

**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

Facultad de Ciencias y Humanidades

**El experimento Gravity Probe B: Probando el universo de Einstein**

Roberto Amilcar Hernández Chacón

Guatemala

2007







## **El experimento Gravity Probe B: Probando el universo de Einstein**



**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

Facultad de Ciencias y Humanidades

**El experimento Gravity Probe B: Probando el universo de Einstein**

Trabajo de graduación presentado  
Por Roberto Amilcar Hernández Chacón  
para optar al grado de  
Licenciado en Física

Guatemala

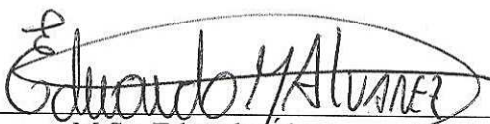
2007



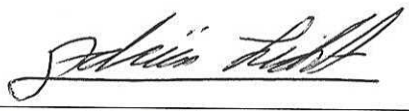
Vo. Bo.:

(f)   
Licenciado Adrián Licht  
Asesor

Tribunal:

(f)   
M.Sc. Eduardo Alvarez

(f)   
M.Sc. Irene Aguilar

(f)   
Lic. Adrian Licht

Fecha de Aprobación: 12 de Junio de 2007



## Prefacio

Sinceramente, no recuerdo (ni creo que exista) un momento particular y clave en el cual haya decidido dedicar mi vida a esta maravillosa y fascinante aventura del intelecto humano que es la física. Lo que sí tengo presente es, desde muy pequeño, mi insaciable curiosidad – curiosidad satisfecha en un sin número de veces por mi padre – por conocer y comprender el mundo que nos rodea.

Fue durante mi tercer año de estudios secundarios que mi vida tomó un giro radical: cursé mi primera clase de física – donde encontré una forma de saciar mi hambre de conocimiento – y, más importante aún, conocí a la persona que tuvo la paciencia y dedicación de iniciarme en el maravilloso mundo de la física; esta persona es Abel Pérez, un físico panameño, con el cual estaré eternamente agradecido.

Mis ansias de conocimiento se fueron acrecentando conforme iba culminando mis estudios secundarios, y después de entrar en contacto con alguno que otro material divulgativo (por ejemplo la revista *Sky and Telescope*), sentí una inmediata atracción por el campo de la astrofísica y la cosmología. Aquellos objetos de estudio, maravillosos, lejanos, misteriosos y poseedores de propiedades físicas que nuestras mentes ni siquiera son capaces de concebir en su total magnitud, fueron el último aliciente que necesitaba para estudiar física.

Así inicié mis estudios en la Universidad del Valle de Guatemala, donde mis expectativas respecto de la carrera eran, básicamente, que esta me otorgara una sólida formación, adecuada para continuar mis estudios de postgrado. Pero resulta ser que, me topé con una grata e inesperada sorpresa: un fiel compañero a lo largo de este viaje, Edgar Xutuc, quien en estos cuatro años me ha brindado su apoyo y compañía, y a quien le deseo lo mejor.

Sin embargo, encontré mucho más que eso; me percaté que la ventaja de estudiar una carrera como física en un país como Guatemala es que, los departamentos de ciencias ‘puras’, más que departamentos, son como familias. Sería una injusticia no mencionar el papel fundamental que jugó la figura de Dorval Carías, quien más que un catedrático, ha tenido la inmensa bondad de ser un amigo y que, gracias a un sinnúmero de consejos y pláticas, le debo gran parte de mi educación, no sólo académica, sino personal. De igual forma, deseo agradecer al Licenciado Eduardo Álvarez, quien tuvo la gentileza de apoyarnos durante toda nuestra carrera, otorgándonos las oportunidades académicas adecuadas. También merece mención la Licenciada Irene Aguilar, quien siempre ha velado y buscado mi desarrollo profesional y personal.

