

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Entropía de agujeros negros y analogías entre las leyes
mecánicas de agujeros negros y la termodinámica**

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Paulino Ajiquichí Pecher

Guatemala
2019

**Entropía de agujeros negros y analogías entre las leyes
mecánicas de agujeros negros y la termodinámica**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Entropía de agujeros negros y analogías entre las leyes
mecánicas de agujeros negros y la termodinámica**

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Paulino Ajiquichí Pecher

Guatemala
2019

Vo.Bo.:

(f) 

Dr. Robert F. Cahalan

Vo.Bo.:

(f) 

Dr. Juan Ponciano Castellanos


Tribunal Examinador:

(f) 

Dr. Juan Ponciano Castellanos

(f) 

MSc. Zaida Urrutia

(f) 

Dr. Robert F. Cahalan

Fecha de aprobación: Guatemala, 29 de noviembre de 2018.

En el proceso de realización de este trabajo aprendí sobre la teoría de la termodinámica de agujeros negros, que es una de las teorías básicas e importantes en la actualidad, para la comprensión y desarrollo de una teoría de gravedad cuántica. Se que tengo mucho que aprender y lo que he aprendido se refleja en la capacidad de replicar por mi cuenta los resultados, las cuales ya habían sido obtenidos por científicos como Penrose, Hawking, Bekenstein, Bardeen y Carter.

Agradezco la ayuda, no solo por la comprensión de los conceptos que involucra la teoría, sino que también en la redacción de esta tesis a mis asesores: Dr. Juan Ponciano quien es el jefe del Instituto de Investigación de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala y profesor en la Universidad del Valle, y también al Dr. Robert F. Cahalan, científico emérito de Goddard Space Flight Center de la NASA y profesor en la Universidad de Johns Hopkins. Así también agradezco la ayuda del Dr. Nestor Mirabal investigador en Goddard Space Flight Center y de la Universidad de Maryland Baltimore County, en la redacción del trabajo y comprensión de conceptos de la teoría de agujeros negros.

Agradezco a mis padres y a mis dos hermanos, por el apoyo que siempre me han mostrado en las decisiones que he tomado. Por último y no menos importante agradezco el apoyo durante estos años en la carrera de física a MSc. Zaida Urrutia, directora del Departamento de Física.

Prefacio	III
Lista de figuras	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Justificación	3
3. Objetivos	5
3.1. Objetivo general	5
3.2. Objetivos específicos	5
4. Termodinámica de agujeros negros	7
4.1. La mecánica de los agujeros negros y termodinámica	7
4.1.1. Leyes de la mecánica de agujeros negros:	8
4.1.2. Leyes de la termodinámica:	9
4.2. Analogía entre la física de los agujeros negros y la termodinámica	10
4.3. Entropía de Bekenstein-Hawking	13
4.4. Temperatura de Hawking	16
4.5. Propiedades termodinámicas de los agujeros negros	19
4.5.1. Capacidad calorífica:	19
4.5.2. Volumen termodinámico y generalización de la primera ley mecánica de agujeros negros	20
5. Relatividad general y los agujeros negros	21
5.1. Gravedad como geometría	21
5.2. Las ecuaciones de campo de Einstein	22
5.3. Espacio-tiempo de Minkowski	24
5.4. Métrica de Schwarzschild	26
5.4.1. Singularidades	26
5.4.2. Horizonte de eventos	27

5.5.	Agujero negro	29
5.5.1.	Agujeros negros primordiales	30
5.5.2.	Agujero negro de Kerr-Newman	31
5.5.3.	Métrica de Kerr	33
5.6.	Proceso de Penrose para la métrica de Kerr	34
5.7.	Teorema del área de Hawking	37
5.8.	Constante cosmológica	41
6.	Generalización de la segunda ley de la termodinámica	43
6.1.	Vacío cuántico	43
6.2.	Par de creación y aniquilación de partículas	44
6.3.	Concepto básico de producción de partículas:	46
6.4.	Teoría de información y la termodinámica	47
6.4.1.	Información y entropía de un agujero negro	48
6.5.	Incremento mínimo del área de un agujero negro	49
6.6.	Generalización de la segunda ley de la termodinámica	50
6.6.1.	Enunciado de la generalización de la segunda ley (GSL):	50
6.6.2.	Oscilador armónico cuántico	51
6.6.3.	Gas de fotones o de luz	55
6.7.	Radiación de Hawking	59
6.8.	Evaporación de los agujeros negros	61
7.	Búsqueda de pruebas experimentales	63
7.1.	Búsqueda de la emisión de rayos gamma de agujeros negros primordiales	63
7.1.1.	Búsqueda de candidatos de PBH usando el Telescopio Fermi	65
7.2.	Búsqueda de materia oscura y agujeros negros primordiales	65
8.	Conclusiones	67
9.	Bibliografía	69
10.	Anexos	71
10.1.	Simetrías	71
10.2.	Vectores Killing	72
10.3.	Tensor momento-energía	74

Lista de figuras

1.	Sistema caja y agujero negro de Schwarzschild [2].	14
2.	Partículas con entropía que caen en un agujero negro [2].	17
3.	Representación del espacio-tiempo de la formación de un agujero negro [9]. . .	28
4.	Diagrama de Penrose para un agujero negro eterno [14]	31
5.	Estructura del horizonte de eventos en la métrica de Kerr-Newman [17]	33
6.	Gráfica del límite de velocidad tangencial de la partícula [18]	36
7.	Barrera de potencial [23]	45
8.	Un cuerpo masivo causa una gran curvatura del espacio-tiempo [24]	47
9.	Generalización de la segunda ley de la termodinámica, aplicado a un oscilador armónico.	55

El trabajo se realizó con el objetivo de recopilar información y replicar resultados importantes en la Teoría de la Termodinámica de Agujeros Negros siendo el principal de ello la analogía entre las leyes de la mecánica de agujeros negros y la termodinámica, la temperatura de Hawking, entropía de Bekenstein-Hawking, teorema del área y la generalización de la segunda ley de la termodinámica. Además se dedujo la primera ley mecánica de agujeros negros a partir del área del horizonte de un agujero negro de Kerr-Newman y con esto se hizo la analogía que hay con el primer principio de la termodinámica. El Capítulo IV trata de la relación entre la física de agujeros negros y la termodinámica. En el capítulo V se da un breve resumen de la ecuación de campo de Einstein, espacio de Minkowski, la métrica de Schwarzschild, Kerr, Kerr-Newman, el proceso de Penrose y el teorema del área de Hawking, las cuales ayudan a explicar mejor los resultados obtenidos en el capítulo anterior. En el capítulo VI se aborda el concepto de entropía desde el punto de vista de la teoría de la información y de la mecánica estadística. Se plantea la generalización de la segunda ley de la termodinámica dada por Bekenstein. Se resuelven los problemas del oscilador armónico cuántico y el gas de fotones, las cuales son abordados como problemas de ensemble canónico cuyos resultados validan la generalización de la ley. En el último capítulo se hace énfasis en el estado del arte de las pruebas experimentales de unos de los resultados importantes de la teoría de termodinámica de agujeros negros, que es la evaporación de agujeros negros primordiales por la radiación de Hawking.

CAPÍTULO 1

Introducción

A mediados del siglo XX tuvo lugar el nacimiento de la Teoría de la Termodinámica de Agujeros Negros. Esto surgió a partir del descubrimiento de las analogías entre las leyes mecánicas de agujeros negros y la termodinámica, de parte de científicos como Roger Penrose, Jacob Bekenstein, Stephen Hawking, Bardeen y Wheeler [1]. Un ejemplo de esta analogía es entre el área del horizonte de eventos y la entropía de un sistema térmico.

Hawking, Bardeen y Carter en 1973 fueron quienes formalizaron los principios de la termodinámica aplicada a los agujeros negros, así mismo Hawking descubre la entropía de los agujeros negros que tiempo después sería clave para el planteamiento de la emisión de partículas de un agujero negro y del proceso de evaporación [2][3]. La atribución de temperatura a un agujero negro condujo a Hawking a pensar que estos no serían eternos tal como se pensaba antes en la relatividad general.

El presente trabajo tiene como objetivo replicar cálculos sobre entropía de agujeros negros, temperatura de Hawking, analogías entre la física de agujeros negros y la termodinámica, así también se estudiará la generalización de la segunda ley de la termodinámica, la cual es verificada resolviendo los problemas del oscilador armónico cuántico y del gas de fotones cerca de un agujero negro.

El documento está estructurado de la siguiente manera: En el Capítulo IV se plantean las leyes de la mecánica de agujeros negros y los principios termodinámicos, las analogías que hay entre ambas leyes, la entropía Bekenstein-Hawking y temperatura de Hawking. En el Capítulo V, abordan algunos temas en la relatividad general como la ecuación de campo de Einstein, el espacio-tiempo de Minkowski, el proceso de Penrose, métrica de Schwarzschild, Kerr y Kerr-Newman, y la demostración del teorema del área de Hawking. A partir del capítulo VI se exponen conceptos de entropía según la teoría de información y la mecánica estadística, creación de pares, radiación de Hawking y así también expongo cálculos hechos por mi cuenta sobre el oscilador armónico cuántico y el gas de fotones cerca de un agujero

negro, que validan la generalización de la segunda ley de la termodinámica. El último capítulo es sobre el estado del arte de las pruebas experimentales de la teoría como por ejemplo la verificación de parte del Telescopio Fermi en la existencia de agujeros negros primordiales, las cuales en la actualidad se estarían evaporando por la radiación de Hawking.

La teoría de termodinámica de agujeros negros es uno de los temas de mayor estudio en la actualidad en el campo de cosmología, astrofísica y de gravedad cuántica. Hawking, Bardeen, Penrose, Bekenstein y entre otros científicos fueron los pioneros de esta nueva teoría que aplica conceptos termodinámicos, teoría de información y mecánica estadística al estudio de los agujeros negros. La termodinámica de agujeros negros es una pieza importante de todo el rompecabezas del entendimiento del origen y evolución de nuestro universo.

La teoría es importante porque aporta nuevas herramientas en el estudio de objetos cosmológicos, como por ejemplo la evaporación de los agujeros negros primordiales a consecuencia de la radiación de Hawking o con el hecho de que los agujeros negros tienen entropía y que se pueden comportar como cuerpos que emiten radiación. Los descubrimientos de Hawking son un paso importante para el desarrollo de una teoría que unifique la teoría cuántica de campos con la relatividad general. En la década de los 70 Hawking pensó, en que el origen del universo pudo haber sido una singularidad, de modo que entender la singularidad de los agujeros negros sería clave para descifrar los acontecimientos que dieron lugar al Big Bang. Se sabe que para entender la singularidad se necesita de una teoría que englobe la teoría cuántica y la relatividad, he ahí una razón mas de la realización de este trabajo, para seguir con estudios de temas mas avanzados.

En este trabajo no se aborda de una manera formal como tiene lugar la radiación de Hawking, pero los conceptos que se desarrollan como entropía, temperatura, teorema del área, generalización de la segunda ley de la termodinámica y las analogías entre las leyes de la física de agujeros negros y la termodinámica, son importantes para emprender el estudio de teorías mucho mas avanzadas como la teoría de cuerdas, principio holográfico, correspondencia AdS/CFT de Maldacena y entre otros, cuyo objetivo principal es desarrollar una teoría de gravedad cuántica.

3.1. Objetivo general

Realizar una monografía sobre la teoría de la termodinámica de agujeros negros, resultados importantes y experimentos relacionados en la actualidad.

3.2. Objetivos específicos

- Recopilar información sobre la termodinámica de agujeros negros, radiación de Hawking, creación de pares de partículas y las analogías entre las leyes de la mecánica de agujeros negros y la termodinámica.
- Replicar cálculos importantes como entropía de Bekenstein-Hawking, temperatura de Hawking, teorema del área, evaporación de agujeros negros y la generalización de la segunda ley de termodinámica.
- Conocer el estado del arte de la termodinámica de agujeros negros y los experimentos que se están llevando a cabo para la detección de agujeros negros primordiales y de la radiación de Hawking.

Termodinámica de agujeros negros

Se enuncian las leyes de la mecánica de agujeros negros y de la termodinámica y luego se estudian las analogías que hay específicamente entre la primera y segunda ley. Al final del capítulo se estudiarán dos propiedades termodinámicas de agujeros negros.

4.1. La mecánica de los agujeros negros y termodinámica

Los agujeros negros comenzaron a estudiarse bastante desde mediados del siglo XX por científicos como Wheeler, Bekenstein, Penrose, Hawking y entre muchos otros. Cuando la Teoría de la Relatividad General (RG) fue publicada se empezó a pensar en la posible existencia de regiones del espacio-tiempo con gran curvatura o algo que podemos llamar como curvatura infinita.

Cuando los primeros científicos empezaron a estudiar formalmente los agujeros negros, se dieron cuenta que para entenderlo muy bien tenían que tomar en cuenta sus propiedades térmicas, a lo que actualmente se conoce como Teoría de la Termodinámica de Agujeros Negros. En la relatividad general clásica hay un reducido número de parámetros macroscópicos que pueden estudiarse para los agujeros negros como la carga, la masa y el momento angular [4].

Los tres parámetros mencionados dan una buena idea sobre el comportamiento y estructura de los agujeros negros, pero para saber que pasa con la materia en el interior del agujero negro se necesita de la teoría de gravedad cuántica, la cual hace uso de mucho más parámetros.

Como ya se vera en siguientes secciones y capítulos, en el presente trabajo se presentaran resultados importantes de la teoría estadiando agujeros negros de Schwarzschild que considerara únicamente la masa, el de Kerr toma en cuenta la masa y momento angular y el de Kerr-Newman que considera los tres parámetros.

Hipótesis de no pelo para agujeros negros : Los agujeros negros aislados y estacionarios en relatividad general son caracterizados unicamente por tres parámetros las cuales son: masa (M), momento angular (L) y carga eléctrica (Q) [5].

4.1.1. Leyes de la mecánica de agujeros negros:

1. La gravedad de la superficie κ es constante en el horizonte de eventos.:

Sabemos que dos objetos con masa se atraen entre si, así como la Tierra atrae objetos a su superficie con una aceleración g , pero en un agujero negro la gravedad se trata de otra manera. En un espacio-tiempo estático asintóticamente plano, la gravedad de superficie es la aceleración de un observador estático cerca del horizonte medido por un observador estático en el infinito [6] [4].

Como ya se ha mencionado si el agujero negro es estacionario, el horizonte de Killing coincide con el horizonte de eventos, donde se tiene que κ es constante [7].

2. Para dos agujeros negros estacionarios que difieren solo por pequeñas variaciones en los parámetros M, L y Q se cumple lo siguiente:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA_{hor} + \Omega_H dL + \Phi_H dQ \quad (1)$$

donde Ω_H es la velocidad angular y Φ_H es el potencial eléctrico en el horizonte y G es la constante de gravitación universal, las cuales son constantes en el horizonte de eventos de cualquier agujero negro estacionario.

Esta es una ley de conservación de energía al relacionar los cambios de momento angular, de la carga, el área del horizonte de eventos y de la energía, la cual esta relacionado con la masa [4][2][8] .

3. El área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca decrece.

$$dA_{hor} \geq 0 \quad (2)$$

Es conocido también como el teorema del área de Hawking. Esto explica que para un agujero negro clásico solo puede caer materia en ella que implica un aumento de la masa del agujero negro y por tanto el área del horizonte de eventos[4].

Este principio también establece que un agujero negro no puede bifurcarse, es decir se puede tener que dos agujeros negros se fusionen pero no al revés, por lo tanto la

suma de las áreas de los dos agujeros negros es igual o mayor al área del agujero negro resultante [1].

4. Es imposible bajo cualquier procedimiento reducir la gravedad de superficie κ a cero en un número finito de pasos.

Esto explica que no es posible tener un agujero negro extremo, la cual el objeto pudiera tener una masa tan pequeña que aun así pudiera ser compatible con la carga eléctrica y el momento angular. Un ejemplo de esto es la posibilidad de tener un agujero de la misma carga y momento angular que el electrón, pero esto nos da que el radio de Schwarzschild de tal sistema es menor que la longitud de Planck.

Es importante resaltar también que esta tercera ley mecánica de los agujeros negros no es análogo a la versión fuerte de la tercera ley de la termodinámica que expresa que cuando la entropía tiende a cero también lo hace la temperatura.

El valor de κ es positiva, aunque no hay una demostración matemática formal para eso, la intuición nos dice que debe ser eso porque la gravedad como se entiende es atractiva y no repulsiva. Además si se diera que $\kappa = 0$, se tendría lugar una singularidad desnuda violando así el carácter globalmente hiperbólico del espacio-tiempo [7] .

4.1.2. Leyes de la termodinámica:

1. La temperatura T es la misma para un sistema en equilibrio térmico:

Podemos explicarlo diciendo que si un sistema A está en equilibrio térmico con el sistema B, así también el sistema C está en equilibrio con un sistema B, entonces A y C están en equilibrio térmico entre sí. De esta manera se tiene que un sistema en equilibrio térmico tiene una temperatura T constante.

2. Un sistema aislado puede intercambiar energía con su entorno en forma de trabajo y en calor, acumulando energía en forma de energía interna:

$$dU = TdS + pdV \tag{3}$$

donde U es energía interna, S entropía, T temperatura, p es la presión y V volumen.

Esto es conocido también como una generalización de la ley de conservación de la energía.

3. La entropía del sistema o universo siempre aumenta:

$$dS \geq 0 \tag{4}$$

Así también considerando el enunciado de Clausius, la ley hace referencia a que es imposible que se de un flujo de calor de un reservorio de baja temperatura a una de alta temperatura.

Esta ley nos ayuda comprender que los procesos termodinámicos en la naturaleza son irreversibles, pero hay que mencionar que existen procesos a escala microscópica que son reversibles, de acuerdo con la conjetura de la dualidad Gauge/Gravedad de Polchinski: todos los procesos microscópicos en un agujero negro son reversibles y únicamente los comportamientos colectivos son irreversibles como en cualquier otro sistema térmico macroscópico. En las siguientes secciones se estudiará con mas detalle el concepto de entropía desde el punto de vista de la teoría de información y de mecánica estadística.

