemas, los docentes lo encuentran fácil para poder monitorear y observar a sus estudiantes, al hacerles las preguntas sobre qué hacen en ese momento, para poder comprender cómo los estudiantes adquieren el conocimiento y apoyarles puntualmente de ser necesario (Carpenter, et al., 2015)⁵⁷

El docente puede trabajar en pequeños grupos. En otros casos, el docente puede trabajar con todo el grupo primero poniendo el problema y luego lo resuelven todos y se discute sobre el mismo. Se apoya el estudiante en todas las

⁵⁷ Carpenter, Thomas; Fennema, Elizabeth; Franke, Megan; Levi, Linda; Empson, Susan (2015) *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction* editado por Heinemann

estrategias de solución de problemas que el docente les brinda y además en la tecnología que pueda asistir en forma individualizada como es en los sistemas simuladores o apoyo del aprendizaje en forma virtual o bien a base de guías en videos personalizados con prácticas incluidas. Un ejemplo de estas plataformas interactivas son Khan Academy⁵⁸ y CODE⁵⁹ como la serie de simuladores o sistemas de tutoría inteligentes que se han desarrollado hasta la fecha.

A diferencia de la instrucción tipo tradicional, en donde el contenido es aprendido en una secuencia clara y en donde los estudiantes aprenden aptitudes o habilidades procedurales antes de poder utilizarlos comprensiblemente en forma cognitiva o conceptual, la instrucción cognitiva guiada integra el curriculum para encontrar una relación entre el concepto y procedimiento o algoritmo necesario para resolver los problemas matemáticos. En la instrucción cognitiva guiada son los estudiantes que, al compartir sus propias estrategias de solución a los problemas matemáticos guiados por el docente o sus mismos compañeros para obtener la respuesta correcta, en forma eficiente, colaboradora, y guiada entre todos los participantes del aprendizaje. El aprendizaje no es aislado sino inclusivo, con las debidas conexiones entre el concepto y el procedimiento matemático para una mejor comprensión (Carpenter, *et al.*, 2015).

Al compartir entre los estudiantes sus propias estrategias o técnicas de resolución, se vuelve una instrucción tipo “*think tanks*” o tanques del pensamiento, en donde se logra sinergizar lo aprendido para lograr una mejor forma de solucionar los problemas de matemática. El docente es la guía que apoya en monitorear el aprendizaje que con el apoyo de la tecnología se asegura que el concepto se adecua en los estudiantes. A su vez, se adecua el concepto, con la mejor estrategia o técnica de resolución con el apoyo de procedimientos tipo algoritmo, como es el caso de la división.

⁵⁸ Disponible en <https://www.khanacademy.org/>

⁵⁹ Disponible en <https://code.org/>

Los simuladores que representen o repliquen los procesos de aprendizaje que en la relación estudiante - docente pueda surgir es vital para esclarecer el tema de los errores. Con esta información se incorpora en la instrucción y resulta apropiado y aconsejable adoptar en la formación docente, con el fin de "aprender" a asegurar la adecuación de un concepto o contenido determinado.

Los *ITSs – Intelligent Tutoring Systems* son Sistemas Informatizados en Inteligentes de Aprendizaje, relacionados con determinados dominios del conocimiento y pueden monitorear, recoger y mantener un banco de información de datos, con respecto al estado cognitivo o del caudal de conocimientos en cuanto a procesos presenta un estudiante en relación con un tema concreto. Teniendo el cuidado de delimitar el sistema con programadas redes semánticas y modelos procedimentales correctos, considerando los diferentes tipos de competencias según edad, grado o nivel de aprendizaje (conocimiento declarativo o conocimiento procesal).

Los modelos procesales o procedimentales tipo algoritmo, tratan de representar o simular el conocimiento a través de una red de procesos y subprocesos, en base a un conjunto de reglas o acciones relacionadas. El objetivo del sistema inteligente es de lograr el nivel de descripción que permita asociar la actuación del estudiante directamente con los componentes individuales de la red procesal.

Los simuladores permiten a los docentes ver cómo sus acciones educativas afectan al conocimiento de los estudiantes. Por otra parte, los estudiantes pueden aprender en colaboración con un estudiante "simulado" porque un estudiante "simulado" puede representar un rol de estudiante "experto" y los docentes principiantes pueden probar sus programas y métodos de enseñanza en los estudiantes "simulados" antes de hacerlo con los "reales".

Se puede concluir que la tecnología apoya a la educación ya que se relaciona con la simulación por computadores de procesos de aprendizaje. La tecnología se puede utilizar en cada una de las fases del hacer educativo (formación o

profesionalización docente, programación o planificación docente, enseñanza, evaluación y, aprendizaje por los estudiantes).

La finalidad última de estos sistemas es el diagnóstico y catalogación de errores es en el ámbito del conocimiento procesal. Estos sistemas ayudan a centrar al docente en los procesos cognitivos de sus estudiantes en el aprendizaje abstracto que configuran las bases del conocimiento matemático ayudándole a comprender los pasos realizados por el estudiante en la formulación del error algorítmico. (Van Lehn, K., Ohlsson, S., y Nason R., 1994)⁶⁰.

A continuación, se desglosa en la Tabla 3 los ejemplos de simuladores inteligentes basados en el estudio de patrones de errores.

Tabla 3. Ejemplos de simuladores ITS (*Intelligent Tutoring Systems*) del estudio de patrones de errores

Simulador	Año	Descripción
SCHOLAR	1970	Carbonell (red semántica geografía del sur de América)
GRUNDY		Estudia y clasifica los diferentes tipos de personalidades en función de la auto descripción personal.
BUGGY	1978	(Brown y Burton) Algoritmo de la resta simulador de aprendizaje que intentaba identificar y tratar los distintos bugs o errores producidos en el algoritmo de la resta. Modelo diagnóstico para los errores que cometen los estudiantes durante el aprendizaje del algoritmo de la resta. Pretendía ayudar a los docentes a comprender el proceso de aprendizaje de los errores para poder diagnosticar de manera eficiente como intervenir al estudiante y así diagnosticar de manera eficiente y eficaz. Se simulaba un problema cuya solución estaba presidida por un error, y se demandaba al docente que resolviera el problema usando estos procedimientos incorrectos. Con ello, idear una metodología o estrategia que apoyar al docente a acercarse a los procesos subyacentes del error que les permitiera un diagnóstico oportuno cuya finalidad era el contar con un conocimiento profundo del error(es).
PS	1981	(Young y O'Shea) producción de errores de la resta

⁶⁰ VanLehn, K., Ohlsson, S. & Nason, R. (1994). *Applications of simulated students: an exploration*, Journal of Artificial Intelligence in Education, Vol. 5 No. 2, pp 135-175.

Simulador	Año	Descripción
DEBUGGY	1981	(Brown, VaN Lehn) versión on line
IDEBUGGY	1982	(Brown, Van Lehn) versión interactiva es un sistema que agrega la capacidad de generar dinámicamente problemas para ayudar al docente a diagnosticar e identificar errores.
"The Substraction World software"	1982 - 1983	Representa en una "pizarra" como hacer los problemas de sustracción multi columna. Incluye una versión revisada del procedimiento de Van Lehn en SIERRA, pero usando la arquitectura cognitiva SOAR. El lenguaje fue desarrollado por Randolph M. Jones, Meter M. Wiemer-Hastings y John E. Larid en el laboratorio de Inteligencia Artificial de la Universidad de Michigan. Utiliza la Arquitectura Cognitiva general o teoría "ACT Adaptive Control of Thought": Control adaptativo del Comportamiento de Anderson
DPF	1985	Ohlson y Langley Busca el diagnóstico de los errores mediante el análisis del espacio del problema a resolver.
DPF	1988	Ohlson y Langley <i>Diagnostic Path Finder</i>
ICARUS		Langley, Cumings y Shapiro arquitectura cognitiva jerarquizada intenta diagnosticar los diferentes tipos de errores en la resta dentro de un espacio cognitivo simulado en el sistema informático.
SIERRA	1990	(Van Lehn) librería de bugs: resultado infructuoso de intentar extender las reglas existentes y aplicarlas a nuevas situaciones y esta acción conformaría lo que se denomina reparaciones (REPAIR). Las reparaciones pueden programarse y pueden predecirse
HS Buscado heurístico	1992	Diseñado por Ohlsson, Ernst and Rees, Muestra como la simulación puede permitir al diseñador analizar la interacción de la instrucción propuesta con el conocimiento anterior que posee el individuo. Es un simulador que muestra la parte conceptual o semántica del conocimiento del proceso de la resta. Este trabajo muestra cómo las simulaciones pueden revelar interacciones de instrucción con el conocimiento previo. Es una valiosa información a nivel pedagógico. Es un prototipo informatizado basado en reglas generales que descubren cuando se ejecutan conductas incorrectas en el ámbito de la resta.
OLAE	1993	Martin y Van Lehn relacionado a Física
POLA	1996	(Conati, C. y Van Lehn) Relacionado a las redes bayesianas y Física

Simulador	Año	Descripción
SOAR	1997 - 2004	Walter Fritz Artificial Intelligence Laboratory of Michigan University y Paul Rosenbloom Information Sciences Institute Southern California University. El sistema incluye la creación de sub objetivos de aprendizaje aprende al interaccionar con un entorno externo.
ASSISTment	2009	(Beatty I.D. and Gerace W.J.) <i>“Technology enhanced assessment. Pedagogy System to teach math and science with classroom response technology”</i> Identificar qué alumnos necesitan más apoyo, Se puede editar, es una plataforma de formato libre (sin costo) Entrega un reporte y es gratis. Neil Heffernan
TEFA	2009	Beatty I.D. and Gerace W.J. <i>“Technology enhanced assessment. Pedagogy System to teach math and science with classroom response technology.”</i>
Cognitive Architecture – <i>“Artificial Intelligence Develop and understand human level intelligence across a diverse set of tasks and domains.”</i>	2000 – 2017	Razonamiento Extraer patrones Juegos - gamificación (estrategias) <i>Deep Blue, Watson, game theory</i>
Robótica Cognitiva - <i>Cognitive robotics</i> (exploración a largo plazo, búsquedas, asistentes personales, tutores, apoyo médico, Descubrimiento de Conocimiento Científico, Apoyo de Recurso tipo Administrativo (uber, comida a domicilio, etc)	2005 - 2017	Controles externos y autónomo, base a largo plazo, tareas múltiples, aprendizaje comprensivo, mecanismos de aprendizaje (programación laboriosa de aprendizaje de nuevas destrezas, etc.) Percepción y conocimiento multimodal Robusto (optimizar), memoria procedural a largo plazo, memoria declarativa de largo plazo, Aprendizaje de la percepción del cambio

Fuente: Elaboración propia, según VanLehn, K., Ohlsson, S. & Nason, R. (1994) Tak-Wai Chan Chih-Yueh Chou (1997)⁶¹; Ian D. Beatty & William J. Gerace (2009)⁶²)

4. Neurodidáctica matemática. Para apoyar en la didáctica matemática se cuenta con la neurociencia, la cual es una ciencia muy nueva ya que, hasta hace unos 25 años los exámenes de resonancia magnética funcional están disponibles, para apoyar en el estudio del cerebro. El cerebro es un órgano muy complejo el cual detecta la actividad cerebral. La actividad cerebral depende de los impulsos a los cuales se exponga al sujeto. Los estudios más relevantes son los del “mapeo” de la actividad del cerebro para estudiar mejor el desarrollo en los niños y adolescentes en institutos de la investigación de la mente en los Estados Unidos de América como es el *“The Mind Research Network”*.⁶³

⁶¹ Tak-Wai Chan Chih-Yueh Chou (1997) *Exploring the Design of Computer Supports for Reciprocal Tutoring International Journal of Artificial Intelligence in Education* (1997), 8,1-24

⁶² Ian D. Beatty & William J. Gerace (2009) *Technology-Enhanced Formative Assessment: A Research-Based Pedagogy for Teaching Science with Classroom Response Technology J Sci Educ Technology* 18:146–162

⁶³ Disponible en <https://www.mrn.org/research/>

Según Cabrero (2007) mucha de la didáctica contemporánea apela a la innovación para mantener motivados a los estudiantes en el aprendizaje y en esta era de las Tecnología de la Información y de la Comunicación (TIC's)⁶⁴, se brinda una oportunidad en lograr mantener la motivación y el interés de los estudiantes, ante los nuevos conceptos con el apoyo de blogs y hasta redes sociales. La instrucción actual necesita una transformación pedagógica de instrucciones cada vez menos magistrales a una corriente de instrucción del tipo más “neurodidáctica”.

Adele Diamond (2014)⁶⁵, pionera en el campo de la neurociencia cognitiva sugiere que las tareas que provocan la mejora de las funciones ejecutivas son las que se trabajan en forma indirecta, y son todas las que se propongan desde la Neuroeducación. Para la Neuroeducación lo más importante es fomentar el bienestar emocional y social o físico. El aprendizaje del estudiante debe ser vinculado al juego, movimiento o cooperación. El logro académico va ligado a que el estudiante adecue su aprendizaje para adaptar el conocimiento dentro de su contexto social primero, antes de interiorizar. Las propuestas educativas que derivan el desarrollo cognitivo-social del estudiante le motivarán al buen desempeño, especialmente en la matemática.

Según Mora (2013) citando a Immanuel Kant en la obra de recopilación de sus teorías filosóficas con respecto a la educación, “Pedagogía”, pudo afirmar que el ser humano no es lo que la educación hace de él. La buena educación produce cambios profundos en el cerebro que ayudan a mejorar el proceso de aprendizaje posterior y el propio desarrollo del ser humano. Es muy importante proyectar mejoras en las escuelas más luz, control de la temperatura, más aulas frescas y menos ruidos cercanos (neuro arquitectura). A los estudiantes les afecta lo que rodea en su entorno y desde luego influye la propia cultura. Se trata entonces con

⁶⁴ Vilches, Enrique (2006) *Impacto de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación para la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*. Revista Digital Matemática Educación e Internet Costa Rica.

⁶⁵ Diamond A. (2014): *Executive functions: Insights into ways to help more children thrive. Zero to Three*. Recuperado en <https://escuelaconcerebro.wordpress.com/>

éste enfoque el mejorar y planificar mejores herramientas de enseñanza con la que se facilite el aprendizaje de las materias. Además, si es el caso, se detecten fallos psicológicos y cerebrales que incapaciten para el normal aprendizaje. Se sugiere, se promueva la empatía el altruismo y la colaboración grupal. Se fomenta el pensamiento crítico y creativo. Se espera que a nivel de País los gobiernos instrumenten y desarrollen nuevas políticas educativas y aumenten más la inversión económica en la educación.

El tiempo atencional es el tiempo que el niño es capaz de mantener la atención. No es lo mismo que en el adulto, tanto para aprender una percepción concreta como para aprender un concepto abstracto relativamente complejo. En términos neurobiológicos y educativos ayuda el conocer los tiempos reales y los componentes reales necesarios para poder adecuar las enseñanzas a cada edad y hacerlas más efectivas y eficientes. También ayuda el conocer como estos tiempos y factores, pueden ser modificados. En esta dirección pretende avanzar la Neuroeducación.

La Neuroeducación es una nueva visión de la enseñanza basada en el cerebro. Visión, que ha nacido de la revolución cultural que ha venido a llamarse neuro cultura. Neuro cultura es tomar ventaja de los conocimientos sobre cómo funciona el cerebro integrados con la psicología, la sociología y la medicina en un intento de mejorar y potenciar tanto los procesos de aprendizaje y memoria de los estudiantes, como además que enseñan mejor los docentes. La Neuroeducación significa evaluar y mejorar la preparación de la enseñanza y ayudar y facilitar el proceso de quien aprende. Apoya en los hallazgos científicos relacionados con la emoción, atención, memoria, curiosidad, procesos mentales, aprendizaje y demás aspectos.

Los neuromitos se evidencian cuando se presenta una aplicación de los conjuntos de conocimientos neurobiológicos distorsionados, lo que es lo mismo que, la aplicación de conceptos falsos o conceptos neuroerróneos. Y es que, hay personas que ofrecen en las instituciones educativas, paquetes de información “neuro” que supuestamente son útiles y pueden guiar a los docentes a mejorar su

enseñanza, cuando en realidad no lo son. Al igual, los docentes de universidad algunos están alejados de la psicología cognitiva o la neurociencia cognitiva. Se ha entonces previsto crear una nueva especialidad docente: los neuroeducadores. La neurocultura produce una reevaluación de las humanidades y de cómo nos concebimos a nosotros mismos.

La Neuroeducación puede ayudar en el proceso de potenciar la creatividad o el aprendizaje de ciertas disciplinas específicas, por ejemplo, a las matemáticas. La Neuroeducación comienza a poner en perspectiva y reforzar la existencia del medio social, de la familia y la propia cultura como determinantes de la capacidad de aprender en los estudiantes, además de reconocer que la variabilidad de sus capacidades, durante ese aprendizaje se debe en parte no sólo a la genética de cada individuo, sino también a los cambios que desde el nacimiento produce el medio ambiente en el cerebro.

El éxito de estos programas orientados a la Neuroeducación radica en fomentar la mentalización de los docentes en cuanto a conocer cómo funciona el cerebro, extrayendo de ello conocimiento que ayude a enseñar a aprender mejor, sobre todo en los menores. Así pues, conocer que los cambios sinápticos del cerebro son resultado de la enseñanza que reciben sus alumnos y puede transformar ya un tono diferente, emocional y cognitivo en la forma en que pueden ver la enseñanza.

La Neuroeducación, no solo apoya en una nueva aproximación a la enseñanza que ayude a potenciar y mejorar las habilidades y talentos, sino también a detectar déficits en los niños en el aula que incapacitan o reducen sus capacidades de leer, escribir, hacer números o aprender una determinada materia. Así como de prevenir reducir o mitigar todas aquellas consecuencias de vivir en ambientes estresantes y negativos o de constante amenaza, con lo que adquieren hábitos que influyen también de manera negativa en el desarrollo normal de sus cerebros.

La Neuroeducación es un campo nuevo abierto de esperanza en el área del aprendizaje y cómo enseñar de modo cada vez más fructífero. La esencia en la Neuroeducación trata de crear puentes desde el funcionamiento del cerebro a la

psicología y la conducta, construyendo una plataforma de conceptos sólidos y científicamente fundamentados y destruyendo al tiempo los neuromitos.

Lo primero que la Neurociencia enseña es que un niño no comienza a aprender con ideas y con abstractos sino con percepciones, emociones, sensaciones y movimiento, obtenidos del mundo sensorial y como reacción al mundo real, fuente primigenia de los estímulos y primer maestro del niño. Las guarderías o jardines preescolares deberían ser amplias y extensas áreas, llenos de cosas (vivas o no) que se puedan oír, tocar, oler y aún hasta comer y, con las que el niño interactúe constantemente. Este será una plataforma sólida, con el que luego el niño construirá el edificio sólido de las ideas, reflexiones y pensamiento abstracto.

La transición y la evolución resulta de ese concreto sensorial al abstracto de las ideas es vital señalar lo importante que es aprender desde muy temprano. El estudiante debe aprender de la realidad lo sensorial directo, pues es eso lo que da fundamento sólido para elaborar y aprender bien y transformar después esos pensamientos concretos en abstractos. Posterior a ese proceso de transición, se recopila primero en el desarrollo ontogénico del cerebro humano y luego se sigue en los primeros años del niño ya en contacto directo con el mundo. Actualmente, el niño se enfrenta (a diferencia de algunos miles de años de civilización), con un aprendizaje de ideas y conceptos alejados de aquellos estímulos sensoriales activadores de los códigos más genuinos del cerebro y, que son importantes para generar el pensamiento reflexivo y abstracto.

Las palabras que se utilicen con el niño son importantes ya que deben ir acompañadas de emoción. A partir de la palabra dependiendo de cuales se utilicen y como se entonen, se puede crear ese atractivo capaz de activar la atención del que escucha y aprende. En la Antigua Roma se le llamaba oratoria y se le daba hace más de 2,000 años mucha importancia en las antiguas universidades y foros políticos o sociales el saber debatir, escuchar y dialogar.

Como expresaba Cicerón (año 63 A.C.):

“Una cosa es saber y otra saber expresarse y enseñar” (Cicerón, 63 A.C)

Pelayo, Marcelino Menéndez (1875) citado por Mora (2016) comenta:

“El arte de hablar bien se convierte también en un instrumento educativo de primera magnitud” (Pelayo, 1875).

La emoción es relevante al comunicar la palabra, en la escritura como en la Lectura y también para las Matemáticas. Nada se articula con el razonamiento sin el pegamento emocional. Todo aquello que conduce a la adquisición de conocimiento como: la curiosidad, la atención, la memoria o la toma de decisiones, requiere de esa energía que se le llama emoción.

El juego es un arma poderosa de aprendizaje. El padre de la neurociencia Charles Sherrington (1916), reconoció que el máximo de expresión de curiosidad en los niños apoya en la adquisición de conocimientos y está ligado a lo hedónicamente placentero. De ello se deduce que, la curiosidad que se satisface a través del aprendizaje tiene como base cerebral el placer. Esta información, refuerza la idea de que la búsqueda de conocimientos y la toma de decisiones conducentes a obtener ese conocimiento, es biológicamente placentero.

El caso es que cualquier mamífero comienza aprendiendo a través del juego. El juego en el niño, se produce utilizando estos mecanismos de la curiosidad que están conjuntados con la emoción, la recompensa y el placer. El juego es el mecanismo inventado por la naturaleza a través del cual el niño aprende y adquiere habilidades y capacidades de modo eficiente y que le hacen más apto en el mundo. El niño desarrolla las habilidades perceptivas discriminatorias despertadas por los estímulos sensoriales que le rodean a través de la visión y el tacto. El niño juega porque le produce placer hacerlo, sin saber por supuesto que es el mecanismo diseñado por la naturaleza para empujarlo a aprender. El niño aprende mimetizando lo que hacen sus padres, los maestros u otros niños a través de la emoción y la empatía y luego con la palabra. Aprende al mismo tiempo a distinguir, clasificar y adquirir conocimiento. Hay muchos tipos de aprendizaje uno que es consciente (asociar ideas, razonar, deducir, comparar hacer matemáticas) es decir un proceso que refiere a la asociación de hechos y sucesos con el tiempo

y que podemos evocar y contar tras memorizarlo. Es el aprendizaje explícito que se encuentra en la corteza cerebral y en el sistema límbico. El otro es el aprendizaje implícito y el procedural que es inconsciente, es decir, que no puede evocar verbalmente lo aprendido. En este proceso, el aprendizaje es automático y requiere tiempo y repetición y con él se requieren habilidades visomotoras (montar bicicleta). Participan las áreas cerebrales como la corteza, ganglios basales, cerebelo. Es el aprendizaje filogenéticamente antiguo ya que ocurre desde hace millones de años.

La atención es un conjunto de atenciones diferentes cerebrales para cada serie de conductas y tareas distintas. Se trata de redes y circuitos neuronales específicos que generan modos de atención específicos (lo que no quiere decir que estas redes funcionalmente individualizadas no tengan una interconexión anatómica y funcional entre ellas).

Un estudio con resonancia magnética funcional en el que se ha visto que los individuos muestran curiosidad ante estímulos o informaciones nuevas o relevantes, se activan al mismo tiempo que las áreas de la recompensa y el placer, los sustratos neuronales del aprendizaje y la memoria explícita, lo que refuerza la idea del papel positivo de la curiosidad en los procesos de aprendizaje y memoria. La curiosidad epistémico-específica se refiere a aquella que lleva a la búsqueda específica del conocimiento a saber o querer aclarar o resolver algo concreto (Dehaene, 1999; Kanwisher, 2000).

Las redes cognitivas o cógnitos de memoria personal con todos sus matices emocionales, se van organizando a sí mismas a medida que se adquieren entrando a formar parte de una jerarquía de redes corticales ampliamente distribuidas, interconectadas y solapadas entre sí. Las redes inferiores de esta jerarquía representan los elementos perceptuales y motores más concretos de la experiencia personal, mientras que las redes superiores, más amplias y complejas representan las memorias episódicas y semánticas (el conocimiento no es más que memoria semántica). Todas las funciones cognitivas y emocionales superiores consisten en transacciones nerviosas entre y dentro de aquellas redes

de memoria. El fundamento y misión de la educación del niño es favorecer la estructuración de esas redes de memoria y conocimiento que harán del niño un ser social feliz y útil para beneficio propio y de los demás. (Fuster, Joaquín 2015)

Se resalta la importancia de fomentar en los primeros años en las escuelas la curiosidad primitiva, primigenia, básica, que muestra expectación por lo nuevo y diferente, como un primer mecanismo útil que lleva a aprender y a memorizar mejor, para luego apoyar en la otra curiosidad más específica al conocimiento abstracto en el estudio. Hay que considerar que, sin atención no hay aprendizaje. La atención, a su vez, es el mecanismo cerebral que se requiere para ser consciente de algo. La atención es necesaria para aprender y para memorizar. Sin atención no hay aprendizaje. Mucho del éxito del docente depende de su habilidad para convertir la clase en un cuento, una historia, aumentando la curiosidad del estudiante para motivar la atención. El docente debe introducir novedad, sorpresa y complejidad en los temas a tratarse. El encendido emocional se llama curiosidad y con la atención, con las percepciones se puede aprender y a memorizar. El foco atencional o lapsus de atención tiene que estar encendido durante al menos unas 65 milésimas de segundo para grabar y aprender un concepto o técnica. No se pueden aprender dos cosas diferentes al mismo tiempo.

Hay atenciones diferentes con procesos cerebrales diferentes. Hay una atención base, cuando estamos despiertos, conscientes, nos permite estar alerta o vigilantes, pero sin foco preciso, otra de foco fijo, absorbente, otra orientativa, otra que es ejecutiva y por último se habla de una atención inconsciente virtual y global. En el caso de la atención ejecutiva de foco intenso, requiere de cambiar estrategias mentales ante un error y en particular la corteza prefrontal dorso lateral (memoria de trabajo) y la corteza cingulada (anterior y posterior) en actividad concertada con el sistema límbico (emociones y toma de decisiones). Se ha visto que las redes neuronales sustrato de la atención ejecutiva (aquellas que se activan para el estudio) son de una enorme plasticidad, es decir capaces de cambiar su funcionamiento neuronal con el entrenamiento y ello puede servir para el tratamiento de ciertos síntomas atencionales de los niños. Especialmente entre

los 4 a 8 años de edad, pasada esta edad son más resistentes al cambio, menos flexibles.

Se deben considerar estudios de tiempos atencionales y tiempos cerebrales que se requieren para mantener la atención a cada edad o periodo de vida que pueda ayudar a ajustar los tiempos de atención reales durante el aprendizaje en clase de una manera más efectiva. De ser así se podrían desarrollar entrenamientos selectivos que redundaran en una mayor eficiencia en el estudio de materias como las matemáticas.

Los niños cuyos padres y maestros clasificaron con buen autocontrol, resultan ser los que menos abandonan sus estudios, esto sería un indicativo del valor de estas funciones ejecutivas como instrumento predictivo de un rendimiento académico sostenido. Por lo que, es imperativo el adquirir de modo correcto y desde muy temprano las funciones complejas que hemos llamado funciones ejecutivas: el control en lo que se piensa, se siente y se hace.

Combinado este aprendizaje (implícito y explícito) se necesita de la memoria y de la conducta (emociones) para aprender. La memoria a su vez, puede ser consciente e inconsciente. Consciente refiere a la memoria de hechos que puede evocar, contar y declarar. Aquí tenemos las memorias de largo plazo, corto plazo, memoria icónica, memorias de trabajo (manipular la información para poder razonar o pensar). Las memorias no declarativas o implícitas con las que se guardan infinitas cosas cotidianas de todos los días. En las memorias de tipo explícito consciente desempeña un papel fundamental el hipocampo, así como las cortezas cerebrales y la propia amígdala. La neuro biología actual revela que cada área de la corteza cerebral, cada circuito neuronal lleva intrínseca a sus redes la memoria.

En la escuela se debe aprender a planificar, a organizar y clasificar conocimientos en cooperación con los demás. Se aprende a desarrollar la memoria de trabajo que ya hemos señalado y a integrar en la memoria las experiencias nuevas con las experiencias previas del niño y adquirir habilidades para el desarrollo normal de una conducta que bajo esa constante toma de

decisiones se dirige a la consecución de objetivos concretos y específicos. Es importante notar que, el bilingüismo les permite desarrollar capacidades ejecutivas más potentes que los niños que hablan un solo idioma presentan ventajas que les ayudan y facilitan su proceso de aprendizaje.

Memorizar bien y aún aprender bien requiere de la repetición de lo que se aprende y con ello también se corrige y rectifica aquello que se aprendió. Esta repetición tiene fundamento neurobiológico (hipocampo) consiste en que la repetición de un estímulo eléctrico logra producir cambios moleculares duraderos en la sinapsis de sus neuronas. Hoy se sabe que ciertos neurotransmisores como el glutamato y el ion calcio, son fundamentales para tales cambios en la memoria y se produzcan en las sinapsis y permanezcan en ellas largo tiempo. Repetir quiere decir reevaluar y hasta equivocarse en el proceso de aprendizaje. Habría que considerar la equivocación y el error, como eventos intrínsecos al propio proceso de aprendizaje y memoria.

El cerebro necesita la repetición de todo aquello que se tiene que aprender y recordar de modo importante. Cuando el niño repite y se le permite equivocarse solo con la repetición hecha por el niño mismo y la rectificación de los errores cometidos como se experimenta una reacción emocional, aquella de la recompensa y con el placer y con ella se sedimenta con solidez en la memoria, lo que se ha aprendido. El equivocarse es parte del proceso de aprendizaje. Todo este comportamiento también se puede observar cuando el niño juega. El niño cuando juega repite constantemente lo que está haciendo. No es una repetición idéntica sino de manera complementaria, desde perspectivas diferentes pero conducentes a resolver el problema. Cuando logra conjuntar las piezas de un juguete logra una satisfacción final, es un logro emocional que proporciona el hecho de ensamblar bien el juguete, se graba más sólidamente en su cerebro y alcanza una nueva experiencia y un aprendizaje. Lo importante es aprender bien y guardar en la memoria estas asociaciones emotivas y racionales para luego evocarlas y que de verdad sirvan para construir el conocimiento y memorizarlo. El

conocimiento entonces, requiere de una repetición constante de aquello que se aprende, unido a ese componente emocional de la experiencia de hacerlo bien.

A los estudiantes un nuevo concepto se les debe introducir con una repetición convergente: es decir reiterar una serie de conceptos básicos o relevantes desde perspectivas y con ejemplos diferentes a lo largo de las clases. Al estudiar es permitido el equivocarse y al repetir y consultar lo hecho y al darse cuenta de sus errores es cuando contrasta, retroalimenta y aprende. Finalmente, un sueño reparador es muy importante para la consolidación de la memoria. Durante el sueño el cerebro trabaja para cimentar aquello que se aprendió durante el día y que es importante para el estudiante.

Que tan bien los estudiantes manejen los errores depende de sus creencias sobre el aprendizaje y la inteligencia (Moser, Schroder, heeter, Moran, Yu Hao Lee, 2011). Para los individuos con una mentalidad de crecimiento (*"growth mindset"*) cuya creencia es que la inteligencia se desarrolla a través del esfuerzo, los errores son vistos como una oportunidad de aprender y de mejorar. Para los individuos con una mentalidad fija (*"fixed mindset"*) cuya creencia es que la inteligencia es una característica estable, los errores son indicadores de una habilidad escasa. Los estudios revelan que una mentalidad de crecimiento está asociada al componente de ver el error como algo positivo, lo que apoya en estar alertas a poner atención en donde podrían aparecer los errores en los procesos matemáticos. Más estudiantes con una mentalidad de crecimiento muestran a personas con una mayor proactividad luego de cometer errores, comparado con las personas con una mentalidad fija. Un componente de amplitud positiva sobre el error (Pe) puede mediar la relación entre la mentalidad y la exactitud (proactividad de mejora) que se muestre luego de encontrar el error. Estos resultados parecen indicar que hay una relación entre los mecanismos neurales alineados con el grado de atención al cometer errores y esto está ligado a la habilidad del estudiante según el tipo de mentalidad que presente: de crecimiento o fija. Una mentalidad de crecimiento hace a un estudiante que con mayor facilidad

para retroalimentar al cometer un error y superar la dificultad o encontrar la correcta solución.

El modelo sobre los tipos de mentalidades de Dweck (2006) expresamente el modelo de las teorías implícitas de la inteligencia (*“Implicit Theories of Intelligence – TOI”*), distingue a las personas que creen que la inteligencia no se puede cambiar (mentalidad fija) de las personas que creen que la inteligencia es maleable y que se puede desarrollar a través del aprendizaje (mentalidad de crecimiento). Según el tipo de mentalidad será la forma de reaccionar ante el fracaso, el error y ante el obstáculo. Una mentalidad fija ve el fracaso o error como una evidencia de su propia escasa habilidad y fácilmente se entusiasman o se desconectan de las tareas cuando cometen errores. Estudiantes con una mentalidad de crecimiento poseen más recursos atencionales para corregir la información luego de presentarse el error y son más propicios a corregir el error en el siguiente ejercicio o pruebas. Estos estudiantes logran completar los programas curriculares con un mayor potencial de éxito y producen mejores motivados estudiantes y futuros trabajadores.

Las creencias de los estudiantes y sus metas pueden ser fácilmente influenciables durante su proceso de aprendizaje. Aquellos que creen que la inteligencia es una entidad fija (*“entity theorists”*) tienden a enfatizar el desempeño de las metas dando lugar a que sean más vulnerables a la retroalimentación negativa y más propicia a desconectarse o dejar oportunidades de aprendizaje desafiante o demandante. En contraste de los estudiantes que creen que la inteligencia es maleable (*“incremental theorists”*) tienden a enfatizar sus metas de aprendizaje y se recuperan rápidamente de los fallos ocasionales. Las creencias pueden influenciar el éxito del aprendizaje a través de sesgos atencionales y procesos conceptuales a través de información congruente de metas. Hay mucha evidencia de que la probabilidad del éxito está influenciada no solo por la habilidad actual sino también por las creencias y metas que estos brindan a la situación de logro.

Las investigaciones de diversos autores han señalado la importancia del aprendizaje socioemocional no solo en la esfera afectiva sino en el impacto que tiene para el rendimiento escolar, y en un plano global para el bienestar general de niños y adolescentes y sus trayectorias de desarrollo. Estos resultados continúan replicando en distintos contextos y poblaciones, haciendo evidente la necesidad de integrar el aprendizaje socioemocional como una dimensión central de la experiencia escolar como es la competencia socioemocional (Milicic, 2014).

Desde esta perspectiva socioemocional, el rol de los docentes, y otros adultos que trabajan en los contextos educativos es central. Sin embargo, existe evidencia de la insuficiente formación inicial docente en estos temas, y de la ausencia de herramientas para su desarrollo en los contextos escolares. Las bases conceptuales del aprendizaje socioemocional, también se revelan los vínculos que niños y adolescentes establecen en el contexto escolar como un aspecto central al aprendizaje socioemocional y se discute la formación docente en torno a esta dimensión del aprendizaje.

Actualmente existe un consenso entre investigadores, académicos y profesionales de la salud y la educación que el aprendizaje socioemocional constituye un aspecto central para el desarrollo integral de las personas. (Milicic, Bisquerra y Pérez, 2007; Garner, 2010).

En particular, en la escuela el proceso de enseñanza aprendizaje se ve fuertemente influido por aspectos sociales, emocionales y académicos ya que, en general los estudiantes no aprenden solos sino con el apoyo de sus profesores y sus padres o con su colaboración. Como tanto las relaciones como las emociones tienen impacto en lo que aprendemos y en cómo lo hacemos. El sistema escolar debe preocuparse de estos aspectos del proceso educativo, ya que de esta manera todos los estudiantes se verán beneficiados.

Históricamente, una de las creencias fuertemente arraigadas en nuestra cultura es que la razón y las emociones constituyen dos aspectos diferenciados en el ser humano y que funcionan de manera independiente. La razón sería lo que

nos conduce o al menos nos acerca a la verdad, en cambio, las emociones nos llevarían con frecuencia a cometer errores.

El desarrollo del conocimiento en el campo afectivo y de las relaciones interpersonales no ha sido considerado como relevante por el sistema educativo, lo que ocasiona que estas enseñanzas no figuren en el currículo como un conjunto de objetivos que se enseñan de manera sistemática. Lamentablemente, los docentes en su mayoría afirman, que su formación profesional les resulta insuficiente para promover el desarrollo socio emocional de sus alumnos (Milicic, 1994).

La Teoría de las Inteligencias múltiples es un postulado central el cual enuncia, que no existen un único tipo de inteligencia sino un abanico de capacidades intelectuales cada una de ellas relativamente independiente una de las otras. Se puede dividir en inteligencia intrapersonal e inteligencia interpersonal. (Gardner, 1983)

La inteligencia intrapersonal es el conocimiento de los aspectos internos de una persona: accesos a su vida emocional, a los sentimientos y emociones personales junto a la capacidad para discriminar entre estos y poder acceder a ellos con el propósito de interpretar y orientar las propias conductas. Es la capacidad para identificar en los otros sus estados de ánimo, temperamento y motivaciones e intenciones. Esta inteligencia permite responder efectivamente a los sentimientos y las personalidades de los otros lo que a su vez facilita la relación con los demás (Gardner, 1983).

El término inteligencia emocional, fue presentado en 1990, por los psicólogos Peter Salovey y John Mayer. Inteligencia emocional, es un subconjunto de la inteligencia social que comprende la capacidad de supervisar y entender las emociones propias y las de los demás discriminar entre ellas y utilizar esta información para guiar nuestro pensamiento y nuestras acciones. Se presentan las series de habilidades:

- Habilidad para percibir, valorar y expresar una emoción adecuada y adaptativamente
- Habilidad para comprender la emoción y el conocimiento emocional
- Habilidad para acceder y generar sentimientos que faciliten las actividades cognitivas y la acción adaptativa
- Habilidad para regular las emociones en uno mismo y en otros.

La alfabetización social y emocional se aprende en los diversos contextos de vida de un individuo, contexto familiar, escolar, social y laboral. Vinculación con un adulto en la niñez, diálogos emocionales positivos y la carga genética de una persona es la que determina el nivel de alfabetización emocional y social influyendo posteriormente en los logros que esa persona alcanza en el curso de su vida, desde su rendimiento académico hasta sus interacciones con otros y su desempeño laboral. El lenguaje emocional es sin duda el primer paso para el logro de la autorregulación.

Daniel Goleman (1996), publicó el libro *Inteligencia Emocional*. La tesis de este libro se resume en que necesitamos una visión del estudio de la inteligencia humana, que vaya más allá de los aspectos cognitivos e intelectuales, y que destaque la importancia del uso y la gestión del mundo emocional y social que hacen las personas para poder comprender el curso de sus vidas. Está compuesta por los siguientes elementos:

- Autoconocimiento: conocer los propios estados internos preferencias recursos e intuiciones
- Autorregulación: El lenguaje emocional es sin duda el primer paso para el logro de la autorregulación. Manejar los propios estados internos, impulsos y recursos
- Motivación: Captación de sentimientos, necesidades e intereses ajenos
- Empatía
- Habilidades sociales: Destrezas para establecer relaciones sociales recíprocamente satisfactorias y desarrollar vínculos constructivos.

El aprendizaje socioemocional provee a los establecimientos educacionales con un marco para prevenir problemas y promover el bienestar y el éxito de los estudiantes. Con espacios de reflexión en los que los estudiantes puedan tener un diálogo consigo mismos y a partir de allí con otros, generando vínculos nutritivos (Opengart, 2007).

Existe una relación indisoluble entre emoción y cognición según Harden y Pihl (1995) si los estudiantes tienen un aprendizaje social y emocional positivo se adaptan con facilidad a las nuevas experiencias y desarrollan una actitud positiva hacia la escuela, en la educación básica, lo que se refleja generalmente en buenas notas y en logros académicos.

Durlak y Weissberg (2007), estudiaron el impacto de 73 programas extraescolares enfocados a promover habilidades personales y sociales e identificaron un incremento significativo en tres grandes áreas:

- Sentimientos y actitudes (aumento de autoconfianza y autoestima) vinculación a la escuela y sentimientos positivos hacia ella
- Comportamiento prosocial y reducción de conductas problemáticas como agresión y uso de drogas
- Desempeño académico promedios de notas y rendimiento en pruebas estandarizadas de lectura y matemáticas

El lenguaje emocional es la capacidad de utilizar un lenguaje adecuado y preciso para expresar lo que se siente y se incluyen las siguientes características:

- Consciencia de sí mismo
- Consciencia de los otros
- Autorregulación
- Búsqueda de solución pacífica de conflictos
- Optimismo
- Integración social
- Habilidades de comunicación

La escuela tiene unas posibilidades de ayudar al cambio que otros sectores no tienen. Recibe a las personas a una edad temprana, cuando son más receptivas, más curiosas, más vivaces y más capaces de confiar en quien las guía. Tiene todo el tiempo para experimentar métodos de aprendizaje apelando al entusiasmo, a la solidaridad, a la sana emulación, a la capacidad de juego, a la extraordinaria memoria y al alto sentido del honor y del orgullo personal que normalmente tienen los jóvenes cuando no se los trata de un modo ofensivo despótico. Se requiere que los docentes sean el bien más valorado de una sociedad.

La formación inicial docente, así como el desarrollo profesional en el área del aprendizaje socioemocional está insuficientemente desarrollado o prácticamente ausente. Evitar en las escuelas a los docentes que se descontrolan, les gritan a sus alumnos, son muy autoritarios o pierden la paciencia con facilidad, son percibidos como dañinos para su vinculación emocional con la escuela.

El perfil docente para la nueva didáctica de la matemática:

- Capacidad de empatía para sintonizarse con el estado emocional de sus alumnos.
- Capacidad para tener expresiones emocionales positivas frecuentes
- Capacidad de reconocimiento y valoración de las fortalezas y virtudes de los estudiantes
- Capacidad para reconocer el potencial del desarrollo en cada niño, visibilizando a los menos visibles
- Estar atento a estados emocionales que pueden afectar al niño como depresión y ansiedad excesivas ya sea derivado de la situación escolar o familiar
- Capacidad de favorecer la autonomía
- Capacidad de sembrar en los niños una actitud resiliente
- Capacidad de generar climas y espacios emocionales positivos
- Ser contenedor de sus ansiedades frente al aprendizaje académico
- Estar atento a situaciones sociales que puedan afectar a los niños hostigamiento o marginación.

- Capacidad de ayudarlos a elaborar situaciones de crisis
- Capacidad de proveerlos de experiencias emocionales positivas que favorezcan a los alumnos en su desarrollo emocional
- Capacidad de ser una figura que promueva un apego seguro entregando retroalimentación positiva de manera que los alumnos se sientan valorados y competentes.
- Capacidad de autorregulación, disminuyendo la retroalimentación negativa a través de la crítica por su negativo impacto en la imagen personal de los alumnos (no estigmatizarlos)
- Una actitud de aceptación
- Estar abierto a la diversidad
- Adaptar los métodos de enseñanza a las características personales de los niños.
- Dispuestos a dialogar
- Reconocen sus logros y que los ayuden en sus dificultades escolares escuchándolos y aconsejándoles
- Percibir que sus propios estados emocionales pueden tener un impacto de sus acciones en el bienestar de sus alumnos como la crítica destructiva o la burla.

5. Didáctica con el apoyo de la Inteligencia Artificial. La importancia del estudio de la categorización de los patrones de errores apoya en un sustancial incremento en los avances tecnológicos como la Robótica y la Inteligencia Artificial – IA -.

La Inteligencia Artificial es un campo de estudio de un tipo de programación que abarca desde los algoritmos hasta sistemas robóticos de circuitos y equipos que permiten realizar la toma de decisiones con base a la identificación de patrones.

El Ingeniero Carlos Esquit⁶⁶ de la Universidad del Valle de Guatemala en la Facultad de Ingeniería Mecatrónica agrega que

“La Inteligencia Artificial pretende generar la capacidad de la toma de decisiones y la visualización de patrones, tal y como lo hace un ser humano. Estos equipos tecnológicos pueden especializarse en emular a las personas o ser aplicados a proyectos para compilar la información (Big Data) y obtener mejores resultados” (Esquit, 2017).

Los algoritmos son la base para programar los sistemas inteligentes y son los patrones de errores los que se necesitan identificar para poder predecir el comportamiento de situaciones que ameritan prevenirse. En la actualidad, el estudio de los patrones de error o “bugs” han sido fundamento o la base para poder mejorar los sistemas tecnológicos con fines educativos. Los servidores se programan con algoritmos o macros que contienen una serie de instrucciones que identifican los patrones de error y así los puedan identificar y corregir. Estos sistemas a su vez se convierten en sistemas de operadores asistentes que apoyan a los seres humanos en el desempeño de sus labores diarias, por lo que evitar los errores es imperativo.

La importancia en la programación de sistemas inteligentes basados en la inteligencia artificial amerita el fomentar el pensamiento lógico matemático apoyado con el pensamiento cognitivo o procedural o bien una mezcla de ambos en las personas que lo programan. El estudiante debe dominar el concepto y el proceso para poder tomar las decisiones oportunas en cuanto a cómo resolver situaciones que ameritan pensamientos lógicos matemáticos abstractos durante la programación de procesos software como es el caso de la inteligencia artificial.

Conforme las máquinas aprendan, con el análisis de datos, pueden presentar conductas o soluciones inesperadas, no deseadas y quizás peligrosas a esto le llaman patrones de error. Esta preocupación, ha motivado el que se utilicen las técnicas del análisis del error para los sistemas tutoriales educativos, los servicios

⁶⁶ Reportaje Prensa Libre *Lo que los robots nos hacen pensar*. Entrevista a Ing. Carlos Esquit, UVG (2017). Guatemala.

en línea, dispositivos en seguridad y la robótica. Estas comunidades o inteligencias artificiales comienzan a explorar las técnicas matemáticas que ayudan a evitar las peores situaciones o escenarios en la vida real como sería en el caso de los carros automáticos guiados sin conductor.

El campo de investigación de los patrones de errores es reducido, pero está en crecimiento. A medida que *OpenAI* y *DeepMind* forman equipos dedicados a la seguridad en IA, *Google* hace lo mismo con su laboratorio *Google Brain* en Estados Unidos de América. Entretanto, los investigadores de universidades como la Universidad de California, en Berkeley, y Stanford trabajan en la solución de problemas similares, y a menudo lo hacen en colaboración con laboratorios de las grandes empresas.

Como comenta Shane Legg quien supervisa los trabajos de seguridad informática en Inteligencia Artificial en “*DeepMind*”⁶⁷:

“Hay mucha incertidumbre respecto a la rapidez con la que se avanzará en el desarrollo de la inteligencia artificial. Un enfoque responsable consiste en comprender las distintas maneras en las que se le puede dar mal uso a esta tecnología, las diversas maneras en las que puede fallar o errar y los varios caminos para resolver estos problemas u obstáculos” (Legg, 2018).

Los apoyos en internet basados en esquemas de Inteligencia Artificial como son las aulas virtuales y aplicativos en computadores y celulares son la adecuada guiada instrucción basada en la tecnología para cada uno de los estudiantes que logren alcanzar el nivel desempeño con una mejora en una instrucción disruptiva, flexible y oportuna a sus necesidades y demandas de un mundo globalizado.

Los docentes deben estar abiertos adoptar los diversos esquemas de instrucción adecuada virtual como lo son *Khan Academy*⁶⁸, *Coursera*⁶⁹ o *edX*⁷⁰, aplicativos para aprender idiomas como *DUOLINGO*⁷¹ y opciones virtuales para

67 Recuperado en <https://www.stuff.co.nz/technology/103500435/google-deepmind-founder-and-leader-in-artificial-intelligence-returns-to-hamilton> (2018)

68 Disponible en <https://www.khanacademy.org/>

69 Disponible en <https://www.coursera.org/>

70 Disponible en <https://www.edx.org/>

71 Disponible en <https://www.duolingo.com/>

aprender materias como la programación en CODE⁷², son ejemplos de lo que se puede abordar y apoyar al docente para que los estudiantes logren alcanzar los niveles de competencias, habilidades lógicas matemáticas respetando el tiempo de asimilación que es disímil para cada uno de los estudiantes y con un recurso que sólo necesita un computador y una interfaz de internet.

Por último, la evaluación de los programas educativos basada en datos (*“students learning analytics”*) y en el aprendizaje socio emocional (*“social emotional learning – SEL”*)⁷³, permiten la mejora de las estrategias y procesos de aprendizaje. Además, las herramientas de la Inteligencia Artificial (*“learning machine”*) pueden detectar y predecir patrones de aprendizaje y patrones de errores (sistemáticos) e indicar las acciones correctivas en el aprendizaje con el fin de mejorar el rendimiento de los estudiantes, especialmente en la matemática.

⁷² Disponible en <https://code.org/>

⁷³ Disponible en <https://casel.org/>

VI. MARCO METODOLÓGICO

A. Objetivo general:

- Identificar qué tipo de errores en la operación de la división, son más comunes entre los alumnos de 6º grado de primaria en 8 escuelas del departamento de Sacatepéquez el Proyecto Familias de Esperanza.

B. Objetivos específicos:

- Identificar si los errores encontrados persisten sistemáticamente en los procedimientos de la división en el 6º grado de primaria para brindar información sobre las proporciones de los errores encontrados.
- Determinar posibles causas de los tipos de errores encontrados en los problemas de la división en 6º grado de primaria.
- Describir la perspectiva de los profesionales expertos sobre los problemas más comunes en la operación de la división.
- Sugerir metodologías estratégicas para la práctica pedagógica de la enseñanza de la división en base a la opinión de los profesionales expertos sobre cómo para optimizar el proceso de enseñanza - aprendizaje en el aula a los alumnos de 6º grado de primaria.

C. Metodología de investigación

1. Enfoque de investigación. La investigación se realiza desde un enfoque mixto: una parte es de carácter cuantitativo la cual consiste en analizar y categorizar el error en la división, que se presenta en las pruebas de matemática (pretest y postest) de los 368 alumnos de 6º grado de primaria pertenecientes a la organización Familias de Esperanza. La otra parte de este estudio de investigación es de carácter cualitativo porque tiene como objetivo el conocer y el de documentar las experiencias y las opiniones de los 6 profesionales expertos

en matemática y encuestar a 24 docentes expertos sobre los temas relevantes a la investigación.

2. Tipo de investigación. Esta investigación es un estudio mixto (cuantitativo y cualitativo), es no experimental de diseño *ex post facto* porque no se manipulan las variables únicamente se hacen inferencias sobre las relaciones entre ellas. El tratamiento de la información se realizó siguiendo un proceso inductivo inspirado en la teoría fundamentada y emergente de los datos.

Es un estudio de casos en el análisis cualitativo ya que documenta las opiniones del grupo de profesionales y docentes expertos. Se utiliza en este análisis un tipo cualitativo, descriptivo y exploratorio de carácter fenomenológico. El estudio fenomenológico describe un significado común para varios individuos en sus experiencias vividas del concepto o tema o fenómeno. El estudio fenomenológico se enfoca en describir que piensan en común al experimentar el fenómeno. (Creswell, 2013)⁷⁴

3. Hipótesis. Las siguientes son las planteadas⁷⁵ para esta investigación:

H_{01} : =: No hay suficiente evidencia de que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la falta de fluidez numérica para los estudiantes de 6º grado de primaria.

H_{r1} : =: Se presenta suficiente evidencia que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la falta de fluidez numérica para los estudiantes de 6º grado de primaria.

H_{02} : = No hay suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de

⁷⁴ Creswell, John W. (2013) *Qualitative inquiry and research design. Choosing among five approaches*. Sage Publications, Inc. USA

⁷⁵ Ritchey, Ferris J. (2008) *Estadística para las Ciencias Sociales* (2ª edición) Editorial McGraw Hill Interamerican. México

Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso “*Process Skill*” en la operación de la división según categorización de Newman (1977).

H_{r2} := Se presenta suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso “*Process Skill*” en la operación de la división según categorización de Newman (1977).

H_{o3} := Media μ tasa de error Escuela 1 = Media μ tasa de error Escuela 2 = ... = Media μ tasa de error Escuela 8

H_{r3} := Al menos un par de Media μ tasa de error Escuela $i \neq$ Media μ tasa de error Escuela j

H_{o4} := No existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.

H_{r4} := Si existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son dependientes entre sí.

4. Supuesto de Investigación. Los docentes de educación primaria en su mayoría necesitan trabajar estrategias didácticas de enseñanza en matemática que apoye en mejor forma a los estudiantes a alcanzar los niveles de logro. La realidad en el medio es que, los docentes en su mayoría prescinden de la oportunidad que brinda la retroalimentación al analizar los errores de sus alumnos, para convenientemente, con el apoyo de la tecnología, enfocar la didáctica matemática.

Este es el supuesto que debe probarse y contrastarlo con la información que se recopile de las entrevistas y encuestas. Además de lo que los resultados presenten, las conclusiones y recomendaciones finales se basarán en lo que los profesionales expertos y docentes expresen como relevante. Este análisis final al transcribirlo, jamás será forzando o imponiendo la interpretación personal.

5. Variables. Las variables de estudio son:

- Cantidad de errores en la operación aritmética de la división
- Tipos de errores
- Tasa (porcentaje) del error

6. Muestra. Esta investigación incluye a 368 estudiantes de las 8 escuelas Familias de Esperanza en Antigua Guatemala, departamento Sacatepéquez. El muestreo es por conveniencia y no es aleatoria o al azar ya que el Centro de Investigaciones Educativas (CIE – UVG) aplicó en el año 2015 las pruebas pretest y postest a alumnos que tenía acceso en ese momento.

Para el análisis cualitativo la muestra es elegida por una técnica llamada cascada, la cual parte de una pequeña muestra inicial de profesionales expertos y luego estas a su vez refieren a otras personalidades que consideran importantes consultar. Se propone buscar a seis profesionales expertos para entrevistar y a 24 docentes expertos de matemática a nivel de primaria para encuestar.

7. Instrumentos. Los instrumentos de recogida de datos fueron una entrevista semi estructurada, una encuesta a docentes y dos evidencias por alumno, de las pruebas pretest y postest de matemática de los estudiantes de 6º grado primaria en ocho escuelas, sobre el proceso de la división de cuatro operaciones. Las dos evidencias de pruebas escritas de las operaciones de la división de los estudiantes aplicados en los dos momentos.

Para el análisis cuantitativo se analizan las pruebas pretest y postest estandarizadas de matemática de 6º grado de primaria – CIE Familias Esperanza a 368 estudiantes de ocho escuelas en el departamento de Sacatepéquez en cuatro problemas de la división y así categorizar y tipificar los errores. Se utiliza una tabla que permite codificar errores por Decodificación (R), Comprensión (C), Transformación (T), Destrezas en el Proceso (PS), Encodificación (E) y Descuido (X), Tipo de error de reparación (RT_bugs) y a su vez considerando los tipos de errores planteados de la base del algoritmo de la división:

8. Tipos de errores (escala Likert). 0 = No hay error; 1 = Se añaden datos extraños; 2 = Fallas en el razonamiento; 3 = Deformación del algoritmo; 4 = Errores de cálculo; 5 = No intentó o borró; 6 = No se dispone de la evidencia (hoja de respuestas)

La prueba de matemáticas de sexto grado de primaria pretest y post test fue conformada por el Centro de Investigaciones Educativas de la Universidad del Valle de Guatemala. La prueba de matemática contiene 40 ítems, tanto en la forma A como en la forma B, que miden operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. En la parte de operación de división se encuentran 4 problemas que son materia de análisis para esta investigación.

Para el análisis cualitativo se utiliza la encuesta y entrevista ya formulada por la Dirección General de Investigación y Evaluación Educativas (DIGEDUCA, 2016)^{76,77} la entrevista a seis profesionales expertos debe hacerse una entrevista semi estructurada y abierta con guía (flexible y abierta) de unas 10 preguntas abiertas, para desarrollar el tema de la problemática y situación actual de la matemática, avances y limitaciones. También se tratará temas sobre didáctica matemática y metodologías de la enseñanza. Para la encuesta a 24 docentes se aplica una serie de 14 preguntas abiertas.

Las entrevistas tuvieron como objetivo recolectar datos generales sobre los profesionales expertos especialmente en la situación de la problemática de la matemática en Guatemala, opiniones y nociones sobre los errores. Toda la información se obtuvo a partir de evidencias de pruebas escritas, grabaciones de audio, transcripciones y a la selección de los temas a tratar. Luego, a partir de la revisión de la literatura sobre los errores y múltiples reflexiones sobre los datos obtenidos con cada uno de los instrumentos, se permitió construir una serie de categorizaciones, tipificaciones y clasificaciones del error evidenciado.

⁷⁶ Castillo (2016) DIGEDUCA/MINEDUC. *Así estamos enseñando matemáticas. Situación de la enseñanza de la matemática en Guatemala. Una perspectiva de docentes de matemáticas y de profesionales expertos en el área*. Guatemala

⁷⁷Ver Anexo 03

9. Descripción Tabla para la Entrada de Datos (ver Tabla 14)

Código Establecimiento: Numérico

Establecimiento: String

IDUNICO: Numérico

Nombre: String

Apellido: String

Edad: Numérico

Sexo: String (1= masculino; 0 = femenino)

No_ítem: Numérico (1...4) (número de ítem de la operación de la división)

E_Tipo0_E: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0 = no evidencia tipo error)

E_Tipo1_R: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

E_Tipo2_C: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

E_Tipo3_T: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

E_Tipo4_PS: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

E_Tipo5_X: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

E_Tipo6_X2: Numérico (1 = evidencia tipo error, 0= no evidencia tipo error)

RT_Bugs: Numérico (1...96) (número de tipo de error o bug)

L_FORMA: String (LU1, LR1)

SECCION: String (A, B)

PRE_TEST: Numérico (1...100)

POST_TEST: Numérico (1...100)

APRENDIZAJE: Numérico (1= evidencia de aprendizaje, 0 = no evidencia de aprendizaje)
(Criterio: Puntuaciones finales Postest – Puntuaciones finales pretest el resultado es mayor que cero entonces el valor es 1 (evidencia aprendizaje) si es menor que 0 el valor es 0 (no evidencia aprendizaje))

Tabla 4. Tabla de Tabulación de Datos

Codigo Establecimiento	Establecimiento	IDUNICO	Nombre	Apellido	Edad	Sexo	No_Item	E_Tipo0_E	E_Tipo1_R	E_Tipo2_C	E_Tipo3_T	E_Tipo4_PS	E_Tipo5_X	E_Tipo6_X2	RT_Bugs	L_FORMA	SECCION	PRE_TEST	POS_TEST	APRENDIZAJE
Tipo de Error (Algoritmo Lucia, 2015)							Ann Newman (1977)				Descripción			Descripción						
T1 T2 T3 T4 T5 T6 T0							R				Reading			Lectura del problema						
							C				Comprehension			Comprende el problema						
							T				Transformation			Razona la estrategia a utilizar						
							PS				Process Skill			Ejecuta la estrategia a utilizar						
							X				Careless			Respuesta incorrecta						
							X2				Careless			No se dispone de la evidencia						
							E				Encoding			Respuesta correcta						
Brown & Van Lehn (1980)							Repair Theory													
							RT_Bugs				Tipo de error según categorización Repair Theory (resta)			Tipo de error según catálogo de Repair Theory						

* Ann Newman (1977) Investigadora Australia
Categorización de Errores en pruebas orales (matemática) *Talk out Loud* técnica de evaluación
R = *Reading/ Decoding* (Lectura/ Decodificando)
C= *Comprehension* (Comprensión)
T = *Transformation* (Transformación)
PS= *Process Skills* (Ejecución del Proceso)
E = *Encodification* (Encodificado)
X = *Careless* (Dejadez o Descuido)

D. Estrategia de categorización del error

Como el procedimiento de categorización de errores de Ann Newman (1977) se realiza en forma de preguntas y respuestas orales, entre el docente o aplicador de la prueba y el alumno, se ideó una forma de incorporar un algoritmo de la división, el cual apoya en tipificar los errores según la categorización de Ann Newman y luego se incluye el detalle del tipo error por medio al catálogo de errores de “*Repair Theory*” de Brown y Van Lehn (1980) para complementar la información sobre el error que se presente en la falla de razonamiento, deformación del algoritmo y/o errores de cálculo.

C. Procedimiento análisis cuantitativo

El análisis estadístico será con el uso del software EXCEL (XLSTAT), JMetrik, SPSS y con el software libre R para graficar. El análisis cuantitativo considera la categorización y frecuencia de los errores (presencia del error en la muestra) y la sistematicidad, prevalencia o recurrencia de los errores, se apoya en un análisis descriptivo que incluya la frecuencias y porcentajes percentiles.

- Se incluyen modelos de regresión lineal, para mostrar la relación o no entre la presencia de errores encontrados en cada problema de división con el aprendizaje del alumno luego de realizar la prueba pre –test y post- test y la tasa (frecuencia porcentual) del error. También se utilizará un análisis de regresión lineal con variable moderadora Habilidad con el proceso estadístico en SPSS de HAYES (PROCESS – SPSS) para encontrar la relación o no entre la tasa de errores encontrados en los problemas de división y la habilidad del alumno en la prueba de matemática. Se hará un último análisis de regresión lineal para encontrar la relación o no del aprendizaje y la tasa del error con la variable género.
- Se comparan los tipos de errores entre las cohortes de escuelas que se presentan cuáles son las recurrentes o frecuentes. Se obtendrá el porcentaje de frecuencias de tipos de errores. Se analizará cuáles son los

errores comunes entre las escuelas (“*between groups*”) y entre los grupos de cohortes (“*within groups*”), se analiza para determinar si prevalece una categoría de error de las cuatro etapas Lectura, Comprensión, Transformación y Habilidad de ejecución de procesos (“*Process Skills*”) de Ann Newman en especial. Se aplica una prueba de estadístico del análisis de varianza para determinar si existe una diferencia significativa entre los resultados de las pruebas en cuanto a la tasa (porcentaje de ocurrencia) del error entre los grupos de estudiantes de las 8 escuelas al momento de operar la división.

- Se comparan los resultados entre las escuelas y entre el género con el porcentaje tasa de errores encontrados en cada problema de división para la cual se pasa el estadístico de tipo no paramétrico: X^2 (Chi cuadrado) para determinar si existe dependencia significativa entre las variables Escuela y la variable tasa (porcentaje de ocurrencia) del error.
- Se comparan los resultados entre las escuelas y entre el género con el porcentaje de errores encontrados en cada problema de división para la cual se pasa el estadístico de tipo no paramétrico: X^2 (Chi cuadrado).
- Se analizan los 4 ítems con el análisis en JMetrik, niveles de confiabilidad, dificultad de los ítems de los cuatro problemas de la división con fines de describir las pruebas de matemáticas aplicadas.
- Se tabulan en las tablas de frecuencias de todas las categorías del error encontradas. Se desglosa el total de problemas en error de lectura y en error técnico (error de comprensión, error de transformación y errores en las habilidades o aptitudes procedurales).
- Se describen los errores más comunes encontrados en las Escuelas Familias La Esperanza y según el Currículo Nacional Base, como solucionarlo.
- Se analiza modelos que muestran la relación entre la tasa del error y el desempeño como la cantidad de práctica de los problemas. Se encuentra la tasa o razón del error con la utilización de la ecuación (Van Lehn, 2007):

$$Y = a X^b \quad (\text{ecuación 1})$$

Donde

Y = tasa del error

X = El número de oportunidades de practicar el componente del conocimiento

a= la razón de error en la primera prueba, reflejando la dificultad intrínseca del componente del conocimiento.

b= la razón de aprendizaje, reflejando cuan fácil es el componente del conocimiento para aprender

La razón de aprendizaje se obtiene utilizando la siguiente ecuación la cual se obtuvo del documento de la Facultad de Educación de la Universidad de Oklahoma⁷⁸ que se muestra a continuación:

$$\text{Razón del aprendizaje (b)} = \frac{\text{Nota post test (\%)} - \text{Nota pretest (\%)}}{(100\% - \text{Nota pretest \%})} \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\text{Razón del error (a)} = \frac{\text{Cantidad de errores por el estudiante}}{\text{Total de errores}} \quad (\text{ecuación 3})$$

- Se considera la variable X como las veces que los estudiantes practican dicho ejercicio en la prueba de la división.

Un buen modelo cognitivo se espera que siga la ley de potencia. El modelo que surja es un conjunto de reglas o habilidades que muestra cómo los estudiantes resuelven los problemas.

En el modelo de análisis moderador de Hayes se determina qué tanto incide o el efecto que tiene sobre la relación de las variables independiente sobre la dependiente las veces que se utilicen para ejercitar los problemas aritméticos en la división en apoyar que la variable independiente tasa de error predice a la

⁷⁸ www.oc.edu/academics/education/documents/InstructionsforLearningGainScores.doc

variable dependiente aprendizaje. Esto se realiza al incorporar el macro PROCESS⁷⁹ de Hayes (2013) para sugerir el incluir en un estudio posterior el número de veces que los estudiantes realizan los ejercicios de la división. En este caso se utiliza como variable $M = 2$ que es dos veces el realizar los ejercicios de los problemas de la división.

- Se incluye Análisis de Regresión de las variables: APRENDIZAJE como Dependiente (Y), variables RAZONY (tasa de error) como variable independiente (X), y la variable HABILIDAD (dominio de cada estudiante) igual a variable moderadora M
- Se incluye Análisis de Regresión de las variables: APRENDIZAJE como Dependiente (Y), variables RAZONY (tasa de error) como variable independiente (X) y la variable GENERO

1. Pasos del procedimiento para el análisis cuantitativo

- Formular las diversas Hipótesis Nula y Alterna (dos colas)
- Describir la distribución muestral y trazar curva normal
- Indicar nivel de significación elegido ($\alpha = 0.05$)
- Calcular los efectos de la prueba (los grados de libertad, el valor crítico p)
- Categorizar los errores
- Tabular la categorización de los errores si se presentan
- Analizar los resultados con los instrumentos estadísticos Análisis de la Varianza y Prueba de Chi cuadrado X^2 , análisis de regresión, análisis de proceso SPSS - HAYES (PROCESS) y luego graficar
- Tomar la decisión de rechazo o no rechazo de las hipótesis, comparar el valor p con α
- Discusión final

⁷⁹Recuperado en <http://www.processmacro.org/index.html>

D. Procedimiento análisis cualitativo

Para apoyo de este análisis cualitativo se aplicará una encuesta estructurada y entrevista semi estructurada, se transcribe y luego se pasa y utiliza el software NVIVO 10, para analizar las respuestas de los entrevistados y encuestados a las preguntas en relación con temas específicos enunciados en los objetivos generales y específicos. Se hará énfasis en identificar las posturas y constructos teóricos en donde en común se posicionan los profesionales expertos entrevistados. Para la encuesta se usa del tipo respuesta abierta.

E. Análisis del error de las pruebas de matemáticas

Participaron en la prueba posttest, 368 alumnos y adicionalmente participaron en las pruebas pretest fueron 57 alumnos, de las ocho escuelas de la Familia Esperanza. Los datos se analizaron luego de revisar las hojas de trabajo de la prueba de matemática que se aplicó a los alumnos de 6to grado de primaria. El muestreo de esta investigación fue del tipo casual o accidental, es decir la muestra se conformó con alumnos que casualmente se encontraban en el lugar y en momento de aplicación de la prueba de matemática. Aunque las pruebas se pasaron en dos formas A y B se aplicaron en forma de espiral y las pruebas variaron en un ítem:

Prueba forma A

Ítem 11	$1648 \div 4 = 412$
Ítem 12	$42.21 \div 21 = 2.01$
Ítem 13	$17,430 \div 83 = 210$
Ítem 14	$10,812 \div 212 = 51$

Prueba forma B

Ítem 11	$1,648 \div 4 = 412$
Ítem 12	$84.42 \div 42 = 2.01$
Ítem 13	$17,430 \div 83 = 210$
Ítem 14	$25,636 \div 493 = 52$

Como se puede observar los ítems 11, 12 y 13 son los mismos y en el mismo orden de ambas formas A y B, el ítem que varía es el 14 para las dos formas.

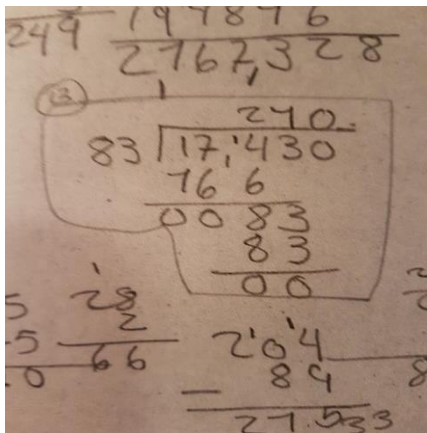
F. Categorización o tipificación del error

Se recolectaron los datos de las hojas de pruebas y se tabularon las frecuencias de errores según la categorización del error de Newman. Se trabajó la tabulación: por ítem, forma, por alumno y por Escuela.

A continuación, se describen las diferentes categorías en que se han clasificado los procesos de la división en cuatro problemas de la prueba de matemáticas forma A y forma B, según presencia o no de errores en su elaboración y en caso de haber errores, según el tipo de error. Para ello se desarrolló un análisis semiótico del error o conflicto de los procesos parcialmente correctos e incorrectos.

C1. Solución básicamente correcta. Muchos estudiantes elaboraron y realizaron los procesos correctos, lo que supone ser capaz de realizar el proceso de la división adecuadamente según convenios de algoritmos o procesos estructurados en forma clara y precisa y no contienen incorrecciones.

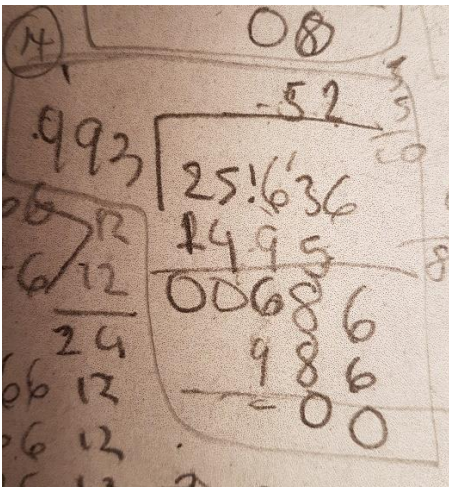
Figura 1. C1. Solución básicamente correcta.

Figura 1. Evidencia fotografía C1 	C1. Solución básicamente correcta. Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° A forma B Prueba PRE TEST Problema #13 Nombre: A. González (ver Figura 1.)

C2. Solución correctos no estándar o parcialmente correcta. Al revisar el proceso de la división se encuentra el cociente correcto, pero además se encuentra errores de otras categorías como resta y la de multiplicación.

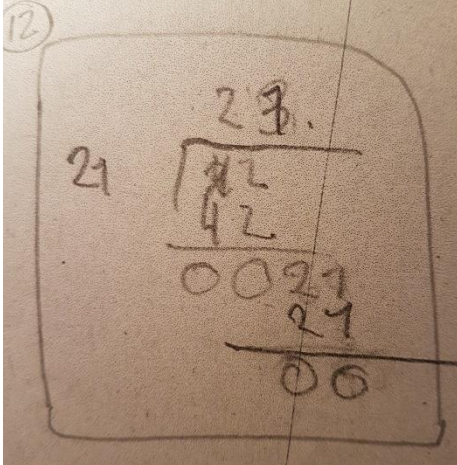
A continuación, Figura 2. C2 Solucion correctos no estándar o parcialmente correcta:

Figura 2. C2 Solución correctos no estándar o parcialmente correcta

Figura 2. Evidencia fotografía C2 	C2. Solución correctos no estándar o parcialmente correcta. Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° A forma B Prueba PRE Problema #14 Nombre: E. Sas (ver figura 2)

C3. Error de lectura del problema. Cuando el estudiante copia el dígito diferente a como está enunciado.

Figura 3. C3 Error de lectura del problema

Figura 3. Evidencia fotografía C3 	C3. Error de lectura del problema Escuela Miguel Milpas Altas 6° B forma A Prueba PRE Problema #12 Nombre: H. M. Hernández R. (ver figura 3)

C4. Error de comprensión del problema. Cuando el estudiante no entiende que es lo que el problema le pide resolver. El estudiante no comprende qué operación debe realizar. En el proceso de categorización de Ann Newman esta información se evidencia del estudiante al docente en la entrevista oral al realizar la prueba de matemática.

Evidencia: ninguna ya que no se tuvo entrevista a los alumnos

C5. Error de transformación del problema. Cuando el estudiante no comprende que proceso matemático debe realizar para resolver un problema. El estudiante puede ser que comprenda el problema que se le pide encontrar, pero no sabe qué operación aritmética debe ejecutar. En el proceso de categorización de Ann Newman esta información se evidencia del estudiante al docente en la entrevista oral al realizar la prueba de matemática.

Evidencia: ninguna ya que no se tuvo entrevista a los alumnos

C6. Error procedural del problema. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y logra utilizar las operaciones aritméticas matemáticas necesarias, pero erra al operarlas. El error puede estar como es el caso de la división, en la resta, multiplicación o en la misma operación aritmética de la división.