Mientras cursaba el último año de mi carrera, me encontraba en un gran aprieto: no poseía un tema de graduación, y en ese momento, las posibilidades de llevar un curso de gravitación eran muy escasas. Pero fue justamente en ese instante que, Álvaro Véliz, mi auxiliar, compañero, catedrático, pero sobre todo mi estimado amigo, quien acababa de retornar de Holanda me comentó acerca de un artículo de Kip Thorne que había leído

en su viaje. El artículo era acerca del Gravity Probe B, el campo gravitomagnético y las conexiones con la astrofísica.

Ciertamente, desde el primer instante, el tema me llamó mucho la atención. La idea de estudiar las pruebas sobre las cuales se fundamentaba aquella majestuosa teoría que era capaz de describir los objetos con los que soñaba de niño resultaba fascinante e increíblemente atrayente. Tristemente mi respuesta en aquel tiempo fue que mi dominio de la Relatividad General era prácticamente nulo y, por lo tanto, el tema me era totalmente inaccesible.

Fue aquí, donde Adrián Licht, sin que se le notificara con suficiente tiempo, tuvo la inmensa generosidad de aceptar impartir el Seminario de Tópicos Avanzados de la carrera. Indudablemente, el tema que elegimos para el seminario fue una breve introducción a la Relatividad General. Poco tiempo después, le comenté la idea del Gravity Probe B, solicitándole que fuese mi asesor para el presente trabajo. Para mi grata sorpresa Adrián, sin conocerme durante un periodo de tiempo considerable, aceptó y es por eso que, en éste punto, deseo mostrar mi más sincero agradecimiento a la excelente e implacable labor de Adrián, ya que gracias a su pericia y dominio del tema, junto con su dedicación, disponibilidad incondicional y amabilidad, es el principal responsable que permitió la elaboración de éste trabajo.

Por otro lado, quiero agradecer a mi familia, quienes me han mostrado su apoyo incondicional desde el primer momento en que les manifesté mi deseo de estudiar física. En especial, quiero darle las gracias a mi padre, Federico Hernández, por ser un magnífico ejemplo de superación y por haber inculcado siempre en mí la responsabilidad y el trabajo duro. A mi madre, Patricia, quien siempre ha tenido palabras sabias y tiernas en los momentos más difíciles, y a mi hermano Alejandro, por ser mi mejor amigo y compañero de toda la vida. Además deseo darle las gracias a Yvonne, por mostrarme que algunas de las cosas más fantásticas y bellas de ésta vida no pertenecen al campo de la física o la matemática.

Por último, deseo dar las gracias al profesor Sean Carroll; primero, por haber elaborado su magnífico texto que sirvió como base para éste trabajo, y segundo, por haber tenido la amabilidad de permitirme usar varias de sus figuras para la presente monografía.

Lo poco que he realizado hasta éste momento espero tan sólo sean mis primeros pasos en éste camino del conocimiento de las ciencias, porque anhelo escalar poco a poco la montaña del conocimiento para así un día, el cual espero no sea muy lejano, poder retribuir a los artífices o colaboradores de mi formación y, así mismo, contribuir aunque sea con un pequeño grano de arena, a enriquecer el conocimiento humano.

# Índice general

Prefacio .....	v
Índice general .....	vii
Índice de figuras .....	ix
Resumen .....	x
<b>I. Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>II. Preliminares teóricos .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Tensores y variedades .....</b>	<b>5</b>
1.1 ¿Por qué usar variedades? .....	5
1.2 Variedades .....	7
1.3 Vectores, 1-formas y tensores .....	9
1.4 La métrica .....	13
<b>2. Curvatura y gravitación .....</b>	<b>16</b>
2.1 La Derivada covariante .....	17
2.2 La Ecuación de la geodésica .....	19
2.3 El tensor de Riemann .....	23
2.4 La ecuación de Einstein .....	26
<b>3. Teoría de perturbación .....</b>	<b>30</b>
3.1 Por qué linealizar la Relatividad General? .....	30
3.2 ‘Gauge Calibrations’ y grados de libertad .....	33
3.3 Campos Newtonianos y ondas gravitacionales .....	42
<b>III. El experimento Gravity Probe-B .....</b>	<b>55</b>
<b>1. Historia del experimento .....</b>	<b>55</b>
1.1 Introducción .....	55
1.2 Pruebas de la Relatividad General .....	55
1.3 La propuesta de Schiff .....	61
1.4 La propuesta de Pugh .....	64
<b>2. Diseño del experimento .....</b>	<b>65</b>
2.1 El Efecto Lense-Thirring .....	65
2.2 La precesión geodética .....	73
2.3 La tecnología y algunos datos del GP-B .....	81
2.4 Conclusiones e implicaciones del experimento .....	92
<b>IV Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>105</b>
<b>V Bibliografía .....</b>	<b>107</b>