4. Es imposible llegar a una temperatura igual a cero en un proceso, bajo un número finito de pasos:

La temperatura mínima del universo es el cero absoluto, pero en un sistema dado, tanto su entropía como su temperatura solo pueden aproximarse a este valor. Otra explicación de esto, se puede dar desde el punto de vista de la mecánica cuántica, donde se establece que existe una energía para el estado base, de modo que si tomamos nuestro universo como un sistema cuántico, la energía basal tendría asociada una temperatura arriba del cero absoluto.

Es muy interesante ver que hay una verdadera relación entre la entropía S y el área del horizonte de eventos A_{hor} , así mismo la temperatura T con la gravedad de superficie κ . En las siguientes páginas se entrará más en detalle de la relación que existe entre las variables de la mecánica de agujeros negros y la termodinámica.

4.2. Analogía entre la física de los agujeros negros y la termodinámica

Jacob Bekenstein, en su artículo de 1973 de agujeros negros y entropía, da a conocer ciertas analogías entre la física de agujeros negros y la termodinámica. Así que comenzaremos haciendo la analogía entre los agujeros negros y la segunda ley de la termodinámica.

Consideremos un agujero negro de Kerr-Newman que cumple en su totalidad con la hipótesis de no pelo. El área del horizonte de eventos para un agujero negro de Kerr y Kerr-Newman está dada como $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$, con lo anterior no estamos diciendo que el valor del área sea la misma para ambas métricas sino que esto cambia debido a la diferencia entre r_+ . En el siguiente capítulo se darán mas detalles de como obtener la expresión del área. Para que el resultado de la primera ley mecánica de agujeros negros coincida con el resultado obtenido por Bekenstein, geometrizamos la constante $4\pi = 1$.

El área A_{hor} del horizonte para el agujero negro de Kerr-Newman esta dado como,

$$A = r_+^2 + a^2 \tag{5}$$

$$= 2Mr_+ - Q^2 \tag{6}$$

donde tenemos que $a = L/M$ es un parámetro de rotación que está relacionado evidentemente con el momento angular L y $r_{\pm} = M \pm \sqrt{(M^2 - Q^2 - a^2)}$ es el límite de superficie o ergoesfera.

De la segunda ley mecánica de agujeros negros tenemos que el área nunca disminuye, esto implica entonces que $dA \geq 0$. En el siguiente capítulo se demostrará este principio.

Ahora procedemos a obtener el diferencial total de la función del área de horizonte para un agujero negro de Kerr-Newmann y resolver para dM . Esto se hace porque se quiere saber cómo se comporta el agujero cuando hay pequeñas variaciones en los parámetros establecidos como la masa dM , carga dQ y el momento angular dL .

Reescribimos la Ec. 5, haciendo la sustitución de r_+ .

$$A = 2M \left(M + \sqrt{(M^2 - Q^2 - a^2)} \right) - Q^2 \quad (7)$$

La función de área A depende de tres variables y lo denotamos de la siguiente manera, $A = A(M, Q, a)$. El diferencial total de la función es,

$$dA = \frac{\partial A}{\partial M} dM + \frac{\partial A}{\partial Q} dQ + \frac{\partial A}{\partial a} da \quad (8)$$

$$dA = 4M dM + 2dM \sqrt{(M^2 - Q^2 - a^2)} - 2Q dQ + M \frac{(2M dM - 2Q dQ - 2ada)}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \quad (9)$$

$$dA = dM(4M + 2\sqrt{(M^2 - Q^2 - a^2)}) - 2Q dQ + 2M \frac{(M dM - Q dQ - ada)}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \quad (10)$$

Ahora procedemos a hacer una sustitución, Θ que después lo definiremos como la gravedad de superficie de un agujero negro.

$$\Theta = \frac{1}{4A} (r_+ - r_-) \quad (11)$$

Desarrollando lo anterior haciendo la sustitución de r_{\pm} , podemos llegar a la siguiente expresión.

$$\Theta = \frac{1}{2A} \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (12)$$

De esta manera la Ec. 10 adquiere la siguiente forma,

$$dA = dM(4M + 4A\Theta) - 2QdQ + \frac{M^2dM}{A\Theta} - \frac{(MQdQ + aMda)}{A\Theta} \quad (13)$$

multiplicamos por Θ en ambos lados de la ecuación para obtener la siguiente expresión.

$$\Theta dA = 4M\Theta dM + 4A\Theta^2 dM - 2Q\Theta dQ + \frac{M^2dM}{A} - \frac{(MQdQ + aMda)}{A} \quad (14)$$

Definimos el potencial eléctrico para el agujero negro de Kerr-Newman.

$$\Phi = \frac{Q}{A} r_+ = \frac{Q}{A} (M + \sqrt{(M^2 - Q^2 - a^2)}) \quad (15)$$

Nótese que,

$$-2\Theta QdQ - \frac{MQdQ}{A} = -\Phi dQ \quad (16)$$

La velocidad angular lo definimos como,

$$\Omega = \frac{a}{A} \quad (17)$$

Ahora para el momento angular tenemos $L = aM$, se efectua la diferenciación $dL = Mda$. Multiplicamos el cambio del momento angular con la velocidad angular,

$$\Omega \cdot dL = \frac{aMda}{A} \quad (18)$$

La Ec. 14 adquiere esta forma bajo la sustitución indicada anteriormente.

$$\Theta dA = 4M\Theta dM + 4A\Theta^2 dM + \frac{M^2dM}{A} - \Phi dQ - \Omega dL \quad (19)$$

Como siguiente paso hacemos un análisis especial para los primeros tres términos del lado derecho de la Ec. 19

$$4M\Theta dM + 4A\Theta^2 dM + \frac{M^2}{A} dM \quad (20)$$

Sustituimos el valor de Θ , Ec. 14 en Ec. 20 para obtener.

$$\left(\frac{2M}{A} \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} + \frac{(M^2 - Q^2 - a^2)}{A} + \frac{M^2}{A} \right) dM \quad (21)$$

Notamos que para $\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ hay tres casos o tres posibles soluciones. La primera si decimos que $M^2 < Q^2 + a^2$, representa una singularidad desnuda de manera que esta solución no puede darse en la naturaleza (hipótesis de censura cósmica). Par el caso $M^2 > Q^2 + a^2$ tampoco es una solución de interes porque se tiene dos horizonte de eventos y además las regiones planas asintóticas estarian conectadas por agujeros de gusano [6].

De modo que nos centraremos en la solución $M^2 = Q^2 + a^2$, donde se puede ver que es una solución inestable.

Por lo anterior llegamos a la siguiente expresión,

$$\left(\frac{2M}{A}\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} + \frac{(M^2 - Q^2 - a^2)}{A} + \frac{M^2}{A}\right)dM = \frac{M^2}{A}dM \quad (22)$$

Para fines prácticos decimos que, $\frac{M^2}{A} = 1$. Así la Ec. 19 toma la siguiente forma:

$$dM = \Theta dA + \Omega dL + \Phi dQ \quad (23)$$

Lo anterior se conoce como la primera ley de la mecánica de agujeros negros, la cuál se dedujo a partir de la función del área para el agujero negro Kerr-Newman, que es el caso general. Esta es la ecuación que Jacob Bekenstein plantea en su artículo de 1973.

La analogía que hace Bekenstein con la primera ley mecánica de agujeros negros y de la termodinámica es lo siguiente: los términos ΩdL y ΦdQ es análogo al trabajo que un agente externo hace sobre el agujero negro para incrementar su momento angular dL y carga dQ . Esto es $\Omega dL + \Phi dQ$ es análogo a $-pdV$ que es el trabajo hecho sobre un sistema termodinámico. Así también como se va analizar después, el área del horizonte A esta relacionado con la entropía y que Θ (que de aca en adelante lo denotaremos como κ , gravedad de superficie) es análogo a la temperatura T [8].

4.3. Entropía de Bekenstein-Hawking

Hay una analogía evidente entre la segunda ley de la termodinámica con la segunda ley mecánica de agujeros negros, esto fue un motivo para que Bekenstein introdujera el concepto de entropía de los agujeros negros [9]. Wheeler le planteo el problema a Bekenstein sobre que le pasaba a una taza de cafe caliente si era arrojada en un agujero negro, donde iría esa entropía creada.

Ahora bien sabemos que la cantidad de aleatoriedad y desorden que hay en un sistema caliente se le llama entropía. De tal manera que la entropía es una medida de cuánto desorden o aleatoriedad hay en el movimiento de los átomos de un sistema caliente. En un sistema aleatorio, como un gas a cierta temperatura, hay una gran cantidad de entropía

por el movimiento aleatorio de las partículas. Se puede decir también que la entropía es información sobre las posiciones y movimiento de las partículas [10].

La información sobre los estados exactos de las partículas calientes que ve un observador acelerado no es completa, porque parte de ella esta codificada en la región inaccesible, denominada horizonte de eventos. Es por ello que la entropía tiene una relación directa con el tamaño del horizonte de eventos del agujero negro [2].

Ahora se va hacer una estimación de la entropía S de un agujero negro de Schwarzschild.

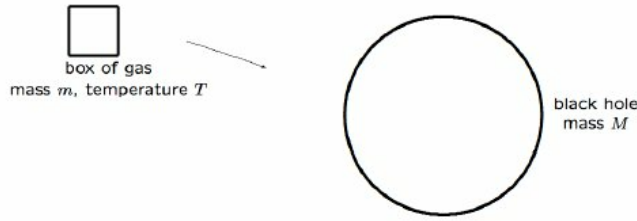


Figura 1: Sistema caja y agujero negro de Schwarzschild [2].

En las cercanías del agujero negro se tiene un cubo de un gas de volumen $v = l^3$, con una masa m y temperatura T , que es lanzada dentro de un agujero negro de Schwarzschild de masa M (nótese que es análogo al experimento mental de Bekenstein y Wheeler, sobre la taza de café caliente).

De la ley de Wien, sabemos que hay una relación entre la longitud de onda en la que se produce un pico de emisión de un cuerpo negro y su temperatura.

$$\lambda = 0.0028976 \left[\frac{m \cdot K}{T} \right] \quad (24)$$

Ahora supongase que las dimensiones del cubo debe ser tan grande como la longitud de onda térmica del gas. Esto lo hacemos de modo que nos quede una expresión mas simplificada.

$$l = \lambda = \frac{0.0028976}{T} \sim \frac{\hbar}{T} \quad (25)$$

De la física clásica tenemos la siguiente relación,

$$dS = \frac{\delta \xi}{T} \quad (26)$$

donde ξ es el calor. Dado que el calor no es una función de estado empleamos $\delta\xi$ en lugar de $d\xi$. Así también el calor ξ esta relacionado con la masa de esta manera, $\xi = \zeta m$. El descenso del gas con temperatura T en el agujero negro implica un descenso en la entropía del universo visible,

$$\Delta S_{gas} \sim -\frac{\zeta m}{T} \sim -\frac{m}{T} \quad (27)$$

$$\Delta S_{gas} \sim -\frac{ml}{\hbar} \quad (28)$$

El cubo caera en el agujero negro cuando su distancia apropiada ρ del horizonte de eventos sea del orden de l . Para un agujero negro de Schwarzschild la distancia apropiada se puede calcular de esta manera,

$$\rho = \int_{2GM}^{2GM+\Delta r} \frac{dr}{\sqrt{1-2GM/r}} \quad (29)$$

Integrando la Ec. 29, se tiene que el valor de ρ viene dado como:

$$\frac{\Delta r}{\sqrt{\frac{\Delta r}{\Delta r+2GM}}} - MG \ln(GM) + MG \ln \left[\Delta r + GM + \Delta r \sqrt{\frac{\Delta r}{\Delta r + 2GM}} + 2GM \sqrt{\frac{\Delta r}{\Delta r + 2GM}} \right] \quad (30)$$

Podemos simplificar un poco la expresión anterior, eliminando ciertos términos. En este caso nos quedamos con el primer término, para tener un valor aproximado de la distancia ρ .

$$\rho \sim \frac{\Delta r}{\sqrt{\frac{\Delta r}{\Delta r+2GM}}} \sim \sqrt{GM\Delta r} \quad (31)$$

Como se dijo anteriormente la distancia ρ debe ser del orden de l , que es la dimensión del cubo. $\rho \sim l$, lo que implica que $\Delta r \sim l^2/GM$.

El gas tiene una masa m , cuando el cubo alcance una distancia de $r = 2GM + \Delta r$ el agujero negro gana una masa igual a:

$$\Delta M \sim m \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} = m \sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM + \Delta r}} \sim m \sqrt{\frac{2GM + \Delta r - 2GM}{2GM + \Delta r}} \quad (32)$$

$$\Delta M \sim m \sqrt{\frac{\Delta r}{2GM + \Delta r}} \quad (33)$$

Ahora supongase que $2GM \gg \Delta r$, por lo tanto:

$$\Delta M \sim m \sqrt{\frac{\Delta r}{2GM}} \sim \frac{ml}{GM} \quad (34)$$

El área del horizonte de sucesos esta dado como, $A_{hor} = 16\pi G^2 M^2$. Donde evidentemente se tiene el área del horizonte A_{hor} es proporcional a la masa M . Pequeñas variaciones del área vendria expresada como:

$$\Delta A_{hor} \sim G^2 M \Delta M \sim Gml \quad (35)$$

Notamos que el agujero negro gana un poco de entropía, causada por la pérdida de entropía del gas, $\Delta S_{BH} \sim -\Delta S_{gas} \sim$, de esta manera se llega a una expresión para la entropía del agujero negro de Schwarzschild.

$$\Delta S_{BH} \sim \eta \frac{\Delta A_{hor}}{G} \quad (36)$$

Se ha llegado finalmente al resultado que un pequeño cambio en la entropía de un agujero negro es proporcional a un pequeño cambio en el área del horizonte, que es equivalente a decir que la entropía esta relacionado con el área del horizonte de eventos. Esta es la analogía que se hace entre la segunda ley de la mecánica de agujeros negros y de la termodinámica. La Ec. 36 es conocida como la entropía de Hawking-Bekenstein [2].

4.4. Temperatura de Hawking

En la Teoria Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), el vacío como tal no existe, mas bien lo que se tiene es la creación y aniquilación de pares de partículas en el espacio de forma continua. El espacio se le llama vacío cuántico y las partículas que tienen lugar se les denomina partículas virtuales dada su corta vida.

Dígase que la partícula creada tiene una energía E , de modo que su antipartícula tiene energía $-E$.

Por el principio de incertidumbre de Heisenberg del tiempo-energía $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, tenemos que el tiempo de vida media de estas partículas es:

$$t \sim \frac{\hbar}{|E|} \quad (37)$$

Es importante mencionar que la idea de energía negativa o positiva depende del tiempo que se escoge. Hawking demostró que el vacío en el espacio-tiempo de Minkowski de un

observador pasado viendo el colapso estelar difiere del vacío de un observador futuro viendo el agujero negro resultante [2]. Para un agujero negro de Schwarzschild con una métrica,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (38)$$

se tiene que la coordenada t es una coordenada de tiempo exterior pero una coordenada espacial en el interior, donde el coeficiente de dt^2 cambia de signo. De igual manera se puede decir que la coordenada r es una coordenada espacial en el exterior pero una coordenada temporal en el interior [2].

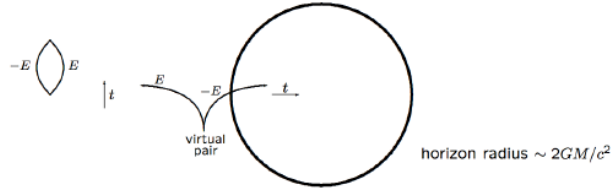


Figura 2: Partículas con entropía que caen en un agujero negro [2].

Una partícula con energía negativa relativo a un observador externo puede tener energía positiva para un observador interno, y si la partícula cruza muy rápido el horizonte de eventos puede evadir el principio de incertidumbre.

Ahora consideremos un par de partículas virtuales a una distancia Δr del horizonte de eventos. Lo que se va hacer ahora es determinar el tiempo que le toma a la partícula de energía negativa $-E$ alcanzar el horizonte de eventos.

$$\tau \sim \sqrt{GM\Delta r} \quad (39)$$

Como ya se ha indicado, la esperanza de vida del par de partículas es $t \sim \frac{\hbar}{|E|}$, de esta manera encontramos que la energía del par con un tiempo de vida τ es:

$$|E| \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \quad (40)$$

Lo anterior es la energía de la partícula positiva, pero sabemos que sería lo mismo también para la antipartícula.

Como se hizo en la sección anterior, solo que en este caso es para la energía y no con la masa, el cambio de energía del agujero negro es:

$$\Delta E \sim |E| \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} = \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (41)$$

Pensemos a como sería la energía a una distancia Δr del horizonte de eventos, de tal manera que $r = 2GM + \Delta r$.

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM + \Delta r}} \quad (42)$$

Ahora hacemos el análisis de como es la energía en el infinito, esto es cuando r es grande. Con lo anterior Δr sería muy pequeño en comparación con $2GM$,

$$E_\infty \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \sqrt{\frac{2GM + \Delta r - 2GM}{2GM + \Delta r}} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \sqrt{\frac{\Delta r}{2GM + \Delta r}} \quad (43)$$

De esta manera tenemos que la energía medida por un observador externo en el infinito es:

$$E \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\Delta r}} \sqrt{\frac{\Delta r}{2GM}} \quad (44)$$

$$E \sim \frac{\hbar}{GM} \quad (45)$$

Notamos que la energía no depende de la posición inicial Δr de las partículas.

Empleamos un factor de escala para la energía, la cual nos permitira tener una expresión de temperatura. Dígase entonces que la energía para un sistema de partículas es proporcional a la temperatura, $E = kT$, donde k es una constante. De esta manera relacionando con la Ec. 45 llegamos a obtener el resultado,

$$kT_H \sim \frac{\hbar}{GM} \quad (46)$$

Se llega entonces a que el agujero negro tiene una temperatura T_H , denominada como la temperatura de Hawking. La Ec. 45 es la energía del agujero negro causada por la creación de pares de partículas, de modo que se ha usado la relación entre la temperatura y energía para un sistema de partículas. Los agujeros negros clásicos como los descritos en la Teoría de la Relatividad General no tienen asociada una temperatura y en los siguientes capítulos veremos que al asociar una temperatura a un agujero negro tiene grandes consecuencias físicas [2].