Evidencia: Se presentan a continuación los errores procedurales según el tipo de error o categorización de la resta, de la multiplicación y de la división

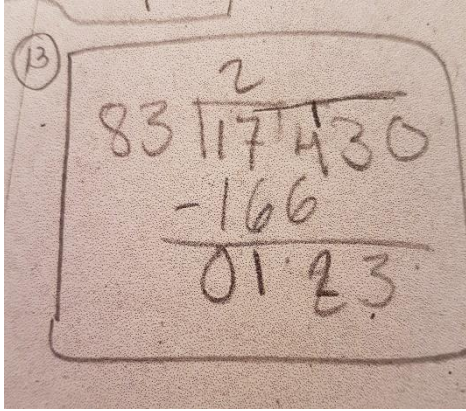
C7. Error procedural de la resta. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y lograr utilizar la operación de la Resta, pero erra al operar el proceso.

Evidencia: Se presentan a continuación los 6 tipos de errores encontrados con la Resta, según la categorización de la autora y del autor Van Lehn (1990)

C7.1 Error procedural de la resta tipo Bug #29 según clasificación Van Lehn (1990) Error prestar/de dígito/más grande. Cuando se presta el estudiante

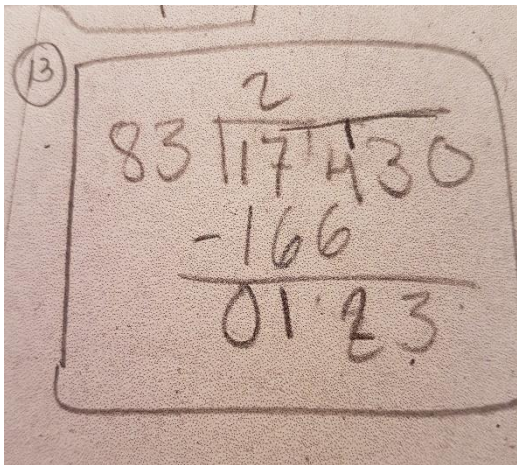
decremento del número más grande en la columna no importando si es el número de arriba o el de abajo. (ejemplo: $872 - 294 = 598$)

Figura 4. C7.1 Error procedural de la resta tipo Bug#29

Figura 4. Evidencia fotografía C7.1 	C7.1 Error procedural de la resta tipo Bug #29 según clasificación Van Lehn (1990) Error prestar/de dígito/más grande. Escuela San Miguel Milpas Altas 6° B forma B Prueba PRE Problema #13 Nombre: L. R. Chacón S. (ver figura 4)

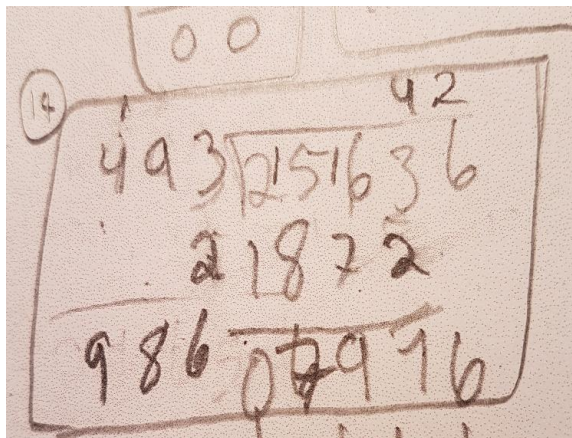
C7.2 Error procedural de la resta tipo Bug#39 según clasificación Van Lehn (1990) Error prestar/no/decrementa dígito. Cuando un estudiante presta el 10 correctamente pero no cambia nada de la columna de la izquierda (por ejemplo: $62 - 44 = 28$)

Figura 5. C7.2 (a) Error procedural de la resta tipo Bug#39

Figura 5. Evidencia fotografía C7.2 a 	C7.2 Error procedural de la resta tipo Bug#39 según clasificación Van Lehn (1990) Error prestar/no/decrementa dígito. (1) Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B forma B Prueba POS Problema #13 Nombre: J. M. González G. (ver figura 5)

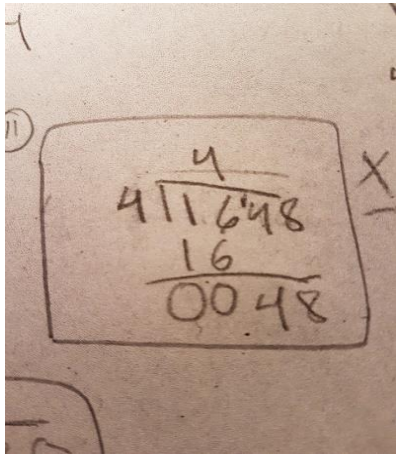
A continuación, Figura 6. C7.2(b) Error procedural de la resta tipo Bug#39 Prestar/No/Decrementa:

Figura 6. C7.2 (b) Error procedural de la resta tipo Bug#39

Figura 6. Evidencia fotografía C7.2 b 	C7.2 Error procedural de la resta tipo Bug#39 según clasificación Van Lehn (1990) Error prestar/no/decrementa dígito (2) Escuela San Miguel Escobar Vespertina 6° B forma B Prueba POS Problema #14 Nombre: R. E. Camargo M. (ver figura 6)

C7.3 Error procedural de la resta tipo Bug A No presenta evidencia de finalizar el proceso de restar

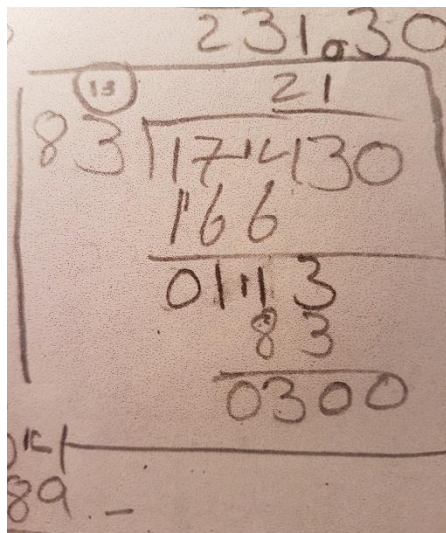
Figura 7. C7.3 Error procedural de la resta tipo Bug A

Figura 7. Evidencia fotografía C7.3 	C7.3 Error procedural de la resta tipo Bug A Escuela San Miguel Milpas Altas 6° B forma B Prueba PRE Problema #11 Nombre: L. R. Chacón S. (ver figura 7)

C7.4 Error procedural de la resta tipo Bug#8 Suma/en vez/de/Restar dígito. El estudiante suma en vez de restar ($32 - 15 = 47$)

Figura 8. C7.4 (a) Error procedural de la resta tipo Bug #8

Figura 8. Evidencia fotografía C7.4 a



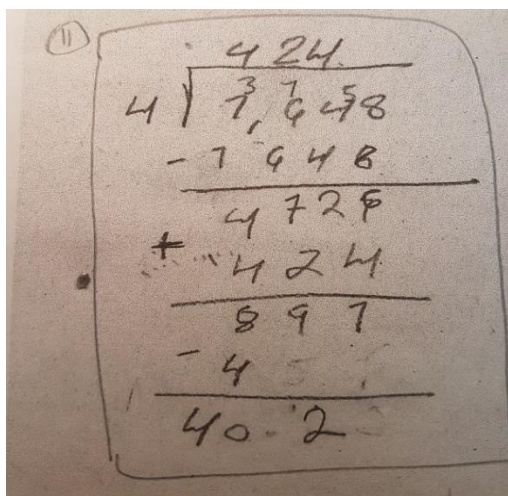
C7.4 Error procedural de la resta tipo Bug#8 Suma/en vez/de/Restar dígito

(1) Escuela Ciudad Vieja 6° A
forma B Prueba POS Problema
#13

Nombre: J. C. García C. (ver figura 8)

Figura 9. C7.4 (b) Error procedural de la resta tipo Bug#8

Figura 9. Evidencia fotografía C7.4 b



C7.4 Error procedural de la resta tipo Bug#8 Suma/en vez/de/Restar dígito

(2) Escuela San Miguel Milpas
Altas jornada matutina 6°
grado forma A Prueba PRE
Problema # 11

Nombre: M. I. López S. (ver figura
9)

A continuación, Figura 10. C7.4 (c) Error procedural de la resta tipo Bug#8 Suma/en vez/Restar:

Figura 10. C7.4 (c) Error procedural de la resta tipo Bug#8

Figura 10. Evidencia fotografía C7.4 c

(12)
$$\begin{array}{r} 84 \\ 42.27 \\ 42.27 \\ \hline 8442 \\ - 84 \\ \hline 2.10 \end{array}$$

C7.4 Error procedural de la resta tipo Bug#8 Suma/en vez/de/Restar dígito

(3) Escuela San Miguel Milpas Altas
jornada matutina 6° grado forma
A Prueba PRE Problema # 12
Nombre: M. I. López S. (ver figura 10)

C7.5 Error procedural de la resta tipo Bug B. No opera adecuadamente. Error de operar no según el orden o jerarquía de la operación es decir no opera desde el dígito más a la derecha del número y luego hacia el dígito más continuo a la izquierda ($54 - 16 = 42$)

Figura 11. C7.5 Error procedural de la resta tipo Bug B

Figura 11. Evidencia fotografía C7.5

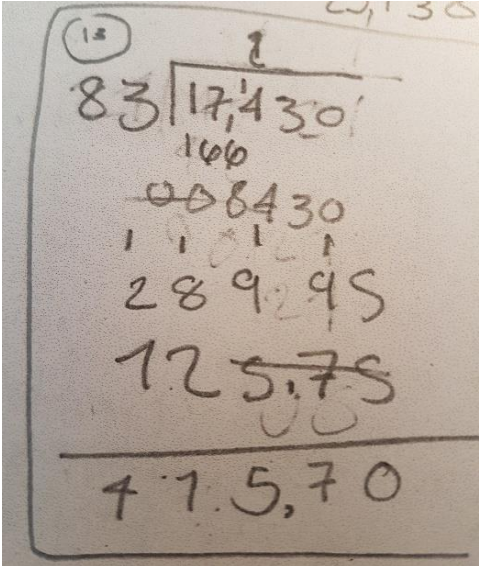
(10)
$$\begin{array}{r} 185 \\ 2170 \\ \hline 83 \overline{) 17430} \\ - 166 \\ \hline 264 \end{array}$$

C7.5 Error procedural de la resta tipo Bug B

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B
forma B Prueba PRE Problema #13
Nombre: A. R. Vásquez G. (ver figura 11)

C7.6 Error procedural de la resta tipo Bug #63 No/Presta al dígito. El estudiante para de hacer el ejercicio cuando se requiere prestar (ejemplo: $833 - 262 = 1$)

Figura 12. C7.6 Error procedural de la resta tipo Bug #63

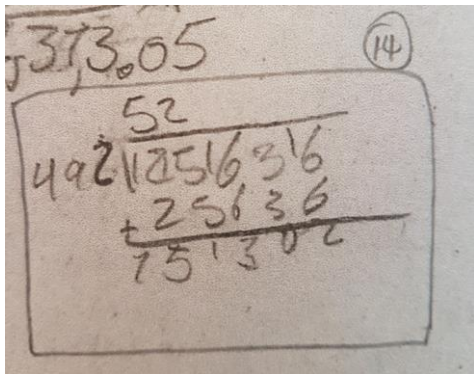
Figura 12. Evidencia fotografía C7.6 	C7.6 Error procedural de la resta tipo Bug #63 No/Presta al dígito Escuela San Pedro Huertas 6° A forma A Prueba POS Problema # 13 Nombre: C. Daniel H. R. (ver figura 12)

C8. Error procedural de la multiplicación. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y lograr utilizar la operación de la multiplicación, pero erra al operar el proceso. Evidencia: Se presentan a continuación los tres tipos de errores encontrados con la multiplicación, según la categorización de la autora.

C8.1 Error procedural de la multiplicación no utiliza dígito requerido (error de lectura). Cuando el estudiante utiliza otro dígito diferente al requerido para operar la operación de multiplicación. Se interpreta como un error en la lectura en el proceso de multiplicar.

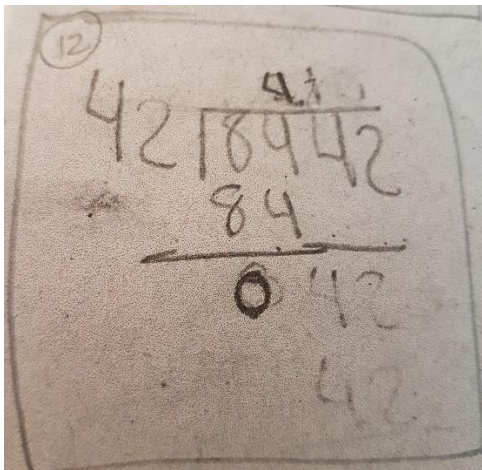
A continuación, Figura 13. C8.1 Error procedural de la multiplicación. Error de lectura:

Figura 13. C8.1 Error procedural de la multiplicación. Error de lectura

Figura 13. Evidencia fotografía C8.1 	C8.1 Error procedural de la multiplicación no utiliza dígito requerido (error de Lectura) Escuela San Miguel Milpas Altas jornada Matutina 6° A forma B Prueba PRE Problema #14 Nombre: M. Victoria Chacón C. (ver figura 13)

C8.2 Error procedural de la multiplicación no opera adecuadamente. Error de operar no según el orden o jerarquía de la operación es decir no opera desde el dígito más a la derecha del número y luego hacia el dígito más continuo a la izquierda ($56 \times 14 = 280$)

Figura 14. C8.2 Error procedural de la multiplicación no opera adecuadamente

Figura 14. Evidencia fotografía C8.2 	C8.2 Error procedural de la multiplicación no opera adecuadamente Escuela San Miguel Milpas Altas jornada Matutina 6° A forma B Prueba PRE Problema #12 Nombre: K. A. López S. (ver figura 14)

C8.3 Error procedural de la multiplicación no termina el proceso. Error de no finalizar con el proceso de la multiplicación ya que solo copio los dígitos del cociente en vez de operar.

A continuación, Figura 15 C8.3 Error procedural de la multiplicación no termina el proceso:

Figura 15. C8.3 Error procedural de la multiplicación no termina el proceso

Figura 15. Evidencia fotografía C8.3

$$\begin{array}{r}
 412 \\
 4 \overline{) 1,648} \\
 \underline{16} \\
 0048 \\
 \underline{12} \\
 36
 \end{array}$$

C8.3 Error procedural de la multiplicación no termina el proceso.

Escuela San Juan El Obispo 6° A forma n/a
 Prueba n/a Problema #11
 Nombre: W. N. Aguilar S. (ver figura 15)

C9. Error procedural de la división. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y lograr utilizar la operación de la división, pero erra al operar el algoritmo. Evidencia: Se presentan a continuación los 21 tipos de errores encontrados con la división, según la categorización de la autora.

C9.1 Error procedural de la división. Ubicación del 1 está errada en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en la ubicación posicional del 1 en el cociente. Error en el sentido del valor posicional de los dígitos. No entiende que son las unidades, decenas, centenas, etc.

Figura 16. C9.1 Error procedural de la división. Ubicación del uno está errada en el cociente

Figura 16. Evidencia fotografía C9.1

$$\begin{array}{r}
 1242 \\
 12 \overline{) 84.42} \\
 \underline{84} \\
 0042 \\
 \underline{42} \\
 00
 \end{array}$$

C9.1 Error procedural de la división. Ubicación del 1 está errada en el cociente

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B
 forma B Prueba POS Problema #12
 Nombre: A. R. Vásquez G. (ver figura 16)

C9.2 Error procedural de la división. No incluye punto decimal en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en no incluir el punto decimal en el cociente.

Figura 17. C9.2 Error procedural de la división. No incluye el punto decimal en el cociente

Figura 17. Evidencia fotografía C9.2

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 42.21} \\ \underline{42} \\ 0021 \\ \underline{21} \\ 00 \end{array}$$

C9.2 Error procedural de la división. No incluye punto decimal en el cociente

Escuela San Miguel Escobar Vespertina 6° A
forma A Prueba PRE Problema #12
Nombre: n/a (ver figura 17)

C9.3 Error procedural de la división. Incluye dos puntos decimales en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en incluir dos puntos decimales en el cociente.

Figura 18. Error procedural de la división. Incluye dos puntos decimales en el cociente

Figura 18. Evidencia fotografía C9.3

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 42.21} \\ \underline{42} \\ 00.21 \\ \underline{21} \\ 0.0 \end{array}$$

C9.3 Error procedural de la división. Incluye dos puntos decimales en el cociente

Escuela San Pedro Huertas Vespertina 6° A
forma A Prueba POS Problema # 12
Nombre: J. A. Monroy U. (ver figura 18)

C9.4 Error procedural de la división. Ubicación del cero esta errada en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en la ubicación posicional del cero. El estudiante tiene problemas en el concepto del valor posicional de los números: unidades, decenas, centenas, etc.

Figura 19. C9.4 (a) Error procedural de la división. Ubicación del cero esta errada en el cociente

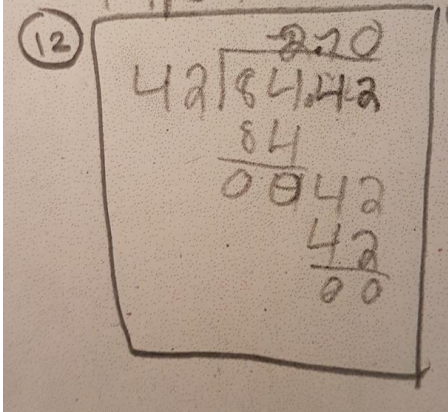
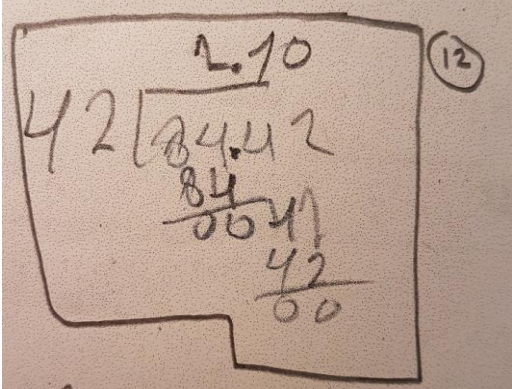
Figura 19. Evidencia fotografía C9.4 a 	C9.4 Error procedural de la división. Ubicación del cero esta errada en el cociente (1) Escuela San Juan El Obispo 6° A forma B Prueba POS Problema # 12 Nombre: J. D. Aquino M. (ver figura 19)

Figura 20. C9.4(b) Error procedural de la división. Ubicación del cero esta errada en el cociente

Figura 20. Evidencia fotografía C9.4 b 	C9.4 Error procedural de la división. Ubicación del cero esta errada en el cociente (2) Escuela San Juan El Obispo 6° A forma B Prueba POS Problema # 12 Nombre: H. E. Sunut A. (ver figura 20)

C9.5 Error procedural de la división. No baja dígito por dígito. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en que el proceso del algoritmo de la división no logra completarlo bajando el dígito por dígito. El error radica en un error conceptual del

proceso del algoritmo de la división. El concepto de la división está mal adecuado en el estudiante. Deformación del algoritmo de la división.

Figura 21. C9.5 Error procedural de la división. No baja el dígito por dígito

Figura 21. Evidencia fotografía C9.5

$$\begin{array}{r} 2.07 \\ 42 \overline{) 84.42} \\ \underline{84} \\ 0042 \\ \underline{42} \\ 00 \end{array}$$

C9.5 Error procedural de la división. No baja dígito por dígito

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° A
forma B Prueba POS Problema #12
Nombre: A. F. González I. (ver figura 21)

C9.6 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en que el estudiante omite el incluir el dígito cero en el cociente. El error es del tipo conceptual en cuanto a que considera el cero como una “nada” y por ende decide no representarlo totalmente. El concepto del cero está mal adecuado en el estudiante.

Figura 22. C9.6 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente

Figura 22. Evidencia fotografía C9.6

$$\begin{array}{r} 21 \\ 83 \overline{) 177.430} \\ \underline{166} \\ 0083 \\ \underline{83} \\ 00 \end{array}$$

C9.6 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° A
forma B Prueba POS Problema # 13
Nombre: Y. C. R. Chamquin C. (ver figura 22)

C9.7 Error procedural de la división. Coloca un cero antes del número en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en forma conceptual al incluir un cero antes del número. Considera que todos los números llevan un cero antes. Si bien el resultado puede ser “correcto” es oportuno aclarar que no es necesario incluir el cero antes de cualquier número. El concepto del cero está mal adecuado en el estudiante.

Figura 23. C9.7 (a) Error procedural de la división. Coloca un cero antes del número en el cociente

Figura 23. Evidencia fotografía C9.7 a

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{13} \quad 0210 \\
 83 \overline{) 177430} \\
 \underline{166} \\
 0083 \\
 \underline{83} \\
 000
 \end{array}$$

C9.7 Error procedural de la división. Coloca un cero antes del número en el cociente

(1) Escuela San Miguel Escobar
Matutina 6° A forma B Prueba POS
Problema # 13

Nombre: D. M. Minas P. (ver figura 23)

Figura 24. C9.7 (b) Error procedural de la división. Coloca un cero antes del número en el cociente

Figura 24. Evidencia fotografía C9.7 b

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{14} \quad 052 \\
 493 \overline{) 125636} \\
 \underline{2465} \\
 00986 \\
 \underline{986} \\
 000
 \end{array}$$

C9.7 Error procedural de la división. Coloca un cero antes del número en el cociente

(2) Escuela San Miguel Escobar Matutina
6° A forma B Prueba POS Problema #
14

Nombre: D. M. Minas P. (ver figura 24)

C9.8 Error procedural de la división. No finaliza el proceso de dividir. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en omitir finalizar el proceso de dividir. Algunos estudiantes deciden dejar de finalizar el proceso porque lo consideran innecesario y porque obtuvieron el resultado. El concepto del algoritmo de la división está mal adecuado en el estudiante, aunque si la respuesta es “correcta” se toma más como un error del tipo “dejadez” *carelessness*.

Figura 25. Error procedural de la división. No finaliza el proceso de dividir

Figura 25. Evidencia fotografía C9.8

$$\begin{array}{r} 20 \\ 83 \overline{) 17430} \\ \underline{-166} \\ 00830 \end{array}$$

C9.8 Error procedural de la división. No finaliza el proceso de dividir

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° A
forma A Prueba POS Problema # 13
Nombre: M. A. Osorio S. (ver figura 25)

C9.9 Error procedural de la división. No incluye el uno en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en incluir el dígito uno en el cociente.

Figura 26. C9.9 Error procedural de la división. No incluye el uno en el cociente

Figura 26. Evidencia fotografía C9.9

$$\begin{array}{r} 20 \\ 42 \overline{) 84.42} \\ \underline{-84} \\ 0042 \\ \underline{-42} \\ 00 \end{array}$$

C9.9 Error procedural de la división. No incluye el uno en el cociente

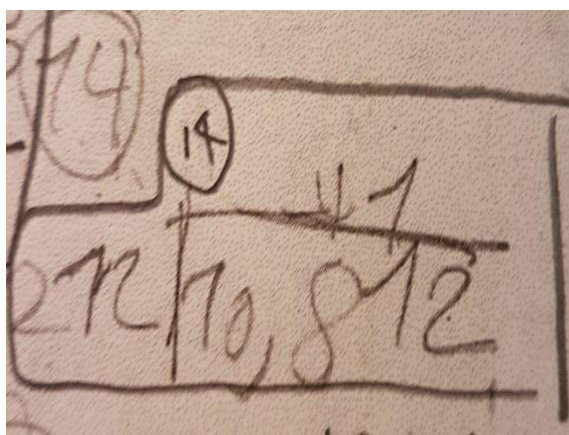
Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B
forma B Prueba PRE Problema# 12
Nombre: Y. E. Vega H. (figura 26)

Opera, pero omite el incluir el dígito. El concepto del uno o multiplicar por uno o bien el valor posicional de unidades, decenas y centenas, etc., está mal adecuado en el estudiante.

C9.10 Error procedural de la división. Copia el cociente y sin el proceso. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en trabajar la división sin operar es decir tiene el resultado correcto en el cociente, pero no opera para resolverlo. Erra en mostrar el proceso del algoritmo de la división. Lo que podría evidenciar es que copia o bien que lo calcula mentalmente, aún así, se considera un error en no operar el algoritmo de la división en forma completa y mostrar el proceso.

Figura 27. C9.10 Error procedural de la división. Copia el cociente y sin el proceso

Figura 27. Evidencia fotografía C9.10



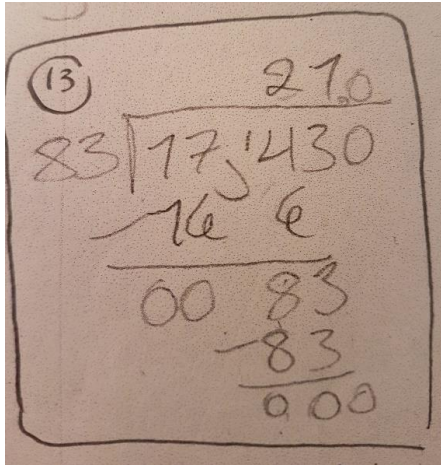
**C9.10 Error procedural de la división.
Copia el cociente y sin el proceso**

Escuela San Miguel Escobar Matutina 6º
A forma A Prueba POS Problema # 14
Nombre: C. A. Pirir B. (ver figura 27)

C9.11 Error procedural de la división. No tenía que subir el punto decimal en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en utilizar en el cociente un punto decimal que no era necesario. El estudiante muestra que el concepto de la operación del algoritmo de la división es deficiente y no lo entiende.

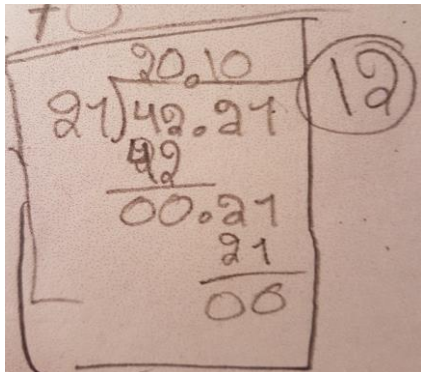
A continuación, Figura 28. C9.11 Error procedural de la división. No tenía que subir el punto decimal en el cociente:

Figura 28. C9.11 Error Procedural de la división. No tenía que subir el punto decimal en el cociente

Figura 28. Evidencia fotografía C9.11 	C9.11 Error procedural de la división. No tenía que subir el punto decimal en el cociente Escuela Ciudad Vieja 6° A forma A Prueba POS Problema #13 Nombre: J. E. Hernández V. (ver figura 28)

C9.12 Error procedural de la división. Coloca el punto decimal en el cociente donde no procede. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra al incluir un punto decimal en el lugar posicional del cociente en forma errada. El estudiante muestra que el concepto de la operación del algoritmo de la división es deficiente y no lo entiende además el concepto del valor posicional de las unidades, decenas, centenas, etc. no está adecuado en el estudiante.

Figura 29. C9.12. Error procedural de la división. Coloca el punto decimal en el cociente no procede

Figura 29. Evidencia fotografía C9.12 	C9.12 Error procedural de la división. Coloca el punto decimal en el cociente donde no procede Escuela Ciudad Vieja 6° A forma A Prueba POS Problema #12 Nombre: R. G Rivera S. (ver figura 29)

C9.13 Error procedural de la división. Realiza el proceso y no el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en omitir el cociente o resultado de la operación del algoritmo de la división. Lo que se puede interpretar es que el alumno entiende el procedimiento, pero decide no incluir el resultado en la parte del cociente. El concepto de las partes de la división: dividendo, divisor y cociente como residuo no lo tiene adecuado el estudiante.

Figura 30. C9.13. Error procedural de la división. Realiza el proceso y no el cociente

Figura 30. Evidencia fotografía C9.13

Handwritten division problem: $174850 \div 599$. The student has written the dividend 174850 and the divisor 599. Below them, they have written 20,790, which is the result of the division. The problem is circled, and the number 13 is written in a circle to the left.

C9.13 Error procedural de la división. Realiza el proceso y no el cociente

Escuela San Pedro Huertas Vespertina 6° A
forma A POS Problema # 13
Nombre: A. F. Higuera F. (ver figura 30)

C9.14 Error procedural de la división. No opera adecuadamente. Error de operar no según el orden o jerarquía de la operación es decir no opera desde el dígito más a la derecha del número y luego hacia el dígito más continuo a la izquierda.

Figura 31. C9.14 Error procedural de la división. No opera adecuadamente

Figura 31. Evidencia fotografía C9.14

Handwritten division problem: $493 \overline{) 251636}$. The student has written the divisor 493 and the dividend 251636. They have written 2563 below the dividend, and 3073 below that. The number 14 is circled to the right of the last digit.

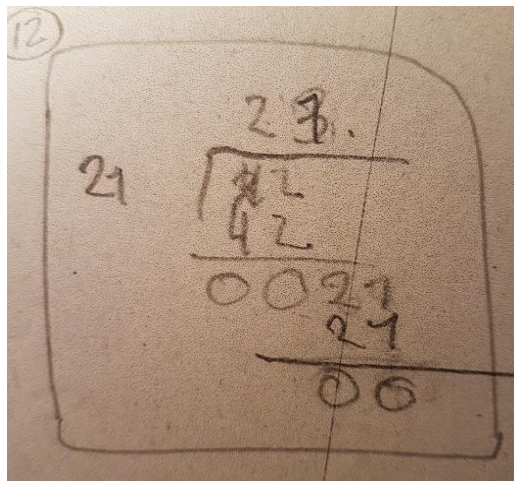
C9.14 Error procedural de la división. No opera adecuadamente.

Escuela San Miguel Milpas Altas
Matutina 6° A forma B Prueba PRE
Problema# 14
Nombre: A. J. Salamá L. (ver figura 31)

C9.15 Error procedural de la división. Copia mal el dividendo (error de lectura). Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en copiar equivocadamente un dígito en el dividendo. Se interpreta como un error en la lectura en el proceso de dividir.

Figura 32. C9.15 Error procedural de la división. Copia mal el dividendo. Error de lectura

Figura 32. Evidencia fotografía C9.15



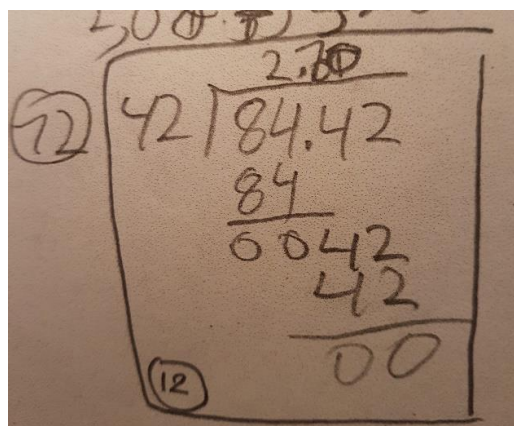
**C9.15 Error procedural de la división.
Copia mal el dividendo (Error de Lectura)**

Escuela San Miguel Milpas Altas 6° B forma
A Prueba PRE Problema # 12
Nombre: H. M. Hernández R. (ver figura
32)

C9.16 Error procedural de la división. Contrapone números. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la División, pero erra en poner varios números uno sobre otro..

Figura 33. C9.16 Error procedural de la división. Contrapone números

Figura 33. Evidencia fotografía C9.16



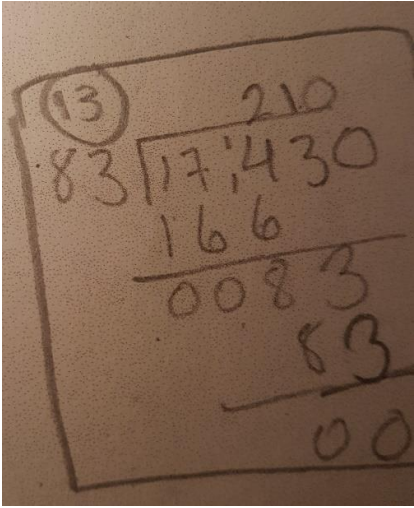
**C9.16 Error procedural de la división.
Contrapone números**

Escuela Ciudad Vieja 6° A forma B Prueba
POS Problema # 12
Nombre: C. Saúl (ver figura 33)

Se torna ilegible y no se puede interpretar cual es el valor que el estudiante encuentra como la solución. El estudiante denota inseguridad en el proceso de la división y puede ser tanto en la resta, multiplicación como en el proceso de dividir. El estudiante no tiene adecuado los conceptos de las operaciones básicas aritméticas

C9.17 Error procedural de la división. No bajo el cero del dividendo en el proceso de dividir. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en el proceso del algoritmo de la división ya que no baja un cero del dividendo para el proceso de dividir. El error es del tipo conceptual en cuanto a que considera el cero como una “nada” y por ende decide no representarlo totalmente. El concepto del cero está mal adecuado en el estudiante.

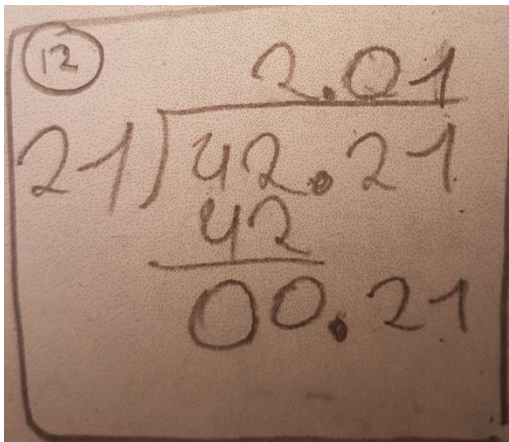
Figura 34. C9.17. Error procedural de la división. No baja el cero del dividendo

Figura 34. Evidencia fotografía C9.17 	C9.17 Error procedural de la división. No bajo el cero del dividendo en el proceso de dividir Escuela Ciudad Vieja 6° A forma A Prueba POS Problema # 13 Nombre: C. E. Hernández S. (ver figura 34)

C9.18 Error procedural de la división. Dentro del dividendo incluyo punto decimal y no procede. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en que decide incluir un punto decimal en el dividendo y no es lo que se le pide. Se puede considerar como un error de lectura en el sentido que el estudiante cree ver un punto decimal y no es así.

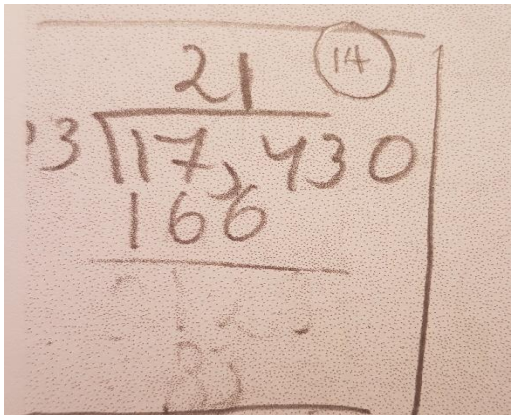
A continuación, C9.18 Error procedural de la división. Dentro del dividendo incluyo punto decimal y no procede.

Figura 35. C9.18 Error procedural de la división. Dentro del dividendo incluye punto decimal y no procede

Figura 35. Evidencia fotografía C9.18 	C9.18 Error procedural de la división. Dentro del dividendo incluye punto decimal y no procede Escuela Ciudad Vieja 6° A forma A Prueba POS Problema # 12 Nombre: M. G. González M. (ver figura 35)

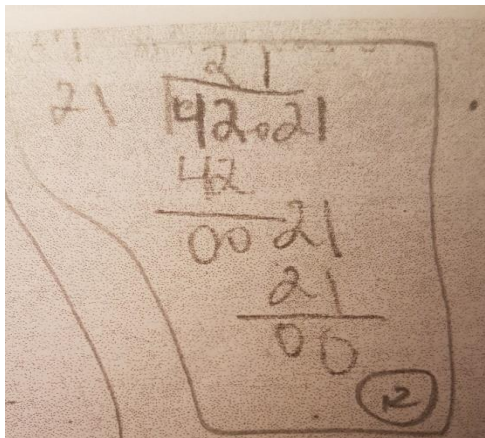
C9.19 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en no incluir el cero cuando procede en el cociente. Omite el cero. El error es del tipo conceptual en cuanto a que considera el cero como una “nada” y por ende decide no representarlo totalmente. El concepto del cero está mal adecuado en el estudiante.

Figura 36. C9.19 (a) Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente

Figura 36. Evidencia fotografía C9.19 a 	C9.19 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente (1) Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B forma A Prueba POS Problema # 14 Nombre: M. A. López Y. (ver figura 36)

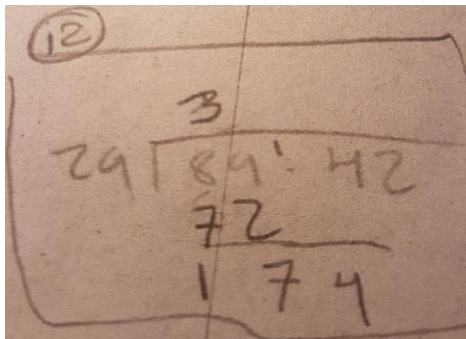
A continuación, Figura 37. C9.19(b) Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente.

Figura 37. C9.19. Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente

Figura 37. Evidencia fotografía C9.19 b 	C9.19 Error procedural de la división. No incluye el cero en el cociente (2) Escuela San Miguel Escobar Matutina 6° B forma A Prueba PRE Problema # 12 Nombre: M. A. López Y. (ver figura 37)

C9. 20 Error procedural de la división. No copia bien el divisor (error de lectura). Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra no copia correctamente el divisor (error de lectura).

Figura 38. C9.20. Error procedural de la división. Error de Lectura

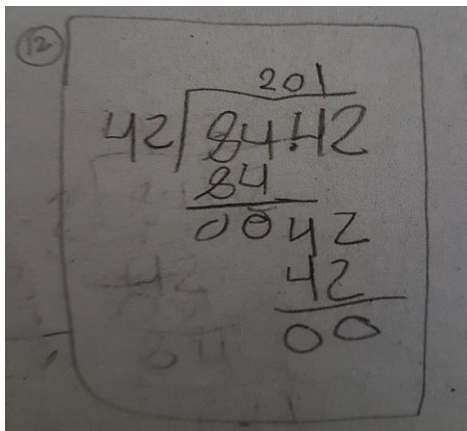
Figura 38. Evidencia fotografía C9.20 	C9. 20 Error procedural de la división. No copia bien el divisor (error de lectura) Escuela San Miguel Milpas Altas 6° B forma B Prueba PRE Problema # 12 Nombre: L. R. Chacón S. (ver figura 38)

C9.21 Error procedural de la división. Coloca un cero entre dos dígitos en el cociente. Cuando el estudiante comprende lo que se necesita resolver y utiliza la operación de la división, pero erra en incluir un cero entre dos dígitos en el cociente cuando no procede. El error es del tipo conceptual en cuanto a que

considera el cero como una “nada” y por ende decide que no afecta si lo incluye entre dos dígitos. El concepto del cero está mal adecuado en el estudiante.

Figura 39. C9.21 Error procedural de la división. Coloca un cero entre dos dígitos en el cociente

Figura 39. Evidencia fotografía C9.21



C9.21 Error procedural de la división. Coloca un cero entre dos dígitos en el cociente

Escuela San Miguel Milpas Altas 6° B forma B Prueba PRE Problema # 12
Nombre: H. E. Sanchez C. (ver figura 39)

C10. Error procedural de dejadez o “*carelessness*”. En este tipo de error no se presenta evidencia del trabajo procedural y aunque se muestra correcta no hay nada por escrito que pruebe que sabe interpretar y realizar el proceso de dividir.

VII. RESULTADOS

A. Frecuencia de errores en las pruebas de matemáticas

En este capítulo, se presentan los resultados del análisis de la categorización del error obtenidos de la tabulación de todos los datos. Estos resultados muestran el alcance conceptual obtenido por el grupo de estudiantes, su problemática y evidencia de los tipos de error en el desarrollo del procedimiento del algoritmo de la división. Por lo que, se muestra las características estructurales de aprendizaje que los grupos de estudiantes de 6º grado de primaria de las Escuelas La Esperanza alcanzaron en el tema de la división.

A continuación, las Tablas 5 al 7 muestran la frecuencia de errores en la resta, multiplicación y la división al ejecutar los cuatro problemas de división en las pruebas de matemáticas de 6º grado de primaria.

Tabla 5. Frecuencia de errores en la resta

Tipo de error	Problema 11	Problema 12	Problema 13	Problema 14	Totales
E_T5_ÍTEM_11_T4_REST A					
Tipo_C7.6	0	0	1	0	1
Tipo_C7.5	2	3	7	12	24
Tipo_C7.4	1	2	0	1	4
Tipo_C7.3	10	0	0	5	15
Tipo_C7.2	0	0	1	1	2
Tipo_C7.1	0	0	7	1	8
Totales	13	5	16	20	54

Tabla 6. Frecuencia de errores en la multiplicación

Tipo de error	Problema 11	Problema 12	Problema 13	Problema 14	Totales
E_T5_ÍTEM_11_T4_MUL TIPLICACION					
Tipo_C8.3	3	1	0	1	5
Tipo_C8.2	12	7	17	21	57
Tipo_C8.1	0	0	0	13	13
Totales	15	8	17	35	75

Tabla 7. Frecuencia de errores en la división

Tipo de error E_T5_ÍTEM_11_T4_DIVISION	Problema 11	Problema 12	Problema 13	Problema 14	Totales
Tipo_C9.21	0	1	0	0	1
Tipo_C9.20	0	1	0	0	1
Tipo_C9.19	0	0	0	1	1
Tipo_C9.18	0	1	0	0	1
Tipo_C9.17	0	0	1	0	1
Tipo_C9.16	0	3	0	0	3
Tipo_C9.15	3	2	0	2	7
Tipo_C9.14	9	9	11	13	42
Tipo_C9.13	0	2	3	0	5
Tipo_C9.12	2	7	5	0	14
Tipo_C9.11	0	0	7	0	7
Tipo_C9.10	0	0	0	1	1
Tipo_C9.9	0	0	1	0	1
Tipo_C9.8	10	27	10	12	59
Tipo_C9.7	0	1	3	4	8
Tipo_C9.6	0	4	3	0	7
Tipo_C9.5	14	77	1	1	93
Tipo_C9.4	0	0	1	0	1
Tipo_C9.3	1	3	2	1	7
Tipo_C9.2	0	29	0	0	29
Tipo_C9.1	6	40	7	2	55
Totales	45	207	55	37	344

Los tipos de error en la resta más comunes son C7.5 Error procedural de la resta tipo bug B (error de operar no según el orden o jerarquía de la operación es decir opera desde el dígito más a la derecha del número y luego hacia el dígito mas continuo a la izquierda) el 44% y el error C7.3 Error procedural de la resta tipo bug A (no presenta evidencia de finalizar el proceso de restar) con un 28%.

Los tipos de error en la multiplicación más comunes son C8.2 Error procedural de la multiplicación no opera adecuadamente (error de no operar según el orden o jerarquía de la operación es decir no opera desde el dígito más a la derecha del número luego hacia el dígito mas continuo a la izquierda) es un 76%, y el error

C8.1 Error procedural de la multiplicación no utiliza dígito requerido (error de lectura, es decir cuando el estudiante utiliza otro dígito diferente al requerido para operar la operación).

Los tipos de error en la división más comunes son: C9.5 Error procedural de la división. No baja dígito por dígito. Deformación del algoritmo (error radica en un error conceptual del proceso del algoritmo de la división) con una ocurrencia del 27%; C9.8 Error procedural de la división. No finaliza el proceso de dividir y se presenta una deformación del algoritmo de la división (es un error por dejadez o “carelessness”) con una ocurrencia de 17%; C9.1 Error procedural de la división. Ubicación del numeral uno está errada en ubicación posicional en el cociente, con una ocurrencia del 16%; C9.14 Error procedural de la división, se presenta una deformación del algoritmo de la división (error de no operar según el orden o jerarquía de la operación es decir no opera desde el dígito más a la derecha del número y luego hacia el dígito más continuo a la izquierda) con una ocurrencia del 12% y C9.2 Error procedural de la división. No incluye punto decimal en el cociente, con una ocurrencia del 8%.

A continuación, en las Tablas 8 a la 11 se describen los tipos de errores en frecuencia por escuela por ítem.

Tabla 8. Frecuencia de errores por escuela ítem 11

Escuela	E_T5_ÍTEM_11			Totales
	E_T5_ÍTEM_1 1_T4_RESTA	_T4_MULTIPLICACION	E_T5_ÍTEM_11 _T4_DIVISION	
San Miguel Escobar Matutina	3	2	4	9
San Miguel Milpas Altas	2	5	14	21
Santa Catarina Bobadilla	1	1	6	8
San Miguel Escobar Vespertina	3	3	5	11
Guardianía	0	1	1	2
San Juan del Obispo	0	1	5	6
San Pedro Vespertina	1	1	3	5
Ciudad Vieja	3	1	7	11
Totales	13	15	45	73

En la Tabla 8, se puede concluir que la escuela con mayor número de errores totales tipificados fue la escuela San Miguel Milpas Altas para el ítem 11 con una ocurrencia de 29%. Para todas las escuelas la mayor frecuencia de errores tipificados se encuentra durante el proceso de dividir con un 62%.

Tabla 9. Frecuencia de errores por escuela ítem 12

Escuela	E_T5_ÍTEM_12_			Totales
	T4_RESTA	T4_MULTIPLICACION	T4_DIVISION	
San Miguel Escobar Matutina	0	0	50	50
San Miguel Milpas Altas	3	6	18	27
Santa Catarina Bobadilla	0	0	17	17
San Miguel Escobar Vespertina	0	0	21	21
Guardianía	0	0	18	18
San Juan del Obispo	2	2	36	40
San Pedro Vespertina	0	0	8	8
Ciudad Vieja	0	0	39	39
Totales	5	8	207	220

Para el ítem 12 en la Tabla 9 se muestra que la escuela con mayor frecuencia de errores en este ítem fue la escuela San Miguel Escobar Matutina con un 23% de ocurrencia de errores. Además, se muestra que para el grupo muestra de escuelas, la dificultad mayor radica en el operar el algoritmo de la división con un 94% de ocurrencia.

Para el ítem 13 que muestra la Tabla 10 la escuela San Miguel Escobar Matutina muestra mayor ocurrencia de errores 24%. La Tabla 10 continúa mostrando que, para el ítem 13 la mayor ocurrencia de errores se encuentra para el grupo muestra de escuelas durante el proceso de operar el algoritmo de la división con una ocurrencia de 63%.

Tabla 10. Frecuencia de errores por escuela ítem 13

Escuela	E_T5_ÍTEM_13			Totales
	E_T5_ÍTEM_13 _T4_RESTA	E_T5_ÍTEM_13 T4_MULTIPLICACION	E_T5_ÍTEM_13 _T4_DIVISION	
San Miguel Escobar Matutina	5	1	15	21
San Miguel Milpas Altas	3	6	8	17
Santa Catarina Bobadilla	1	2	4	7
San Miguel Escobar Vespertina	0	2	6	8
Guardianía	1	0	3	4
San Juan del Obispo	1	3	9	13
San Pedro Vespertina	1	1	3	5
Ciudad Vieja	4	2	7	13
Totales	16	17	55	88

En el ítem 14 se muestra en la Tabla 11 que la mayor ocurrencia de errores la tiene la escuela San Miguel Escobar Matutina y la escuela Ciudad Vieja ambas con un 23% cada una. La mayor frecuencia de errores en el ítem 14 se encuentra en el proceso de operar la división con un 40% y durante el proceso de operar la multiplicación con un 38%.

Tabla 11. Frecuencia de errores por escuela ítem 14

Escuela	E_T5_ÍTEM_14			Totales
	E_T5_ÍTEM_14 _T4_RESTA	E_T5_ÍTEM_14 _T4_MULTIPLICACION	E_T5_ÍTEM_14 _T4_DIVISION	
San Miguel Escobar Matutina	5	9	7	21
San Miguel Milpas Altas	1	4	2	7
Santa Catarina Bobadilla	1	1	2	4
San Miguel Escobar Vespertina	4	6	7	17
Guardianía	2	3	4	9
San Juan del Obispo	3	5	4	12
San Pedro Vespertina	0	1	0	1
Ciudad Vieja	4	6	11	21
Totales	20	35	37	92

En la Tabla 12, se muestra la frecuencia de errores del tipo dejadez o “carelessness” o datos que no se encuentran evidenciados. Las escuelas con mayor error de este tipo fueron las escuelas Ciudad Vieja y San Miguel Milpas Altas con un 22% y 21% respectivamente.

Tabla 12. Frecuencia de errores C10 *careless* / dejadez o sin evidencia

Escuela	Totales			
	E_T6_ÍTEM_11	E_T6_ÍTEM_12	E_T6_ÍTEM_13	E_T6_ÍTEM_14
San Miguel Escobar Matutina	16	12	15	20
San Miguel Milpas Altas	30	33	35	44
Santa Catarina Bobadilla	8	12	12	16
San Miguel Escobar Vespertina	14	21	17	18
Guardianía	7	5	9	8
San Juan del Obispo	27	25	27	37
San Pedro Vespertina	9	12	15	18
Ciudad Vieja	31	38	34	41
Totales	142	158	164	202

En la Tabla 13 se muestra los resultados de analizar la ocurrencia de errores procedurales o de habilidades de proceso “*process skills*” y la escuela con mayor frecuencia de este tipo de errores es la escuela San Miguel Escobar Matutina con una ocurrencia del 21% y para la escuela Ciudad Vieja con un 18%. El ítem que mayor dificultad presentó para el grupo de muestra de Escuelas de las Familias de la Esperanza fue el ítem 12 con una frecuencia de error presentados del 46.5%

Tabla 13. Frecuencia Total de errores procedurales (*Process Skill*) por escuela

Escuela					Totales
	E_T6_ÍTEM_11	E_T6_ÍTEM_12	E_T6_ÍTEM_13	E_T6_ÍTEM_14	
San Miguel Escobar Matutina	9	50	21	21	101
San Miguel Milpas Altas	21	27	17	7	72
Santa Catarina Bobadilla	8	17	7	4	36
San Miguel Escobar Vespertina	11	21	8	17	57
Guardianía	2	18	4	9	33
San Juan del Obispo	6	40	13	12	71
San Pedro Vespertina	5	8	5	1	19
Ciudad Vieja	11	39	13	21	84
Totales	73	220	88	92	473

La Tabla 14 que se presenta y detalla a continuación, incluye todo lo analizado en las pruebas de matemática en los ítems 11 al 14.

Tabla 14. Tabla de Frecuencias y porcentajes de errores por establecimiento y tipos de categorización del error

		San Miguel Escobar		San Miguel Matutina		San Miguel Milpas Altas		Santa Catarina		San Miguel Escobar		Guardia		San Juan del Obispo		San Pedro		Ciudad de Mérida		
		%		%		%		%		%		%		%		%		%		
Cantidad (N)	Descripción	Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		Frecuencia		
Básicamente Correctos	1.1 Correctos	57	13.41%	54	12.71%	30	7.06%	45	10.59%	22	5.18%	64	15.06%	22	5.18%	74	17.41%			
	1.2 Correctos no estandar	130	57.02%	29	13.43%	56	46.67%	72	40.00%	36	40.91%	107	41.80%	20	22.73%	117	39.53%			
		5	41.67%	2	16.67%	0	0.00%	1	8.33%	0	0.00%	1	8.33%	0	0.00%	3	25.00%			
Errores Categorización Newman	2.1 Lectura del Problema (Reading)	4	19.05%	4	19.05%	2	9.52%	3	14.29%	3	14.29%	0	0.00%	1	4.76%	4	19.05%			
	2.2 Comprende el Problema (Comprehension)	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a			
	2.3 Transformación (Transformation)	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a			
	2.4 Proceso /Ejecuta la estrategia (Process Skill)	97	21.51%	68	15.08%	34	7.54%	54	11.97%	30	6.65%	71	15.74%	18	3.99%	80	17.74%			
	2.4.1 Process Skill Resta																			
	2.4.1.1 Process Skill Resta Bug 29 (Borrow/From/Larger)	3	38%	2	25%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	3	38%			
	2.4.1.2 Process Skill Resta Bug 39 (Borrow/NO/Decrement)	1	50%	1	50%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%			
	2.4.1.3 Process Skill Resta Bug A (No finalizo el proceso de restar)	2	13%	1	6%	1	6%	5	31%	0	0%	2	13%	1	6%	4	25%			
	2.4.1.4 Process Skill Resta Bug 8 (Add/instead/of/Subtract)	1	25%	3	75%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%			
	2.4.1.5 Process Skill Resta Bug B (No opera adecuadamente)	6	26%	2	9%	2	9%	2	9%	3	13%	4	17%	0	0%	4	17%			
	2.4.1.6 Process Skill Resta Bug 63 (Doesn't/Borrow)	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	1	100%	0	0%			
	Subtotal Errores Resta	13	24%	9	17%	3	6%	7	13%	3	6%	6	11%	2	4%	11	20%			
	2.4.2 Proceso Multiplicación																			
	2.4.2.1 No utiliza dígito requerido (Error de Lectura)	3	23%	1	8%	0	0%	3	23%	3	23%	0	0%	1	8%	2	15%			
	2.4.2.2 No opera adecuadamente	8	14%	20	35%	4	7%	7	12%	0	0%	10	18%	2	4%	6	11%			
	2.4.2.3 No termina proceso	1	20%	0	0%	0	0%	1	20%	1	20%	1	20%	0	0%	1	20%			
	Subtotal Errores Multiplicación	12	16%	21	28%	4	5%	11	15%	4	5%	11	15%	3	4%	9	12%			
	2.4.3 Proceso División																			
	2.4.3.1 Ubicación del 1 esta errada	13	23.64%	7	12.73%	4	7.27%	4	7.27%	4	7.27%	9	16.36%	4	7.27%	10	18.18%			
	2.4.3.2 No incluye punto decimal	4	13.79%	4	13.79%	0	0.00%	6	20.69%	5	17.24%	1	3.45%	2	6.90%	7	24.14%			
	2.4.3.3 Incluye dos puntos decimales	1	14.29%	1	14.29%	0	0.00%	1	14.29%	0	0.00%	2	28.57%	1	14.29%	1	14.29%			
	2.4.3.4 Ubicación del 0 esta errada	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	100.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.5 No baja dígito por dígito	38	41.30%	6	6.52%	11	11.96%	7	7.61%	5	5.43%	9	9.78%	2	2.17%	14	15.22%			
	2.4.3.6 No incluye el cero en el cociente	1	14.29%	0	0.00%	3	42.86%	1	14.29%	0	0.00%	1	14.29%	0	0.00%	1	14.29%			
	2.4.3.7 Puso un cero antes del número en el cociente	5	62.50%	0	0.00%	0	0.00%	1	12.50%	0	0.00%	2	25.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.8 No finalizó el proceso	5	8.47%	5	8.47%	4	6.78%	6	10.17%	9	15.25%	15	25.42%	0	0.00%	15	25.42%			
	2.4.3.9 No incluye el 1 en cociente	1	100.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.10 Copia el cociente y sin el proceso	1	100.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.11 No tenía que subir el punto decimal	4	44.44%	1	11.11%	0	0.00%	1	11.11%	0	0.00%	1	11.11%	0	0.00%	2	22.22%			
	2.4.3.12 Puso el punto decimal donde no procede	0	0.00%	2	15.38%	1	7.69%	1	7.69%	0	0.00%	2	15.38%	1	7.69%	6	46.15%			
	2.4.3.13 Puso el proceso y no el cociente	1	20.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	2	40.00%	1	20.00%	1	20.00%	0	0.00%			
	2.4.3.14 No operó adecuadamente	0	0.00%	12	28.57%	3	7.14%	11	26.19%	1	2.38%	10	23.81%	3	7.14%	2	4.76%			
	2.4.3.15 Copió mal el dividendo (error de Lectura)	0	0.00%	3	42.86%	2	28.57%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	2	28.57%			
	2.4.3.16 Contraponen números	0	0.00%	0	0.00%	1	33.33%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	2	66.67%			
	2.4.3.17 No bajo el cero en el proceso de dividir	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	100.00%			
	2.4.3.18 Dentro de la división incluyo punto decimal	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	100.00%			
	2.4.3.19 No incluye el cero en el cociente	1	100.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.20 No copia bien el divisor (error de Lectura)	1	100.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	2.4.3.21 Puso un cero entre dos dígitos en el cociente	0	0.00%	1	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%			
	Subtotal Error División	76	22.09%	42	12.21%	29	8.43%	39	11.34%	26	7.56%	54	15.70%	14	4.07%	64	18.60%			
Errores Varios	2.5 No se presenta evidencia	63	9.46%	142	21.32%	48	7.21%	70	10.51%	29	4.35%	116	17.42%	54	8.11%	144	21.62%			
Total Errores por Escuela	2.6 Totales Errores Process Skill (incluyendo errores de Lectura)	101	21.35%	72	15.22%	36	7.61%	57	12.05%	33	6.98%	71	15.01%	19	4.02%	84	17.76%			

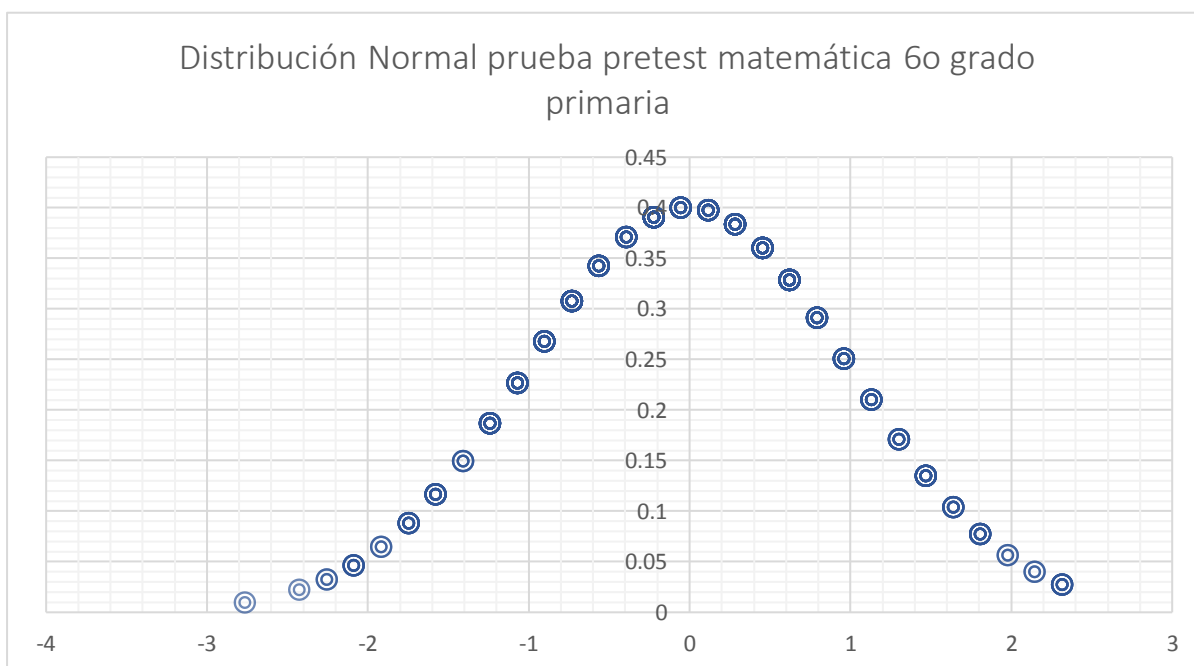
B. Interpretación de los resultados

La prueba de matemáticas aplicada es de 40 preguntas dividida en parte de operaciones, conceptos y problemas. De los 1700 problemas se analizaron 1034 problemas que mostraban evidencia de cuatro problemas de la división de 368 estudiantes de 8 escuelas del Proyecto Familias de la Esperanza. La prueba se aplica en forma A y B “espiraleada” tanto para la prueba pretest como para la prueba postest.

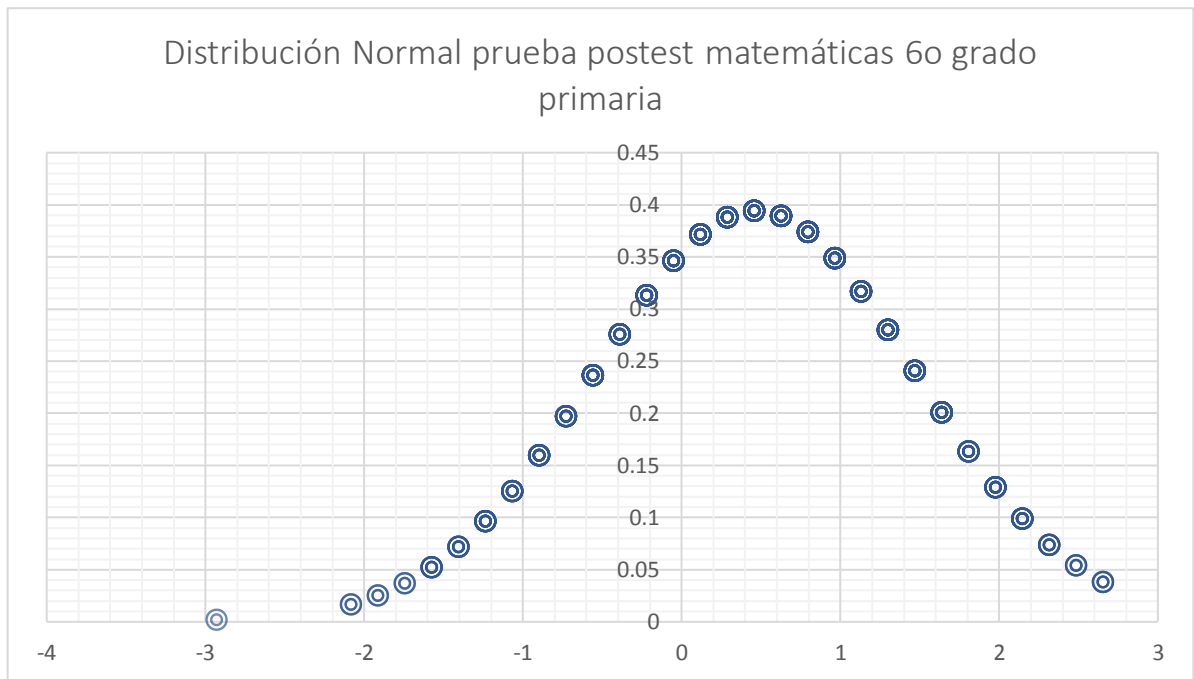
El muestreo de esta investigación fue del tipo accidental o casual. Esta muestra se formó con alumnos que casualmente se encontraban en el lugar y en el momento decidido por el investigador, aunque las pruebas si se pasaron de dos formas A y B en forma espiral. Los ítems variaron en una pregunta ítem 14.

En total fueron 183 estudiantes que lograron alcanzar el logro en la prueba pretest de matemáticas. Fueron 252 los estudiantes que lograron alcanzar el logro en la prueba postest de matemáticas.

Gráfica 1 Distribución Normal prueba pretest

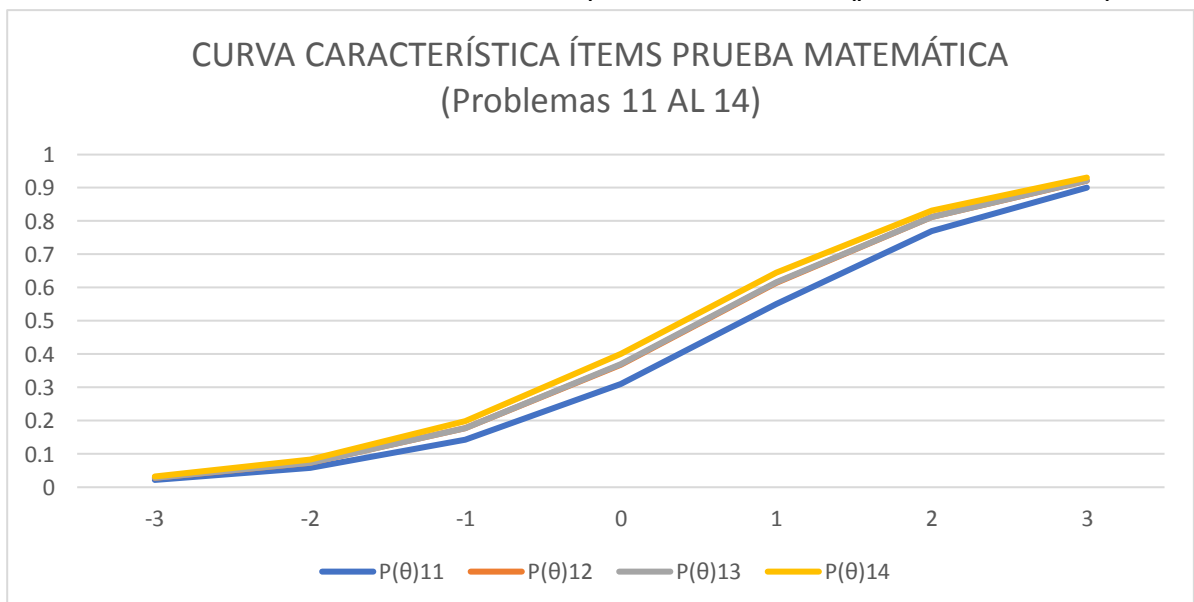


Gráfica 2 Distribución Normal prueba postest matemáticas 6º grado primaria



Las distribuciones en ambas pruebas son normales. A continuación, se muestra la curva característica de los ítems (CCI) de la prueba de matemática del 11 al 14. Describe la relación entre la probabilidad de respuesta correcta a un ítem a escala de aptitud.

Gráfica 3. Curva característica del ítem prueba matemática (problemas 11 al 14)



Los ítems muestran una dificultad media. La curva tiene una pendiente muy pequeña y la probabilidad de responder correctamente cambia muy lentamente a lo largo del rango completo de aptitud. Las curvas con mayor pendiente corresponden a ítems que discriminan mejor (Arias, M. R., M. V. Hernández y M. J. Hernández, 2006).

Los ítems con JMetrik se analizan únicamente por razones de describir la prueba matemática de 6º grado de primaria y dicho análisis genera la siguiente información sobre los ítems:

ÍTEM ANALYSIS				
tesislucia.DATOSJM				
August 2, 2017 09:40:44				
=====				
Ítem	Option (Score)	Difficulty	Std. Dev.	Discrimin.
prem_c11	Overall	0.7962	0.4034	0.3873
	0.0(0.0)	0.2038	0.4034	-0.6680
	1.0(1.0)	0.7962	0.4034	0.3873
prem_c12	Overall	0.5380	0.4992	0.3693
	0.0(0.0)	0.4620	0.4992	-0.7069
	1.0(1.0)	0.5380	0.4992	0.3693
prem_c13	Overall	0.5299	0.4998	0.4055
	0.0(0.0)	0.4701	0.4998	-0.7281
	1.0(1.0)	0.5299	0.4998	0.4055
prem_c14	Overall	0.3995	0.4905	0.3325
	0.0(0.0)	0.6005	0.4905	-0.6804
	1.0(1.0)	0.3995	0.4905	0.3325
posm_c11	Overall	0.8804	0.3249	0.3304
	0.0(0.0)	0.1196	0.3249	-0.5810
	1.0(1.0)	0.8804	0.3249	0.3304
posm_c12	Overall	0.6277	0.4841	0.2885
	0.0(0.0)	0.3723	0.4841	-0.6494
	1.0(1.0)	0.6277	0.4841	0.2885
posm_c13	Overall	0.6467	0.4786	0.3912
	0.0(0.0)	0.3533	0.4786	-0.7096
	1.0(1.0)	0.6467	0.4786	0.3912
posm_c14	Overall	0.5652	0.4964	0.3517
	0.0(0.0)	0.4348	0.4964	-0.6950
	1.0(1.0)	0.5652	0.4964	0.3517

TEST LEVEL STATISTICS

=====
 Number of Ítems = 8
 Number of Examinees = 368
 Min = 0.0000
 Max = 8.0000
 Mean = 4.9837
 Median = 5.0000
 Standard Deviation = 2.0202
 Interquartile Range = 3.0000
 Skewness = -0.3172
 Kurtosis = -0.6615
 KR21 = 0.6167

RELIABILITY ANALYSIS

Method	Estimate	95% Conf. Int.	SEM
Guttman's L2	0.6680	(0.6142, 0.7170)	1.1640
Coefficient Alpha	0.6632	(0.6085, 0.7128)	1.1725
Feldt-Gilmer	0.6660	(0.6118, 0.7152)	1.1676
Feldt-Brennan	0.6667	(0.6126, 0.7158)	1.1680
Raju's Beta	0.6632	(0.6085, 0.7128)	1.1725

RELIABILITY IF ÍTEM DELTED

Ítem	L2	Alpha	F-G	F-B	Raju
prem_c11	0.6318	0.6263	0.6301	0.6304	0.6263
prem_c12	0.6346	0.6288	0.6334	0.6334	0.6288
prem_c13	0.6239	0.6188	0.6211	0.6224	0.6188
prem_c14	0.6435	0.6385	0.6409	0.6424	0.6385
posm_c11	0.6453	0.6414	0.6435	0.6431	0.6414
posm_c12	0.6556	0.6496	0.6534	0.6545	0.6496
posm_c13	0.6285	0.6229	0.6271	0.6275	0.6229
posm_c14	0.6383	0.6335	0.6372	0.6377	0.6335

Datos descriptivos de la prueba pretest

<i>PREM_PRC</i>	
Media	58.2269022
Error típico	0.76975764
Mediana	57.5
Moda	67.5
Desviación estándar	14.7665119
Varianza de la muestra	218.049874
	-
Curtosis	0.33587833
Coeficiente de asimetría	0.00852665
Rango	75
Mínimo	17.5
Máximo	92.5
Suma	21427.5
Cuenta	368

La confiabilidad de la prueba pretest es de 0.78 y el SEM es de 2.75, la prueba pretest tuvo una media de $\mu = 58.23$ y una $\sigma = 14.7665$, la mediana fue 57.5

CONFIABILIDAD prueba pretest	0.78089388
SEM	2.7503597

Datos descriptivos de la prueba posttest

<i>POSM_PRC</i>	
Media	65.1290761
Error típico	0.78068578
Mediana	65
Moda	60
Desviación estándar	14.9761499
Varianza de la muestra	224.285065
	-
Curtosis	0.23145236
	-
Coeficiente de asimetría	0.24582681
Rango	82.5
Mínimo	15
Máximo	97.5
Suma	23967.5
Cuenta	368

La confiabilidad de la prueba postest es de 0.80 y el SEM es de 2.66 la prueba postest tuvo una media de $\mu = 65.13$ y una $\sigma = 14.9761$, la mediana fue de 65.

CONFIABILIDAD prueba postest	0.80333012
SEM	2.6566179

Para los ítems analizados se observa la siguiente descripción de dificultad y discriminación⁸⁰:

Ítem	Dificultad	Discriminación	Descripción
Pre_ítem_11	0.7962	0.3873	Fácil/Bueno
Pre_ítem_12	0.5380	0.3693	Promedio/Buen
Pre_ítem_13	0.5299	0.4055	Promedio/Muy Bueno
Pre_ítem_14	0.3995	0.3325	Difícil/Bueno
Pos_ítem_11	0.8804	0.3304	Fácil/Bueno
Pos_ítem_12	0.6277	0.2885	Fácil/Regular
Pos_ítem_13	0.6467	0.3912	Fácil/Bueno
Pos_ítem_14	0.5652	0.3517	Promedio/Bueno

Las tablas de descripción de ítems en discriminación y en dificultad se encuentran en el Anexo (ver página 328).

Las Hipótesis que demostrar son:

H_{01} : = No hay suficiente evidencia de que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la falta de fluidez matemática para los estudiantes de 6º grado de primaria.

H_{r1} : = Se presenta suficiente evidencia que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la fluidez matemática para los estudiantes de 6º grado de primaria.

⁸⁰ Kelley, T. L. in the Journal of Educational Psychology, Vol 30(1), Jan 1939, pag. 17-24; Disponible en <https://ppukmdotorg.wordpress.com/2015/04/02/calculating-omr-indexes/>

Al analizar los datos de las hojas de trabajo de 368 estudiantes con cuatro problemas de la división en las pruebas de matemática de 6º grado de primaria de las 8 escuelas que conforman el proyecto Familias de la Esperanza se analizaron un total de 1700 problemas de las pruebas. El 39% es decir 666 problemas de los 1700 problemas analizados no presentaron evidencia del uso correcto o no de los procedimientos de la división. El 61% de los problemas es decir 1034 problemas si presentaron evidencia y fueron los analizados con el procedimiento de categorización de Ann Newman.

De los 1700 problemas se analizaron 1034 y se encontraron 30 tipos o categorización de errores. De los 1034 problemas un total de 579 problemas de la división mostraron evidencia de estar con procesos correctos o parcialmente correctos, lo cual es un 56%.

El 39% de los problemas presentan no evidencia y se clasificaron como “*careless*” o descuido. Se encontraron 579 (45.74%) problemas con evidencia de procedimiento y correctos. Un total de 473 errores con evidencia encontrados de 30 tipos de categorías de error. Un total de 455 problemas son totalmente incorrectos (44%). Se evidenciaron 30 tipos de error más frecuentes del tipo procedural en la resta (seis tipos), multiplicación (tres tipos) y el proceso de la división (21 tipos de error)

De los 455 problemas con errores o incorrectos evidenciables se encontraron un total de 473 errores de las 30 categorías de errores encontrados. Se determina una tasa de ocurrencia del error evidenciable de 0.46 es decir por cada 50 problemas resueltos con evidencia se encontraron 23 errores. Se identifica según el análisis que el 48% (176 estudiantes) de los estudiantes tiene una tasa del error entre el 11 al 20% lo que significa que hasta un problema de cuatro problemas contiene error. El resto de los estudiantes puede llegar a tener hasta dos problemas con error de cuatro problemas una tasa del error.