<b>VI Apéndice</b> .....	<b>111</b>
1. Símbolos utilizados .....	111
2. Datos relevantes del GP-B .....	112

# Índice de figuras

## II. Preliminares teóricos

1.1 El mapeo $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ .....	8
1.2 Las variedades $T^2$ y $S^2$ .....	9
2.1 Transporte de un vector en $S^2$ .....	20
2.2 Transporte paralelo de un vector en una variedad de dimensión 2 .....	22
2.3 El conmutador de las derivadas covariantes .....	23
3.1 Familia uniparamétrica de difeomorfismos .....	36
3.2 Ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ de una geodésica .....	45
3.3 Desviación geodética .....	50
3.4 El efecto de una onda gravitacional que posee solamente componente $h_+$ .....	51
3.5 El efecto para el caso $h_+ = 0$ y $h_\times \neq 0$ .....	52

## III. El experimento Gravity Probe-B

1.1 Placa fotográfica del eclipse del 29 de Mayo de 1919 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ .....	56
1.2 Ilustración de la deflexión de la luz .....	58
1.3 La precesión del perihelio de Mercurio .....	59
1.4 Ondas gravitacionales .....	60
2.1 Órbita circular ideal .....	75
2.2 Precesión de de Sitter-Fokker y de Lense-Thirring .....	80
2.3 Plano con los componentes del satélite .....	83
2.4 Familia uniparamétrica de difeomorfismos .....	87
2.5 Ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ de una geodésica .....	89
2.6 El ya legendario artículo de 1916 de Einstein .....	94
2.7 Campo vectorial vorticidad en dos teorías .....	100



## **Resumen**

Se presenta, en la primera parte como preliminar, los conceptos teóricos mínimos necesarios para comprender el experimento Gravity Probe B, junto con sus implicaciones científicas. Se comienza con una breve y superficial exposición de geometría diferencial, seguida por el capítulo de curvatura y la ecuación de Einstein, culminando en una introducción a la teoría de perturbación. La segunda parte, que concierne al experimento en sí, comienza con la historia del mismo; el trabajo concluye con los efectos que medirá el GP-B, además de explicar los desarrollos tecnológicos que fueron necesarios y las implicaciones científicas de éste colosal experimento.



# I. Introducción

No se puede negar que, en conjunto, la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad constituyeron la revolución científica del siglo XX, causando un impacto tan grande en la física, que son lo que en inglés se conoce como *paradigm shift*: un cambio tan radical del pensamiento, que es necesario derrumbar parte de las ideas y conceptos previos, para embarcarse en una nueva dirección. La mecánica cuántica y la relatividad especial se encargaron de arrebatar nuestras preciadas nociones de un determinismo inexorable, implantado por el soberbio tratamiento de la mecánica analítica en el siglo XIX de Lagrange y Hamilton, y de un absolutismo del tiempo y el espacio, respectivamente. Sin embargo, como teorías físicas, la teoría de la relatividad especial y la teoría de la relatividad general son independientes, y las diversas pruebas de la primera no funcionan como fundamento experimental de la segunda.