4.5. Propiedades termodinámicas de los agujeros negros

Ahora se hará referencia a algunas otras propiedades térmicas, que dado la analogía que hay entre las leyes mecánicas de agujeros negros y de la termodinámica, es válido extender la idea de capacidad calorífica, volumen termodinámico y así también la evaporación de los agujeros negros (esto se desarrollará en los siguientes capítulos).

4.5.1. Capacidad calorífica:

Ya se ha demostrado que un agujero negro tiene asociado una temperatura. Como se demostrará en el siguiente capítulo, la gravedad de superficie de un agujero negro de Schwarzschild es aproximadamente $\kappa \sim \frac{1}{4M}$, por lo tanto tenemos una expresión mucho más simplificada de la temperatura de Hawking.

$$T_H \sim \frac{1}{M} \quad (47)$$

Como ya se ha visto hay una relación también entre el área del horizonte de eventos y la masa, $A_{hor} \sim M^2$, de modo que la entropía de Bekenstein-Hawking es:

$$S_{BH} \sim \frac{M}{T_H} \quad (48)$$

De la primera ley de la termodinámica $\delta\xi = dU + dW$ siendo ξ el calor, U energía interna y W el trabajo. Si el trabajo es constante entonces $dW = 0$ y la primera ley se reduce a $dU = \delta\xi$.

$$\delta\xi = C dT \quad (49)$$

Tenemos que el calor ξ y la entropía S están relacionados de la siguiente manera,

$$\delta\xi = T dS \quad (50)$$

y además se tiene:

$$\frac{\delta\xi}{dT} = T \frac{dS}{dT} \quad (51)$$

De esta manera se encuentra una expresión para la capacidad calorífica de un agujero negro de Schwarzschild.

$$C = T \frac{dS}{dT} = T_H \frac{\partial S}{\partial T_H} = -\frac{1}{T_H^2} \quad (52)$$

Notamos que para este tipo de agujero negro, la capacidad calorífica es negativa. El cálculo de la capacidad para otros tipos de agujeros negros, como el de Kerr es mucho más complicado, dado que la capacidad calorífica puede ser negativa o positiva dependiendo de las condiciones que se imponen sobre la velocidad y momento angular [2].

4.5.2. Volumen termodinámico y generalización de la primera ley mecánica de agujeros negros

Este concepto de volumen termodinámico de un agujero negro surge cuando se hace una generalización de la primera ley mecánica de agujeros negros.

$$dM = \Theta dA + \Omega.dL + \Phi dQ \quad (53)$$

Como ya se ha explicado, Bekenstein hizo la analogía de esta ley con la primera de la termodinámica. La generalización de la primera ley de agujero se da cuando se agrega el término $-V_{ter}dP$,

$$dM = \Theta dA + \Omega.dL + \Phi dQ + V_{ter}dp \quad (54)$$

donde p es la presión que se ejerce sobre el agujero negro y un candidato para esto es la constante cosmológica Λ , la cual sera discutido con mayor detalle en el siguiente capítulo. Esta claro que Λ normalmente no es una función de estado, porque es una constante que es fijada por la teoría y no por el estado del sistema termodinámico [2].

Pero digamos que hay situaciones, en la cual se puede forzar que Λ sea una constante en virtud de las ecuaciones de campo y de ahí sí se podría considerar Λ como una función de estado la cual le daría sentido a la Ec. 54.

Notamos que en la generalización de la primera ley, podemos hacer la analogía con la siguiente función de estado en termodinámico,

$$H = U + pV \quad (55)$$

donde la entalpía H sería análogo a la masa M del agujero negro. Sabemos que H representa un flujo de calor en sistema químico o termodinámico en este caso. En esta sección ya hemos ampliado el significado de la Ec. 54, porque los primeros tres términos representarían la energía interna U del sistema y además dM ya no solo representa un cambio de energía sino que es un flujo de energía en forma de calor (radiación) del agujero negro con su entorno.

Es importante mencionar que el volumen termodinámico existe aún cuando $\Lambda \rightarrow 0$. Por ahora aún no se ha logrado entender muy bien el significado físico de V_{term} o sus implicaciones, pero para un agujero negro de Schwarzschild que se caracteriza por tener simetría esférica, la expresión para dicho volumen es,

$$V_{term} = \frac{4}{3}\pi r_+^3 \quad (56)$$

donde r_+ es la posición del horizonte de eventos en las coordenadas de Schwarzschild [2].

Relatividad general y los agujeros negros

En el capítulo anterior se hizo referencia sobre agujeros negros de Schwarzschild, Kerr-Newmann, el horizonte de eventos, el área del horizonte, espacio-tiempo de Minkowski y la constante cosmológica. Entonces para comprender mejor los resultados importantes de la teoría de la termodinámica de agujeros negros, en este capítulo se desarrollara con mas detalle aunque no exhaustivo los temas mencionados y se introducirán otros como el proceso de Penrose que históricamente puede considerarse como el primer indicio de la conexión de la termodinámica y la física de los agujeros negros. Además se hara la demostración del teorema del área de Hawking y su analogía con la entropía sera mucho mas evidente.

5.1. Gravedad como geometría

Principio de equivalencia:(EP, por sus siglas en inglés) Observadores en caída libre en un campo gravitatorio son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones [11].

Principio de covariancia: Las leyes de la física deben tener la misma forma en todo los sistemas de referencia. Las leyes de la física deben por lo tanto transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas[11] .

La relatividad general cambia totalmente la forma en como se entiende la gravedad, para Newton la gravedad es una fuerza que actúa a distancias y de manera instantánea (velocidad infinita), pero esto contradecía uno de los postulados de la relatividad especial de que la velocidad de la luz es la velocidad límite en el universo. Para Einstein la gravedad

adquiere un concepto más geométrico y que esta fuerza en realidad es una manifestación de la curvatura de la tela del espacio-tiempo, causada por la presencia de materia y energía.

Del EP tenemos que en regiones pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducen a aquellas de la relatividad especial. Aparte de que el EP sugiere que la atribución de la gravedad sea la curvatura del espacio-tiempo, implica también que la gravedad es inescapable, porque no hay un objeto que tenga una gravedad nula la cual pueda ser como referencia para hacer la medición de la aceleración debida a la gravedad, de esta manera se acepta la idea que la gravedad no es una fuerza [6].

En la teoría cuántica de campos también se suplanta la idea que la gravedad sea una fuerza, sino que más bien sería un efecto de las vibraciones de cuerdas elementales (también de D-Branas o de objetos en mayores dimensiones) y podría ponerse al mismo nivel que las interacciones electromagnéticas y nucleares. La naturaleza de la gravedad es un problema abierto en la actualidad.

5.2. Las ecuaciones de campo de Einstein

Por el EP sabemos que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, es decir una propiedad geométrica. Por otro lado el principio de covariancia expresa que la ecuación debe ser válida en todos los sistemas de referencia, y por lo tanto debe tener una forma tensorial [11].

Introduciremos el tensor de curvatura de Riemann, la cual nos da una descripción sobre la curvatura de una variedad de cualquier dimensión. Generalmente se presenta como un tensor (1,3) expresada en términos de los símbolos de Christoffel.

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (57)$$

Con el tensor de Riemann, se hace una contracción de sus índices para llegar al denominado tensor de Ricci.

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \quad (58)$$

La contracción lo podemos hacer o es de beneficio porque estamos trabajando en una curvatura de tres dimensiones para pasarnos a un tensor de segundo orden. El tensor de Ricci, asociadas con la conexión de Christoffel es automáticamente simétrica [6].

$$R_{\sigma\nu} = R_{\nu\sigma} \quad (59)$$

Como consecuencia de la simetría del tensor de Riemann, la traza del tensor de Ricci es un escalar de curvatura.

$$R = R^\lambda_\lambda = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \quad (60)$$

siendo $g^{\sigma\nu}$ la métrica inversa definida en la variedad. El escalar de curvatura es muy importante dado que nos proporciona la información sobre la geometría de la superficie, dado que si tiene un valor positivo nos indica una geometría esférica, valor nulo para la geometría plana (euclídeana) y negativa indica una geometría hiperbólica.

Ahora vamos a tratar un poco la identidad de Bianchi, $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]} = 0$. La forma más útil de la identidad de Bianchi proviene de contraer dos veces los subíndices con la ayuda de los tensores métricos inversos $g^{\nu\sigma}$ y $g^{\mu\lambda}$,

$$0 = g^{v\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \quad (61)$$

$$g^{v\sigma} g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \nabla^\mu R_{\rho\mu\nu}^v = \nabla^\mu R_{\rho\mu} \quad (62)$$

$$g^{v\sigma} g^{\mu\lambda} \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} = \nabla_\rho R \quad (63)$$

$$g^{v\sigma} g^{\mu\lambda} \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = \nabla^v R_{\rho\mu\nu}^\mu = \nabla^v R_{\rho\nu} \quad (64)$$

Así la Ec. 61 toma la siguiente forma:

$$0 = \nabla^\mu R_{\rho\mu} + \nabla_\rho R + \nabla^v R_{\rho\nu} \quad (65)$$

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = -\frac{1}{2} \nabla_\rho R \quad (66)$$

Para la derivada covariante, le subimos el índice usando el tensor métrico, $\nabla_\rho = \nabla^\mu g_{\rho\mu}$.

$$\nabla^\mu (R_{\rho\mu} - \frac{1}{2} R g_{\rho\mu}) = 0 \quad (67)$$

El término entre paréntesis se le denomina tensor de Einstein.

$$G_{\rho\mu} = R_{\rho\mu} - \frac{1}{2} R g_{\rho\mu} \quad (68)$$

Por la identidad de Bianchi, la Ec. 68 también lo podemos expresar de esta forma:

$$\nabla^\mu G_{\rho\mu} = 0 \quad (69)$$

Con lo anterior ya hemos visto como esta relacionado el tensor de Einstein con el tensor de curvatura de Riemann y el escalar de curvatura, ahora veremos como esta relacionado el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ con el tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$. La ecuación de Einstein en su forma tensorial es,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (70)$$

donde κ una constante cualquiera. Notamos que al aplicar la derivada covariante $\nabla^\mu G_{\rho\mu} = \kappa \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, la cual expresa la conservación de la energía y momento.

Ahora se presentaran ciertas restricciones tanto físicas como matemáticas sobre como debe ser el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$.

1. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico y esto implica que tiene que ser una función únicamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas.
2. Para el espacio plano $G_{\mu\nu} = 0$
3. El tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ cumple con la ley de conservación de la energía $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ y esto implica que se debe cumplir también $\nabla^\mu G_{\rho\mu} = 0$.

Decimos que la constante $\kappa = 8\pi G$, donde G es la constante de gravitación universal de Newton. De esta manera llegamos a la versión mas conocida de la ecuación de campo de Einstein sustituyendo κ en la Ec. 68 y Ec. 70

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (71)$$

Las ecuaciones de Einstein forman un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden. Las ecuaciones de Einstein tienen 10 componentes, pero en realidad la condición $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ impone 4 ligaduras, de modo que sólo 6 ecuaciones son independientes. Esto implica que de las 10 componentes de la métrica únicamente 6 están determinadas por las ecuaciones de Einstein [11].

En el vacío, se tiene que $T_{\mu\nu} = 0$ y de igual manera $R_{\mu\nu} = 0$, una de las soluciones de esta ecuación es el espacio de Minkowski [6].

5.3. Espacio-tiempo de Minkowski

Después de que Einstein publicará los resultados de su teoría en 1915, poco tiempo después el científico Karl Schwarzschild dio a conocer una solución simple e interesante de la ecuación. Para la obtención de la solución se aplicaron las siguientes condiciones sobre la ecuación de Einstein: el espacio-tiempo debe ser estático (no hay dependencia del tiempo

t), simetría esférica y métrica plana. Bueno, entonces se trata de una solución en el vacío, válida para en el exterior del objeto generador de la métrica, de modo que el tensor de energía-momento es cero, $T_{\mu\nu} = 0$ [12].

Discutiremos ahora sobre la estructura del espacio-tiempo, sus propiedades algebraicas y geométricas. Hay que tener en cuenta que no hay una sola dirección para el tiempo, sino que cada observador ve su propia dirección temporal [11].

El espacio de Minkowski consiste en un espacio continuo 4-dimensional, donde cada punto corresponde a un evento, es decir un evento que ocurre en una posición (x, y, z) en determinado tiempo t es diferente a otro evento en otra posición. A esto se debe del por qué un observador en el pasado ve un vacío diferente a un observador futuro y por tanto la energía es positiva o negativa, dependiendo de la elección del tiempo t .

Cada evento esta caracterizado por un cuadrivector, que viene dado como:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (72)$$

La norma de $\|x^\mu\|$ en el espacio-tiempo de Minkowski esta dada como:

$$\|x^\mu\|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (73)$$

En la definición de norma se introduce implícitamente una métrica,

$$\|x^\mu\|^2 = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (74)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski cuya representación matricial es:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (76)$$

La cual es el elemento de línea que resume las propiedades geométricas del espacio-tiempo. En el espacio-tiempo de Minkowski el tensor de curvatura de Riemann es prácticamente nula, de esta manera el espacio-tiempo de Minkowski puede servir como una buena aproximación a regiones muy pequeñas de la variedad. Como se verán en las siguientes secciones hay

regiones del universo con alta curvatura como cerca de un agujero negro donde es necesario emplear otras métricas [11].

5.4. Métrica de Schwarzschild

En la Teoría de la Relatividad General la única solución con simetría esférica en el vacío es la métrica de Schwarzschild, según el teorema de Birkhoff. En coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) la métrica viene dado como,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (77)$$

donde M es la masa del objeto y G es la constante gravitacional de Newton.

Podemos apreciar que cuando $M \rightarrow 0$, que tiene lugar cuando el objeto masivo que curva el espacio-tiempo desaparece o que el objeto tenga una masa muy pequeña, Ec. 77 tiende a tener esta forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (78)$$

Nos damos cuenta que obtenemos la métrica de Minkowski en coordenadas polares $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$. Con esto podemos decir que la métrica de Schwarzschild generaliza la métrica de Minkowski [6].

5.4.1. Singularidades

Es muy evidente que la Ec. 77 se vuelve indefinida para los valores de $r = 0$ y $r = 2GM$, las cuales se conocen como puntos de singularidad. Podríamos pensar entonces que en alguna región del espacio-tiempo la gravedad es infinita.

El punto de singularidad $2GM$ se le conoce como el Radio de Schwarzschild R_s . Ahora procederemos hacer un análisis sobre si en verdad estas singularidades existen o solo es por el sistema de coordenadas que se maneja.

En términos geométricos, el tensor de Riemann es el que estudia la curvatura de una variedad, por tanto es bueno saber cuando el tensor toma valores infinitos aunque es algo difícil, porque sus componentes dependen de las coordenadas. Pero a partir del tensor se pueden contruir escalares, las cuales no depende de las coordenadas y de ahí podríamos concluir algo.

El primer escalar que podríamos tomar es el escalar de Ricci que viene dado como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, pero también se pueden construir escalares de mayor orden como $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ O $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Si uno de estos escalares adquiere un valor infinito conforme tiende a algún punto, ese punto es una singularidad en la curvatura.

Para la métrica de Schwarzschild tenemos:

$$R = 0 \tag{79}$$

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0 \tag{80}$$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \tag{81}$$

Notamos que para $r = 0$ si tenemos una singularidad en la curvatura, pero al evaluar $r = 2GM$ tenemos un valor finito, la cual indica que solo se escogió mal el sistema de coordenadas, por tanto es aconsejable tener un sistema donde la superficie $r = 2GM$ tenga un buen comportamiento. Es muy interesante saber que aunque $r = 2GM$ no es un punto o región de singularidad, sí que representa una frontera imaginaria entra el universo visible y el interior de un agujero negro, la cual se llama horizonte de eventos [6] .

5.4.2. Horizonte de eventos

Como ya se ha indicado anteriormente en $r = 2GM$ hay una singularidad aparente. Por ejemplo para un reloj en reposo localizada a un radio r ($r > r_s$) cuando sus señales se leen desde el infinito a través de las ondas electromagnéticas, presenta un desplazamiento al rojo igual a:

$$\frac{[ds(\infty)]}{[ds(local)]} = \frac{\sqrt{-g_{00}(r = \infty)}}{\sqrt{-g_{00}(r)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \tag{82}$$

Para la métrica de Schwarzschild la componente $g_{00} = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$. En base a la ecuación anterior tenemos que el desplazamiento al rojo va hacia el infinito cuando $r \rightarrow r_s$. Por lo tanto la esfera de Schwarzschild $r = r_s = 2GM/c^2$ tiene la característica observable de ser una superficie de desplazamiento al rojo infinito [9] .

De igual manera tenemos que la fuerza necesaria para colocar una partícula en reposo a un radio $r > r_s$ tiende al infinito cuando $r \rightarrow r_s$.

Oppenheimer y Snyder (1939), descifraron el significado de estas singularidades que tienen lugar en la esfera de Schwarzschild (Figura 3).

La superficie bidimensional $r = r_s$, se convierte, al agregar la dimensión del tiempo en una superficie tridimensional \mathcal{H} en el espacio-tiempo. La hipersuperficie \mathcal{H} es una subvariedad completamente regular de un espacio-tiempo localmente regular[9].

Para ver la regularidad de \mathcal{H} , se necesita hacer un cambio de coordenadas cerca de $r = r_s$. Por tanto, se puede usar las coordenadas de Eddington-Finkelstein (v, r, θ, φ) , donde $v = t + r_*$, con r_* definido como:

$$r_* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r + 2M \ln \left(\frac{1}{2M} - \frac{1}{r} \right) \quad (83)$$

donde r_* es un tipo de coordenada, denominada como coordenada tortuga. Entonces en este nuevo sistema de coordenadas, la métrica de Schwarzschild adquiere la siguiente forma,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (84)$$

donde efectivamente se puede ver que $r_s = 2M$ no es una región de singularidad mientras que $r = 0$ si es un punto de singularidad, de esta manera la superficie \mathcal{H} es regular.