Según el análisis de Ann Newman el cual fue el utilizado para este estudio se debe incluir además de la evidencia de los procesos de los problemas de la división, una entrevista con cada uno de los estudiantes al realizar los problemas. Para esta investigación no se otorga la serie de entrevistas por lo que los errores de categorización de Comprensión y de Transformación no se pudieron incluir y analizar ya que no hay evidencia de ello. Esta investigación no es concluyente ya que le hace falta incluir la serie de entrevistas. Sin embargo, si se presenta evidencia de 30 tipos de errores con los 1034 problemas evidenciados. Se rechaza la H_{01} ya que si aceptamos la Hipótesis alterna H_{r1} : = Se presenta suficiente evidencia que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la fluidez matemática para los estudiantes de 6º grado de primaria.

A continuación, se desglosan los tipos de errores más comunes encontrados por ítems:

C. Categorización de errores por ítem

1. Categorización de errores ítem 11

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_11_T4_DIVISION:

La escuela que mayor cantidad de errores obtuvo en el ítem 11 fue la escuela de San Miguel Milpas Altas con un total de 14, en los errores C9.15, C9.14, C9.12, C9.8, C9.5 El mayor error fue el C9.14.

Entre las ocho escuelas en el Ítem 11 el mayor error incurrido fue el error de la división C9.5 en un total de 45 tipificaciones de errores en la división:

Cuadro1. E_T5_ÍTEM_11_T4_DIVISION

Tipo de error en la división ítem 11 (categorización de error)	Totales
C9.5	14
C9.8	10
C9.14	9
C9.1	6
C9.15	3
C9.12	2
C9.3	1
	45

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_11_T4_MULTIPLICACION

La escuela que mayor cantidad de errores obtuvo en el ítem 11 en el error de la multiplicación fue la escuela San Miguel Milpas Altas con un total de 5 en los errores C8.2. Para las ocho escuelas en el ítem 11 el mayor error incurrido en el error de la multiplicación fue un total de 15 tipificaciones de errores en la multiplicación:

Cuadro 2. E_T5_ÍTEM_11_T4_MULTIPLICACION

Tipo de error en la multiplicación ítem 11 (categorización de error)	Totales
C8.3	3
C8.2	12
	15

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_11_T4_RESTA

Las escuelas que mayor cantidad de errores obtuvieron en el ítem 11 en el error de la resta fueron tres escuelas San Miguel Escobar Matutina (tres tipificaciones de error), escuela San Miguel Escobar Vespertina (tres tipificaciones de error) y la escuela Ciudad Vieja (tres tipificaciones de error).

Para las ocho escuelas en el ítem 11 el mayor error incurrido en el error de la resta fue un total de 13 errores en la resta:

Cuadro 3. E_T5_ÍTEM_11_T4_RESTA

Tipo de error en la resta ítem 11 (categorización de error)	Totales
C7.5	2
C7.4	1
C7.3	10
	13

2. Categorización de errores ítem 12

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_12_T4_DIVISION

La escuela que mayor cantidad de errores obtuvo en el ítem 12 en el error de la división fue la escuela San Miguel Escobar Matutina con 49 errores tipificados, los errores C9.12, C9.7, C9.5, C9.2, y C9.1 el mayor error fue el error C9.5.

Cuadro 4. E_T5_ÍTEM_12_T4_DIVISION

Tipo de error en la división ítem 12 (categorización de error)	Totales
C9.21	1
C9.20	1
C9.18	1
C9.16	3
C9.15	2
C9.14	11
C9.13	2
C9.12	7
C9.8	25
C9.7	1
C9.6	4
C9.5	77
C9.3	3
C9.2	29
C9.1	40
	207

Para las ocho escuelas en el ítem 12 el mayor error incurrido en el error de la división fue un total de 207 errores en la división.

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_12_T4_MULTIPLICACION

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 12 en el error de la multiplicación fue la escuela San Miguel Milpas Altas con seis errores del error C8.2 Para las ocho escuelas en el ítem 12 el mayor error incurrido en el error de la multiplicación fue un total de ocho errores en la multiplicación para un total de ocho errores encontrados.

Cuadro 5. E_T5_ÍTEM_12_T4_MULTIPLICACION

Tipo de error en la multiplicación ítem 12 (categorización de error)	Totales
C8.2	7
C8.3	1
	8

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_12_T4_RESTA

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 12 en el error de la resta fue la escuela San Miguel Milpas Altas con tres errores, dos errores del tipo C7.4 y un error del tipo C7.1) Para las ocho escuelas en el ítem 12 el mayor error incurrido en el error de la resta fue un total de cinco errores en la resta.

Cuadro 6. E_T5_ÍTEM_12_T4_RESTA

Tipo de error en la resta ítem 12 (categorización de error)	Totales
C7.5	3
C7.4	2
	5

3. Categorización de errores ítem 13

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_13_T4_DIVISION

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 13 en el error de la división fue la escuela San Miguel Escobar Matutina con quince errores del error tipo C9.13, C9.11, C9.8, C9.7, C9.6, C9.5, C9.3, C9.1, C9.9 el mayor error fue el error C9.8 y C9.7

Para las ocho escuelas en el ítem 13 el mayor error incurrido en el error de la división fue un total de 55 errores y el mayor fue el C9.14 y el C9.8

Cuadro 7. E_T5_ÍTEM_13_T4_DIVISION

Tipo de error en la división ítem 13 (categorización de error)	Totales
C9.17	1
C9.14	11
C9.13	3
C9.12	5
C9.11	7
C9.9	1
C9.8	10
C9.7	3
C9.6	3
C9.5	1
C9.4	1
C9.3	2
C9.1	7
	55

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_13_T4_MULTIPLICACION

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 13 en el error de la multiplicación fue la escuela San Miguel Milpas Altas con 6 errores del tipo C8.2

Para las ocho escuelas en el ítem 13 el mayor error incurrido en el error de la multiplicación fue un total de 17 errores y el mayor fue el error C8.2 con 17.

Cuadro 8. E_T5_ÍTEM_13_T4_MULTIPLICACION

Tipo de error en la multiplicación ítem 13 (categorización de error)	Totales
C8.2	17
	17

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_13_T4_RESTA

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 13 en el error de la resta fue la escuela San Miguel Escobar Matutina con 5 errores del tipo C7.5, C7.2 y C7.1 Para las ocho escuelas en el ítem 13 el mayor error incurrido en el error de la resta fue en un total de 16 errores y el mayor fue el tipo C7.5 y el C7.1

Cuadro 9. E_T5_ÍTEM_13_T4_RESTA

Tipo de error en la resta ítem 13 (categorización de error)	Totales
C7.6	1
C7.5	7
C7.2	1
C7.1	7
	16

4. Categorización de errores ítem 14

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_14_T4_DIVISION

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 14 en el error de la división fue en la escuela de Ciudad Vieja con 11 errores tipificados del tipo C9.15, C9.14, C9.8, C9.3, C9.1

Para las ocho escuelas en el ítem 14 el mayor error incurrido en el error de la división fue en un total de 37 errores y el mayor fue el tipo C9.14 y C9.8

Cuadro 10. E_T5_ÍTEM_14_T4_DIVISION

Tipo de error en la división ítem 14 (categorización de error)	Totales
C9.19	1
C9.15	2
C9.14	13
C9.10	1
C9.8	12
C9.7	4
C9.5	1
C9.3	1
C9.1	2
	37

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_14_T4_MULTIPLICACION

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 14 en el error de la multiplicación fue en la escuela San Miguel Escobar Matutina con nueve errores tipificados del tipo C8.2 y C8.1

Para las ocho escuelas en el ítem 14 el mayor error incurrido en el error de la multiplicación fue en un total de 35 errores y el mayor fue el tipo C8.2

Cuadro 11. E_T5_ÍTEM_14_T4_MULTIPLICACION

Tipo de error en la multiplicación ítem 14 (categorización de error)	Totales
C8.3	14
C8.2	21
	35

Descripción error Ann Newman (1977) E_T5_ÍTEM_14_T4_RESTA

La escuela que mayor cantidad de errores incurrió en el ítem 14 en el error de la resta fue la escuela San Miguel Escobar Matutina con 5 errores tipificados del tipo C7.5, C7.4, y C7.1

Para las ocho escuelas en el ítem 14 el mayor error incurrido en el error de la resta fue en un total de 20 errores y el mayor fue el tipo C7.5

Cuadro 12. E_T5_ÍTEM_14_T4_RESTA

Tipo de error en la resta ítem 14 (categorización de error)	Totales
C7.5	12
C7.4	1
C7.3	5
C7.2	1
C7.1	1
	20

D. Categorización del error según el método de Ann Newman (1977)

Al analizar cada uno de los cuatro ítems de todo el grupo de muestra de 368 estudiantes y 425 pruebas, se pudo desglosar los errores por ítem según el análisis de categorización del método Ann Newman (1977).

Según Moser *et al.*, (2007) en el estudio *Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-Set to Adaptive Posterror Adjustments* (Evidencia de un mecanismo neuronal, que relaciona la mentalidad de crecimiento con los ajustes adaptables luego del error cometido). En este estudio sobre los errores y como influyen en el aprendizaje de los contenidos, sugiere que se debe motivar a los estudiantes a la continua reflexión y autoregulacion, pero mas a la motivación del alumno de no desmotivarse al cometer errores ya que es cometiendo errores como el cerebro aprende y el aprendizaje significativo se produce.

En el análisis de la categorización del modelo de Ann Newman (1977) resume en una tabla las frecuencias de errores encontrados en los procedimientos algorítmicos de la división. Encontramos errores de lectura, errores técnicos: de comprensión, de transformación, habilidades procedurales y por ultimo la totalización de errores en las pruebas según ítems.

Los errores de técnicos se refieren a la habilidad de desarrollar una operación de forma correcta, el error técnico se logra obtener sumando los porcentajes de errores de comprensión, transformación y habilidades procedurales. En este estudio no se hicieron la serie de entrevistas se concluye que el error técnico fue meramente del tipo procedural para todos los ítems en las pruebas de matemáticas del grupo muestra.

En la parte de error técnico como se puede apreciar, no se pudo incluir que tanto de los errores encontrados fueron errores por comprensión o por transformación por que no se incluyeron la serie de entrevistas que el método Ann Newman (1977) recomienda incluir para lograr entender cuales son los errores que los estudiantes presentan al momento de realizar la operación de la división. Aún así se puede apreciar que los errores procedurales de mayor ocurrencia fueron para el ítem 12 (51.05%) como lo son los errores en lectura para el ítem 14 (3.45%).

Cuadro13. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) Ítem 11

TOTAL DE PRUEBAS	ERROR DE LECTURA	ERROR TÉCNICO			TOTALES
		ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR DE HABILIDADES PROCEDURALES	
425	3	N/A	N/A	70	73
(%)	0.71%			16.5%	17.2%

En el ítem 11 se puede observar en el Cuadro 13, los errores de habilidades procedurales fueron 16.5% y el error de lectura fue de 0.71%. El ítem 11 en el análisis de ítem presenta que es fácil y de discriminación buena tanto para la prueba pretest como para la posttest.

Cuadro 14. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) Ítem 12

TOTAL DE PROBLEMAS	ERROR DE LECTURA	ERROR TÉCNICO			TOTALES
		ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR DE HABILIDADES PROCEDURALES	
425	3	N/A	N/A	217	220
(%)	0.71%			51.05%	51.8%

En el ítem 12, se puede observar en el Cuadro 14, los errores de habilidades procedurales fueron 51.05% y el error de lectura fue de 0.71%. Es importante indicar, que siendo el ítem 12 el que presentó mayor cantidad de errores, es un ítem de descripción dificultad promedio para la prueba pretest y para la prueba posttest es fácil. La descripción discriminación es de buena en la prueba pretest y en la posttest es de discriminación regular.

Cuadro15. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) Ítem 13

TOTAL DE PROBLEMAS	ERROR DE LECTURA	ERROR TÉCNICO			TOTALES
		ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR DE HABILIDADES PROCEDURALES	
425	0	N/A	N/A	88	88
(%)	0%			20.71%	20.71%

En el ítem 13, se puede observar en el Cuadro 15, los errores de habilidades procedurales fueron del 20.71% y ningún error de lectura evidenciable. En el ítem 13 la dificultad es promedio en la prueba pretest y en la prueba posttest es fácil. La discriminación en la prueba pretest es de muy bueno y posttest la discriminación es buena.

Cuadro 16. Evaluación categorización método Ann Newman (1977) Ítem 14

TOTAL DE PROBLEMAS	ERROR DE LECTURA	ERROR TÉCNICO			TOTALES
		ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR DE HABIIDADES PROCEDURALES	
425	15	N/A	N/A	77	92
(%)	3.53%			18.12%	21.65%

En el ítem 14, se puede observar en el Cuadro 16, los errores de habilidades procedurales fueron del 18.12% y un 3.53% de error de lectura. El ítem 14 presenta una dificultad en la prueba pretest de ser un ítem difícil con discriminación buena y en la prueba posttest es un ítem de dificultad promedio y una discriminación buena.

E. Errores mas comunes en las Escuelas Familias de La Esperanza

Los tipos de errores más comunes que presentan al momento de operar la división las 8 escuelas pertenecientes al Proyecto de las Familias Esperanza de 6º grado de primaria del departamento de Sacatepéquez son:

Tabla 15. Descripción de los errores más comunes en las Escuelas Familias de La Esperanza

Descripción Error según evidencia categorización del error Newman (1977)	Tema a tratar según evidencia del error	Propuesta temas "conflicto" a tratar con el grupo de estudiantes
1. Error en la operatividad de realizar el algoritmo de la división	C9.5 Al realizar el algoritmo de la división no bajan dígito por dígito	Adecuación del algoritmo de la división CNB ⁸¹ Cuarto Grado: 4.4. Realiza cálculos de multiplicación y división en el conjunto de los números naturales, en un ámbito hasta 100,000
	C9.8 No finalizan el proceso del algoritmo de la división	Adecuación del algoritmo de la división CNB Cuarto Grado: 4.6. Efectúa divisiones con divisor de dos dígitos y dividendo de cuatro dígitos.
	C9.14 No operan adecuadamente en el orden de pasos del algoritmo de la división	Adecuación del algoritmo de la división CNB Cuarto Grado: 4.7. Resuelve problemas con operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división. CNB Tercer grado: 4.3.3. Cálculo de divisiones con y sin residuo con dividendo de uno o dos dígitos y divisor de un dígito.

⁸¹ CNB = Currículo Nacional Base Guatemala www.cnbguatemala.org

Descripción Error según evidencia categorización del error Newman (1977)	Tema a tratar según evidencia del error	Propuesta temas "conflicto" a tratar con el grupo de estudiantes
2. Error en el proceso de completar el cociente en el algoritmo de la división	C9.1 Ubicación del uno esta errada en el cociente	Adecuación del valor posicional de los números CNB Tercer grado: 1.2. Descubre la secuencia numérica de patrones existentes en la naturaleza o en su entorno cultural. CNB Cuarto Grado: 4.1. Utiliza los números naturales en el sistema decimal hasta 100,000 en el sistema vigesimal maya hasta la cuarta posición y en números romanos hasta cien CNB Primer grado: 4.2.1. Determinación del valor de los números de acuerdo con la posición que ocupa (valor relativo). CNB Segundo grado: 4.4.1. Determinación del valor relativo y absoluto de un número, en un ámbito del 0 al 999.
	C9.2 No incluye el punto decimal	Adecuación tema los decimales. Adecuación convertir decimales a fracciones y de fracciones a decimales. CNB Cuarto Grado: .9. Utiliza los decimales para representar cantidades y calcular sumas y restas CNB Sexto grado: 4.5. Realiza cálculos aritméticos de adición, sustracción, multiplicación, división con decimales
	C9.3 Incluyen dos puntos decimales en el cociente y no procede	CNB Cuarto grado: 4.9.3. Lectura y escritura de decimales (hasta centésimo).

Descripción Error según evidencia categorización del error Newman (1977)	Tema a tratar según evidencia del error	Propuesta temas "conflicto" a tratar con el grupo de estudiantes
2. Error en el proceso de completar el cociente en el algoritmo de la división (Continuación)	C9.7 Ubica un cero antes del dígito en el cociente y no es necesario	CNB Primer grado: 4.1.4 Asociación del conjunto vacío con el numeral cero. 4.1.7. Utilización de los números naturales del 0 al 100 para contar y ordenar. 4.8.2 Utilización del cero como 1 de 2 sumandos. CNB Cuarto grado: 4.3.1. Aplicación de la propiedad del cero, conmutativa y asociativa en la adición.
	C9.11 No debe incluir el punto decimal en el cociente	CNB Cuarto grado: 4.9.4. Expresión del valor relativo de decimales.
	C9.12 Poner el punto decimal en el cociente en la ubicación que no procede	CNB Cuarto grado: 4.9.6. Cálculo de sumas y restas con decimales. 4.9.7. Solución de problemas aplicando sumas y restas de decimales con aproximación hasta décimos. CNB Quinto grado: 4.5. Utiliza los decimales para representar cantidades y calcular suma, resta, multiplicación y división
3. Error durante el proceso de multiplicar	C8.2 No opera adecuadamente la multiplicación	CNB Quinto grado: 4.2. Efectúa cálculos de suma, resta, multiplicación y división en el conjunto de los números naturales y racionales. CNB Cuarto grado: 4.4. Realiza cálculos de multiplicación y división en el conjunto de los números naturales, en un ámbito hasta 100,000.
	C8.3 No finaliza el proceso de multiplicar	CNB Tercer grado: 4.3.1 Cálculo de multiplicaciones de dos números en los que uno es de un dígito y el otro de dos o tres dígitos.

Descripción Error según evidencia categorización del error Newman (1977)	Tema a tratar según evidencia del error	Propuesta temas “conflicto” a tratar con el grupo de estudiantes
4. Error durante el proceso de restar	C7.1 Sustraendo mayor que minuendo resta de mayor a menor	CNB Quinto grado: 4.2. Efectúa cálculos de suma, resta, multiplicación y división en el conjunto de los números naturales y racionales.
	C7.3 No finaliza el proceso de restar	CNB Primer grado: 4.8. Efectúa sumas y restas de números naturales. CNB Cuarto grado: 4.3.2. Cálculo de restas con minuendo hasta de cinco dígitos.
	C7.4 Suma en vez de restar	CNB Primer grado: 4.8.9. Cálculo de sumas y restas combinadas (3 términos con números de 1 cifra).
	C7.5 No opera adecuadamente la resta	CNB Primer grado: 4.8. Efectúa sumas y restas de números naturales.
	C7.6 Presta, pero no descuenta a los demás dígitos	CNB Primer grado: 4.8.7. Cálculo de restas con minuendo de 2 dígitos (ámbito 1-19) y sustraendo de 1 dígito (sin prestar y prestando).
5. Error de Lectura	C9.15 Error especialmente al copiar el dividendo en la división	CNB Primer grado: 4.1.6. Lectura y escritura de números naturales del 10 al 20, del 21 a 99.

Fuente: Elaboración propia, según MINEDUC_CNB

Se recomienda apoyar al grupo de las escuelas de la Familia de la Esperanza especialmente en los puntos enunciados en la Tabla 15, para mejorar el desempeño en la operación aritmética de la división en el grupo de estudiantes. Se sugiere, además, que el docente consulte el documento sobre *Estándares Educativos para Guatemala*⁸² elaborado por USAID conjuntamente con el Ministerio de Educación de Guatemala – MINEDUC (2007), de tal forma, que se pueda ahondar en la mejor planificación docente.

La segunda Hipótesis:

⁸² USAID – MINEDUC (2007) *Estándares Educativos para Guatemala: Programa Estándares e Investigación Educativas*. Guatemala. 95 págs.

H_{02} : = No hay suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso "*Process Skill*" en la operación de la división según la categorización de Newman (1977)

H_{r2} : = Se presenta suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) del error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución de Proceso "*Process Skill*" en la operación de la división según categorización de Newman (1977)

Según el análisis de Ann Newman el cual fue el utilizado para este estudio se debe incluir además de la evidencia de los procesos de los problemas de la división, una entrevista con cada uno de los estudiantes al realizar los problemas. Para esta investigación no se otorga la serie de entrevistas por lo que los errores de categorización de Comprensión y de Transformación no se pudieron incluir y analizar ya que no hay evidencia de ello. Esta investigación no es concluyente ya que le hace falta incluir la serie de entrevistas para evidenciar que la dificultad de los estudiantes es en una de las cuatro etapas descritas por el método de Ann Newman (1977) es decir, Lectura, Comprensión, Transformación y Habilidades de Ejecución de Procesos. Se presenta evidencia de frecuencia de 30 tipos de errores con los 1034 problemas evidenciados en cuanto a Habilidades de Ejecución de Procesos.

De la manera que se abordó para poder concluir si se rechaza o no la Hipótesis: H_{02} fue analizando la relación del aprendizaje de los estudiantes con la variable tasa del error. La ecuación utilizada fue el Modelo de Tasa (porcentaje) del error.

El modelo tasa (porcentaje) del error es una técnica estándar que utiliza las curvas del aprendizaje como parte de la evaluación de sistemas tutoriales, pero dichas curvas de aprendizaje requieren de un método para atribuir los errores. Esto es un método debe determinar cuál error es el que el estudiante realiza y cual componente de aprendizaje (habilidades o destrezas conceptuales) en el modelo del estudiante habría que atribuirle ese error. En el estudio investigativo (2007) de la Universidad de Carnegie Mellon y la Universidad de Pittsburgh los autores Adaeza Nwaignw, Kenneth Koedinger, Kurt Van Lehn Robert Hausmann y Aders Weisntein

del Instituto de la Interacción Humana computacional se estudió cual es el mejor método que cumple con la curva del aprendizaje estándar esto es que puede mostrar un predictor de los cambios de la razón del error sobre el tiempo de los estudiantes es decir un modelo cognitivo predictivo que describa y se ajuste a una tasa del error del grupo de estudiantes estudiado.

El modelo que muestra la relación entre la tasa del error y el desempeño y la cantidad de práctica se muestra en la siguiente ecuación 1. La relación muestra que la razón o tasa de error decrece según la cantidad de práctica aumenta. Como se menciona previamente su función es conocida como la curva del aprendizaje.

$$Y = a X^b \quad (\text{ecuación 1})$$

Donde

Y = tasa del error

X = El número de oportunidades de practicar el componente del conocimiento

a= la razón de error en la primera prueba, reflejando la dificultad intrínseca del componente del conocimiento.

b= la razón de aprendizaje, reflejando cuan fácil es el componente del conocimiento para aprender

La razón de aprendizaje se obtiene utilizando la siguiente ecuación la cual se obtuvo del documento de la Facultad de Educación de la Universidad de Oklahoma⁸³ que se muestra a continuación:

$$\text{Razón del aprendizaje (b)} = \frac{\text{Nota post test (\%)} - \text{Nota pretest (\%)}}{(100\% - \text{Nota pretest \%})} \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\text{Razón del error (a)} = \frac{\text{Cantidad de errores por el estudiante}}{\text{Total de errores}} \quad (\text{ecuación 3})$$

⁸³ www.oc.edu/academics/education/documents/InstructionsforLearningGainScores.doc

Se considera la variable X como las veces que los estudiantes practican dicho ejercicio en la prueba de la división.

Un buen modelo cognitivo se espera que siga la ley de potencia. El modelo que surja es un conjunto de reglas o habilidades que muestra como los estudiantes resuelven los problemas.

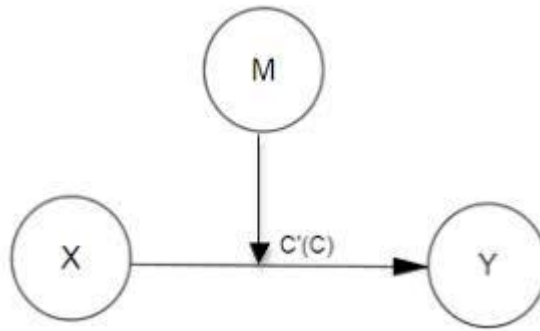
En el modelo de análisis moderador de Hayes apoya en determinar que tanto incide o el efecto que tiene sobre la relación de las variables independiente sobre la dependiente las veces que se utilicen para ejercitar los problemas aritméticos en la división en apoyar que la variable independiente tasa de error predice a la variable dependiente aprendizaje. Esto se realiza al incorporar el macro PROCESS⁸⁴ de Hayes (2013) para sugerir el incluir en un estudio posterior el número de veces que los estudiantes realizan los ejercicios de la división. En este caso se utiliza como variable M = 2 que es dos veces el realizar los ejercicios de los problemas de la división.

Para este estudio se considera un M entre 2 y 5 veces que han practicado el realizar los ejercicios de matemática, se sugiere se incluya en un estudio posterior el preguntar al alumno antes de la prueba cuantas veces practicaron el hacer los ejercicios de la división antes de tomar la prueba.

Este estudio sólo hará una aproximación con utilizar el método de Andrew F. Hayes PROCESS (2018) para SPSS de variable moderadora M la variable VECES entre 2 y 5 veces que se realizan las prácticas de los ejercicios de la división, se considera útil el incluir cuantas veces el estudiante ha realizado un ejercicio para dominar el tema evaluado, ya que ello determina la curva de aprendizaje según el estudio de Van Lehn, *et al.* (2007).

⁸⁴ <http://www.processmacro.org/index.html>

Esquema 1. Modelo Hayes análisis tipo moderador



Los resultados de dicho modelo muestran lo siguiente:

Análisis de Regresión de las variables: APRENDIZAJE como Dependiente (Y), variables RAZONY (tasa de error) como variable independiente (X), y la variable HABILIDAD (dominio de cada estudiante) igual a variable moderadora M:

Modelo de Regresión en SPSS 23:

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	HABILIDAD, TASAERROR ^b	.	Enter

a. Dependent Variable: APRENDIZAJE b. All requested variables entered.

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
APRENDIZAJE	.139343234173335	.342880877673775	368
TASAERROR	.185013594235443	.092189417846019	368
HABILIDAD	2.44	.810	368

Correlations

		APRENDIZ	RAZONY	HABILIDA
Pearson Correlation	APRENDIZAJE	1.000	.265	.100
	TASAERROR	.265	1.000	-.214
	HABILIDAD	.100	-.214	1.000
Sig. (1-tailed)	APRENDIZAJE	.	.000	.027
	TASAERROR	.000	.	.000
	HABILIDAD	.027	.000	.
N	APRENDIZAJE	368	368	368
	TASAERROR	368	368	368
	HABILIDAD	368	368	368

ANOVA^a

Model	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1 Regression	4.136	2	2.068	19.347	.000 ^b
Residual	39.011	365	.107		
Total	43.147	367			

Model Summary^b

Model	Change Statistics	
	df2	Sig. F Change
1	365	.000

a. Dependent Variable: APRENDIZAJE

b. Predictors: (Constant), HABILIDAD, TASAERROR

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics		
					R Square Change	F Change	df1
1	.310 ^a	.096	.091	.3269263227 75026	.096	19.347	2

a. Predictors: (Constant), HABILIDAD, TASAERROR

b. Dependent Variable: APRENDIZAJE

Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1 (Constant)	-.237	.071		-3.325	.001
TASAERRO	1.115	.190	.300	5.885	.000
R					
HABILIDAD	.070	.022	.165	3.229	.001

a. Dependent Variable: APRENDIZAJE

Residuals Statistics^a

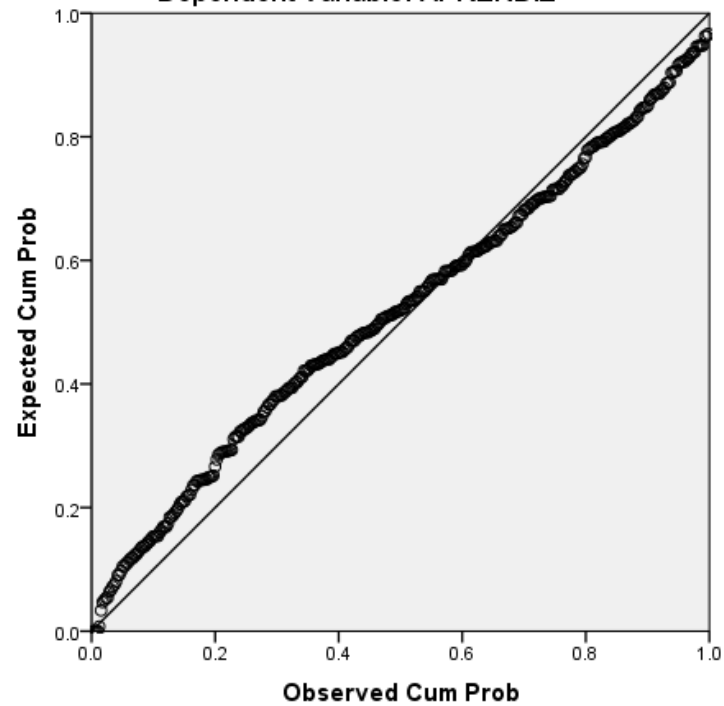
	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	-.097865998744 965	.638611733913 422	.139343234173 335	.106155228503 968	368
Residual	2.70810174942 0166	.598507642745 972	.000000000000 000	.326034298403 724	368
Std. Predicted Value	-2.235	4.703	.000	1.000	368
Std. Residual	-8.284	1.831	.000	.997	368

a. Dependent Variable: APRENDIZAJE

Charts

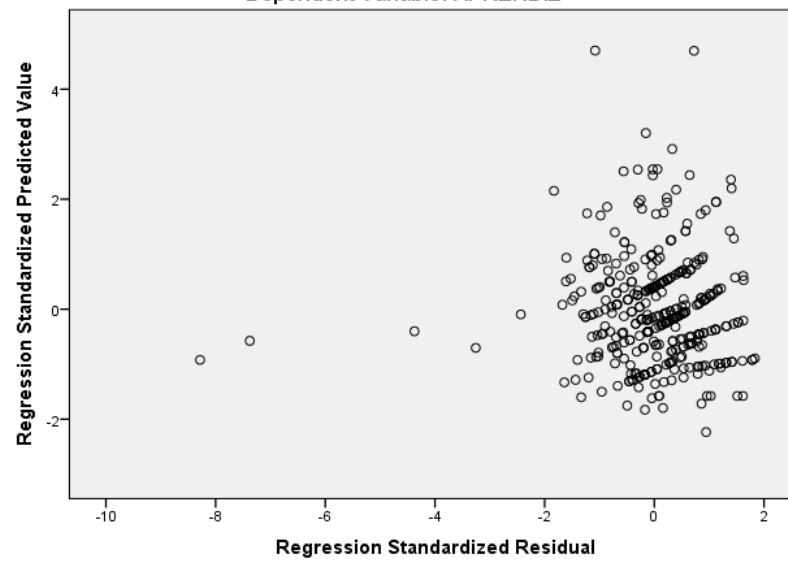
Normal P-P Plot of Regression Standardized Residual

Dependent Variable: APRENDIZ



Scatterplot

Dependent Variable: APRENDIZ



Run MATRIX procedure:

HC Method
3

Criterion Variable
APRENDIZ

Model Fit:

R-sq	F	df1	df2	p
.0959	29.7787	2.0000	365.0000	.0000

Heteroscedasticity-Consistent Regression Results

	Coeff	SE (HC)	t	P> t
Constant	-.2372	.0519	-4.5725	.0000
TASAERROR	1.1154	.2414	4.6211	.0000
HABILIDAD	.0697	.0274	2.5464	.0113

----- END MATRIX -----

Run MATRIX procedure:

***** PROCESS Procedure for SPSS Release 2.16.3 *****

Written by Andrew F. Hayes, Ph.D. www.afhayes.com

Model = 1
Y = APRENDIZAJE
X = TASA_ERROR
M = HABILIDAD

Sample size
368

Outcome: APRENDIZAJE

Model Summary

R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
.3560	.1267	.1035	21.4218	3.0000	364.0000	.0000

Model

	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	.1600	.2550	.6276	.5307	-.3414	.6614
HABILIDAD	-.0813	.1138	-.7146	.4753	-.3052	.1425
TASA_ERROR	-.8554	1.0396	-.8228	.4112	-2.8998	1.1890
int_1	.7714	.4694	1.6433	.1012	-.1517	1.6944

Product terms key:

Int_1 TASA_ERROR X HABILIDAD

R-square increase due to interaction(s):

	R2-chng	F	df1	df2	p
int_1	.0309	2.7006	1.0000	364.0000	.1012

Conditional effect of X on Y at values of the moderator(s):

HABILIDAD	Effect	se	t	p	LLCI	ULCI
1.6329	.4042	.3074	1.3148	.1894	-.2004	1.0087
2.4429	1.0290	.2031	5.0667	.0000	.6296	1.4284
3.2530	1.6538	.5264	3.1417	.0018	.6186	2.6890

Values for quantitative moderators are the mean and plus/minus one SD from mean.

Values for dichotomous moderators are the two values of the moderator.

Data for visualizing conditional effect of X on Y

Paste text below into a SPSS syntax window and execute to produce plot.

DATA LIST FREE/TASA_ERROR HABILIDAD APRENDIZ.
BEGIN DATA.

.0928	1.6329	.0647
.1850	1.6329	.1020
.2772	1.6329	.1392
.0928	2.4429	.0568
.1850	2.4429	.1517
.2772	2.4429	.2465
.0928	3.2530	.0489
.1850	3.2530	.2014
.2772	3.2530	.3538

END DATA.

GRAPH/SCATTERPLOT=TASA_ERROR WITH APRENDIZAJE BY HABILIDAD.

Al analizar los datos del proceso PROCESS (HAYES, 2018) se puede interpretar que, se percibe el efecto de la variable TASA_ERROR sobre la variable APRENDIZAJE en los estudiantes del grupo de 368 estudiantes de 6o grado de primaria, bajo la influencia de la habilidad presentada en cada estudiante. Por lo que, se considera para este modelo la variable moderadora (M) = HABILIDAD.

El modelo de PROCESS (HAYES, 2018) muestra el efecto de la relación de la tasa de error en el aprendizaje. Al analizar los resultados se concluye que el efecto de la variable habilidad de cada estudiante es significativo y mayor entre las habilidades 2.4 a 3.2 en la escala de dominio trazado de 1 a 4.

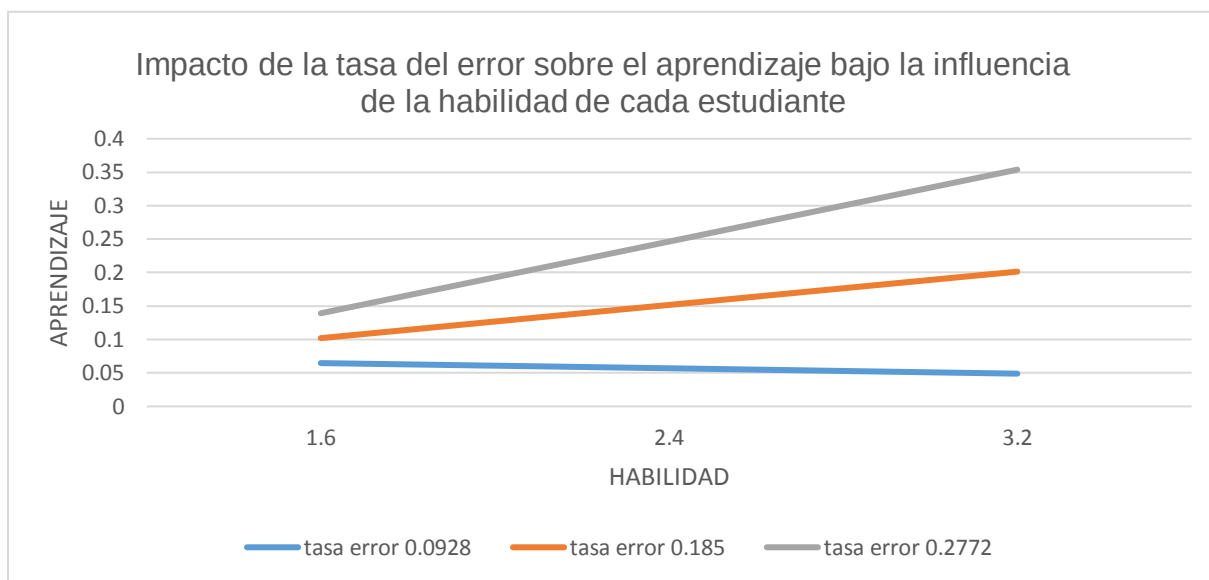
Modelo de Regresión PROCESS SPSS (HAYES)

El análisis de moderación utilizado es simplemente otro modelo de regresión, el cual mide que tan significativa es la relación entre una variable que se define X y su resultado definido como variable Y. Para este análisis de moderación se utiliza como variable X la variable tasa u ocurrencia de error TASA_ERROR y la variable Y es la variable resultado APRENDIZAJE, siendo la variable de moderación la variable M = HABILIDAD (dominio en la prueba de Matemáticas). El resultado obtenido fue la siguiente ecuación de modelo 1 de regresión:

$$\text{APRENDIZAJE} = -0.2372 + 1.115\text{TASA\_ERROR} + 0.0697\text{HABILIDAD}$$

Lo que demuestra que el efecto de la variable HABILIDAD sobre la relación de tasa de errores con respecto a el aprendizaje de los alumnos es para la habilidad = 1.6329 con un efecto = 0.4042 y un $p = 0.1894$ y que no es menor que 0.05 entonces no es significativo el efecto directo. Para la habilidad = 2.4429 con un efecto = 1.0290 y con un $p = .0000$ siendo menor que 0.05 entonces es significativo el efecto directo. Para la habilidad = 3.2530 con un efecto = 1.6538 con un $p = .0018$ siendo menor que $p = 0.05$ entonces es significativo el efecto directo. El modelo de regresión explica en un 12.67% la relación entre las variables. La habilidad o dominio para la matemática que los estudiantes presentan al realizar los ejercicios de la división si es significativo en el aprendizaje de cada uno de los estudiantes y relación en el porcentaje de ocurrencias de errores o tasa del error.

Gráfica 4. Impacto de la tasa del error sobre el aprendizaje bajo la influencia de la habilidad



La Gráfica 4 describe el efecto de interacción entre las variables $X = \text{TASA\_ERROR}$, $Y = \text{APRENDIZAJE}$ y $M = \text{HABILIDAD}$, comparando la pendiente en el plano de regresión por la razón o frecuencia de errores a menores a mayores valores en habilidades o dominio de resolver la prueba de matemáticas. Como se puede observar cuando la habilidad o dominio de la prueba es baja no hay una significativa relación entre la tasa u ocurrencia de errores y el aprendizaje obtenido. En valores de habilidad medianos a superiores si hay una positiva y significativa relación entre las variables TASA_ERROR y APRENDIZAJE con una fuerte interacción con la variable moderadora HABILIDAD .

Una conclusión preliminar es que, entre más veces realicen los ejercicios mejor desempeño tendrán en las pruebas, mejores resultados en el rendimiento, menores patrones de errores se presentaran ya que la tasa del error es menor y finalmente el aprendizaje se consolida. Lo que hay que tener en cuenta es no es cargar de largas tareas para la casa como mejora el desempeño matemático es durante el aula realizar la mayor cantidad de ejercicios en la pizarra, en grupos de trabajo y en forma individual como se logra el efecto de mejora.

F. Análisis de la tasa del error en las Escuelas Familias de La Esperanza

La ocurrencia de errores fue en total de 666 tipos de errores, con un número de oportunidades X (M variable moderadora) fue considerada como 2 ya que fueron dos pruebas las que se les aplica a los grupos de estudiantes. De los 1700 problemas analizados el 39.2% (666 problemas) se encontraron sin evidencia de procesos. El 60.8% unos 1034 problemas analizados fueron con evidencia analizable en las hojas por escrito.

Las escuelas que presentan la mayor cantidad de problemas sin evidencia fueron las escuelas de Ciudad Vieja con 144 problemas y la escuela San Miguel Milpas Altas con 142 problemas.

El 47.83% (176 estudiantes) de la población se determina con el análisis de Newman que se encuentra con una ocurrencia de tasa del error entre el 11 y el 20% en las pruebas pretest y posttest. Para un 27% (99 estudiantes) de la población de estudiantes se aprecia una tasa de error del 21 al 30%, para un 16% (58 estudiantes) de la población la tasa de ocurrencia de error es de 0 al 10% y para el 7% (29 estudiantes) de la población la tasa de ocurrencia es del 31 al 40%.

Los errores totales del tipo procedural o de "*Process Skill*" fueron 473 encontrados en un total de 1700 problemas analizados. De cada 4 problemas un error es encontrado y es del tipo procedural o de "*Process Skill*". El total de pruebas fueron 425 pruebas analizadas. Cada prueba analizada fue de cuatro problemas, se puede decir que en cada prueba se encuentra un error del tipo procedural.

Los errores evidenciados de tipo error de lectura fueron en total de 14 para 1700 problemas analizados, es decir el 0.8% de las pruebas evidencian errores de lectura. Debido al dato muy poco significativo y no concluyente se considera irrelevante ya que lo ideal es incluir una entrevista con cada estudiante para considerar que el error es de lectura, de comprensión o de transformación como lo considera el modelo de análisis de errores Newman (1977).

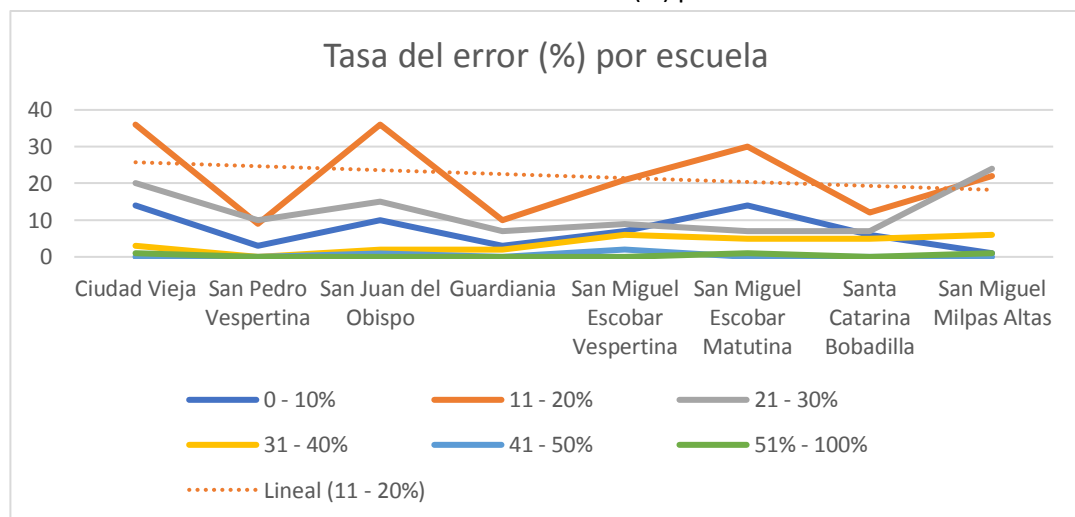
Lo que si evidencian los datos además de explicar los 30 tipos de error más frecuentes con el Modelo de la tasa del error es quienes aprendieron y quiénes no.

Tabla 16. Tasa del error por escuela por cantidad de alumnos

Escuela	0 - 10%	11 - 20%	21 - 30%	31 - 40%	41-50%	50-100%	Totales
Ciudad Vieja	14	36	20	3	0	1	74
San Pedro Vespertina	3	9	10	0	0	0	22
San Juan del Obispo	10	36	15	2	1	0	64
Guardianía	3	10	7	2	0	0	22
San Miguel Escobar Vespertina	7	21	9	6	2	0	45
San Miguel Escobar Matutina	14	30	7	5	0	1	57
Santa Catarina Bobadilla	6	12	7	5	0	0	30
San Miguel Milpas Altas	1	22	24	6	0	1	54
Totales	58	176	99	29	3	3	368

Con los datos de la Tabla 16 se logra obtener los Gráfica 5, que a continuación se presenta:

Gráfica 5. Tasa del error (%) por escuela



En el cual describe el Modelo de Regresión 2:

Y (TASA_ERROR) = $9.5167 \times (\text{alumno de la escuela}) - 8.4722$ con un $R^2 = 0.2476$ es decir un 25% de probabilidad de ocurrencia

Con la tabla de datos de las pruebas se obtuvo el Modelo de Regresión 3:

Multiple Regression Model: $\text{APRENDIZAJE}_b = (-0.03447) + (-0.01477) * \text{SEXO} + (0.979159) * \text{RAZON\_ERROR}_y$

Model Summary:

R-Square	0.0700
R-Square Adjusted	0.065
S (Root Mean Square Error)	0.331481

Parameter Estimates:

Predictor Term	Coefficient	SE Coefficient	T	P
Constant	-0.034468864	0.043367704	-0.795	0.427243501
SEXO	-0.014771418	0.03462774	-0.426578	0.6699
RAZON_ERROR_y	0.979159	0.188060	5.207	0.0000

Analysis of Variance for Model:

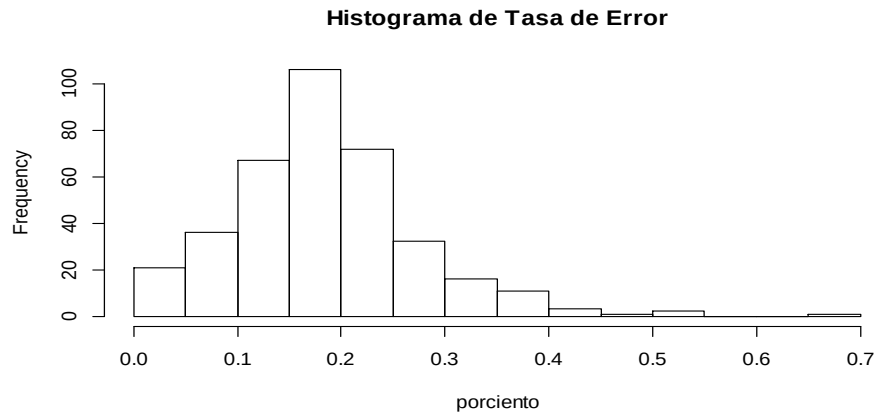
Source	DF	SS	MS	F	P
Model	2	3.041	1.521	13.839	0.0000
Error	365	40.106	0.109879453		
Lack of Fit	319	33.776	0.105879915	0.769390	0.8975
Pure Error	46	6.330	0.137615		
Total (Model + Error)	367	43.147	0.117567		

Se describe en la siguiente ecuación de Modelo de Regresión 3:

$\text{APRENDIZAJE} = -0.03447 + (-0.01477) * \text{SEXO} + (0.979159) * \text{TASA\_ERROR}$ con un $R^2 = 0.070$ es decir un 7% de probabilidad de ocurrencia

En la siguiente Gráfica 6 se describe los datos en un histograma de las tasas de error que se presentaron entre los grupos de estudiantes de las ocho escuelas de la Familia La Esperanza:

Gráfica 6. Histograma de Tasa del Error (%)



Se obtuvo el cuarto Modelo de Regresión de las variables Aprendizaje y Tasa del Error:

Linear Regression									
Regression Statistics									
R		0.2646							
R-Squared		0.0700							
Adjusted R-Squared		0.0675							
S		0.3311							
MSE		0.1096							
RMSE		0.3311							
MAPE		104.1947							
DW		1.9453							
PRESS		40.8030							
PRESS RMSE		0.3330							
Predicted R-Squared		0.0543							
N		368							
APRENDIZAJE_b = - 0.0427 + 0.9842 * RAZON_ERROR_y									
ANOVA									
	d.f.	SS	MS	F	p-value				
Regression	1.	3.0212	3.0212	27.5572	2.5907E-7				
Residual	366.	40.1260	0.1096						
Total	367.	43.1472							
	Coefficient	Standard Error	LCL	UCL	t Stat	p-value	H0 (5%)	VIF	TOL
Intercept	-0.0427	0.0387	-0.1189	0.0334	-1.1032	0.2706	accepted	**	**
RAZON_ERROR_y	0.9842	0.1875	0.6155	1.3529	5.2495	2.5907E-7	rejected	**	**
T (5%)	1.9665								
LCL - Lower limit of the 95% confidence interval									
UCL - Upper limit of the 95% confidence interval									
** - Requires Pro version, please upgrade.									

$$\text{APRENDIZAJE} = -0.04274 + 0.9841\text{TASA\_ERROR}$$

Con un R^2 de 0.07002 se concluye que hay un 7% de probabilidad de que únicamente la variable TASA_ERROR (en habilidades de ejecución de los procesos o “Process Skills”) explique la variable APRENDIZAJE, no se necesita incluir como

adicional variable: SEXO. Entonces se determina que, con los datos que se obtuvieron de las hojas de los ejercicios de las pruebas no se puede ser concluyente que la etapa de mayor dificultad para los estudiantes fue la de habilidades de ejecución de procesos porque se carece de los datos de la entrevista para recolectar la información completa de todas las etapas (Lectura, Comprensión, Transformación, Habilidades de Ejecución de Procesos) de procesos de categorización del error de Ann Newman (1977). Por lo que se rechaza H_{r2} y se acepta la H_{o2} : = No hay suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso “*Process Skill*” en la operación de la división según la categorización de Newman (1977).

Tabla 17. Datos sobre el aprendizaje de las Escuelas Familias de la Esperanza

Escuela		No aprendieron		Aprendieron		Totales	Tasa (porcentaje)del error mayormente común
		Niñas	Niños	Niñas	Niños		
San Miguel Escobar Matutina		9	14	18	16	57	11 – 20% (30)
San Miguel Milpas Altas		8	8	25	13	54	21 - 30% (24)
Santa Catarina Bobadilla		2	3	17	8	30	11 – 20% (12)
San Miguel Escobar Vespertina		10	7	12	16	45	11 - 20% (21)
Guardianía		5	1	10	6	22	11 – 20% (10)
San Juan del Obispo		9	7	21	27	64	11 - 20% (36)
San Pedro Vespertina		4	3	6	9	22	21 – 30% (10)
Ciudad Vieja		10	17	19	28	74	11 - 20% (36)
Totales		57	60	128	123	368	11- 20% (176)

Como se puede notar en la Tabla 17, de los 368 estudiantes la tasa (porcentaje) de error más frecuente fue la tasa del error entre 11 al 20% con una ocurrencia en 176 estudiantes del total de frecuencia mayoritaria de ocurrencia sería un 47.8%. Esto quiere decir, que de cuatro problemas para la mayoría de los estudiantes que

se realizan por lo menos un problema se evidencia con una categoría de error para el 47.8%, para el resto 26.4% presentan una evidencia de tasa del error mayor del 21% al 67% (de 2 a 3 problemas de 4 presentan evidencia de una categoría de error), y el 25.8% evidencia una tasa del error menor del 10% (evidencian menos de un problema de cuatro de categoría de error). Entre las niñas no aprendieron 57 (31%) y aprendieron 128 niñas (69%). Entre los niños no aprendieron 60 (33%) y aprendieron 123 (67%) niños.

Para la tercera hipótesis:

H_{03} : =: Media μ tasa de error Escuela 1 = Media μ tasa de error Escuela 2 = ... = Media μ tasa de error Escuela 8

H_{r3} : =: Al menos un par de Media μ tasa de error Escuela $i \neq$ Media μ tasa de error Escuela j

Se analiza con una prueba Análisis de la Varianza o no de las variables con un $\alpha = 0.05$ con un nivel de confianza del 95% si existe una diferencia entre las medias de las tasas del error en las distintas escuelas, si existe utilizaremos Tukey para determinar entre quienes es la diferencia significativa.

Tabla 18. Resumen de datos Escuelas Familias de la Esperanza

<i>Grupos tasa de errores</i>	<i>Cuenta</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
0 a 10%	8	58	7.25	9.588433365
11 a 20%	8	176	22	88.29111531
21 a 30%	8	99	12.375	27.9358607
31 a 40%	8	29	3.625	2.397108341
41 a 50%	8	3	0.375	0.025652765
51 a 100%	8	3	0.375	0.025652765

Prueba Tukey para ver cuáles son los que marcan diferencia

HSD = 8.531772667

Multiplicador= 4.52

Mse 21.37730388

n 6

0.039001298

p

TABLA ANÁLISIS DE VARIANZA

<i>Origen de las variaciones</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Grados de libertad</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Valor crítico para F</i>
Entre grupos	2803.666667	5	560.733333	26.2303112	6.412E-12	2.43769264
Dentro de los grupos	897.8467628	42	21.37730388			
Total	3701.513429	47				

Como se puede observar el $F_{\text{crítico}}$ es menor que el $F_{\text{calculado}}$: $F_{\text{crítico}} = 2.43769 < F_{\text{calculado}} = 26.23$ con un $p = 6.4 \text{ E-}12$ lo cual es $< \alpha = 0.05$ y por lo tanto se rechaza la H_{03} y se acepta la H_{r3} : = : Al menos un par de Media μ tasa de error Escuela $i \neq$ Media μ tasa de error Escuela j . Con la prueba de Tukey se determinó que la diferencia radica entre los grupos de las siguientes escuelas la diferencia entre los grupos: Grupo escuela Ciudad Vieja y escuela San Pedro Vespertina y el Grupo la escuela Ciudad Vieja y la escuela Guardianía

Se acepta la H_{r3} : = Si existe diferencia significativa entre las medias de tasa del error entre por lo menos un par de grupos de escuelas al momento de ejecutar la operación aritmética de la división con un $\alpha = 0.05$

La cuarta hipótesis que se puede analizar con los datos es:

H_{04} : = No existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.

H_{r4} : = Si existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.

Para trabajar esta hipótesis se aplica la prueba de X^2 (chi cuadrado) A continuación se describen los resultados:

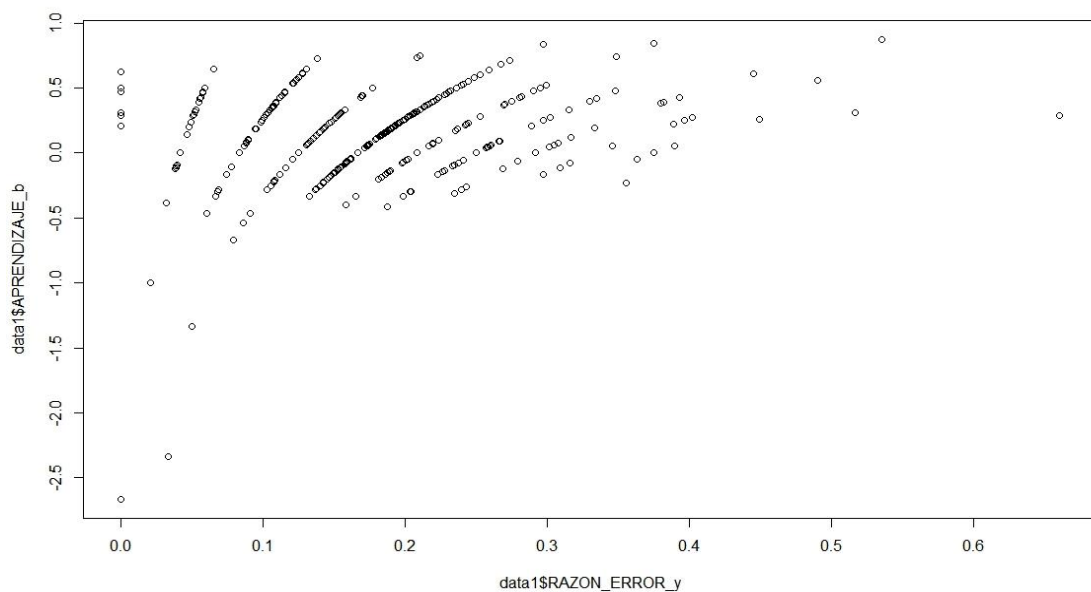
Con un grado de libertad de 35 y un $\alpha = 0.05$ y un X^2 calculado = 51.053 y un X^2 crítico = 55.76

Lo que se concluye que si el X^2 calculado = 51.053 es < que el X^2 crítico = 55.76 entonces se rechaza la H_{r4} y se acepta la H_{o4} : Con los datos analizados de las pruebas de matemáticas no existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.

El análisis de X^2 muestra que si hay una diferencia significativa entre por lo menos un grupo de estudiantes en la variable Tasas_Error u tasa de ocurrencia de los errores. Muestra que hay una relación entre las variables APRENDIZAJE y TASA_ERROR.

A su vez, existe una diferencia significativa de ocurrencia de patrones de errores entre la Escuelas Ciudad Vieja y San Pedro Vespertina y entre los grupos de las Escuelas Ciudad Vieja y Guardiania. Las diferencias entre las demás escuelas San Juan del Obispo, San Miguel Escobar Matutina y Vespertina, Santa Catarina Bobadilla y San Miguel Milpas Altas no son al azar ya que presentan una relación de patrones de ocurrencia de tipos errores entre los grupos de estas escuelas. A continuación, la Gráfica 6(a) que muestra los residuales del cuarto modelo de Regresión Lineal:

Grafica 6(a). Residuales del modelo 4 de Regresión Lineal



A continuación, la Tabla 19: Análisis de χ^2 :

Tabla 19. Análisis Chi Cuadrado χ^2

	12.33	3.67	10.67	3.67	7.5	9.5	5	9
	Ciudad Vieja	San Pedro Vespertina	San Juan del Obispo	Guardiania	San Miguel Escobar Vesp	San Miguel Escobar Mat	Santa Catarina Bobadilla	San Miguel Milpas Altas
Ciudad Vieja		8.66	1.66	8.66	4.83	2.83	7.33	3.33
San Pedro Vespertina			-7	0	-3.83	-5.83	-1.33	-5.33
San Juan del Obispo				7	3.17	1.17	5.67	1.67
Guardiania					-3.83	-5.83	-1.33	-5.33
San Miguel Escobar Vespertina						-2	2.5	-1.5
San Miguel Escobar Matutina							4.5	0.5
Santa Catarina Bobadilla								-4
San Miguel Milpas Altas								

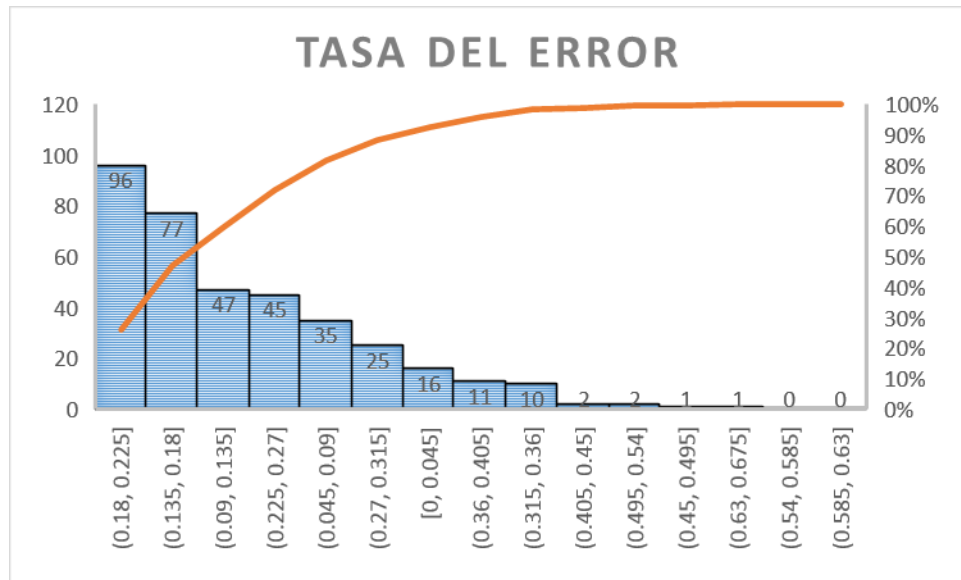
Con ello, aclaramos que, si bien existe un efecto de la variable tasa (porcentaje) del error en el aprendizaje, este estudio no se puede ser concluyente en determinar en cual etapa del proceso de categorización del error según Ann Newman (1977) radica la dificultad. Este estudio para estar completo debe incluirse la serie de entrevistas individuales a los estudiantes de 6º grado de primaria de las ocho escuelas de la Familia de la Esperanza.

A manera de conclusión, del análisis de resultados se puede decir que, el porcentaje o tasa del error guarda una relación logaritmica al número de veces que el estudiante ejerce el problema de matemática. Considerando que de uno de cada cuatro problemas de la división presenta un tipo de error procedural o aptitud matemática procedimental, de los 30 errores tipificados del error, si se aprecia un

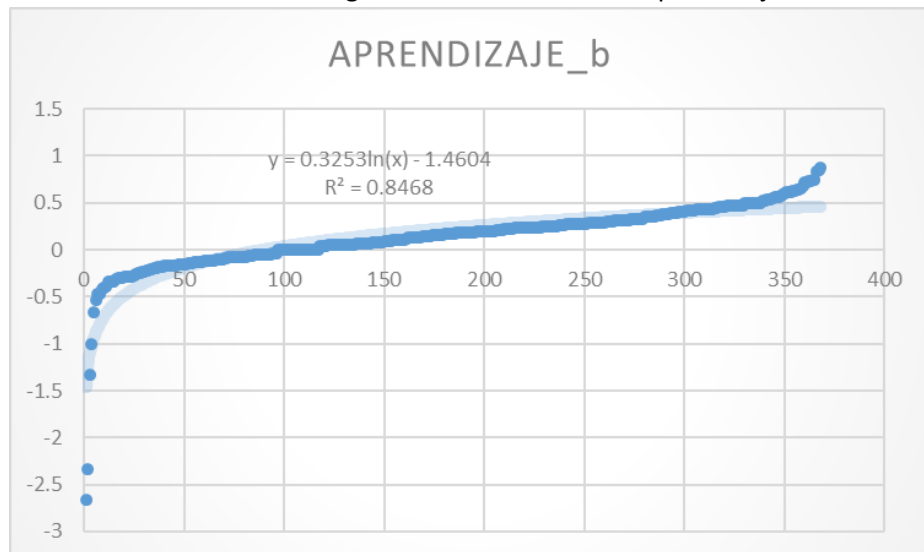
cambio de aprendizaje. El aprendizaje en la Gráfica 8 muestra un comportamiento logarítmico que muestra una ganancia en habilidad por parte de los estudiantes a medida que avanza en el tiempo y la práctica por parte del estudiante al aumentar su desempeño, dominio o habilidad en el tema del algoritmo de la división.

A continuación, Gráfica 7 y la Gráfica 8 que describen un comportamiento logarítmico en aprendizaje y de la tasa del error de la muestra de ocho escuelas de la Familia de la Esperanza:

Gráfica 7. Diagrama Pareto tasa del error



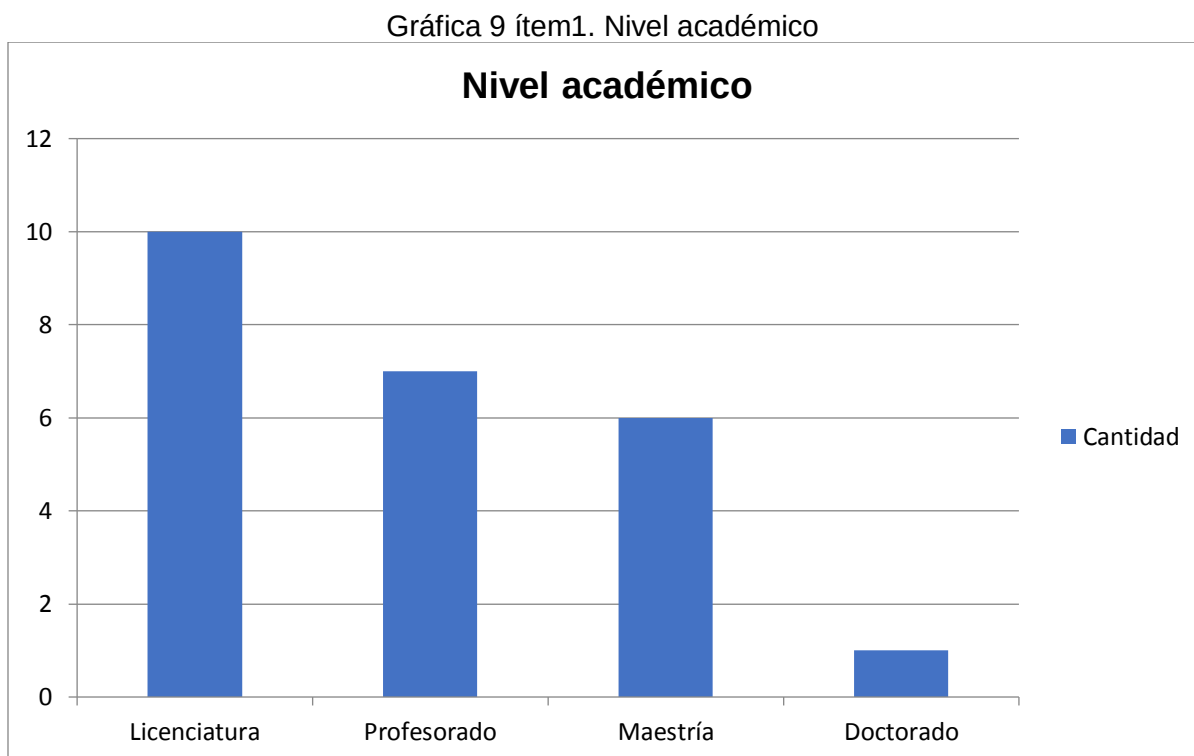
Gráfica 8. Curva logarítmica de la razón del aprendizaje



G. Desglose por ítems: Encuesta a profesionales docentes.

El objetivo de las entrevistas y de aplicar la encuesta fue de recoger las impresiones y percepciones de los 30 docentes y las personas vinculadas a la enseñanza sobre todo en la puesta en práctica de la enseñanza de la matemática. Estos profesionales, entre los que se encuentran licenciados en matemática, maestros, directores y catedráticos de matemáticas y estadística y especialistas en matemática educativa, permite conocer su percepción y lo que han podido deducir luego de años de docencia y relación directa con el mundo de las matemáticas y su enseñanza. Así mismo, se hace un contraste con el punto de vista de los docentes en esta área a niveles primario y básico. A continuación, los resultados de la encuesta:

Ítem 1. **¿Cuál es su más alta formación académica?**

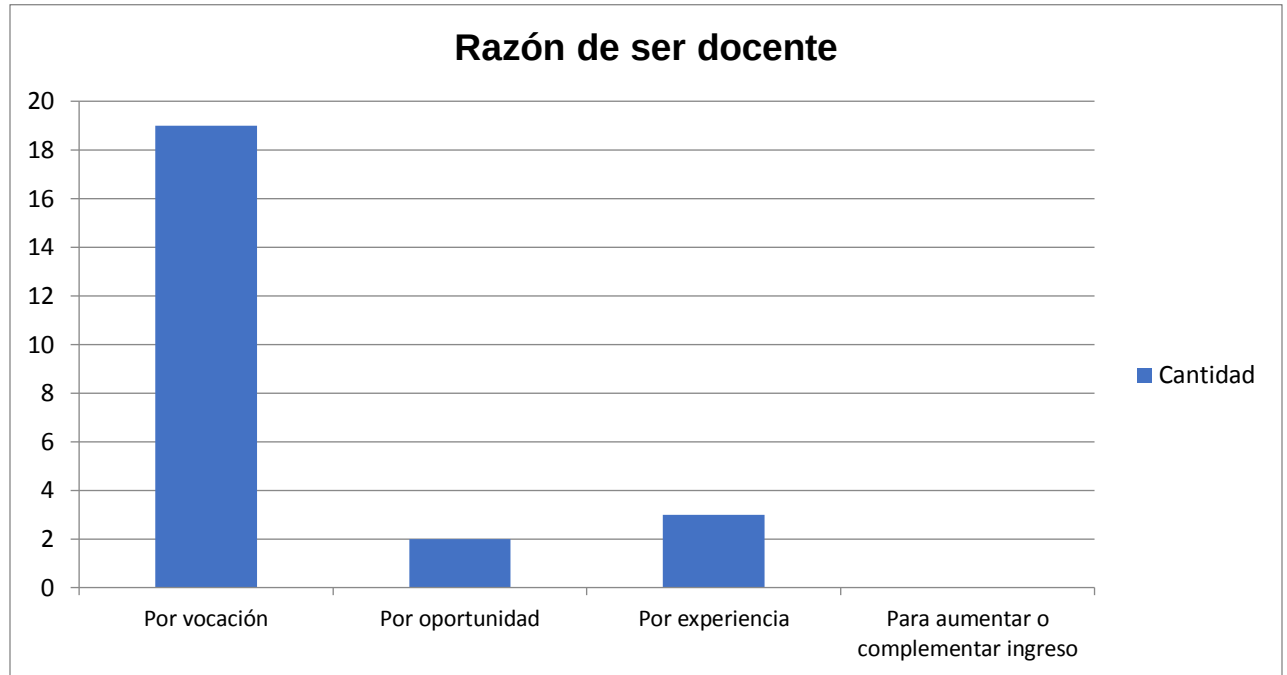


Del grupo de 24 profesionales docentes encuestados el 42% (10) tienen un grado hasta de licenciatura, el 29% solamente título diversificado de profesorado, 25% además con un grado de maestría y un profesional a nivel de doctorado lo cual es un 4%.

Ítem2. ¿Por qué razón primaria es usted docente de matemática?

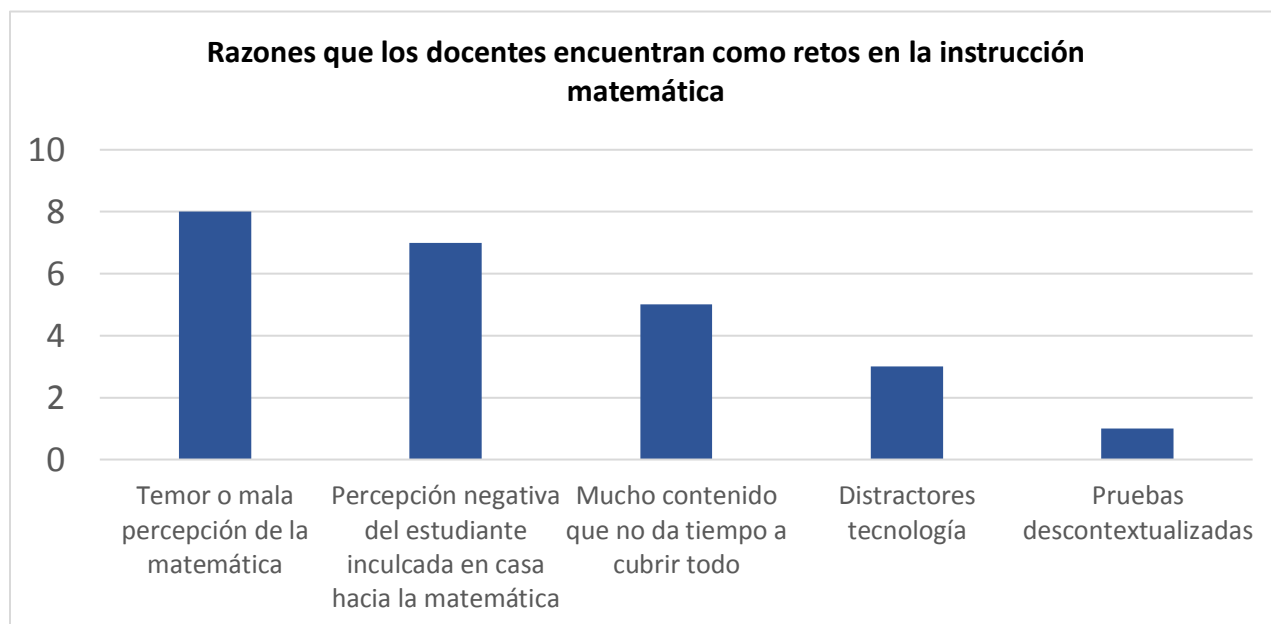
El 79% la razón de ser docente es por vocación y luego un 13% comenta que la razón es pasar por la experiencia de ser docente, luego un 8% (2 docentes) comentaron que es por la oportunidad que les otorgaron para ser docentes.

Gráfica 10 ítem2. Razón de ser docente



Ítem3. ¿Cuáles son las principales dificultades /retos/ que usted ha encontrado como docente de matemáticas?