El propósito de este trabajo es hacer una pequeña revisión al concepto y las implicaciones del experimento de la NASA y Stanford llamado: Gravity Probe B, o GP-B. El GP-B pretende medir el ‘universo de Einstein’, y su importancia radica en el hecho que, de concordar con las predicciones de la RG, significaría una nueva y sólida prueba (la última data de 1960) de la Relatividad General, describiendo un fenómeno que no posee análogo en la teoría Newtoniana. La trascendencia de este experimento podría llegar a ser aún mayor si resultase que las mediciones tomadas por éste no concordaran con los valores esperados por la RG, ya que sería un fuerte indicativo que la teoría actual, o debe ser reemplazada, o necesita como mínimo un ajuste.

La figura de Albert Einstein es de una magnitud pública quizás incluso mayor a la de Sir Isaac Newton, lamentablemente esto motiva a que, en realidad, se conozca muy poco acerca de la validez actual y las limitaciones de la misma. Expresiones como  $E = mc^2$  y frases utilizando el término ‘relativo’ son tan comunes, que muchas veces se toma a la ‘teoría relativista’ (se tienden a agrupar la RG y RS como que si fuese un solo cuerpo teórico) como una ley perfecta e implacable.

Resulta ser que, la RG ni siquiera es compatible con una formulación cuántica, y además no es válida más allá de ciertos valores extremos limitantes (como por ejemplo la longitud de Planck); motivo por el cual, no es capaz de describir en su totalidad (aunque no se puede negar el formidable trabajo que hace en proporcionarnos, dentro de sus limitaciones, una descripción y las características de estos) aquellos objetos tan extraordinarios y místicos como lo son los agujeros negros.

Más importante aún, es el hecho que en la actualidad existen unas seis teorías alternativas a la Relatividad General, cada una es una seria candidata a reemplazarla, puesto que no sólo logran satisfacer todas las pruebas de la RG (que se encuentran en el límite del campo débil), sino que incluso algunas tienen el beneficio adicional de explicar nuevos y misteriosos fenómenos, tales como la materia oscura y la precesión del periastro de sistemas de estrellas binarias, que la RG no es capaz.

Por lo tanto, es imprescindible contar con un criterio científico que permita seleccionar entre ésta colección a la teoría gravitacional que sea la más apropiada. La respuesta viene dada por dos efectos, minúsculos para el débil campo gravitacional de una Tierra que rota con una rapidez angular  $\omega$  no relativista, predichos poco tiempo después de la publicación de la teoría, pero que necesitaron un desarrollo tecnológico de casi un siglo para poder intentar ser observados. Estos fenómenos son la precesión geodética o de de Sitter-Fokker y la precesión de Lense-Thirring.

Medir los dos efectos anteriores son los objetivos principales del Gravity Probe B, con una precesión experimental y en unas condiciones tan extremas, que hace 60 años, ni siquiera se podía soñar. La tecnología que compone a éste instrumento requiere de conocimiento de vanguardia en diversos campos de la física: criogénica, óptica, electrodinámica cuántica, estado sólido, entre muchas otras. El resultado de tal exigencia fue un proyecto que duró unos 40 años y costó \$760 millones de dólares.

Sin embargo, los resultados que generará junto con las implicaciones que se deducen de éstos, podrían llegar a constituir el catalizador para una nueva revolución

científica de nuestro siglo, quien sabe, incluso de la misma magnitud de la hecha por Einstein hace poco más de 100 años: el primer paso para un nuevo *paradigm shift* de la física.

El futuro panorama de la física se mira emocionante e intrigante, lleno de muchos misterios y desafíos a superar.