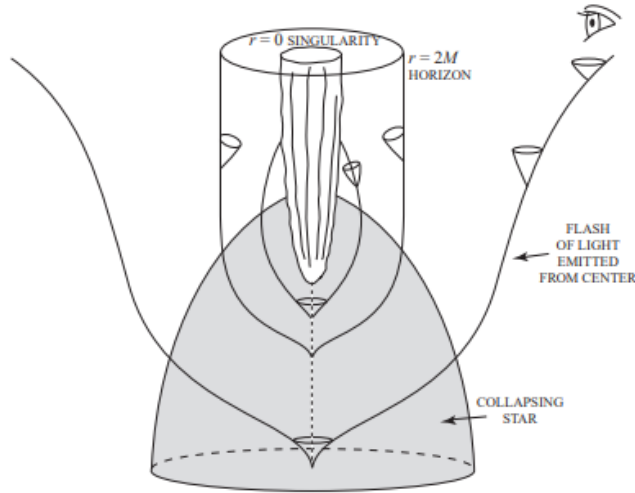


Figura 3: Representación del espacio-tiempo de la formación de un agujero negro [9].

El horizonte de eventos es la historia del espacio-tiempo de una burbuja de luz que se estabiliza bajo la fuerte atracción de la gravedad [9].

De igual manera el horizonte es la superficie de no retorno de un agujero negro. Afuera del agujero negro cualquier partícula puede ir al infinito, pero en su interior ni siquiera las

partículas sin masa (fotones) pueden escapar y cualquier fotón emitido justo sobre esta superficie se mantendrá en movimiento estacionario sobre ella. Ahora bien si una partícula o cuerpo pasa cerca de ella, su trayectoria se verá afectado levemente.

Para un agujero negro de Schwarzschild el horizonte de sucesos tiene un radio de $r = 2M$ y dado que se está trabajando en coordenadas esféricas, el área del horizonte es equivalente al área de superficie de una esfera, $A_{hor} = 4\pi M^2$.

5.5. Agujero negro

Teorema de Birkhoff: Para una distribución con simetría esférica de materia, las ecuaciones de campo de Einstein tienen una solución única [13].

Para un agujero negro estacionario en un espacio-tiempo estacionario tiene un vector de Killing K^a (vector que se define en variedades de Riemann o pseudo-riemanniannas) la cual es normal al horizonte de eventos y la norma del vector en el horizonte es $K^a K_a = 0$. La gravedad de superficie κ está dada como $\nabla^b(K^a K_a) = -2\kappa K^b$, [14].

De acuerdo con el Teorema de Birkhoff, la métrica de Schwarzschild es la única solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, que representa una simetría esférica, de tal manera que el tensor de Ricci, $R_{ab} = 0$.

Dada la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (85)$$

donde $d\Omega^2$ es el elemento de volumen en una 2-esfera. Sabemos que el horizonte de eventos está localizada en $r = 2M$.

Un agujero negro es donde parte del espacio-tiempo existe una aparente singularidad, de esta manera tenemos que la norma del vector de Killing de traslación temporal $\frac{\partial}{\partial t}$ cerca del horizonte del agujero negro es muy pequeño (casi nula).

Ahora se procede a escribir la métrica de agujeros negros en diferentes sistemas de coordenadas.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (-dt^2 + dr_*^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (86)$$

$$= -\frac{2M}{r}e^{-r/2M}e^{(v-\mu)/4M}d\mu dv + r^2d\Omega^2 \quad (87)$$

$$- \frac{2M^3}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega^2 \quad (88)$$

Donde u y v son coordenadas nulas entrantes y salientes, así también U y V son coordenadas de Kruskal entrantes y salientes.

La relación entre las diferentes coordenadas es:

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (89)$$

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (90)$$

$$U = -e^{-u/4M}, \quad V = e^{v/4M} \quad (91)$$

donde los factores de r se pueden considerar como expresiones implícitas de r_* , μ , v o de U , V . La definición de dr_* es muy general y no se puede hacer resolver explícitamente la integral. En las coordenadas de Schwarzschild solo se cubre una parte de la variedad, pero en las coordenadas de Kruskal se cubre todo el espacio-tiempo [14].

Las características de la geometría de un agujero negro están representadas en el diagrama de Penrose.

- Región I y III son planos asintóticos.
- Región II es el agujero negro.
- Región IV es un agujero blanco.
- Para un observador en la región I, \mathcal{H}^+ (futuro) es el horizonte del agujero negro y \mathcal{H}^- es el pasado del agujero negro o el horizonte de un agujero blanco.

5.5.1. Agujeros negros primordiales

Ya se ha indicado que los agujeros negros se forman cuando una estrella colapsa por su propia gravedad y esto tiene lugar en las últimas etapas de vida de la estrella. El experimento LIGO (Large Interferometer Gravitational-Wave Observatory) ha determinado que las estrellas que tienen este fin han de ser supermasivas o de muchas veces la masa del Sol. Pero un agujero negro negro también se puede formar por la alta densidad de materia que había

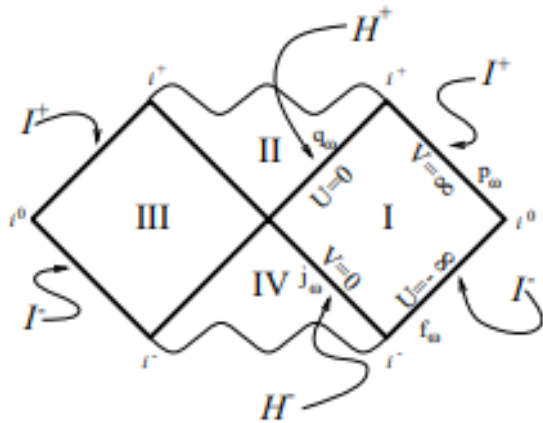


Figura 4: Diagrama de Penrose para un agujero negro eterno [14]

en instantes posteriores al Big Bang y estas se conocen como agujeros negros primordiales (Primordial Black Hole, PBH) [15] [16] .

Los PBH se formaron por el colapso gravitacional que tuvo lugar instantes después del Big Bang por la alta densidad de la materia. La existencia de los PBH fue discutido primero por Stephen Hawking (1971) y por el físico ruso Zeldovich (1966), pero a día de hoy sigue siendo tema de debate.

La masa que pueden tener los PBH depende mucho de la época de formación, pues recordemos que a medida que transcuria el tiempo, la materia se distribuía en el espacio-tiempo. La fluctuaciones de densidad de materia cambia con el tiempo y de esta manera a día de hoy los agujeros negros primordiales podrían cambiar mucho en cuanto a su masa se refiere.

La masa de un agujero negro es casi igual que la cantidad de energía en el interior del horizonte. El concepto que se tiene de un agujero negro clásico es de que no deja escapar luz o cualquier otra radiación en su interior. Sin embargo en 1974 Hawking aplicó la teoría cuántica a los agujeros negros y demostró que estos no eran eternos sino que se evaporaban, por la emisión de partículas.

5.5.2. Agujero negro de Kerr-Newman

La solución Schwarzschild es una de las soluciones mas conocidas y simples de las ecuaciones de campo de Einstein, dado que considera un objeto estático y con simetría esférica, pero en el universo tenemos objetos con carga y con rotación, de manera que se hace necesario estudiar agujeros negros que tengan en cuenta nuevos parámetros.

El agujero negro mas general o que cumple en su totalidad la hipótesis de no pelo, es el

agujero negro de Kerr-Newman, que se empleo para la deducción de la primera ley mecánica de agujeros negros. La métrica de este tipo de agujero negro en coordenadas Boyer-Linquinidst viene dado como [9][6],

$$dS^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}\omega_t^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\omega_\varphi^2 \quad (92)$$

Donde:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad (93)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (94)$$

$$\omega_t^2 = dt - a \sin^2\theta d\varphi \quad (95)$$

$$\omega_\varphi^2 = (r^2 + a^2)d\varphi - a dt \quad (96)$$

$$a \equiv \frac{L}{M} \quad (97)$$

Podemos ver que la Ec. 92 si $\Sigma = 0$ y $\Delta = 0$. Analizando para $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ tenemos que esto es cero, si $r = 0$ y $\theta = \pm\pi/2$ (notamos que el parámetro a no puede ser cero, por tratarse de un agujero negro con rotación), de modo que para este tipo de agujero negro se tiene una región de singularidad (disco de singularidad).

De lo dicho anteriormente Δ representaria una superficie de singularidad.

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 = 0 \quad (98)$$

La Ec. 98 es una función cuadrática con variable r , entonces resolvemos para r .

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (99)$$

La Ec. 99 es conocido como el horizonte de un agujero negro de Kerr-Newman. Esto es muy interesante, ya que a diferencia con el agujero negro de Schwarzschild, el agujero negro de Kerr-Newman tiene dos horizonte en lugar de una (Figura: 5). Tenemos que r_+ se le denomina horizonte exterior y r_- es el horizonte interior y la región que delimitan se denomina como la ergoesfera [12]. Notamos que la Ec. 99 es la que aparece en la Ec. 5 para hacer la deducción de la primera ley mecánica de agujeros negros.

La Ec. 92 representa un agujero negro si y solo si los tres parámetros M , Q y L cumplen con la desigualdad,

$$a^2 + Q^2 \leq M^2 \quad (100)$$

Si la igualdad se cumple $a^2 + Q^2 = M^2$ se le llama agujero negro extremal. Un agujero negro de Schwarzschild nunca puede ser extremal porque $a = Q = 0$ [14]

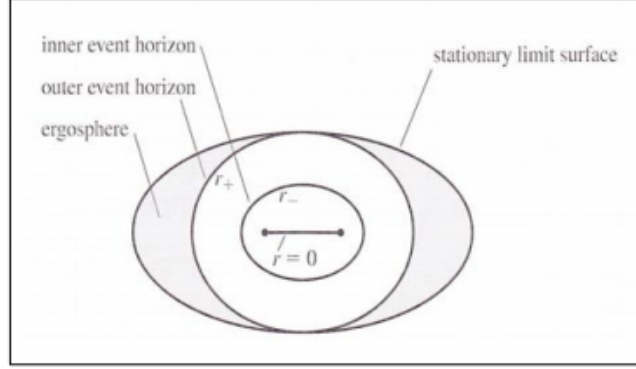


Figura 5: Estructura del horizonte de eventos en la métrica de Kerr-Newman [17]

El agujero negro de Kerr-Newman se caracteriza por estar delimitada por un horizonte de eventos y una ergoesfera, la cual es la diferencia respecto a un agujero negro de Schwarzschild. En la ergoesfera la luz puede escapar todavía pero debido a la rotación del agujero negro tiene lugar una inducción de energía a los fotones.

5.5.3. Métrica de Kerr

En la métrica de Kerr-Newman se trabaja con los tres parámetros descritos en la hipótesis de no pelo, pero suponga que la carga eléctrica del objeto es muy pequeño, tal que $Q \rightarrow 0$ y tal objeto en rotación y sin carga se le conoce como agujero negro de Kerr.

La métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist está dada como:

$$ds^2 = \Lambda_t dt + \Lambda_{t\phi} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \Lambda_\phi d\phi^2 \quad (101)$$

Siendo,

$$\Lambda_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \quad (102)$$

$$\Lambda_{t\phi} = \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (103)$$

$$\Lambda_\phi = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (104)$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (105)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (106)$$

Si se hace el análisis en el plano ecuatorial, esto es $\theta = \pi/2$ entonces $d\theta = 0$ y expresada en coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica se reduce a ,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4Ma}{r} dt d\phi - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2Ma^2}{r^3}\right) r^2 d\phi^2 \quad (107)$$

El análisis que sigue ahora es para agujeros negros que giran al máximo, esto es cuando $a = 1$ y se introduce una circunferencia de corte R por conveniencia [18]. La métrica se convierte entonces en,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M^2}{r} dt d\phi - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-1} dr^2 - R^2 d\phi^2 \quad (108)$$

donde $R^2 = r^2 + M^2 + 2M/r^3$.

Una propiedad notable de este tipo de agujero negro en rotación, es de que parte de su masa M se almacena como energía de rotación (la cual está dentro de la región exterior denominado como ergoesfera) y en teoría esta disponible para su extracción, ya que no es la masa que ha pasado el horizonte de eventos [18].

5.6. Proceso de Penrose para la métrica de Kerr

Es un proceso puramente teórico dado a conocer por Roger Penrose en 1969 y que ahora se considera un resultado importante en la aplicación de los principios de la termodinámica a los agujeros negros.

Penrose propone un mecanismo en el que se puede extraer energía de un agujero negro en rotación. Penrose mismo determinó que esto podría ser poco práctico, pero que de alguna forma era importante en estudios astrofísicos. Un argumento crucial de la idea es la existencia de una región de energía negativa total en la vecindad de un agujero negro que gira [18].

Para la descripción del proceso de Penrose, empecemos por definir los vectores Killing que corresponden a la magnitud de la energía y momento angular en una métrica de Kerr

donde se tiene una rotación máxima $a = 1$, en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. De la Ec. 108, obtenemos los siguientes vectores de Killing:

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0, -\frac{2M^2}{r} \right) \quad (109)$$

$$R_\mu = \left(-\frac{2M^2}{r}, 0, 0, R^2 \right) \quad (110)$$

Ahora nos centramos en las partículas masivas y para ello se va a trabajar con el vector cuadrimento.

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds} \quad (111)$$

Las cantidades que se conservan son la energía E_p y el momento L_p de la partícula.

$$E_p = -m K_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \quad (112)$$

$$L_p = m R_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \quad (113)$$

Para una partícula en la vecindad de un agujero negro de Kerr extremal, tenemos que la energía total por unidad de masa es,

$$\frac{E_p}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{2M^2}{r} \frac{d\phi}{ds} \quad (114)$$

Nos interesa la region del espacio donde la energía es negativa (dentro de la ergoesfera) $E = -K_\mu p^\mu$, procedemos de la siguiente manera:

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{2M^2}{r} \frac{d\phi}{ds} \quad (115)$$

$$\left(\frac{2M - r}{2M^2} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \quad (116)$$

$$R \frac{d\phi}{dt} < R \frac{2M - r}{2M^2} \quad (117)$$

Ahora veremos como esta restricción esta relacionado con la velocidad tangencial de la luz, dado que la velocidad de la luz supone un límite para la velocidad de la materia, ya sea que este a favor o en contra de la dirección de rotación del agujero negro. Si $ds = dr = 0$, la Ec. 108, toma la siguiente forma,

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M^2}{r} dt d\phi - R^2 d\phi^2 \quad (118)$$

Tenemos una ecuación cuadrática, tomamos $d\phi$ como variable.

$$d\phi = \frac{\frac{-4M^2 dt}{r} \pm \sqrt{\frac{16M^4}{r^2} dt^2 + 4R^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2}}{-2R^2} \quad (119)$$

$$R \frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR} \pm \sqrt{\frac{4M^4}{R^2 r^2} + 1 - \frac{2M}{r}} \quad (120)$$

Una aproximación a lo anterior dada por Perepelitsa es:

$$R \frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR} \pm \frac{r - M}{R} \quad (121)$$

La velocidad angular es positiva para ambos valores de r , tal que $r < M$. La gráfica de las Ec. 117 y 121 es la Fig: 6, donde notamos que existe una región de energía negativa pero solo más allá del límite estático y es importante mencionar que para un agujero del tipo Schwarzschild esta región de energía negativa no existe [18].

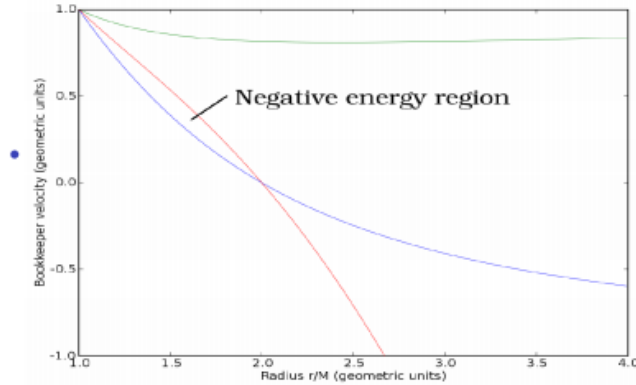


Figura 6: Gráfica del límite de velocidad tangencial de la partícula [18]

Ahora que sabemos que existe una región de energía negativa para el agujero negro de Kerr, se procedera a desarrollar un ejemplo de una persona y una roca que caen en el agujero negro (tanto la persona y la roca se pueden modelar como partículas masivas).

El signo menos de la Ec. 112 se debe a que en el infinito tanto K^μ y p^μ son timelike, así que el producto interno es negativo, entonces con el signo menos de la ecuación se garantiza una energía positiva afuera de la ergoesfera. Sin embargo, dentro de la ergoesfera K^μ se convierte en spacelike, así que las partículas adquieren una energía negativa, $E = -K_\mu p^\mu < 0$

[6].

Una partícula que tiene energía negativa en la ergoesfera, permanecera ahí, pero puede acelerar hasta que su energía sea positiva para poder escapar. Ahora digamos que la persona tiene momento inicial $p^{(1)}$ y la roca $p^{(2)}$, de esta manera el momento y energía del sistema es:

$$p^{(0)} = p^{(1)} + p^{(2)} \quad (122)$$

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)} \quad (123)$$

Siendo $p^{(0)}$ y $E^{(0)}$ el momento y energía inicial del sistema. Las partículas una vez que esten en la ergoesfera, la partícula con momento $p^{(2)}$ se arroja en cualquier lugar del horizonte de eventos, mientras que la otra partícula (persona) puede salir de la ergoesfera. Entonces se tiene que la partícula que cae en el horizonte de eventos tiene energía $E^{(2)} < 0$, de esta manera por la ley de conservación de la energía $E^{(1)} > E^{(0)}$.

La explicación que hay para la energía ganada por la partícula $p^{(1)}$ es de que proviene del agujero negro, específicamente hay una variación en la masa y momento angular, lo que implica que si el proceso se hace muchas veces eventualmente el agujero negro dejara de rotar, en esto consiste el proceso de Penrose [6] [18] .