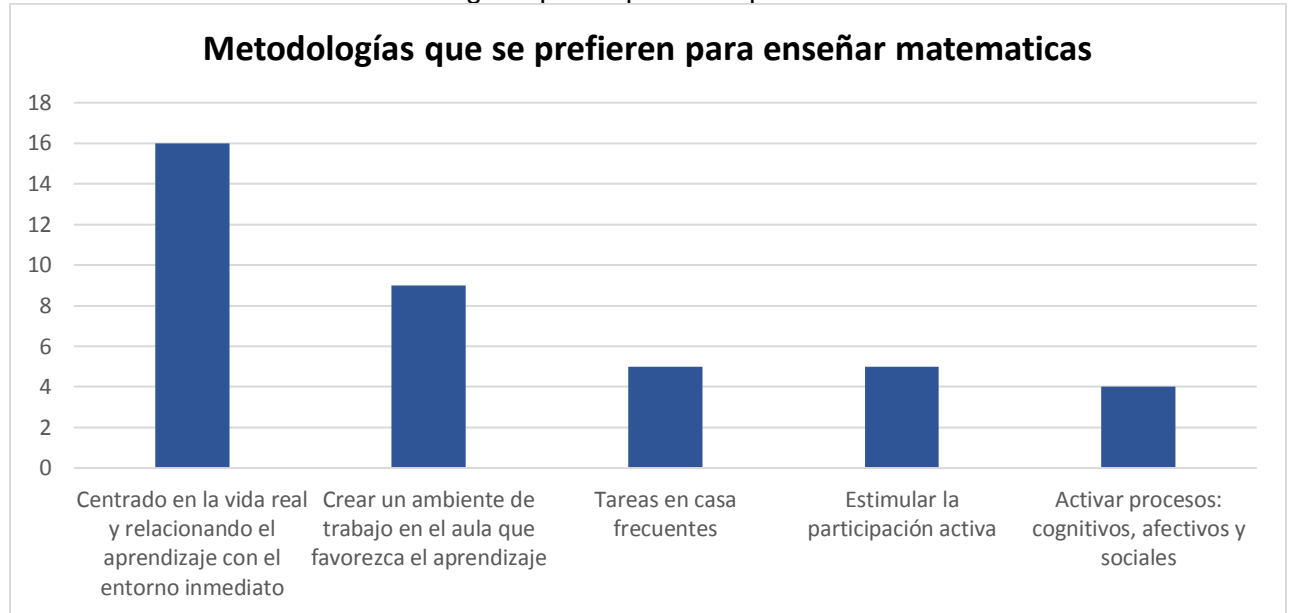
Gráfica 11 Ítem3. Razones que los docentes encuentran como retos en la instrucción matemática



Los desafíos que los docentes encuentran en las aulas son 33% temor en los estudiantes o mala percepción de la matemática, el 29% encuentra una percepción negativa del estudiante inculcado en casa hacia la matemática, 21% reconoce que mucho del desafío está en la gran cantidad de contenido que hay que cubrir y que no siempre se puede. El 13% de los docentes encuentra que a pesar de que no está permitido el uso de tecnología para uso recreativo siempre se encuentra que a un alumno(a) hay que corregirlo o confiscar el aparato que lo distrae de la clase. Por último, hay un 4% que reconoce también que las pruebas o tareas que se utilizan de evaluación, algunos alumnos consideran no los vinculan con sus vidas y los desmotivan a completarlas o bien a interesarse en completarlas (descontextualización) lo que dificulta es hacer pruebas o tareas que les interese o que les motive curiosidad por resolver.

Ítem4. ¿Cuál es la metodología que usted usa para enseñar las matemáticas?

Gráfica 12 ítem4. Metodologías que se prefieren para enseñar matemáticas



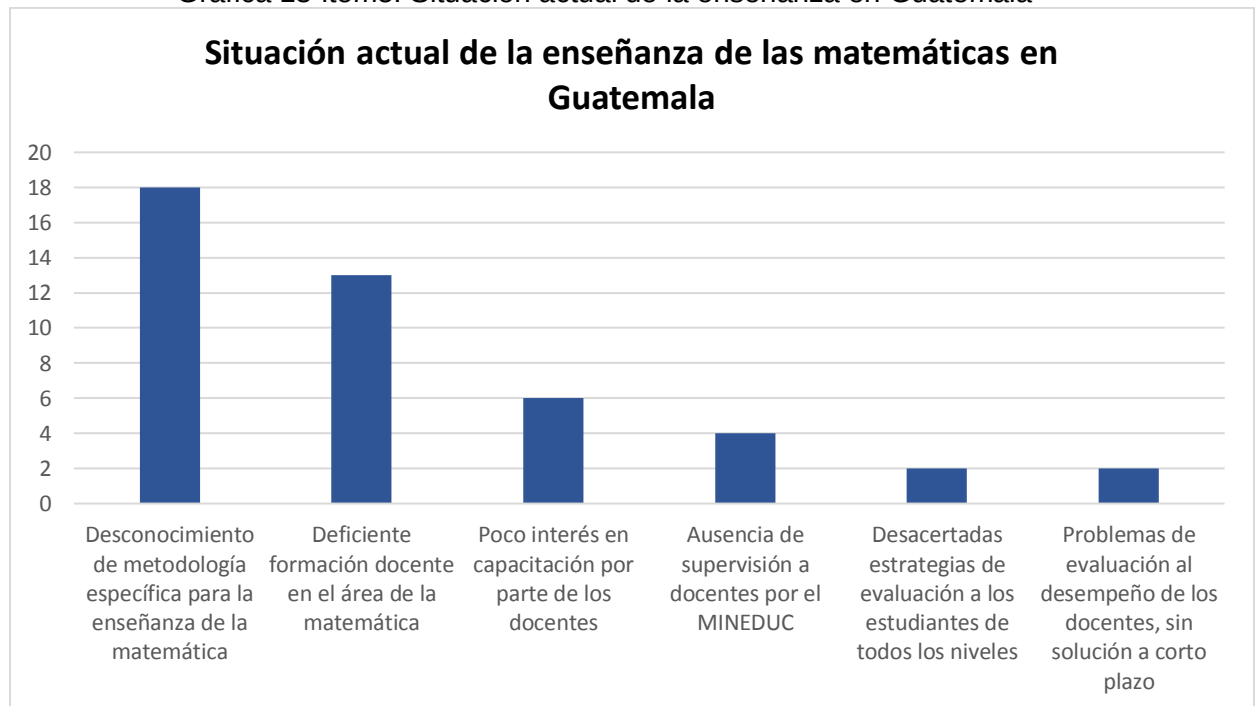
El 67% de los docentes encuestados la metodología o estrategia de enseñanza aprendizaje es la que sea centrada en la vida real y relacionada con el aprendizaje con el entorno inmediato para levantar el interés y la motivación.

El 38% de los docentes utiliza como metodología el crear un ambiente de trabajo en el aula que favorezca el aprendizaje, el 21% de los docentes les deja tareas frecuentes para la casa, el 21% busca estimular la participación activa y el 17% utiliza como metodología el activar los procesos cognitivos, afectivos y sociales.

Ítem5. ¿Cómo describe la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala?

La situación actual de la matemática en Guatemala la describen el 75% de los docentes encuestados como un total desconocimiento de la metodología específica para la enseñanza de la matemática, un 54% comenta que hay una deficiente formación docente en el área de matemática, el 25% comenta que se presenta poco interés en la capacitación por parte de los docentes, el 17% comenta que hay una total ausencia de supervisión a docentes por el Ministerio de Educación de Guatemala - MINEDUC- y otro 8% comenta que hay problemas con la forma de lograr evaluar el desempeño de los docentes y lo miran sin solución a corto plazo.

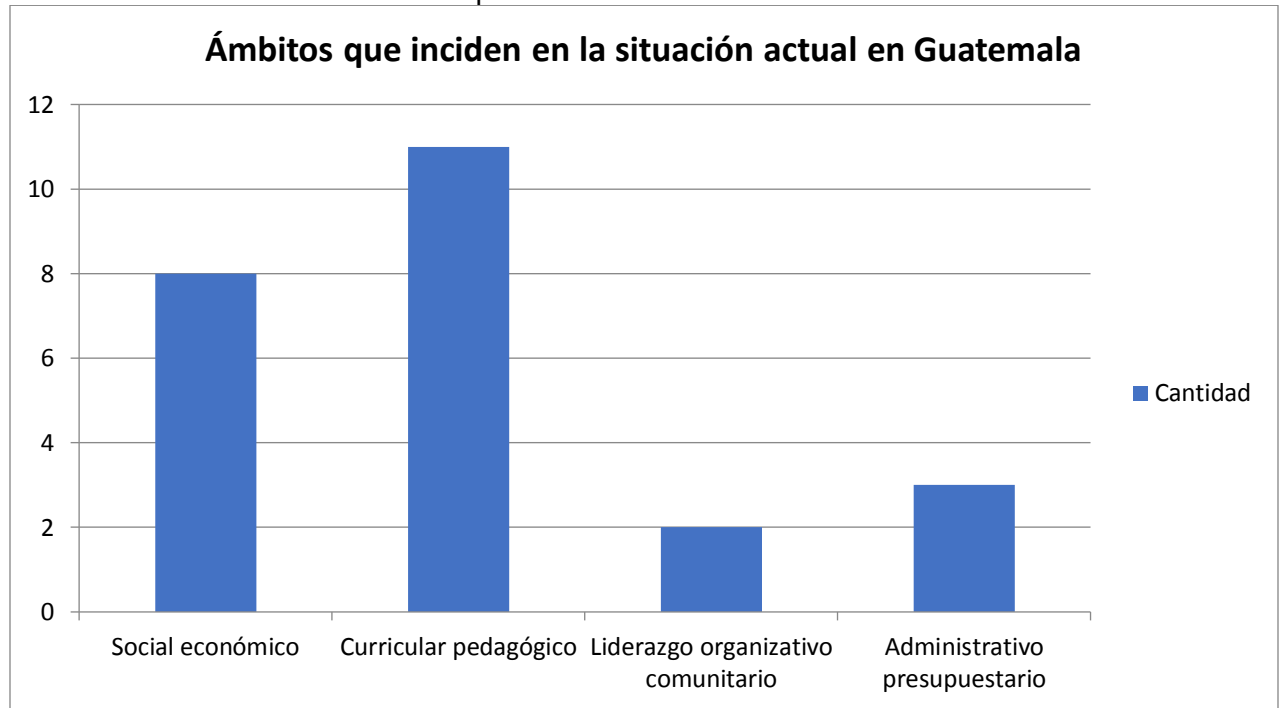
Gráfica 13 ítem5. Situación actual de la enseñanza en Guatemala



Ítem6. ¿Cuáles son los ámbitos que inciden directamente en la situación actual de la problemática en Guatemala?

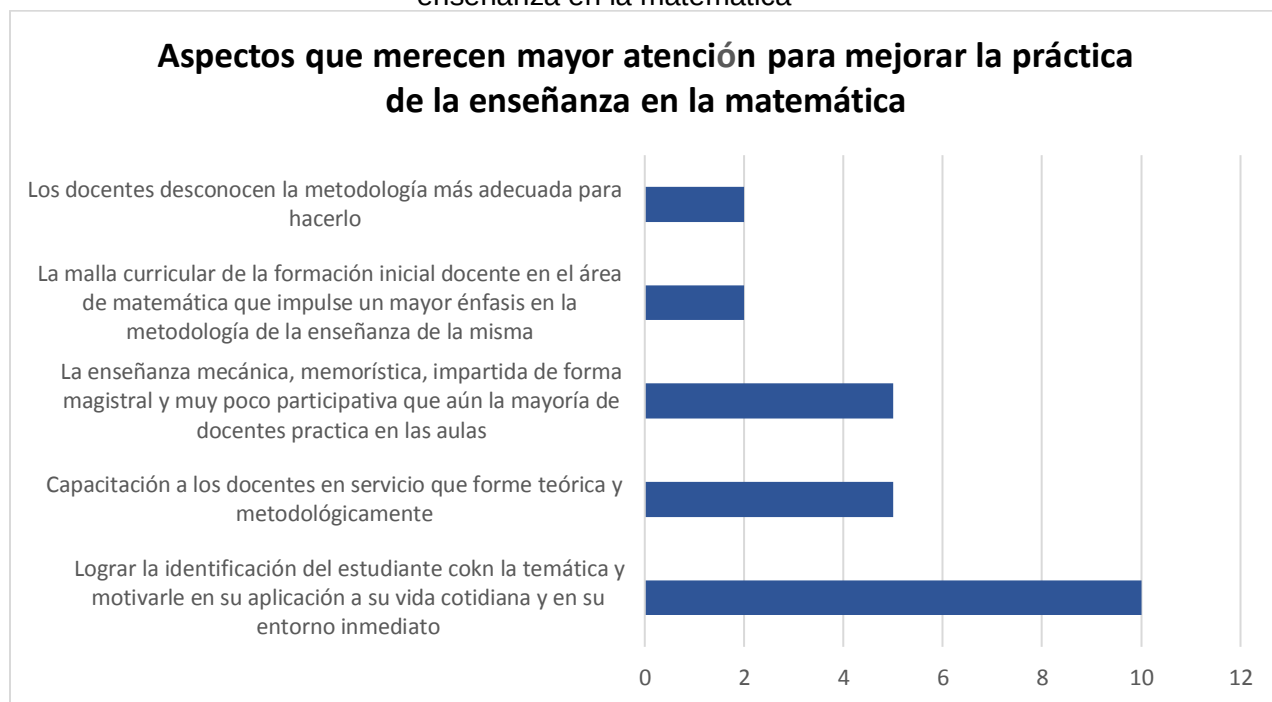
Los ámbitos que inciden la situación actual de la matemática deficiente o insatisfactoria en Guatemala son para el 46% el problema radica a nivel curricular pedagógico, para un 33% el otro en importancia es el ámbito social económico para un 13% el problema es administrativo y presupuestario y para un 8% el problema radica en un liderazgo organizativo deficiente en la mayoría de las escuelas.

Gráfica 14 ítem6. Ámbitos que inciden en la situación actual en Guatemala



Ítem7. ¿Cuáles son los aspectos que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza en la matemática?

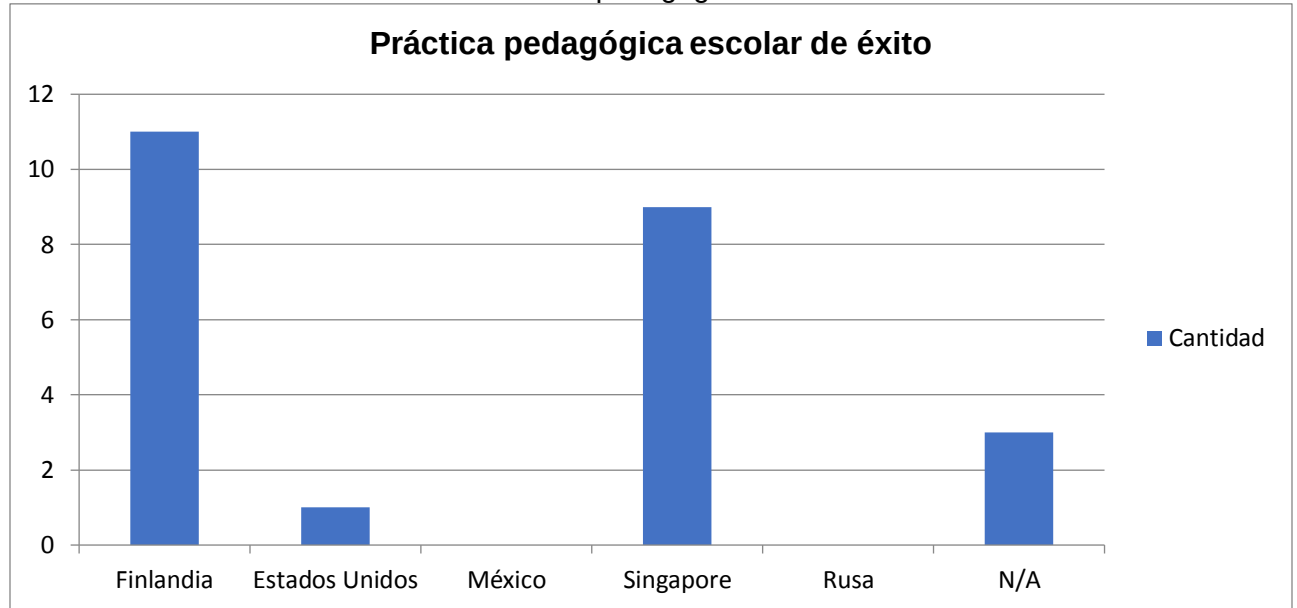
Gráfica 15 ítem7. Aspectos que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza en la matemática



Para un 42% de los docentes encuestados los aspectos que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza de la matemática es lograr la identificación del estudiante con la temática y motivarle en su aplicación a su vida diaria cotidiana y a su entorno inmediato (contextualizar la matemática - etno matemática). Para un 21% de los docentes otro aspecto que merece atención es la capacitación docente en servicio que forme en mejor manera teórica y metodológica- estratégicamente. Para un 21% de los encuestados la enseñanza en su mayoría en Guatemala es del tipo mecánica, memorística, impartida en forma magistral y muy poco participativa que se sigue practicando en las aulas. Para un 8% opina que la malla curricular de la formación inicial docente en el área de matemáticas debe impulsar un mayor énfasis en la metodología de la enseñanza. El 8% comenta que los docentes desconocen sobre la metodología o estrategia más adecuada para impartir clases de matemática.

Ítem8. ¿Cuáles son las prácticas pedagógicas por países que sea la más exitosa para la enseñanza de las matemáticas?

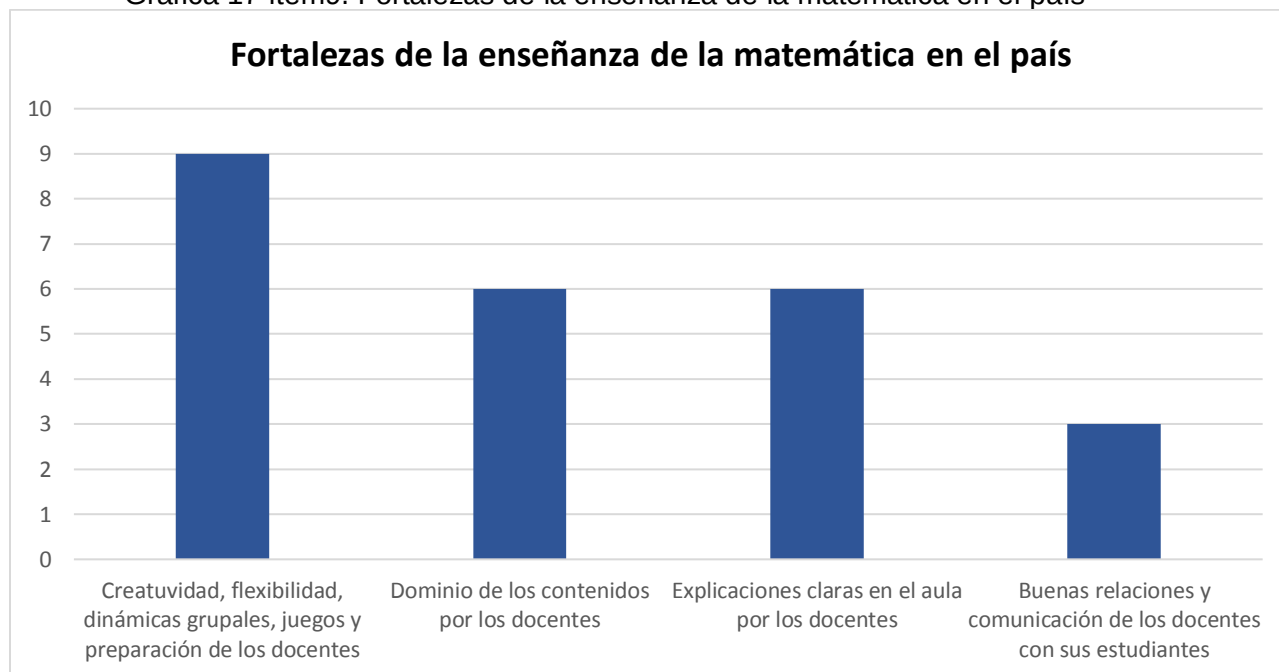
Gráfica 16 ítem8. Práctica pedagógica escolar de éxito



Para los encuestados el 46% opina que la mejor práctica pedagógica la tienen Finlandia, luego un 38% opina que es Singapur, luego un 13% no sabe qué país y un 4% opina que es Estados Unidos.

Ítem9. ¿Cuáles son las fortalezas de la enseñanza de la matemática en el país?

Gráfica 17 ítem9. Fortalezas de la enseñanza de la matemática en el país

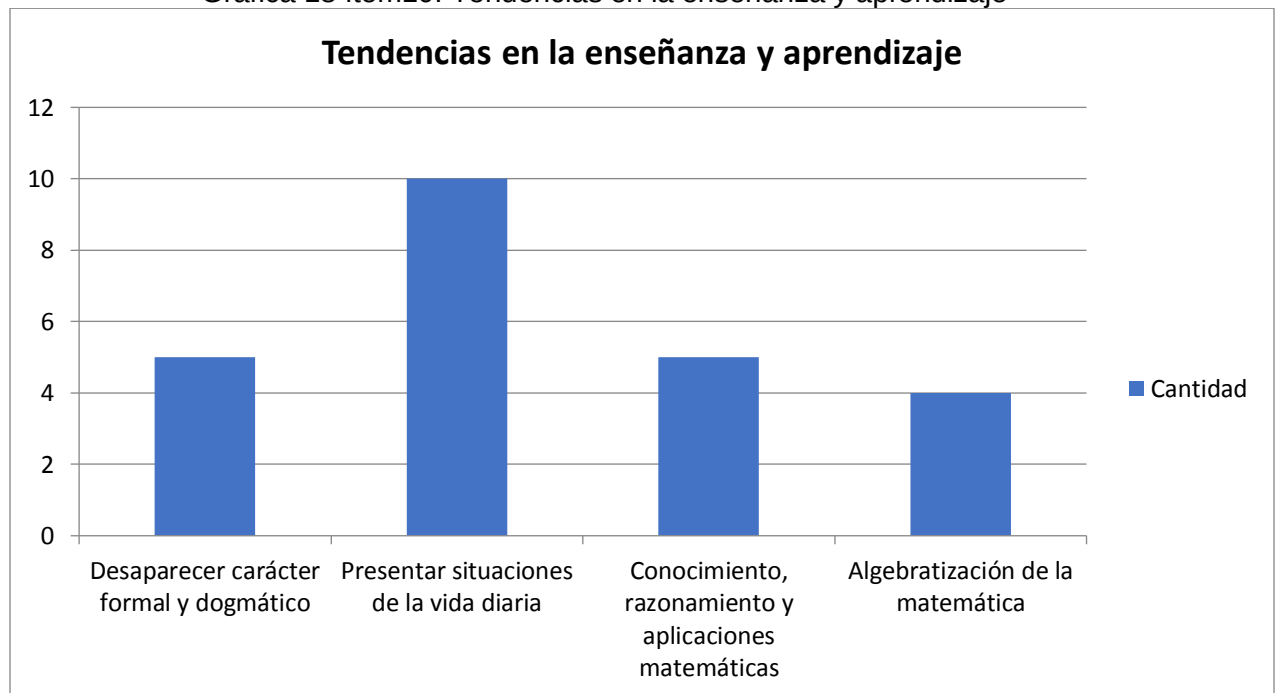


Para un 38% de los docentes encuestados opinan que como fortalezas de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala esta la alta creatividad, flexibilidad, dinámicas grupales, juegos y preparación docente. Para el 25% está radicado en el dominio de los contenidos por los docentes, otro 25% opina que las explicaciones son claras en el aula por los docentes y un 13% opina que las buenas relaciones y comunicación de los docentes con sus estudiantes es un ejemplo.

Ítem10. ¿Cuáles son las nuevas tendencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

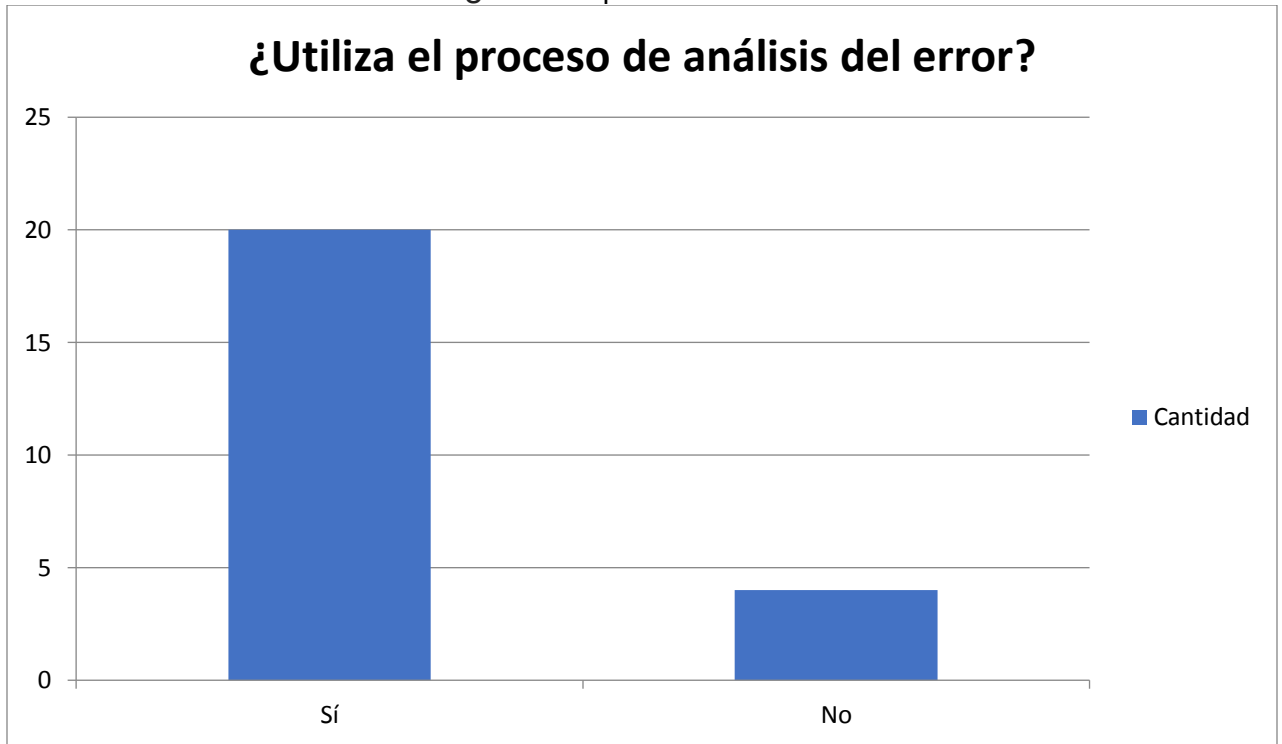
Para el grupo encuestado las tendencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están para un 42% en presentar adecuadas situaciones de la vida diaria, o sea vincular la materia a la vida de los estudiantes. Para el 21% de los docentes aconseja desaparecer el carácter formal y dogmático. Para un 21% de los docentes se debe enfocar más en el conocimiento, razonamiento y aplicaciones matemáticas. Un 17% de los docentes aconseja empezar a “álgebratizar” la aritmética en primaria, ser más exigente con los estudiantes.

Gráfica 18 ítem10. Tendencias en la enseñanza y aprendizaje



Ítem11. **¿Utiliza el análisis del error en las pruebas escritas y/u orales como retroalimentación?**

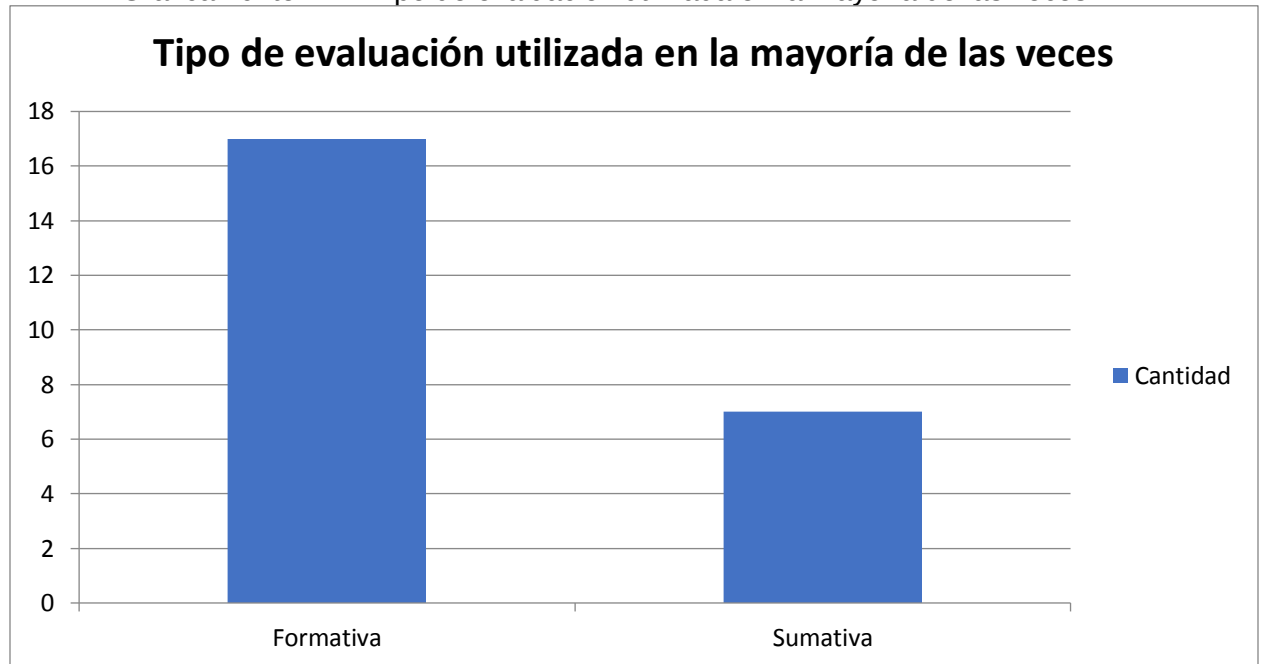
Gráfica 19 ítem11. ¿Utiliza el proceso de análisis del error?



Un 83% de los docentes utiliza el análisis del error en las pruebas escritas y/u orales como retroalimentación.

Ítem12. **¿Cómo evalúa a sus estudiantes en la mayoría de las veces?**

Gráfica 20 ítem12. Tipo de evaluación utilizada en la mayoría de las veces



Un 71% de los docentes evalúa a sus estudiantes en forma formativa y un 29% en forma sumativa.

Ítem13. ¿Incluye en su metodología de enseñanza una participación activa entre los estudiantes?

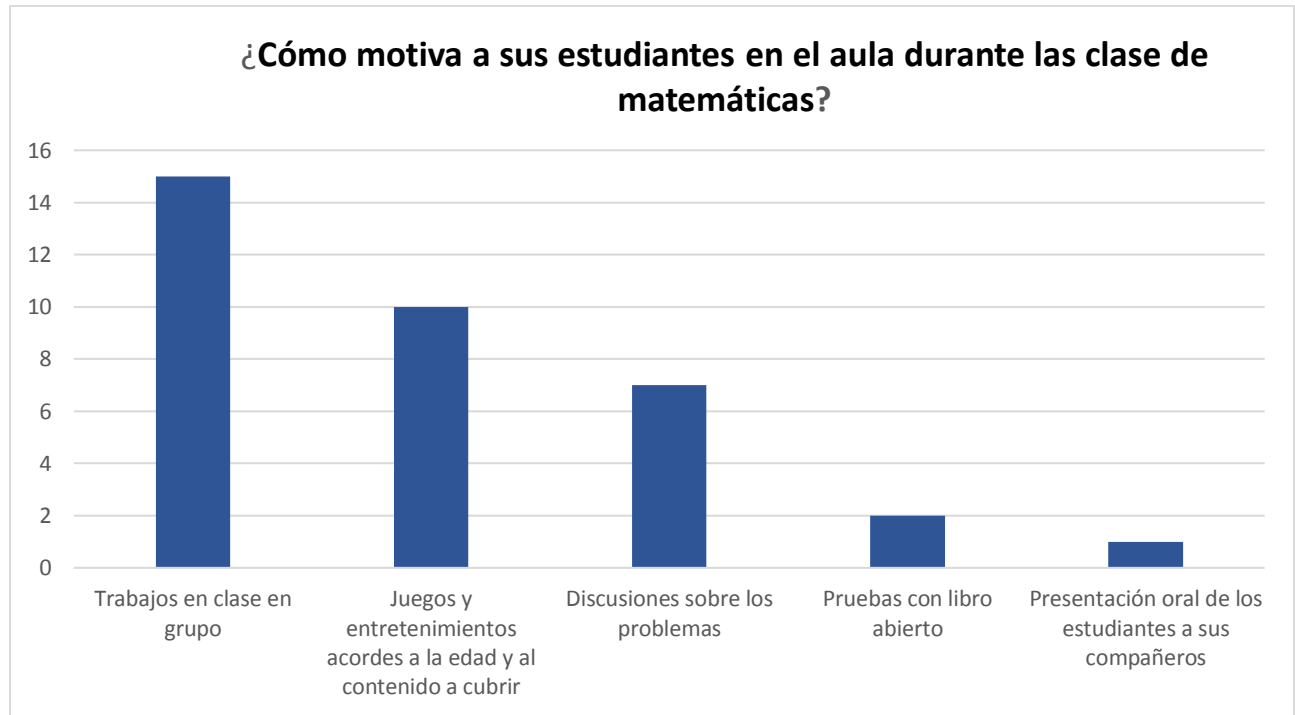
El 100% de los docentes encuestados comenta que si incluye en su metodología o estrategia de enseñanza una participación activa entre los estudiantes.

Gráfica 21 ítem13. ¿Utiliza metodología participativa en la instrucción matemática?



Ítem 14. ¿Cómo motiva a sus estudiantes en el aula durante las clases de matemáticas?

Gráfica 22 ítem14. ¿Cómo motiva a sus estudiantes en el aula durante las clases de matemáticas?



El 60% de los docentes motiva a sus alumnos en el aula durante la clase de matemática con trabajos en clase grupales y el resto el 40% con juegos y entretenimientos acordes a la edad y al contenido a cubrir, discusiones sobre los problemas, pruebas con libro abierto y presentaciones orales de los estudiantes a sus compañeros.

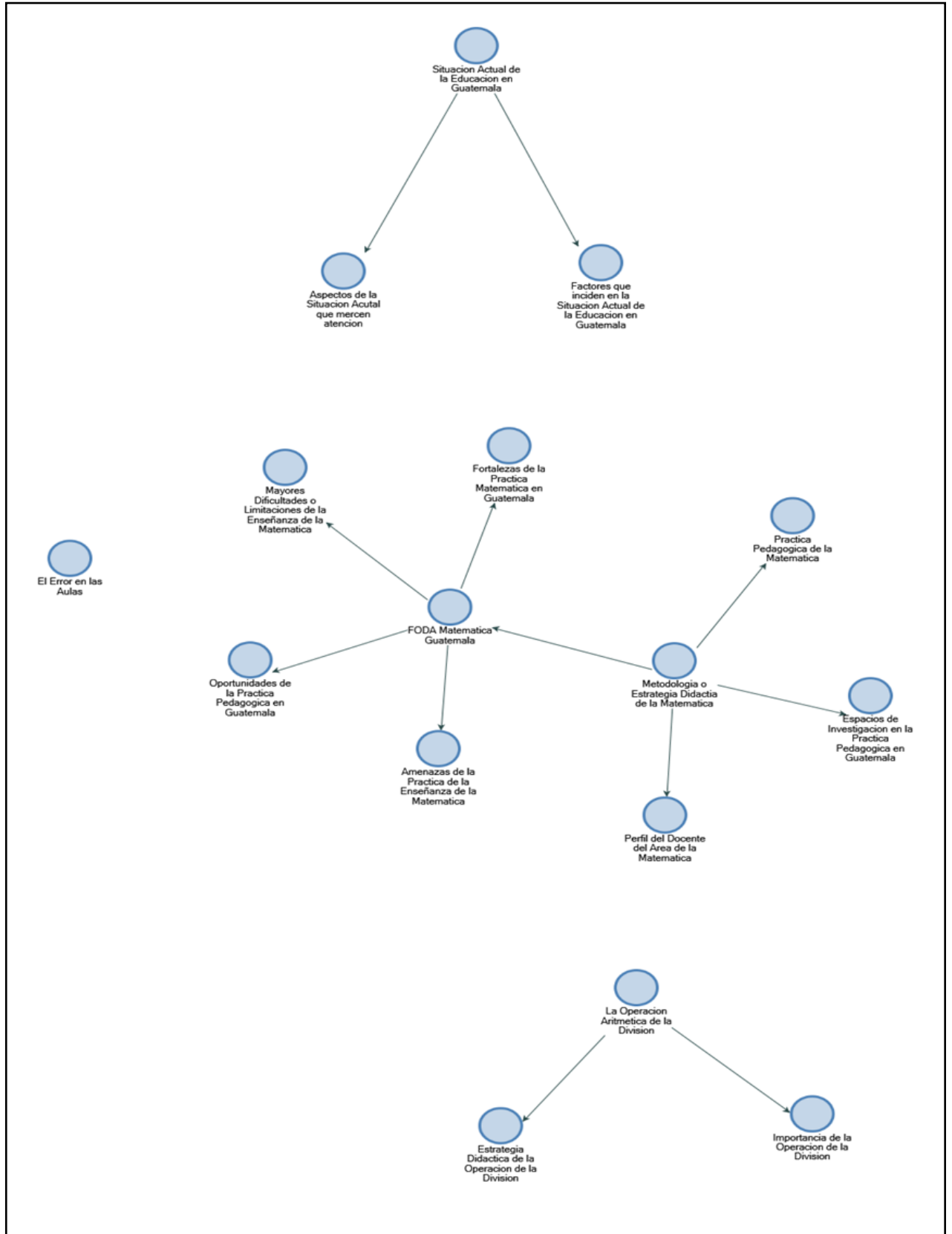
H. Análisis cualitativo NVIVO entrevista a profesionales expertos.

El análisis cualitativo de las transcripciones de las entrevistas en NVIVO10 se muestra en el siguiente Esquema 2. Diagrama de nodos. Se puede observar que se muestra como todos los temas se relacionan en las entrevistas. Del error, su análisis o investigación, se piensa como un elemento aislado, que no parece vincularse con ningún tema ya sea en la situación actual de la educación en Guatemala o en la situación actual de la didáctica matemática (tanto como en las oportunidades, limitaciones, fortalezas o amenazas para la mejora en calidad educativa). Solamente en la parte de oportunidades se menciona que el estudiante debe aprender del error no ligándolo a la didáctica o al docente.

A su vez, no se vincula el error a la metodología o estrategia didáctica actual de la matemática, solo se menciona que si se presenta una equivocación cometida por los alumnos, los docentes deben motivarlos, guiarlos y no fomentar el castigo o el miedo a la matemática cuando se enfrenten al error (a pesar de que, en la serie de encuestas el 83% de los docentes asevera utiliza el análisis del error en las pruebas escritas y/o orales como fuente de retroalimentación tanto al docente como a los estudiantes). Se incluye que, los estudiantes realicen autoanálisis de sus errores sin involucrar al docente.

A continuación, el Esquema 2, describe según el análisis de NVIVO10, lo aislado y desvinculado que para los docentes expertos aparece aún el análisis del error al momento de tratarlo con las actuales didácticas y metodologías estratégicas en la problemática o situación de la educación en Guatemala:

Esquema 2. Mapa de nodos según análisis NVIVO entrevista a expertos y encuesta a docentes



VIII. DISCUSIÓN ENTREVISTAS

A. Situación actual en Guatemala de la enseñanza de la matemática

La preparación de los docentes es el elemento más importante para aumentar la calidad educativa que les permita desarrollar un trabajo adecuado en el aula. Es esta preparación docente necesaria a su vez, para una formación integral de los estudiantes que les permita alcanzar las competencias, habilidades y destrezas que requieren para la vida y el mundo laboral. Al firmarse los Acuerdos de Paz (1996), se ha fortalecido el apoyo a la educación a nivel nacional y el programa Diseño de la Reforma Educativa en el Aula desarrolla esfuerzos para fomentar el fortalecimiento de la formación docente y de mantenerlo a un nivel de grado superior o universitario. En el 2008 se conformó una mesa técnica y finalmente en el 2012 se logró la Reforma de la carrera magisterial. La carrera de magisterio de preprimaria se mantuvo en el nivel de diversificado.

La formación inicial docente que se aprobó establece un tiempo de cinco años de estudios que deben completarse para poder ejercer. Sin embargo, por un amparo de la Corte Suprema de Justicia a partir del año 2018 se ofrecerán de nuevo carreras de Magisterio de Primaria de 23 escuelas normales que funcionan en el país y la mayoría construidas y operando desde 1944. Son 253,578 los docentes de Primaria que están en servicio en todo el país, tanto en el sector público como privado.

En el año 2017, la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativas (DIGEDUCA) en su informe anual sobre niveles de desempeño en las pruebas de matemáticas y de lectura, tienen resultados desalentadores en las evaluaciones de matemática y de comprensión lectora, nueve de cada diez estudiantes que se graduaron de diversificado no alcanzaron el nivel de competencias y de habilidades matemáticas consideradas como satisfactorias. Tres de cada diez alcanzan el nivel necesario de logro en comprensión lectora.

En los últimos 11 años solo se han mejorado cuatro puntos porcentuales en matemáticas. En el 2017, la cantidad de 148,842 estudiantes graduandos de 3,879 establecimientos educativos fueron evaluados. De este grupo de estudiantes el 9.6% alcanzó el logro mínimo en matemáticas, un incremento del 0.59 puntos porcentuales en comparación con el 2016. En el 2016 fue de 9.01%. En 11 años el incremento ha sido en promedio del 4.17%. El 90.4% de los estudiantes no logra el nivel satisfactorio o excelente en el desempeño de la prueba de matemáticas.

Al hacer un análisis estadístico se encuentra que se presentan factores asociados externos que influyen en la experiencia y capacidad del aprendizaje de los estudiantes. Los factores como repitencia de grados, trabaja y estudia, alcances en niveles educativos de los padres (capital cultural) entre otros, los cuales afectan en el desempeño escolar del estudiante.

Además del capital cultural como factores asociados externos que afectan en el desempeño escolar del estudiante, se encuentra los resultados de las evaluaciones de matemáticas de los docentes. En el informe de Formación inicial y gestión docente (2013) de USAID/ Reforma Educativa en el Aula (REAULA) se realiza una revisión de qué se entiende por formación inicial docente en diversos países en América Latina y especialmente se describe la situación actual en Guatemala.

El Dr. Patrick Scott - USAID/REAULA- (2013), aporta la propuesta de la mesa técnica de Formación Inicial de Docentes. En su análisis enfatiza, que:

“Guatemala es el único país en que “las condiciones para el ejercicio de la docencia se diferencian en forma pronunciada del resto de la región en la mayoría de los indicadores considerados presentando condiciones de gran desventaja. Se observa la proporción más baja de docentes en ejercicio con formación pedagógica de nivel superior y con experiencia mayor a 10 años. Una mayoritaria proporción de maestros trabajan 25 horas por semana y una tercera parte combina el trabajo en la escuela con otra actividad laboral. En lo relativo a la infraestructura donde estos docentes ejercen, menos de uno de cada diez lo hace en escuelas con edificios y recursos adecuados. De los países evaluados Guatemala es en donde predomina la proporción del tiempo del docente dedica

más a trabajar frente a los alumnos (70%) y menos a preparar las clases (10%)” (Scott, 2013).

El Informe de Docentes 2009 – 2014 elaborado por la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa – DIGEDUCA- se han evaluado aproximadamente 90,000 docentes optantes a plaza en las evaluaciones a escala nacional. En el año 2011 se evaluaron 5,273 docentes, en el 2012 a 23,867. Los docentes son más del sexo femenino (70%) que masculino (30%). La mayoría de los docentes se auto identifica como ladinos (50 al 60%) y el otro grupo como mayas (30 al 40%). Aproximadamente un 80% de los docentes evaluados indicaron que fueron formados en un Magisterio de Primaria, siendo además un 70% de los docentes el nivel educativo más alto alcanzado fue a nivel de diversificado. En la prueba de lectura o comprensión lectora los docentes en el año 2014 tuvieron el 51% de respuestas correctas y el 36% de respuestas correctas en matemáticas. En el año 2016, en la evaluación diagnóstica efectuada participaron 26,761 docentes lo cual mostró que el 49.11% de respuestas correctas en lectura y un 36.17% de respuestas correctas en matemáticas. En estrategias de enseñanza aprendizaje fue un 51.98%. En la Universidad San Carlos de Guatemala ya se han graduado en el año 2017 la cantidad de 1,610 docentes a nivel universitario (696 docentes varones y 914 docentes mujeres).

Asi mismo, en el documento “Así estamos enseñando matemáticas” elaborado por la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativas – DIGEDUCA- en el año 2016, señala la existencia de deficiencias en el tema de la enseñanza de la matemática. Es entendiendo la forma de enseñar como, el primer paso para que se empiecen a superar los resultados. Este documento presentó una serie de recolección de impresiones y percepciones de personas vinculadas a la enseñanza y puesta en práctica de la matemática en Guatemala.

Según Castillo (2016) concluye en este documento que:

“El docente se le ha colocado como un profesional de segunda o tercera y lo cual dificulta su preparación y formación continua al igual afectando su influencia dentro de las aulas. El debilitamiento del estatus del docente y la

ausencia de incentivos para una carrera y práctica profesionales que, de hacerse bien, son muy exigentes. La debilidad en los recursos humanos se suma a lo de los materiales, desde la infraestructura básica, mantenimiento de aulas, pizarras, servicios sanitarios y llegando a escasez de textos y materiales didácticos. Otros factores que afectan son la continuidad de los alumnos y docentes en su labor diaria” (Castillo, 2016).

De acuerdo con la OCDE - Organización para la Cooperación Económica y Desarrollo- estas son las herramientas básicas para competir en el mundo económico: lectura de comprensión, manejo de la escritura y dominio de las matemáticas y el hábito de la lectura es básico, aunque hay mucha presencia de muchos distractores como la tecnología (celulares, televisión, entre otros).

Como limitantes se encuentran para alcanzar logros en el desempeño matemático:

- Textos de matemática con poco énfasis en leer o realizar correctamente los ejercicios.
- No se inicia ni a la edad apropiada ni con los textos adecuados. No se busca encontrar la pasión de los niños a manera individual.
- Falta el analizar y discutir las lecturas. Los docentes no tienen muchas alternativas para enseñar matemáticas porque se desconoce el contexto de las matemáticas, se desconoce toda la historia y toda la cultura matemática
- Los docentes cuando los alumnos les preguntan y les comentan que no entienden, los docentes repiten la instrucción en igual forma, pero más despacio. Las dudas son las mismas porque el docente no buscó otra alternativa para explicar el tema
- Se deben cambiar los modelos o patrones del pensamiento disfrutando la práctica matemática.
- Se presenta mala práctica al aprender de memoria, si no se sabe lo anterior afecta al resto. Los padres les comentan a sus hijos, que no les gusta o que no entienden la matemática y ello les afecta también.

- La actitud importa mucho y se debe perderle el miedo. Hay que considerar que influye el docente y la lectura en el logro.
- Se debe fomentar estar en contra de memorizar, por ejemplo: fórmulas.
- Enfoque metodológico debe ser más trabajo de equipo.
- Mucho se incentiva con juegos matemáticos – “*gamification*”

Lo importante a considerar en la evaluación docente es si alcanzan los estudiantes las competencias previstas, si se logra un perfil docente adecuado al grupo de estudiantes que se le presenta, si se considera la tecnología e innovación en la metodología o estrategias del aprendizaje y, si se cuenta con la formación metodológica necesaria.

Romper los esquemas que asocian la práctica de matemática con algo que les guste a los estudiantes. Que al realizar las tareas matemáticas se asocia con temas de música que le agraden o que esté observando un programa educativo o recreativo que luego en un anuncio puedan continuar haciéndolo. Se aconseja asociar a la matemática con algo agradable (emoción positiva).

Se debe fomentar la fluidez o rapidez en el manejo de los números. Sumas iterativas o restas iterativas para buscar asociarlo con algo simple que el pensamiento cognitivo domine los números y se familiarice con los números. Una vez que la persona lo domine puede aumentar la complejidad. Se debe tratar como que fuese un juego matemático y que encuentra alegría haciendo. Al hacer cosas disruptivas, se puede aprender mejor la matemática y que sea más agradable, más social y así disfrutar de la matemática. Puede estudiarse fomentando distintamente el estudio de la matemática al promover una diferente forma de estudiar y no sólo la convencionalmente aislada técnica “estudiante sentado en el escritorio”. La instrucción debería hacerse de forma disruptiva.

Si el docente prescribe, sugiere, recomienda y guía métodos antes de la experiencia directa del alumno, se debilita considerablemente ese espacio de libertad decisivo para la acción y el involucramiento profundo del estudiante.

La clase debe servir como una comunidad científica y de ruptura con el conductismo. El alumno debe construir su propio aprendizaje. Es necesario romper con los esquemas tradicionales en lo que el docente dicta sin la integral interacción con el alumno, para romper con la pasividad del alumno. El docente debe suministrar las situaciones adecuadas (problemas matemáticos), organizar las discusiones y apenas sugerir procedimientos de validación para el nuevo conocimiento. El docente pasa a ser un director de orquesta.

Las instituciones educativas privadas, a excepción de las instituciones públicas, han mejorado con el tiempo, a partir de las evaluaciones del año 2006 las pruebas de los graduandos han comprobado un aumento gradual en el nivel del logro y desempeño en las pruebas de matemáticas. Las instituciones educativas privadas fomentan las reuniones entre los docentes, revisión del currículo institucional tomando como base el Currículo Nacional Base - CNB y la revisión de los textos para poder utilizarlos. En las instituciones educativas privadas, se cuenta con apoyo administrativo y su seguimiento de mejora es mayor que en las escuelas públicas.

En el nivel de básicos continúa una problemática de transición al nivel de diversificado, pero aún así se ha ido solventando conforme cada año se enfocan los problemas. A pesar de ello, lo que persiste a nivel privado es la baja preparación a nivel de álgebra y geometría lo cual se han encontrado las universidades, con la situación de tener que apoyar a egresados cuando se preparan para las pruebas de admisión a las diversas universidades nacionales y cuando se encuentran que los maestros universitarios explican los conceptos de diferente forma. Las pruebas de admisiones alcanzan las expectativas de preparación de ingreso y aumentan los retos para que los alumnos tengan buena base matemática. A nivel general, de las instituciones educativas privadas, egresan bien preparados, sólo necesitan refuerzo en temas de álgebra. Sin embargo, en algunos casos los docentes tanto de instituciones educativas privadas o públicas como a nivel universitario son impartidos por ingenieros que tienen los conocimientos, pero no la didáctica pertinente para enseñar la matemática.

En las instituciones públicas a nivel de País, no se cuenta con los suficientes docentes con buena base de matemática y ello con lo que la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa – DIGEDUCA, ha mostrado en las pruebas que se hacen a los docentes. Lo que se percibe a nivel general, es que los estudiantes le temen a la matemática. Los estudiantes en general, no conocen los procesos de la matemática. En la didáctica de la matemática se sugiere empezar con lo concreto, luego lo semi concreto para seguir con los temas más abstractos que necesitan un pensamiento más lógico y de sentido del proceso para relacionar los diversos temas matemáticos. El docente que es primero ingeniero por ejemplo va directamente a lo abstracto y allí está el problema. Una vez que el estudiante domina lo concreto, puede pasar al abstracto. Ya entonces cuando dominan lo abstracto y le encuentran sentido su desempeño será mucho mejor. Los docentes tienen una preparación alta en ciencia y procedimientos, pero no conocen sobre la mejor didáctica y la mejor forma de evaluar.

La situación actual de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Guatemala es complicada ya que, está enfocada más en enseñar recetas de algoritmos en vez de conceptos y eso pasa a todo nivel escolar. Actualmente hay muy bajo nivel de dominio del contenido matemático entre los docentes. Por lo consiguiente, no hay una didáctica innovadora ni evaluación apropiada para la matemática. La situación general en Guatemala es delicada, ya que se siguen teniendo los mismos problemas de siempre, con poco conocimiento matemático de los docentes y de la deficiente conformación del razonamiento lógico de los estudiantes - niños y jóvenes - para poder impartir la asignatura. Hay poco conocimiento del docente, de cómo poder asociar la matemática a la vida diaria.

A nivel de investigación, las universidades se han preocupado por la problemática y a pesar de tanto estudio, debate y la exposición de los estudiantes a la tecnología, se mantienen las escasas oportunidades en el aula para aprender. La tecnología propicia más y mejores oportunidades para aprender, pero no es suficiente. El docente aún es factor importante en alcanzar el logro del criterio y dominio de conceptos matemáticos. En general, los docentes no orientan

adecuadamente a fomentar el pensamiento abstracto. El problema es que los estudiantes no cuentan con un correcto razonamiento de los conceptos y procesos matemáticos. Lo que ello refleja, es la baja a mala preparación en matemáticas, de sus docentes, y el problema es que obstruye el proceso de aprendizaje.

Actualmente, los estudiantes no están preparados lo suficiente para la universidad como hace muchos años - más de 50 años - se percibe que estaban mejor preparados para ingresar a la universidad. En esa época los docentes (los años 1970) se formaban en un plan diario en la Escuela de Formación Docente en la USAC⁸⁵ y luego de que en los años 1980 se abriera un plan sabatino afectó mucho ya que el tiempo en horas de dicha instrucción fue muy bajo o escaso y no les apoyó a estos docentes en su formación. Era más homogénea la educación en ese tiempo. Había instituciones públicas y privadas que preparaban mejor a sus estudiantes. No todo el problema radica en las instituciones educativas, también tiene que ver la capacidad del estudiante, en general está mal preparado.

El problema es que los estudiantes no llegan a un nivel alto de análisis y no comprenden lo que se les solicita resolver, trabajar en clase y/o en una prueba. Básicamente el docente enseña lo que se le facilita, se siente más cómodo y eso es lo que transmite este correcto o errado, no busca la actualización de conceptos o estrategias didácticas y en la mayoría de las veces, no continúa con su formación docente.

B. Factores que inciden en la situación problemática de la enseñanza de la matemática en Guatemala

Entre los factores que inciden en la problemática de la enseñanza de la matemática en Guatemala se encuentran las malas prácticas o equivocadas metodologías de la enseñanza de los docentes en cuanto a la instrucción de los conceptos básicos de la aritmética y posteriormente, en temas del álgebra y geometría básica. Afecta el poco apoyo de los padres de familia en casa en que se realicen las tareas y en que los estudiantes no pongan de su parte para estar

⁸⁵ Universidad de San Carlos de Guatemala

receptivos en las aulas cuando se les presentan los nuevos conceptos. Los docentes deben buscar actualizarse continuamente y procurar innovar en sus metodologías de enseñanza para motivar al estudiante a interesarse por aprender.

En la iniciativa privada el problema se agrava cuando los directores de éstos buscan negociar con la educación es decir no evalúan sus programas, no procuran la formación docente y no los actualizan o fomentan la mejora de la calidad educativa. En cuanto al sector público la forma en que se asignan las plazas de docentes y los escasos recursos para la mejora de infraestructura son los factores difíciles de solventar. Lamentable, es además que a nivel universitario también los docentes no se preparan para formar educadores y futuros licenciados en el profesorado que escojan.

Guatemala carece de especialistas en los temas de la didáctica matemática a nivel escolar y a nivel universitario lo cual agrava la situación año con año. Lo ideal es que el perfil del docente incluya que sea muy colaborativo y abierto a las sugerencias de tanto la administración como de los mismos estudiantes para fomentar un ambiente proclive a aprender. El apoyo administrativo de la institución educativa debe ser constante. Los padres de familia y los estudiantes deben involucrarse en continuar con la mejora educativa fomentando un ambiente colaborativo en donde el estudiante se esté dispuesto a aprender. Un factor muy importante en el bajo rendimiento matemático radica, en la falta de preparación de los docentes en temas de conceptos matemáticos y en didácticas colaborativas de enseñanza aprendizaje.

El docente que antes se graduaba como profesor a nivel medio y el actualmente, ya cursa los dos años universitarios del profesorado, aún no se ha percibido que tengan un conocimiento mínimo de la matemática. Los catedráticos de éstas licenciaturas o profesorados a su vez, son deficientes en cuanto a transmitir cuales son las mejores dinámicas o técnicas metodológicas y didácticas eficientes y eficaces, para explicar los conceptos básicos matemáticos.

Mucho del aprendizaje en el aula depende del alcance del conocimiento del docente en la asignatura y del interés que de los estudiantes pongan para aprender.

Muchos temas relacionados a la matemática, si no tiene una aplicación a la vida real, en general no se adoptan y no se entienden. El nivel de logro o desempeño académico no depende de qué nivel social el estudiante es, depende en gran parte del docente cómo logra interesar a sus estudiantes. Depende del alto desempeño en cómo el docente logra ejercitarlos y cuáles son las estrategias que desarrolla para lograr propiciar el posterior aprendizaje.

Actualmente, en las universidades se deben pasar cursos de nivelación en matemática ya que los estudiantes llegan mal preparados y ello incide en sus malas prácticas durante su formación escolar. Las universidades, apoyan en cursos propedéuticos, tutorías virtuales, personales o grupales para realizar un re aleccionamiento de los conceptos para nivelarlos y así luego ellos, poder iniciar los cursos universitarios. Tratan de nivelarlos en las universidades por las “malas prácticas” que tuvieron durante sus estudios en las diversas instituciones privados y públicos.

Con base en la experiencia en el campo, estos profesionales expertos han coincidido que los docentes en la mayoría de las instituciones educativas privados y públicos repiten algoritmos y mecanizan las actividades sin apoyarse en la creatividad y en el de construir - los estudiantes - sus propios conocimientos. Mucho es debido a lo amplio de lo que se debe cubrir antes de finalizar cada año escolar. Otro problema que se ha presentado, es que los temas se los “saltean” porque consideran que no dominan el tema y que como no lo pueden enseñar no amerita ser enseñado. En la mayoría de las veces, los docentes a pesar de que no imparten ese tema difícil para ellos, pueden impartir otro.

En resumen, los factores que fomentan la problemática tiene que ver, con la falta de calidad de la educación, docentes poco comprometidos y carentes de una preparación adecuada los cuales no transmiten apropiadamente los conceptos matemáticos, falta de adecuadas estrategias de enseñanza , deserción escolar de los estudiantes porque tienen que trabajar, hábitos de estudio, la persistente exclusión de la niña y sobre todo a la niña indígena y en las escuelas públicas

carentes sobre todo, en áreas rurales de mobiliario y recursos didácticos adecuados mínimos.

C. Las fortalezas educativas en Guatemala

En el país la matemática es un problema serio sobre todo en el sector público. Únicamente, en el sector privado se puede decir que hay fortalezas. Los estudiantes del sector privado, llegan mejor preparados y en buen nivel. En la mayoría de los casos del sector público excusan las deficiencias con que tienen miedo a la matemática por lo cual, dejan o pierden en el area matemática y no van al fondo del problema o de los problemas. En el sector público hay menos recursos disponibles. Se recomienda conformar campañas de educación de perderles el miedo a las matemáticas.

El tema interesante para investigar sería sobre qué espacios vacíos cuentan los estudiantes en la instrucción de la materia (metodología) de la matemática y sobre todo investigar sobre la actitud del estudiante para la matemática y cuales son las razones de dichas actitudes. Algunos estudiantes piensan negativamente de sí mismos ante la matemática: "Soy malo" y "Yo con los números soy malo" y sólo es baja autoestima. Por ello, el docente debe hacerles ver a sus estudiantes que la materia de matemática es agradable, hasta placentera y que se pueden vencer los obstáculos y no hay que temerle a la matemática. Otro tema interesante a investigar es la actitud de miedo hacia la matemática. El docente debe hacerles ver a sus estudiantes, que la matemática es útil y que se relaciona en sus vidas y que pueden lograr un buen desempeño con la perseverancia.

Los estudiantes son por naturaleza curiosos (ya comparan cantidades mayores que y menores que) y en la mayoría de los casos con alta capacidad de lógica. Los docentes deben aprovechar estas experiencias ya adquiridas de sus estudiantes. Aunque el docente no domina mucho la materia, si sabe formar los conceptos básicos con estrategias didácticas convenientes, los motiva bien para luego continuar sus alumnos el aprendizaje, solos e independientes. La formación docente no es que sea mal estructurada, lo que sucede es que, son pocos los docentes satisfactoriamente bien formados. No hay suficientes docentes que dominen la

matemática ya que les han inculcado miedo y no quieren aprender a enseñar el tema. Cuando durante su formación escolar los estudiantes pierden el bagaje previo conceptual, los docentes pueden aprovechar a impartir el nuevo concepto con una readecuación de los conceptos.

La matemática lleva demasiado tiempo mal y aparenta que nada se puede recuperar. Una solución a la problemática sería conformar los programas de formación docente, como eran antes en la década de los setenta en el EFPEM (Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media) únicamente en plan diario. El EFPEM empezó a operar en 1971 con el Acuerdo Ministerial 13 febrero 1971 como Unidad Académica de la Universidad de San Carlos, los futuros docentes estudiaban todos los días y no solo en plan fin de semana por lo cual su formación en el área matemática era completa. Se incluían muchos cursos y estudiaban más horas, para lograr alcanzar una formación general e integral. El maestro de hace 50 años tenía mejor formación que el actual - a nivel universitario - aunque su titulación no fuera universitaria. El currículo de formación docente que se incluía era una completa formación científico filosófico, técnico profesional y pedagógico

Hace 50 años, se formaba al personal docente para el nivel medio de educación media en todo el país en Matemática, Física, Química y Biología en plan vespertino diario, pero a partir del 1986 se empezó el plan sabatino y la mayoría de los docentes prefirieron este plan sabatino, pero ya no es suficiente.

En el año 2000 se empezó a cubrir formación en Informática y Computación. Se empieza a cubrir menos de las 300 horas esperadas, aunque la metodología es investigación – acción, aún falta mejorar el programa que ya está dando problemas a nivel universitario.

Actualmente, la oferta es que tendrán su licenciatura del profesorado con dos años universitarios el plan puede ser sabatino y no es suficiente para dominar una materia científica como la Matemática, debería ser sólo plan diario obligatorio con opción de trabajo para que logren cubrir mejor todo el programa necesario.

Guatemala cuenta, a nivel de país, con apropiados programas que describen los contenidos y son parecidos en muchos países. El Currículo Nacional Base - CNB tiene una serie de temas comunes y fortalece la temática. Los libros ayudan mucho a apoyar el currículo. Se complica cuando no se tiene acceso a libros o textos, formas distintas de consultar a manera personal y no necesariamente dependiendo que alguien explique. El docente debe constantemente desarrollar la capacidad de los estudiantes.

En las instituciones educativas privadas, que sí egresan satisfactoriamente forman una buena base de álgebra y están más acostumbrados a resolver problemas. No es necesario incluir demasiadas prácticas o ejercicios repetitivos, mecánicos sino más bien, problemas tipo de juicio crítico. A su vez, buena parte depende de los estudiantes el logro académico.

Hay buenos docentes, que hacen lo que pueden con lo que tienen, sus métodos didácticos, son mínimos y enseñan de lo que han aprendido que por lo usual es mecanicista. Mucho de estas estrategias docentes es bueno. La parte de la mecanización en el cálculo aritmético es lo que otorga procesos y procedimientos. La mecanización otorga seguridad, rapidez de cálculo, libera, mejora la memoria de trabajo para poder resolver y analizar.

D. Aspectos que merecen mejor atención: oportunidades de mejorar

Hay que mantener la coherencia curricular, alineación curricular, y no subestimar la capacidad de los estudiantes, pero siempre acorde a su nivel de logro. Es decir, no hay que considerar que el alumno comprende a la primera o de una sola manera o con una única estrategia didáctica. El docente debe variar su forma didáctica y en momentos durante su práctica individual, en grupo y en clase. El docente debe variar sus estrategias didácticas para motivar a los estudiantes. Las condiciones laborales de los docentes también deben mejorar para que ellos estén motivados en su labor diaria y no tenga que buscar una segunda entrada de dinero, evitando el continuar con su formación y preparación docente o bien, en trabajar en su planificación diaria de la instrucción matemática. Lamentablemente, las condiciones laborales actuales de los docentes no son las pertinentes y ameritan ser

mejoradas para que se concentren en su papel docente y no en segundos trabajos para complementar sus salarios.

Un aspecto importante es, como apoyar en la formación docente en cómo enseñar la matemática. Los conceptos básicos deben ser claros y sencillos. El conocimiento conceptual del docente debe ser superior al del estudiante para que él pueda transmitir la enseñanza conceptual. El estudiante usualmente, luego de dominar el conocimiento procedimental pasa al conceptual, de esta forma no garantiza un mejorado nivel de logro matemático al actual.

Un aspecto que considerar es evaluar el grado de exigencia que se puede trabajar durante el aula y no subestimando al estudiante ya que, pueden lograr altas capacidades y competencias. Mucho de esto es consecuencia de que los docentes no preparan con las exigencias esperadas. Los aspectos a fortalecer son las capacitaciones a los docentes en la didáctica matemática y la forma de abordar los conceptos básicos. Por ejemplo, en el tema de la división el tema que podría empezarse a trabajar es el tema de las fracciones, antes de introducir el tema de los decimales.

Otro aspecto importante que considerar, es el manejo del área matemática como tal, consiste en que los profesores sepan el tema y la forma metodológica apropiada de impartir. No es que la tecnología para estos niveles básicos de matemática sea relevante, más es la forma metodológica de interacción entre el docente y el alumno lo que amerita fomentarse. Siempre hay que apoyar a los estudiantes para pasar de un pensamiento concreto a uno más abstracto y de mayores dificultades. Básicamente es, que el docente propicie las oportunidades en el aula con las debidas estrategias metodológicas para que sus alumnos aprendan. El pensamiento socrático de diálogo, pregunta y debate se recomienda. Es importante que los estudiantes se enfoquen en aprender de sus errores. Merece atención la forma como el docente evalúa cuál es el nivel de logro de los estudiantes, para detectar y determinar el nivel de logro. La tecnología propicia para entrar y aprender los temas matemáticos solo adicionar la ejercitación diaria con tareas cortas y discusión a los temas conceptuales y procedimentales en el aula.

Los docentes están enfocados a que solamente el alumno evalúe operaciones y algoritmos, Las pruebas de matemáticas no evalúan otra cosa que no sea cálculos.

Se recomienda, generar evaluaciones para medir y evaluar demás habilidades necesarias como el pensamiento lógico-crítico. Las instituciones educativas están enfocadas a evaluar algoritmos, operaciones, pero es mejor el fomentar el desarrollo de pensamiento crítico, aptitudes social emotivas o habilidades blandas⁸⁶ (*Social Emotional Learning – SEL*) diálogo matemático, evaluación oral, instrumentos adecuados más allá de papel y lápiz. Que no sea tan mecánico o respuesta única. No se presenta actualmente en la mayoría de las aulas, utilizar los instrumentos adecuados para aumentar las aptitudes y destrezas que van más allá del papel y lápiz, no sólo enfocarse en la mecanización de algoritmos. Se aconseja, que no sea evaluación mecánica o de respuesta única. El álgebra debe prestarse más atención en las instituciones educativas. Muchas instituciones educativas enseñan el cálculo a pesar que la base de álgebra es muy deficiente. Traen ideas someras de cálculo, pero es mejor que se enfoquen más atención al álgebra.

El docente debería ser capaz de explicar de variadas formas como se llega a la solución y no solo de una forma mecanizada. Para explicar a profundidad la matemática debe contar con un docente preparado, motivado y con compromiso.

El Currículo Nacional Base – CNB - es muy amplio y se debe integrar a criterio de los docentes lo que se necesita obligatorio impartir. El CNB incluye todas las competencias y contenidos, pero no se identifica lo que es prioritario. Muchas veces los docentes se guían y planifican conforme un texto y lo indicado es que el cuaderno guía para el maestro sea previamente preparado por el Ministerio de Educación de Guatemala – MINEDUC - o bien el docente esté suficientemente preparado para identificar lo prioritario a instruir a sus alumnos, identificando si encuentra errores en los textos matemáticos (lo cual se ha presentado en ciertos textos).

En la mayoría de las veces, el ejemplo que tiene el libro ese es lo que el docente explica en el pizarrón, lo más probable es que hasta replica los errores. Al dar o

⁸⁶ Soft skills

explicar, el ejemplo del libro y lo que hace entonces es quitar la posibilidad al estudiante de ir a consultar a él y la oportunidad previa al estudiante de leer sobre el tema de matemática. Lo que los estudiantes perciben entonces, es que las matemáticas no se debe buscar literatura porque la matemática no es para leer sino, sólo para mecánicamente hacer.

Se desea que el estudiante estudie solo y si él no puede es porque no se le apoyó en el tema de los hábitos de estudios necesarios para que el estudiante sea el que indague más sus dudas en la literatura antes de ir con un maestro a resolverlo. Lo adecuado, es que el estudiante pierda el miedo y pruebe primero sólo resolver o por lo menos tratar de resolverlo. En la mayoría de los casos el docente está enseñando únicamente con la guía base del texto, pero no busca otras formas o contextualizar a la realidad de sus estudiantes. El docente no debería buscar solo guiarse con el libro de texto como base de instrucción y no realmente los temas que sí deberá dar. El docente en esos casos, es porque no domina los temas y se los salta ya que no sabe cómo explicarlos y no termina los temas que de verdad debería impartir.

En muchos casos, se le da a un estudiante un libro de matemática para que estudie solo y no puede porque pierde el interés de investigar el tema antes de preguntar a su maestro. El maestro desmotiva ya que, solo repite el ejercicio del libro. El estudiante no investiga sus dudas para resolverlas, en la mayoría de las veces solo es un ente receptor de lo que el docente explica y lo que el docente encuentra en el texto. Por lo que, al final para el estudiante es suficiente solo el memorizar.

Los estudiantes, ven a la matemática como un gran proceso algorítmico mecanicista que debe memorizar y no comprender para resolver variados problemas de muchas formas. No les interesa ya que, ven la matemática como algo aburrido, tedioso y molesto: enfrentando año con año con desgana y desinterés.

Ese cúmulo de desinterés desvaloriza la importancia de estudiarla plenamente y de conectarla a su realidad para adecuarlo y adaptarlo como parte suya y como integral tema de formación para la vida. Es aquí, donde parten los miedos, las

frustraciones, la desgana, el “yo no puedo”, “nunca fui para la mate”, “no me gusta”, entre otros autocalificativos.

No se sugiere que se tenga que pensar en un libro base, pero hay que incluirlo en el caso en que el grupo de estudiantes se encuentre con un docente que no sabe nada. Los estudiantes deben aprender de sus errores y recibir la retroalimentación adecuada. Se debe considerar aspectos como las mejoras metodológicas en el aula, para mejorar el ambiente escolar o motivación en el estudio de la matemática.

E. La metodología – estrategia didáctica matemática recomendable

La metodología – estrategia didáctica matemática es un proceso de lo concreto, semi concreto a abstracto. En las aulas hay muchas carencias en las matemáticas especialmente en la matemática básica como la aritmética. Desarrollar este pensamiento crítico y abstracto permite aumentar el nivel de mejora en las habilidades, aptitudes y destrezas Matemáticas. Institucionalmente la prueba “*Pre Assessment Activity*” - PAA se utiliza para evaluar a niveles de diagnóstico y se han desarrollado como apoyo a determinar si es necesario un programa de nivelación. Al necesitarlo, se recomienda que se trabaje parte del curso de matemática básica y por medio de guías. Dos aspectos son importantes fomentar para el desarrollo de los saberes y otro para la intervención para matemática que son los contenidos de conceptos matemáticos, posición y series numéricas. Se aconseja a los docentes desarrollen más destrezas básicas para facilitar el aprendizaje de contenidos.

En la parte metodológica-didáctica, en la actualidad se presenta mayor flexibilidad y los estudiantes cuentan con mas recursos, se utiliza mucho la plataforma (internet) y videos. Los docentes pueden corregir sus procedimientos con los libros de textos adecuados. Los textos traen un código consigo, para el estudiante, para que puedan acceder muchos recursos adicionales. Algunos docentes corrigen en línea y suben los estudiantes a la nube o a plataformas educativas, sus tareas. Las metodologías o estrategias didácticas son más tecnológicas con el apoyo de las plataformas educativas, videos instruccionales, y los libros de texto que traen un código donde el estudiante pueda acceder a muchos más recursos. Los estudiantes pueden realizar en línea (en internet), desde su casa

sus tareas o pruebas y actualmente se retroalimentan ya que se disponen de muchos recursos instruccionales virtuales como “*Khan Academy*”, entre otros. A su vez aún es conveniente, combinaciones de convencionales instrucciones magistrales en el aula.

En nuestra realidad, Guatemala tiene muchas falencias como para poder entrar de lleno a la tendencia tecnológica en forma integral. Primero, estamos en el proceso de aprender bien la matemática de cómo enseñarla bien. Segundo a proveer de interfaz internet a muchas instituciones educativas sobre todo a niveles públicos y rurales. Además, en forma virtual esta la auto enseñanza con el apoyo de “*Massive Open Line Course – MOOCS*”. Estos sistemas no son tan autónomos, los estudiantes deben contar con la autorregulación y disciplina necesaria.

Aún se cuenta con instituciones educativas en donde la clase es magistral y sigue siendo una repetición de ejercicios del texto, Las tareas son extensas y los exámenes únicamente por escrito que evalúan un proceso mecanicista y tipo algorítmico. Por lo que ya se debe incluir problemas con juegos manipulativos, proyectos con integración de áreas como es el caso de “*Science, Technology, Engineering and Mathematics – STEM*”, los cuales fomentan el “*Project Based Learning*” o Trabajo Basado en Proyectos, con un trabajo colaborativo.