## II. Preliminares teóricos

### 1. Tensores y variedades

Sin duda alguna, uno de los principales obstáculos que impiden que las personas aprecien, comprendan y disfruten todo el esplendor, belleza y elegancia de la teoría de la Relatividad General de Einstein, lo constituye el hecho que dicha teoría se encuentra edificada sobre una estructura matemática (que por supuesto incluye, también, bases físicas) de apreciable complejidad; para poder manejar adecuadamente esta estructura, es necesario poseer conocimientos de diferentes ramas de la matemática: Se requieren conocimientos de álgebra lineal, análisis clásico, topología, geometría diferencial, cálculo de variedades, por sólo nombrar algunas de las ramas. Es por esto, que el presente capítulo tiene como objetivo ser una pequeña y brevemente detallada guía de los conceptos y herramientas necesarias para poder comprender la Relatividad General. En cada sección, se harán las respectivas referencias necesarias para profundizar más en cada tema.

**1.1. ¿Por qué usar variedades?** Existen diferentes enfoques y caminos a la hora de estudiar geometría diferencial, el que seguiremos en este trabajo tendrá como piedra angular el concepto de variedad. Pero antes de comenzar con definiciones y conceptos abstractos, se intentará dar una idea de la motivación para usar estos objetos como marco de trabajo de la Relatividad General.

La teoría de la gravitación universal de Newton fue un logro de proporciones gigantescas en el sentido que, no sólo dio comienzo a lo que para muchos hoy conocemos como ciencia moderna, sino que también describió aquella fuerza de la cual todos somos conscientes de su existencia y nos es imposible escapar: la gravedad. La segunda ley de Newton relaciona la fuerza ejercida sobre un objeto con la aceleración que posee de la siguiente forma:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \tag{1.1}$$

Donde la constante de proporcionalidad, claramente, es la masa inercial  $m_i$ . Por otro lado, se tiene también la ley de gravitación de Newton, que relaciona la fuerza gravitacional con el gradiente de un campo escalar  $\Phi$ ; en este caso, la constante de proporcionalidad es  $m_g$ :

$$\vec{F}_g = -m_g \nabla \Phi \quad (1.2)$$

Formalmente,  $m_i$  y  $m_g$  son objetos de naturaleza totalmente diferente; sin embargo, la universalidad de la gravitación nos lleva a concluir que  $m_i = m_g$ , este es el llamado Principio de Equivalencia Débil o WEP, por sus siglas en inglés. Una consecuencia de tomar como válido dicho principio es el hecho que la trayectoria de una partícula de prueba es universal, independiente de su masa. Matemáticamente, se tiene que:

$$\vec{a} = -\nabla \Phi \quad (1.3)$$

Una forma alternativa y más elegante de formular el WEP es la siguiente: *El movimiento de una partícula en caída libre es el mismo en un campo gravitacional y en un un marco acelerado, en regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo*; nótese, en base a este principio, la importancia del papel jugado por los marcos inerciales y no-inerciales en la teoría Newtoniana, y el nuevo enfoque de considerar los cuerpos ‘no acelerados’ como aquellos que se encuentran en ‘caída libre’.

Después de la formulación de la relatividad especial por Einstein en 1905, el concepto de masa perdió parte de su unicidad, al verse a partir de ese momento, como simplemente otra manifestación de energía y momentum; probablemente sea por esto, que Einstein se encontró motivado a buscar una generalización del WEP, este es, el Principio de Equivalencia de Einstein o EEP: *En regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial*.

Posterior a este cambio de perspectiva (en que se define ‘no-acelerado’ como ‘cayendo libremente’) se puede ver que, de por sí, no puede considerarse a la gravitación como una fuerza; una fuerza es aquello que conlleva a una aceleración, mientras que los

cuerpos que solo están sujetos a la gravedad ‘caen libremente’. Es por este motivo, que a diferencia de la teoría Newtoniana, en la Relatividad General, no existe uno o un conjunto de marcos de referencia preferenciales (que en el caso clásico corresponden a los marcos inerciales). A lo más que se puede aspirar es a poseer marcos inerciales localmente, en vez de tener un conjunto de marcos inerciales globales que se extienden y son válidos en todo el espacio-tiempo. Esto nos da un indicio que necesitamos una estructura que solamente se asemeje localmente al espacio  $\mathbb{R}^4$ , en el cual definimos la métrica de Minkowski (se construyen los llamados marcos de referencia localmente inerciales), mientras que globalmente no hay restricción alguna.