En el momento en que la partícula de masa m cruza el horizonte de eventos tenemos esta restricción para el momento angular L_P de la partícula.

$$L_P < \frac{E}{\Omega_H} \quad (124)$$

La energía E es negativa y la velocidad angular Ω_H es positiva y de aca se tiene que $L_p < 0$. La caída de la partícula en el horizonte de eventos ocasiona un cambio del momento angular L y masa M del agujero negro expresada como,

$$dL < \frac{dM}{\Omega_H} \quad (125)$$

5.7. Teorema del área de Hawking

En las secciones anteriores se dio una descripción de los agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman, de igual manera se abordó el proceso de Penrose, que consiste básicamente en la extracción de energía de un agujero negro. El proceso de Penrose fue una de las primeras evidencias teóricas de la relación entre la termodinámica y los agujeros negros.

La idea ahora es demostrar la segunda ley mecánica de agujeros negros clásicos, que establece que el área del horizonte de un agujero negro nunca decrece. Para empezar con la prueba, se calcula el área del horizonte de eventos de un agujero negro de Kerr. De la métrica de Kerr, Ec. 101 tenemos que esto se vuelve indefinida si $\Delta = 0$, por tanto hay una singularidad o región de singularidad.

De lo dicho anteriormente el horizonte de eventos de un agujero de Kerr esta localizada en:

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (126)$$

Ahora vamos encontrar los posibles valores de r en la cual la métrica se vuelve indefinida.

$$\Delta(r) = 0 = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (127)$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (128)$$

En el horizonte tenemos una métrica inducida γ_{ij} la cual i y j recorren sobre (θ, ϕ) . Ahora de la métrica de Kerr Ec. 101, decimos que $\Delta = 0$, $r = r_+$, $dr = 0$ y $dt = 0$.

$$\gamma_{ij} dx^i dx_j = ds^2(dt = 0, dr = 0, r = r_+) \quad (129)$$

$$= (r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (130)$$

Para el cálculo del área del horizonte, se va hacer uso de la métrica inducida y recordar que las variables son (θ, ϕ) . El área del horizonte es:

$$A = \int \sqrt{|\gamma|} d\theta d\phi \quad (131)$$

La representación matricial de la métrica inducida es:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} (r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) & 0 \\ 0 & \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (132)$$

Obtenemos el determinante de la métrica inducida $|\gamma| = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$, para luego proceder a resolver la integral doble.

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\phi \quad (133)$$

$$= -2\pi(r_+^2 + a^2) \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (134)$$

La Ec. 134 es similar a la Ec. 5, con la diferencia de que en esa sección se uso $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$, que comparando con la Ec. 5 hace falta el término de la carga Q , que es la distinción entre la métrica de Kerr y Kerr-Newman.

En el análisis del proceso de Penrose, Christodoulou y Riffini (1970) propusieron una ecuación para la masa de un agujero negro Kerr-Newman, que esta relacionada con la carga, el momento angular y la masa irreducible de un agujero negro, que viene dado como:

$$M^2 = \left(M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}} \right)^2 + \frac{L^2}{4M_{irr}^2} \quad (135)$$

siendo M_{irr} la masa irreducible de un agujero negro. Sabemos que en un proceso de Penrose hay pérdida de momento angular y supongase que no hay carga, eventualmente el agujero del tipo Kerr pasara a ser un agujero de Schwarzschild, de este modo M_{irr} representa la masa mínima a la que el agujero negro puede tener bajo este proceso. De lo dicho anteriormente la energía libre que se puede extraer (bajo el proceso de Penrose) de un agujero negro viene dado como $M - M_{irr}$ [9] .

Para demostrar que el área del horizonte de eventos no decrece, es conveniente trabajar en términos de la masa M_{irr} del agujero negro, que esta definido como:

$$M_{irr}^2 = \frac{A}{16\pi} = \frac{1}{4}(r_+^2 + a^2) \quad (136)$$

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 - (Ma)^2}) = \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 - L^2}) \quad (137)$$

Ahora veremos como M_{irr} puede ser afectado por el cambio de masa M y momento angular $L = Ma$. Decimos entonces que $M_{irr} = M_{irr}(M, L)$ y su diferencial total es:

$$dM_{irr} = \frac{\partial M_{irr}}{\partial M} dM + \frac{\partial M_{irr}}{\partial L} dL \quad (138)$$

$$2M_{irr}dM_{irr} = \frac{1}{2} \left(\left(2M + \frac{2M^3}{\sqrt{M^4 - L^2}} \right) dM - \frac{LdL}{\sqrt{M^4 - L^2}} \right) \quad (139)$$

De lo anterior se despeja para dM_{irr} y simplificamos un poco para obtener las siguientes expresiones.

$$dM_{irr} = \frac{1}{4M_{irr}} \left(\frac{(2M\sqrt{M^4 - L^2} + 2M^3)}{\sqrt{M^4 - L^2}} dM - \frac{L}{\sqrt{M^4 - L^2}} dL \right) \quad (140)$$

$$dM_{irr} = \frac{1}{4M_{irr}} \left(\frac{(2M\sqrt{M^2 - a^2} + 2M^2)}{\sqrt{M^2 - a^2}} dM - \frac{a}{\sqrt{M^2 - a^2}} dL \right) \quad (141)$$

La velocidad angular esta definido como:

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 a^2} = \frac{a}{2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2}} \quad (142)$$

Se sustituye la Ec. 142 en la Ec. 141 para llegar a una nueva expresión de dM_{irr} .

$$dM_{irr} = \frac{a}{4M_{irr}} \left(\frac{\Omega_H^{-1}}{\sqrt{M^2 - a^2}} dM - \frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2}} dL \right) \quad (143)$$

$$dM_{irr} = \frac{a}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2}} (\Omega_H^{-1} dM - dL) \quad (144)$$

Dado que, $dL < \frac{dM}{\Omega_H}$, esto inmediatamente implica que $dM_{irr} > 0$. Empleando la relación de la masa irreducible y el área del horizonte de eventos Ec. 136 ,

$$dM_{irr} = \frac{dA}{32\pi M_{irr}} \Rightarrow dA > 0 \quad (145)$$

$$dA = \frac{8\pi a}{\Omega_H \sqrt{M^2 - a^2}} (dM - \Omega_H d) \quad (146)$$

Despejamos para dM .

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dL, \kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2})} \quad (147)$$

Hemos llegado a la primera ley mecánica de agujeros para un agujero negro de Kerr, de la Ec. 146 concluimos que $dA > 0$, que es lo que se quería demostrar y esto es conocida como el teorema del área de Hawking o la segunda ley mecánica de agujeros negros [17][6]. Como se va a desarrollar en el siguiente capítulo, en parte debido al teorema del área, Bekenstein plantea una generalización de la segunda ley de la termodinámica.

Notamos también que de la constante de superficie κ para un agujero de Kerr, se puede derivar el valor de la constante para un agujero negro de Schwarzschild, haciendo $a = 0$ que es el parámetro de rotación relacionado con el momento angular. La constante de gravedad de superficie κ se reduce a,

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (148)$$

que es la expresión que se habia dado para encontrar la forma mas simplificada de la temperatura de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild Ec. 47.

5.8. Constante cosmológica

Las ecuaciones de campo de Einstein originalmente incluía una constante cosmológica Λ , la cual actuaba en contra de la gravedad para mantener un universo estático y no en expansión.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \quad (149)$$

Después de que se descubriera que el universo estaba en expansión, la constante cosmológica quedó obsoleta. Pero en los últimos años nuevos descubrimientos científicos como la expansión acelerada del universo, dio lugar a un nuevo papel protagónico de la constante, la cuál se comportaría como una presión en el vacío y también como una presión dentro de un agujero negro [19].

En la sección de volumen termodinámico del capítulo anterior mencionamos sobre el papel que tendría Λ . Ahora vemos un poco sobre como viene definido esta constante.

De la ecuación de campo de Einstein,

$$8\pi G_N T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (150)$$

Podemos descomponer el tensor momento-energía en $T_{\mu\nu}^{(M)}$ y $T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$, las cuales serían el tensor momento energía de la materia ordinaria y el tensor para el vacío respectivamente.

También tenemos que el tensor momento-energía para el vacío es proporcional a la métrica,

$$T_{\mu'\nu'}^{vac} = -\rho_{vac}\eta_{\mu'\nu'} \quad (151)$$

donde $\eta_{\mu'\nu'}$ es el tensor (0,2) invariante de Lorentz.

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \quad (152)$$

Comparando con un fluido perfecto, el tensor momento-energía vendría dado como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (153)$$

Encontramos que el vacío parece comportarse como un fluido perfecto con una presión isotrópica y de signo opuesto que la densidad de energía.

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (154)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^M - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (155)$$

Agregando la constante cosmológica a la ecuación de campo de Einstein tenemos:

$$8\pi GT_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda \quad (156)$$

De esta manera llegamos que la constante Λ esta relacionado con la densidad de energía en el vacío [6].

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (157)$$

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (158)$$

Aun no sabe muy bien que implicaciones físicas tiene la constante sobre los agujeros negros, dado que se podría pensar como un agente externo que hace trabajo sobre el agujero negro. Las consecuencias de Λ sobre la evolución de los agujeros negros es un problema abierto actualmente en cosmología y no es ninguna sorpresa que la constante aparezca también en la teoría de la termodinámica de agujeros negros.

Generalización de la segunda ley de la termodinámica

Se dará una descripción básica y no formal, tal como se desarrolla en la teoría cuántica de campos de vacío cuántico y par de creación de partículas. Estos temas son la base de la explicación de la radiación de Hawking y evaporación de agujeros negros, la cual supone una violación del teorema del área. En los capítulos anteriores se ha demostrado que un agujero negro puede ganar entropía y en esta parte del trabajo se estudia la entropía desde el punto de vista de la teoría de información y de la mecánica estadística. Por último, se tratará la generalización de la segunda ley de la termodinámica planteada por Bekenstein y se estudiarán dos ejemplos como el oscilador armónico cuántico y gas de fotones cerca de un agujero negro que validan la generalización.

6.1. Vacío cuántico

La idea intuitiva que se tiene cuando se habla de vacío, es en imaginarse un espacio donde no hay nada y es normal pensar eso en nuestra escala, pero en la escala atómica o sub-atómica el vacío como tal deja de existir.

En la Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés) el vacío es el estado de energía mas baja posible de un campo en una determinada región del espacio. En la mecánica clásica las características de vacío está dada por su geometría. En teoría de la relatividad general la dinámica de la geometría guía el movimiento o la trayectoria de la materia, porque la geometría es curvada por la presencia de materia [20]. Está claro que hay una diferencia del concepto de vacío en la física clásica y moderna. Este nuevo concepto de vacío permite dar una explicación sobre las predicciones de la teoría de la termodinámica de agujeros negros como la radiación de Hawking.

Max Planck introdujo su primera ley cuántica, la cual en términos modernos se puede entender que la energía E de un modo electromagnético es proporcional a su frecuencia, $E = \hbar\omega$

$$E = n\hbar\omega, \quad n = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (159)$$

En una segunda revisión Planck deriva una nueva expresión para la energía. Lo hizo resolviendo el problema de un oscilador armónico cuántico.

El operador Hamiltoniano de este tipo de oscilador armónico viene dado como:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (160)$$

La ecuación de Schrödinger para el sistema es,

$$H\psi = E\psi \quad (161)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \quad (162)$$

donde ψ es un estado propio. La energía del sistema con el Hamiltoniano dado, viene expresada como:

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (163)$$

Notamos que las Ec. 159 y Ec. 163 se diferencian por el término extra $\frac{\hbar\omega}{2}$, que actualmente se conoce como fluctuaciones de vacío o energía de vacío cuántico. Esta es una manera básica de entender el vacío cuántico, pero es en la teoría cuántica de campos donde se aborda de una manera mucho más formal el concepto. La Ec. 159 describe una cavidad completamente vacía de radiación en el límite de temperatura cero mientras que la Ec. 163 nos dice que quedan fluctuaciones de campo correspondiente a la mitad de la energía de un fotón por modo en este límite de temperatura. A diferencia de las fluctuaciones térmicas que desaparecen cuando la temperatura tiende a cero, este tipo de fluctuaciones está presente [21].

6.2. Par de creación y aniquilación de partículas

Se sabe que una partícula no puede alcanzar el horizonte de eventos de un agujero negro en un tiempo finito para un observador externo. De modo que una partícula puede caer en el agujero negro, pero tal información le toma un tiempo infinito para un observador

externo. Recientes investigaciones en QFT aseguran que el horizonte de eventos puede reflejar partículas en el estado i con una probabilidad igual al factor de Boltzmann,

$$P = \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z} \quad (164)$$

donde Z es la función de partición, E_i es la energía en el estado i , k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura de Hawking del agujero negro. Ahora la pregunta que surge es, ¿cómo puede el horizonte de eventos causar ese efecto tan grande?.

Una respuesta a la pregunta puede estar en el principio de incertidumbre de Heisenberg.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (165)$$

Porque si tenemos que la longitud de onda de la partícula $\lambda = \hbar/mv$ (relación de De Broglie) es mayor que el radio del horizonte de eventos $R_s = 2GM$, no se puede saber donde esta localizada la partícula en relación al horizonte.

Se puede comparar este efecto que tiene lugar en el horizonte de eventos como una barrera de potencial.

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{En otro lado} \end{cases} \quad (166)$$

Un partícula clásica puede saltar esta barrera durante un tiempo infinito, que es similar en el horizonte de eventos. Sin embargo si se tiene una partícula cuántica, hay una probabilidad que pueda atravesar la barrera de potencial (efecto túnel) o bien ser reflejada, de esta manera una partícula cuántica puede atravesar facilmente el horizonte de eventos [22].

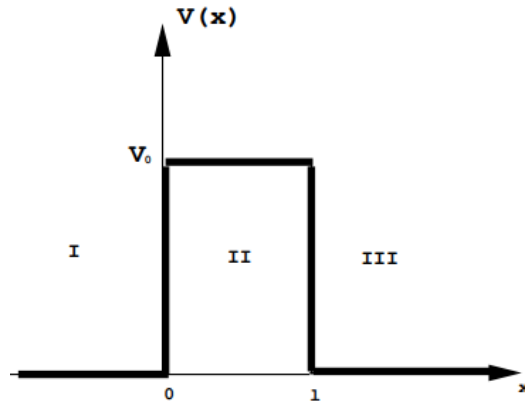


Figura 7: Barrera de potencial [23]

Otro argumento esta basado sobre el fenómeno del par de creación y de la radiación de Hawking cerca del horizonte de sucesos. Una explicación convencional de la radiación de Hawking es la creación del par de partículas cerca del horizonte debido a la energía negativa de vacío. En la creación de partículas elementales por ejemplo, el electrón y el positrón, cualquiera de las dos tiene probabilidades de caer en el agujero y la otra escapar de ella [22].

6.3. Concepto básico de producción de partículas:

La idea básica con la gravedad semiclásica es que, para energías debajo de la escala de Planck, es una buena aproximación tratar la materia en campo cuántico. Consideremos un campo escalar libre $\phi : R^n \rightarrow R$, que cumple con la ecuación de onda clásica.

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0 \tag{167}$$

El campo escalar ϕ es un operador cuántico, la cuál implica que debe cumplir la relación de conmutación canónica, por ejemplo para los operadores momentum p_α y posición $\alpha = x, y, z$, se tiene $[p_\alpha, \alpha] = i\hbar$. Para el campo escalar la relación de conmutacion canónica es,

$$[\phi(t, x^i), \phi(t, y^i)] = \delta^3(x^i - y^i) \tag{168}$$

y además ϕ debe estar definido en un espacio de Hilbert. La idea clave detrás de la producción de partículas cuánticas en un espacio-tiempo curvo, es de que el concepto de partícula depende del observador. En otras palabras depende de la elección del marco de referencia.

Por ejemplo un observador A tiene una coordenada natural de tiempo definido como tiempo propio T . Entonces el observador A percibe las partículas que tienen frecuencias positivas de oscilación en el campo escalar con respecto a su marco de referencia temporal T . Ahora bien, digamos que hay un segundo observador B , quien define las partículas con frecuencia positiva de oscilación en relación a su tiempo t . Hay que aclarar que el número de partículas de frecuencia positiva que mide A puede ser diferente a lo que mide B . La teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo plano es globalmente invariante de Lorentz. Si el marco de referencia de A y B difieren únicamente en la transformación de Lorentz, entonces ellos concordarían en el tipo de partícula [14].

Si el observador A está en un marco de referencia inercial global mientras que el observador B experimenta una aceleración constante. El observador A notará que el espacio-tiempo esta libre de partículas, mientras que B observará un flujo de partículas[14].

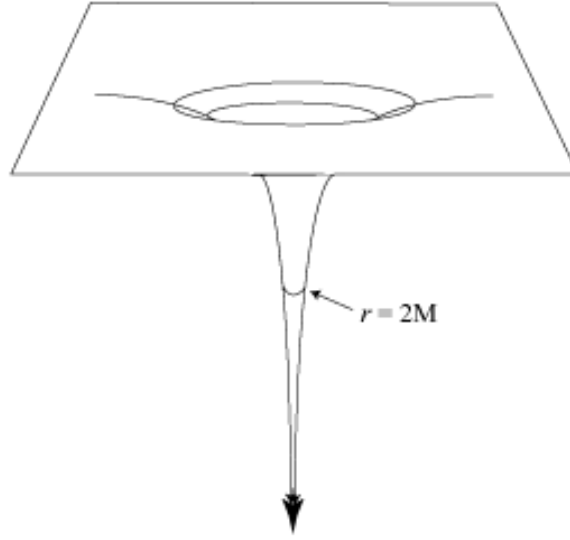


Figura 8: Un cuerpo masivo causa una gran curvatura del espacio-tiempo [24] .