La usual metodología actual es de continuar con la clase magistral. El docente, explica el material señalado en la pizarra y explicando y ejercita mucho durante la clase. En mejor de los casos es el docente quien ejercita primero y explica a detalle el tema matemático. Lo ideal es que el profesor ejercite mucho durante la clase. Las tareas son importantes pero el profesor logra mucho más haciendo como laboratorios de ejercicios matemáticos en el aula.

Es ideal, si se tiene una unidad de dos periodos de una hora y medias clases magistrales donde participen los estudiantes con lluvias de ideas. Clases magistrales y si participan los alumnos y están con el profesor un día sería de ejercitación y parten la clase en dos. Se tendría un auxiliar con ejercicios de la semana lo que se vio en clase. Se puede dividir el aula, y se repasan los ejercicios de la semana. En

una semana se puede hacer un repaso general en los exámenes y un simulacro de exámenes.

Los maestros replican lo que encuentran en los libros de texto durante sus clases magistrales. Esta metodología o estrategia didáctica no es lo malo, sino es el demasiado uso que se le dá en las aulas. Puedo usar el libro, pero debo equiparar con metodologías. No siempre se puede ser constructivista porque hay que cubrir todos los temas y no da tiempo. No da tiempo a que ellos descubran todos los temas a cubrir lo que se espera cubrir. El docente, muchas veces no puede avanzar rápido ya que algunos estudiantes especialmente, los niños pequeños, pueden estar obstaculizados en un concepto. El sistema educativo no permite pasar de nota a ese niño con deficiencias educativas en la materia. Al maestro le toca jugar con las metodologías o estrategias didácticas.

El estudiante debe exponerse a descubrir, equiparar a experimentar y se necesita la memorización y práctica de las tablas de multiplicar, por lo que aún se deben aprender. Se presentan ejes curriculares básicos que se deben impartir: ¿juego de números, familias de números “si se divide da esto”, “multiplica esto y si sumas?”, como un tema que contiene propiedades, teoremas o axiomas matemáticos que pueden ser refutados para crear nuevas conjeturas en los estudiantes. Los ejes curriculares matemáticos deben incluir a las propiedades asociativas, distributiva conmutativas y lamentablemente se enseñan como temas puntuales en uno o tres veces en el año y no como lo que son propiedades recurrentes en todo tema o concepto operativo matemático y deben recordarse utilizar durante todo el ciclo escolar. Lo importante es darle un seguimiento “encadenado” a los temas o conceptos que se traten en la matemática, lo que facilita el sentido y la necesidad de su comprensión y uso.

Considerando que en muchas aulas de matemáticas las propiedades de los números solo se imparten en una, dos o tres clases, muchos docentes expertos aconsejan una combinación de metodológica didáctica participativa y magistral. Si el estudiante necesita apoyo, se sugiere un mayor y cercano acompañamiento.

De tal forma que a continuación, algunas consideraciones puntuales se desglosan de las opiniones de los profesionales expertos en la matemática:

- No es solamente que estudiante sea reflexivo, autocrítico y que se incline a autorregulación ya que los estudiantes no son el problema sino la forma de cómo se está impartiendo las matemáticas.
- Estrategia o metodología didáctica debe ir de lo concreto a abstracto. El docente debería aclarar las dudas del tema, de ser posible, por medio de un colega o guía docente.
- En las aulas de matemática debe imperar un trabajo en equipo, diálogo matemático y muchos manipulativos sobre todo en los primeros años escolares.
- La docencia en Guatemala debe ser contextualizada primero con una filosofía etnomatemática para luego ir a lo globalizado y universal.
- El trabajo en las aulas de matemáticas debe apoyarse en formar estudiantes proclives al trabajo en equipo y con la confianza necesaria para empezar un diálogo matemático, en donde el juego de conjeturas y refutaciones se logren ampliamente debatir, en base a demostraciones. Sobre todo, al correcto uso y fluidez de las propiedades matemáticas. A su vez, considerando que se logra con ello, a medida que los estudiantes adquieren las aptitudes y destrezas necesarias.
- Metodología o estrategia didáctica debe en realidad ser más del tipo constructivista y más participativa. Es el estudiante que debe tener las oportunidades de descubrir y construir su propio conocimiento con la comunidad educativa a la cual pertenece.
- La colaboración de los padres de familia en casa es vital, desde preguntar al niño como le fue en su día, hasta motivar y construir más autoestima de que es posible que mejore y todo se soluciona con determinación. Aquí en Guatemala, sería ya un cambio más del tipo cultural, acostumbrar el ser y el valer entre las comunidades especialmente entre las niñas es muy necesario para el desarrollo de las metas educativas a nivel de país.

- La estrategia didáctica del docente debe continuar en la constante ejercitación de los ejercicios de matemática especialmente durante el tiempo en las aulas. Llegar a todas las circunstancias posibles que se presenten durante el tiempo de hacer ejercicios que se estén realizando.
- Actividades lúdicas como “corramos y contemos”, “midamos y contemos”, “midamos tiempos”, “midamos y comparemos pesos”, “cuánto comemos y bebemos en casa en libras, en unidades u onzas, entre otras capacidades de medición” y “cuánto caminas”, “cuánta milpa siembra mi padre”, de tal forma, que unan la matemática con su día a día.
- Se puede encontrar en la naturaleza muchas estrategias didácticas en el conocimiento de la etapa en que se encuentran. Las estrategias didácticas dependen enormemente del reconocimiento por los docentes de la etapa del aprendizaje en que el estudiante se encuentra si tiene o no el nivel o capacidad de abstracción para poder adquirir el conocimiento en el nivel que se quiere llegar en el tema. No hay en las estrategias didácticas algo definitivo o exclusivo y no hay una “receta mágica” aquí depende mucho de la creatividad del docente.
- Encontrar la forma de motivar a los estudiantes cuando se presentan los errores. El mensaje “vivimos en un ensayo y error en todo y especialmente durante los procesos o procedimientos matemáticos” es muy importante. Los estudiantes necesitan de una constante orientación. Lo más importante es cómo el maestro va a dar esa información u orientación quitándole el castigo punitivo al enfrentar al estudiante al error y de esta forma no inculcar el miedo.
- Desde la casa se puede orientar a los padres a no castigar en exceso cuando sus hijos se equivocan, lo correcto es comentarles que errar es de humanos y que a pesar de lo equivocado que se estuvo siempre todo se puede corregir. Lo mejor es promover un cambio cultural entre las comunidades ya que suelen ser hogares muy poco permisivos, poco flexibles, en donde pueden presentarse figuras autoritarias y esto crea un ambiente en donde el error o equivocarse se castiga y en muchos casos lamentablemente esto conlleva daños emocionales y hasta físicos. Es un miedo en la mentalidad

generalizado a equivocarse que hay que empezar campañas entre las familias de cómo educar y guiar para la mejora sin recurrir a castigos exagerados y que afectan la salud mental, sobre todo en la autoestima, de los niños y jóvenes.

- Trabajar las aptitudes sociales y emocionales entre los estudiantes ayuda a reducir el miedo a la matemática, ya que reduce la ansiedad a enfrentarse a la equivocación y ayuda y promueve una mejora al pensamiento reflexivo y auto regulatorio entre los estudiantes. Esas aptitudes sociales y emocionales crean estudiantes más seguros y más flexibles a encontrar soluciones creativas a diversas situaciones que se les presenten en el aula de las matemáticas, de tal forma que los vuelve más participativos, más colaboradores menos violentos y agresivos y más comprometidos en su formación y desempeño.
- Deben crearse oportunidades para que los estudiantes participen, ideal que se acostumbren a opinar desde sus hogares. En muchos hogares, no se puede opinar y se les pide a los hijos e hijas que no hablen. Esta cultura del silencio debe cambiar para una más participativa positiva y a ser más proactivos perdiéndole el miedo a opinar y a ser escuchados.
- Utilizar más manipulativos, dinámicas fraccionarias, flechas de colores y sobre todo con los estudiantes más pequeños los números negativos. No utilizar calculadoras antes de los 13 o 14 años de acuerdo con Benítez (2016).
- Se aconseja no permitir el uso de la calculadora en primaria ni en 4º grado primaria. Enseñanza de las operaciones fraccionarias sin el uso de calculadoras.
- Explicar el tema a tratar primero, de tal forma que todos lo entiendan y aprendan. Si no se alcanza el logro deseado se puede explicar de nuevo. Se debe fomentar el auto análisis de los estudiantes analizando sus propios errores. Una de las mejores prácticas docentes es motivar a los estudiantes a que todos pueden alcanzar los logros curriculares y que todos son capaces de aprender.

- Los docentes actualmente permiten perder mucho tiempo en el aula con distractores tecnológicos (computadores personales, *tablets*, teléfonos, entre otros) innecesarios.
- Los estudiantes deben encontrar la respuesta y la forma de resolverlo. La práctica pedagógica de muchos docentes es explicar asumiendo que sus estudiantes saben, y no es lo correcto. El docente si es necesario tocar un tema del ciclo escolar anterior, debe hacerlo y se debe explicarlo otra vez.
- El docente debe tratar motivando a sus estudiantes cuando los enfrenta a un nuevo tema o lección matemática. El docente motiva a los estudiantes y les convence de que pueden hacerlo bien. La autorregulación es importante fomentar y que no es culpa los estudiantes sino muchas veces de la manera de cómo se les instruye o como se preparan las pruebas o evaluaciones. La manera incorrecta que se hacen las pruebas y miden normas y no criterios. La manera incorrecta de redactar los ítems y el uso desmedido a las pruebas de respuestas múltiples.
- La educación escolar debe ser una combinación constructivismo y más participativa.
- Todos los docentes que dan la matemática básica no todos cuentan con guías hechas que apoyen a perfeccionar el autoaprendizaje. Las guías matemáticas deben incluir una parte teórica, ejemplo y ejercicios. Los estudiantes deben entender nociones básicas y transmitirles el valor que las desarrollen ayuda en sobremanera que desarrollen sus propias habilidades y aptitudes matemáticas.
- Fomentar una educación estilo Finlandia, Singapur o método Montessori, en donde el estudiante haga las cosas y tareas matemáticas le resulte motivante y divertido. El Método Singapur utiliza la estrategia de “álgebratizar” la primaria antes de llegar a grados posteriores.
- Un aspecto que considerar es hacer explicaciones más puntuales, cortas y claras a través de lecturas de conceptos previos y de instrucciones magistrales pertinentes. Durante las clases de Matemáticas se recomienda

incluir muchos ejercicios o tareas matemáticos, los cuales pueden hacerse primero en forma individual y luego compartidos en forma grupales

- Las pruebas que el docente elabore o prepare deben ser cortas (se recomienda para sexto primaria pruebas no mayores de 40 ítems confiables y válidos) que puedan determinar cuánto han avanzado los estudiantes. Las pruebas o actividades deben medir y evaluar a los estudiantes como están en su avance con relación a su aprendizaje de tal manera, que se califica prontamente para retroalimentar al estudiante y al docente con respecto a si los logros son satisfactorios o no.
- El docente debe prepararse para una instrucción en donde pregunte mucho a sus estudiantes sobre los temas impartidos y ejercitados para reconocer si sus estudiantes lograron el dominio del tema. Las aplicaciones deben ser utilizados en casos de la vida diaria y preferiblemente, contextualizado a su medio cultural.
- Dependiendo de cada grupo de estudiantes, pero lo usual es una práctica pedagógica participativa e individual en donde los estudiantes desarrollen sus propios procesos. Se aconseja que los estudiantes compartan sus soluciones en el aula para motivar el hecho de que todos pueden lograr obtener las soluciones, aunque se logre de formas diversas. Lamentablemente, algunos docentes inician con una actividad en donde se realizan los ejercicios en forma grupal, sin antes impartir los conceptos y ello en detrimento del alcance del aprendizaje previo conceptual.
- El error radica en que, si no tienen el conocimiento conceptual previo no trabajarán bien en el grupo. Lo siempre aconsejable es primero explicar los conceptos en forma individual (con apoyo en una instrucción diferenciada o magistral) y verificando que lo comprendieron todos los estudiantes para luego ejercitarlo en grupos.
- Una práctica conveniente para el docente es empezar un tema con un problema en la pizarra o de ser posible asistirse de un proyector y, luego hacer reflexionar a los estudiantes para luego impartir el tema en el aula en forma magistral. Se aconseja considerar todo lo discutido previo entre los

estudiantes durante el día. Los problemas deben ser bien conformados, sobre todo en su planteamiento. Se podría solucionar por partes el problema, y llevarse varios días en resolverlo. La práctica procedural es posterior, con la correcta instrucción de algoritmos, los cuales pueden ser de varios tipos, y dar lugar a que los estudiantes diseñen su propio algoritmo. Lo importante es que los docentes diseñen actividades educativas con propuestas de problemas matemáticos para hacer pensar a los estudiantes y que se puedan resolver en forma participativa y grupal.

- Si el estudiante realiza más ejercicios en el aula es debido a que el docente le motiva más a realizarlo. Fomentar un hábito de estudio autorregulado sin sobre cargar de sobreactividades a los estudiantes e innecesariamente.

F. Las nuevas tendencias a las matemáticas que se adaptarán a Guatemala

En los últimos años son nuevas las tendencias que pueden aportar una mejora en la calidad educativa. En el aprendizaje cooperativo, se debe considerar siempre que el docente debe explicar los conceptos y cómo aplicarlos primero, a sus estudiantes. El aprendizaje cooperativo apoya a que los estudiantes realicen explicaciones orales, entre ellos, y así por lo general, se comprendan mejor los temas. Si el estudiante explica los temas a los demás compañeros, se adecúan mejor los conocimientos, pero siempre considerando que no se omita o sustituya al rol del docente en su tarea de explicar.

El uso de la tecnología a veces es utilizada en forma exagerada. La tecnología como tal, no es la panacea, debe ser o es, una herramienta o recurso didáctico, en manos del docente. Lo ideal es que las instituciones educativas les permitan a los docentes de diseñar y hasta elaborar o construir modelos didácticos para ser aplicados en las aulas. Especialmente, usados en apoyar como ponderar diversos conocimientos surgidos en las actividades, tareas, y pruebas de los estudiantes. A su vez, ya se cuenta en forma virtual el utilizar modelos o simuladores (XCIRCUIT⁸⁷,

⁸⁷ <http://opencircuitdesign.com/xcircuit/>

CIRCUITLAB⁸⁸, CODE⁸⁹, Mindstorms_LEGO⁹⁰) no solamente a nivel universitario o técnico sino también a niveles escolares.

La computadora puede evidentemente ayudar para la relación conceptual en los temas. La matemática es prácticamente un lenguaje que ayuda a explicar y describir cualquier fenómeno desde la Física, Química, enfoque estadístico analítico de datos a antropológico - social como tal, depende lo que el docente logre hacer para motivar y hacer esto un proyecto basado en la realidad.

Los estudiantes, pueden lograr plasmar proyectos multidisciplinarios y de gran impacto ayudándose con la tecnología, videos e internet. Muchos docentes ya preparan videos y los suben en las plataformas institucionales o públicas para apoyar a sus estudiantes cuando se ausentan o como una actividad remedial. Es más, sería conveniente hacer la regla de que el docente apoye en hacer y subir videos de unos 15 minutos de ser necesario reforzar un tema en casa y el estudiante puede repasar al verlo, cuantas veces le sea necesario. La tecnología se puede aprovechar en el aula, pero considerar, que no se puede depender en todo de este recurso sino en parte, lo demás depende mucho del docente y de la determinación de cada uno de los estudiantes. La tecnología se puede utilizar como un recurso para motivar a los estudiantes.

Es conveniente, que durante las vacaciones los estudiantes trabajen capacitaciones en el área de cómputo y tecnología en forma anual como mínimo, ya que los cambios son constantes y hay que actualizar convenientemente a los docentes.

Aplicaciones tecnológicas en el aula como el de “*gamification*” o tecnología en base a juegos, son convenientes con la adecuada guía docente. La tecnología, no funciona por sí sola, se ha fomentado en algunas instituciones educativas privadas el uso desmedido de las “*tablets*” para utilizarse en toda la primaria, no es del todo aconsejable en edades de primeros años de primaria y preescolares. En este tema

⁸⁸ Disponible en <https://www.circuitlab.com/>

⁸⁹ Disponible en <https://www.codecademy.com/>

⁹⁰ Disponible en <https://www.lego.com/en-us/mindstorms>

de la tecnología es mejor tener un buen acompañamiento o *coaching* psicológico pedagógico al docente conveniente, antes de utilizar los recursos tecnológicos indiscriminadamente (Benitez, A.M. y A. G Rosales, 2016⁹¹).

La capacidad del maestro es muy importante para poder maniobrar adecuadamente el recurso tecnológico para mejorar el rendimiento. Se recomienda que no se utilice, la tecnología, para perder tiempo, solo entretener o para mantener el aula en silencio. El docente se puede sentir muy cómodo de dejar a los estudiantes solos con sus *tablets* o computadores y eso tampoco es innovar. No se debe buscar la tecnología para sustituir al docente sino es un recurso de acompañamiento y de mejora que apoya a la mejora educativa.

La tecnología apoya al docente en consultar y en guiar los currículos como el de Currículo Nacional Base en donde el docente mismo puede consultar en línea para planificar la semana en reconsiderar los temas como la forma correcta de explicar los números enteros, la suma, la resta, la multiplicación y la división. Le apoya en buscar las mejores ideas de planificación para impartir los temas o conceptos y las actividades o pruebas.

Sin embargo, no hay que olvidar que aún el simple recurso de una tiza y un pizarrón de yeso o bien de marcador y papel rotulador, no dejan de ser un buen recurso con el apoyo de la creatividad docente.

G. El buen perfil de los docentes en matemática

El docente debe estar preparado en todo tema matemático en el grado que lo toca impartir, en el grado inferior al que le toca impartir y en el grado superior. En algunas instituciones privadas, pero en la mayoría de instituciones educativas públicas se ubica a los docentes de mucha menor experiencia o aún principiantes en los primeros grados de primaria. Esto es un error. La primera experiencia no debe ponerse en los niveles más básicos sin el debido acompañamiento ya que es

⁹¹ Benitez, Andrea Maria y A. G Rosales (2016) *El impacto del uso excesivo de tabletas y teléfonos inteligentes en el desarrollo emocional y vincular de los niños de 2 a 10 años y los efectos en las relaciones interpersonales*. Universidad Dr. Jose Matias Delgado, San Salvador

justamente en estos grados en donde el concepto básico matemático se imparte y si se da equivocado, sin las adecuadas dinámicas o actividades y si se empieza a impartir imponiendo y creando un ambiente negativo o de miedo, puede ocasionar el docente mucho daño muy difícil de ser reparado posteriormente.

En la mayoría de las instituciones educativas en el nivel primario se ubican docentes sin formación docente adecuada, sin acompañamientos constante o bien con conceptos matemáticos erróneos. Debido a la falta de experiencia, estos docentes, puede enseñar a su grupo de estudiantes estos mismos conceptos erróneos. Lo preocupante es que, en estas edades tempranas, los estudiantes, pueden adecuar fácilmente preconceptos erróneos, de tal forma que, en el futuro puedan ser difíciles de rectificar.

En la primaria debería contratarse docentes especializados en la matemática que le tocaría impartir, pero ideal es el dominio de la matemática del grado inferior y del superior al grado que imparte. Cuando el docente no domina un tema o materia tiene un natural miedo de tocar los temas que no los domina y este sentimiento lo transmite a sus estudiantes y puede ser contraproducente. El docente que no domina un tema en matemáticas es muy probable que no lo imparta y lo omiten y se dedican a enseñar lo que más saben, dominan o creen que dominan. Es muy importante que las instituciones educativas apoyen en mejorar la preparación matemática de sus docentes.

La característica importante del perfil docente es que el docente debe ser preparado en matemática en nivel primario, sea profesor de matemática y actualizarse para verificar si se tienen errores, para evitar enseñar a los estudiantes conceptos equivocados.

Entre las características adicionales del perfil docente, es que le tiene que gustar la matemática, no sea un “generalista” y que no sea una labor obligada o de la cual no tenga el interés. Le tiene que gustar la matemática ya que mucho tiempo se necesita para planificar las actividades y cómo impartir los conceptos básicos a sus estudiantes como además debe contar con el tiempo adicional para atender dudas. Es ideal que al principio el estudiante busque mucho al docente para superar

sus dudas o errores, pero lo que el docente debe buscar es que el estudiante se independice y se empodere de su aprendizaje.

En resumen, se pueden listar las siguientes características que debe llenar un buen docente en matemática:

- Vocación a la docencia
- Dominar la matemática del grado que imparte y contar con un buen acompañamiento sea tecnológico o en la misma comunidad docente
- Especializarse y actualizarse en didáctica de la matemática, constantemente
- Tener buenas relaciones personales con los niños (no impartir clases humillando a los estudiantes con rezago)
- Buenas destrezas sociales y buenas relaciones personales con alta empatía
- Ser un docente proactivo, comprometido, positivo y divertido en los casos necesarios para evitar que el “miedo a la matemática” continúe en el ambiente escolar
- Instrucción enfoque constructivista en la matemática en donde el estudiante construya por competencias su aprendizaje y le apoye en descubrir el concepto para apoyar en autonomía o hábitos de estudio
- Capaz de observar constantemente cómo aprenden sus estudiantes y aplicar ese método o esa información o retroalimentación a su método de enseñanza para continuar o mejorar de ser necesario

H. Mayores dificultades de la matemática en toda la primaria observadas

La dificultad en primaria ha sido básicamente el entender la aritmética y los manipulativos ayudan, pero hay que relacionarlos con la vida cotidiana. Cuando los estudiantes llegan al diversificado o al bachillerato no relacionan con la vida cotidiana y eso les dificulta el continuar sus estudios porque los desmotiva a seguir aprendiendo. Se sienten desvalorizados y no ven la forma de superar sus miedos y dificultades en cuanto a la matemática se refiere.

A las instituciones educativas en general, les falta relacionarlo más a la vida cotidiana y a la cultura específica del lugar en el caso de zonas rurales. Por lo que, cuando no se sienten identificados con la materia de matemática la miran como que “no es para ellos” o “no es con ellos”. Si no se relaciona a la matemática con la vida real surge una desconexión de los estudiantes y resulta el desinterés.

Muchos problemas al final o dificultades son a raíz de una mala o negativa aplicación didáctica matemática en el aula. Temas como el error para los estudiantes, crea sentimientos de alta frustración y empeora si el docente se dedica a entregarles las pruebas marcando en “rojo” y “humillando” al estudiante con bajo desempeño. Lo que es correcto es mejor corregir antes de evaluar y tratar de coordinar programas de mejora o remediales como último recurso.

El tema de las tareas en matemáticas en la primaria se ha utilizado en forma muy punitiva y se dejan en la mayoría de las veces largas y tediosas tareas lo cual es totalmente contraproducente si el estudiante hace muchas veces un ejercicio sin antes reconocer si lo está haciendo correctamente. Si lo repite muchas veces hará el mismo error muchas veces porque se torna un error sistemático, que es difícil luego de rectificar. Las tareas para la casa se sugieren empezarlas en el aula, continuar en la casa y luego discutir las en el aula en el primer momento disponible al siguiente día. Si se deja sin corregir se pierde una oportunidad de mejora.

Los temas como las fracciones, divisiones, números positivos, números negativos, el cero entre otros temas deben apoyarse mucho en una acertada planificación de cómo impartir los mismos. El docente puede utilizar tapas o fichas de colores diversos, manipulativos, actividades lúdicas, experiencias reales, apoyo en casa y en la tecnología (aunque tratar de que no sea la única forma de apoyo docente). Los recursos didácticos pueden ser de materiales reciclables previamente higienizados y seguros de reutilizar.

Según Benítez (2016), la calculadora se aconseja utilizarla a partir de los 13 a 14 años y no antes. Los estudiantes de primaria pueden utilizar la tecnología, pero es especialmente importante el fomento del pensamiento concreto antes que el abstracto.

Uno de los temas muy recurrentes en dificultad son las operaciones con fracciones, cálculo de áreas y perímetros, encontrar patrones, la división, las diversas operaciones aritméticas, y el miedo a fallar o errar en la matemática. Los docentes deben brindar la oportunidad de que el estudiante descubra los conocimientos en forma divertida y adecuada en donde encuentre una relación a su vida diaria y una relación a todo lo que le rodea en la naturaleza. La emoción de descubrir debe retornar a las aulas. El estudiante debe contar con una capacidad de motivación de descubrir nuevos conceptos matemáticos y aplicarlos apropiadamente.

La matemática, tiene la buena fortuna y la dificultad de ser muy inclinado a seguir propiedades y sus procedimientos son de alta organización lógica que permite repetirla y luego al fin captarla. Como es en el caso de las ciencias sociales, que difiere de las ciencias matemáticas, se estudia en base a casos en donde los resultados pueden ser hasta menos exactos, únicos y más difíciles de ser replicables.

Los estudiantes lo que necesitan es desarrollar la confianza en su aprendizaje y en lo que están operando o realizando. Por ejemplo, si un estudiante encuentra un cero en el denominador en una fracción, que sepan identificar que es una fracción definida e indefinida.

Se ha ocupado mucho el docente, en las clases de matemáticas, en un principio no enseñar los conceptos y sólo impartir los procedimientos de algoritmos y deja muy débil a los estudiantes en el tema de contenidos o concepciones numéricas y en el sentido numérico. Se debe dejar de impartir los procedimientos como una “receta” más bien es una forma entre varias formas, de operar los ejercicios o situaciones matemáticas. El docente debe enfocarse o buscar el por qué los estudiantes fallan, deben corregir el error desde el mismo comienzo para que los estudiantes, no repitan el error. Se aconseja utilizar manipulativos en los primeros años y con recursos al alcance, para apoyar en las dificultades u obstáculos conceptuales de los estudiantes.

I. Espacios vacíos que se encuentran, en cuanto a investigar en aprendizaje u enseñanza matemática en Guatemala

Los espacios vacíos que deberían empezarse a investigar y estudiar en Guatemala son:

- ¿Cómo ayudar al estudiante para que trabaje fuera del aula? Trabajan y están formando como profesores, no hay suficiente tiempo para ejercicios y experiencias. Plataformas como “*Blackboard*” para ejercicios adicionales valdría la pena si son efectivas estas estrategias. No hay un único programa efectivo como tal.
- Evaluación de los programas educativos tanto magistral, virtual, y del tipo “*coaching*” o de acompañamiento educativo. Apoyo educativo como “*Khan Academy*” dá una oportunidad de mejora a la calidad educativa. Estudiar la mejora educativa con los aplicativos o programas educativos virtuales tanto en docentes como para estudiantes.
- ¿Las evaluaciones educativas y docentes corresponden a lo que se mide? Impacto directo en el resultado de las evaluaciones. Estudiar el tronco común y relacional entre los cursos magisteriales, estrategias, evaluación investigación aplicada, teorías educativas, redactar ítems en evaluación. Profundizar en el área modela para enseñar ciertos temas. Solo estudiar algoritmos ya no se fomenta, ahora es la etno matemática de diferentes culturas y como etno matemática muestra que hay que contextualizar las metodologías a, diferentes sociedades las matemáticas se deben adoptar a sus culturas.
- Estudios sobre la enseñanza con nueva tecnología y su mejor didáctica.
- Estudios sobre el análisis del error como corregir los errores, cómo corregir los errores. Errores conceptuales. Análisis del error que apoye en el desarrollo conceptual y que pueda apoyar la mejora de habilidades y aptitudes sobre todo en la matemática.
- Estudio de las divisiones largas y sus algoritmos.

- ¿Cómo aprenden los estudiantes en Guatemala? Cuáles son los estímulos externos o internos que puedan intervenir a manera directa a la mejora educativa en la matemática en Guatemala.
- Estudios sobre los temas innovadores como la Neurociencia o la Neuroeducación, habilidades o aptitudes blandas⁹² o del tipo social emotivo, son algunos ejemplos que hay que estudiar para explicar cómo el guatemalteco aprende. Una vez sabido esto el docente, debe empezar a diseñar formas de dar o impartir clases. Es un medio de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Los maestros deben mejorar las dinámicas, estrategias y técnicas de impartir clases. Los docentes deben ser más eficaces y eficientes.
- Estudios sobre la Lecto escritura, las dificultades en la expresión oral y de qué manera se modifican para la mejora educativa.
- Estudio sobre los mitos especialmente en la materia las matemáticas que son difíciles o que la Física es difícil su transmisión. Apoyos en didáctica que quite esos mitos negativos sobre el estudio de las ciencias. Muchas veces los mitos se transmiten de generación en generación y sería interesante estudiar cómo minimizar el efecto negativo de los mismos en las comunidades.
- Estudios sobre como reconciliar al estudiante con la Matemática. Buscar estudios que apoyen a fomentar en ser más didácticas que vuelvan más atractiva la matemática. Reconciliarse con la matemática y quitar el mito. Hacer atractiva la matemática y que no es difícil y que es un mito.
- ¿Cómo resuelve los problemas matemáticos, el maestro? Cómo lo sabe y piensa la matemática y cómo lo resuelve. Estudiar la base del pensamiento como el docente va a enseñar las matemáticas. La didáctica se ha preocupado sólo por los estudiantes evaluando la mejor metodología o estrategia, mejores prácticas y conformar mejores exámenes o pruebas. Faltan estudios sobre la forma como el docente piensa la matemática siendo la base de cómo lo va a enseñar en el futuro. Sería interesante, conocer como

⁹² Soft skills

un maestro resuelve un problema y compararlo como lo resuelven sus estudiantes. Si es una réplica de la forma de pensar la de los estudiantes.

- Estudios sobre la aritmética y la geometría Actualmente estos temas matemáticos aparentan estar abandonados totalmente, al revisar los resultados insatisfactorios de las evaluaciones educativas de la matemática tanto para los estudiantes como para los docentes.
- Estudios sobre los textos matemáticos con errores y generar textos revisados y mejorados en didáctica matemática. Con el apoyo de la etnomatemática contextualizar las guías de los docentes y estudiantes para los primeros años escolares sobre todo en temas como geometría y aritmética. Estudiar la implicación de textos como Guatemala y como mejorar las didácticas en las aulas.

J. La división: importancia de la operación aritmética de la división

Entre las consideraciones sobre su importancia se tiene:

- La operación aritmética de la división es una resta iterativa que utiliza el algoritmo la multiplicación para realizarlo, algunos estudiantes no conectan aún la resta o la multiplicación con la división.
- Es importante fomentar al docente que debe irse a lo lúdico primero, luego al concepto de la división y por último a la ejercitación durante las clases de matemáticas para que el estudiante logre conectar las operaciones aritméticas básicas y su importancia y relación entre sí.
- Se debe instruir lúdicamente el concepto de repartir o dividir primero para ir a la base de los temas principales en el tema de la división.
- El concepto del cero, que es dividir por cero.
- El concepto de prestar en la resta es muy importante enfatizar.
- El concepto de mayor que y menor que antes de iniciar los temas de la división.
- El concepto de buscar patrones de números.
- El concepto de posición y los sentidos numéricos.

- El concepto de que es un decimal
- Dominio de las tablas de multiplicar
- El concepto de encontrar un patrón de error y enmendarlo en el proceso del algoritmo de las divisiones especialmente las del tipo “largas”

K. Estrategia didáctica recomendable para impartir el tema de la división
Algunas consideraciones se incluyen las siguientes:

- Impartir los conceptos base del cero, posición y sentido numérico, repaso de las tablas de multiplicar, dominio de la resta y de las sumas, repaso de los números mayor que y menor que, que es un decimal y como se trabaja en el algoritmo de la división, valor posicional de los números, entre otros temas básicos. Operaciones básicas números enteros reales y fracciones, lógica matemática. Destrezas en fracciones, números positivos y negativos, porcentajes el objetivo es quitarle el miedo a la matemática.
- Explicar el tema conceptual de la división y ejercitar en el aula con trabajos posteriores en grupos
- Dejar tareas cortas pero variadas en el transcurso de la semana para luego discutirlos en laboratorios de matemática constantemente
- Dialogar con los estudiantes sobre un problema y luego partir de allí para que los estudiantes propongan las soluciones. No realizar divisiones largas en forma mecánica hay que combinar las dinámicas con problemas y casos matemáticos de divisiones de la vida real.
- Se enseña el algoritmo con la salvedad que hay muchas formas de realizar las divisiones cortas o largas. Motivar a que los estudiantes descubran por lo menos una manera diferente de realizar una división. Discutirla y ponerle su nombre al “método” descubierto y realizar más ejercicios con los métodos variados para probarlos y verificar si son o no los adecuados. Nunca hay que considerar que están del todo mal lo creado o descubierto parte se puede rescatar para que con el apoyo de todos los estudiantes se logre descubrir el mejor modo o mecánica de realizar un algoritmo de la división.

- Hay que procurar que el estudiante tenga muchas oportunidades de aplicar la base de instrucción sobre el tema de la división donde no se aferre a la memorización del proceso algorítmico sino en verdad lo pueda explicar y así aumentar su autoestima para que pueda hacerlo en forma individual en forma confiada y segura. Hay que considerar que, aunque se equivoque pueda reconocer el patrón de error y sobre ello mejorar para no cometer de nuevo ese error. El estudiante no debe ver el error como algo negativo sino como una oportunidad de aprender.
- El docente debe buscar muchas oportunidades en las que sus estudiantes se sientan cómodos resolviendo los algoritmos y que puedan variar e innovar o crear nuevos algoritmos. Los estudiantes en forma independiente deben apoyarse para buscar otro tipo de soluciones. Diferentes tipos de algoritmos como una solución para un docente al impartir el tema de la división, está mal si se le enseña una sola forma de dividir.
- La división, en particular, es repartir en partes iguales, hacer manipulativos y repartir en partes iguales. Dividir con dinero casos reales y dividir físicamente objetos.
- Otra estrategia es usar restas consecutivas es algoritmo y es la que hacen en situaciones reales como el mercado. No centrarse en algoritmos sino en el concepto. Que los alumnos lleguen a exponer sus métodos propuestos. No ha habido un algoritmo único sino varios.
- El docente debe apoyarse en la tecnología y en un acompañamiento de docentes más expertos que dominen los temas sobre didáctica matemática en forma continuada.
- El docente debe comprender cuando una cantidad es divisible en otra cantidad
- El docente debe identificar divisiones exactas e inexactas.
- El docente debe comprender los términos dividendo, divisor, cociente y residuos.

L. ¿Cómo y cuándo impartir el tema de la división?

Para poder impartir el tema de la división se debe esperar a que el alumno conozca los conceptos de separar, dividir y repartir cosas u objetos, qué son los números, qué son los conjuntos de números. Luego es importante que sepa el estudiante qué números o cantidades son mayores, menores y/o iguales. A su vez a encontrar patrones en todo lo que encuentre en la naturaleza o en una actividad numérica.

A continuación, algunos temas a profundizar y considerar para preparar el momento de la planificación y programación instruccional del tema de la operación aritmética de la división:

- La suma y la resta son pilar en la introducción al tema de dividir, ya que si recibe se suma y si entrega o dá, resta.
- El tema de multiplicar es importante porque le apoya en la fluidez de cálculo al memorizar las tablas de multiplicar, pero debe enseñarse en forma divertida y hasta en forma musical para que resulte agradable porque es aquí en donde se encuentran los primeros evidentes obstáculos.
- El tema de las fracciones es importante introducirlo luego con no confundir a los estudiantes que es un tema muy diferente al de dividir o separar. Es parte de dividir el fraccionar. Lo importante es explicar los conceptos con la mayor variedad de actividades manipulativas y lúdicas.
- El tema de los decimales es importante para reconocer lo necesario que es incluirlo en ciertas divisiones largas.
- El tema del cero y por qué no es definido la división entre cero. Muchos docentes indican a sus estudiantes que el cero es nada y aquí empieza otro obstáculo. Este tema es muy importante y se omite mucho. Se le dice al estudiante en la mayoría de las veces que algo dividido cero es nada y, no es cierto, es totalmente indefinido. Este tema amerita una guía adecuada y con apoyo didáctico adecuado. Los docentes traen un concepto preconcebido del

cero que lo siguen enseñando equivocadamente en sus aulas, debe corregirse.

- Explicación del algoritmo o de varios algoritmos de la división corta o larga. Mecanización hasta cierto punto para dar seguridad, pero luego deben ser aplicados a ejercicios tipo problemas como un relato. Es importante que cada estudiante relate un problema en el cual tenga que utilizar la división.
- El docente no debe decirles a sus estudiantes que no se preocupen si no entienden el concepto y que copien el algoritmo y que se lo memoricen: esto es antipedagógico y anti didáctico.
- Se empieza entonces desde preprimaria a introducir el tema de la división y debe continuar hasta niveles de secundaria. No hay que considerar la matemática como temas aislados deben decirles los docentes a sus alumnos que todo es parte de un todo en el universo matemático y que lo bello radica en que todo va unido a tema anterior o posterior.

M. La percepción del error de los estudiantes cuando reciben las pruebas o ejercicios

Según Antonio Martín (Canarias) de la Universidad de la Laguna investigador y docente del C.E.I.P. Aguamansa (Tenerife, España) hay que motivar y acercar al estudiante a las matemáticas desde temprana edad, con constancia, esfuerzo, evolución y progreso diario. Los docentes están acostumbrados a impartir las clases magistrales con un modelo didáctico concreto y muchas veces inflexible con una guía preestablecida, nada cambia y nada mejora, todo sigue igual y por tanto los mismos docentes no buscan innovar y ampliar sus conceptos hacia nuevas opciones de enseñanza aprendizaje.

El proyecto que este investigador ofrece es de proponer otro sistema de aprendizaje otra metodología más flexible y la utilización de otros tipos de recursos y no costosos, sino adecuados a su contexto y que sean flexibles. Los estudiantes deben “saborear” la sensación de calcular mentalmente y a través del juego, no solo dependiendo de las calculadoras o los aplicativos electrónicos, aunque no está mal

incluirlos en la instrucción. Todo lo tecnológico es una ayuda para confirmar los resultados, pero hay que tener cuidado que se vuelvan una constante presión y posesión exclusiva al conocimiento. Lo que se trata es de dominar la disciplina no que la disciplina domine al estudiante. Cálculo mental es lo mejor fomentar “no frustrarlos” con esquemas conceptuales, mentales y procedimentales: preestablecidos, difíciles y obsoletos. Hay que enseñar algoritmos que desarrollan el cálculo mental.

Parte de la filosofía del investigador Martín:

“Que los alumnos salgan del centro con una autoestima alta, que les dé seguridad para enfrentarse a los retos que encuentren; que aprendan a aprender, que adquieran destrezas para encontrar, manejar y asimilar información de forma autónoma, y que sean felices, que la escuela no sea motivo de angustia o sufrimiento. el trabajo de cada estudiante se ve reflejado en su hoja de retos. Hay retos individuales, pero también de "células" -pequeños grupos de trabajo- y de "gran grupo", que implican a toda la clase. Educamos en libertad. Ponemos límites, pero damos un margen. Les dejamos elegir, pero los niños deben asumir las consecuencias de su elección” Albelo (2016) afirma que esta forma de enseñar huye de "escuelas tradicionales concebidas como fábricas, en las que los niños entran todos diferentes y se les va inyectando conocimiento. Unos salen convertidos en recursos del sistema y los que no han podido asimilar ese conocimiento son tratados como desechos. Nosotros pensamos que no hay ningún niño que no sirva. Todos servimos. Solo tenemos que valorar el talento de cada uno y ayudarlo a que aprenda” (Martín, 2017).

A su vez, Albelo y Pomares recalcan que:

“Lo que se experimenta es lo que se retiene; lo que se memoriza y no se utiliza, se olvida”. Por ello huyen de un sistema tradicional que “ha demostrado que no funciona, las cifras de fracaso son tremendas y ha matado la curiosidad y las ganas de aprender de los niños. La escuela ahora da todo hecho, sin necesidad de que ellos descubran, aprendan y apliquen lo que tienen a su alrededor. Al final se aburren y dejan de preguntar por qué” (Albelo, 2016).

“En este centro la mirada del maestro va a fijarse en el don que cada niño tiene y no en recalcar lo que hace mal o no le sale. Toda una revolución educativa. Aquí todos los niños son inteligentes” (Pomares, 2016).

La directora del CEIP - Aguamansa, España, Cristina Albelo, y la profesora Soledad Pomares destacan que una de las grandes diferencias del CEIP Aguamansa es que en sus aulas a todos los niños se les considera, a su manera, inteligentes. Esa es la base de la Teoría de las Inteligencias Múltiples. Por eso, cuando alguien pide en un aula de Aguamansa que levanten la mano los que sean inteligentes, todos la alzan. Pomares pide que se haga la prueba en un colegio convencional, "solo unos pocos se atreverán a levantar la mano porque el sistema valora unas pocas inteligencias y desecha el resto".

La Teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner inspira el método educativo del CEIP - Aguamansa, España. Este psicólogo y profesor de la Universidad de Harvard, que recibió el Premio Príncipe de Asturias de Ciencias Sociales en 2011, sostiene que las personas tienen 9 tipos de inteligencia, aunque el sistema educativo apenas valora dos o tres.

Gardner (1998) ha ido añadiendo inteligencias a su teoría y en la actualidad considera que todas las personas tienen nueve tipos de inteligencia, desarrolladas en mayor o menor medida: la inteligencia espacial, que permite interactuar y entender el entorno espacial o tridimensional, las imágenes y los dibujos; la inteligencia lingüística; la inteligencia lógico-matemática; la inteligencia cinética-corporal, la del movimiento y las habilidades del cuerpo; la inteligencia musical; la inteligencia interpersonal, que marca la capacidad para relacionarnos con los otros; la inteligencia intrapersonal, la que marca el diálogo interno; la inteligencia naturalista o medioambiental, la que marca la atención hacia el entorno natural, y la inteligencia existencial, que tiene que ver con la espiritualidad y la búsqueda de lo trascendente.

De esta forma se desglosa como se percibe al error:

- Al error no lo ven como una oportunidad.
- Los estudiantes reciben las pruebas y tareas y no buscan retroalimentarse del error y corregirlos. Muy pocos estudiantes lo hacen en forma independiente, necesitan que el docente les indique que deben revisar sus errores.
- El docente debe entregar las pruebas y en la pizarra explicar porque se equivocaron en determinados problemas o situaciones matemáticas.
- Las tareas deben ser no muy largas y el docente debe primero impartir el tema conceptual y el proceso algorítmico en clase asegurarse que sus estudiantes lo entienden y empiezan las tareas en el aula para terminar en casa.
- El error es una forma de aprender no es punitivo. Se ha manejado punitivo se vuelven a resolver en clase donde se equivocó. Se pasa al frente entre pares y cómo lo resuelve el compañero también. No solo hay un único camino. Debe darse una oportunidad de discutir la tarea o prueba. Se debe retroalimentar y aprender del error.
- Lo primero es entender los conceptos involucrados: qué significa dividir entre qué, qué significa y entender cuántas veces cabe un número en otro. Percepción error como algo negativo. El docente debe explicar qué significa que un número quepa en otro número y determinar el cociente. Los estudiantes se equivocan en la resta entonces repasar la resta. Hay que memorizar las tablas de multiplicar. A los estudiantes no les es fácil al agregar un cero hay que subir un punto decimal, por lo cual el concepto del cero debe impartirse. Qué significa el punto decimal es también difícil para los estudiantes. Muchas veces esa dificultad es por el deseo de los docentes de explicar a profundidad de explicarse muchas cosas que no tienen razón de uso para ese momento. Luego explicar el algoritmo de la división corta y larga.
- Una importante propuesta didáctica es que cada estudiante desarrolle su propio algoritmo de la división y se pruebe en clase.
- Problema sustancial es ver al error como una oportunidad y que pueden aparecer varias variantes de un mismo error.

- Hay que erradicar la enseñanza de un algoritmo *per se*, en la forma mecanicista. Hay que impartir el tema de la división y el tema del algoritmo para luego aplicarlo en una serie de ejercicios tipo problemas “relato” con casos de la vida real.

N. Tecnología en la educación que apoye

En los primeros 13 o 14 años no se debe introducir el uso exclusivo de una tablet, computador personal o de un celular. Debe ser gradual la exposición acorde a la edad y al progreso en las diversas materias matemáticas de los estudiantes por lo menos los primeros siete años en el sistema escolar. Luego de este tiempo ya se puede finalizar con una alta exposición tecnológica para poder alcanzar desempeños, aptitudes y competencias necesarias para un mundo globalizado y conectado.

La tecnología (tablet, celulares, calculadoras, laptops, etc.) puede apoyar, pero no sustituye lo que el docente en los niveles primarios debe impartir. La Tecnología apoya en extraordinaria manera para buscar información.

La calculadora que grafica es increíble, pero si no sabe el estudiante qué significa una pendiente de una recta en cálculo, qué quiere decir una primera derivada, velocidad constante, aceleración instantánea en determinado momento. Lo que primero se debe tener es una exposición a los temas conceptuales de la matemática y a lápiz y papel dibujar la curva y como la describe en una computadora, pero el estudiante debe saber de dónde viene primero para luego interpretar lo que ve. El estudiante debe tener una mente despierta. El estudiante debe disfrutar una curva a la manera en que la entiende. Una cuadrática puede ser parabólica, focos, etcétera. Hay que considerar que el docente siempre es el que apoya y guía.

O. Implicaciones para la práctica de la enseñanza de la división como la más recomendable para optimizar el proceso pedagógico

Según Ashlock (2006) los patrones de errores son:

“Los patrones de errores que los estudiantes muestren no son debido únicamente al descuido o al azar ni porque no han tenido suficiente práctica” (Ashlock, 2006).

Los estudiantes hacen conexiones, observan patrones y hacen inferencias durante una instrucción. En el caso de patrones de errores los cuales son aprendidos no necesariamente producen respuestas erróneas, algunas son correctas y por ello los patrones de errores se afianzan en el pensamiento cognitivo de los estudiantes y continúan realizando errores de conceptos y de ejecución de procesos. En la docencia, se debe incluir significado de los numerales, equivalencia, propiedades de las operaciones y principios matemáticos.

Lo que se requiere es construir una relación del docente que diagnostique mientras enseña que incluya una observación minuciosa. Según se aprende de cada estudiante la instrucción se hace del tipo instrucción adaptada a cada estudiante, lo cual consiste, en observar y aprender más y ajustar la instrucción de nuevo. Luego, se repite el ciclo de diagnóstico e instrucción tantas veces como sea necesario.

La instrucción desde preprimaria debe incluir:

- Entender los números o el sentido posicional de los números (*“number sense”*), maneras de representar y cómo se representan los números, relaciones entre números, sistemas numéricos, concepto de los números y del cero. valores posicionales de los números
- Los estudiantes deben conocer el sentido de los números, así como los principios y conceptos de los números enteros, hacer estimaciones y cálculos mentales.
- Entender los significados de las operaciones aritméticas y cómo se relacionan entre ellas
- Computar con fluidez y realizar estimaciones razonables. No significa computar con rapidez

- Darse cuenta, que los procesos de lápiz- papel constituyen solo una alternativa para calcular. Fomentar el pensamiento lógico y agilidad mental como la creatividad
- Se deben aplicar las operaciones aritméticas a contextos de la vida real en donde los estudiantes observen y organicen los datos
- La instrucción en las matemáticas está siendo fomentada a cubrir pocos tópicos, pero con mayor profundidad y a realizar conexiones entre las ideas con pensamiento lógico matemático
- La matemática está siendo vista como la ciencia de los patrones más que una colección de reglas según *NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000)*
- Conocer las combinaciones de los números básicos es esencial, las operaciones de suma de un solo dígito y multiplicar por pares y como sus contrapartes la resta y la división es esencial.
- Se deben incluir en el currículo matemático soluciones de problemas, razonamiento y refutaciones, comunicación, conexiones, y representaciones
- Los estudiantes deben estar dispuestos a seleccionar entre las herramientas matemáticas para utilizarlas cuando lo consideren propio: cálculos mentales, estrategias de papel y lápiz, estimaciones y el uso de calculadoras y aplicativos tecnológicos.

La meta de la instrucción en la matemática actualmente continúa siendo enfocado en la fluidez de cálculo matemático, sin embargo, los estudiantes deben ser expuestos a estudiar las operaciones aritméticas con varios procedimientos, los estudiantes deben experimentar un aprendizaje significativo- preguntar y entender cómo los conceptos matemáticos son aplicados en varios contextos.

El aprendizaje conceptual en matemática se enfoca en ideas y en generalizaciones que hacen conexiones entre ideas. En contraste con el aprendizaje procedural que se enfoca en las habilidades y el procedimiento paso a paso.

Los procedimientos algunas veces se enseñan sin una adecuada conexión a los pasos del procedimiento sin conectar a los conceptos o ideas matemáticas. El

aprendizaje procedural debe atarse a la instrucción conceptual y a las aplicaciones a la vida real para que cobren un significado.

El aprendizaje conceptual es muy importante y los docentes razonan que, al introducirles a la instrucción algorítmica pueda afectar y alienta el no comprender importantes conceptos. Lo que hay que tener en cuenta es que no son excluyentes. Si es necesario introducir primero el concepto y luego la práctica procedural para lograr adecuar el nuevo conocimiento.

Los procedimientos se enseñan, algunas veces sin conectar adecuadamente los procesos de las ideas matemáticas. Tanto el aprendizaje conceptual como el aprendizaje procedural son necesarios. El aprendizaje procedural debe conectarse al aprendizaje conceptual y aplicaciones de la vida real. El aprendizaje procedural debe basarse en conceptos que ya han sido previo impartidos. Hay evidencia de que los procedimientos explicados o enseñados antes de los conceptos y cómo son aplicados a estos procedimientos lo que hace es interferir con un futuro aprendizaje significativo (Pesek, 2000).

La enseñanza tipo conceptual es muy importante para la comprensión matemática ya que el incurrir en solo enseñar los algoritmos puede ser contraproducente y no guiar en entender importantes conceptos.

Entendiendo los conceptos y razonamientos encontrados en los algoritmos apoya en el dominio seguro del procedimiento. Los algoritmos pueden enseñarse incluyendo conceptos y razonamientos asociados con procedimientos específicos. Los estudiantes no sólo mecánicamente deben instruirse en la matemática sino también instruyendo con conceptos adecuados al enseñar procesos y procedimientos.

La instrucción matemática puede enfatizar los conocimientos conceptuales sin sacrificar la competencia o habilidad en el cálculo mecánico. Comprender los conceptos primero apoya en aumentar la habilidad matemática. (Hiebert, 2000).

Si un estudiante utiliza un procedimiento específico de papel y lápiz en el tiempo, se torna automático. Si el estudiante utiliza menos conocimiento conceptual y más conocimiento procedural se da el caso de la mecanización o proceduralización.

Según Ashlock (2006), los errores son un aspecto positivo durante el proceso del aprendizaje. Algunos consideran los errores como parte del desorden que resulta de hacer matemática. En muchos aspectos los errores son oportunidades para reflexionar y aprender. En vez, de alertar tanto a los estudiantes a no cometer un error o varios errores es mejor utilizar los errores que se presentan como oportunidades de abordar situaciones de resolución de problemas.

En el aula a un grupo de estudiantes puede examinar un procedimiento erróneo y utilizar el razonamiento conceptual que conozcan para examinar paso a paso el procedimiento y determinar porque la estrategia observada o utilizada no siempre produce una respuesta correcta. De ser necesario rectificar se debe aceptar que los algoritmos sean innovadores y creados por el mismo estudiante para adecuar el concepto y evitar los patrones de errores.

Los patrones de errores revelan equivocaciones (*"misconceptions"*) o ideas mal concebidas, que se han aprendido. Los patrones de error se aprenden por ideas o procedimientos o reglas que un estudiante aprende que pueden ser correctos o estar llenos de equivocaciones, pero el proceso que se siguió en aprender esas ideas y procedimientos es básicamente la misma. Durante la experiencia con un concepto o un proceso (procedimiento), un estudiante se enfoca en cualquier experiencia aparezca que tenga algo en común o conecte con la información que ya la tiene. Los estudiantes aprenden conceptos erróneos y procedimientos de forma similar a la correcta. Los estudiantes buscan cosas en común con sus conocimientos preconcebidos con algún concepto o procedimiento. Los estudiantes forman una abstracción con ciertas características comunes y entonces el concepto o algoritmo es conformado.

Debido a que los estudiantes necesitan conectar la nueva información con algo que ya saben, es muy importante que se les de accesos a los conocimientos preconcebidos. Aunque los conocimientos previos sean erróneos ya que los errores son comunes. Lo que podría pasar es que los estudiantes conecten a un patrón de error con una idea equivocada y por ende aprendan un procedimiento erróneo.

Muchos de las equivocaciones o procedimientos erróneos se dan porque los estudiantes sobre generalizan, sobre especializan por ejemplo para sumar fracciones los denominadores deben ser iguales y solo así se pueden sumar.

Hay que motivar a la autorregulación y autoevaluación entre los estudiantes. A continuación, una Guía de Preguntas o “*Checklist*”:

- ¿Cómo piensas que se hizo la tarea?
- ¿Qué es lo que se debe saber para hacer la tarea?
- ¿Cuál fue la parte más fácil de realizar la tarea?
- ¿Cuál fue la parte más difícil para tí de realizar la tarea?

El estudiante debe ser más introspectivo y retrospectivo en su análisis de los problemas matemáticos. Cuando se fomenta ser más introspectivo se puede entrevistar con una dinámica de Pensar hablando (“*think out loud*”). Cuando se fomenta ser más retrospectivo que el estudiante explique la situación del problema en sus propias palabras, que cuente como lo hizo y porque lo completo de esta forma. Combinar ambas formas de pensamiento.

En muchos casos el estudiante conoce el procedimiento, pero su entendimiento del concepto es inadecuado. La entrevista puede apoyar al estudiante evaluar su propio razonamiento.

Algunas preguntas convenientes pueden ser:

- ¿Cómo obtuvo sus respuestas? puede darse el caso que omitió algo
- ¿Por qué esta respuesta es correcta?
- ¿Si alguien dice que su respuesta no es correcta, cómo explicaría que su respuesta es correcta? ¿Lo puede explicar de otra forma?
- ¿Puede realizar un bosquejo o dibujo mostrando que su respuesta es correcta?
- ¿Si tiene que explicar a alguien de confianza como lo haría? ¿Qué le diría?

Garofalo (1987) incluye otras preguntas:

- ¿Cuáles clases de errores usualmente usted realiza? ¿Porque considera que hace estos errores? ¿Que podría hacer para resolver esto?
- ¿Qué es lo que hace cuando se le presenta un problema no familiar? ¿Por qué?
- ¿En qué problemas usted es bueno resolviendo? ¿Por qué?
- ¿En cuáles problemas usted no es bueno realizando? ¿Cómo puede mejorar esto?

Según Boaler (2016), hay que considerar, que al hacer errores el cerebro crece ya que las preguntas surgen si se sabe que la respuesta fue errónea y se desea buscar la correcta. El cerebro se empieza a conectar porque al surgir las preguntas se apoya en la parte visual cognitiva lógica del problema. Por ello, por ejemplo, es importante dejar que los alumnos cuenten con los dedos. Esto apoya a la autoestima en forma integral.

Se debe preguntar entrevistando a los alumnos tanto a los que les va bien como a los que les cuesta un concepto o procedimiento. Demostrando interés es vital para encontrar una manera efectiva de recolectar información sobre cuáles son los conceptos matemáticos que el estudiante domina y cuáles no, sus habilidades, aptitudes y lo que dispone para realizar las tareas.

Las entrevistas con los estudiantes son importantes porque apoya:

- Gana criterios (“*insights*”) en el entendimiento de los estudiantes de los conceptos y los procedimientos para identificar cualquier obstáculo o patrones de errores
- Observar cómo el estudiante razona
- Aprender que tan bien el estudiante puede comunicar las ideas matemáticas,
- Descubrir la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas
- Se necesita más evidencia de confianza, curiosidad, flexibilidad, creatividad y perseverancia

Según Wiggins y McTighe (1998) se deben considerar las siguientes preguntas:

- ¿Cuál puede ser la evidencia suficiente y relevante sobre la comprensión?
- ¿Cómo se puede distinguir entre los que pueden comprender y otros que no pueden comprender?
- ¿Cuáles son las equivocaciones, obstáculos y errores más frecuentes?
¿Cómo se verifica y cataloga cada error?

Las entrevistas no es un tiempo para expresar opiniones es tiempo para observar cuidadosamente a los estudiantes y es tiempo para escuchar. No hay que dar claves o preguntas dirigidas hacia la respuesta correcta.

Pueden realizarse actividades de interacción en donde los alumnos leen los problemas, el docente luego pregunta: ¿qué es lo que el problema pregunta se debe encontrar?, el docente pregunta: cómo resolverán el problema para encontrar la respuesta?, el docente pide le indiquen cómo lo resolvieron y que le expliquen ellos a el docente, el docente pide una evidencia escrita sea papel y lápiz o bien en la pizarra o en un aplicativo tecnológico la forma en que lo realizaron. Si lo autoriza el plantel se pueden grabar en audio o video las clases para poder analizar luego con detenimiento cuáles obstáculos consideran importante abordar para planear la clase de los días siguientes. Un portafolio de cada estudiante sería lo recomendable

entregar al final del día para que el docente regrese a verificar uno por uno los posibles errores y de quienes en el aula.

En el tema de los patrones del error, un algoritmo tipo “*bug*” o “*buggy*” incluye por lo menos un paso erróneo, y el procedimiento no es consistente en lograr el propósito requerido. (Loveless, Coughlan, 2004) En el documento Liderazgo Educativo razona que se considera importante incluir en las habilidades de cálculo matemático:

- Son necesarias para el avance de la matemática y de las ciencias
- Son un predictor importante para el desempeño al futuro
- Promueve equidad en el desempeño matemático

Es importante considerar que, para terminar sexto grado de primaria, el estudiante debería reconocer qué operación aritmética es la más adecuada para utilizar: sumar, restar, multiplicar o dividir con números enteros, fracciones y decimales y calcular porcentajes. Solo dominando lo anterior, podrá dominar la matemática superior o alto nivel. Los estudiantes deben ser fluidos en cálculos aritméticos, deben utilizar procedimientos eficientes y adecuados, apoyados con un conocimiento conceptual de los números y operaciones. Utilizando los algoritmos estándar para los cálculos aritméticos, es una manera de alcanzar la fluidez de cálculo. Se debe incluir para mejorar las habilidades matemáticas: la estimación, cálculo mental y utilizar la calculadora y procesos de lápiz y papel.

En el tema de la evaluación, para maximizar el valor de la evaluación, los docentes deben ir más allá de corregir con un simple análisis de correcto o incorrecto y enfocarse más en la forma del pensamiento de las tareas que el estudiante realiza. Se necesita conocer como es el razonamiento y como se puede mejorar que concentrarse solamente en los errores u obstáculos (“*misconceptions*”). Mientras se instruye matemáticas se tiene que continuamente evaluar, recolectar y usar esta información de cómo el estudiante aprende.

A pesar de que hay que continuamente evaluar no es necesario pasar pruebas constantes ya que la evaluación debe inclinarse más a ser del tipo formativa y no tan sumativa. El proceso que puede seguirse es recolectar evidencias en relación con las metas curriculares, hacer inferencias, e idear un plan de instrucción. Los investigadores han coincidido que se puede aprender mucho de revisar cuidadosamente la evidencia que los procedimientos erróneos o equivocados se evidencian y al revisar los procedimientos erróneos.

Se sugiere que los estudiantes, se puedan apoyar, con diarios (*"journals"*) para incrementar su alerta al proceso cognitivo. Haciendo una verbalización escribiendo en un cuaderno el docente puede seguir el razonamiento de los estudiantes y sus algoritmos y encontrar los errores tipo *"bug"* (patrón de error) en todo el proceso de pensamiento o razonamiento.

Cuando se requiere conocer cómo es el pensamiento de los estudiantes se debe enfocar no solo en lo que el estudiante piensa sino también lo que el estudiante entiende de su propio conocimiento. El estudiante, debe adecuar su conocimiento base para encajar con los problemas que se les dificulta resolver.

Otro apoyo inmediato es la mera observación. Puede ser informal, interactiva o bien estructurada. Es observar y escuchar cómo razonan cada uno de los estudiantes ante los problemas de matemáticas.

Mucho de lo que hay que apoyar a los estudiantes es que estos puedan justificar su razonamiento para poder exponer sus conocimientos obtenidos. Que prueben sus respuestas sean correctas. Los esquemas que Sowder, Harel (1998) y Flores (2002) enuncian son los aconsejables:

- Esquemas que son basados externamente como un texto o figura con autoridad (docente)

- Esquemas que son basados empíricamente en donde los estudiantes usan una percepción u objetos concretos para mostrar que la respuesta es correcta
- Esquemas que requieren análisis, en donde los estudiantes utilizan estrategias de cálculo o relaciones matemáticas citadas para justificar sus respuestas.

Lo importante agregar es que, la educación matemática empieza y procede del lenguaje. La educación matemática avanza o bien se obstaculiza por el lenguaje y sus resultados se ven mucho afectados por el mismo:

“El estudiante al verbalizar lo que hace para resolver necesita del recurso del vocabulario para expresarlo en la mejor forma” (Durkin ,1991).

IX. DISCUSIONES FINALES

Según la revista Fortune (2000) a partir del año 1999 las destrezas más apreciadas son:

- Trabajo en equipo
- Resolución de problemas
- Destrezas interpersonales
- Comunicación oral y
- Habilidades de escuchar
- Desarrollo profesional siempre actualizándose
- Pensamiento creativo
- Liderazgo
- Automotivación
- Habilidades de escritura
- Efectividad organizacional
- Habilidades en computación
- Habilidad Lectora

Mucho de las verdades matemáticas se producen con la ardua colaboración entre matemáticos. Sin embargo, en las aulas todavía se puede apreciar a muchos estudiantes completando arduas hojas de trabajo en forma individual y en silencio. Las discusiones de grupo y de toda el aula son vitales. El discutir, debatir y dialogar un problema es de gran apoyo para el proceso de la enseñanza aprendizaje ya que los estudiantes realmente entienden las ideas hasta el momento de verbalizar los procesos para encontrar la solución. El trabajo de grupo que se realiza en una empresa u organización proviene mucho de una exposición previa a un extenso pensamiento o razonamiento matemático.

Los científicos aprueban o desaprueban las teorías por medio de producir más casos o conjeturas que pueden o no ser correctas, los matemáticos aprueban las teorías a través de un razonamiento matemático. Los matemáticos necesitan de producir argumentos para convencer a otros matemáticos considerando razonamientos cuidadosos y convencer de sus criterios pasando de una idea a otra utilizando conexiones lógicas. La matemática es una materia muy social más de lo que actualmente se considera en las aulas, ya que la prueba de una conjetura proviene cuando un matemático convence a otro matemático de la conexión lógica de su razonamiento.

Es importante que los estudiantes razonen en las aulas porque el acto de razonar un problema y considerar otro criterio motiva a los estudiantes a continuar con su aprendizaje. Se piensa que la matemática es solo sobre calcular y es mejor un estudiante si calcula rápidamente. Erróneamente se piensa que se tiene que ser rápido para hacer buena matemática. Según Schwartz (2001) lo que es más importante en la matemática es entender profundamente (pensamiento profundo) y las relaciones entre las cosas no si se es más o menos rápido para calcular lo cual fomenta las conexiones cerebrales y hace que los estudiantes se involucren más.

“La matemática es un medio para un fin no el fin” (Schwartz, 2001).

Algunos mitos que se tienen en la matemática son: que matemática es sólo una materia que tiene reglas y procedimientos, que para ser bueno en matemática hay que calcular rápidamente, que matemática se trata sólo de certeza y de respuestas correctas o equivocadas, y que la matemática solo trata de números.

La didáctica de la matemática debería incluir:

- No continuar con problemas mecánicos centrados sino cognitivos centrados en matemática
- Los procesos - programar debería incluirse en el currículo

- Currículo matemático del tipo más práctico y más conceptual en un principio, gradualmente hacerlo más complejo en su cálculo para poder entender mejor las situaciones matemáticas.
- Explicar primero los conceptos más difíciles en vez de incluir actividades a los estudiantes de cálculo. Solo una evaluación a lápiz y papel no integra todos lo que se debería incluir en una evaluación debe concretarse una relación de diálogo para poder evaluar acertadamente al estudiante.
- El estudiante debe lograr alcanzar las competencias de entender, analizar y sintetizar lo que se le pide en los problemas matemáticos. Se debe evitar mecanizar y fomentar mas un aprendizaje basado en proyectos en donde las competencias científicas (STEM⁹³) y sociales sean integradoras utilizando la tecnología en una forma divertida pero pertinente.
- Hay que tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para que puedan crear un método para resolver los problemas matemáticos, pero reteniendo la suficiente información para que puedan resolver problemas. Se debe lograr que el currículo de matemáticas sea socialmente interactivo, donde los estudiantes desarrollen proyectos tipo constructivistas de matemáticas para resolver problemas, promuevan discusión, argumentación y compromiso de lograr objetivos.
- Como sugerencias metodológicas se pueden mencionar: leer detenidamente y analizar las ordenes del problema o situación, reflexionar sobre los datos que se ofrecen, recordar los conceptos o relaciones aprendidas, establecer las relaciones y estrategias que

⁹³ Matemática, Ingeniería, Ciencia, Tecnología (Science, Technology, Engineering and Mathematics)

permitan la solución, trazar un plan de solución, analizar la respuesta, revisar y reevaluar.

- Las estrategias que podrían emplearse por los docentes para hacer uso de los errores como fuente de aprendizaje y su posterior superación por oposición de un nuevo conocimiento depende del tipo de error que manifiesta el alumno y su causa, para realizar una labor preventiva y de corrección del error el docente debe haber detectado la causa que provoca el error.
- Para prevenir los errores es necesario tener en cuenta algunas sugerencias: discutir las tareas en concepciones erróneas, trabajar a partir de una concepción o situación matemática que provoque contradicciones, permitir reajustar las ideas y estrategias de solución, volver a los conceptos y a los procesos cuantas veces sea necesario teniendo en cuenta las edades de los estudiantes, no adelantarse ni precipitar el aprendizaje de un nuevo contenido si no lo entiende la clase entera, evitar una innecesaria complejidad de signos matemáticos si el aprendizaje no lo amerita, exponer a los estudiantes a la contradicción proveniente del error y que logre encontrar el falso concepto para que no los vuelva a cometer, propiciar el debate, pruebas orales en la matemática y las discusiones para dar respuestas y fundamentarlas de tal manera que se asegure el estudiante del aprendizaje.

Los docentes deben creer en las posibilidades del estudiante si no lo cree primero el docente, los alumnos no lo creerán jamás. Los docentes deben trabajar como un coach o entrenador que anima, alienta y corrige el error con esmero y vocación de ser un agente de cambio.

Para algunos docentes es más fácil el solo indicar cuál es la respuesta correcta cada vez que un estudiante comete un error y luego seguir avanzando, pero al final

el docente retrasa los procesos de aprendizaje de los estudiantes cometieron el error y retrasa mucho el proceso del aprendizaje y con afectar a estos estudiantes provocando rezagos de conceptos y de procesos.

La matemática es una materia llena de incertidumbres, es acerca de explorar, conjeturar, e interpretar, no son soluciones definitivas. La matemática es un fenómeno cultural, un conjunto de ideas, conexiones, y relaciones que podemos utilizar para hacer sentido del mundo (Boaler, 2016).

X. CONCLUSIONES

Con respecto a este estudio de la prevalencia del error en los alumnos de las ocho escuelas de la Familia de la Esperanza en el departamento de Sacatepéquez se concluye que para la muestra se presenta la suficiente evidencia que el análisis de la categorización de los tipos de error revela errores sistemáticos o tipo patrón (“bugs”) de concepciones erróneas de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la fluidez matemática en la etapa de habilidades procedurales o “process skill” de los estudiantes de 6° grado de primaria con la tipificación de 30 tipos de errores en el proceso de la operación aritmética de la división.

En cuanto a los errores más comunes presentados por el grupo de estudiantes en este estudio fue el error en la operatividad o deformación del algoritmo de la división, error en el proceso de completar el cociente en el algoritmo de la división; error en el proceso de multiplicar: error de operar no según el orden o jerarquía de la operación, no opera desde el dígito más a la derecha y hacia la izquierda y error de no finalizar el proceso de multiplicar; error operatividad de restar: suma en vez de restar y prestar no decrementa el dígito; deficiencia del concepto del cero; deficiencia en el concepto del sentido numérico y el error en lectura. Sin embargo, esta investigación no es concluyente en su análisis porque le hace falta incluir la serie de entrevistas que la Teoría de la Categorización de Ann Newman (1979) requiere incluir.

Los resultados del análisis efectuado muestran que, el 39% de los problemas presentan no evidencia y se clasificaron como “careless” o descuido. Se encontraron 579 (56%) problemas con evidencia correctos de procedimiento. Un total de 455 problemas son totalmente incorrectos (44%). Se evidenciaron 473 errores que muestran hasta 30 tipos de error más frecuentes del tipo procedural en la resta (seis tipos), multiplicación (tres tipos) y el proceso de la división (21 tipos de error). Los datos que se analizaron presentan que entre las 8 escuelas analizadas del grupo Familia de la Esperanza la escuela que mayor tasa de error presentó fue la Escuela de Ciudad Vieja, le sigue la Escuela San Juan del Obispo, San Miguel Escobar

Matutina y la Escuela San Miguel Milpas Altas. El mayor error en el proceso de la resta fue el tipo error #29 Prestar/del/Mayor dígito con una ocurrencia del 38%. El mayor error en el proceso de la multiplicación fue el tipo de error no concluye el proceso de la multiplicación (20%) y el error en Lectura (15%) ya que no copian/utilizan el dígito requerido. El mayor error en el proceso de la división fue del tipo: no baja el dígito por dígito al momento de operar el proceso de la división, deformación del algoritmo de la división, sentido de la posición de los dígitos y el concepto del cero.

Podemos concluir que los errores más comunes son: no baja el dígito por dígito al momento de operar o deformación del algoritmo de la división (27%), sentido numérico de los dígitos (valores posicionales) 12.2%, no finaliza el proceso de la división (17%), falta el tema conceptual del cero. En la resta: error #29 presta/del/mayor dígito (38%) cuando se presta, el estudiante decrementa del número más grande en la columna no importando si es el número de arriba o el de abajo. En la multiplicación: el mayor error fue el de no concluir el proceso de la multiplicación ya que solo copia los dígitos del cociente en vez de operar (20%) y el error de lectura (15%) ya que no copian el dígito requerido.

Las razones de los errores más comunes que se presentan en los grupos de estudiantes para no alcanzar el logro matemático se pueden listar: la instrucción no presenta una relación con la vida real, la matemática es totalmente descontextualizada y desvinculada en las aulas. Falta una práctica para mejorar la habilidad y fluidez numérica. Falta aprender las tablas de multiplicar. No está dominado el desarrollo procedimental de la resta. Falta apoyo en el concepto de la división (es dividir y repartir). El sentido numérico (*"number sense"*) no está adecuado o entendido por los estudiantes. Los conceptos como los decimales y fracciones no están adecuados en el pensamiento lógico en los estudiantes. El concepto del cero no es claro y debe incluirse la explicación formal. Falta una didáctica que sea más de visión social, disruptiva, participativa y dialógica. Falta el apoyo en dinámicas de juegos y de la Tecnología. Falta fomentar la didáctica que va de lo concreto, pictórico

a lo abstracto - CPA. Se necesita más apoyo en la Lectura y el Lenguaje en todo ámbito.

De forma puntual, las soluciones para mejorar el desempeño en matemática para el grupo de estudiantes de las 8 Escuelas de la Familia de la Esperanza de los errores es fomentar una instrucción cognitiva guiada, una instrucción positiva ante el error, instrucción disruptiva, instrucción diferenciada con el apoyo de técnicas de incremento del pensamiento ("*growth mindset*") basadas en la neurociencia y la tecnología. Por supuesto, no dejar el impartir los temas conceptuales en forma magistral.

En cuanto a recursos curriculares para la mejora el Currículum Nacional Base – CNB - y los Estándares Educativos para Guatemala especialmente en Matemática de 6º grado deben ser utilizados. Para apoyarse con el CNB se debe hacer un repaso general desde primer grado a sexto grado de los diversos temas que se incluyen como el de algoritmo de la división, multiplicación y restas, sentido numérico, decimales y fracciones, concepto del cero. Para apoyarse en ello puntualmente se necesita consultar el CNB en los siguientes temas puntuales en los niveles de primaria: Sexto grado 4.5; Cuarto grado 4.1; 4.4; 4.6; 4.7; 4.9; 4.9.3; 4.9.4, 4.9.6, 4.9.7; 4.3.1; 4.3.2; Quinto grado 4.5, 4.2, Tercer grado 4.3.3; 4.3.1; 1.2; Primer grado 4.2.1; 4.4.1; 4.1.4; 4.1.7; 4.8.2; 4.8; 4.8.9; 4.8.7; 4.1.6

Al analizar los datos con PROCESS (Hayes, 2018) en SPSS se puede interpretar como que el efecto de la Tasa (porcentaje de error) sobre el aprendizaje de los 368 estudiantes de 6º primaria aconseja incluir como variable moderadora la variable habilidad. Esta relación muestra el efecto de la relación de la tasa de error en el aprendizaje. Al analizar los resultados se concluye que el efecto de la variable habilidad de cada estudiante es significativo y mayor entre las habilidades entre 2.4 (efecto = 1.0290, $p < 0.05$) a 3.2 (efecto = 1.6538, $p < 0.05$) en la escala de dominio determinado entre 1 a 4. Los resultados del análisis muestran que entre más veces realicen los ejercicios mejor desempeño tendrán en la realización de la prueba de matemática de 6º grado de primaria, mejores resultados en el rendimiento, menores patrones de errores ya que la tasa del error es menor y el aprendizaje se consolida.