Es por esto, que la estructura propuesta para describir adecuadamente el espacio-tiempo es la de una variedad. Prosigamos a definir lo que es una variedad.

**1.2. Variedades** Con base en la motivación descrita en la sección anterior, se podría intuir a grandes rasgos que una variedad no es otra cosa más que un conjunto que localmente se parece a  $\mathbb{R}^n$ , al decir ‘se parece’ no se está afirmando un isomorfismo entre ambos conjuntos, simplemente que localmente la variedad presentará ciertos rasgos de  $\mathbb{R}^n$  que nos serán útiles, por ejemplo: la forma en que se manipulan funciones y el análisis de las mismas. Para ser un poco más formales, se introducirán algunas definiciones.

**Definición 1.1** Sea  $M$  un conjunto cualquiera, una *carta* o *sistema coordinado* consta de un par  $(U, \phi)$ , donde  $U \subseteq M$ , y  $\phi$  es un mapeo uno a uno  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que su imagen,  $\phi(U)$ , es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2** Un  $C^\infty$ -atlas es una colección indexada de cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  que satisface dos condiciones:

1.  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$ , es decir, los  $U_\alpha$  cubren a  $M$
2. Las cartas están suavemente unidas, esto quiere decir que si dos cartas se sobrelapan,  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces el mapeo  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  es un mapeo  $C^\infty$  (como

recordatorio, un mapeo  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice  $C^\infty$  si cada una de las  $f^i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  son infinitamente diferenciables)

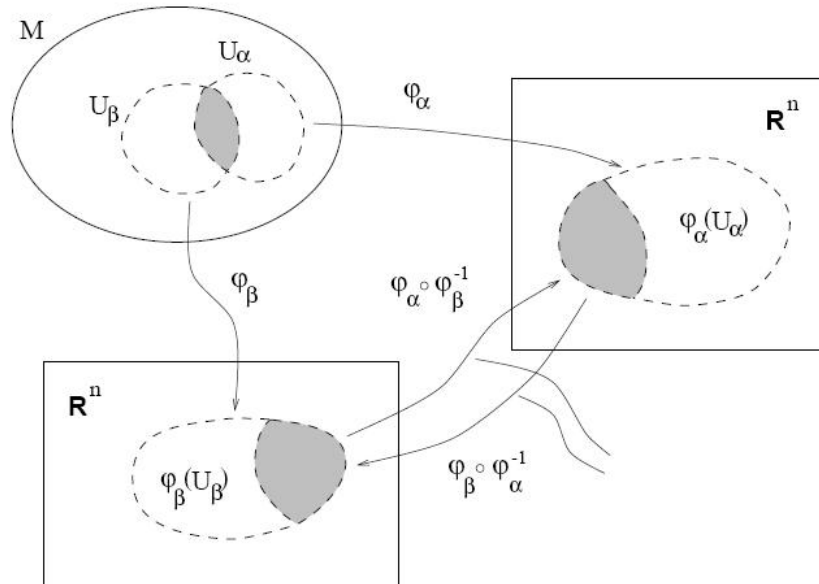


Figura 1.1: El mapeo  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$

La figura 1.1 muestra el mapeo  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ . Un poco de reflexión revela que, la definición dada de atlas coincide con lo que intuitivamente conocemos: es una colección de cartas o mapas que nos permiten representar todo nuestro espacio, y que si existe alguna región donde dos cartas se intersecan, entonces podemos pasar de una carta a otra de forma suave. Algunos ejemplos lo constituyen el atlas de Mercator y las proyecciones estereográficas. Generalmente, es imposible o muy difícil construir un atlas a partir de una carta, como se tiene en el caso de un círculo o una esfera. Finalmente, estamos capaces de definir lo que es una variedad:

**Definición 1.3** Una *variedad  $C^\infty$   $n$ -dimensional* es simplemente un conjunto  $M$  con un atlas maximal, que es aquel que contiene todas las posibles cartas compatibles (decimos que dos cartas son compatibles si pueden ser ‘unidas’ suavemente en su intersección).