6.4. Teoría de información y la termodinámica

En termodinámica tenemos que la entropía de un sistema para macroestado Ω esta dada como:

$$S = \kappa_B \ln \Omega \quad (169)$$

Sin embargo un macroestado consiste en un número grande de microestados que no es fácil medir de manera directa. Ahora supongamos que tenemos N diferentes microestados igualmente probables.

$$N = \sum_i n_i \quad P_i = \frac{n_i}{N} \quad (170)$$

De esta manera P_i denota la probabilidad de que el sistema esté en algún microestado. Lo anterior impone una restricción que es $\sum_i P_i = 1$. El sistema tiene una entropía total S_{tot} , que es la suma de la entropía de cada macroestado S y la entropía asociada con cada microestado S_{micro} .

$$S_{tot} = S + S_{micro} \quad (171)$$

La entropía total está dada como $S_{tot} = \kappa_B \ln N$. Para los microestados podemos definir una entropía promedio que viene expresada como:

$$S_{micro} = \langle S_i \rangle = \sum_i P_i S_i \quad (172)$$

donde $S_i = \kappa_B \ln n_i$ es la entropía de un microestado con probabilidad P_i . Por lo tanto,

$$S = S_{tot} - S_{micro} = \kappa_B (\ln N - \sum_i P_i \ln n_i) \quad (173)$$

Obtenemos la expresión para la entropía de Gibbs.

$$S = -\kappa_B \sum_i P_i \ln P_i \quad (174)$$

En la teoría de la información hay una entropía asociada a la información que se tiene, que viene dada por la fórmula de Shannon $S = -kP \ln P$ y es evidente la analogía que tiene con la expresión de Gibbs. Podemos decir que las incertidumbres que se tienen sobre los microestados están basadas por la limitación que se tiene de saber sus propiedades. Lo anterior indica que hay una vinculación fuerte de la termodinámica con la teoría de información [25].

Cuando una partícula cae en un agujero negro, podemos decir que la información que llevaba consigo no se puede recuperar. Así también cuando tiene lugar la radiación de Hawking no hay garantía de que la información que se tenía antes puede ser decodificada, dado que parte del sistema es inaccesible, que es lo que está detrás del horizonte de eventos.

6.4.1. Información y entropía de un agujero negro

Hay una relación importante entre la información y la entropía de un sistema. Una gran aleatoriedad en el sistema quiere decir que hay una gran entropía y que la información que se tiene de la misma es poca. Ahora supongamos que podemos saber el número de configuraciones del sistema, de esta manera podemos encontrar el número n de estados y la probabilidad P_n de estos estados [8].

La entropía asociada con el sistema está dada por la fórmula de Shannon,

$$S_n = - \sum_n P_n \ln(P_n) \quad (175)$$

Cada vez que se disponga de nueva información sobre el sistema, puede considerarse que impone ciertas restricciones a las probabilidades P_n . Por ejemplo la información puede ser que varias probabilidades P_n sean nulas. Tales restricciones a P_n resultan un decrecimiento en la función de entropía.

$$\Delta I = -\Delta S \quad (176)$$

En la Ec. 176 $-\Delta S$ es el decrecimiento de la entropía que le corresponde a cierto cambio de información ΔI [8].

Un ejemplo muy común sobre la relación entre la disminución de la entropía y ganancia de información, es la compresión isotérmica de un gas ideal en un contenedor. La cual se conoce como la disminución de la entropía y por otra parte la información acerca de la configuración interna del gas aumenta. Después de la compresión las moléculas del gas se pueden localizar con mayor precisión[8].

De todo esto, se puede preguntar: ¿cuál es el origen de la entropía de agujeros negros? claro está que la termodinámica es una aproximación a una descripción estadística mas fundamental de la entropía donde tenemos que es,

$$S \sim \ln \Omega(E) \tag{177}$$

tal que $\Omega(E)$ es el número de microestados del agujero negro. De esta manera la entropía es mayor mientras el sistema (agujero negro) tenga un número mayor de microestados [26]. La hipótesis de no pelo nos dice que el agujero negro clásico se puede caracterizar por tres parámetros, mientras que un agujero negro en una teoría de gravedad cuántica o donde se tenga que tomar en consideración los efectos cuánticos es evidente que la hipótesis deja de funcionar.

La segunda ley de la termodinámica puede entenderse mejor en el contexto de la teoría de información. Convencionalmente la medida de información es el "bit", la cual se puede definir cuando para la información disponible, la respuesta a una pregunta es "sí o no". De acuerdo con la Ec. 176 es también igual numéricamente a la entropía máxima que se puede asociar a la respuesta "sí o no". De esta manera hay una probabilidad $P = 1/2$ de que la información sea "sí o no". Por tanto la entropía de Shannon en este caso viene dado como [8] ,

$$S = \frac{1}{2} \ln(2) \tag{178}$$

6.5. Incremento mínimo del área de un agujero negro

Ahora bien si pensamos en una partícula que está cerca de un agujero negro de Kerr con masa en reposo μ y radio b (la cual no debe ser mas pequeña que la longitud de onda de Compton), por el teorema del área de Hawking cuando la partícula o sistema de partículas cae en el agujero negro hay mínimo incremento de área posible.

$$(\Delta A)_{min} = 2\mu b \tag{179}$$

Bekenstein demuestra que la entropía asociada a este incremento mínimo del área del horizonte viene dado como [8],

$$S_{BH} = \frac{1}{2} \ln 2\hbar^{-1} A \quad (180)$$

6.6. Generalización de la segunda ley de la termodinámica

Analícemos de nuevo el caso en el que un cuerpo con determinada entropía cae en un agujero negro de Kerr. Dado que una vez que se cruce la línea del horizonte de eventos no hay forma de saber que pasará con el cuerpo y con sus entropía. La segunda ley de la termodinámica no ayuda mucho en este caso, dado que no hay forma de que un observador externo pueda hacer una medición directa de que la entropía del universo no disminuye.

Por lo hecho en secciones anteriores, sabemos que entropía está relacionado con el área del horizonte de eventos del agujero negro. En otras palabras, la desaparición de un cuerpo en el agujero negro es recompensada por el aumento del área del horizonte [8] [6].

$$S \propto A_{hor} \quad (181)$$

6.6.1. Enunciado de la generalización de la segunda ley (GSL):

La entropía común en el exterior del agujero negro más la entropía del agujero negro nunca disminuye [8].

Denotemos el cambio de entropía que sufriría el agujero negro como S_c . Ahora también denotamos el cambio de entropía común en el exterior del agujero negro como $\Delta S = -S_c$.

De esta manera, la generalización de la segunda ley de la termodinámica viene dado como:

$$S' \equiv S + S_{BH} \quad (182)$$

$$\Delta S' \equiv \Delta S + \Delta S_{BH} \geq 0 \quad (183)$$

donde S es la entropía de la materia afuera del agujero negro y S_{BH} es la entropía del propio agujero negro, según el teorema del área de Hawking.

Con lo anterior hay un problema cuando se considera la radiación de Hawking. Por la ley de conservación de la energía, el flujo de partículas debe ser compensada por la disminución de materia del agujero negro y durante este proceso de evaporación, el área del agujero negro disminuye. Es evidente que la segunda ley generalizada falla cuando se tiene en cuenta la radiación de Hawking [27].

6.6.2. Oscilador armónico cuántico

Se tiene dos partículas con masa $\frac{1}{2}m$, cada una conectada por un resorte cuyo constante de elasticidad es ζ . Y ahora digamos que el oscilador esta dentro de una caja de forma esférica a una temperatura T .

Se aborda como un problema de ensemble canónico. La función de partición para un sistema de $|n\rangle$ estados cuánticos vendría dado de la siguiente manera:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}, \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (184)$$

$$Z = \left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-kx} + \dots\right) \quad (185)$$

Para fines prácticos decimos que $k_B = 1$ y además se hace la siguiente sustitución $y = e^{-x}$.

$$Z = \left(y^0 + y^1 + \dots + y^k + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \leq 1 \quad (186)$$

Lo anterior es una serie geométrica y sabemos que la suma de los n términos converge a un valor.

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (187)$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|n\rangle$ es:

$$P_n = \frac{e^{-nx}}{Z} = e^{-nx}(1 - e^{-x}) \quad (188)$$

Usando la fórmula de Shannon, tenemos que la entropía de la caja viene dado como,

$$S = - \sum_n P_n \ln(P_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (189)$$

$$S_c = - \sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} [\ln(1 - e^{-x}) - nx] \quad (190)$$

$$S_c = - \sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} \ln(1 - e^{-x}) + \sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} nx \quad (191)$$

Trabajando la primera sumatoria.

$$\sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} \ln(1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \sum_n e^{-nx} \quad (192)$$

$$= (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \sum_n (e^{-x})^n \quad (193)$$

Tenemos una serie geométrica $\sum_n (e^{-x})^n$, de esta manera llegamos a obtener :

$$\sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} \ln(1 - e^{-x}) = \ln(1 - e^{-x}) \quad (194)$$

Para la segunda sumatoria.

$$\sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} nx = (1 - e^{-x})x \sum_n e^{-nx} n \quad (195)$$

$$\sum_n e^{-nx} n = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2} \quad (196)$$

Por lo tanto:

$$\sum_n (1 - e^{-x})e^{-nx} nx = x(e^x - 1)^{-1} \quad (197)$$

De esta manera la entropía del sistema viene dada por la siguiente expresión.

$$S_c = -\ln(1 - e^{-x}) + x(e^x - 1)^{-1} \quad (198)$$

La energía de un oscilador armónico cuántico es:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (199)$$

De esta manera la energía vibracional promedio del oscilador esta dado como:

$$\langle E \rangle = \sum_n P_n E_n \quad (200)$$

$$\langle E \rangle = \sum_n e^{-nx} (1 - e^{-x}) \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (201)$$

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \sum_n (1 - e^{-x}) n e^{-nx} + \frac{\hbar\omega}{2} \sum_n (1 - e^{-x}) e^{-nx} \quad (202)$$

Para la primera sumatoria obtenemos:

$$\sum_n (1 - e^{-x}) n e^{-nx} = \frac{(1 - e^{-x}) e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{(e^x - 1)} \quad (203)$$

Para la segunda sumatoria obtenemos:

$$\sum_n (1 - e^{-x}) e^{-nx} = (1 - e^{-x}) \sum_n (e^{-x})^n = 1 \quad (204)$$

De esta manera, llegamos a una expresión mucho más simplificada de la energía promedio.

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \right] \quad (205)$$

Ahora bien si la caja se deja caer en el agujero negro de Kerr, ya hemos visto que el área del horizonte sufre un cambio Ec. 179 , $\Delta A = 2\mu b$, donde b es el radio exterior de la caja y μ es la masa en reposo. Así también se tiene que la entropía mínima Ec. 180 es $S_{BH} = \frac{1}{2} \ln 2\hbar^{-1} A$.

$$\Delta S_{BH} = \frac{1}{2} \ln 2\hbar^{-1} \Delta A = \mu b \ln 2\hbar^{-1} \quad (206)$$

Por el teorema virial, tenemos la relación entre la energía cinética promedio y el potencial.

$$\langle E \rangle = \frac{V}{2} \quad (207)$$

Además se tiene que la energía potencial de un oscilador armónico está dada como:

$$V = \frac{1}{2} \varsigma (\Delta y)^2 = 2\langle E \rangle \quad (208)$$

Si $\varsigma = \frac{1}{4} m\omega^2$ y $b = \Delta y$

$$\Rightarrow b > \sqrt{\langle E \rangle} \omega^{-1} m^{-1/2} \quad (209)$$

Empleando la Ec. 206,

$$\Delta S_{BH} > (m + \langle E \rangle) \sqrt{\langle E \rangle} m^{-1/2} (\hbar\omega)^{-1} \quad (210)$$

donde $\mu = (m + \langle E \rangle)$ dado que la caja que contiene los osciladores puede tener cierta masa.

Ahora hacemos $\Delta S = -S_c$

$$\Delta S = \ln(1 - e^{-x}) - x(e^x - 1)^{-1} \quad (211)$$

De la Ec. 205 tenemos:

$$\hbar\omega = \frac{\langle E \rangle}{(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2}} \quad (212)$$

La cual lo sustituimos en la Ec. 210, para obtener una nueva expresión del cambio que sufre el agujero negro,

$$\Delta S_{BH} > \varrho^{-1/2} [(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2}] (\varrho + 1) \ln 2 \quad (213)$$

donde se ha hecho la sustitución $\varrho = m\langle E \rangle^{-1}$.

Aplicando la GSL:

$$\Delta(S_{BH} + S) > \varrho^{-1/2} \left[(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2} \right] (\varrho + 1) \ln 2 + \ln(1 - e^{-x}) - x(e^x - 1)^{-1} \quad (214)$$

Recordemos que el objetivo es demostrar que $\Delta(S_{BH} + S) \geq 0$. Para eso hay que verificar si la expresión del lado derecho tiene un valor mínimo x_{min} , si ese fuera el caso, para tal valor la entropía debe ser positiva.

Definimos la función $f(x)$,

$$f(x) = \varrho^{-1/2} \left[(e^x - 1)^{-1} + \frac{1}{2} \right] (\varrho + 1) \ln 2 + \ln(1 - e^{-x}) - x(e^x - 1)^{-1} \quad (215)$$

Derivamos la expresión del lado derecho respecto a x , tal que $\frac{df(x)}{dx} = 0$

$$0 = \varrho^{-1/2} [-(e^x - 1)^{-2}] (\varrho + 1) \ln 2 + \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})} - \frac{1}{e^x - 1} + \frac{x}{(e^x - 1)^2} \quad (216)$$

$$0 = -\varrho^{1/2} \left[\frac{1}{(e^x - 1)^2} \right] (\varrho + 1) \ln 2 + \frac{x}{(e^x - 1)^2} \quad (217)$$

De esta manera encontramos que efectivamente $f(x)$ tiene un valor mínimo positivo.

$$x_{min} = x = \varrho^{1/2} (\varrho + 1) \ln 2 \quad (218)$$

Recordar que ϱ es positivo, porque tanto la masa como la energía son positivas. De esta manera sustituyendo el valor de x_{min} en la función $f(x)$, tenemos que se cumple que $\Delta(S_{BH} + S) \geq 0$ tal como puede verse en la figura 9.

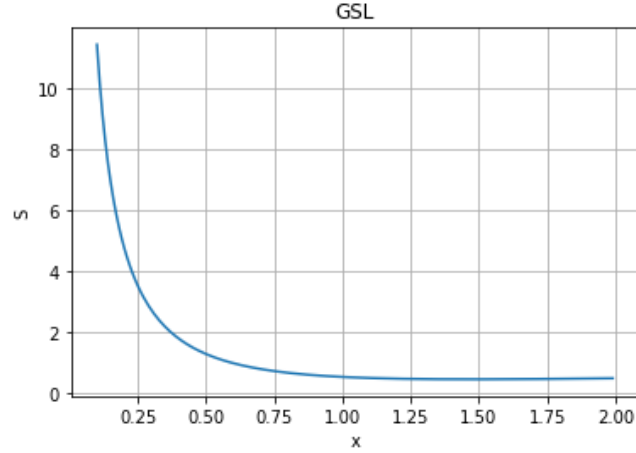


Figura 9: Generalización de la segunda ley de la termodinámica, aplicado a un oscilador armónico.

6.6.3. Gas de fotones o de luz

Este ejercicio nos permitira ver como las fluctuaciones se convierten en una limitación para la aplicación de la GSL. Se va abordar el problema teniendo en cuenta que se aplican todavía los principios de la óptica geométrica o que por lo menos sea una aproximación válida. Consideremos que el gas de fotones esta en equilibrio térmico a un temperatura T , esto implica que hay una entropía máxima para una energía dada [8].

Emplearemos las mismas expresiones de entropía y energía del ejercicio anterior. Empecemos con la definición tradicional de densidad de estados ρ .

$$dN(E) = \rho dE \quad (219)$$

$$N(E) = \int_0^{\infty} \rho dE \quad (220)$$

Siendo $\rho = 2\omega^2 V (2\pi)^{-3} d\Omega$, donde V es el volúmen y $d\Omega$ es el ángulo sólido (aplicado a nuestro problema, $d\Omega = 4\pi$).

Entonces la entropía y energía total vienen dados como:

$$S_{tot} = N(E)S = \int_0^{\infty} \rho S dE \quad (221)$$

$$\langle E \rangle_{tot} = N(E)\langle E \rangle = \int_0^{\infty} \langle E \rangle \rho dE \quad (222)$$

Donde S es a Ec. 198 y $\langle E \rangle$ es la Ec. 205, pero omitiendo el término $(1/2)\hbar\omega$ para que la integral no diverja. De esta manera la entropía total viene expresada como:

$$S_{tot} = \int_0^\infty \frac{8\pi V \hbar}{(2\pi)^3} \omega^2 \left[\frac{\hbar}{T} \frac{\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} - \ln(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}) \right] d\omega \quad (223)$$

DE la relacion de Planck para la energía de un fotón $E = \hbar\omega$ tal que $dE = \hbar d\omega$, hemos reemplazado dE por $d\omega$.

$$S_{tot} = \frac{8\pi V \hbar}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega^2 \left[\frac{\hbar}{T} \frac{\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} - \ln(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}) \right] d\omega = 4 \left(\frac{8\pi V \hbar}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{T}{\hbar} \right)^3 \frac{\pi^4}{45} \quad (224)$$

Ahora para la energía total:

$$\langle E \rangle_{tot} = \frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} d\omega = \left(\frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{T}{\hbar} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} \quad (225)$$

Ahora hacemos la división $S_{tot}/\langle E \rangle_{tot}$, para tener una relación entre energía y entropía. Para fines prácticos ya solo vamos a escribir S y $\langle E \rangle$.

$$\frac{S}{\langle E \rangle} = \frac{4}{3} T^{-1} \Rightarrow S = \frac{4}{3} \langle E \rangle T^{-1} \quad (226)$$

Nos damos cuenta que obtenemos una expresión igual para la entropía de un cuerpo negro a temperatura T .

El gas de fotones se acerca al agujero negro de Kerr y a medida que se acerca se infiere que la entropía del gas se mantiene inalterada. Cuando el gas de fotones cae en el agujero negro de Kerr, el cambio de entropía en nuestro universo visible es:

$$\Delta S_c = -\frac{4}{3} \langle E \rangle T^{-1} \quad (227)$$

Ahora vamos a determinar el cambio de entropía del agujero negro. De la primera ley mecánica de agujeros negros Ec. 23 notamos que el incremento del área A es minimizada cuando el momento angular L ganada por el agujero negro es maximizada para una energía dada $\langle E \rangle$.