En el modelo de regresión al incluir las variables de habilidad o dominio⁹⁴ y la tasa del error explican en un 45.1% la variable aprendizaje. Con un $R^2 = 0.451$ ($r = 0.672$, $p < 0.05$). La habilidad o dominio que los estudiantes presentan al realizar los ejercicios de la división si es significativo en el aprendizaje y modera en la relación entre el aprendizaje y la tasa del error (frecuencias de errores) que se presenta en los estudiantes con un $p = 0.05$.

Las escuelas que presentan la mayor cantidad de problemas sin evidencia fueron las escuelas Ciudad Vieja y la Escuela San Miguel Milpas Altas. Sí existe además diferencia significativa entre las medias de las tasas (porcentaje) de error entre, por lo menos, un par de grupos de escuelas ($F_{\text{critico}} = 2.438 < F_{\text{calculado}} = 26.23$, $p < 0.05$) al momento de realizar la operación aritmética de la división con un $\alpha = 0.05$.

Con los datos analizados de las pruebas de matemáticas de 6º grado de primaria se puede explicar que no existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasa (porcentaje) de error (X^2 calculado = 51.053 < X^2 critico = 55.76) con un $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre si. Si bien existe un efecto de la variable tasa (porcentaje) de error en el aprendizaje este estudio no puede ser concluyente en determinar en cuál etapa del proceso de categorización del error según Ann Newman (1977) radica la dificultad. Este estudio para estar completo (como ya se menciona en anterioridad) debe incluirse en el futuro la serie de entrevistas individuales a los estudiantes de 6º grado de primaria de las 8 escuelas de la Familia de la Esperanza en el departamento de Sacatepéquez.

Aunque se han hecho serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores con base en una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, el hecho es que hasta el momento, no se han superado los niveles generales solo a niveles empíricos descriptivos y no existe un desarrollo fundamentado teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los

⁹⁴ PREM_DOMINIO y POSM_DOMINIO

errores en términos de obstáculos, es decir en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas. A raíz de los avances tecnológicos, de la neurociencia, neuroeducación y con el conocimiento de los patrones de errores (*bugs*) con la teoría de la categorización de Ann Newman (1977) y la Teoría de la Reparación del Error de Van Lehn (1980) se empieza las postrimerías del estudio de los patrones del error en los algoritmos para fundamentar y encaminar a la humanidad hacia las bases de la Inteligencia Artificial.

Se necesitan más de momentos en dar respuestas equivocadas o erróneas porque están llenos de oportunidades para aprender. El cometer un error y ser corregido es una de las más importantes y más poderosos momentos para adquirir y retener un aprendizaje. El punto está en cómo se reacciona el docente ante una respuesta equivocada de un alumno y cómo le ayudamos a aprender de sus errores (Giráldez, 2018).

El docente debe constantemente innovar en la didáctica y la investigación en matemática es su apoyo. Por lo que, al emprender las investigaciones deben incluirse como variables de estudio la cantidad de errores en los procesos, tipos de errores encontrados, medición de las tasas del error (los cuales apoyan a encontrar tasas del aprendizaje o curvas del aprendizaje) y finalmente medir el dominio o habilidad de los estudiantes al desarrollar los procedimientos.

La enseñanza matemática debe incluir: una instrucción reflexiva, instrucción motivante, con un aprendizaje basado en problemas y proyectos, enseñanza experimental, aula invertida, círculos matemáticos, evaluaciones tipo orales además de las escritas y ser del tipo divulgación científica compartida para toda la comunidad educativa.

XI. RECOMENDACIONES

Los errores ayudan a aprender ya que la estrategia que se ha utilizado para resolver un problema ayuda a que los aprendizajes sean más sólidos que cuando se limita el estudiante a memorizar y dar la respuesta correcta. Actualmente los sistemas educativos castigan los errores en lugar de verlos como una oportunidad de aprendizaje.

Cuando un estudiante es consciente de que la respuesta que está otorgando al problema no es la correcta, debería intentar resolver el mismo problema a un nivel más profundo en comparación con alguien que simplemente ha memorizado la respuesta.

Los docentes no deberían limitarse a solo corregir el error, sino asegurarse de que los estudiantes reconocen y comprenden la razón por la cual la respuesta no es la correcta. Un estudiante que es capaz de corregir una respuesta incorrecta experimenta una sensación de éxito personal. Siente que su esfuerzo valió la pena y que sus habilidades mejoran. Esa experiencia de mejora le motiva a ser más persistente y a esforzarse cada vez que tiene que alcanzar una meta de aprendizaje porque considera que es capaz de alcanzarla.

Los errores presentan una evidencia al docente sobre la situación de cada estudiante y sobre los déficits en el aprendizaje. Los errores muestran si el estudiante comprende los requisitos y cómo se pueden encontrar en el aula una manera óptima cómo conectar los conocimientos nuevos con los previos. Los errores que presentan los estudiantes ofrecen al docente una información importante para apoyar al docente en cómo estructurar la siguiente o siguientes sesiones de clases. Si los estudiantes pueden aprender de sus errores, deberían saber que por los docentes que cometer errores no es nada grave. Lo que los docentes deben fomentar en el aula es un clima de confianza en la cual los estudiantes puedan cometer y aprender de sus errores. El docente debe dedicarse a animarlos a sus estudiantes a que continúen buscando la solución correcta. De ese modo la recompensa por el

aprendizaje sigue siendo el foco de atención. Los estudiantes no solo necesitan permiso para equivocarse, sino que deben sentir y saber que está bien equivocarse.

El docente debe retroalimentar al estudiante que comete el error o errores lo antes posible para que el pensamiento incorrecto u obstáculo no pueda afianzarse en la mente de este para que pueda desaprender. El proceso de enseñanza debería seguir los siguientes pasos:

- Actividades de práctica suficientes no es sinónimo a tareas extensas
- Posibles escenarios de error o errores
- Estudiante recibe retroalimentación (“*feedback*”) por el docente u compañero de clase
- Estudiante reflexiona sobre el “*feedback*” recibido
- Volver a intentarlo

Los docentes deben otorgar un espacio a los estudiantes para que tengan la posibilidad de corregir sus propios errores en cuanto los hayan cometido ya que pueden tener un impacto positivo en su motivación para el aprendizaje. El estudiante debe tener un tiempo para aprender a descubrir la raíz del problema por ejemplo no haber prestado suficiente atención, desaprender a realizar un proceso y adoptar otro más efectivo, repetir un error y dejarlo de hacer, tener un obstáculo previo, no entender el enunciado, etc. Lo que el docente debe apoyar es a que el estudiante entienda y modifique procesos inadecuados o hábitos no efectivos.

Para futuras investigaciones en cuanto al tema del análisis y categorización del error se aconseja incluir la serie de entrevistas a los estudiantes al momento de realizar los procesos a lápiz y papel. De tal forma que, el análisis de categorización de Ann Newman (1977) sería un análisis de los errores completo, incluyendo las partes de lectura, comprensión y de transformación.

Se recomienda incluir como variable de estudio la lengua materna de los estudiantes para considerar la relación o no de las diversas lenguas que se hablan en las comunidades y, sugerir formas de apoyar a estas poblaciones con recursos didácticos adecuados y de gran apoyo didáctico en la lengua materna.

XII. BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa Maria Argentina.

Almenara, J. (2007). *Tecnología Educativa*. Mc Graw Hill Madrid.

Ambrose, Rebecca, et al., (2000). Children's Invention of Multiplication and Division Algorithms. *ABC article*. University of Wisconsin-Madison. USA.

Arévalo, Alejandra, et al., (2012). *Dificultades del Aprendizaje de Matemáticas: Características de los errores asociados a los obstáculos que presentan los alumnos en el área de álgebra*. Universidad San Sebastián. Chile.

Ashlock, R. (2006). *Error Patterns in Computation. Using Error Patterns to improve instruction*. Pearson New Jersey USA 274 págs.

Astolfi, Jean Pierre (2004). *El "Error" un medio para enseñar*. Díada/SEP Biblioteca para la actualización del Magisterio. Mexico. 7-25.

Avalos, Beatrice and Patrick Scott (2013). *Formación inicial gestión docente*. USAID Reforma Educativa en el aula. Juárez y Asociados. Guatemala.

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI. México.

Bachelard, G. (1948, 2000). *La Formación del Espíritu Científico*. Siglo veintiuno editores, s.a. de c.v. México. 304 págs.

Beasley, T. Mark and Zumbo, Bruno D. (2009). Aligned Rank Tests for Interactions in Split-Plot Designs: Distributional Assumptions and Stochastic Heterogeneity, *Journal of Modern Applied Statistical Methods: Vol. 8: Iss. 1, Article 4*. USA.

Baldor, A. (1983). *Aritmética*. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. México.

Benítez Larghi, S; Lemus, M.; Moguillansky, M.; Welschinger Lascano, N (2016). Digital and Social Inequalities: A Qualitative Assessment of the Impact of the Connecting Equality Program on Argentinean Youth. *The Electronic Journal of Information Systems in Developing Countries, Special Edition on Strengthening Information Society Research Capacity Alliance (sirca) ii*, 69 (2): 1-20.

BID-ICEFI (2016). *La Eficiencia del gasto publico en Educación y Salud en Guatemala 2003 – 2013*. Guatemala. 116 págs.

Boaler, Jo (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing student's potential through creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey – Bass a Wiley Brand. San Francisco, USA. 292 págs.

Boero, Paolo, Pier Luigi Ferrari, Enrica Ferrero (1989). Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm. *The Learning of Mathematics Journal No. 9*, 3. Canadá.

Bronzina, Liliana, et al., (2009). *Aportes para la enseñanza de la matemática*. SERCE. Impresiones Salesianos. Chile.

Brown Seely y Kurt Van Lehn (1980). Repair Theory. *Cognitive Science*, 4, USA. 379-426.

Burrows, J.K. (1976). *A Review of the Literature on Computational Errors with Whole Numbers*. USA.

Celiz, Maria José, Viviana Feliziani y Maria Laura Zingaretti (2007). *Capítulo 9 La resolución de Problemas como objeto de enseñanza y medio para el aprendizaje*. Libro Experiencias, propuestas y Reflexiones para la Clase de Matemáticas. Universidad Nacional de Villa Maria. Argentina.

Coker, Donald (1983). *The Message is in the Algorithm: Diagnosing student error patterns in mathematics*. East Texas State University. USA.

Cox, Linda (1974). *Analysis, Classification, and Frequency of Systematic Error Computational Patterns in the Addition, Subtraction, Multiplication and Division Vertical Algorithms for Grades 2-6 and Special Education Classes*. Bureau of Child Research Children's Rehabilitation Unit University of Kansas Medical Center. USA.

Creswell, John W. (2013). *Qualitative inquiry and research design. Choosing among five approaches*. Sage Publications, Inc. USA.

Devlin, Keith (2011) *Mathematics Education for a New Era: video games as a medium for Learning*. Editorial, Sales, and Customer Services Office MA, USA.

Diamond A. (2014). Executive functions: Insights into ways to help more children thrive. *Zero to Three Magazine* 35(2) USA.

DIGEDUCA (2008). *Informe técnico de factores asociados al rendimiento escolar de graduandos de acuerdo con la Evaluación Nacional de Lectura y Matemáticas 2008*. Guatemala.

DIGEDUCA (2010). *Variables utilizadas para el análisis de factores asociados al rendimiento de los estudiantes*. Guatemala.

DIGEDUCA (2016). *Así estamos enseñando matemáticas: Situación de la enseñanza de la matemática en Guatemala. Una perspectiva de docentes de matemáticas y de profesionales expertos en el área*. Guatemala.

Duhalde, Maria Elena (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Aique Grupo Editor. Argentina.

Dummett, Michael (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*. Oxford University London: Duckworth and Cambridge MA: Harvard University Press, 1991(a). USA.

Engler, Adriana, Maria Inés Gregorini, Daniela Muller, Silvia Vrancken y Marcela Hecklein. (2003). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Litoral. Argentina Santa Fe. Argentina.

Estely, Cristina y Mónica Villareal (1990). *Análisis y categorización de errores en Matemáticas*. Universidad de Córdoba Argentina.

Friz Carrillo, Miguel (2009). Conocimiento que poseen los estudiantes de pedagogía en dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM) *Universidad Bio Bio Estudios Pedagógicos XXXV, No. 1*. Chile.

Gálvez-Sobral, J.A. (2011). *El fenómeno del acoso escolar (bullying) en Guatemala: resultados de una muestra nacional de sexto grado del Nivel Primario*. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación. Guatemala.

Garofalo, J. Frank Lester, y Mulhern (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. A project of the Mathematics Education Development Center School of Education*. Indiana University, Bloomington, USA.

Gearheart, Bill R. (1987). *Incapacidad para el aprendizaje*. Editorial México: El manual moderno. México.

Giráldez, Andrea (2018). *El error como oportunidad de aprendizaje. ¿Y si dejamos de castigar los errores?* McGraw-Hill Interamericana. México.

González, Marissa (2014). *Apoyo Psicológico y Educativo del manejo de emociones en adolescentes que asistieron al Programa Metamorfosis de las Familias afiliadas en la Fundación Familias de Esperanza, en la Antigua Guatemala*. USAC. Guatemala.

Hayes, A. (2013). *Introduction to Mediation, Moderation and Conditional Process Analysis A regression-based approach*. The Guilford Press. New York, USA. 505 págs.

Hernández Sampieri, R., et al. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill Education. México.

INE/ENEI (2014). Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía de Guatemala. *Encuesta Nacional de Empleos e Ingresos 1-2014*. Guatemala.

INE/ENCOVI (2015). Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía de Guatemala. *República de Guatemala. Encuesta Nacional de Condiciones de Vida. Principales Resultados*. Guatemala.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del comportamiento*. Editorial McGraw-Hill. Mexico.

Lakatos, Imre (1978). Proofs and Refutations, *British Journal for the Philosophy of Science*, UK.

Landa, Lev (1999). *Landamatics Instructional Design Theory*. USA.

Lizarzaburu, Alfonso (2001). *Pluriculturalidad y Aprendizaje de la Matemática en América Latina. Experiencias y Desafíos*. McGraw-Hill Interamericana. México.

Lopez, Oscar (2016). *Plan Estratégico de Educación 2016 -2020 MINEDUC*. Guatemala.

Lopez, Ricardo y Sánchez Ana Belén (2013). *Análisis del error sistemático en la sustracción. Enseñanza de las Ciencias*. Universidad de Salamanca. España.

Lucchini, C. T. (2006). *Errar no es siempre un error: Un Estudio de Los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de niños y jóvenes estudiantes*. Fundación educar Arauco. Argentina.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. University of California, Berkeley. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA. 166 págs.

Marzano, R. J., Debra J. Pickering, Jane E. Pollock (2001). *Classroom instruction that works. Research based strategies for increasing student achievement*. ASCD. Virginia, USA. 178 págs.

Mathis, C. B. John W. Cotton, Lee Sechrest (1970). *Psychological Foundations of Education Learning and Teaching*. Academic Press Inc, USA. 778 págs.

Montserrat Alguacil de Nicolás (2016). Psicología Evolutiva. *International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD Revista de Psicología*, N°1-Vol.1, USA.

Morales, Blanca E. (1993). *La Habilidad General y El Rendimiento en Matemática en Estudiantes de 4º grado de primaria de diferentes niveles socioeconomicos*. Tesis de Licenciatura en Psicología, Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala.

Morín, Edgar (1999). *Los siete saberes*. UNESCO. México. 67 págs.

Nerida Ellerton and Maken Clements (1992). *Implications of Newman Research for the issue of "What is basic in school mathematics?"* Faculty of Education Deakin University, USA.

Newman, Ann (1977). Analysis of sixth grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin* 39, 31-43 USA.

Nunnally, J. (1987) *Teoría Psicométrica*. McGraw-Hill Interamericana. México.

Olabuenaga, J.L. Villa, Aurelio (2003). *Técnicas de Triangulación y control de calidad en la investigación socioeducativa*. ICE Universidad de DEUSTO Bilbao, España.

Opengart, R. (2007). Emotionally Intelligent Mentoring: Reconceptualizing Effective Mentoring Relationships. *Human Resource Development Review* 14(3) The University of Georgia, Athens 345 -258. USA.

Piaget, Jean P. (1970). *Science of education and the psychology of the child*. Onion Press New York, USA. 186 págs.

Pinar, W. William M Reynolds, Patrick Slattery (2008). *Understanding Curriculum: An Introduction to the Study of Historical and Contemporary Curriculum Discourses*. Peter Lang editions. New York, USA. 1144 págs.

PNUD (2008). Guatemala: ¿Una economía al servicio del desarrollo humano? *Informe Nacional de Desarrollo Humano 2007/2008 Volumen I*. Guatemala.

Pochulu, M. D. (2004). *Análisis y categorización de los errores en el aprendizaje de las matemáticas en alumnos que ingresan a la universidad*. Revista iberoamericana de Educación. Argentina.

Polya, G. (1945). *How to Solve It A new aspect of mathematical method*. First Princenton Science Library Edition. USA 215 págs.

Popper, K (1979). *El desarrollo del conocimiento científico. Siglo XXI*. McGraw – Hill Interamericana. México.

Popper, K. (1963). *Conjectures and Refutations*. Routledge Classics. London. 582 págs.

Pozo, J. (1989, 1997). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid. 280 págs.

Puerto, S. M. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Revista iberoamericana de Educación. Argentina.

Radatz, H (1980). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education Vo9*. USA.

Radatz, H (1980). *Student's Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics Journal*. Canada.

Reigeluth, Charles (1999). *Instructional-Design Theories and Models: A new Paradigm of Instructional Theory Volume II*. USA.

Reimers, F. M., Connie K. Chung (2016). *Enseñanza y Aprendizaje en el siglo XXI. Metas, políticas educativas y currículo en seis países*. Fondo de Cultura Economica. México. 325 págs.

Rico, L (1992). *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática*. Universidad de Granada, España.

Rico, L., et al., (1995). *Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Ritchley, Ferris J. (2008). *Estadística para las Ciencias Sociales* (2ª edición) Editorial McGraw Hill Interamericano. México.

Roberts, G.H. (1968). The failure strategies of Third Grade Arithmetic Pupils *In: The Arithmetic Teacher* 15(1968), S. USA. 442-446.

Rochera, M. J., Elena Barberá, Javier Onrubia (1990). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Una perspectiva psicológica. (comp.) Vol 2, 1991 Psicología de la Educación Escolar*. España. 487 -508.

Romberg, T. A., Thomas P. Carpenter (2005). *Understanding Mathematics and Science Matters*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA. 336 págs.

Rudge, Gillian (1978). *Grade 7 Student's Understandings of división: a classroom case study*. University of British Columbia, USA.

Ruiz Olabuenaga, J.I. (2003). *Técnicas de Triangulación y control de Calidad en la Investigación Socioeducativa*. Ediciones Mensajero, S.A. España.

Russel, B. (1927). *In outline of Philosophy*. W.W. Norton & Company. New York, USA.

Saz, Marco Antonio (2006). *Análisis de los factores asociados con el rendimiento de los estudiantes de tercero básico en matemática y lectura, del año 2006*. Tesis de Maestría, Universidad del Valle de Guatemala. Guatemala.

Sherrington, C.S. (1916). *The Integrative Action of the Nervous System*. Cambridge University Press. Archive. London.

Solis, Lucia (2015). *Algoritmo basado en A. Baldor para tipificar los pasos de la operación aritmética de la división*. Trabajo de Campo, Universidad del Valle Guatemala. Guatemala.

Stodolsky, S. S. (1988). *The Subject Matters*. The University of Chicago Press. Chicago, USA. 196 págs.

UNESCO (2014). *Enseñanza y aprendizaje: lograr la calidad para todos*. Paris. 501 págs.

UNICEF (2015). *Mas Inversión: Hemos avanzado, pero la niñez y adolescencia necesitan más inversión social*. Guatemala.

USAID – MINEDUC (2007). *Estándares Educativos para Guatemala: Programa Estándares e Investigación Educativas*. Guatemala. 95 págs.

Valdés Héctor, et al., (2008). *Los aprendizajes de los estudiantes en América Latina y el Caribe. Resumen ejecutivo del primer reporte de resultados del segundo estudio regional comparativo y explicativo*. SERCE. Impresiones Salesianos. Chile.

Valiente, Santiago (2000). *Didáctica de la matemática: El libro de los recursos*. Editorial La muralla, S.A. Madrid.

Valverde, Gilbert (2012). *La Educación en Matemáticas y Ciencias que América Latina Necesita: Crisis y oportunidades*. Paidós. Colombia.

Van Lehn, K. (1990). *Mind Bugs: The origins of procedural misconceptions (Learning, Development and Conceptual Change)*. USA.

Van Lehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(2) pp 3-71 Xerox Palo Alto Research Center, USA.

Van Lehn K. (1983). *Human Procedural Skill Acquisition: Theory, Model and Psychological Validation*. AAAI-83 Proceedings. USA.

Van Lehn K., et al., (2007). *Exploring alternative methods for Error Attribution in Learning Curves Analysis in Intelligent Tutoring Systems*. University of Pittsburgh, USA.

Vigotsky, Lev S. (1978). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Editorial Critica, grupo Grijalbo. Barcelona.

Vilches, Enrique (2006). *Impacto de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación para la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*. Revista Digital Matemática Educación e Internet, Costa Rica.

Voight, Jessi. (1938). *An Analysis of Errors in Long Division*. Universidad de Arizona, USA.

Winter, Joost and Dimitra Dodou. (2012). *Five-point Likert ítems: t –test versus Mann-Whitney Wilcoxon*. University of Technology Practical Assessment, Research & Evaluation, USA.

Wolfram, C. (2010). *Teaching kids' real math with computers*. TED Talk Ideas worth spreading. USA. (Recuperado en www.ted.com).

Young, R (1981). *Errors in children's subtraction*. Cognitive Science. USA.

Zunino, Delia Lerner (2000). *La matemática en la escuela*. Aique Grupo Editor. Argentina.

Recuperado de Van Lehn, K. (1990). *Mind Bugs: The Origins of Procedural Misconceptions*:

[https://books.google.com.gt/books?hl=es&lr=&id=owY9seMJ4RwC&oi=fnd&pg=PR9&dq=vanlehn+k.+\(1990\)+Mind+bugs&ots=vO8jrviYIF&sig=6c8nolE0bFiHI71IUY4NUQFgU9g#v=onepage&q=vanlehn%20k.%20\(1990\)%20Mind%20bugs&f=false](https://books.google.com.gt/books?hl=es&lr=&id=owY9seMJ4RwC&oi=fnd&pg=PR9&dq=vanlehn+k.+(1990)+Mind+bugs&ots=vO8jrviYIF&sig=6c8nolE0bFiHI71IUY4NUQFgU9g#v=onepage&q=vanlehn%20k.%20(1990)%20Mind%20bugs&f=false)

Recuperado de Sanchis, C. (2016). *Aprendizaje cooperative y neuroeducación: guiando la poda sináptica. Escuela con Cerebro: Un espacio de documentación y debate sobre Neurodidáctica*:

<https://escuelaconcerebro.wordpress.com/>

Recuperado de DIGEDUCA/Ministerio de Educación Guatemala:

http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/documents/Resultados_Graduandos_2015/Sa catepequez.pdf

Recuperado de Regression with SPSS *Chapter 5: Additional coding systems for categorical variables in regression analysis*:

<http://www.ats.ucla.edu/stat/spss/webbooks/reg/chapter5/spssreg5.htm>

Recuperado de Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía Guatemala:

<https://www.ine.gob.gt/sistema/uploads/2015/12/11/vjNVdb4IZswOj0ZtuivPlcaAXet8LZqZ.pdf>

Recuperado de Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía Guatemala:

<https://www.ine.gob.gt/sistema/uploads/2014/12/03/qINtWPkxWyP463fpJgnPOQrjox4JdRBO.pdf>

Recuperado de Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía Guatemala:

<https://www.ine.gob.gt/sistema/uploads/2014/02/26/L5pNHMXzxy5FFWmk9NHCrK9x7E5Qqvvy.pdf>

Recuperado de Instituto Nacional de Estadística/Ministerio de Economía Guatemala:

<https://www.ine.gob.gt/sistema/uploads/2014/11/19/L2DEWN0Bo9ArlcqCpcFPSVOzoeFKfIME.pdf>

Recuperado de Escuela con Cerebro:

<https://escuelaconcerebro.wordpress.com/>

Recuperado de WIPO World Intellectual Property Organization (1985): *Constitucion Politica de la Republica de Guatemala*:

http://www.wipo.int/wipolex/en/text.jsp?file_id=194705#LinkTarget_2495

XIII. ANEXOS

- A. ANEXO 01 Esquema de categorización de Ann Newman (1977) con base en el algoritmo LUCIA (2015) para definir los tipos de error
- B. ANEXO 02 Algoritmo LUCIA basado en A. Baldor. Aritmética, autoría Lucia Solis Claverie (2015)
- C. ANEXO 03 Guía de entrevista de matemáticas (profesionales expertos) / Guía de encuestas de matemáticas (a docentes de matemáticas)
- D. ANEXO 04 Pruebas de hipótesis / Curvas tasa del error / Curva del aprendizaje / Modelo de regresión 1(a) /Resumen modelos de regresión / Tablas de índices de discriminación y dificultad de los ítems
- E. ANEXO 05 Tabla 20. Orígenes del estudio del análisis del error
- F. ANEXO 06 Tabla 21. Especialistas en la categorización de errores
- G. ANEXO 07 Transcripciones de entrevistas
- H. ANEXO 08 Alcances y limitaciones de la investigación
- I. ANEXO 09 Resultados pruebas matemáticas Familias de la Esperanza por estudiante

A. ANEXO 01

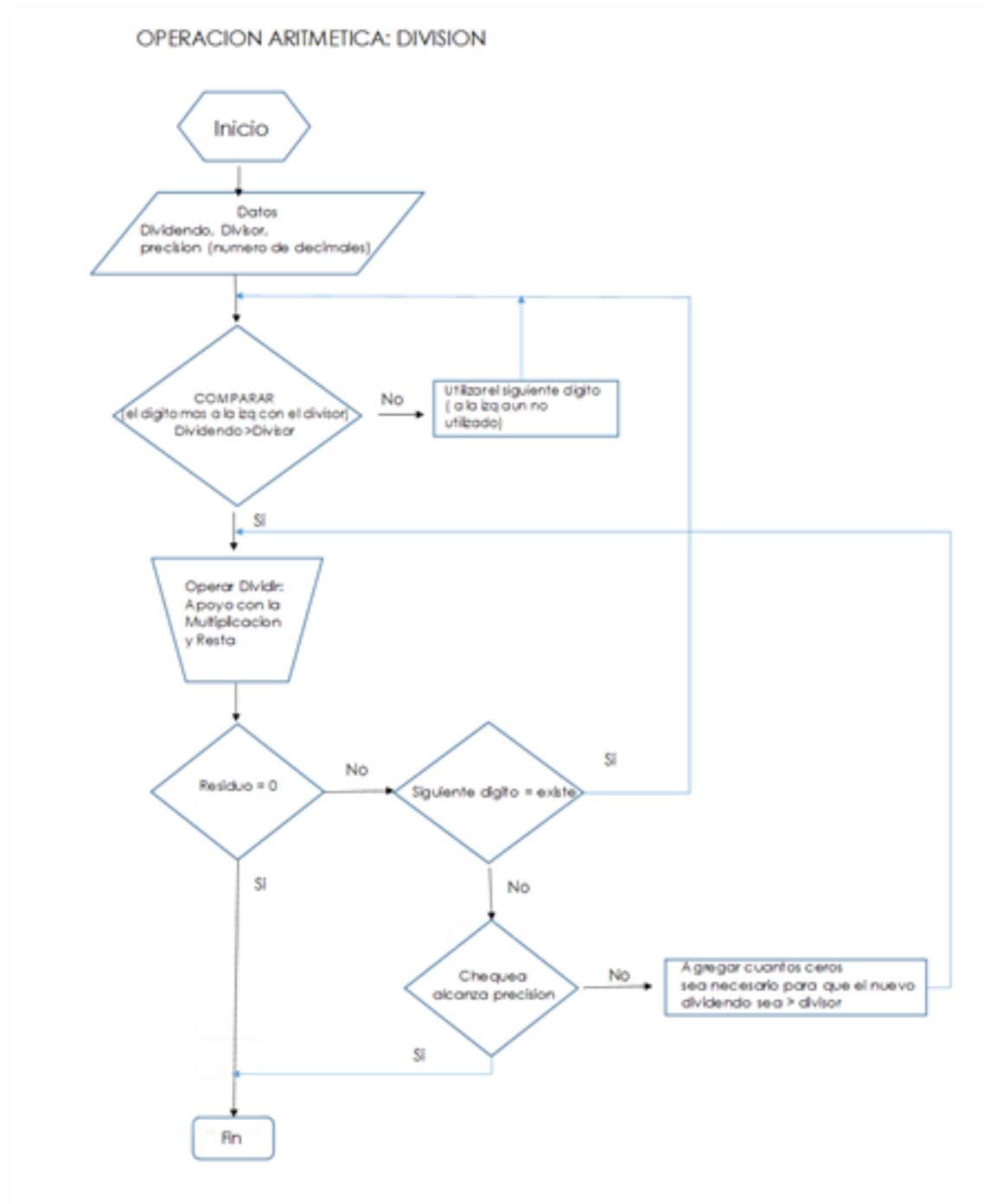
Esquema de Categorización del error Ann Newman (1977) con base en el algoritmo LUCIA (2015) para definir tipos de error.

NO. PASO	PASO	ALGORITMO LUCIA	TIPO DE ERROR	CODIGO DEL ERROR	DEFINICION	EXPLICACION	EJEMPLO <i>herm</i>
1	DATOS		USO DE DATOS	1	Se añaden datos extraños, se olvidan datos necesarios, se lee incorrectamente el enunciado.	No copia la operación con precisión	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 11645} \\ \end{array}$ era 8
2	COMPARACION		CONCEPTUAL	2	Fallas en el razonamiento.	No utiliza los dígitos de la izquierda del dividendo necesarios para que: $\text{dividendo} > \text{divisor}$	$\begin{array}{r} 4 \overline{) 11648} \\ \end{array}$ No reconoce que necesita
3	DIVISION		PROCEDIMIENTO	3	Deformación del algoritmo	Utiliza algún procedimiento distinto a identificar el número que multiplicado por el divisor sea igual o se aproxime al dividendo (utilizado)	$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \overline{) 11648} \\ \end{array}$ suma, no multiplica
			FLUIDEZ	4	Errores de cálculo	No maneja las tablas de multiplicar	$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \overline{) 11648} \\ \end{array}$ no sabe tablas
			PROCEDIMIENTO	3	Deformación del algoritmo	Utiliza algún procedimiento distinto a la resta.	$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \overline{) 11648} \\ \end{array}$ suma en vez de restar
4	RESTA		CONCEPTUAL	2	Fallas en el razonamiento.	Resta el dígito menor del mayor sin importar su posición en la resta.	Si una resta queda: $\begin{array}{r} 915 \\ - 165 \\ \hline 150 \end{array}$ siempre menor menos mayor
			FLUIDEZ	4	Errores de cálculo	Error en cálculo mental de resta	$\begin{array}{r} 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array}$ mal cálculo
5	BAJAR SIGUIENTE DIGITO		CONCEPTUAL	2	Fallas en el razonamiento.	No utiliza los dígitos de la izquierda del dividendo necesarios para que: $\text{dividendo} > \text{divisor}$	
			PROCEDIMIENTO	3	Deformación del algoritmo	No agrega los ceros necesarios para que el nuevo dividendo sea $>$ que el divisor	$\begin{array}{r} 21 \\ 42 \overline{) 84} \\ \end{array}$ falta subir 0

Fuente: Autoría propia, según algoritmo – “LUCIA” - Trabajo de Campo UVG – 2015

B. ANEXO 02

Algoritmo LUCIA basado por A. Baldor Aritmética, autoría Lucia Solis Claverie (2015)



C. ANEXO 03

Guía de entrevista de matemáticas (Profesionales expertos)

1. ¿Cómo describe la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala?
2. ¿Cuáles son los factores que inciden directamente en la descripción que usted acaba de dar?
3. ¿Qué aspectos son los que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas que se da en el país?
4. ¿Cuál es la metodología que se usa actualmente, de forma más común, para la enseñanza de las matemáticas?
5. ¿Cómo describe la práctica pedagógica más exitosa que conozca, en la enseñanza de las matemáticas?
6. ¿Qué metodología recomendaría usted como efectiva para la enseñanza de las matemáticas?
7. ¿Cuáles son, según su criterio, las fortalezas en la enseñanza de las matemáticas que se da en el país?
8. ¿Qué espacios vacíos han quedado para investigar en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?
9. ¿Cuál es el perfil real de los docentes de matemáticas? En el nivel primario, en los colegios, en las escuelas públicas. Condiciones, preparación, situación laboral, edad, formación. ¿Cuál es el perfil ideal?
10. ¿Cuáles son las nuevas tendencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

Adicionales:

11. ¿Qué, cómo y cuándo impartir el tema de la división?

12. ¿Cuáles son las mayores dificultades que se presentan en la matemática a nivel de primaria? (Desde 1er grado a 6º grado)?
13. ¿Cuál es la percepción del error que prevalece en los estudiantes en la operación de la división?
14. ¿Qué estrategias didácticas apoyan el buen desenvolvimiento de la base matemática en primaria (desde 1er grado a 6º grado)?

Guía de encuesta de matemáticas (Docentes)

1. ¿Cuál es su formación?
2. ¿Cómo llega usted a ser docente de matemáticas?
3. ¿Cuáles son las principales dificultades /retos/ que usted ha encontrado como docente de matemáticas?
4. ¿Cuál es la metodología que usted usa para enseñar las matemáticas?
5. ¿Cómo describe la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala?
6. ¿Cuáles son los factores que inciden directamente en la descripción que usted acaba de dar?
7. ¿Qué aspectos son los que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas que se da en el país?
8. ¿Cuál es la metodología que se usa actualmente, de forma más común, para la enseñanza de las matemáticas?
9. ¿Cómo describe la práctica pedagógica más exitosa que conozca, en la enseñanza de las matemáticas?
10. ¿Qué metodología recomendaría usted como efectiva para la enseñanza de las matemáticas?
11. ¿Cuáles son, a su criterio, las fortalezas en la enseñanza de las matemáticas que se da en el país?

12. ¿Qué espacios vacíos han quedado para investigar en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

13. ¿Cuál es el perfil real de los docentes de matemáticas? En el nivel primario, en los colegios, en las escuelas públicas. Condiciones, preparación, situación laboral, edad, formación. ¿Cuál es el perfil ideal?

14. ¿Cuáles son las nuevas tendencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

Guía de encuesta de matemáticas

1. ¿Cuál es su más alta formación? (Solo una opción)

- a. profesorado
- b. licenciatura
- c. maestría
- d. doctorado

2. ¿Por qué razón primaria es usted docente de matemáticas? (Solo una opción)

- a. por vocación
- b. por oportunidad laboral
- c. por experiencia laboral
- d. para aumentar/complementar su ingreso económico

3. ¿Cuáles son las principales dificultades /retos/ que usted ha encontrado como docente de matemáticas? (Circule como máximo 5 opciones)

- a. Desconocimiento de metodología específica para la enseñanza de la matemática
- b. Escaso conocimiento de matemática

- c. Temor o mala percepción de la matemática
- d. Falta de incentivos al docente
- e. Docentes a los que no les gusta la matemática
- f. Prepotencia y escaso interés en que el alumno aprenda
- g. Poco interés en capacitación por el docente
- h. Percepción negativa de la estudiante inculcada en casa hacia la matemática
- i. Distractores tecnología
- j. Mucho contenido que no da tiempo cubrir todo
- k. Huelgas organizadas por el sindicato de docentes
- l. Nivel socioeconómico bajo de los estudiantes y docentes
- m. Pruebas descontextualizadas

**4. ¿Cuál es la metodología que usted usa para enseñar las matemáticas?
(Circule como máximo 5 opciones)**

- a. Centrado en la vida real y relacionando el aprendizaje con el entorno inmediato
- b. Partiendo de los propios intereses
- c. Llevar a cabo el aprendizaje por investigación generando actitudes de indagación y descubrimiento
- d. Crear un ambiente de trabajo en el aula que favorezca el aprendizaje
- e. Contenidos que resulten interesantes desde el punto de vista de las matemáticas
- f. Facilitar la negociación de significados
- g. Uso del texto de matemática

- h. Tareas en casa frecuentes
- i. Fijar aprendizajes en el aula
- j. Estimular la participación activa
- k. Despertar el interés por el aprendizaje de matemática
- l. Activar procesos: cognitivos, afectivos y sociales

5. ¿Cómo describe la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Guatemala? (Circule como máximo 5 opciones)

- a. Desconocimiento de metodología específica para la enseñanza de la matemática por los docentes
- b. Deficiente formación docente en el área de matemática
- c. Escasos, deficientes o inexistentes espacios de formación profesional docente a nivel licenciatura
- d. Prepotencia y escaso interés en que el alumno aprenda
- e. Escaso personal especializado para capacitar docentes
- f. Falta de dirección central “orientadora” a los docentes
- g. Falta de incentivos a los docentes
- h. Poco interés en capacitación por parte de los docentes
- i. Desacertadas estrategias de evaluación a los estudiantes de todos los niveles
- j. Ausencia de supervisión a docentes por el MINEDUC
- k. Problemas de evaluación al desempeño de los docentes, sin solución a corto plazo

6. ¿Cuáles son los ámbitos que inciden directamente en la situación actual de la problemática en Guatemala (Solo una opción)

- a. ámbito Social -Económico
- b. ámbito Curricular -Pedagógico
- c. ámbito Liderazgo- Organizativo Comunitario
- d. ámbito Administrativo- Presupuestario

7. ¿Qué aspectos son los que merecen mayor atención para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas que se da en el país? (Solo una opción)

- a. La enseñanza mecánica, memorística, impartida de forma magistral y muy poco participativa que aún la mayoría de docentes práctica en las aulas.
- b. Los docentes desconocen la metodología más adecuada para hacerlo.
- c. Lograr la identificación del estudiante con la temática y motivarle en su aplicación en su vida cotidiana y en su entorno inmediato.
- d. Capacitación a los docentes en servicio que forme teórica y metodológicamente a los docentes de primaria para enseñar matemáticas.
- e. La malla curricular de la formación inicial del docente, en el área de matemáticas que impulse un mayor énfasis en la metodología de enseñanza de la misma.

8. ¿Cuál de estas prácticas pedagógicas es la más exitosa actualmente para la enseñanza de las matemáticas? (Solo una opción)

- a. Práctica pedagógica de Finlandia
- b. Práctica pedagógica de Estados Unidos

- c. Práctica pedagógica México
- d. Práctica pedagógica Singapur
- e. Práctica pedagógica rusa

9. ¿Cuáles son, a su criterio, las fortalezas en la enseñanza de las matemáticas que se da en el país? (Solo tres opciones)

- a. Creatividad, flexibilidad, dinámicas grupales, juegos y preparación de los docentes
- b. Estrategias didácticas con carácter lúdico o uso de juegos didácticos
- c. Uso de estrategias didácticas diversas
- d. Dominio de los contenidos por los docentes
- e. Buenas relaciones y comunicación de los docentes con sus estudiantes
- f. Explicaciones claras en el aula por los docentes

10. ¿Cuáles son las nuevas tendencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? (Solo una opción)

- a. La tendencia es hacer desaparecer el carácter formal y dogmático que la dominaba. Se enseña dando más libertad al alumno en la elección de técnicas y estrategias para el cálculo.
- b. La tendencia es presentando situaciones de la vida diaria, o internamente, mediante juegos con reglas bien determinadas y bien comprendidas. Diferentes alumnos necesitan diferentes motivaciones.
- c. Conocimiento matemático, razonamiento matemático y aplicaciones de ello, dentro de las posibilidades intelectuales de los niños, son los nuevos objetivos de la enseñanza de la matemática en la escuela elemental.
- d. “Álgebratización” de la matemática en la escuela elemental antes que la aritmética

11. ¿Utiliza el análisis del error en las pruebas escritas y/u orales como retroalimentación? (Solo una opción)

- a. Sí
- b. No

12. ¿Cómo evalúa a sus estudiantes en la mayoría de las veces? (Solo una opción)

- a. Evaluación Formativa
- b. Evaluación Sumativa

13. ¿Incluye en su metodología de enseñanza una participación (activa) entre los estudiantes? (Solo una opción)

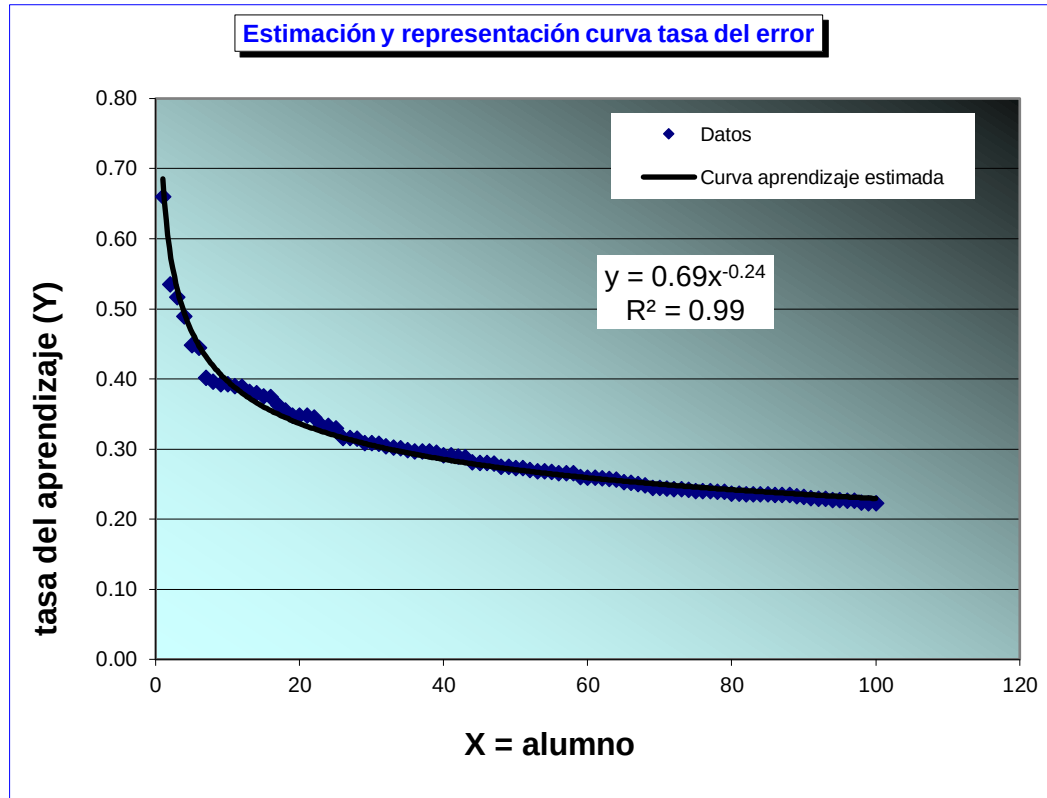
- a. Sí
- b. No

14. ¿Cómo motiva a sus alumnos en el aula durante clase? (Dos opciones como máximo)

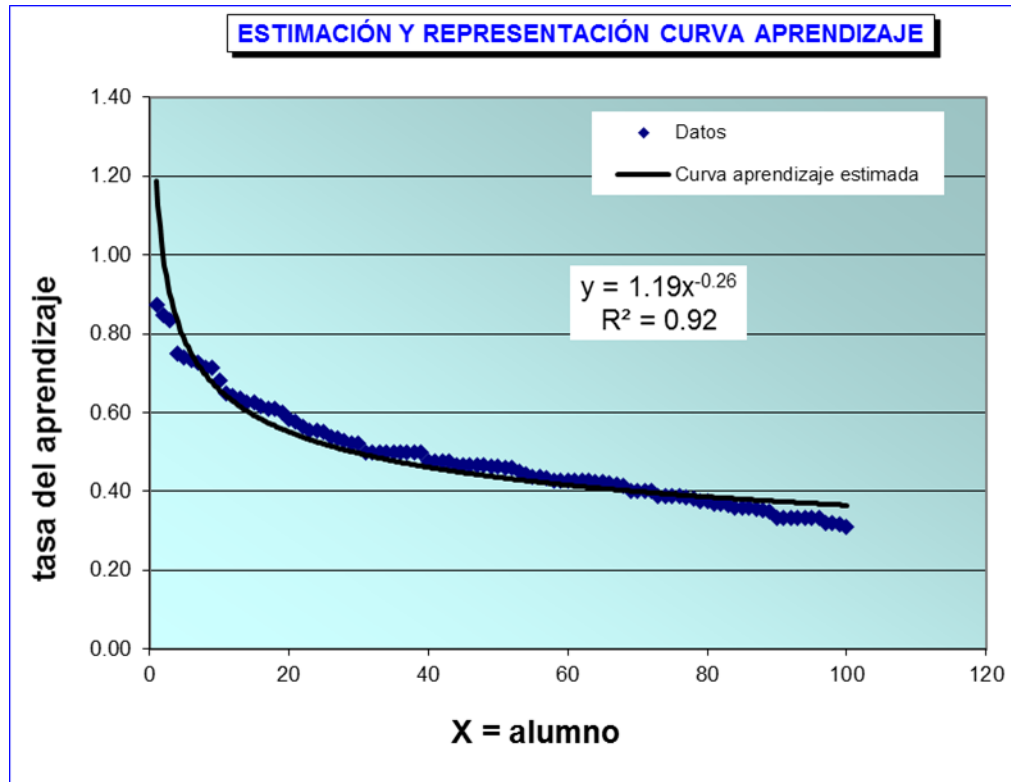
- a. Trabajos en clase en grupo
- b. Pruebas con el libro abierto
- c. Discusiones sobre los problemas
- d. Juegos y entretenimientos acordes a la edad y al contenido a cubrir
- e. Otro: __

D. ANEXO 04

Problema de Investigación	Hipótesis de investigación	Hipótesis nula
Cuales son los tipos de error que los alumnos de 6º grado de primaria de las 8 escuelas pertenecientes al proyecto educativo Familias de La Esperanza en el departamento de Sacatepeque, presentan al momento de operar la división?	$H_{r1}:$ = Se presenta suficiente evidencia que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la falta de fluidez matemática para los estudiantes de 6º grado de primaria. $H_{r2}:$ = Se presenta suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso "Process Skill" en la operación de la división según categorización de Newman (1977). $H_{r3}:$ = : Al menos un par de Media μ tasa de error Escuela 1 $\neq$ Media μ tasa de error Escuela j $H_{r4}:$ = Si existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.	$H_{01}:$ = No hay suficiente evidencia de que el análisis de la categorización de tipos de error revele errores sistemáticos de concepciones erróneas, de uso incorrecto de los datos, de procedimientos incorrectos y de la falta de fluidez matemática para los estudiantes de 6º grado de primaria $H_{02}:$ = No hay suficiente evidencia de que el porcentaje (tasa) de error más común de los estudiantes de 6º grado de primaria pertenecientes a Familias de Esperanza se relacione al error de Habilidades Ejecución del Proceso "Process Skill" en la operación de la división según categorización de Newman (1977). $H_{03}:$ = Media μ tasa de error Escuela 1 = Media μ tasa de error Escuela 2 = ... = Media μ tasa de error Escuela 8 $H_{r4}:$ = Si existe una dependencia significativa entre la variable Escuelas y la variable tasas del error con $\alpha = 0.05$, las variables son independientes entre sí.



Resultados	$k = 10^{\log(k)} =$	0.685
	$r =$	-0.238
	$p = 2^r =$	84.82%



Resultados	$k = 10^{\log(k)} =$	1.188
	$r =$	-0.257
	$p = 2^r =$	83.71%

Modelo de Regresión Lineal 1 (a)

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	PREM_DOMINIO, RAZONY, POSM_DOMINIO ^b		Enter

a. Dependent Variable: APRENDIZ

b. All requested variables entered.

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	19.456	3	6.485	99.643	.000 ^b
	Residual	23.691	364	.065		
	Total	43.147	367			

a. Dependent Variable: APRENDIZ

b. Predictors: (Constant), PREM_DOMINIO, RAZONY, POSM_DOMINIO

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.672 ^a	.451	.446	.255118738379999

a. Predictors: (Constant), PREM_DOMINIO, RAZONY, POSM_DOMINIO

b. Dependent Variable: APRENDIZ

Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1 (Constant)	-.195	.054		-3.587	.000
RAZONY	.485	.153	.130	3.166	.002
POSM_DOMINIO	.307	.020	.760	15.554	.000
PREM_DOMINIO	-.239	.020	-.613	-11.991	.000

a. Dependent Variable: APRENDIZ

Resumen Modelos de Regresión:

Modelos de Regresion					
Ec (1)	APRENDIZAJE = -0.2372 +1.115 TASA_ERROR + 0.697 HABILIDAD				
	explica un 12.67%				
Ec(1a)	APRENDIZAJE = -0.195 +0.485 TASA_ERROR + 0.307POSM_DOMINIO - 0.239 PREM_DOMINIO				
	explica un 45.1%				
Ec(2)	TASA_ERROR =9.5167x alumno de escuela -8.4722				
	explica 24.76%				
Ec(3)	APRENDIZAJE = -0.03447 - 0.01477 SEXO + 0.979159TASA_ERROR				
	explica 7%				
Ec(4)	APRENDIZAJE = -0.04274 +0.9841TASA_ERROR				
	explica 7%				

Tablas de Indices de discriminación y dificultad de los ítems.

Interpretation of the Difficulty Index

Range	Difficulty Level
20 & below	Very difficult
21-40	Difficult
41-60	Average
61-80	Easy
81 & above	Very easy

Interpretation of Discrimination Index

Range	Verbal Description
.40 & above	Very Good Item
.30 - .39	Good Item
.20 - .29	Fair Item
.09 - .19	Poor Item

Fuente: <https://ppukmdotorg.wordpress.com/2015/04/02/calculating-omr-indexes/>

E. ANEXO 05

Orígenes del estudio del error:

Tabla 20 Resumen de especialistas en el análisis y categorización del error (Fuente: Engler, Adriana (2003))

Especialista	Año	Descripción
Luis Rico (España)	1999	Refiere a la noción de organizadores para articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica, considerando organizadores del currículo a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las mismas.
Radatz	1980	La aritmética y el conocimiento numérico constituyen el área que predomina en la mayoría de los estudios sobre errores en matemáticas escolares. Las reformas sucesivas del currículo matemática han mostrado el surgimiento de nuevos errores matemáticos debido a los contenidos específicos, la individualización y la diferenciación de la instrucción matemática requiere de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas. Los profesores necesitan un modelo de actuación para diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.
Thorndike (Estados Unidos de América)	1910	Importancia de la determinación de errores.
Weiner, Seseman, Kiesling y Rose(Alemania)	1920	Trataron de obtener patrones de errores en todas las materias para todas las materias y para las distintas edades, proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para la enseñanza de la matemática considerando los errores surgidos, estudiar la predisposición especial para equivocarse y la manera de tratar el error y establecer una clasificación de las causas. Importancia de la determinación de errores
Buswell, Judd y Brueckner(Estados Unidos de América)	1930	Análisis de las dificultades especiales, la persistencia de técnicas erróneas individuales y la agrupación y clasificación de los errores. Importancia de la determinación de errores
Schlaak, Gluck y Pipping(Alemania)	1960	Determinación y causas del error, interpretación de los errores y dificultades de una perspectiva psicológica y la tipificación y clasificación de los errores.
Kuzmitskaya y Menchinskaya (Rusia)	1970	Análisis de errores y las dificultades individuales del aprendizaje en la matemática. Causa de los errores
Villarejo, Fernández Huerta, Centeno, Rico, Castro, González, Coriat y Molina (España)	1950 - 2000	Determinación de los errores más frecuentes, a presentar bases para la enseñanza correctiva, e interpretar para orientar en el proceso de enseñanza
Brousseau, Davis y Werner	1986	Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente a lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de

Especialista	Año	Descripción
		pensamiento se muestra, admiramos si es correcto y decimos que tiene una comprensión inusual, pero cuando se omite algo que es esencial decimos usualmente que el estudiante a cometido un error.
Mulhern(1989)	1989	Los errores surgen de forma espontánea, son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos del estudiante. Predominan los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el docente), se pueden presentar errores ocasionales o al azar. Los alumnos en el momento no toman conciencia del error. Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el estudiante de la información que da el docente. Los estudiantes recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el docente.

Fuente: Elaboración propia, según Bernabeu et al., (2009)

D. ANEXO 06

Especialistas en la categorización de errores:

Tabla 21 de Especialistas en la categorización de errores

Especialista	Año	Descripción
Anne Newman (Australia)	1970	Método de Categorización de Errores:
Watson, Movshovtitz-Hadar, Mulhern, Radatz (Estados Unidos de América)	1980	Categorización de Errores: análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos. 1. Datos mal utilizados. 2. Interpretación incorrecta del lenguaje. 3. Inferencias no válidas lógicamente. 3. Inferencias no válidas lógicamente 4. Teorema o definiciones deformados 5. Falta de verificación en la solución 6. Errores técnicos
Pochulu Marcel David (Argentina)	2000	Categorization de Errores
Davis (Estados Unidos de América)	1984	Teoría de esquemas o constructos personales que apoya tipificar errores: reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas.
Booth (Estados Unidos de América)	1984	Categorización: naturaleza y el significado de los símbolos y las letras, El objetivo de la actividad y la naturaleza de la respuesta en álgebra, la comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento
Radatz	1980	Ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información estableciendo categorías: 1. Errores debido a dificultades de lenguaje, el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. 2. Errores debido a dificultades para obtener información espacial 3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Incluye a todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por la deficiencia en el manejo de conceptos, contenidos procedimientos para las tareas matemáticas 4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Los errores se presentan por una incapacidad del pensamiento a adaptarse a situaciones nuevas. 5 Subtipos: a. errores por perseverancia, b. errores por asociación, errores de interferencia, d. errores de asimilación, e. errores de transferencia negativa 5. Errores debidos a reglas o estrategias irrelevantes. El razonamiento por analogía no siempre funciona en Matemática.

Especialista	Año	Descripción
Esteley Villareal (Estados Unidos de American)	1990,1992, 1996	Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones b. no empleo o uso parcial de la información. C. No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en desconexión entre lo analítico y lo gráfico. D. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones) e. No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, en un caso particular. F. Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada. G. errores de lógica y h. errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.
Azcarate, et. al., (Estados Unidos de América)	1996	1. Errores estructurales 2. Errores arbitrarios. 3. Errores ejecutivos
Astolfi (Estados Unidos de América)	1999	1. Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones. 2. Errores resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas. 3. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos. 4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas. 5. Errores en los procesos adoptados 6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad. 7. Errores que tienen su origen en otra disciplina 8. Errores causados por la complejidad propia del contenido.
Saucedo, Iaffei, Scaglia	2002	A. Datos mal utilizados. B. interpretación incorrecta del lenguaje. C. Empleo incorrecto de propiedades y funciones, D. Errores al operar algebraicamente E. No verificación de resultados parciales o totales, F. Errores lógicos G. Errores técnicos

Fuente: Elaboración propia, según Bernabeu et al., (2009)

E. ANEXO 07

Transcripciones de Entrevistas:

Lic. Carmen Benavides, PhD D (Sub Directora de nivel High School (Secundaria) Colegio Interamericano de Guatemala):

Aquí en el Colegio hemos ido mejorando. Como estaba como profesora nos reuníamos y decíamos que hay que mejorar el currículo. Comenzamos a mejorar eso y también los libros que tenían el Colegio no eran los apropiados y siempre tuve mucho apoyo por parte de la administración siempre apoyando para mejorar. En el Colegio ha ido mejorando a apoyado en todo lo que se ha podido. Entre los maestros se reunieron fue la mejora del currículo y luego los textos y los libros que tenían en el Colegio no ha sido muy apropiado. Apoyo de la Administración. En general una parte todavía falta mejorar que se enseña en MS unirla con HS. HS esperamos más que le gustaría que no fuera tan brusco. Que no lo sintieran tanto. A nivel de universidad varios egresados y la diferencia lo comenté que los profesores no están tan bien preparados y venían acá a repasar. El profesor explico así y no es justificación y le explico porque que es una derivada cosas así. En la universidad se preparan

¿Cómo aprecia la matemática el nivel de matemática de los alumnos de esta muestra?

Hay una parte que nos falta mejorar en los grados de 4to a I básico que haya más el programa es un salto que diera y que no fuera tan brusco a II básico a V Bachillerato. Que no lo sintieran tanto. La enseñanza la mira bien a nivel de universidad he podido varios egresados y van muy bien. Lo comenté que venían a repasar el profesor nos explicó así y no es la justificación de no saber hacerlo. Los conceptos se explican diferentes a la universidad.

¿Cuáles son los factores que inciden? ¿El ambiente e es favorable?

Buena preparación del profesor que sea muy colaborativo y que está dispuesto a las sugerencias la mayoría de los estudiantes están dispuestos a aprender y apoyo a la administración. Padres y estudiantes que se involucran. Factores buenas preparaciones de profesores. Mucho apoyo de los padres, ambiente colaborativo de los padres. Los

estudiantes están dispuestos a aprender. Profesores muy preparados y ambientes de colaboración.

¿Qué aspectos son los que merecen mejor atención? ¿A qué se enfocaría mejor?

Exigencia les falta a muchos profesores. Como que subestiman a los estudiantes y creen que no tienen capacidad y que todos son capaces y exigirle y como analizar y porqué analizar. No es que no puedan los estudiantes, sino que los profesores que tuvieron antes no los prepararon bien. La coherencia del currículo de primaria a secundaria es necesaria. Mayor alineamiento vertical y la exigencia. Entre más se le exija al estudiante más están preparados y si van a entender. Exigencia. Falta a muchos profesores mucha exigencia. Subestiman a los estudiantes, partir de que todos son capaces. Analizar porque no porque el estudiante no pueda porque el profesor que tuvo antes no lo prepararon bien. Coherencia curricular, alineamiento vertical curricular y la exigencia. Más esperan más dan.

¿Cuál es la metodología que se usa más común para enseñar la matemática?

Se usa mucho la plataforma (internet) y videos. Los libros traen un código para el estudiante para que puedan acceder muchos recursos. La profesora de 11th grade (IV Bachillerato) son corregidas en línea y lo hacen los estudiantes en línea. Más flexibilidad y tienen más recursos. Metodología las plataformas, tecnología y videos, libros traen un código donde el estudiante pueda acceder a muchos recursos. Lo hacen en línea en su casa y se retroalimentan y se disponen de recursos.

¿Cómo describe la práctica pedagógica más exitosa?

Explicar siempre el tema y al mismo tema exigir a todos que debieran aprender. Se puede explicar otra vez. Que traten y motivando la mejor práctica es decirle al estudiante que todos pueden entender las cosas de matemática. Un autoanálisis de los maestros como dan imparten la clase. Hay presciencia de muchas bromas y debe encontrar la respuesta y la forma de resolverlo. Práctica pedagógica explicar no asumir que sabían y exigir a todos que no. Se explica otra vez y que no haya excusa. Tratar motivando. Motiva a los estudiantes se les convencen de que pueden. Que todos lo pueden hacer bien. Autoanálisis que no son culpa los estudiantes sino la forma de como instruye o

evaluaciones. La forma de hacer preguntas. Mucho autoanálisis. Combinación de la constructiva y participativa. Autoanálisis como del maestro y del estudiante.

¿Qué metodología recomendaría participativa o constructiva o combinación?

Combinación de participativa y magistral. No se puede dejar solo al estudiante necesita ayuda al profesor y pedir al estudiante autoanálisis para los estudiantes no es el problema sino la forma de cómo están dando la clase. Todos utilizan la broma para explicar.

¿Cuál es la fortaleza en Guatemala?

En el país la matemática es un problema sería en el sector público en el privado si hay fortalezas en el privado únicamente. Llegan mejor preparados en buen nivel. Excusa es le tienen miedo a la matemática y dejan la matemática y no van al fondo del porqué. Hay menos recursos disponibles y le tienen el miedo a la matemática. Fortalezas: sector publico excusa tener miedo a la matemática y dejan a la matemática no van a fondo falta, pero en el privado si tiene muy buen nivel. Perder el miedo a la matemática El tema interesante seria sobre que espacios vacíos cuentan los estudiantes en la instrucción de la materia (metodología) de la matemática y sobre todo la actitud del estudiante para la matemática y porque será eso. Soy malo y no son malos. Actitud y el miedo hacerles ver que está relacionado con toda su vida y en todo. ¿Actitud del estudiante en la matemática y por qué? Yo con los números soy malo. Investigar la actitud el miedo hacia la matemática. Hacerles ver que es útil y que todo se relaciona en sus vidas y que pueden

¿Cuál es el perfil real de los docentes que haría un buen perfil?

Preparados en todo, en nivel primario en general y los ponen en sin formación y errores y así se lo enseñan los conceptos. En primaria debería ser especializado en la matemática. Primera experiencia y los ponen en el nivel más bajo. Los docentes mismos transmiten miedo y no dominan los temas. Probabilidad lo dejan y otros temas enseñan lo que más saben o creen que saben. Mejorar la preparación matemática. Características preparado en matemática en nivel primario es profesor de matemática y tienen errores y así se enseñan a los estudiantes. Nivel primario titular especializado en matemática. Se saltan los temas. Formación inicial docente asegurar mejorar preparación en matemática

¿Cuáles son las nuevas tendencias de las matemáticas y le gustaría que incluyeron?

Ayudándose con la tecnología con el uso de la calculadora, videos, en línea. Docentes preparó videos y se pudo. Tecnología y aprovecharla en el aula y no depender en todo, pero si en parte. Ayudando con más tecnologías, uso de las calculadoras, internet, videos, en línea. Involucrar y aprovechar en la tecnología. Usar lo más motivar a los alumnos que se puede.

Tema de la División

Se ha visto que en primaria los primeros 7 años abstracto y lógico de programar. Herramienta base se le facilite en otro nivel de matemática. ¿Qué se debe recalcar? (fracciones) Grado 2 o Primer grado a repartir pizza y que sepan entender el tema de dividir en fracciones. No necesitan multiplicar, pero deben entender que es repartir o dividir y luego en el grado que se necesita enseñar el algoritmo de la división hacerlo que muestren el trabajo. En primaria hay que tener la mayor motivación y paciencia para enseñar el tema de división. División: en primer grado repartir juguetes y cosas que vean y pizza que vean, pero entendiendo que es el concepto de dividir. No necesitan multiplicar ya entienden que es división. Algoritmo que sepan multiplicar, restas y hacerlos a mostrar el trabajo y no permitir la calculadora hasta grado 9 (II Básico). Que muestren el trabajo. Y el proceso algorítmico de la división. Relacionar los problemas con la vida cotidiana o real. No relacionan con la vida cotidiana y relacionarlo más. Los textos traen problemas de relación con la vida cotidiana.

¿Cuáles son las mayores dificultades de la matemática de toda la primaria hasta secundaria?

La dificultad en primaria entender la aritmética y los manipulativos ayudan, pero hay que relacionarlos con la vida cotidiana. Bachillerato no relacionan con la vida cotidiana. Les falta relacionarlo más. Lo miran como que no es con ellos. No se relacionan la matemática con la vida real. Problemas al final de aplicación medicina relacionarlos. Que representa el error para ellos sentimientos frustración antes de darles las pruebas marcando el mal es mejor verlos y corregirlos así al comienzo. No se debe dar muchas tareas y lo repite ese mismo error, Lo siguen haciendo hasta que los corrijan y si no se

queda el conocimiento mal. Buscar por qué. Vamos cuantas puedan hacer bien. Corregir el error desde el mismo comienzo y que no repitan el error. Usar manipulativos. Fracciones y Divisiones. Positivos y Negativos. Fichas de colores rojos y blancos. Manipulativos y toquen. No usar la tecnología en Primaria ni en MS. No saben hacer operaciones fraccionarias. Calculadora a partir de 9º grado o bien a partir de II básico en secundaria.

¿Cuál es la percepción del error? ¿Qué representa el error para los estudiantes?

Si les devuelven la prueba es marcar los errores y discutirlos y no crear frustración. Es más importante verlos como lo hacen. Antes de realizar las pruebas es mejor practicar más y que repitan la tarea veinte o treinta veces. Delante del profesor hacer las operaciones y así califiquen e indiquen que está mal lo que hacen. No darle otro tema para que puedan hacer los ejercicios bien. Corregir el error desde el comienzo, para que no se frustren. Los maestros deben trabajar para hacer las tareas. No se puede dar mucha tarea porque repiten el error. Es delante del profesor es hacer el proceso y que el profesor explique cómo hacerlo y si se equivocaron explicarles por qué y que ellos lo entiendan el porqué. Ahora luego se les puede dar otras tareas mayores cuando el docente sabe que ya el tema lo dominan mejor. Corregirlos desde el comienzo.

¿Qué estrategias didácticas en primaria apoyan al desenvolvimiento de la mate? Utilizar más manipulativas, fraccionarias, flechas de colores y sobre todo con los niños negativos. No utilizar calculadoras antes de II básico. No calculadora en primaria ni en 4º grado primaria a I básica. Operaciones fraccionarias sin calculadoras.

Licenciada Silvia Edith Rosal Lazo, MEd Decana Facultad Educación UVG:

¿Cómo describes la situación actual de la enseñanza de la matemática?

A nivel nacional sobre todo a nivel de país no hay suficientes profesores de matemática. Por lo que se utiliza es a estudiante o egresados de ingeniera que tienen el dominio, pero no la didáctica. Estudiantes le temen a la matemática. No conocen el proceso de matemática. Concreto y semi concreto y terminar con lo abstracto. Un ingeniero va

directamente a lo abstracto. Una vez avanzado lo pasan a la abstracta y le tienen sentido. Conocen la ciencia y procedimientos y no saben enseñar y evaluar.

¿Factores que inciden en la problemática?

Factores inciden en la problemática. Los empleadores no saben la importancia de saber enseñar matemáticas. Lo que buscan es tener más alumnos y no se ponen a pensar en el perfil del docente para enseñar la matemática. Si hay que ir a la universidad para el profesorado al nivel medio. No somos una universidad tan accesibilidad no hay tantos estudiantes. Menos estudiantes, demandan no hay tantos estudiantes para pagar la UVG.

¿Qué sugieres para evaluar el tema?

Hay que fortalecer conceptos básicos de la matemática. Los datos del ministerio a educación de los optantes a la plaza no alcanzan ni el mínimo. Son los que enseñan la matemática. Fracciones de común denominador porque tampoco las comprende. Lo que enseñan es limitado. No tiene desarrollado las competencias necesarias y una cadena. Formación al docente en servicio tanto primario como en secundaria. Saber enseñarla matemática.

¿Metodología o estrategia?

Metodología proceso de lo concreto, semi concreto y abstracto. Muchas carencias en matemáticas matemática Básica aritmética. Desarrollar ese pensamiento crítico y abstracto es desarrollar las habilidades y destrezas. Institucionalmente el PAA para evaluar solo como diagnóstico se ha desarrollado un programa de nivelación. Todos entran es parte del curso de matemática básica y se trabaja por medio de guías. Dos para el desarrollo de los saberes y otro para la intervención para matemática que no son contenido de matemática, posición y series. Desarrollan más destrezas básicas para facilitar el aprendizaje de contenidos.

¿Qué hacen en la universidad? (intervención)

Lo anterior intervención matemática. Todos los docentes que dan la matemática básica 8 docentes. Guías hechas que se perfeccionan autoaprendizaje. Parte teórica, ejemplo

y ejercicios. No tienen valor pero que las desarrollen ayuda que desarrollen sus propias habilidades matemáticas. Tienen de toda formación inicial entran bachilleres, peritos contadores, secretarias y de todo. Programa de bachillerato por madurez.

¿Estrategia?

Estrategia de lo concreto a abstracto. Con cada guía.

¿Fortaleza?

Curiosidad y son muy lógicos si aprovecháramos las experiencias de los alumnos. Cuentan y saben de más y de menos. Entran al sistema escolar lo pierden, el maestro que sabe aprovechar esa experiencia. Aunque no sepa mucho si sabe formar los conceptos básicos siguen solos. No es mala pocas personas optan a ella. National Core (Currículo Nacional). La formación no es mala lo que pasa es que son pocos los formados y no hay suficientes porque les han generado miedo y no quieren aprender a enseñarla.

¿Investigar?

Investigar cómo ayudar al estudiante para que trabaje fuera del aula. Trabajan y están formando como profesores, no hay suficiente tiempo para ejercicios y experiencias. La plataforma Blackboard para ejercicios adicionales valdría la pena si son efectivas las estrategias. No hay programa efectivo como tal. Evaluación de los programas. El aplicativo de enseñanza aprendizaje libre (gratis) Khan Academy da un lenguaje. Los demás profesores aprendan la mejora. Solo se ha investigado si es efectivo o no. Evaluación corresponde a lo que se mide. Impacto directo en el resultado de las evaluaciones. Tronco común cursos estrategias, evaluación investigación aplicada, teorías educativas, redactar ítems en evaluación. Profundizar en el área modela para enseñar ciertos temas.

¿Perfil del docente?

Le tiene que gustar que lo obliguen no tiene el interés. Le tienen que gustar los números y es un lenguaje y que sepa comunicarse. Tiempo para aprender a atender a los estudiantes. El simple hecho que le explique para que el niño se vaya solo. Vocación de servicio a los jóvenes, adultos o niños, que va intrínseca en el docente.

¿Metodología?

Apoyo con Khan Academy, en nuestra realidad muchas falencias como para poder entrar a la tendencia. Estamos en el proceso de aprender bien la matemática de enseñarla bien. Virtualidad a la auto enseñanza MOOCS. No son tan autónomos. Auto regulación y disciplina.

¿División cuando deberían enseñar?

Operaciones básicas números enteros reales y fracciones, lógica matemática. 20 semanas. Destrezas en fracciones, porcentajes el objetivo es quitarle el miedo a la matemática. No todos pueden dar la matemática básica. Demasiadas lagunas pueden todo igual. No todos van igual a lo que tiene el grupo.

¿Las mayores dificultades que se presentan en primaria en las matemáticas?

Dificultad apatía o miedo a la matemática. Educación especial y no quieren, pero como es parte del pensum. Pre requisito para estadística. Evaluación psicometría.

¿Percepción del error?

Error es una forma de aprender no es punitivo. Se ha manejado punitivo se vuelven a resolver en clase donde se equivocó. Se pasa al frente entre pares y como lo resuelve el compañero también. No solo hay un único camino. Discusión de la Prueba. No se puede resolver toda y se les pide que quieran resolver y se les manda la clave. Que la vuelva a realizar cuando no hay tiempo en clase. Aprender del Error.

¿Qué estrategia didáctica? (Práctica más exitosa)

SI el estudiante más ejercicios en clase porque tiene al profesor. El último es la intervención. Montón de ejercicios y de sus compañeros, pero no es suficiente y deben hacer ejercicios en casa. Más práctica porque es voluntad. No hay un texto de base. Que no compren materiales. Facultad de educación, limitados. Q3,000.00 tercera parte de su salario es muy alto. Guías acceso a los libros de la biblioteca sugerida y que tienen bastantes ejercicios. Habito de estudio no viene. La mayoría no lo tienen. Aquí forman hábitos a nivel universitario.

Lic. Claudia Lara de Zaghi (ex catedrática de Matemática de la Facultad de Matemática UVG, ex directora de Departamento de Matemática en colegios privados, asesora empresa Fundacion DECA - Guatemala

¿Qué es el error?

De entrada, hay varios algoritmos. Yo te diría que no se puede pensar en el error de un algoritmo. El error del concepto de la división. Cada persona tiene su algoritmo. En varios algoritmos o hacerlo en forma oral como entrevista. No lo que escribió y en diversos pasos que no se rige en un sistema único.

¿Cuál algoritmo específico? No hay. El error está en la base. Que cada estudiante desarrolle su propio algoritmo. Es un problema sustancial No puedes decir el error sino los varios errores. Si pones algoritmo coherente al algoritmo específico por tradición se enseña en Guatemala. Centrar una clase que aprendan un algoritmo. Pensamiento muy obsoleto, que de hecho hay que erradicar que solo hay un algoritmo. Error del concepto de la división. Cada persona tiene su algoritmo de la división.

Mi propuesta que cada estudiante desarrolle su propio algoritmo. Problema sustancial no se puede decir el error sino las varias variantes de error. En un algoritmo específico que por tradición se ha dado en Guatemala. Centrar en la clase de Matemáticas que se imparte a enseñar algoritmos. Hay que erradicar la enseñanza de un algoritmo per se.

Especialistas en Matemática no son en el CIE. Enfoque es muy malo, no hay nadie de matemática educativa. Están haciendo estos análisis, pero el CNB no favorece a los algoritmos. No es un tema y lo mencione en su momento. Es investigación cualitativa y preferiblemente no ser concluyente. Se pueden manejar errores. Porque se equivocan al dividir. De hecho, usar el algoritmo es un error. Errores en general y es importante porque se equivocan al dividir. Ese es otro error. Puede dividir sin algoritmo.

Como para minimizar el error se cuenta en la actualidad con la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner inspira el método educativo del CEIP Aguamansa. Este psicólogo y profesor de la Universidad de Harvard, que recibió el Premio Príncipe de

Asturias de Ciencias Sociales en 2011, sostiene que las personas tienen 9 tipos de inteligencia, aunque el sistema educativo apenas valora dos o tres.

Gardner ha ido añadiendo inteligencias a su teoría y en la actualidad considera que todas las personas tienen nueve tipos de inteligencia, desarrolladas en mayor o menor medida: la inteligencia espacial, que permite interactuar y entender el entorno espacial o tridimensional, las imágenes y los dibujos; la inteligencia lingüística; la inteligencia lógico-matemática; la inteligencia cinética-corporal, la del movimiento y las habilidades del cuerpo; la inteligencia musical; la inteligencia interpersonal, que marca la capacidad para relacionarnos con los otros; la inteligencia intrapersonal, la que marca el diálogo interno; la inteligencia naturalista o medioambiental, la que marca la atención hacia el entorno natural, y la inteligencia existencial, que tiene que ver con la espiritualidad y la búsqueda de lo trascendente

Otro investigador en métodos orales para evaluar esta Antonio Martín (Canarias) que pueden aportar a evitar que el alumno continúe cometiendo errores. Universidad de la Laguna investigador y docente del C.E.I.P. Aguamansa (Tenerife) Motivar y acercar al estudiante a las matemáticas desde temprana edad, con constancia, esfuerzo, evolución y progreso diario. Los docentes están acostumbrados a impartir las clases magistrales con un modelo didáctico concreto y muchas veces inflexible con una guía preestablecida, nada cambia y nada mejora, todo sigue igual y por tanto los mismos docentes no buscan innovar y ampliar sus conceptos hacia nuevas opciones de enseñanza aprendizaje. El proyecto que este investigador ofrece es de proponer otro sistema de aprendizaje otra metodología más flexible y la utilización de otros tipos de recursos y no caros, sino adecuados a su contexto y que sean flexibles. Los estudiantes deben “saborear” la sensación de calcular mentalmente y a través del juego, no solo dependiendo de las calculadoras o los aplicativos electrónicos, aunque no está mal incluirlos en la instrucción. Todo lo tecnológico es una ayuda para confirmar los resultados, pero hay que tener cuidado que se vuelvan una constante presión y posesión exclusivo al conocimiento. Lo que se trata es de dominar la disciplina no que la disciplina domine al estudiante. Cálculo mental es lo mejor fomentar no frustrarlos con esquemas

conceptuales y mentales procedimentales preestablecidos difíciles y obsoletos. Algoritmos que desarrollen el cálculo mental. Parte de la Filosofía del Investigador Martin:

“Que los alumnos salgan del centro con una autoestima alta, que les dé seguridad para enfrentarse a los retos que encuentren; que aprendan a aprender, que adquieran destrezas para encontrar, manejar y asimilar información de forma autónoma, y que sean felices, que la escuela no sea motivo de angustia o sufrimiento. el trabajo de cada estudiante se ve reflejado en su hoja de retos. Hay retos individuales, pero también de "células" -pequeños grupos de trabajo- y de "gran grupo", que implican a toda la clase. Educamos en libertad. Ponemos límites, pero damos un margen. Les dejamos elegir, pero los niños deben asumir las consecuencias de su elección" Albelo afirma que esta forma de enseñar huye de "escuelas tradicionales concebidas como fábricas, en las que los niños entran todos diferentes y se les va inyectando conocimiento. Unos salen convertidos en recursos del sistema y los que no han podido asimilar ese conocimiento son tratados como desechos. Nosotros pensamos que no hay ningún niño que no sirva. Todos servimos. Solo tenemos que valorar el talento de cada uno y ayudarlo a que aprenda".

Cristina Albelo y Soledad Pomares (2016) en España con las Inteligencias Múltiples recalcan que "lo que se experimenta es lo que se retiene; lo que se memoriza y no se utiliza, se olvida". Por ello huyen de un sistema tradicional que "ha demostrado que no funciona, las cifras de fracaso son tremendas y ha matado la curiosidad y las ganas de aprender de los niños. La escuela ahora da todo hecho, sin necesidad de que ellos descubran, aprendan y apliquen lo que tienen a su alrededor. Al final se aburren y dejan de preguntar por qué", lamenta Albelo.

"En este centro la mirada del maestro va a fijarse en el don que cada niño tiene y no en recalcar lo que hace mal o no le sale", sentencia Pomares. Toda una revolución educativa. Aquí todos los niños son inteligentes"

La directora del CEIP Aguamansa, en Canarias, España Cristina Albelo, y la profesora Soledad Pomares destacan que una de las grandes diferencias del CEIP Aguamansa es que en sus aulas a todos los niños se les considera, a su manera, inteligentes. Esa es la base de la Teoría de las Inteligencias Múltiples corriente de la neurociencia. Por eso,

cuando alguien pide en un aula de Aguamansa que levanten la mano los que sean inteligentes, todos la alzan. Pomares pide que se haga la prueba en un colegio convencional, "solo unos pocos se atreverán a levantar la mano porque el sistema valora unas pocas inteligencias y desecha el resto".

¿Por qué se equivocan al dividir? ¿Cómo describes la situación actual de la enseñanza de la matemática?

Complicada y retrógrada. Enfocada más en algoritmos en vez de conceptos y eso a todo nivel. Hay muy bajo dominio del contenido matemático de maestros. Por consiguiente, no hay didáctica, ni evaluación apropiada para la matemática.

¿Qué sugieres para evaluar el tema? (parte de aspectos que requieren mayor atención)

Están enfocados que el alumno evalúe operaciones y algoritmos, las pruebas no evalúan otra cosa. Generar evaluaciones para demás habilidades necesarias como el pensamiento crítico. Las instituciones educativas están enfocadas a evaluar algoritmos, operaciones, pero es mejor el fomentar el desarrollo de pensamiento crítico, diálogo matemático, evaluación oral, instrumentos adecuados más allá de papel y lápiz. Que no sea tan mecánico o respuesta única. No existe actualmente. Usar los instrumentos adecuados para las destrezas que van más allá del papel y lápiz, de algoritmos. Que no sea evaluación mecánica o respuesta única. Puede ser oral pero que no sea tan mecánico o de respuesta única.

¿Cuáles son los factores que inciden? ¿El ambiente es favorable?

El magisterio focalizado en educación media y hasta ahora en la universidad. El egresado no tiene el conocimiento mínimo de matemática. Que no hay especialistas en matemática educativa no hay personas educadoras en matemática. Ni las universidades cuentan con el personal que puedan apoyar educando a los docentes en cuanto a metodologías y didácticas se refiere.

¿Qué aspectos requiere mayor atención?

Formación de los maestros. Traer a persona de afuera si hace falta, pero lo mejor es reforzar los profesorados. Hay pocos, pero no les pagan bien. Condiciones laborales no permiten que se dediquen a mejorar las didácticas matemáticas.

¿Cuál es la metodología que se usa más actualmente y es más común?

La clase magistral y repetición de ejercicios. Tareas y exámenes escritos y algoritmos. Problemas juegos manipulativos y juegos, proyectos integración de áreas: STEM. Problemas manipulativos, juegos, representaciones variadas. Proyectos, STEM Integrar otras áreas.

¿Cómo se describe la práctica pedagógica más exitosa?

Estilo Finlandia. El niño que haga las cosas y sea divertido.

¿Qué metodología se recomienda más efectiva a Guatemala?

Trabajo en equipo diálogo matemático y manipulativos. Contextualizar a Guatemala. Trabajo en equipo diálogo matemático.

¿Fortalezas en matemática en Guatemala?

Lleva demasiado tiempo mal. Aparenta que nada se puede recuperar. Solo que regresáramos a lo que se daba en los programas de formación docente en 1970 y el EPFEM (Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media) la cual empezó a operar en 1971 con el Acuerdo Ministerial 13 febrero 1971 como Unidad Académica de la Universidad de San Carlos, estudiaban todos los días y no solo sábados y salieron muy bien formados en matemática. Se formaban al personal docente para el nivel medio de educación media en todo el país en Matemática, Física, Química y Biología en plan vespertino diario, pero a partir del 1986 se empezó el plan sabatino y la mayoría de los docentes prefirieron este plan sabatino, pero no es suficiente. En el año 2000 se empezó a cubrir formación en Informática y Computación. Se cubre menos de las 300 horas esperadas, aunque su metodología es investigación /acción aún falta mejorar el programa que ya es a nivel universitario. Lo que incluía era formación científico filosófico, técnico profesional y pedagógico. Les daban muchos cursos y estudiaban más horas una formación general e integral. El maestro de hace 50 años tenía mejor formación que el

actual por el tiempo que le dedicaba a nivel universitario, aunque su titulación no fuera universitaria. Ahora la oferta es que tendrán su licenciatura del profesorado con dos años universitarios el plan puede ser sabatino y lo mismo no es suficiente para dominar una materia científica como la matemática, debería ser sólo plan diario obligatorio con opción de trabajo para que logren cubrir mejor todo el programa necesario.

¿Qué espacios se encuentran vacíos para investigar en la matemática?

Esto estudiar algoritmos ya no ahora es la etno matemática de diferentes culturas y como etno matemática muestra que hay que contextualizar las metodologías a, diferentes sociedades las matemáticas se deben adoptar a sus culturas. Enseñanza con nuevas tecnologías. Análisis del error como corregir los errores ya no es tan importante, como corregir los errores son los mismos. Conceptuales no saben que es dividir no entienden que es dividir, partes iguales, enfocarse en el algoritmo, pasos, falla la memoria. No hay una base que es dividir. No es necesario. Desarrollo conceptual y que pueda ser de habilidades y generar nuevos algoritmos y soluciones a problemas y no solo ganar pruebas. Se necesita fomentar el desarrollo conceptual competencias generar soluciones y algoritmos

El perfil ideal del docente del matemático

- a. Saber matemática
- b. Saber didáctica de la matemática y especializada
- c. Tener buenas relaciones personales con los niños (sin humillar) Saber matemática, saber didáctica de la matemática especializada y buenas relaciones personales.
- d. Que ya no humillen (los docentes a los estudiantes)!

¿División cuando deberían enseñar?

Cuando ya sepan restar y sumar y enseñar simultáneamente a la multiplicación. Que cuando sepan sumar y restar simultáneamente a la multiplicación.

¿Las mayores dificultades que se presentan en primaria en las matemáticas?

La mayor dificultad se presenta en el tema de las fracciones y se nota que por eso no saben dividir.

¿Percepción del error?

¿Qué es el error? los actuales matemáticos educativos es una oportunidad de aprendizaje. Este proceso no funcionó es una oportunidad de hacer otra cosa. Percepción del error una oportunidad de aprendizaje. No salió como se esperaba no es terminal no funciona y debo probar otra cosa y corregir. Forma de aprender otro proceso o corregirlo.

¿Qué estrategia didáctica?

La división en particular es repartir en partes iguales, hacer manipulativos y repartir en partes iguales. Con dinero casos reales y dividir físicamente. Otra estrategia es usar restas consecutivas es algoritmo y es la que hacen en situaciones reales como el mercado. No centrarse en algoritmos sino en el concepto. Que los alumnos lleguen a exponer sus métodos propuestos. No ha habido un algoritmo único sino varios. Necesitan actualizarse en la UVG.

Lic. Bayardo Mejía (ex viceministro de Educación, catedrática estadística de la UVG a nivel de maestría):

¿Cómo describe la situación actual de la enseñanza en Guatemala?

Situación delicada seguimos teniendo los problemas de siempre. Basados en poco conocimiento del profesor de la asignatura, poco conocimiento del docente de las formas del pensamiento para poder impartir la asignatura. Poco conocimiento de cómo poder asociar la matemática dentro de las cosas interesantes dentro del proceso del desarrollo del pensamiento. Es delicado a pesar de que las Universidades se han preocupado mucho de ofrecer constantemente oportunidades para aprender la situación esta delicada. Me baso en los resultados que se muestran del MINEDUC en las pruebas de los distintos grupos que van egresando como los resultados que tienen las universidades en sus exámenes de admisión. En resumen, la situación sigue siendo delicada a pesar de que tecnología ha apoyado mucho para poder proveer o propiciar más y mejores

oportunidades a los estudiantes para aprender. No sé si los profesores orienten bien o el problema de razonamiento conceptual en los docentes que impide a los estudiantes a no seguir aprendiendo.

¿Cuáles son los factores que inciden?

Factores dependen del conocimiento del maestro de la asignatura, los intereses de los estudiantes tengan a aprender. Habilidades del estudiante y el profesor de repente porque no le encuentran una aplicación apropiada al tema en su vida en general. Nada que ver de dónde viven ni su nivel social, depende gran parte del docente de interesar al estudiante. Tiene que ver como ejercitarlos, estrategias que desarrolla para propiciar el aprendizaje en particular.

¿Qué aspectos deben ponerse atención?

Mucho en el manejo de los profesores tienen de la asignatura como tal. Que los profesores saben bien del tema y cuáles son los mecanismos para enseñar. No son importantes los recursos o materiales (tecnología) a través de la “concreticidad” para la abstracción. El maestro sepa propiciar las oportunidades y las estrategias para que los estudiantes puedan aprender y todas las formas posibles que tengan. Desarrollar la capacidad de diálogo y preguntar. Desarrollar la capacidad de aprender de sus errores. Le merece atención la forma como el profesor evalúa cuál es el nivel de logro de los estudiantes para detectar y determinar el nivel de logro. La tecnología propicia para entrarle a los temas internet, puertos y portales, ejercitación y discusión a los temas.

¿Cuál es la metodología más común?

No sé mucho de los demás, pero creo que es metodología la clase magistral. El profesor explicando el material señalando en la pizarra y explicando y ejercita mucho durante la clase. En mejor de los casos que el profesor ejercita. Lo ideal es que el profesor ejercite durante la clase y mucho. Las tareas son importantes pero el profesor logra mucho más haciendo como Laboratorios de lo que sería ideal.

¿Cómo describe la práctica pedagógica más eficaz?

Tres aspectos: Insisto en tres aspectos a. explicaciones cortas, a través de lectura u oral experimentada. Segundo muchas ejercitaciones donde aplican el nuevo concepto y mucha. Un periodo completo o dos en ejercitar el tema. Todos aquellos los puntos que el profesor debe preguntar lo que sea básico y que lo use en aplicaciones en todas las oportunidades. Pruebas cortas no más de 4 días de trabajo en donde pueda determinar cómo es el avance de sus estudiantes. La prueba o actividad debe ser actividad o no puede ser cualquiera actividad y a los mismos estudiantes como esta su avance al respecto de su aprendizaje y calificarlo prontamente para que los resultados le indiquen al profesor si los logros que se perciben son buenos o no.

¿Qué metodología recomienda? Metodología que hable anteriormente.

¿Fortalezas en Guatemala?

Guatemala apropiadas los programas que describen los contenidos son parecidos en muchos países. CNB una serie de tema comunes y fortalece la temática. Los libros ayudan mucho para encontrar lo constante. Lo complicado es si no tienen acceso a libros a formas distintas de consultar a manera personal no necesariamente dependiendo de alguien explique. Desarrollando la capacidad de los estudiantes.

¿Qué espacios vacíos para investigar en la matemática?

Primer problema sabemos cómo aprenden los estudiantes. En Guatemala cuales son los estímulos externos o internos que puedan intervenir a manera directa. Neurociencia solo da líneas, pero no sé si lo explica como el guatemalteco aprende. Una vez sabido esto el maestro debe empezar a diseñar formas de dar o impartir clases. Es un medio de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Los maestros mejor diseñar materiales, diseñar formas de dar clases. Sería la mayor laguna que está atado a muchos aspectos Lecto escritura, expresión oral dificultades, no les es fácil expresar ideas que han aprendido o no. De qué manera se modifican.

¿Perfil del docente ideal?

Insisto el perfil muy bien preparado que va a tratar. Un maestro debe saber que tema va a tratar. Un maestro de 6º grado debe saber mate de 5º y 6º y I básico. Debe saber bien

sobre las bases que el estudiante necesita. Matemática debe saber bien la matemática de su nivel del nivel anterior y del posterior y esto es vital. Sus bases que necesita para aprender lo que va aprender y debe saber que viene después. El maestro debe estar con la oportunidad de saber sobre las actualizaciones didácticas. El docente debe estar informado de los avances y noticias. Comunidad de docentes. Que se espera de una persona educada o instruida. No es lo mismo una instrucción a una educación. Muy claro en ese sentido. Debe conocer cuáles son los procesos mentales necesarios que debe anteceder. El tema del Constructivismo. Desarrollar bien sus temas que viene después y en determinado momento.

¿Cuáles son las nuevas tendencias de la enseñanza?

En los últimos años son nuevas tendencias tres característicos, el famoso aprendizaje cooperativo que sea tendencia no es efectivo. Explicar a los demás es bueno. Explicaciones entre ellos y entender entre ellos. Que es bueno verbalizar lo que quiere explicar es bueno. Una buena manera es explicando a los demás lo que se entiende. El uso de la Tecnología a veces es uso es exagerado. La tecnología como tal no es panacea debe ser o es una herramienta en manos del profesor ideal es que les permita a los docentes de construir modelos en donde estos modelos de ponderar los estudiantes de conocimientos. Si van a relacionar dos o tres variables que pasa si una es constante y otra es variable. Modelos o simulaciones. La computadora puede evidentemente ayudar para la relación conceptual en los temas. Como la matemática es prácticamente un lenguaje que me ayuda a explicar el fenómeno de la Físico, Química, Social y el fenómeno Social como tal, depende lo que el profesor logra hacer para hacer esto una realidad, entre otros factores.

¿Qué, cómo y cuándo impartir el tema de la división?

No puedo ser contundente de que como y cuando. Aprendizaje de las operaciones para mi criterio los estudiantes deben aprender a operar. Deben saber la mecánica operativa y el algoritmo que más les ayude. El estilo de la división la tengo de una manera que no se utiliza actualmente. La división se aprende diferente cada tiempo. Cuando se le dio la vuelta al signo y se cambió para cuestión didáctica. Hacer restas en forma continuada es otro método o estrategia. Aprendizaje de las operaciones los estudiantes deben aprender

a operar y punto. Debe reconocer el algoritmo operacional que más les ayude. No es una cuestión matemática sino didáctica. Resta continuada hasta la encontrada la solución. Cualquier momento es bueno impartir el tema de la división. Operatividad como tal cualquier momento es buena. Por costumbre es desde 2º a 4º primaria. Pero se ve que hay problemas en el bachillerato y la universidad. Como profesor le importa a dividir los docentes pongan a los estudiantes todas las veces póngalos a dividir. El estudiante debe estar dispuesto a la oportunidad de dividir. No preocupa. Sepan hacerlo. Preocupa que los estudiantes reconozcan la herramienta en que momento debe usarse. Diferencia una $\times$ o usar una división o que más conviene. Fracciones es otro problema. Operen que hagan suya la mecánica operativa muchos conceptos y cosas. Que ha dado resultado. Solo les digo que así se multiplica. La mecanización no hay tal. La experiencia necesita sentirse seguro. La mecánica es una oportunidad para desarrollar su seguridad. Con ejemplos porque insisto. No se preocupe si lo entienden o no que lo operen bien lo están mecanizando, pero no es lo que se usa. Como el médico debe entender el sistema nervioso, estudiante tiene confianza en sí mismo cuando está llevando una operación que le da confianza a aprender y mejor. Que sepan hacerlo. Preocupa que reconociendo la herramienta que reconozcan cuando hay que usarse. Cuando usar una multiplicación o una división.

¿Otro tema fracciones?

Me importa más que operen que hagan suya la mecánica operativa. Yo creo que no hay tal. Me ha dado resultado. No les digo porque se multiplica yo les enseño la mecánica. La mecánica operativa desarrolla seguridad. Que dificultades tienen los niños con fracciones, distinción como área y perímetro, patrones. Oportunidad que se les brinde de hacer cosas. Manipulativos puedan encontrar una relación conceptual matemático y los objetos están en mejores condiciones. Abstracción apropiada, no es solo matemática es una parte. La fortuna y dificultad su organización lógica que le permita repetir par que sea necesario. Ejercicios sociales no los puede estar repitiendo (casos), parte operativa es vital. Los niños confianza de lo que están haciendo. 0 no es una fracción como denominador que no entiende que es infinito. Cuando una palabra es mala palabra. La experiencia ha explicado que la mecánica operativa ha desarrollado seguridad y es muy

discutible. Explicarlo con ejemplos claros. Insisto en la importancia en ellos. No se preocupen que lo entiendan y lo que tiene que hacer son muchas operaciones. Siempre he encontrado que el estudiante tiene confianza le da seguridad a aprender mucho más y mejor aquellas cosas de saber dividir, sumar, multiplicar o restar. Lo que hay que preocuparse es que los estudiantes operen bien la mecánica de dividir y si para esto necesitan hacer 100 operaciones hay que hacerlo. Aunque muchos no están de acuerdo con mecanizar el proceso aritmético. Si el estudiante tiene confianza en sí mismo al estar realizando la operación que le permite posteriormente mucho más y mejor en el futuro.

¿Cuáles son las mayores dificultades?

Los niños tienen las dificultades operaciones con fracciones, dificultades en la distinción que hay entre área y perímetro, les cuesta encontrar patrones. Creo que se debe a la oportunidad que el docente brinde de hacer cosas. Mientras más puedan los estudiantes puedan encontrar una relación entre el aspecto conceptual matemático y los objetos con los cuales operan esta mejor condición de visualizar de las cosas. El estudiante tiene que tener una capacidad de abstracción apropiada para todo lo que viene después y que no es solo matemático. La matemática es una parte que tiene que aprender para su vida. La matemática tiene la fortuna y la dificultad su organización lógica que permita repetirla y luego al fin captarla. Si quiere utilizar ejercicios sociales no se pueden repetir (casos) porque no siempre no son iguales. Los niños necesitan es desarrollar la confianza de lo que están realizando si le digo a un niño que tiene a cero en el denominador en una fracción no es una fracción bien definida en un principio el estudiante no entiende porque, pero cuando una palabra es mala palabra. Le causa risa, pero no entiende porque lo mismo pasa con una fracción u otros conceptos, ¿pero si siempre que aparece una fracción con un denominador cero y se le pregunta al estudiante es esto una fracción definida? Y el estudiante me dice que no con certeza ya el docente logra un montón.

¿Cuál es la percepción del error?

Creo que lo primero es entender que significa dividir entre que, que significa y entender cuántas veces cabe un número en otro. Percepción error, que significa quepa un grupo cuantas veces en una determinada cantidad. 8 en 24. Los estudiantes se equivocan en la resta. A los estudiantes no les es fácil al agregar un cero hay que subir un punto

decimal. Que significa el punto decimal. Muchas veces esa dificultad es por el deseo de los docentes de explicar a profundidad de explicarse muchas cosas que no tienen razón de uso para ese momento.

¿Qué estrategias didácticas apoyan al buen desenvolvimiento de la enseñanza de la matemática?

Para mí como docente es la continua ejercitación de los ejercicios de matemática. Llegar a todas las circunstancias posibles el ejercicio que estemos realizando. Corramos y contemos: midamos, contemos, midamos tiempos, esfuerzos, cuanto comemos y cuanto caminas y si caminas menos. Se puede encontrar en la naturaleza muchas estrategias didácticas en el conocimiento de la etapa en que se encuentran. Las estrategias didácticas dependen enormemente del reconocimiento por los docentes de la etapa del aprendizaje en que el estudiante se encuentra si tiene o no el nivel o capacidad de abstracción para poder adquirir el conocimiento en el nivel que se quiere llegar en el tema. No hay un algo definitivo. No hay una receta mágica. Vivimos en un ensayo de procesos, pero los niños necesitan de constante orientación. Lo importante es cómo el maestro va a dar esa información u orientación.

¿Tecnología?

¿Qué pasó con la calculadora? No creo que el tener una Tablet mejore el aprendizaje matemático. (*gamification*) No creo en tanto juego. Creo que es importante lo lúdico en el desarrollo claro que es importante que el estudiante pueda percibir a su manera a su alrededor. Pero cuidando de transmitir apropiadamente el concepto numérico no se puede jugar con ello. No se puede decir otra cosa que 5×8 es siempre 40. Claro que no siempre es 40 si se cambian las bases o variables con las cuales se opera. Pero eso no es a niveles primarios hacerlo. Se busca ser más cálculos discretos. Hay que buscar ir como docente a la base de las cosas o temas. La tecnología (tablet, celulares, calculadoras, laptops, etc.) puede apoyar, pero no sustituye lo que el docente en los niveles primarios debe impartir. La tecnología es extraordinarias cosas para buscar información. Calculadora que grafica es genial, pero si no sabe el estudiante qué significa una pendiente de una recta en cálculo que quiere decir una primera derivada, velocidad constante, aceleración instantánea en determinado momento. Lo genial es que se tiene

dibujada la curva y como la describe en una computadora, pero el estudiante debe saber de dónde viene primero para luego interpretar lo que ve. El estudiante debe tener una mente despierta. El estudiante debe disfrutar una curva a la manera en que la entiende. Una cuadrática puede ser parabólica, focos, etc. El maestro es el que apoya y guía.

Magda de Schwendener Facultad de Matemática UVG (Es ingeniera civil y tiene una maestría en educación universitaria)

¿Cómo describe la situación actual en Guatemala?

Si los muchachos llegan a las universidades no tan bien preparados de los colegios. Primer año se marca muchos las diferencias. En años anteriores venían más preparados. Era menos notorios eran más homogéneos. Hay colegios que preparan mejor a sus estudiantes. Tiene que ver con el estudiante. Mal preparado. Últimamente llegan muy mal preparados.

¿Cuáles son los factores que inciden a ello?

Factores pueden ser: Cursos de servicios es una cadena de matemáticas de apoyo. Es un curso de nivelación, el que vengan mal preparados inciden las malas prácticas. Quitar todos los problemas les afecta más. Quitar las malas prácticas es un curso de base para que les vaya mejor. Hemos puesto trabajado de diversas maneras el curso comienza de funciones ahora tres semanas anteriores de repaso para cambiar eso. Quitar las malas prácticas con apoyo de Tutorías dadas por los maestros por estudiantes que depto. Ha elegido. Ahora crearon un sistema no en práctica son tutorías por la red como refuerzo antes de entrar prerequisite. El curso comenzaba desde funciones ahora se repasa el tema de funciones, con tutorías por los maestros y por los estudiantes que el departamento de matemática elige. Ahora crearon un sistema que es tutorías en línea. Es un curso antes de entrar.

¿Qué aspectos merecen mayor atención para mejorar la práctica de la matemática?

El álgebra más atención en los colegios. Y luego tienen cálculo y la base de álgebra es muy mala. Traen ideas de cálculo, pero es mejor que se enfoquen más atención al álgebra.

¿Cuál es la metodología que se usa en la universidad para la matemática?

Se tiene una unidad de dos periodos de una hora y medias clases magistrales donde participan los alumnos, lluvias de ideas. Metodología que se utiliza principio de unidad dos días dos periodos de una hora y media. Clases magistrales, lluvia de ideas, participan los alumnos y están con el profesor. El viernes es ejercitación y parten la clase en dos y tienen un auxiliar con ejercicios de la semana lo que se vio en clase y se ejercitan. Parte la clase en dos y repasan los ejercicios de la semana. Una semana se hace repaso general en los exámenes y simulacro de exámenes.

¿Cómo describe cual es la práctica pedagógica más usual?

Depende de cada grupo, pero es usual la práctica pedagógica participativa y que también ellos hagan sus ejercicios en individual y compartan si no tienen sus conocimientos deben participar todos. Con el concepto se van a lo grupal. Si no tienen el conocimiento no trabajan bien el grupo. Primero individual y luego grupos.

La que recomiendan es la práctica:

Participen los alumnos

¿Fortalezas en Guatemala?

Colegios privados que sí egresan satisfactoriamente a sus alumnos una buena base de álgebra más acostumbrados a resolver problemas y no prácticas o ejercicios muy repetitivos mecánicos y juicio crítico. Son como 5 buenos Colegios. Depende de los estudiantes y otros que no sobresalen.

¿Espacios vacíos en cuanto a investigar en matemática?

Espacios vacíos. Mitos que las matemáticas son difíciles o que la Física es difícil que se transmite quitar ese mito. Reconciliar con la matemática. Atractiva la matemática que no es difícil que simplemente es un mito. Se transmite de generación en generación. Reconciliarse con la matemática y quitar el mito.

¿Qué propondrían para quitar el mito?

Hacer atractiva la matemática y que no es difícil y que es un mito.

¿Perfil ideal?

No difiere mucho es una persona que este comprometida y que le guste lo que hace. Maestro tienen que gustarle y apasionarle el dar clases. Que hagan lo que le guste hacer. Uno como maestro debe gustarle lo que hace.

¿Cuáles son las nuevas tendencias de la enseñanza de matemática?

Todos los años han cambiado. Incluyen técnicas estudios de casos. Un minuto antes. Todas las técnicas que se aprenden al capacitarse. Capacitan en junio y en septiembre con semanas de capacitación que incorporan todo.

Lic. Bianca Argueta MEd (ex catedrática de cursos de álgebra y matemática básica en colegios privados, ex consultora e investigadora adjunta CIE- UVG):

¿Por qué es importante la división en la aritmética?

Fuera que es una operación básica es un concepto que se utiliza frecuentemente y que cuesta mucho que lo apliquen de la clase de matemática a la vida real. No lo integran, lo que hago en papel es lo mismo que hago cuando hago cosas en la vida cotidiana. Los estudiantes lo ven como por separado la división en el algoritmo que llevo que resto, esto, pero no se llega a la aplicación como en muchos temas no es un tema tan abstracto en la vida real. Solo lo utilizamos en la clase de matemática o en carreras como ingenierías. Es algo que se usa constantemente pero no se enseña de esa manera. Ni siquiera analizan los estudiantes la respuesta lo dejan en abstracto cuando pasan al papel. O en ambiente académico es el problema que se deja allí.

¿Qué estrategia didáctica recomendaría?

Les pongo más problemas o tareas de los niños, pero es mejor que los alumnos hagan los problemas. Les pido a ellos que propongan situaciones problemas donde utilicen esos algoritmos que ellos hacen es situación o realidad de ellos. Show que la niña tomo y salió una suma mal hecha. Le hable con maestros y cuál fue el error, es que empezó al revés. Que cuando alguien está empezando en algo se necesita una opción que le dé seguridad y que siga ciertos pasos y luego se analiza la más común. Yo analice al algoritmo más

común. Con el concepto de división le crítico, pero para resolver en el algoritmo era lo que estábamos revisando. Primero se le enseña el algoritmo, pero luego busca otra forma. Si creo que necesitan una herramienta para resolver en los temas que no son tan mentales ni tan a la vista u obvias. El niño hay que darle una base donde aferrarse a un proceso y autoestima para que pueda soltarlo luego. Como cuando es chef le enseña la base y que le da seguridad conforme se sienta cómodo ya puede variar e innovar o crear. Busca otro tipo de soluciones. Diferentes tipos de algoritmos como una solución para un docente al impartir el tema de la división, pero está mal si se le enseña una sola forma. El niño que aprenda a dividir con una de tantas herramientas.

¿Qué, cómo y cuándo impartir el tema de la división?

La idea tendrá que ser como en un nivel de progresión en diversos años, desde preprimaria que categorice y separe, estamos hablando de dividir y separar y repartir cosas u objetos. Se da el tema de la división como en todos los conjuntos numéricos de un solo. Es mejor en los primeros grados en números naturales y enteros, con las propiedades, que pasa con un negativo y luego con divisiones con fracciones y luego con divisiones con fracciones y decimales. Se revuelve el concepto de 0.5 porque me sale más grande y debería ser más pequeño. Cuando el niño tenga mejor el concepto de números enteros. Tema del cero, que como y cuando el tema del cero. Concepto del cero está en el CNB como un tema. Que pasa con el cero y aún la división con el cero. Yo creo que lo regresaría a conjuntos numéricos. Enseñar a multiplicar por cero o nada. ¿La división entre el cero a que se refiere? Quinto primaria para que entiendan que no cabe dentro de ese conjunto. Porque si no tenemos que algo dividido en cero es cero. Cero como que es nada. Aún como error común si le dicen $4/2$ es 2, $2/4$ no se puede porque no cabe. Conceptos erróneos de los maestros que se relacionan con la que la mate en magisterio no es buena. Lo que enseñan es que no cabe y eso es lo que se enseña. Que es cero es nada.

¿Cuáles son las mayores dificultades del niño en matemáticas en primaria?

Es que nos hemos ocupados los algoritmos y flojos en contenido o concepción numérica, sentido numérico. Que cantidad, cuanto me cabe en que, que me cabe en que, conceptos lógicos tiende a tener más facilidad para después ver el algoritmo como una receta que

me ayuda a llegar a una relación exacta y que tenga relación con lo que creo que sale. Creo que nos hemos ido por parte abstracta y el estudiante aprende los pasos y se enseña como una receta y cuando van de vacaciones no se acuerdan que hay que hacer el orden de pasos. No se tiene el sentido numérico de cuanto debería salir el resultado.

El procedimiento para sacar raíces. 109,285 y los niños con el gran procedimiento y cuando se le pregunta al estudiante tienes idea de cuánto te va a salir no tienen idea. Errores como que si decimos saque la raíz de 6 es 3. No hay concepto. Los errores frecuentes que hemos encontrado como una receta sin sentido.

¿Cuál es la percepción del error cuando reciben las pruebas o ejercicios?

En lo que se fijan es en la nota. Para nada en el error. ¿Casos son específicos de otra mentalidad ha si pues que hice mal? Primero es la nota. Como influye en mi promedio y si existe algún interés necesito para otra nota o para otro proceso posterior. ¿Qué se interesen por el tema? Son muy pocos casos son los que les gusta la matemática y tratan de entender que pasa. Cuando no hay interés el error no les importa. No lo ven como oportunidad. No se educa para ver el error como oportunidad y como algo malo y se castiga. Método Singapur álgebratizar la primaria antes de llegar a grados posteriores.

¿Cómo describe la situación actual de las matemáticas?

No toda Guatemala. Donde hemos estado en proyectos que es cercano a los alrededores de Antigua Guatemala y Siquinalá y lo que he notado es la enseñanza de la matemática se lleva a cabo a un nivel de comprensión bajo. Si se análisis de alumnos cortos y tareas. No se llega por los estudiantes a un análisis y solo comprensión de lo que se le pide. Tiene relación con el conocimiento de matemática del docente. El docente enseña donde se sienta cómodo. Solo enseña algoritmos y no conceptos o lógica respuesta. Simple a resolver algoritmo y no hay un nivel de pensamiento más alto. A nivel general.

¿Cuál son los factores de lo que acaba describir?

En cuanto al conocimiento del docente de la matemática, como enseñar matemática. Como la principal fuente de intervención del maestro de matemática. Le dije a un grupo

de docentes de matemática de $36 + 25$ me dijeron 61 y como lo hicieron. $6+5 = 11$. Maestros de dos instituciones solo uno de doce pensó diferente. Alguno no le salió ni lo notaron. Eso enseña a los alumnos. Hacen el algoritmo y si pinta áreas que significan este porcentaje o comparar fracciones no tienen idea y entonces no lo enseñan. El conocimiento del maestro cuando imparte matemático y depende de su formación docente. Fue básico cuando estudié matemático, que se hayan asegurado de cierto nivel más avanzado de matemática. En las Universidades el profesorado es una matemática básica porque no traen buena base. No lo traen.

¿Qué estrategias o aspectos serian para mejorar la enseñanza de la matemática?

Bueno asegurarse que el maestro conozca su materia a la profundidad que pueda el maestro dar diferentes tipos de explicaciones a los alumnos. Porque solo lo saben de una forma lo explican 40 veces, pero con la misma forma. Para después entrar a una didáctica o enseñar los aspectos importantes debe saber en qué está enseñando. Si el CNB es tan amplio y no lo sabe se dirige solo con solo el libro. Conceptos erróneos el libro y lo que he notado. El ejemplo que tiene el libro ese es la explicación del pizarrón. Es replicar y darle el ejemplo del libro y lo hace buena entonces le quita la posibilidad al estudiante de ir él a consultar y a leer sobre el tema de matemática. Lo ven entonces como que las matemáticas no se debe buscar literatura porque la matemática no es para leer sino solo para mecánicamente hacer. Para que estudie solo y no puede porque no se le apoyo en lo que son los hábitos de estudios necesarios para que él estudiante sea el que indague más sus dudas en la literatura antes de ir con un maestro a resolverlo. Pero antes probó solo y se quitó el mismo con ello el miedo a encontrarse con el tema y a enfrentarlo hasta resolverlo o por lo menos tratar de hacerlo. El maestro está dando lo del libro, pero no busca otras opciones o contextualizarlo a otra realidad que el estudiante tiene. No hay que esperar que busque solo el libro base y se pasará un semestre entero dando los temas del libro no los que debería instruir porque como no lo sabe explicar eso es lo que le guía. Y no termina los temas que de verdad debería impartir. Se le da a un estudiante un libro de matemática para que estudie solo y no puede porque pierde el interés de investigar el tema antes de preguntar al maestro que solo repite el ejercicio del libro. El niño no se vuelve el investigador de sus dudas para resolverlo se vuelve un

ente receptor de lo que el docente repita que encuentra en el texto y con ello es suficiente memorizarlo. Ven a la mate como un gran algoritmo mecanicista que debe memorizarse y no comprenderse para resolver variados problemas de muchas formas. No les interesa y pierden el interés y ven la matemática como algo aburrido y tedioso y molesto enfrentándola año con año con desgana y desinterés. Ese cúmulo de desinterés desvalora la importancia de estudiarla plenamente y de conectarla a su realidad para adecuarlo y adaptarlo como parte suya y como integral tema de formación para la vida. De allí los miedos, las frustraciones, la desgana, el yo no puedo, nunca fui para la mate, no me gusta, etc. No hay que pensar en un libro base, pero hay que incluirlo en el caso en que el grupo de estudiantes se encuentre con un docente que no sabe nada.

¿Cuál es la metodología de la matemática que se utiliza actualmente en las aulas? ¿Cuál es la mejor?

Los maestros replican lo que encuentran en los libros de texto. Creo que primero no es la metodología lo malo, sino que tanto lo uso. Puedo usar el libro, pero debo equiparar con metodologías. No siempre se puede ser constructivista porque hay que cubrir todos los temas y no da tiempo. No da tiempo a que ellos descubran todos los temas a cubrir lo que se espera cubrir. Puedo avanzar rápido, pero otros niños pueden estar estancándose. El sistema educativo no permite pasar de nota a ese niño con deficiencias educativas en la materia. Creo que al maestro le toca jugar con sus metodologías. El niño debe exponerse a descubrir, equiparar a experimentar y creo que se necesita la práctica y las tablas se tienen que aprender. No me voy por una metodología, pero hay que haber ejes que no dejen enseñar. Juego de números. Familias de números si yo divido me da esto, multiplico esto y si sumo. No como un tema sino como propiedades. No como ejes las propiedades asociativas, distributiva conmutativas y se enseñan como temas puntuales en uno o tres veces en el año y no durante todo el ciclo escolar. Como las propiedades de los números y solo se dan en una o dos o tres clases. Reglas de tres, pero si en todo momento. Propongo ejes curriculares específicos en todo el año que no se pueden dejar de dar, aunque trate otros temas.

¿Cómo describe la práctica pedagógica más exitosa?

En mi experiencia no era una práctica tan moderna, pero tuve un par de profesores que empezaban con el problema nos hacían pensar, lo hacíamos y luego daban la clase magistral al respecto. Pero que tomaban la riqueza de todo lo discutido entre los alumnos y podría tomar un día un periodo. Problemas bien pensados. Planteamiento de problemas que se podría tomar partes del problema un día y luego daba por tema. No era temático sino resolución de problemas si practicar algoritmos, pero todo giraba alrededor del problema. Como diferentes algoritmos, retomábamos temas aprendí la metodología, pero no sé si es la mejor. Videos como Montessori. Con pitas con hules, corremos el riesgo que se quede en una simple actividad. Es un temor de este tipo de tecnología es un juego alegre, pero nada más. No quiere decir que sea mala pero no sacarnos a la naturaleza, pero sus propuestas era que pensáramos y que se resolviera como lo que tuviéramos y luego que nos acercáramos o no y luego nos daban el tema, pero antes era pensar sobre el tema. La participativa la ideal ¿Si a mí me funcionó?

¿Fortalezas de la enseñanza de la matemática en Guatemala? ¿Recuperar? ¿Y que sería?

Hay maestros buenos que hacen lo que pueden con lo que tienen. Sus métodos son del mismo sistema y de lo que han aprendido. No dejo fuera la importancia de volverse mecánico. Creo que hay en la enseñanza que es mecánico y creo que mucho de esto es bueno. Porque si no sé las tablas, me bloqueo. Parte bueno de la mecanización de ciertos procedimientos. Ya sé dónde ponerme para darle a la pelota buena. En mecanizar somos buenos. No debemos dejar la mecánica nos da rapidez, nos da seguridad, nos libera, memoria de trabajo para resolver y analizar.

¿Qué espacios vacíos hay en cuanto a investigar en aprendizaje matemática o enseñanza?

¿Cómo resuelve el maestro? Como lo sabe y piensa la matemática y como lo resuelve. La base de como él la va a enseñar. Es muy costosa esta investigación. Nos hemos preocupado por los estudiantes metodología y exámenes o pruebas. La forma como el maestro piensa la matemática es la base de cómo lo va a enseñar. Es muy costosa y sería muy bueno ver como un maestro resuelve un problema y compararlo como lo resuelven con sus alumnos. Réplica de la forma de pensar la de los estudiantes. Muchas

luzes hacia donde apoyarse. Aritmética y la Geometría está abandonada totalmente. Que sabe de Geometría que sabe el alumno no está claro y es reflejo de los libros y esta al final y si no da tiempo o se saltean no se da.

¿El perfil del docente ideal?

El saber matemática a un nivel más experto del nivel que enseña no es lo que se pide a un maestro de primaria (por ejemplo cálculo). Se le pide que lo que enseña sea experto y lo enseñe de diversas formas. Que sea capaz de ver cómo aprenden sus estudiantes y aplicar ese método o esa información o retroalimentación a su método de enseñanza.

¿Cuáles son las nuevas tendencias a las matemáticas que se adaptarían a Guatemala?

No sé de dónde es. Gamification o juego matemático con apoyo de la tecnología. Soy muy anticuada. Creo en la tecnología, pero no funciona por sí sola. Se ha demostrado que en matemática en nivel bajo sí funciona la tecnología. Pero la literatura Obama puso en USA las tabletas (*tablets*) en todos los grados y la distancia entre los niños que les iba bien y con oportunidades menores en lugar de acercarse se agrande. La capacidad del maestro de maniobrarla adecuadamente para mejorar el rendimiento y que no se utilice para perder tiempo. Entonces es mi miedo a la tecnología si no se utiliza bien el pizarrón, el cuaderno el jardín somos muy cómodos que ya deja a los niños solos y no para todos los estudiantes estar solos es algo bueno. Las nuevas tendencias son hacia que tipo de currículo es lo que estamos incluyendo. El CNB es como espiral ya que, se sigue viendo lo mismo y el alumno no recuerda lo que vio el año pasado. Seamos expertos en números enteros, súmemelos, parta molos, dividamos, propiedades que se aplica y luego conjuntos numéricos, pero como damos un poquito de cada tema en cada año y no existe mucha diferencia entre la suma y resta de 4º como en 6º y esto es en todas las instituciones. Son repetitivos y no los motivan. Si creo en la Tecnología en una capacitación y acompañamiento docente.

F. ANEXO 08

Alcances y limitaciones de la investigación:

Esta investigación se realiza con la información de pruebas pre test y post test en matemática que el Centro de Investigaciones educativas conformó y aplicó en el año 2015 a alumnos patrocinados por la organización Familias de Esperanza en el departamento de Sacatepéquez. Esta evaluación apoya en cuanto al tema del análisis y la categorización del error en matemática y su importancia del estudio para fortalecer la didáctica docente y la retroalimentación de los alumnos para la construcción de la mejora del desempeño y niveles de logro en matemática. Los resultados que se obtengan se limitan a la población descrita en esta investigación. Los limitantes de este estudio es que los resultados no pueden ser generalizados a otras poblaciones, que no cuenten con las características similares.

A manera de resumen se presenta la siguiente tabla descriptiva de los alcances y limitaciones de esta investigación.

Alcances	Limitaciones
Familiarizar a la comunidad educativa con el análisis del error y su práctica en las pruebas estandarizadas	No se puede generalizar los resultados, porque no es un estudio de carácter experimental y la muestra no se genera al azar.
Brindar información en lo referente a cuáles son los errores frecuentes y posibles causas en la división de alumnos de escuelas rurales de Guatemala, al analizar los datos apoyando la toma de decisiones	La muestra que se incluye en esta investigación no es al azar, ya que es una muestra del tipo accidental o casual. Esta muestra se conformó con estudiantes que casualmente se encontraban en el momento y lugar de aplicación de la prueba estandarizada del Centro de Investigaciones Educativas de la Universidad del Valle de Guatemala.
Aportar una revisión bibliográfica confiable sobre los orígenes del error y su análisis para contribuir a la mejora educativa	
Aportar con este estudio investigativo descriptivo el cual pretende medir y recoger información en un momento dado.	
El estudio investigativo tiene carácter explicativo porque pretende establecer posibles causas de los errores prevalentes en los estudiantes de 6º primaria en Guatemala	

G. ANEXO 09

RESULTADOS PRUEBAS MATEMÁTICAS FAMILIA LA ESPERANZA POR
ESTUDIANTE

Código #13 Escuela Ciudad Vieja			Prueba pre matemática			
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	71.43	58.33	72.50	Si logró el criterio
2		78.57	35.71	66.67	60.00	No logró el criterio
3		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
4		85.71	92.86	75.00	85.00	Si logró el criterio
5		78.57	42.86	25.00	50.00	No logró el criterio
6		78.57	85.71	75.00	80.00	Si logró el criterio
7		78.57	57.14	66.67	67.50	Si logró el criterio
8		92.86	64.29	50.00	70.00	Si logró el criterio
9		64.29	64.29	58.33	62.50	No logró el criterio
10		71.43	64.29	75.00	70.00	Si logró el criterio
11		85.71	50.00	58.33	65.00	Si logró el criterio
12		78.57	57.14	50.00	62.50	No logró el criterio
13		50.00	21.43	0.00	25.00	No logró el criterio
14		78.57	92.86	58.33	77.50	Si logró el criterio
15		64.29	64.29	41.67	57.50	No logró el criterio
16		57.14	42.86	75.00	57.50	No logró el criterio
17		57.14	35.71	33.33	42.50	No logró el criterio
18		42.86	50.00	25.00	40.00	No logró el criterio
19		85.71	71.43	66.67	75.00	Si logró el criterio
20		71.43	57.14	33.33	55.00	No logró el criterio
21		57.14	78.57	66.67	67.50	Si logró el criterio
22		71.43	57.14	33.33	55.00	No logró el criterio
23		85.71	78.57	58.33	75.00	Si logró el criterio
24		100.00	50.00	33.33	62.50	No logró el criterio
25		78.57	28.57	25.00	45.00	No logró el criterio
26		78.57	42.86	41.67	55.00	No logró el criterio
27		92.86	85.71	58.33	80.00	Si logró el criterio
28		71.43	14.29	33.33	40.00	No logró el criterio
29		78.57	50.00	75.00	67.50	Si logró el criterio
30		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
31		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
32		64.29	42.86	41.67	50.00	No logró el criterio
33		92.86	64.29	41.67	67.50	Si logró el criterio
34		100.00	78.57	33.33	72.50	Si logró el criterio
35		64.29	28.57	50.00	47.50	No logró el criterio
36		71.43	57.14	50.00	60.00	No logró el criterio
37		42.86	7.14	33.33	27.50	No logró el criterio
38		78.57	64.29	58.33	67.50	Si logró el criterio
39		92.86	50.00	33.33	60.00	No logró el criterio
40		100.00	71.43	75.00	82.50	Si logró el criterio
41		64.29	50.00	75.00	62.50	No logró el criterio
42		100.00	42.86	41.67	62.50	No logró el criterio
43		85.71	57.14	58.33	67.50	Si logró el criterio
44		85.71	71.43	58.33	72.50	Si logró el criterio
45		85.71	35.71	41.67	55.00	No logró el criterio
46		64.29	21.43	50.00	45.00	No logró el criterio
47		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
48		71.43	50.00	58.33	60.00	No logró el criterio
49		78.57	35.71	25.00	47.50	No logró el criterio
50		57.14	71.43	75.00	67.50	Si logró el criterio
51		85.71	57.14	83.33	75.00	Si logró el criterio
52		85.71	57.14	33.33	60.00	No logró el criterio
53		35.71	28.57	33.33	32.50	No logró el criterio
54		85.71	42.86	25.00	52.50	No logró el criterio
55		92.86	64.29	33.33	65.00	Si logró el criterio
56		100.00	78.57	100.00	92.50	Si logró el criterio
57		57.14	64.29	58.33	60.00	No logró el criterio

Código #13 Escuela Ciudad Vieja				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
58		92.86	71.43	50.00	72.50	Si logró el criterio
59		100.00	71.43	58.33	77.50	Si logró el criterio
60		64.29	14.29	25.00	35.00	No logró el criterio
61		71.43	35.71	16.67	42.50	No logró el criterio
62		92.86	78.57	50.00	75.00	Si logró el criterio
63		78.57	28.57	25.00	45.00	No logró el criterio
64		64.29	42.86	33.33	47.50	No logró el criterio
65		78.57	28.57	25.00	45.00	No logró el criterio
66		92.86	78.57	91.67	87.50	Si logró el criterio
67		64.29	28.57	41.67	45.00	No logró el criterio
68		78.57	42.86	33.33	52.50	No logró el criterio
69		85.71	50.00	25.00	55.00	No logró el criterio
70		92.86	57.14	33.33	62.50	No logró el criterio
71		42.86	57.14	58.33	52.50	No logró el criterio
72		64.29	35.71	25.00	42.50	No logró el criterio
73		85.71	42.86	58.33	62.50	No logró el criterio
74		85.71	50.00	83.33	72.50	Si logró el criterio

Código #8 Escuela Guardianía				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	35.71	41.67	55.00	No logró el criterio
2		64.29	85.71	58.33	70.00	Si logró el criterio
3		50.00	14.29	16.67	27.50	No logró el criterio
4		100.00	57.14	50.00	70.00	Si logró el criterio
5		85.71	85.71	50.00	75.00	Si logró el criterio
6		100.00	71.43	50.00	75.00	Si logró el criterio
7		71.43	50.00	25.00	50.00	No logró el criterio
8		92.86	64.29	75.00	77.50	Si logró el criterio
9		85.71	57.14	58.33	67.50	Si logró el criterio
10		42.86	21.43	25.00	30.00	No logró el criterio
11		71.43	35.71	58.33	55.00	No logró el criterio
12		78.57	50.00	50.00	60.00	No logró el criterio
13		64.29	57.14	33.33	52.50	No logró el criterio
14		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
15		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
16		50.00	57.14	8.33	40.00	No logró el criterio
17		100.00	57.14	41.67	67.50	Si logró el criterio
18		85.71	21.43	41.67	50.00	No logró el criterio
19		42.86	64.29	41.67	50.00	No logró el criterio
20		71.43	50.00	25.00	50.00	No logró el criterio
21		78.57	71.43	33.33	62.50	No logró el criterio
22		35.71	64.29	66.67	55.00	No logró el criterio

Código # 10 Escuela San Juan Del Obispo				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		78.57	57.14	50.00	62.50	No logró el criterio
2		78.57	35.71	25.00	47.50	No logró el criterio
3		57.14	42.86	33.33	45.00	No logró el criterio
4		78.57	64.29	75.00	72.50	Si logró el criterio
5		78.57	57.14	25.00	55.00	No logró el criterio
6		50.00	35.71	25.00	37.50	No logró el criterio
7		35.71	28.57	16.67	27.50	No logró el criterio
8		64.29	57.14	41.67	55.00	No logró el criterio

Código # 10 Escuela San Juan Del Obispo				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
9		78.57	57.14	58.33	65.00	Si logró el criterio
10		57.14	28.57	41.67	42.50	No logró el criterio
11		78.57	71.43	83.33	77.50	Si logró el criterio
12		78.57	64.29	8.33	52.50	No logró el criterio
13		57.14	28.57	41.67	42.50	No logró el criterio
14		50.00	35.71	33.33	40.00	No logró el criterio
15		78.57	35.71	25.00	47.50	No logró el criterio
16		50.00	64.29	25.00	47.50	No logró el criterio
17		92.86	21.43	58.33	57.50	No logró el criterio
18		64.29	71.43	58.33	65.00	Si logró el criterio
19		57.14	28.57	41.67	42.50	No logró el criterio
20		35.71	42.86	50.00	42.50	No logró el criterio
21		85.71	57.14	66.67	70.00	Si logró el criterio
22		85.71	78.57	91.67	85.00	Si logró el criterio
23		92.86	35.71	66.67	65.00	Si logró el criterio
24		78.57	50.00	50.00	60.00	No logró el criterio
25		85.71	57.14	50.00	65.00	Si logró el criterio
26		71.43	42.86	50.00	55.00	No logró el criterio
27		57.14	64.29	41.67	55.00	No logró el criterio
28		78.57	35.71	25.00	47.50	No logró el criterio
29		64.29	42.86	16.67	42.50	No logró el criterio
30		100.00	57.14	66.67	75.00	Si logró el criterio
31		78.57	85.71	75.00	80.00	Si logró el criterio
32		57.14	42.86	25.00	42.50	No logró el criterio
33		64.29	42.86	25.00	45.00	No logró el criterio
34		100.00	64.29	83.33	82.50	Si logró el criterio
35		64.29	28.57	50.00	47.50	No logró el criterio
36		71.43	50.00	66.67	62.50	No logró el criterio
37		71.43	35.71	16.67	42.50	No logró el criterio
38		92.86	64.29	83.33	80.00	Si logró el criterio
39		57.14	50.00	41.67	50.00	No logró el criterio
40		50.00	14.29	8.33	25.00	No logró el criterio
41		85.71	100.00	91.67	92.50	Si logró el criterio
42		92.86	28.57	25.00	50.00	No logró el criterio
43		78.57	71.43	91.67	80.00	Si logró el criterio
44		85.71	21.43	25.00	45.00	No logró el criterio
45		78.57	28.57	33.33	47.50	No logró el criterio
46		85.71	28.57	50.00	55.00	No logró el criterio
47		100.00	42.86	25.00	57.50	No logró el criterio
48		64.29	35.71	41.67	47.50	No logró el criterio
49		92.86	42.86	58.33	65.00	Si logró el criterio
50		100.00	71.43	66.67	80.00	Si logró el criterio
51		100.00	64.29	25.00	65.00	Si logró el criterio
52		42.86	35.71	16.67	32.50	No logró el criterio
53		64.29	50.00	83.33	65.00	Si logró el criterio
54		71.43	57.14	50.00	60.00	No logró el criterio
55		71.43	35.71	25.00	45.00	No logró el criterio
56		71.43	35.71	33.33	47.50	No logró el criterio
57		71.43	42.86	33.33	50.00	No logró el criterio
58		50.00	42.86	8.33	35.00	No logró el criterio
59		78.57	42.86	41.67	55.00	No logró el criterio
60		35.71	21.43	41.67	32.50	No logró el criterio
61		57.14	35.71	50.00	47.50	No logró el criterio
62		35.71	57.14	33.33	42.50	No logró el criterio
63		64.29	28.57	33.33	42.50	No logró el criterio
64		35.71	64.29	16.67	40.00	No logró el criterio

Código #1 Escuela San Miguel Escobar						
Matutina			Prueba pre matemática			
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		92.86	42.86	50.00	62.50	No logró el criterio
2		78.57	71.43	41.67	65.00	Si logró el criterio
3		78.57	35.71	58.33	57.50	No logró el criterio
4		85.71	78.57	58.33	75.00	Si logró el criterio
5		78.57	57.14	66.67	67.50	Si logró el criterio
6		85.71	57.14	75.00	72.50	Si logró el criterio
7		100.00	64.29	75.00	80.00	Si logró el criterio
8		85.71	42.86	50.00	60.00	No logró el criterio
9		85.71	50.00	58.33	65.00	Si logró el criterio
10		100.00	78.57	58.33	80.00	Si logró el criterio
11		85.71	57.14	75.00	72.50	Si logró el criterio
12		92.86	100.00	83.33	92.50	Si logró el criterio
13		64.29	57.14	41.67	55.00	No logró el criterio
14		78.57	92.86	66.67	80.00	Si logró el criterio
15		78.57	64.29	50.00	65.00	Si logró el criterio
16		100.00	78.57	83.33	87.50	Si logró el criterio
17		78.57	78.57	58.33	72.50	Si logró el criterio
18		50.00	71.43	25.00	50.00	No logró el criterio
19		100.00	78.57	100.00	92.50	Si logró el criterio
20		78.57	78.57	41.67	67.50	Si logró el criterio
21		71.43	50.00	58.33	60.00	No logró el criterio
22		64.29	42.86	50.00	52.50	No logró el criterio
23		71.43	42.86	25.00	47.50	No logró el criterio
24		64.29	64.29	66.67	65.00	Si logró el criterio
25		71.43	35.71	66.67	57.50	No logró el criterio
26		100.00	64.29	83.33	82.50	Si logró el criterio
27		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
28		85.71	85.71	83.33	85.00	Si logró el criterio
29		92.86	42.86	75.00	70.00	Si logró el criterio
30		100.00	71.43	83.33	85.00	Si logró el criterio
31		92.86	35.71	58.33	62.50	No logró el criterio
32		100.00	50.00	83.33	77.50	Si logró el criterio
33		92.86	42.86	66.67	67.50	Si logró el criterio
34		92.86	57.14	41.67	65.00	Si logró el criterio
35		78.57	57.14	50.00	62.50	No logró el criterio
36		92.86	78.57	75.00	82.50	Si logró el criterio
37		92.86	57.14	41.67	65.00	Si logró el criterio
38		78.57	42.86	50.00	57.50	No logró el criterio
39		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
40		78.57	50.00	83.33	70.00	Si logró el criterio
41		92.86	42.86	66.67	67.50	Si logró el criterio
42		92.86	28.57	58.33	60.00	No logró el criterio
43		92.86	78.57	83.33	85.00	Si logró el criterio
44		92.86	42.86	50.00	62.50	No logró el criterio
45		92.86	92.86	91.67	92.50	Si logró el criterio
46		92.86	71.43	91.67	85.00	Si logró el criterio
47		85.71	64.29	75.00	75.00	Si logró el criterio
48		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
49		64.29	71.43	66.67	67.50	Si logró el criterio
50		64.29	42.86	41.67	50.00	No logró el criterio
51		100.00	42.86	58.33	67.50	Si logró el criterio
52		78.57	64.29	50.00	65.00	Si logró el criterio
53		85.71	50.00	66.67	67.50	Si logró el criterio
54		78.57	42.86	75.00	65.00	Si logró el criterio
55		78.57	35.71	66.67	60.00	No logró el criterio
56		100.00	64.29	50.00	72.50	Si logró el criterio
57		85.71	85.71	75.00	82.50	Si logró el criterio

Código #6 Escuela San Miguel Escobar						
Vespertina			Prueba pre matemática			
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
2		71.43	64.29	58.33	65.00	Si logró el criterio
3		64.29	78.57	58.33	67.50	Si logró el criterio
4		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
5		100.00	85.71	83.33	90.00	Si logró el criterio
6		85.71	85.71	100.00	90.00	Si logró el criterio
7		85.71	50.00	33.33	57.50	No logró el criterio
8		64.29	35.71	50.00	50.00	No logró el criterio
9		57.14	42.86	66.67	55.00	No logró el criterio
10		71.43	42.86	50.00	55.00	No logró el criterio
11		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
12		42.86	35.71	16.67	32.50	No logró el criterio
13		50.00	50.00	66.67	55.00	No logró el criterio
14		42.86	50.00	33.33	42.50	No logró el criterio
15		57.14	21.43	16.67	32.50	No logró el criterio
16		57.14	64.29	41.67	55.00	No logró el criterio
17		64.29	71.43	25.00	55.00	No logró el criterio
18		78.57	35.71	66.67	60.00	No logró el criterio
19		64.29	7.14	33.33	35.00	No logró el criterio
20		85.71	57.14	58.33	67.50	Si logró el criterio
21		78.57	35.71	41.67	52.50	No logró el criterio
22		92.86	64.29	58.33	72.50	Si logró el criterio
23		57.14	64.29	41.67	55.00	No logró el criterio
24		92.86	42.86	66.67	67.50	Si logró el criterio
25		85.71	78.57	50.00	72.50	Si logró el criterio
26		78.57	85.71	50.00	72.50	Si logró el criterio
27		92.86	50.00	41.67	62.50	No logró el criterio
28		92.86	50.00	58.33	67.50	Si logró el criterio
29		78.57	21.43	66.67	55.00	No logró el criterio
30		92.86	50.00	58.33	67.50	Si logró el criterio
31		78.57	42.86	50.00	57.50	No logró el criterio
32		85.71	50.00	66.67	67.50	Si logró el criterio
33		78.57	28.57	58.33	55.00	No logró el criterio
34		78.57	42.86	50.00	57.50	No logró el criterio
35		50.00	57.14	50.00	52.50	No logró el criterio
36		100.00	35.71	58.33	65.00	Si logró el criterio
37		85.71	50.00	58.33	65.00	Si logró el criterio
38		78.57	28.57	50.00	52.50	No logró el criterio
39		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
40		42.86	50.00	25.00	40.00	No logró el criterio
41		78.57	71.43	33.33	62.50	No logró el criterio
42		92.86	42.86	25.00	55.00	No logró el criterio
43		85.71	50.00	58.33	65.00	Si logró el criterio
44		78.57	50.00	33.33	55.00	No logró el criterio
45		100.00	92.86	83.33	92.50	Si logró el criterio

Codigo #4 Escuela San Miguel Milpas Altas			Prueba pre matemática			
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		71.43	71.43	50.00	65.00	Si logró el criterio
2		50.00	35.71	33.33	40.00	No logró el criterio
3		35.71	28.57	16.67	27.50	No logró el criterio
4		42.86	50.00	75.00	55.00	No logró el criterio
5		50.00	50.00	41.67	47.50	No logró el criterio
6		35.71	64.29	33.33	45.00	No logró el criterio
7		57.14	28.57	33.33	40.00	No logró el criterio
8		85.71	42.86	50.00	60.00	No logró el criterio
9		78.57	64.29	41.67	62.50	No logró el criterio
10		78.57	21.43	16.67	40.00	No logró el criterio
11		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
12		92.86	71.43	33.33	67.50	Si logró el criterio
13		57.14	42.86	25.00	42.50	No logró el criterio
14		21.43	7.14	41.67	22.50	No logró el criterio
15		64.29	42.86	66.67	57.50	No logró el criterio
16		64.29	78.57	8.33	52.50	No logró el criterio
17		42.86	64.29	25.00	45.00	No logró el criterio
18		71.43	50.00	83.33	67.50	Si logró el criterio
19		64.29	64.29	66.67	65.00	Si logró el criterio
20		14.29	21.43	16.67	17.50	No logró el criterio
21		71.43	78.57	33.33	62.50	No logró el criterio
22		50.00	28.57	33.33	37.50	No logró el criterio
23		78.57	21.43	41.67	47.50	No logró el criterio
24		50.00	42.86	50.00	47.50	No logró el criterio
25		28.57	50.00	25.00	35.00	No logró el criterio
26		42.86	35.71	25.00	35.00	No logró el criterio
27		64.29	21.43	50.00	45.00	No logró el criterio
28		42.86	50.00	50.00	47.50	No logró el criterio
29		78.57	50.00	41.67	57.50	No logró el criterio
30		85.71	71.43	75.00	77.50	Si logró el criterio
31		57.14	42.86	50.00	50.00	No logró el criterio
32		64.29	35.71	0.00	35.00	No logró el criterio
33		78.57	35.71	50.00	55.00	No logró el criterio
34		85.71	7.14	50.00	47.50	No logró el criterio
35		50.00	28.57	50.00	42.50	No logró el criterio
36		50.00	35.71	16.67	35.00	No logró el criterio
37		71.43	42.86	33.33	50.00	No logró el criterio
38		21.43	50.00	25.00	32.50	No logró el criterio
39		42.86	50.00	41.67	45.00	No logró el criterio
40		21.43	28.57	33.33	27.50	No logró el criterio
41		71.43	50.00	33.33	52.50	No logró el criterio
42		78.57	21.43	33.33	45.00	No logró el criterio
43		57.14	42.86	33.33	45.00	No logró el criterio
44		64.29	50.00	66.67	60.00	No logró el criterio
45		50.00	28.57	41.67	40.00	No logró el criterio
46		42.86	57.14	25.00	42.50	No logró el criterio
47		71.43	50.00	41.67	55.00	No logró el criterio
48		64.29	21.43	33.33	40.00	No logró el criterio
49		50.00	28.57	25.00	35.00	No logró el criterio
50		64.29	28.57	8.33	35.00	No logró el criterio
51		35.71	21.43	66.67	40.00	No logró el criterio
52		71.43	50.00	25.00	50.00	No logró el criterio
53		42.86	42.86	8.33	32.50	No logró el criterio
54		64.29	28.57	25.00	40.00	No logró el criterio

Código # 12 Escuela San Pedro Vespertina				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		57.14	35.71	41.67	45.00	No logró el criterio
2		57.14	78.57	75.00	70.00	Si logró el criterio
3		50.00	35.71	41.67	42.50	No logró el criterio
4		50.00	57.14	66.67	57.50	No logró el criterio
5		50.00	71.43	41.67	55.00	No logró el criterio
6		35.71	64.29	25.00	42.50	No logró el criterio
7		35.71	71.43	33.33	47.50	No logró el criterio
8		57.14	57.14	91.67	67.50	Si logró el criterio
9		85.71	85.71	33.33	70.00	Si logró el criterio
10		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
11		85.71	57.14	66.67	70.00	Si logró el criterio
12		50.00	35.71	58.33	47.50	No logró el criterio
13		42.86	57.14	25.00	42.50	No logró el criterio
14		85.71	78.57	91.67	85.00	Si logró el criterio
15		64.29	42.86	25.00	45.00	No logró el criterio
16		71.43	42.86	91.67	67.50	Si logró el criterio
17		57.14	35.71	25.00	40.00	No logró el criterio
18		64.29	78.57	50.00	65.00	Si logró el criterio
19		64.29	50.00	41.67	52.50	No logró el criterio
20		92.86	78.57	75.00	82.50	Si logró el criterio
21		71.43	64.29	41.67	60.00	No logró el criterio
22		64.29	71.43	41.67	60.00	No logró el criterio

Código # 5 Escuela Santa Catarina Bobadilla				Prueba pre matemática		
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		64.29	42.86	8.33	40.00	No logró el criterio
2		85.71	35.71	66.67	62.50	No logró el criterio
3		57.14	57.14	41.67	52.50	No logró el criterio
4		64.29	42.86	58.33	55.00	No logró el criterio
5		85.71	71.43	33.33	65.00	Si logró el criterio
6		85.71	50.00	66.67	67.50	Si logró el criterio
7		21.43	57.14	25.00	35.00	No logró el criterio
8		64.29	57.14	75.00	65.00	Si logró el criterio
9		92.86	35.71	41.67	57.50	No logró el criterio
10		78.57	71.43	50.00	67.50	Si logró el criterio
11		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
12		28.57	28.57	33.33	30.00	No logró el criterio
13		71.43	35.71	33.33	47.50	No logró el criterio
14		85.71	50.00	50.00	62.50	No logró el criterio
15		57.14	42.86	50.00	50.00	No logró el criterio
16		64.29	78.57	91.67	77.50	Si logró el criterio
17		78.57	57.14	33.33	57.50	No logró el criterio
18		71.43	71.43	50.00	65.00	Si logró el criterio
19		78.57	64.29	66.67	70.00	Si logró el criterio
20		92.86	85.71	58.33	80.00	Si logró el criterio
21		57.14	35.71	50.00	47.50	No logró el criterio
22		78.57	71.43	58.33	70.00	Si logró el criterio
23		78.57	71.43	75.00	75.00	Si logró el criterio
24		64.29	42.86	33.33	47.50	No logró el criterio
25		57.14	42.86	41.67	47.50	No logró el criterio
26		71.43	64.29	66.67	67.50	Si logró el criterio
27		50.00	35.71	25.00	37.50	No logró el criterio
28		85.71	78.57	91.67	85.00	Si logró el criterio
29		71.43	50.00	41.67	55.00	No logró el criterio
30		71.43	57.14	25.00	52.50	No logró el criterio

Ciudad Vieja sección A		postest matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		100.00	50.00	50.00	67.50	Si logró el criterio
2		71.43	42.86	41.67	52.50	No logró el criterio
3		78.57	71.43	50.00	67.50	Si logró el criterio
4		57.14	21.43	41.67	40.00	No logró el criterio
5		100.00	100.00	91.67	97.50	Si logró el criterio
6		78.57	100.00	91.67	90.00	Si logró el criterio
7		71.43	85.71	50.00	70.00	Si logró el criterio
8		64.29	28.57	41.67	45.00	No logró el criterio
9		71.43	50.00	50.00	57.50	No logró el criterio
10		92.86	64.29	91.67	82.50	Si logró el criterio
11		78.57	78.57	66.67	75.00	Si logró el criterio
12		100.00	92.86	100.00	97.50	Si logró el criterio
13		35.71	35.71	33.33	35.00	No logró el criterio
14		85.71	78.57	66.67	77.50	Si logró el criterio
15		78.57	42.86	58.33	60.00	No logró el criterio
16		78.57	57.14	58.33	65.00	Si logró el criterio
17		100.00	57.14	50.00	70.00	Si logró el criterio
18		78.57	78.57	58.33	72.50	Si logró el criterio
19		57.14	57.14	50.00	55.00	No logró el criterio
20		92.86	71.43	66.67	77.50	Si logró el criterio
21		85.71	85.71	91.67	87.50	Si logró el criterio
22		64.29	50.00	33.33	50.00	No logró el criterio
23		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
24		64.29	28.57	41.67	45.00	No logró el criterio
25		85.71	50.00	66.67	67.50	Si logró el criterio
26		85.71	57.14	75.00	72.50	Si logró el criterio
27		85.71	42.86	66.67	65.00	Si logró el criterio
28		78.57	64.29	41.67	62.50	No logró el criterio
29		78.57	42.86	8.33	45.00	No logró el criterio
30		78.57	35.71	58.33	57.50	No logró el criterio
31		92.86	92.86	83.33	90.00	Si logró el criterio
32		78.57	35.71	33.33	50.00	No logró el criterio
33		64.29	71.43	75.00	70.00	Si logró el criterio
34		85.71	71.43	91.67	82.50	Si logró el criterio

Ciudad Vieja sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		57.14	42.86	8.33	37.50	No logró el criterio
2		85.71	78.57	83.33	82.50	Si logró el criterio
3		92.86	64.29	91.67	82.50	Si logró el criterio
4		71.43	64.29	66.67	67.50	Si logró el criterio
5		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
6		85.71	50.00	41.67	60.00	No logró el criterio
7		100.00	71.43	58.33	77.50	Si logró el criterio
8		85.71	78.57	16.67	62.50	No logró el criterio
9		100.00	64.29	66.67	77.50	Si logró el criterio
10		100.00	57.14	50.00	70.00	Si logró el criterio
11		92.86	64.29	66.67	75.00	Si logró el criterio
12		100.00	50.00	66.67	72.50	Si logró el criterio
13		71.43	50.00	33.33	52.50	No logró el criterio
14		35.71	50.00	16.67	35.00	No logró el criterio
15		78.57	71.43	58.33	70.00	Si logró el criterio
16		57.14	21.43	25.00	35.00	No logró el criterio
17		85.71	85.71	91.67	87.50	Si logró el criterio
18		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
19		64.29	28.57	16.67	37.50	No logró el criterio
20		71.43	78.57	75.00	75.00	Si logró el criterio
21		71.43	28.57	25.00	42.50	No logró el criterio
22		57.14	35.71	33.33	42.50	No logró el criterio
23		92.86	85.71	58.33	80.00	Si logró el criterio
24		78.57	35.71	58.33	57.50	No logró el criterio
25		78.57	57.14	25.00	55.00	No logró el criterio
26		71.43	64.29	41.67	60.00	No logró el criterio
27		71.43	64.29	33.33	57.50	No logró el criterio
28		64.29	57.14	33.33	52.50	No logró el criterio
29		78.57	71.43	50.00	67.50	Si logró el criterio
30		92.86	92.86	91.67	92.50	Si logró el criterio
31		92.86	78.57	58.33	77.50	Si logró el criterio
32		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
33		85.71	42.86	50.00	60.00	No logró el criterio
34		64.29	71.43	41.67	60.00	No logró el criterio
35		71.43	71.43	33.33	60.00	No logró el criterio
36		100.00	64.29	75.00	80.00	Si logró el criterio
37		78.57	57.14	16.67	52.50	No logró el criterio
38		92.86	71.43	83.33	82.50	Si logró el criterio
39		71.43	28.57	41.67	47.50	No logró el criterio
40		57.14	57.14	66.67	60.00	No logró el criterio