El incremento mínimo del área causada por un gas de fotones dado por Bekenstein es:

$$\Delta A \geq \beta M \langle E \rangle \quad (228)$$

Ahora para obtener el cambio mínimo de la entropía del agujero negro empleamos $S_{BH} \geq (\frac{1}{2} \ln 2) \beta M \hbar^{-1} \langle E \rangle$ y sustituimos el nuevo valor de A .

$$\Delta S_{BH} \geq \left(\frac{1}{2} \beta \ln 2 \right) M \hbar^{-1} \langle E \rangle \quad (229)$$

Bekenstein postula que la óptica geométrica es aplicable en nuestro caso, siempre y cuando la longitud de onda de la luz sea muy pequeña en comparación con la dimensión característica del agujero negro de Kerr de masa M . De esta manera tenemos, $\lambda \ll M$.

La relación entre la frecuencia angular ω y la velocidad de la luz es, $c = 2\pi\lambda\omega$, ahora digamos que para el haz hay una frecuencia característica ω_c esto inmediatamente implica que $\omega_c \gg M^{-1}$. Además tenemos que $T_c^{-1} \approx (\omega_c \hbar)^{-1}$.

La entropía del gas de fotones se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta S_c = -\frac{4}{3} \langle E \rangle (\omega \hbar)^{-1} = -\frac{4}{3} \langle E \rangle \hbar^{-1} M \quad (230)$$

$$|\Delta S_c| \ll \frac{4}{3} \langle E \rangle \hbar^{-1} M \quad (231)$$

Para un agujero negro de Kerr $\beta = 0.538$, de modo que la Ec. 229 es menor comparado con Ec. 230. De lo dicho previamente la GSL no se cumple porque $\Delta S_{BH} + \Delta S_c < 0$.

Ahora se va hacer el análisis para las temperaturas $T < T_c$. Se selecciona una temperatura T , que uno quiere que sea la más pequeña y dispone de que todas las frecuencias sean $\omega < \omega'_c$. Como en el procedimiento anterior tenemos que $\omega_c \gg M^{-1}$, tal qe ω_c no esta relacionado con T .

Ahora el resultado que relacionaba la entropía S y la energía $\langle E \rangle$ va a cambiar. Nos centramos en el caso $T \ll \hbar\omega'_c$, de esto inmediatamente sigue que $x = \frac{\hbar\omega_c}{T} \gg 1$.

Vamos hacer una aproximación con la entropía $S \approx xe^{-x}$ y la energía $\langle E \rangle \approx \hbar\omega e^{-x}$ considerando $x \gg 1$. Empleando las Ec. 221 y Ec. 222, la nueva entropía del gas de fotones es:

$$S = \frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3 T} \int_0^\infty \omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} d\omega = 6 \frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3 T} \left(\frac{T}{\hbar} \right)^4 \quad (232)$$

La nueva energía promedio del gas vendría dada por la siguiente expresión:

$$\langle E \rangle = \frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} d\omega = 6 \frac{8\pi V \hbar^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{T}{\hbar} \right)^4 \quad (233)$$

De esta manera la entropía y la energía promedio del gas de fotones estan relacionados como:

$$S = \langle E \rangle T^{-1} \Rightarrow S_c = -\langle E \rangle T^{-1} \quad (234)$$

Por tanto el cambio de entropía del universo visible es:

$$\Delta S_c = -\langle E \rangle T^{-1} \quad (235)$$

Relacionado con $\Delta S_{BH} \geq (\frac{1}{2}\beta \ln 2) M \hbar^{-1} \langle E \rangle$ implica entonces que $T_c = (\frac{1}{2}\beta \ln 2) M \hbar^{-1}$. Dado que

$$T < T_c \equiv \hbar \left(\frac{1}{2} \beta M \ln 2 \right)^{-1} \quad (236)$$

entonces $\Delta S_{BH} + \Delta S_c$ es negativo, la cuál contradice la GSL.

Para la resolución de la paradoja anterior, se tiene que en el régimen $T < T_c$ las fluctuaciones estadísticas ya dominan, la cual indica que es necesario considerarlos para tener una imagen completa del problema.

Empecemos por calcular el número de cuántos hay en el gas, teniendo el número de cuantos por nodo $(e^x - 1)^{-1}$,

$$N = \int_0^\infty \rho(e^x - 1)^{-1} dE \quad (237)$$

$$N = \frac{8\pi V \hbar}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} d\omega = \frac{16\pi V T^3}{(2\pi)^3 \hbar^2} \zeta(3) \quad (238)$$

donde $\zeta(3)$ es la función zeta de Riemann.

Del resultado anterior, Bekenstein por conveniencia logra tener una representación aproximada considerando que $\omega > \omega_c$. Además se supone que $\frac{\hbar\omega'_c}{T_c} \gg 1$ y que $T = T_c$,

$$N \approx \frac{v}{M^3} \frac{d\Omega}{4\pi} \delta^{-3} (\delta M \omega'_c)^2 e^{-\delta M \omega'_c} \quad (239)$$

Donde $\delta = \frac{1}{2}\beta \ln 2$ ($0.2 \leq \delta \leq 2.8$). Para que el haz de luz caiga en el agujero negro $\frac{d\Omega}{4\pi} \ll 1$, así también tenemos que $M \omega'_c \gg 1$, de la Ec. 239 se puede ver que el volumen que ocupa cada cuanto es $\approx M^3$, pero antes ya habíamos mencionado que para que el haz de luz puede caer en el agujero negro la sección del haz de luz no debía ser mayor que M^2 . Por tanto el concepto que se esta dando teniendo $T < T_c$ no cumple con la GSL, así que la

descripción del haz continuo que cae en el agujero negro no es válido debido a las grandes fluctuaciones de energía en el haz o gas de fotones [8].

De lo dicho anteriormente, parece ser que entonces $\langle E \rangle$ ya no es una buena medida de la energía real. Abordamos el problema desde el punto de vista cuántico, la cual cae uno a la vez en el agujero negro. Entonces reemplazamos $\langle E \rangle$ por $h\omega$ que es el cuanto de energía en la Ec. 228

$$\Delta S_{BH} \geq \left(\frac{1}{2} \beta \ln 2 \right) M\omega \quad (240)$$

Así también se tiene por la teoría de información que la entropía asociada a un cuanto de energía es $-\frac{1}{2} \ln 2$. Esto implica que:

$$\Delta S_{BH} + \Delta S_c \geq \frac{1}{2} \beta \ln 2 M\omega - \frac{1}{2} \ln 2 \quad (241)$$

Ya que $\frac{1}{2} \beta > 0.268$ y que $M\omega \gg 1$ implica que $\Delta S_{BH} + \Delta S_c$ sea una cantidad positiva. De esta manera se verifica la segunda ley generalizada de la termodinámica para la entrada de cada cuanto [8].

6.7. Radiación de Hawking

Como ha se ha indicado en capítulos anteriores la radiación o efecto de Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero negro formado por colapso gravitacional o por las altas densidades de materia. Esta emisión de partículas se da porque en la inmediatez externa del horizonte de eventos que debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío, se crean partículas virtuales o también denominadas como par de partícula y antipartícula .

Tanto la partícula como la antipartícula pueden atravesar la barrera de potencial del horizonte de eventos (efecto túnel) y caer en el interior del agujero negro con una probabilidad que depende de la gravedad de superficial κ ,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla^\mu K^\nu \nabla_\mu K_\nu|_{hor} \quad (242)$$

la cantidad es constante y mide cuán rápido el vector de Killing K^μ (generador de traslaciones temporales) se convierte en un género de espacio [28].

En el interior del agujero negro, el vector Killing es género espacio y la partícula virtual pasa a formar parte de la realidad. La partícula con energía positiva (o negativa) no puede aniquilarse con su compañera porque está ha caído en el agujero negro, de modo

que escapa en el infinito, dando lugar a un flujo de partículas [29]. Es importante mencionar que la partícula y antipartícula tienen la misma probabilidad de caer en el agujero negro.

Bekenstein y Wheeler, en un experimento mental se dieron cuenta de la violación de la segunda ley de la termodinámica. El experimento mental consiste en hacer una mezcla de una taza de té caliente con agua fría creando así entropía, ahora bien si se arroja la mezcla en un agujero negro, se habrá hecho desaparecer junto con la mezcla la entropía creada, ya que no hay forma de verificar el cambio producido en la masa M , carga Q y momento angular L [29].

Cuando Bekenstein asignó entropía a los agujeros negros, pensó que la entropía debía ser una función de M , Q y L con la propiedad natural de que la función fuese creciente tal como sucede con la entropía de cualquier sistema físico aislado [29].

En la segunda mitad del siglo XX hubo muchos intentos por formular un principio de entropía de los agujeros negros y fue el físico británico Stephen Hawking, quien formuló el teorema del área, que como ya se ha estudiado, está estrechamente relacionado con la entropía. El enunciado del teorema del área en relatividad general viene de la siguiente manera:

Teorema del área de Hawking: Si el tensor energía-impulso $T_{\mu\nu}$ satisface la condición débil de energía $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ para todo v^μ de tipo tiempo o nulo y suponiendo como cierta la conjetura de censura cósmica, entonces el área del horizonte de sucesos de un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función no decreciente del tiempo [6] [7].

Apartir del teorema del área de Hawking, Wheeler propuso que la entropía del agujero negro, debe ser monótona creciente y una función del área del horizonte de eventos, A_{hor} . De esta manera se soluciona el problema de la violación de la segunda ley de la termodinámica, dado que al momento en que la mezcla de té caliente y agua fría cae en el agujero, causaría un aumento del área del agujero y por tanto su entropía.

Wheeler en su tesis doctoral, empleando la primera ley mecánica,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_{hor}dL + \Phi_{hor}dQ \quad (243)$$

y comparándola con la variación de energía de un sistema termodinámico con energía E , potencial Φ y rotando a una velocidad angular Ω ,

$$dE = TdS + \Omega dL + \Phi dQ \quad (244)$$

por simple inspección llega a la conclusión que los agujeros negros deben tener temperatura.

$$T_{BH} = C^{-1} \frac{\kappa}{8\pi} \quad (245)$$

Lo anterior significa que, si un agujero negro tiene temperatura, entonces debe irradiar energía. Por ejemplo si un cubo de hielo se coloca cerca de una fogata, en determinado tiempo el hielo se derrite debido al flujo de calor del cuerpo de mayor temperatura. Evidentemente, el flujo de partículas o de energía en un agujero negro es mucho mas complicado de describir ya que en este trabajo no se entro a estudiar la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo, que es donde se puede dar un argumento mucho mas formal y no es suficiente con decir que el flujo debe existir porque el agujero negro tiene temperatura, sino que también tiene que ver las fluctuaciones de vacío cuántico que tiene lugar en el horizonte de eventos.

6.8. Evaporación de los agujeros negros

Una consecuencia importante de la emisión de partículas de un agujero negro es la evaporación de los propios agujeros negros. Si hay una emisión de partículas se puede pensar que hay una violación del principio de conservación de la energía, porque es como crear energía de la nada y de esta forma Hawking concluyó que los agujeros negros debían evaporarse o en otra palabras debía haber una disminución de masa M en el tiempo.

La ley de Stefan-Boltzmann establece que un cuerpo negro emite una radiación térmica que es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura [30],

$$E_B = \epsilon \sigma T_H^4 \quad (246)$$

donde tenemos que σ es la constante de Stefan-Boltzmann, ϵ es el coeficiente de emisividad y $T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M \kappa}$ es la temperatura de Hawking para el agujero negro. Para fines prácticos decimos que $\hbar = c = \kappa = G = 1$. De esta manera tenemos que $T_H \sim \frac{1}{M}$ y el área del horizonte de eventos es $A_{hor} \sim M^2$.

E_B es la potencia de emisividad en unidad de área, de modo que si multiplicamos por el área del horizonte de eventos, llegamos a una expresión de la potencia de emisividad:

$$W = \epsilon \sigma T_H^4 A_{hor} \quad (247)$$

Como bien sabemos la potencia es la energía del cuerpo por unidad de tiempo (en este caso hay un cambio de energía en determinado tiempo), $W = \frac{dE}{dt}$. En mecánica clásica se tienen expresiones que relacionan la energía con la masa y en la relatividad especial de Einstein también se tiene una relación de masa y energía, $E = mc^2$, como consecuencia de su nueva visión del espacio-tiempo.

De esta manera encontramos que la razón de decrecimiento de la masa del agujero negro está dada como,

$$\frac{dM}{dt} = -\epsilon\sigma T^4 A_{hor} \quad (248)$$

Para un agujero negro de Schwarzschild donde $T_H \sim 1/M$ y $A_{hor} \sim M^2$, su tiempo de vida es proporcional a su masa M^3 [2],

$$\tau \sim 10^{71} \left(\frac{M}{M_o} \right)^3 \text{ [s]} \quad (249)$$

donde M_o es la masa del Sol.

Búsqueda de pruebas experimentales

Los resultados que se han obtenido y las generalizaciones que se han hecho son puramente teóricos. En la actualidad hay una gran cantidad de resultados desarrolladas en el marco de la teoría de la termodinámica de agujeros negros. En las siguientes páginas se dará a conocer las investigaciones que lleva a cabo el telescopio FERMI para la detección de agujeros negros primordiales (PBH), que según la teoría en la actualidad deberían estarse evaporando. El descubrimiento de agujeros negros y de materia oscura (ultimamente se ha postulado los PBH como candidato a materia oscura), sería un avance para la aceptación de la teoría y además en el desarrollo de una teoría que logre explicar el origen y evolución de nuestro universo.

7.1. Búsqueda de la emisión de rayos gamma de agujeros negros primordiales

Los agujeros negros clásicos tal como se describe en la teoría de la relatividad general no tienen asociada una temperatura. Por lo tanto no hay emisión de partículas y el agujero negro es eterno.

Hawking, Bekenstein, Penrose y entre otros científicos fueron los pioneros en el desarrollo de la teoría de la termodinámica de agujeros negros en la década de los 70. Los nuevos modelos que se plantearon sobre el universo temprano, una de sus predicciones es la formación de agujeros negros primordiales. Una de las formas que se podrían tener para la detección de este tipo de agujeros negros que no se formaron por el colapso estelar sino por las altas densidades de materia segundos después del Big Bang, es la emisión de rayos gamma producidos por la radiación de Hawking.

El concepto de temperatura de agujeros negros fue introducido como una forma de resolución de la paradoja de la pérdida de información de la materia que cae en un agujero negro. De esta manera Hawking propuso la creación de pares en el horizonte de eventos de un agujero negro con temperatura,

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k} \approx 10^{-7} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} [K] \quad (250)$$

donde M es la masa del agujero negro y M_{\odot} es la masa solar. Se puede notar que la T_{BH} es menor en comparación con temperatura de la radiación cósmico de fondo de microondas que es aproximadamente 2.72 K (CMB, por sus siglas en ingles) y eso es una de las razones de la dificultad de detectar la radiación de Hawking de agujeros negros primordiales (PBH).

Los PBH con masa mucho menores que la masa de Planck ($\sim 10^{-5}$ g) pudieron haber sido creados durante un universo temprano. PBH creados en un tiempo t después del Big Bang han de tener una masa proporcional a la masa dentro del horizonte de partículas en un tiempo t .

$$M(t) \approx 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23}} \right) [g] \quad (251)$$

Para el Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés) de partículas la vida aproximada de un PBH es:

$$\tau \approx \left(\frac{M}{10^{10}g} \right)^3 [s] \quad (252)$$

Los PBH que se formaron en el universo temprano con una masa $M_* = 5 \times 10^{14}$ g tienen una vida cerca de la edad del universo y en estos momentos estarían en la fase final de su evaporación. un PBH con masa M_* , tiene una temperatura de $T_{BH} \approx 20$ MeV.

Para las observaciones se han encontrado restricciones sobre la tasa de evaporación de un PBH al hacer la observación de ráfagas de emisión de rayos gamma en pocos segundos. En particular un PBH de $M \sim 10^9$ g, tiene una temperatura $T_{BH} \approx \left(\frac{10^{10}}{M_{BH}} \right)$ TeV ~ 10 TeV y un tiempo de vida de 0.4 s. En el contexto del SM, en la búsqueda de PBH hay que encontrar rayos gamma de alta energía ($100 \approx \text{GeV} < E < \approx 50 \text{ TeV}$) con telescopios Cherenkov.

En esta sección enfatizaremos el trabajo que ha estado realizando el Fermi LAT (Fermi Large Area Telescope), la cual es sensible a rayos gamma de 20 MeV a 300GeV. De esta manera, PBH con masa $M < 15$ tiene una temperatura $T_{BH} > 10$ MeV, emite rayos gamma que pueden ser detectados por el telescopio [16].

7.1.1. Búsqueda de candidatos de PBH usando el Telescopio Fermi

El telescopio Fermi, examina el cielo cada tres horas y logra tener una exposición casi uniforme y al tener un área de $1 m^2$, le permite ser muy sensible. Las detecciones características de un PBH sugieren que este podría tener un radio de $R \sim 0.01$ pc, haciendo una observación de 4 años, se estima entonces que el Fermi LAT es sensible a una tasa de evaporación de:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V * t} \approx 6 \times 10^4 [pc^3 yr^{-1}] \quad (253)$$

donde tenemos que $V = 4\pi R^3/3$ y $t = 4$ años. Para encontrar los candidatos a PBH en el catálogo 3FGL primero hay que excluir los puntos de fuente astrofísicas conocidas como blazars. Así también se excluyen las fuentes que están dentro de los 10° respecto al plano galáctico.

El análisis de Fermi LAT se a latitudes altas porque: (a) se espera que los PBH estén distribuidos de manera isotrópica a una distancia de detección de 0.03pc mientras que las fuentes astrofísicas están a lo largo del plano galáctico, (b) la asociación con blazares es mas fácil a latitudes altas.