San Miguel Escobar Matutina Seccion A		Prueba postest matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	57.14	41.67	62.50	No logró el criterio
2		92.86	78.57	83.33	85.00	Si logró el criterio
3		100.00	71.43	66.67	80.00	Si logró el criterio
4		100.00	64.29	83.33	82.50	Si logró el criterio
5		85.71	92.86	83.33	87.50	Si logró el criterio
6		85.71	64.29	83.33	77.50	Si logró el criterio
7		92.86	71.43	66.67	77.50	Si logró el criterio
8		85.71	50.00	58.33	65.00	Si logró el criterio
9		78.57	71.43	66.67	72.50	Si logró el criterio
10		64.29	64.29	41.67	57.50	No logró el criterio
11		85.71	71.43	50.00	70.00	Si logró el criterio
12		85.71	64.29	66.67	72.50	Si logró el criterio
13		92.86	64.29	66.67	75.00	Si logró el criterio
14		92.86	57.14	50.00	67.50	Si logró el criterio
15		78.57	21.43	41.67	47.50	No logró el criterio
16		71.43	64.29	33.33	57.50	No logró el criterio
17		100.00	64.29	66.67	77.50	Si logró el criterio
18		85.71	64.29	66.67	72.50	Si logró el criterio
19		100.00	78.57	75.00	85.00	Si logró el criterio
20		78.57	92.86	50.00	75.00	Si logró el criterio
21		71.43	85.71	75.00	77.50	Si logró el criterio
22		64.29	57.14	58.33	60.00	No logró el criterio
23		78.57	78.57	66.67	75.00	Si logró el criterio
24		71.43	78.57	41.67	65.00	Si logró el criterio
25		71.43	35.71	41.67	50.00	No logró el criterio
26		71.43	71.43	33.33	60.00	No logró el criterio
27		64.29	57.14	66.67	62.50	No logró el criterio
28		85.71	100.00	91.67	92.50	Si logró el criterio

San Miguel Escobar Matutina sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	78.57	83.33	82.50	Si logró el criterio
2		92.86	42.86	83.33	72.50	Si logró el criterio
3		78.57	57.14	50.00	62.50	No logró el criterio
4		100.00	78.57	50.00	77.50	Si logró el criterio
5		64.29	78.57	50.00	65.00	Si logró el criterio
6		92.86	35.71	50.00	60.00	No logró el criterio
7		100.00	71.43	75.00	82.50	Si logró el criterio
8		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
9		92.86	57.14	83.33	77.50	Si logró el criterio
10		85.71	71.43	58.33	72.50	Si logró el criterio
11		71.43	71.43	41.67	62.50	No logró el criterio
12		57.14	71.43	83.33	70.00	Si logró el criterio
13		92.86	35.71	83.33	70.00	Si logró el criterio
14		85.71	57.14	50.00	65.00	Si logró el criterio
15		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
16		100.00	71.43	75.00	82.50	Si logró el criterio
17		100.00	57.14	58.33	72.50	Si logró el criterio
18		92.86	85.71	66.67	82.50	Si logró el criterio
19		92.86	85.71	91.67	90.00	Si logró el criterio
20		92.86	71.43	58.33	75.00	Si logró el criterio
21		92.86	78.57	83.33	85.00	Si logró el criterio
22		71.43	57.14	58.33	62.50	No logró el criterio
23		78.57	50.00	83.33	70.00	Si logró el criterio
24		71.43	57.14	66.67	65.00	Si logró el criterio
25		92.86	100.00	75.00	90.00	Si logró el criterio
26		78.57	57.14	66.67	67.50	Si logró el criterio
27		92.86	64.29	50.00	70.00	Si logró el criterio
28		92.86	35.71	66.67	65.00	Si logró el criterio
29		85.71	78.57	50.00	72.50	Si logró el criterio

San Miguel Milpas Altas sección A		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		92.86	92.86	58.33	82.50	Si logró el criterio
2		85.71	50.00	33.33	57.50	No logró el criterio
3		71.43	57.14	16.67	50.00	No logró el criterio
4		78.57	21.43	33.33	45.00	No logró el criterio
5		64.29	21.43	0.00	30.00	No logró el criterio
6		78.57	28.57	58.33	55.00	No logró el criterio
7		28.57	28.57	33.33	30.00	No logró el criterio
8		57.14	42.86	33.33	45.00	No logró el criterio
9		50.00	42.86	58.33	50.00	No logró el criterio
10		78.57	50.00	41.67	57.50	No logró el criterio
11		57.14	28.57	33.33	40.00	No logró el criterio
12		100.00	100.00	66.67	90.00	Si logró el criterio
13		64.29	50.00	33.33	50.00	No logró el criterio
14		100.00	85.71	41.67	77.50	Si logró el criterio
15		71.43	50.00	25.00	50.00	No logró el criterio
16		64.29	42.86	16.67	42.50	No logró el criterio
17		64.29	50.00	25.00	47.50	No logró el criterio
18		78.57	57.14	33.33	57.50	No logró el criterio
19		85.71	57.14	58.33	67.50	Si logró el criterio
20		42.86	50.00	8.33	35.00	No logró el criterio
21		42.86	21.43	50.00	37.50	No logró el criterio
22		71.43	57.14	33.33	55.00	No logró el criterio
23		50.00	57.14	8.33	40.00	No logró el criterio
24		35.71	64.29	16.67	40.00	No logró el criterio
25		28.57	35.71	16.67	27.50	No logró el criterio
26		78.57	71.43	91.67	80.00	Si logró el criterio
27		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
28		71.43	57.14	50.00	60.00	No logró el criterio

Santa Catarina Bobadilla		Prueba postest matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
2		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
3		71.43	78.57	50.00	67.50	Si logró el criterio
4		85.71	50.00	50.00	62.50	No logró el criterio
5		50.00	85.71	25.00	55.00	No logró el criterio
6		100.00	57.14	66.67	75.00	Si logró el criterio
7		71.43	71.43	58.33	67.50	Si logró el criterio
8		78.57	42.86	58.33	60.00	No logró el criterio
9		71.43	71.43	0.00	50.00	No logró el criterio
10		71.43	64.29	58.33	65.00	Si logró el criterio
11		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
12		85.71	35.71	66.67	62.50	No logró el criterio
13		71.43	64.29	25.00	55.00	No logró el criterio
14		92.86	78.57	58.33	77.50	Si logró el criterio
15		71.43	57.14	41.67	57.50	No logró el criterio
16		92.86	78.57	75.00	82.50	Si logró el criterio
17		78.57	71.43	66.67	72.50	Si logró el criterio
18		71.43	57.14	66.67	65.00	Si logró el criterio
19		92.86	71.43	50.00	72.50	Si logró el criterio
20		64.29	64.29	58.33	62.50	No logró el criterio
21		64.29	64.29	50.00	60.00	No logró el criterio
22		92.86	71.43	100.00	87.50	Si logró el criterio
23		85.71	78.57	100.00	87.50	Si logró el criterio
24		78.57	64.29	58.33	67.50	Si logró el criterio
25		71.43	50.00	41.67	55.00	No logró el criterio
26		71.43	92.86	66.67	77.50	Si logró el criterio
27		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
28		64.29	57.14	58.33	60.00	No logró el criterio
29		92.86	71.43	66.67	77.50	Si logró el criterio
30		100.00	92.86	83.33	92.50	Si logró el criterio

San Miguel Escobar Vespertina sección A		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		71.43	42.86	25.00	47.50	No logró el criterio
2		85.71	92.86	66.67	82.50	Si logró el criterio
3		28.57	50.00	75.00	50.00	No logró el criterio
4		92.86	21.43	33.33	50.00	No logró el criterio
5		57.14	64.29	33.33	52.50	No logró el criterio
6		100.00	92.86	100.00	97.50	Si logró el criterio
7		50.00	42.86	25.00	40.00	No logró el criterio
8		78.57	78.57	50.00	70.00	Si logró el criterio
9		85.71	35.71	50.00	57.50	No logró el criterio
10		57.14	64.29	33.33	52.50	No logró el criterio
11		92.86	92.86	100.00	95.00	Si logró el criterio
12		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
13		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
14		85.71	57.14	41.67	62.50	No logró el criterio
15		78.57	50.00	33.33	55.00	No logró el criterio
16		92.86	64.29	75.00	77.50	Si logró el criterio
17		71.43	64.29	50.00	62.50	No logró el criterio
18		64.29	50.00	58.33	57.50	No logró el criterio
19		57.14	21.43	41.67	40.00	No logró el criterio
20		85.71	50.00	50.00	62.50	No logró el criterio
21		85.71	71.43	58.33	72.50	Si logró el criterio
22		64.29	78.57	50.00	65.00	Si logró el criterio
23		64.29	64.29	75.00	67.50	Si logró el criterio

San Miguel Escobar Vespertina sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		100.00	71.43	91.67	87.50	Si logró el criterio
2		78.57	50.00	50.00	60.00	No logró el criterio
3		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
4		100.00	71.43	41.67	72.50	Si logró el criterio
5		85.71	21.43	50.00	52.50	No logró el criterio
6		85.71	78.57	41.67	70.00	Si logró el criterio
7		100.00	50.00	75.00	75.00	Si logró el criterio
8		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
9		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
10		64.29	71.43	91.67	75.00	Si logró el criterio
11		92.86	57.14	50.00	67.50	Si logró el criterio
12		78.57	57.14	66.67	67.50	Si logró el criterio
13		100.00	85.71	66.67	85.00	Si logró el criterio
14		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
15		92.86	78.57	75.00	82.50	Si logró el criterio
16		21.43	21.43	0.00	15.00	No logró el criterio
17		85.71	71.43	58.33	72.50	Si logró el criterio
18		92.86	78.57	50.00	75.00	Si logró el criterio
19		78.57	64.29	75.00	72.50	Si logró el criterio
20		92.86	42.86	58.33	65.00	Si logró el criterio
21		71.43	50.00	66.67	62.50	No logró el criterio
22		64.29	85.71	33.33	62.50	No logró el criterio

No.	Guardiania	Prueba post matemática				
	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		78.57	57.14	58.33	65.00	Si logró el criterio
2		85.71	78.57	66.67	77.50	Si logró el criterio
3		85.71	78.57	58.33	75.00	Si logró el criterio
4		64.29	35.71	25.00	42.50	No logró el criterio
5		92.86	64.29	83.33	80.00	Si logró el criterio
6		100.00	85.71	75.00	87.50	Si logró el criterio
7		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
8		100.00	71.43	58.33	77.50	Si logró el criterio
9		78.57	57.14	25.00	55.00	No logró el criterio
10		100.00	78.57	83.33	87.50	Si logró el criterio
11		85.71	28.57	50.00	55.00	No logró el criterio
12		100.00	71.43	50.00	75.00	Si logró el criterio
13		92.86	57.14	50.00	67.50	Si logró el criterio
14		64.29	64.29	58.33	62.50	No logró el criterio
15		57.14	50.00	16.67	42.50	No logró el criterio
16		50.00	57.14	33.33	47.50	No logró el criterio
17		57.14	42.86	33.33	45.00	No logró el criterio
18		92.86	35.71	75.00	67.50	Si logró el criterio
19		92.86	78.57	75.00	82.50	Si logró el criterio
20		64.29	71.43	33.33	57.50	No logró el criterio
21		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
22		71.43	57.14	50.00	60.00	No logró el criterio

San Juan del Obispo sección A		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	71.43	41.67	67.50	Si logró el criterio
2		71.43	42.86	33.33	50.00	No logró el criterio
3		64.29	42.86	41.67	50.00	No logró el criterio
4		100.00	78.57	100.00	92.50	Si logró el criterio
5		57.14	57.14	58.33	57.50	No logró el criterio
6		100.00	92.86	75.00	90.00	Si logró el criterio
7		78.57	64.29	50.00	65.00	Si logró el criterio
8		85.71	71.43	50.00	70.00	Si logró el criterio
9		100.00	42.86	66.67	70.00	Si logró el criterio
10		85.71	71.43	66.67	75.00	Si logró el criterio
11		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
12		92.86	57.14	66.67	72.50	Si logró el criterio
13		64.29	57.14	25.00	50.00	No logró el criterio
14		85.71	35.71	25.00	50.00	No logró el criterio
15		71.43	64.29	33.33	57.50	No logró el criterio
16		71.43	71.43	41.67	62.50	No logró el criterio
17		100.00	78.57	41.67	75.00	Si logró el criterio
18		100.00	42.86	58.33	67.50	Si logró el criterio
19		78.57	64.29	41.67	62.50	No logró el criterio
20		57.14	42.86	41.67	47.50	No logró el criterio
21		7.14	50.00	41.67	32.50	No logró el criterio
22		85.71	78.57	83.33	82.50	Si logró el criterio
23		78.57	35.71	16.67	45.00	No logró el criterio
24		100.00	85.71	100.00	95.00	Si logró el criterio
25		71.43	35.71	41.67	50.00	No logró el criterio
26		71.43	42.86	58.33	57.50	No logró el criterio
27		92.86	71.43	25.00	65.00	Si logró el criterio
28		35.71	28.57	41.67	35.00	No logró el criterio
29		78.57	35.71	25.00	47.50	No logró el criterio
30		85.71	100.00	66.67	85.00	Si logró el criterio
31		100.00	78.57	66.67	82.50	Si logró el criterio

San Juan del Obispo sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		85.71	42.86	41.67	57.50	No logró el criterio
2		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
3		100.00	78.57	75.00	85.00	Si logró el criterio
4		50.00	50.00	16.67	40.00	No logró el criterio
5		85.71	57.14	33.33	60.00	No logró el criterio
6		78.57	57.14	33.33	57.50	No logró el criterio
7		85.71	78.57	58.33	75.00	Si logró el criterio
8		71.43	78.57	33.33	62.50	No logró el criterio
9		71.43	64.29	58.33	65.00	Si logró el criterio
10		92.86	14.29	8.33	40.00	No logró el criterio
11		92.86	85.71	83.33	87.50	Si logró el criterio
12		64.29	64.29	66.67	65.00	Si logró el criterio
13		100.00	78.57	75.00	85.00	Si logró el criterio
14		92.86	64.29	83.33	80.00	Si logró el criterio
15		85.71	92.86	66.67	82.50	Si logró el criterio
16		92.86	57.14	58.33	70.00	Si logró el criterio
17		85.71	64.29	50.00	67.50	Si logró el criterio
18		85.71	78.57	75.00	80.00	Si logró el criterio
19		28.57	42.86	58.33	42.50	No logró el criterio
20		71.43	64.29	16.67	52.50	No logró el criterio
21		100.00	85.71	83.33	90.00	Si logró el criterio
22		50.00	50.00	25.00	42.50	No logró el criterio
23		92.86	64.29	75.00	77.50	Si logró el criterio
24		85.71	57.14	58.33	67.50	Si logró el criterio
25		50.00	57.14	25.00	45.00	No logró el criterio
26		85.71	64.29	25.00	60.00	No logró el criterio
27		64.29	64.29	41.67	57.50	No logró el criterio
28		92.86	50.00	75.00	72.50	Si logró el criterio
29		78.57	71.43	58.33	70.00	Si logró el criterio
30		57.14	35.71	25.00	40.00	No logró el criterio
31		100.00	42.86	16.67	55.00	No logró el criterio
32		85.71	78.57	16.67	62.50	No logró el criterio
33		71.43	50.00	50.00	57.50	No logró el criterio

San Pedro Vespertina		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		71.43	71.43	33.33	60.00	No logró el criterio
2		85.71	50.00	50.00	62.50	No logró el criterio
3		71.43	57.14	83.33	70.00	Si logró el criterio
4		50.00	50.00	41.67	47.50	No logró el criterio
5		100.00	85.71	91.67	92.50	Si logró el criterio
6		64.29	64.29	75.00	67.50	Si logró el criterio
7		78.57	50.00	50.00	60.00	No logró el criterio
8		64.29	78.57	50.00	65.00	Si logró el criterio
9		57.14	57.14	41.67	52.50	No logró el criterio
10		85.71	85.71	75.00	82.50	Si logró el criterio
11		64.29	71.43	58.33	65.00	Si logró el criterio
12		85.71	50.00	41.67	60.00	No logró el criterio
13		64.29	71.43	33.33	57.50	No logró el criterio
14		78.57	35.71	66.67	60.00	No logró el criterio
15		100.00	92.86	91.67	95.00	Si logró el criterio
16		78.57	64.29	50.00	65.00	Si logró el criterio
17		92.86	50.00	50.00	65.00	Si logró el criterio
18		42.86	35.71	16.67	32.50	No logró el criterio
19		92.86	57.14	50.00	67.50	Si logró el criterio
20		78.57	64.29	41.67	62.50	No logró el criterio
21		71.43	71.43	41.67	62.50	No logró el criterio
22		78.57	71.43	66.67	72.50	Si logró el criterio

San Miguel Milpas Altas sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		57.14	35.71	33.33	42.50	No logró el criterio
2		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
3		78.57	35.71	41.67	52.50	No logró el criterio
4		85.71	42.86	33.33	55.00	No logró el criterio
5		100.00	85.71	83.33	90.00	Si logró el criterio
6		71.43	42.86	50.00	55.00	No logró el criterio
7		85.71	57.14	66.67	70.00	Si logró el criterio
8		64.29	64.29	58.33	62.50	No logró el criterio
9		64.29	64.29	41.67	57.50	No logró el criterio
10		42.86	28.57	41.67	37.50	No logró el criterio
11		64.29	50.00	16.67	45.00	No logró el criterio
12		78.57	57.14	58.33	65.00	Si logró el criterio
13		64.29	64.29	25.00	52.50	No logró el criterio
14		92.86	78.57	58.33	77.50	Si logró el criterio
15		78.57	28.57	33.33	47.50	No logró el criterio
16		92.86	57.14	66.67	72.50	Si logró el criterio
17		92.86	64.29	58.33	72.50	Si logró el criterio
18		92.86	64.29	58.33	72.50	Si logró el criterio
19		71.43	92.86	50.00	72.50	Si logró el criterio
20		78.57	42.86	58.33	60.00	No logró el criterio
21		21.43	28.57	33.33	27.50	No logró el criterio
22		57.14	28.57	25.00	37.50	No logró el criterio
23		100.00	78.57	91.67	90.00	Si logró el criterio
24		100.00	50.00	50.00	67.50	Si logró el criterio
25		85.71	57.14	75.00	72.50	Si logró el criterio
26		57.14	50.00	25.00	45.00	No logró el criterio

Ciudad Vieja sección B		Prueba post matemática				
No.	Nombre del alumno	Operaciones	Conceptos	Problemas	Total	CRITERIO
1		57.14	42.86	8.33	37.50	No logró el criterio
2		85.71	78.57	83.33	82.50	Si logró el criterio
3		92.86	64.29	91.67	82.50	Si logró el criterio
4		71.43	64.29	66.67	67.50	Si logró el criterio
5		92.86	71.43	75.00	80.00	Si logró el criterio
6		85.71	50.00	41.67	60.00	No logró el criterio
7		100.00	71.43	58.33	77.50	Si logró el criterio
8		85.71	78.57	16.67	62.50	No logró el criterio
9		100.00	64.29	66.67	77.50	Si logró el criterio
10		100.00	57.14	50.00	70.00	Si logró el criterio
11		92.86	64.29	66.67	75.00	Si logró el criterio
12		100.00	50.00	66.67	72.50	Si logró el criterio
13		71.43	50.00	33.33	52.50	No logró el criterio
14		35.71	50.00	16.67	35.00	No logró el criterio
15		78.57	71.43	58.33	70.00	Si logró el criterio
16		57.14	21.43	25.00	35.00	No logró el criterio
17		85.71	85.71	91.67	87.50	Si logró el criterio
18		78.57	57.14	41.67	60.00	No logró el criterio
19		64.29	28.57	16.67	37.50	No logró el criterio
20		71.43	78.57	75.00	75.00	Si logró el criterio
21		71.43	28.57	25.00	42.50	No logró el criterio
22		57.14	35.71	33.33	42.50	No logró el criterio
23		92.86	85.71	58.33	80.00	Si logró el criterio
24		78.57	35.71	58.33	57.50	No logró el criterio
25		78.57	57.14	25.00	55.00	No logró el criterio
26		71.43	64.29	41.67	60.00	No logró el criterio
27		71.43	64.29	33.33	57.50	No logró el criterio
28		64.29	57.14	33.33	52.50	No logró el criterio
29		78.57	71.43	50.00	67.50	Si logró el criterio
30		92.86	92.86	91.67	92.50	Si logró el criterio
31		92.86	78.57	58.33	77.50	Si logró el criterio
32		85.71	64.29	58.33	70.00	Si logró el criterio
33		85.71	42.86	50.00	60.00	No logró el criterio
34		64.29	71.43	41.67	60.00	No logró el criterio
35		71.43	71.43	33.33	60.00	No logró el criterio
36		100.00	64.29	75.00	80.00	Si logró el criterio
37		78.57	57.14	16.67	52.50	No logró el criterio
38		92.86	71.43	83.33	82.50	Si logró el criterio
39		71.43	28.57	41.67	47.50	No logró el criterio
40		57.14	57.14	66.67	60.00	No logró el criterio

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90205 9			0.125	-0.1	0.075	-1.3333	0.125	0.0496
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90076 2			0.166 7	0.05	0.325	0.1538	0.1667	0.1854
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90090 4			0.208 3	- 0.025	0.35	-0.0714	0.2083	0.1983
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90348 5			0.541 7	0.15	0.525	0.2857	0.5417	0.6603
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90182 8			0.083 3	0.175	0.4	0.4375	0.0833	0.1129
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90196 6			0.041 7	- 0.075	0.075	-1	0.0417	0.0208
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90148 6			0.166 7	0.075	0.425	0.1765	0.1667	0.1884
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90137 5			0.041 7	0.15	0.35	0.4286	0.0417	0.0561
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90409 5			0.208 3	- 0.025	0.15	-0.1667	0.2083	0.1856
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90002 2			0.083 3	-0.1	0.3	-0.3333	0.0833	0.0661
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90522 2			0.208 3	0.075	0.2	0.375	0.2083	0.2702
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90522 1			0.166 7	0.05	0.275	0.1818	0.1667	0.1891
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90389 4			0.083 3	0.1	0.275	0.3636	0.0833	0.1072
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90004 2			0.25 7	-0.05	0.15	-0.3333	0.25	0.1984
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90170 2			0.041 7	- 0.025	0.2	-0.125	0.0417	0.0382
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90220 7			0.083 3	0.025	0.25	0.1	0.0833	0.0893
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90230 4			0.083 3	0.025	0.3	0.0833	0.0833	0.0883
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90012 1			0.166 7	0.025	0.375	0.0667	0.1667	0.1745
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90202 3			0.291 7	0.175	0.45	0.3889	0.2917	0.3819
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90375 5			0.166 7	0.025	0.4	0.0625	0.1667	0.174
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90220 6			0.166 7	0.075	0.5	0.15	0.1667	0.1849

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90119			0.166					
1	MATUTINA	6			7	0.075	0.375	0.2	0.1667	0.1914
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90349			0.041					
1	MATUTINA	3			7	0.05	0.35	0.1429	0.0417	0.046
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90074			0.041	-				
1	MATUTINA	2			7	0.025	0.25	-0.1	0.0417	0.0389
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90281			0.166	-				
1	MATUTINA	5			7	0.175	0.075	-2.3333	0.1667	0.0331
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90190			0.125	0.075	0.375	0.2	0.125	0.1436
1	MATUTINA	1			7	0.025	0.375	0.0667	0.1667	0.1745
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90152			0.166					
1	MATUTINA	1			7	0.025	0.375	0.0667	0.1667	0.1745
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90404			0.166					
1	MATUTINA	1			7	0	0.325	0	0.1667	0.1667
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90331			0.291					
1	MATUTINA	0			7	0.15	0.35	0.4286	0.2917	0.3926
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90301			0.166					
1	MATUTINA	8			7	-0.05	0.475	-0.1053	0.1667	0.1549
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90022			0.125					
1	MATUTINA	8			0.125	0.075	0.35	-0.2143	0.125	0.1077
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90209			0.083	-				
1	MATUTINA	4			3	0.025	0.15	-0.1667	0.0833	0.0742
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90292			0.125	0.05	0.325	0.1538	0.125	0.1391
1	MATUTINA	8			0.125	0.05	0.325	0.1538	0.125	0.1391
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90295			0.125	0.175	0.4	0.4375	0.125	0.1693
1	MATUTINA	6			0.125	0.175	0.4	0.4375	0.125	0.1693
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90081			0.083					
1	MATUTINA	6			3	0	0.275	0	0.0833	0.0833
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90522			0.125					
1	MATUTINA	3			0.125	0.025	0.15	-0.1667	0.125	0.1114
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90105			0.166					
1	MATUTINA	1			7	0.05	0.2	0.25	0.1667	0.1982
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90219			0.25	0.025	0.275	0.0909	0.25	0.2663
1	MATUTINA	6			0.25	0.025	0.275	0.0909	0.25	0.2663
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90367			0.291					
1	MATUTINA	4			7	-0.05	0.175	-0.2857	0.2917	0.2393
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90282			0.416	-				
1	MATUTINA	8			7	0.075	0.325	-0.2308	0.4167	0.3551
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90066			0.125	0.075	0.325	0.2308	0.125	0.1467
1	MATUTINA	3			0.125	0.075	0.325	0.2308	0.125	0.1467
1	SAN MIGUEL ESCOBAR	90130			0.291					
1	MATUTINA	4			7	0.075	0.175	0.4286	0.2917	0.3926

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90045 5			0.166 7	- 0.025	0.225	-0.1111	0.1667	0.1543
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90211 4			0.083 3	0 0.35		0	0.0833	0.0833
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90522 0			0.166 7	- 0.075	0.425	-0.1765	0.1667	0.1475
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90520 3			0.083 3	0.175 0.325		0.5385	0.0833	0.121
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90366 3			0.25 0.025	0.425		0.0588	0.25	0.2604
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90115 9			0.125 0.025	0.4		0.0625	0.125	0.1305
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90130 7			0.208 3	- 0.025	0.35	-0.0714	0.2083	0.1983
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90033 8			0.125 0.075	0.375		0.2	0.125	0.1436
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90248 1			0.166 7	- 0.025	0.325	-0.0769	0.1667	0.158
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90522 4			0.208 3	0.075 0.175		0.4286	0.2083	0.2804
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90363 4			0.208 3	0.025 0.35		0.0714	0.2083	0.2189
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90273 0			0.208 3	0.2 0.5		0.4	0.2083	0.2749
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90173 2			0.083 3	-0.05 0.3		-0.1667	0.0833	0.0742
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90214 4			0.25 0.05	0.125		0.4	0.25	0.3299
1	SAN MIGUEL ESCOBAR MATUTINA	90333 1			0.166 7	0.05 0.325		0.1538	0.1667	0.1854
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90517 8			0.083 3	0.2 0.375		0.5333	0.0833	0.1206
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90400 0			0.166 7	0.1 0.675		0.1481	0.1667	0.1847
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90335 0			0.166 7	0.3 0.6		0.5	0.1667	0.2357
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90229 1			0.25 0	0.425		0	0.25	0.25
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90385 5			0.25 0.416	0.125 0.6		0.2083	0.25	0.2888
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90049 6			0.166 7	0.225 0.725		0.3103	0.4167	0.5167
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90243 2			0.166 7	- 0.075	0.475	-0.1579	0.1667	0.1494
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90308 1			0.291 7	- 0.075	0.625	-0.12	0.2917	0.2684
4	SAN MIGUEL MILPAS ALTAS	90401 7			0.166 7	0.1 0.55		0.1818	0.1667	0.1891

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
	SAN MIGUEL	90517			0.166	-				
4	MILPAS ALTAS	7			7	0.175	0.525	-0.3333	0.1667	0.1323
	SAN MIGUEL	90314				-				
4	MILPAS ALTAS	1			0.375	0.025	0.525	-0.0476	0.375	0.3628
	SAN MIGUEL	90263			0.166					
4	MILPAS ALTAS	1			7	0.15	0.6	0.25	0.1667	0.1982
	SAN MIGUEL	90035			0.083					
4	MILPAS ALTAS	0			3	0.125	0.225	0.5556	0.0833	0.1225
	SAN MIGUEL	90065			0.291					
4	MILPAS ALTAS	3			7	0.025	0.525	0.0476	0.2917	0.3015
	SAN MIGUEL	90258			0.166					
4	MILPAS ALTAS	1			7	0.1	0.55	0.1818	0.1667	0.1891
	SAN MIGUEL	90518			0.166					
4	MILPAS ALTAS	3			7	0.275	0.65	0.4231	0.1667	0.2235
	SAN MIGUEL	90242			0.166					
4	MILPAS ALTAS	5			7	0.175	0.475	0.3684	0.1667	0.2152
	SAN MIGUEL	90316			0.208					
4	MILPAS ALTAS	5			3	0.025	0.45	0.0556	0.2083	0.2165
	SAN MIGUEL	90518								
4	MILPAS ALTAS	1			0.25	0.025	0.65	0.0385	0.25	0.2568
	SAN MIGUEL	90216			0.166					
4	MILPAS ALTAS	5			7	0.15	0.575	0.2609	0.1667	0.1997
	SAN MIGUEL	90391			0.291					
4	MILPAS ALTAS	8			7	0.05	0.65	0.0769	0.2917	0.3076
	SAN MIGUEL	90518			0.166					
4	MILPAS ALTAS	6			7	0.15	0.5	0.3	0.1667	0.2052
	SAN MIGUEL	90249			0.166					
4	MILPAS ALTAS	8			7	0.25	0.35	0.7143	0.1667	0.2734
	SAN MIGUEL	90181								
4	MILPAS ALTAS	7			0.25	-0.05	0.5	-0.1	0.25	0.2333
	SAN MIGUEL	90207			0.166					
4	MILPAS ALTAS	9			7	0.075	0.55	0.1364	0.1667	0.1832
	SAN MIGUEL	90071			0.166					
4	MILPAS ALTAS	1			7	0.225	0.45	0.5	0.1667	0.2357
	SAN MIGUEL	90518			0.291	-				
4	MILPAS ALTAS	4			7	0.125	0.4	-0.3125	0.2917	0.2349
	SAN MIGUEL	90290			0.166					
4	MILPAS ALTAS	5			7	0.3	0.575	0.5217	0.1667	0.2393
	SAN MIGUEL	90369			0.166					
4	MILPAS ALTAS	3			7	0.375	0.65	0.5769	0.1667	0.2486
	SAN MIGUEL	90164			0.208					
4	MILPAS ALTAS	8			3	0.3	0.575	0.5217	0.2083	0.2991
	SAN MIGUEL	90055			0.166					
4	MILPAS ALTAS	4			7	0.225	0.5	0.45	0.1667	0.2277
	SAN MIGUEL	90257								
4	MILPAS ALTAS	0			0.25	0.15	0.55	0.2727	0.25	0.302
	SAN MIGUEL	90325			0.208					
4	MILPAS ALTAS	3			3	0.15	0.65	0.2308	0.2083	0.2445
	SAN MIGUEL	90412			0.166					
4	MILPAS ALTAS	8			7	-0.05	0.675	-0.0741	0.1667	0.1583
	SAN MIGUEL	90246								
4	MILPAS ALTAS	1			0.125	0.1	0.325	0.3077	0.125	0.1547
	SAN MIGUEL	90212			0.166					
4	MILPAS ALTAS	1			7	0.1	0.725	0.1379	0.1667	0.1834
	SAN MIGUEL	90229			0.166					
4	MILPAS ALTAS	0			7	0.275	0.775	0.3548	0.1667	0.2131
	SAN MIGUEL	90039			0.166					
4	MILPAS ALTAS	0			7	0.025	0.6	0.0417	0.1667	0.1716
	SAN MIGUEL	90518			0.208					
4	MILPAS ALTAS	2			3	0.55	0.65	0.8462	0.2083	0.3745

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
	SAN MIGUEL	90046			0.333	-				
4	MILPAS ALTAS	1			3	0.075	0.45	-0.1667	0.3333	0.297
	SAN MIGUEL	90081			0.166					
4	MILPAS ALTAS	0			7	0.125	0.55	0.2273	0.1667	0.1951
	SAN MIGUEL	90108								
4	MILPAS ALTAS	4			0.125	0.075	0.4	0.1875	0.125	0.1423
	SAN MIGUEL	90408			0.166					
4	MILPAS ALTAS	9			7	0.275	0.6	0.4583	0.1667	0.229
	SAN MIGUEL	90105			0.166	-				
4	MILPAS ALTAS	3			7	0.025	0.6	-0.0417	0.1667	0.1619
	SAN MIGUEL	90277			0.166					
4	MILPAS ALTAS	8			7	0.175	0.825	0.2121	0.1667	0.1931
	SAN MIGUEL	90024			0.166					
4	MILPAS ALTAS	4			7	-0.1	0.35	-0.2857	0.1667	0.1367
	SAN MIGUEL	90244								
4	MILPAS ALTAS	8			0.25	-0.05	0.55	-0.0909	0.25	0.2347
	SAN MIGUEL	90411				-				
4	MILPAS ALTAS	9			0.25	0.075	0.525	-0.1429	0.25	0.2264
	SAN MIGUEL	90518								
4	MILPAS ALTAS	5			0.25	0.25	0.525	0.4762	0.25	0.3478
	SAN MIGUEL	90010				-				
4	MILPAS ALTAS	6			0.25	0.125	0.425	-0.2941	0.25	0.2039
	SAN MIGUEL	90517				-				
4	MILPAS ALTAS	9			0.125	0.125	0.6	-0.2083	0.125	0.1082
	SAN MIGUEL	90283			0.083					
4	MILPAS ALTAS	5			3	0.175	0.375	0.4667	0.0833	0.1152
	SAN MIGUEL	90155			0.083					
4	MILPAS ALTAS	9			3	0.025	0.325	0.0769	0.0833	0.0879
	SAN MIGUEL	90518			0.208					
4	MILPAS ALTAS	0			3	-0.1	0.3	-0.3333	0.2083	0.1654
	SANTA CATARINA	90019			0.041					
5	BOBADILLA	8			7	0.175	0.375	0.4667	0.0417	0.0576
	SANTA CATARINA	90106			0.166					
5	BOBADILLA	5			7	0.225	0.425	0.5294	0.1667	0.2406
	SANTA CATARINA	90114			0.166					
5	BOBADILLA	7			7	0	0.325	0	0.1667	0.1667
	SANTA CATARINA	90294								
5	BOBADILLA	4			0.125	0.15	0.525	0.2857	0.125	0.1524
	SANTA CATARINA	90073			0.166					
5	BOBADILLA	0			7	0.2	0.65	0.3077	0.1667	0.2063
	SANTA CATARINA	90185			0.041					
5	BOBADILLA	8			7	0.125	0.375	0.3333	0.0417	0.0525
	SANTA CATARINA	90269				-				
5	BOBADILLA	8			0.25	0.075	0.25	-0.3	0.25	0.2031
	SANTA CATARINA	90024			0.166					
5	BOBADILLA	7			7	0.075	0.475	0.1579	0.1667	0.1859
	SANTA CATARINA	90518								
5	BOBADILLA	9			0.25	0.025	0.525	0.0476	0.25	0.2584
	SANTA CATARINA	90138			0.166					
5	BOBADILLA	2			7	0.35	0.7	0.5	0.1667	0.2357
	SANTA CATARINA	90189			0.208					
5	BOBADILLA	8			3	-0.05	0.35	-0.1429	0.2083	0.1887

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
	SANTA									
5	CATARINA BOBADILLA	900129			0.25	0.15	0.6	0.25	0.25	0.2973
5	CATARINA BOBADILLA	903623			0.2083	0.25	0.625	0.4	0.2083	0.2749
5	CATARINA BOBADILLA	900856			0.1667	0.125	0.35	0.3571	0.1667	0.2135
5	CATARINA BOBADILLA	903927			0.375	0.025	0.45	0.0556	0.375	0.3897
5	CATARINA BOBADILLA	900272			0	0.175	0.35	0.5	0	0
5	CATARINA BOBADILLA	903983			0.25	0.2	0.475	0.4211	0.25	0.3347
5	CATARINA BOBADILLA	903232			0.3333	-0.025	0.325	-0.0769	0.3333	0.316
5	CATARINA BOBADILLA	901865			0.0833	0.15	0.425	0.3529	0.0833	0.1064
5	CATARINA BOBADILLA	900248			0.125	0.075	0.45	0.1667	0.125	0.1403
5	CATARINA BOBADILLA	902158			0.125	0.125	0.525	0.2381	0.125	0.1474
5	CATARINA BOBADILLA	901883			0.125	0.1	0.225	0.4444	0.125	0.1701
5	CATARINA BOBADILLA	905209			0.1667	0.025	0.15	0.1667	0.1667	0.1871
5	CATARINA BOBADILLA	902821			0.2917	0.2	0.525	0.381	0.2917	0.3798
5	CATARINA BOBADILLA	900488			0.0417	0.125	0.325	-0.3846	0.0417	0.0319
5	CATARINA BOBADILLA	901256			0.0833	0.1	0.325	0.3077	0.0833	0.1031
5	CATARINA BOBADILLA	901930			0.25	0.1	0.3	0.3333	0.25	0.315
5	CATARINA BOBADILLA	901876			0.1667	0.1	0.5	0.2	0.1667	0.1914
5	CATARINA BOBADILLA	902247			0.0833	0.075	0.3	0.25	0.0833	0.0991
5	CATARINA BOBADILLA	905188			0	0.125	0.2	0.625	0	0
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	903169			0.2917	0.125	0.65	0.1923	0.2917	0.3333
6	VESPERTINA ESCOBAR	902626			0.2083	0.5	0.675	0.7407	0.2083	0.3481

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_a_1	DIFER_1	DIFER_2	APRENDIZAJE_b	R_a_ERROR	RAZON_ERROR_y
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	904165			0.3333	-0.05	0.45	-0.1111	0.3333	0.3086
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905169			0.0417	0.225	0.35	0.6429	0.0417	0.0651
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905176			0.1667	0.05	0.45	0.1111	0.1667	0.18
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	900422			0.125	0.075	0.275	0.2727	0.125	0.151
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905166			0	-0.2	0.075	-2.6667	0	0
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	900708			0.3333	-0.05	0.45	-0.1111	0.3333	0.3086
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	902787			0.25	0.025	0.45	-0.0556	0.25	0.2406
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	904087			0.25	0.025	0.45	-0.0556	0.25	0.2406
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905168			0.0417	0.075	0.375	0.2	0.0417	0.0479
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905170			0	0.1	0.35	0.2857	0	0
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	901853			0.0833	0.125	0.425	0.2941	0.0833	0.1022
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	903604			0.1667	0.175	0.375	0.4667	0.1667	0.2303
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	900719			0.125	0.075	0.1	0.75	0.125	0.2102
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905174			0.1667	0.075	0.325	0.2308	0.1667	0.1956
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	902749			0.0417	0.15	0.475	0.3158	0.0417	0.0519
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905205			0.2917	0.125	0.475	-0.2632	0.2917	0.243
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905175			0.1667	0.125	0.45	0.2778	0.1667	0.2021
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	902218			0.0833	0.275	0.425	0.6471	0.0833	0.1305
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	905206			0.3333	0.375	0.675	0.5556	0.3333	0.4899
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	904034			0.25	0.025	0.45	0.0556	0.25	0.2598
6	SAN MIGUEL ESCOBAR VESPERTINA	903769			0.1667	-0.1	0.35	-0.2857	0.1667	0.1367

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_a_1	DIFER_1	DIFER_2	APRENDIZAJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERROR_y
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905208			0.2083	-0.075	0.4	-0.1875	0.2083	0.1829
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	900925			0.2083	0.05	0.1	0.5	0.2083	0.2946
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	904025			0.1667	0.075	0.275	0.2727	0.1667	0.2013
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	900113			0.1667	-0.025	0.375	-0.0667	0.1667	0.1591
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	900259			0.2083	-0.05	0.325	-0.1538	0.2083	0.1873
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905207			0.2083	0	0.45	0	0.2083	0.2083
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	901973			0.0833	0.15	0.325	0.4615	0.0833	0.1148
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905171			0.25	-0.25	0.6	-0.4167	0.25	0.1873
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	902549			0.2917	0.35	0.575	0.6087	0.2917	0.4448
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	901038			0.0833	0.175	0.45	0.3889	0.0833	0.1091
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905173			0.125	0.025	0.275	0.0909	0.125	0.1331
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	903599			0.1667	-0.05	0.325	-0.1538	0.1667	0.1498
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905187			0.1667	0.025	0.45	0.0556	0.1667	0.1732
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	901687			0.2083	-0.1	0.5	-0.2	0.2083	0.1814
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	901479			0.2917	0.05	0.425	0.1176	0.2917	0.3164
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	904115			0.0417	0.175	0.45	0.3889	0.0417	0.0546
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905165			0.1667	0.05	0.325	0.1538	0.1667	0.1854
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	900219			0.125	0	0.35	0	0.125	0.125
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905167			0.1667	-0.025	0.325	-0.0769	0.1667	0.158
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	905204			0.2083	0.125	0.45	0.2778	0.2083	0.2526
	SAN MIGUEL VESPERTINA									
6	SAN MIGUEL ESCOBAR	900706			0.0417	0	0.375	0	0.0417	0.0417
	SAN MIGUEL VESPERTINA									

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
	SAN MIGUEL									
	ESCOBAR	90227			0.166					
6	VESPERTINA	1			7	0.1	0.475	0.2105	0.1667	0.1929
		90509			0.208					
8	GUARDIANIA	5			3	0.1	0.45	0.2222	0.2083	0.243
		90509			0.208					
8	GUARDIANIA	6			3	0.025	0.25	0.1	0.2083	0.2233
		90509			0.083					
8	GUARDIANIA	7			3	0	0.25	0	0.0833	0.0833
		90508			0.166					
8	GUARDIANIA	6			7	0.1	0.3	0.3333	0.1667	0.21
		90508			0.166	-				
8	GUARDIANIA	7			7	0.075	0.5	-0.15	0.1667	0.1502
		90508			0.083					
8	GUARDIANIA	5			3	0.2	0.325	0.6154	0.0833	0.1277
		90508			0.083					
8	GUARDIANIA	4			3	0	0.4	0	0.0833	0.0833
		90509			0.208					
8	GUARDIANIA	4			3	0	0.225	0	0.2083	0.2083
		90508			0.333					
8	GUARDIANIA	3			3	0.025	0.475	0.0526	0.3333	0.3457
		90509			0.083					
8	GUARDIANIA	3			3	0.175	0.3	0.5833	0.0833	0.1249
		90508			0.208					
8	GUARDIANIA	2			3	0.05	0.5	0.1	0.2083	0.2233
		90508								
8	GUARDIANIA	1			0.125	0.075	0.325	0.2308	0.125	0.1467
		90508			0.166					
8	GUARDIANIA	0			7	0.4	0.725	0.5517	0.1667	0.2443
		90509			0.333					
8	GUARDIANIA	2			3	0.125	0.5	0.25	0.3333	0.3964
		90508			0.166	-				
8	GUARDIANIA	8			7	0.075	0.5	-0.15	0.1667	0.1502
		90507			0.166					
8	GUARDIANIA	9			7	0.075	0.6	0.125	0.1667	0.1818
		90509				-				
8	GUARDIANIA	1			0.125	0.175	0.375	-0.4667	0.125	0.0905
		90507			0.166					
8	GUARDIANIA	7			7	0.125	0.45	0.2778	0.1667	0.2021
		90507			0.083					
8	GUARDIANIA	8			3	0.275	0.45	0.6111	0.0833	0.1273
		90509			0.166					
8	GUARDIANIA	0			7	0.025	0.45	0.0556	0.1667	0.1732
		90508			0.083					
8	GUARDIANIA	9			3	0.125	0.325	0.3846	0.0833	0.1088
		90507			0.208					
8	GUARDIANIA	6			3	0.3	0.7	0.4286	0.2083	0.2804
	SAN JUAN DEL	90514			0.166					
10	OBISPO	2			7	0.1	0.525	0.1905	0.1667	0.1902
	SAN JUAN DEL	90515								
10	OBISPO	1			0.125	0.075	0.475	0.1579	0.125	0.1395
	SAN JUAN DEL	90515			0.041					
10	OBISPO	4			7	0.15	0.3	0.5	0.0417	0.0589
	SAN JUAN DEL	90513			0.166					
10	OBISPO	9			7	0	0.6	0	0.1667	0.1667
	SAN JUAN DEL	90512			0.208					
10	OBISPO	3			3	0.25	0.575	0.4348	0.2083	0.2816
	SAN JUAN DEL	90512			0.041					
10	OBISPO	0			7	-0.05	0.45	-0.1111	0.0417	0.0386

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.25	-0.05	0.35	-0.1429	0.25	0.2264
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90512			0.375	0.175	0.675	0.2593	0.375	0.4488
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90514			0.208	0.025	0.45	0.0556	0.2083	0.2165
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.25	0.025	0.275	0.0909	0.25	0.2663
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90509			0	0.125	0.2	0.625	0	0
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.083	0.2	0.575	0.3478	0.0833	0.1061
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90511			0.125	0.175	0.6	0.2917	0.125	0.153
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90514			0.125	0	0.35	0	0.125	0.125
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.166	-	0.025	-0.0435	0.1667	0.1617
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90510			0.125	0.075	0.175	0.4286	0.125	0.1682
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90515			0.166	0.025	0.15	0.1667	0.1667	0.1871
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90515			0.166	0.1	0.45	0.2222	0.1667	0.1944
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90510			0.125	0.175	0.525	0.3333	0.125	0.1575
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.166	0.05	0.2	0.25	0.1667	0.1982
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90513			0.125	0.025	0.225	0.1111	0.125	0.135
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90511			0.166	0.2	0.5	0.4	0.1667	0.2199
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90516			0.166	0.375	0.55	0.6818	0.1667	0.2674
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90515			0.041	0.125	0.425	0.2941	0.0417	0.0511
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90514			0.125	0.025	0.35	0.0714	0.125	0.1313
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90512			0.166	0.05	0.35	0.1429	0.1667	0.184
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90511			0.083	0.325	0.575	0.5652	0.0833	0.1233
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90511			0.083	0.1	0.55	0.1818	0.0833	0.0945
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90514			0.083	0.175	0.375	0.4667	0.0833	0.1152
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90516			0.166	0	0.575	0	0.1667	0.1667
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90510			0.208	0.25	0.525	0.4762	0.2083	0.2898
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90512			0.166	0.075	0.575	0.1304	0.1667	0.1824
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90272			0.166	0.1	0.575	0.1739	0.1667	0.188
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90510			0.166	0.25	0.75	0.3333	0.1667	0.21
10	SAN JUAN DEL OBISPO	90515			0.166	0.15	0.25	0.6	0.1667	0.2526

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
	SAN JUAN DEL	90513			0.166	-				
10	OBISPO	6			7	0.125	0.45	-0.2778	0.1667	0.1375
	SAN JUAN DEL	90511			0.291	-				
10	OBISPO	3			7	0.025	0.4	-0.0625	0.2917	0.2793
	SAN JUAN DEL	90512								
10	OBISPO	4			0.375	0	0.375	0	0.375	0.375
	SAN JUAN DEL	90511			0.041					
10	OBISPO	1			7	0.1	0.35	0.2857	0.0417	0.0508
	SAN JUAN DEL	90510			0.083					
10	OBISPO	6			3	0.1	0.425	0.2353	0.0833	0.0981
	SAN JUAN DEL	90513			0.083					
10	OBISPO	5			3	0.125	0.35	0.3571	0.0833	0.1067
	SAN JUAN DEL	90511			0.083					
10	OBISPO	8			3	0.275	0.65	0.4231	0.0833	0.1117
	SAN JUAN DEL	90514			0.166					
10	OBISPO	1			7	0.075	0.4	0.1875	0.1667	0.1898
	SAN JUAN DEL	90514				-				
10	OBISPO	7			0.125	0.025	0.525	-0.0476	0.125	0.1209
	SAN JUAN DEL	90512			0.291					
10	OBISPO	1			7	0	0.525	0	0.2917	0.2917
	SAN JUAN DEL	90510			0.166	-				
10	OBISPO	5			7	0.125	0.55	-0.2273	0.1667	0.1424
	SAN JUAN DEL	90515			0.041					
10	OBISPO	6			7	0.125	0.525	0.2381	0.0417	0.0491
	SAN JUAN DEL	90510			0.166					
10	OBISPO	9			7	0.025	0.2	0.125	0.1667	0.1818
	SAN JUAN DEL	90512			0.208	-				
10	OBISPO	2			3	0.025	0.525	-0.0476	0.2083	0.2016
	SAN JUAN DEL	90516			0.166					
10	OBISPO	4			7	0.3	0.725	0.4138	0.1667	0.222
	SAN JUAN DEL	90511			0.083					
10	OBISPO	0			3	0.025	0.075	0.3333	0.0833	0.105
	SAN JUAN DEL	90516								
10	OBISPO	0			0.25	0.25	0.525	0.4762	0.25	0.3478
	SAN JUAN DEL	90510								
10	OBISPO	1			0.125	-0.05	0.45	-0.1111	0.125	0.1157
	SAN JUAN DEL	90512								
10	OBISPO	5			0.125	0.1	0.525	0.1905	0.125	0.1426
	SAN JUAN DEL	90510								
10	OBISPO	2			0.125	0.15	0.5	0.3	0.125	0.1539
	SAN JUAN DEL	90514								
10	OBISPO	3			0.125	0.15	0.45	0.3333	0.125	0.1575
	SAN JUAN DEL	90514			0.166	-				
10	OBISPO	8			7	0.025	0.575	-0.0435	0.1667	0.1617
	SAN JUAN DEL	90512			0.166					
10	OBISPO	7			7	0.025	0.675	0.037	0.1667	0.171
	SAN JUAN DEL	90515			0.208					
10	OBISPO	2			3	0.125	0.575	0.2174	0.2083	0.2422
	SAN JUAN DEL	90511			0.166	-				
10	OBISPO	9			7	0.025	0.5	-0.05	0.1667	0.161
	SAN JUAN DEL	90515			0.166					
10	OBISPO	7			7	0.175	0.55	0.3182	0.1667	0.2078
	SAN JUAN DEL	90511			0.166					
10	OBISPO	7			7	0.05	0.2	0.25	0.1667	0.1982
	SAN JUAN DEL	90509			0.041					
10	OBISPO	8			7	0.175	0.35	0.5	0.0417	0.0589
	SAN JUAN DEL	90514			0.166					
10	OBISPO	0			7	0.2	0.625	0.32	0.1667	0.2081
	SAN PEDRO	90519			0.166					
12	VERPERTINA	4			7	0.175	0.575	0.3043	0.1667	0.2058
	SAN PEDRO	90519			0.166					
12	VERPERTINA	0			7	0.15	0.525	0.2857	0.1667	0.2032

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO		PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERROR_y
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 5		0.208 3	0.175	0.475	0.3684	0.2083	0.2689
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 2		0.25 0.166	0.05	0.575	0.087	0.25	0.2655
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 3		7 0.083	0.075	0.15	0.5	0.1667	0.2357
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 1		3	0.075	0.4	0.1875	0.0833	0.0949
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 3		0.125	0.15	0.55	0.2727	0.125	0.151
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90520 1		0.25	-	0.325	-0.0769	0.25	0.237
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 1		0.208 3	-	0.45	-0.0556	0.2083	0.2005
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90520 0		0.041 7	0.125	0.3	0.4167	0.0417	0.0556
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 6		0.166 7	0.05	0.4	0.125	0.1667	0.1818
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 4		0.166 7	0.025	0.425	0.0588	0.1667	0.1736
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 2		0.166 7	0.15	0.575	0.2609	0.1667	0.1997
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 6		0.083 3	0.15	0.55	0.2727	0.0833	0.1007
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 7		0.166 7	0.125	0.175	0.7143	0.1667	0.2734
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 9		0.208 3	-	0.325	-0.0769	0.2083	0.1975
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90175 6		0.25 0.166	-0.05	0.3	-0.1667	0.25	0.2227
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 0		7 0.083	0.075	0.6	-0.125	0.1667	0.1528
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 7		3	0.075	0.4	0.1875	0.0833	0.0949
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90521 8		0.125	-	0.3	-0.25	0.125	0.1051
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 9		0.166 7	-	0.35	-0.0714	0.1667	0.1586
12	SAN PEDRO VERPERTINA	90519 8		0.166 7	0.25	0.525	0.4762	0.1667	0.2318
13	CIUDAD VIEJA	90500 5		0.041 7	0.1	0.425	0.2353	0.0417	0.049
13	CIUDAD VIEJA	90501 4		0.166 7	0.025	0.5	0.05	0.1667	0.1725
13	CIUDAD VIEJA	90506 9		0.208 3	-	0.55	-0.1364	0.2083	0.1895
13	CIUDAD VIEJA	90504 2		0.333 3	0.05	0.225	0.2222	0.3333	0.3888
13	CIUDAD VIEJA	90505 8		0.208 3	-0.05	0.125	-0.4	0.2083	0.1579
13	CIUDAD VIEJA	90502 8		0.083 3	-	0.25	-0.3	0.0833	0.0677

CODE SC	ESTABLECIMIENT O	IDUNI CO		PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
		90502		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	3		7	0.15	0.75	0.2	0.1667	0.1914
		90503							
13	CIUDAD VIEJA	7		0.125	0.05	0.375	0.1333	0.125	0.1371
		90411							
13	CIUDAD VIEJA	0		0.125	0.05	0.25	0.2	0.125	0.1436
		90501		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	6		7	0.125	0.15	0.8333	0.1667	0.297
		90502							
13	CIUDAD VIEJA	6		0.125	0.275	0.375	0.7333	0.125	0.2078
		90500		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	4		7	0.125	0.425	0.2941	0.1667	0.2044
		90167							
13	CIUDAD VIEJA	6		0.125	0	0.55	0	0.125	0.125
		90505		0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	6		7	0.025	0.375	-0.0667	0.1667	0.1591
		90501		0.083					
13	CIUDAD VIEJA	5		3	0.025	0.45	0.0556	0.0833	0.0866
		90503		0.041					
13	CIUDAD VIEJA	3		7	0.15	0.325	0.4615	0.0417	0.0574
		90507							
13	CIUDAD VIEJA	5		0.125	0.225	0.45	0.5	0.125	0.1768
		90505							
13	CIUDAD VIEJA	2		0	0.1	0.475	0.2105	0	0
		90506		0.083					
13	CIUDAD VIEJA	2		3	-0.05	0.175	-0.2857	0.0833	0.0684
		90503		0.208					
13	CIUDAD VIEJA	0		3	0.075	0.325	0.2308	0.2083	0.2445
		90507		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	0		7	0.1	0.4	0.25	0.1667	0.1982
		90502		0.291					
13	CIUDAD VIEJA	7		7	0.175	0.2	0.875	0.2917	0.5349
		90506		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	3		7	0.075	0.325	0.2308	0.1667	0.1956
		90506							
13	CIUDAD VIEJA	0		0.125	0.1	0.375	0.2667	0.125	0.1504
		90501		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	7		7	-0.05	0.6	-0.0833	0.1667	0.1573
		90500		0.208					
13	CIUDAD VIEJA	9		3	0.05	0.275	0.1818	0.2083	0.2363
		90501		0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	3		7	0.075	0.325	-0.2308	0.1667	0.142
		90506		0.333					
13	CIUDAD VIEJA	5		3	0.175	0.65	0.2692	0.3333	0.4017
		90501							
13	CIUDAD VIEJA	1		0.25	-0.05	0.3	-0.1667	0.25	0.2227
		90506		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	4		7	0.075	0.725	0.1034	0.1667	0.1791
		90501		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	8		7	-0.05	0.25	-0.2	0.1667	0.1451
		90502							
13	CIUDAD VIEJA	5		0.125	-0.05	0.225	-0.2222	0.125	0.1072
		90502		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	9		7	0.125	0.35	0.3571	0.1667	0.2135
		90503		0.291					
13	CIUDAD VIEJA	4		7	0	0.45	0	0.2917	0.2917
		90507		0.041	-				
13	CIUDAD VIEJA	3		7	0.025	0.275	-0.0909	0.0417	0.0391
		90503		0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	8		7	0.075	0.575	-0.1304	0.1667	0.1523
		90506							
13	CIUDAD VIEJA	1		0.125	-0.05	0.075	-0.6667	0.125	0.0787
		90503		0.166					
13	CIUDAD VIEJA	9		7	0.125	0.525	0.2381	0.1667	0.1966

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO			PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
		90500			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	8			7	0.075	0.2	0.375	0.1667	0.2161
		90500				-				
13	CIUDAD VIEJA	1			0.125	0.175	0.325	-0.5385	0.125	0.0861
		90503			0.208					
13	CIUDAD VIEJA	6			3	0.05	0.675	0.0741	0.2083	0.2193
		90500			0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	2			7	0.075	0.3	-0.25	0.1667	0.1401
		90504			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	5			7	0.075	0.325	0.2308	0.1667	0.1956
		90501								
13	CIUDAD VIEJA	0			0.25	0.025	0.575	0.0435	0.25	0.2576
		90504			0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	6			7	0.025	0.55	-0.0455	0.1667	0.1615
		90504			0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	4			7	0.025	0.55	-0.0455	0.1667	0.1615
		90504			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	3			7	0.075	0.275	0.2727	0.1667	0.2013
		90505			0.083					
13	CIUDAD VIEJA	4			3	0.05	0.475	0.1053	0.0833	0.0896
		90506								
13	CIUDAD VIEJA	6			0.125	-0.1	0.35	-0.2857	0.125	0.1025
		90507			0.208					
13	CIUDAD VIEJA	4			3	0	0.4	0	0.2083	0.2083
		90500			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	0			7	0.275	0.6	0.4583	0.1667	0.229
		90503			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	5			7	0.025	0.45	0.0556	0.1667	0.1732
		90504			0.166	-				
13	CIUDAD VIEJA	9			7	0.075	0.4	-0.1875	0.1667	0.1464
		90502			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	1			7	0.175	0.45	0.3889	0.1667	0.2182
		90507			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	1			7	0.075	0.4	0.1875	0.1667	0.1898
		90500			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	3			7	0.025	0.375	0.0667	0.1667	0.1745
		90500			0.291					
13	CIUDAD VIEJA	7			7	0.025	0.4	0.0625	0.2917	0.3046
		90504			0.083					
13	CIUDAD VIEJA	0			3	0.2	0.275	0.7273	0.0833	0.138
		90501			0.083	-				
13	CIUDAD VIEJA	9			3	0.175	0.375	-0.4667	0.0833	0.0603
		90504								
13	CIUDAD VIEJA	7			0	0.1	0.325	0.3077	0	0
		90506								
13	CIUDAD VIEJA	7			0.125	0.025	0.325	0.0769	0.125	0.1318
		90502								
13	CIUDAD VIEJA	2			0.25	-0.05	0.375	-0.1333	0.25	0.2279
		90502			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	0			7	0.175	0.275	0.6364	0.1667	0.2591
		90502								
13	CIUDAD VIEJA	4			0.125	0	0.5	0	0.125	0.125
		90501								
13	CIUDAD VIEJA	2			0.125	0.025	0.325	0.0769	0.125	0.1318
		90505			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	3			7	0.125	0.525	0.2381	0.1667	0.1966
		90507			0.166					
13	CIUDAD VIEJA	2			7	0.15	0.55	0.2727	0.1667	0.2013

CODE SC	ESTABLECIMIENTO	IDUNICO		PRO_ a_1	DIFER _1	DIFER _2	APRENDIZ AJE_b	R_a_ER ROR	RAZON_ERR OR_y
13	CIUDAD VIEJA	905051		0.125	0.125	0.525	0.2381	0.125	0.1474
13	CIUDAD VIEJA	905068		0	0.175	0.375	0.4667	0	0
13	CIUDAD VIEJA	905048		0.2083	0.1	0.575	0.1739	0.2083	0.235
13	CIUDAD VIEJA	905041		0.1667	0.075	0.25	0.3	0.1667	0.2052
13	CIUDAD VIEJA	905050		0.0833	-0.05	0.475	-0.1053	0.0833	0.0775
13	CIUDAD VIEJA	905006		0.1667	0.025	0.2	0.125	0.1667	0.1818
13	CIUDAD VIEJA	905059		0.1667	0	0.4	0	0.1667	0.1667

XIV. GLOSARIO

- **Abstracto** es todo lo que resulta de una abstracción de un destacamento o aislamiento. Es lo que existe sólo en idea, en concepto, en la mente. Abstracto tiene como sinónimo indeterminado, indefinido, teórico.
- **Algoritmos:** Es muy común referirse a pensamiento algorítmico, el cual utiliza un procedimiento paso a paso en contraste con pensar cual es más auto referencial y recursivo. El modelo de Polya de los cuatro pasos para la solución de los problemas es un ejemplo del pensamiento algorítmico. Un algoritmo es un proceso de paso a paso que apoya en alcanzar una meta o tarea, como es el de solucionar un problema. Los algoritmos apoyan en brindar potencia, confiabilidad y certeza, velocidad, registro e instrucción.
- **Aprendizaje:** sistema complejo compuesto por distintos subsistemas en estado de equilibrio dinámico. Las principales características de las concepciones asociacionistas y constructivistas sobre el aprendizaje son la reestructuración, asociación aprendizaje, cambio interno externo según las demandas contextuales y los contenidos aprendidos. Sin la acumulación de información no podría haber reestructuración del conocimiento. (Pozo, 1997) El objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.
- **Aprendizaje socioemocional:** El aprendizaje de habilidades, conocimientos y valores que aumentan la capacidad de los niños de conocerse tanto a sí mismos como a los demás, con el fin de usar esa información para resolver problemas con flexibilidad y creatividad. Cohen (2003). Es un proceso de adquirir las habilidades para reconocer y manejar emociones, desarrollar el cuidado y preocupación por los otros, tomar decisiones en forma responsable, establecer relaciones positivas y manejar situaciones desafiantes de manera efectiva. Evita a mediano y largo plazo: desarrollo positivo de los niños y jóvenes, promueve la salud, prevención de problemas de conducta y el auto involucramiento de los estudiantes en su aprendizaje. (Inteligencia emocional)

Goleman, 1996; Inteligencias Múltiples Gardner, 1983; Alfabetización Emocional Álvarez, 2001.)

- **Bugs:** Son algoritmos que incurren en patrones de error. Van Lehn (1980)
- **Concepciones espontáneas:** Se forman por las percepciones sensoriales que tienen los niños acerca del mundo que les rodea y de hechos de la vida cotidiana, dejando a un lado la definición científica y el lenguaje empleado por el docente para describir el fenómeno. (Bachelard, 1948)
- **Concepciones inducidas:** Son creencias inducidas debido a procesos de socialización. Estas concepciones se originan en el entorno familiar, social y por la influencia de los medios de comunicación. Se deriva en algunas situaciones de cuentos, películas, historias o fábulas. El conocimiento del niño hace referencia a lo más cercano de lo que viven diariamente. Cuando el docente habla en el aula, hace una explicación en la pizarra o explica un tema, la información no se queda automáticamente transferido a la mente del niño. Cada uno de los presentes en el aula forman sus propias ideas en diversos estímulos, que hay en el entorno de aprendizaje (Osborne, Freyberg, 1998)
- **Concepciones analógicas:** Se deriva de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana así la comprensión del concepto se basa en la formación de analogías generadas por los propios alumnos en su entorno familiar o en la escuela. Sucede cuando los alumnos no pueden dar una definición científica del término, sino que lo que hacen es hacer comparaciones, para poder explicarlos. Estas ideas previas que tienen los estudiantes influyen en su pensamiento sobre estos temas, están muy arraigadas en ellos e influyen en su proceso de aprendizaje. (Bachelard, 1948)
- **Conceptos empíricos:** son los que se tienen en forma espontánea derivadas de la experiencia diaria, al comparar y contrastar las características empíricas de los objetos o fenómenos
- **Concreto:** Palabra proveniente del latín “*concretus*” que hace referencia a algo preciso y exacto. Este concepto se utiliza cuando se requiere precisión en una respuesta o en un hecho ya que una respuesta concreta crea seguridad por su validez y por su solidez. Un hecho concreto es a lo que en derecho se le llama

acto específico o acto fehaciente y se refiere al hecho en sí en el cual están implicados todos los hechos a los cuales se está haciendo referencia en ese momento.

- **Conocimiento:** Se concibe el conocimiento como fruto de la interacción entre nueva información y lo que ya se sabe. Esta interacción o dinámica permite transformaciones, reestructuraciones de nuestros saberes. Se reorganiza ciertos elementos para intentar nuevas formas de interactuar con la información. (Pozo, 1997)
- **Espíritu científico:** pasa por tres estados a) estado concreto en el que el espíritu se recrea con las primeras imágenes del fenómeno y se apoya sobre una literatura filosófica que glorifica la Naturaleza (intrínseca) b) estado concreto-abstracto en el que el espíritu adjunta a la experiencia física esquemas geométricos y se apoya sobre una filosofía de la simplicidad. El espíritu se mantiene todavía en una situación paradójica (está tanto más seguro de su abstracción cuanto más claramente esta abstracción está representada por una intuición sensible) c) estado abstracto en el que el espíritu emprende informaciones voluntariamente sustraídas a la intuición del espacio real, voluntariamente desligadas de la experiencia inmediata y hasta polemizando abiertamente con la realidad básica, siempre impura, siempre informe. (Bachelard, 1948)
- **Error** El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad, y una realidad permanente en el conocimiento de las ciencias o científico. La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos (Rico, 1998).
- **Errores de interpretación o conflictos semióticos** Cualquier posible objeto matemático (concepto, propiedad, argumento, procedimiento) puede jugar el papel tanto de expresión como de contenido en una función semiótica. Esta complejidad puede explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes (Godino, et. al. 2007 citado por Batanero 2013). Se denomina conflicto semiótico a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes

que no concuerdan con las pretendidas por el docente. Estos errores de interpretación (conflictos semióticos), producen errores que no son debidos a falta de conocimiento, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica. Por tanto, los conflictos semióticos explicarían algunos errores de los estudiantes. De acuerdo con Rojas (2010) esta noción indica que el aprendizaje es una actividad de carácter fuertemente semiótico que, entre otras tensiones, debe afrontar la existente entre lo institucional y lo personal.

- **Evaluación:** es el proceso de obtener información del aprendizaje de los estudiantes y el uso de esta información es necesaria para el plan de instrucción. La evaluación debe estar alineado con las metas curriculares, aun con tareas específicas de evaluación puede ser planificados con estas metas en mente
- **Falibilidad:** la capacidad de considerar como verdaderos los conceptos y los procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas.
- La **heurística** es vista como el arte de inventar por parte de los seres humanos, con la intención de procurar estrategias, métodos, criterios, que permitan resolver problemas a través de la creatividad, pensamiento divergente o lateral.
- **Matemática(s):** La matemática es la ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones.
- **Neurociencia:** Aclara todas las partes que integran el bagaje neuronal de un individuo: emociones, curiosidad, atención, conciencia, procesos mentales, aprendizaje, memoria y consolidación de la memoria, sueños y ritmos biológicos desde el niño hasta el anciano. El sustrato neuronal es único en los cuales participan muchos circuitos cerebrales, a tiempos diferentes y localizados en distintas áreas del cerebro y que se ponen en marcha por estímulos diversos del medio ambiente. Tiempos atencionales de aprendizaje determina la relación de estos con la eficiencia del aprendizaje y la enseñanza quien pudiera utilizarlos mejor. (Mora, 2013)
- **Neuro mitos:** Radica en la aplicación de los conjuntos de conocimientos neurobiológicos distorsionados, lo que es lo mismo que la aplicación de conceptos falsos o conceptos neuro erróneos. Incluye a las personas que ofrecen en los

colegios paquetes de información neuro que supuestamente son útiles y pueden guiar a los maestros a mejorar su enseñanza cuando en realidad no lo son. Los profesores de universidad igual están alejados de la psicología cognitiva o la neurociencia cognitiva (Mora, 2013)

- **Obstáculo epistemológico:** son causas de estancamiento, retroceso e inercia. Es un conocimiento no formulado. (Bachelard, 1948)
- **Obstáculos matemáticos:** limitaciones que los estudiantes presentan durante el proceso de construcción de conceptos científicos. En el proceso de formación de los conceptos estos son obstáculos por conocimientos previos, obstáculo verbal, obstáculo o peligro por la explicación por utilidad, obstáculo por el conocimiento general y el obstáculo animista. El individuo se confunde por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que hace que los conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, lo que obviamente afecta su aprendizaje. (Bachelard, 1948)
- **Obstáculo por experiencia o conocimiento previos:** Los individuos antes de iniciar cualquier estudio, tienen ya un conjunto de ideas muy propias acerca del cómo y el porqué de las cosas son como son. Estas ideas previas pueden ejercer una potente influencia que puede limitar el proceso de aprendizaje. Esto carga de subjetividad las observaciones y se pueden tener concepciones erróneas ya que las cosas se ven tal como nosotros queremos verlas y no como realmente son. La experiencia previa hace que las conceptualizaciones se den de manera errónea. Estos conceptos o concepciones previos, según Ausubel (1986) y (Pozo, 1997) son muy estables y resistentes al cambio ya que por lo general son compartidos por muchas personas de diferentes edades, contextos culturales, formación y de países. Las concepciones se pueden clasificar en tres diferentes tipos: espontáneas, inducidas y la analógicas.
- **Obstáculo por conocimiento general:** Al explicar mediante el uso de generalizaciones un concepto, se cae en la mayoría de las veces en equivocaciones, porque los conceptos se vuelven vagos, e indefinidos, ya que se dan definiciones demasiado amplias para describir un hecho o fenómeno y se deja de lado aspectos esenciales, los detalles que permiten exponer con claridad y

exactitud los caracteres que permiten distinguirlos y conceptuarse correctamente. Muchas veces se dan falsas definiciones que lejos de construir un concepto científico se vuelven como hipótesis erróneas que se construyen con base en las observaciones directas realizadas mediante los sentidos. Al generalizar el estudiante, sale del paso con una explicación sencilla que la aplica a toda una definición, de una forma resumida. Se dejan los detalles que le dan validez científica. (Bachelard, 1948)

- **Obstáculo pragmático y utilitario:** Existe la tendencia de reducir y sintetizar de tal manera que se pretende explicar o definir un concepto solamente mediante la idea de utilidad o beneficio. Los conceptos son manejados por la utilidad que presentan, en la utilidad que referencian y que usan como principio para brindar las explicaciones sobre los diferentes términos, es decir, la utilidad es la razón que sirve de base para construir definiciones. Ello conduce a generalizaciones exageradas y reduce notablemente el significado del concepto. (Bachelard, 1948)
- **Obstáculo animista:** No definen el término, sino que utilizan una analogía imaginaria con un ser que es capaz de actuar por sí mismo como un objeto animado u organismo vivo. En algunos estudiantes muestran dificultad en definir lo relacionado con conceptos físicos y es aquí donde se nota la influencia del animismo. Lo relacionan con características de los seres vivos, de ahí que las definiciones que dan acerca de los distintos conceptos están cargadas de características vitales, estados anímicos y o sensaciones. El docente debe tomar conciencia acerca de la influencia del animismo infantil en la construcción errónea del conocimiento, para que así propicie la transformación gradual de las mismas, para que si los estudiantes puedan construir el concepto correcto. No importa que lo haga con sus propias palabras, lo que es válido es que demuestre que el estudiante concibe y expresa con sus propias palabras y se acerque a lo correcto. (Bachelard, 1948)
- **Obstáculo verbal:** Se presenta cuando mediante una sola palabra o sola imagen se quiere explicar un concepto. Hábitos verbales se convierten en obstáculos del pensamiento científico. Se sustituye el concepto por una palabra que designa una de las utilidades o empleo de esos vocablos. En algunas ocasiones el estudiante

solo muestra algo para relacionarlo con el concepto sin mediar palabras, porque a veces la función de la palabra es de una evidencia tan clara y distinta que ni se siente la necesidad de explicarla. Se cree que al asociar a una palabra abstracta se hace avanzar el pensamiento, cuando en realidad lo que se ha presentado es un movimiento puro y simplemente lingüístico y de carácter metafórico. Según Bachelard, (1976) no es tan fácil como se pretende desterrar a las metáforas en el exclusivo reino de las expresiones. Las metáforas seducen a la razón, son imágenes particulares y lejanas que insensiblemente se convierten en esquemas generales. Se explican los fenómenos complicados con un material de fenómenos simples como cuando se aclara una idea compleja, descomponiéndose en ideas simples. Este es un obstáculo de la falsa explicación lograda mediante una palabra explicativa. Una sola palabra y una sola imagen constituye toda la explicación del concepto. (Bachelard, 1948)

- **Patrones de errores:** son procedimientos sistemáticos que los estudiantes aprenden pero que en la mayoría de las veces no proveen de respuesta correcta. Algunas veces los patrones de errores producen una respuesta correcta cuando es así los estudiantes (hasta los docentes) pueden asumir que el procedimiento entonces es el correcto y adecuado a problemas o situaciones similares. (Asholck, 2006)