Si se supone que la población de PBH tiene una tasa constante de evaporación $d\rho/dt = const$ y a la vez se supone una distribución uniforme de densidad de PBH en la vecindad de la Tierra. Entonces una tasa de evaporación constante implica que la derivada de la densidad de PBH esta relacionado con la temperatura del PBH como [16],

$$\frac{d\rho_{PBH}}{dT} \propto T^{-4} \quad (254)$$

7.2. Búsqueda de materia oscura y agujeros negros primordiales

Las ondas gravitacionales (GW, por sus siglas en inglés) detectadas en 2015 por la colisión de dos agujeros negros puede ser un indicio también de la existencia de materia oscura (DM, por sus siglas en inglés). Según las investigaciones actuales, la materia oscura estaría distribuido en el halo galáctico y las partículas masivas de poca interacción como los WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles), Axiones y entre otros son los candidatos principales para serlo. Pero en los últimos años también se ha propuesto que los agujeros negros primordiales (PBH) podrían ser un candidato serio para la DM.

Los dos agujeros negros de $30M_\odot$ detectados por LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) podrían ser PBH. Hay una restricción para que un PBH pueda ser considerado un candidato para DM ya que su masa debe estar en este rango.

$$30M_{\odot} \leq M \leq 100M_{\odot} \quad (255)$$

Consideremos dos agujeros negros que se aproximan entre si con una velocidad relativa, v_{pbh} . El par de agujeros negros se unen gravitacionalmente si las GW exceden la energía cinética inicial. La sección transversal de este proceso estada dado como,

$$\sigma = \pi \left(\frac{85\pi}{3} \right)^{2/7} R_s^2 \left(\frac{v_{pbh}}{c} \right)^{-18/7} \quad (256)$$

donde R_s es el radio de Schwarzschild y c la velocidad de la luz. Cuando los dos cuerpos masivos se acercan entre si, empiezan a girar mas rápido generando las distorsiones en el espacio-tiempo hasta fusionarse en una sola[31], que por el teorema del área de Hawking tendría que ser un agujero mucho mas grande. La idea que LIGO haya podido detectar materia oscura seria algo revolucionario en este campo de la astrofisica, ya que por medio de las ondas gravitacionles no solo se estarian estudiando la fusión de agujeros negros sino que también las propiedades de la materia oscura y su influencia en la evolución de las galaxias.

Las observaciones indican que la densidad de masa cósmica media de DM es,

$$\rho_{dm} \simeq 3.6 \times 10^{10} M_{\odot} M_{pc}^{-3} \quad (257)$$

Como se ha mencionado, la distribución de materia oscura en la Vía Láctea por ejemplo, forma el halo galáctico y esto ha sido ampliamente estudiado y se sabe que son regiones de alta densidad de materia la cual encaja muy bien con el concepto que se tiene sobre los PBH. Así mismo los PBH tienen una distribución espacial mucho mas parecida a la que sería la materia oscura en comparación con la materia lumínica y además la variación de la masa de los PBH también concuerda con la existencia de un espctro de materia oscura, que es lo mismo decir que la densidad de este tipo de materia puede cambiar y no es uniforme en el espacio-tiempo [31].

La detección de los agujeros negros primordiales supondría un apoyo importante en el desarrollo de la teoría de agujeros negros y la vez se tendría la oportunidad de verificar conceptos importantes de la termodinámica de agujeros negros como la entropía, evaporación y entre otros. Además significaría un triunfo para la física teórica.

Bekenstein (1973) propuso una generalización de la segunda ley de la termodinámica a partir del teorema del área de Hawking, la cual incluye la entropía de un agujero negro. Cuando la materia cae en el agujero, la entropía de la materia no se pierde sino que causa un aumento del área del horizonte y por la analogía entre la segunda ley mecánica de agujeros y la termodinámica, esto implica un aumento de entropía del agujero negro. De lo dicho anteriormente, se hace evidente una generalización de la segunda ley.

Uno de los objetivos del trabajo es la réplica de resultados importantes de la teoría: con los cálculos realizados en cuenta propia se obtuvieron los resultados como la primera ley mecánica de agujeros (Ec. 23), entropía Bekenstein-Hawking (Ec. 36), temperatura de Hawking (Ec. 46), teorema del área (Ec. 146) y resolución de los problemas de un sistema de oscilador armónico cuántico (Ec. 214 y Ec. 218) y gas de fotones (Ec. 241) cerca de un agujero negro de Kerr-Newman, para la verificación de la generalización de la segunda ley de la termodinámica.

Así también se hizo un estudio sobre la analogía entre las leyes de la mecánica de agujeros negros y la termodinámica, la entropía desde el punto de vista de la teoría de la información y de la mecánica estadística, evaporación de agujeros negros (explicación conceptual de la radiación de Hawking), la relación entre la presión de vacío y la constante cosmológica.

Uno de los objetivos que también se logró, fue la realización de un resumen no exhaustivo sobre conceptos generales como la ecuación de campo de Einstein, espacio-tiempo de Minkowski, las diferentes métricas, horizonte de eventos y el proceso de Penrose. De igual manera se dio a conocer la investigación actual que ha estado realizando el equipo científico del Telescopio Fermi, para la detección de rafagas de rayos gamma proveniente de la evaporación de agujeros negros primordiales (PBH). Por último se dio un resumen de la propuesta que ha surgido de que los agujeros negros que produjeron las ondas gravitacionales detectados por LIGO, pueden ser materia oscura, esto debido a que se ha sugerido a los agujeros negros como candidatos a materia oscura y, por tanto, la teoría de termodinámica de agujeros negros se extiende a más campos de la cosmología y de la astrofísica.

-
- [1] S. W. ; B. J. Hawking y C. B., «The Four Laws of Black Hole Mechanics», *Springer-Verlag, Physical*, pág. 10, 1973.
 - [2] S. Carlip, «Black hole thermodynamics», *General relativity and quantum cosmology*, vol. 1, n.º 1410, pág. 50, 2015.
 - [3] S. Hawking, «Particle Creation by Black Holes», *Springer-Verlag, Physical*, pág. 22, 1975.
 - [4] D. N. Page, «Hawking radiation and black hole thermodynamics», *Astrophysics*, vol. 1, n.º 203, pág. 46, 2004.
 - [5] T. Johannsen, «Testing the no-Hair Theorem with observations of Black Holes in the Electromagnetic Spectrum», *Quantum gravity*, vol. 1, n.º 1602, pág. 33, 2016.
 - [6] S. Carrol, «Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity», Pearson New International edition, 2004, pág. 513.
 - [7] M. Aiello, «Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros en Relatividad General», en *Teorías de gravedad, propiedades termodinámicas e irreversibilidad*, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2010, pág. 146.
 - [8] J. Bekenstein, «Black holes and entropy», *Physical Review Letters*, vol. 1, n.º 2333, pág. 36, 1973.
 - [9] T. Damour, «The entropy of black holes: a primer», *Astrophysics*, vol. 1, n.º 0401160, pág. 51, 2004.
 - [10] C. Nunez, «Entropía de los agujeros negros», en *La paradoja de la pérdida de información*, IAFE, CONICET, 2006, págs. 59-60.
 - [11] B. Janssen, «Teoría de la relatividad general», en *Principio de la equivalencia*, Universidad de Granada, España, 2013, págs. 137-148.
 - [12] J. Guerrero, «El agujero negro de Kerr», en *El agujero negro de Schwarzschild*, Universidad de Granada, España, 2017, págs. 4-9.
 - [13] E. Boero, «Teorema de Birkhoff», en *Perturbaciones Axiales de Espacio-Tiempo esféricamente simétricos*, Universidad Nacional de Córdoba, 2011, pág. 27.

- [14] J. Traschen, «An introduction to black holes evaporation», *General Relativity and Quantum Cosmology*, vol. 1, pág. 33, 2000.
- [15] K. e. a. Inomata, «Inflationary primordial black holes as all dark matter», *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, vol. 1, n.º IPMU17-0009, pág. 7, 2017.
- [16] F. L. Collaboration, «Search for gamma-ray emission from local primordial black holes with the Fermi Large Area Telescope», *Astrophysics*, pág. 16, 2018.
- [17] S. Sterren, «Horizons and Penrose process», en *Black Hole Entropy*, Amsterdam University College, 2012, pág. 57.
- [18] D. Perepelitsa, «Spinning Black Holes Energetics», *Physics*, pág. 4, 2017.
- [19] S. e. a. Hyun, «Thermodynamic volume and the extended Smarr relation», *General Relativity and Quantum Cosmology*, pág. 21, 2017.
- [20] G. Paroanu, «The Quantum Vacuum», *Quantum Physics*, pág. 21, 2017.
- [21] S. e. a. Reynaund, «Casimir effect and vacuum energy», *Quantum Physics*, pág. 10, 2002.
- [22] V. Flambaum, «Tunneling into black hole, escape from black hole, reflection from horizon and pair creation», *General Relativity and Quantum Cosmology*, pág. 3, 2004.
- [23] H. Rosu, «Mecánica Cuántica I», *Physics*, pág. 202, 2001.
- [24] J. Pastor, «Relatividad General: la geometría de un espacio-tiempo curvo», Departamento de matemática, Universidad de Murcia, 2010, pág. 110.
- [25] S. Blundell y B. Katherine, «The second Law», en *Concepts in Thermal Physics*, University of Oxford, 2006, pág. 483.
- [26] G. Horowitz, «Black hole, Entropy and Information», *Astrophysics, General Relativity and Quantum Cosmology*, pág. 8, 2007.
- [27] R. Wald, «Black hole, Entropy and Information», *General Relativity and Quantum Cosmology*, pág. 46, 2001.
- [28] S. Ross, «Black hole thermodynamics», *General Relativity and Quantum Cosmology*, pág. 44, 2005.
- [29] C. Fernandez, «Radiación de Hawking», *Revista Mexicana de Física*, pág. 14, 2010.
- [30] S. Hod, «Hawking radiation and the Stefan-Boltzmann law: The effective radius of the black-hole quantum atmosphere», *General Relativity and Quantum Cosmology*, n.º B 757,121, pág. 6, 2016.
- [31] S. Bird, «Did LIGO detect dark matter?», *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, vol. 1, n.º 1602, pág. 33, 2016.

10.1. Simetrías

Considere una métrica en el espacio plano dado como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (258)$$

Sabemos que la métrica tiene simetría traslacional si $x \rightarrow x + \epsilon$ las cosas se mantienen invariantes. la simetría existe porque los coeficientes de la métrica no dependen de x, y . De esta manera podemos escribir,

$$x' = x + \epsilon^x \quad y' = y \quad (259)$$

siendo ϵ^x constante. Notemos que $dx' = dx$ y $dy' = dy$, por lo que tenemos una métrica igual a Ec. 258

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 \quad (260)$$

La métrica Ec. 258 no solo tiene simetrías traslacional sino que también tiene simetría rotacional respecto al origen. Entonces escribimos la métrica Ec. 258 en coordenadas polares:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (261)$$

Hacemos un cambio a las coordenadas,

$$r' = r \quad \theta' = \theta + \epsilon^\theta \quad (262)$$

donde ϵ^θ es constante. Donde claramente tenemos que la métrica Ec. 261 permanece sin cambio.

10.2. Vectores Killing

Ahora se va a tratar la simetría en términos mucho más generales. Dígase que se tiene un variedad \mathcal{M} con coordenada ξ^μ . Consideremos la métrica en estas coordenadas $g_{\mu\nu}(\xi)$. Supongase que se hace un cambio infinitesimal a las coordenadas.

$$\xi'^\mu = \xi^\mu + \epsilon^\mu(\epsilon) \quad (263)$$

La métrica cambiaría como:

$$g'_{\mu'v'}(\xi') = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi'^{\mu'}} \frac{\partial \xi^v}{\partial \xi'^{v'}} g_{\mu\nu}(\xi) \quad (264)$$

El objetivo es verificar si la nueva métrica tiene la misma forma funcional que la métrica anterior.

$$g'_{\mu'v}(\xi') = g'_{\mu v}(\xi) + g'_{\mu'v',\lambda}(\xi)\epsilon^\lambda \quad (265)$$

La forma funcional de la métrica permanece sin cambio bajo el cambio de coordenadas si,

$$g'_{\mu'v}(\xi) = g_{\mu'v'}(\xi) \quad (266)$$

Ahora notemos que para la Ec. 263

$$\frac{\partial \xi'^\mu}{\partial \xi^\mu} = \delta_{\mu'}^{\mu'} + \epsilon^{\mu'}_{,\mu} \quad (267)$$

Por lo que se puede escribir

$$\xi^\mu = \xi'^\mu(\epsilon) - \epsilon^\mu(\xi) \approx \xi'^\mu - \epsilon^\mu(\xi') \quad (268)$$

De lo anterior tenemos:

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi'^{\mu'}} = \delta_{\mu'}^{\mu} - \epsilon^{\mu}_{,\mu'} \quad (269)$$

De Ec. 264

$$g'_{\mu'v'}(\xi') = g_{\mu'v}(\xi) - \epsilon^{\mu}_{,\mu'} g_{\mu v'}(\xi) - \epsilon^{v}_{,v'} g_{\mu'v}(\xi) \quad (270)$$

Para Ec. 265 se tendría la nueva expresión

$$g'_{\mu'v'}(\xi) = g_{\mu'v'}(\xi) - \epsilon^{\mu'}_{,\mu} g_{\mu v'}(\xi) - \epsilon^{v'}_{,v} g_{\mu'v}(\xi) - g_{\mu'v',\lambda}(\xi)\epsilon^\lambda \quad (271)$$

Para que la condición Ec. 266 se cumpla, se tendría que ,

$$\epsilon^{\mu'}{}_{,\mu} g_{\mu\nu'}(\xi) + \epsilon^{v'}{}_{,v} g_{\mu'v}(\xi) + g_{\mu'v'}{}_{,\lambda}(\xi) \epsilon^\lambda = 0 \quad (272)$$

Ahora bajando los indices a ϵ y manipulando un poco se llega a una nueva representación para Ec. 272.

$$\epsilon_{v'}{}_{,\mu'} + \epsilon_{\mu'}{}_{,v'} - 2\Gamma_{\mu'v'}^{k'} \epsilon_{k'} = 0 \quad (273)$$

La cual es equivalente a la siguiente expresión:

$$\epsilon_{v';\mu} + \epsilon_{\mu;v} = 0 \quad (274)$$

Los vectores que cumplen lo anterior se les denominada vectores Killing. Esto es una condición puramente geométrico sobre los vectores ϵ y no depende del sistema de coordenadas en la que esta la métrica. Dígase que se tiene un campo vectorial ϵ^μ que cumple con Ec. 274, entonces se puede tomar cada punto de la variedad del espacio-tiempo y moverlo por un número infinitesimal por este vector. Es importante mencionar que la simetría de rotación y traslación en el espacio plano estan dados por un campo vectorial adecuada. Un ejemplo de lo anterior es de dada una métrica,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (275)$$

donde no hay dependencia de x, y, z , entonces los tres vectores Killing que representan las tres traslaciones son:

$$X^\mu = (1, 0, 0) \quad Y^\mu = (0, 1, 0) \quad Z^\mu = (0, 0, 1) \quad (276)$$

Para encontrar las simetrías rotacionales, hacemos un cambio de coordenadas.

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (277)$$

La métrica Ec. 275 en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (278)$$

De esta manera se encuentran las componentes en cartesianas de los tres vectores rotacionales de Killing:

$$R^\mu = (-y, x, 0) \quad S^\mu = (z, 0, -x) \quad T^\mu = (0, -z, y) \quad (279)$$

10.3. Tensor momento-energía

El principio de equivalencia nos da una idea o descripción del campo gravitatorio. En relatividad general se hace referencia sobre un espacio-tiempo curvo y lo que causa este efecto es la masa y la energía. Los objetos en el espacio-tiempo tienen masa, energía y momento, porque están en movimiento. Dado que la relatividad es una teoría que trata con una gran cantidad de partículas es muy importante trabajar con campos. De esta manera es muy útil tratar el sistema como un fluido o caracterizarlo por funciones continuas en el espacio-tiempo. El objeto que describe el momento y la energía de este fluido perfecto es el tensor momento-energía [11]. Un fluido perfecto es aquel fluido que puede caracterizarse completamente por dos cantidades, densidad de energía ρ y presión isotrópica p .

En un marco de referencia en reposo y en un espacio-tiempo plano, el tensor momento-energía tiene esta forma:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (280)$$

Cuando se está en un espacio-tiempo con curvatura, $T^{\mu\nu}$ adquiere una nueva forma. La representación anterior para el tensor momento-energía no es suficiente dado que se quiere algo que funcione en cualquier marco de referencia [6]. Así que la forma general del tensor momento-energía para un fluido perfecto viene dado como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (281)$$

Recordemos que $\eta^{\mu\nu}$ se refiere al espacio-tiempo plano de Minkowski y $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la cuadrivelocidad. Si se tiene cualquier otra métrica $g^{\mu\nu}$ el tensor tendría la siguiente forma:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (282)$$

El tensor $T^{\mu\nu}$ tiene la propiedad de ser simétrica y de cumplir con la ley de conservación, esto es cuando $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. En general la presión y la densidad de energía no son variables independientes y la relación entre ellas se le llama ecuación de estado $p = p(\rho)$. Hay veces en la que se propone una relación lineal entre ambas variables, esto es

$$p = \omega\rho \quad (283)$$

donde ω es un parámetro de la ecuación de estado. Considerando una métrica de un universo en expansión, que quiere decir que las secciones espaciales dependen del tiempo

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (284)$$

siendo $a(t)$ un factor de escala, se puede encontrar que la densidad de energía viene dado como:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (285)$$

Dependiendo del valor de ω , se puede decir si se está trabajando con radiación o materia. Por ejemplo con $\omega = 0$ es para materia o polvo, $\omega = 1/3$ para la radiación y en el vacío $\omega = -1$. Empleando Ec. 285 y sustituyendo los posibles valores de ω se tiene

$$p = 0 \quad (\text{materia}); p = \frac{1}{3}\rho \quad (\text{radiación}); p = -\rho \quad (\text{vacío}) \quad (286)$$

Es interesante ver que en el vacío la presión es distinta de cero y además nos damos cuenta que tiene un valor negativo, lo que significa que es una presión repulsiva que hay entre dos cuerpos. A esto se le denomina constante cosmológica y la termodinámica de agujeros negros reafirma que debe existir una presión de vacío.