Algunos ejemplos de variedades  $n$ -dimensionales son:

- Obviamente  $\mathbb{R}^n$ , ya que  $\mathbb{R}^n$  se mira como  $\mathbb{R}^n$  no sólo localmente, sino globalmente.
- La  $n$ -esfera  $S^n$
- El  $n$ -torus  $T^n$
- Si  $M$  y  $N$  son variedades cualesquiera, entonces  $M \times N$  es una variedad.

La figura 1.2 ilustra algunas de las variedades más típicas:  $T^2$  y  $S^2$ .

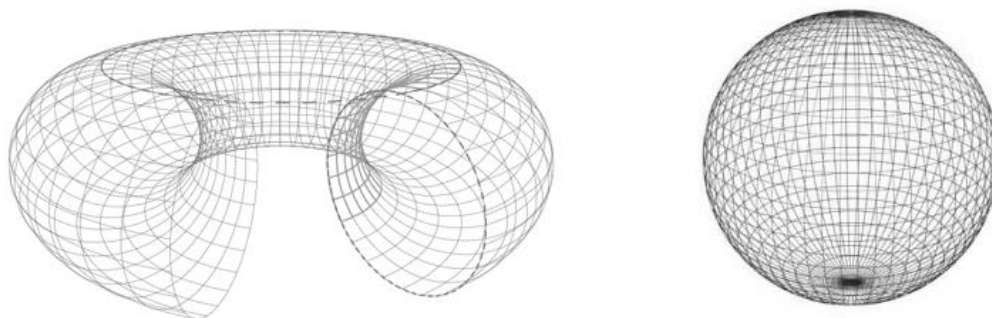


Figura 1.2: El 2-Torus  $T^2$  y la esfera  $S^2$ , ejemplos de variedades 2-dimensionales.

**1.3. Vectores, 1-formas y tensores.** Una vez se ha definido lo que es una variedad, y se han dado los ejemplos canónicos de las mismas, se procederá a utilizar el atlas maximal con el fin de construir conceptos y objetos con los que se está familiarizado de trabajar con  $\mathbb{R}^n$ . Primero, el concepto de curva es prácticamente el mismo que conocemos de  $\mathbb{R}^n$ : una curva  $\gamma$  es un mapeo  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que para toda carta  $\phi_\alpha$  cuyo dominio coordenado  $U_\alpha$  interseca a  $\gamma(I)$ , se cumple que  $\phi_\alpha \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapeo  $C^\infty$ . Ahora bien, el siguiente paso es realizar una generalización de un concepto fundamental en la física, el concepto de vector; sin embargo, no tendría sentido alguno hablar de un vector como una  $n$ -ada, ya que nuestra variedad, por el momento, no posee la estructura

de espacio vectorial definida en ella. Por lo tanto, será necesario realizar una formulación alternativa:

**Definición 1.4** Sean  $p \in M$ ,  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los mapeos suaves en una vecindad

de  $p$  y  $f \in \mathcal{F}$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . El vector tangente  $\gamma = \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)$  a una curva  $\gamma(t)$  en  $p$  es el

mapeo del conjunto  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como

$$f \mapsto \left[ \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \right]_p = \gamma(f) \quad (1.4)$$

Pareciera que, esta nueva definición de vector (un vector en  $p$  no es otra cosa más que un mapeo que, al aplicársele a una función, devuelve su rapidez de cambio a lo largo de una curva que pasa por  $p$ ) obliga a abandonar totalmente la anterior noción clásica. Sin embargo, no todo es completamente diferente, si se define a  $T_p(M)$  como el conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$ , i.e., el conjunto de todas las derivadas direccionales engendradas por todas las curvas que pasan por  $p$ ; entonces, se puede ver que  $T_p(M)$  posee propiedades muy interesantes e importantes que se enuncian en el siguiente teorema:

**Teorema 1.1** *Si la dimensión de una variedad  $M$  es  $n$ , entonces  $T_p(M)$  es un espacio vectorial real  $n$ -dimensional para todo  $p \in M$ . Adicionalmente, el conjunto de derivadas parciales en  $M$ ,  $\{\partial_\mu\}$ , con  $\partial_\mu = \left( \partial / \partial x^\mu \right)$  constituye lo que se conoce como **base coordenada**.*

Para la demostración de este teorema, refiérase a Stewart (2003) o a Carroll (2003). En base a éste teorema, es posible escribir un vector  $V$  como  $V = V^\mu \partial_\mu$ , donde  $V^\mu$  son las componentes del vector. Una aclaración: de ahora en adelante se utilizará el convenio de Einstein, la convención de que cuando aparece un índice repetido, una vez

arriba, y otra abajo, se suma sobre ese índice. Por ejemplo, en este caso,  $V^\mu \partial_\mu = V^1 \partial_1 + V^2 \partial_2 + \dots + V^n \partial_n$ .

Ya que ha quedado claro el hecho que  $T_p(M)$  es un espacio vectorial real  $n$ -dimensional, tiene todo el sentido del mundo considerar el dual del mismo. Denotemos a dicho dual como  $T_p^*(M)$ , de ahí la siguiente definición

**Definición 1.5** A los elementos de  $T_p^*(M)$ , que es el espacio de todos los mapeos lineales  $\omega: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , se les llama *1-formas, formas o covectores*.

Ahora que se han definido estos nuevos objetos, obsérvese que en la variedad  $M$  se puede definir un producto interior, ya que se puede escribir  $\omega(V_p)$  como  $\langle \omega, V_p \rangle \in \mathbb{R}$ . El siguiente teorema resume algunas propiedades de las 1-formas:

**Teorema 1.2** Sea  $\phi$  una carta en  $M$  con componentes coordenadas  $x^i = 1, 2, \dots, n$ , entonces el conjunto  $\{dx^i\}$  constituye una base del espacio vectorial  $T_p^*(M)$ , más aún, se cumple la relación de ortogonalidad

$$\left\langle dx^i, \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p \right\rangle = \delta_k^i$$

**Dem:** Refiérase a Stewart (2003) para la demostración de este teorema.

Todo el trabajo anterior, se ha realizado con el fin de introducir la siguiente definición

**Definición 1.6** Un mapeo  $T: \left( \prod_{i=1}^r T_p(M) \right) \left( \prod_{i=1}^s T_p^*(M) \right) \rightarrow \mathbb{R}$  que es lineal en cada uno de sus componentes, se denomina  $(r,s)$ -tensor.

La anterior es la definición formal de tensor, sin embargo, parece ser un concepto bastante árido y de poca profundidad e importancia para la física, sin embargo, la importancia de dichos objetos radica en una simple propiedad: su forma de transformarse entre sistemas coordinados. Es más, muchos textos de un formalismo menor (escritos por físicos o para los mismos) definen a un tensor como cualquier objeto que se transforma bajo la siguiente regla:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (1.5)$$

donde los primeros  $k$  factores del lado derecho de la ecuación representan las  $k$  transformaciones de cada una de las componentes del tensor  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ , que se podrían pensar como las ‘componentes vectoriales’, una asociada a cada uno de los  $k$  vectores. Similarmente, los siguientes  $l$  factores corresponden a la transformación de las  $l$  1-formas; cabe destacar, que es una práctica común trabajar solamente con los índices del tensor, sin escribir los vectores y 1-formas de la base. Por otro lado, nótese el hecho que en cada caso, los índices primados se encuentran en posiciones inversas, reflejando una vez más, el carácter dual de vectores y 1-formas. Una breve definición: el rango de un  $(r,s)$ -tensor es el número de índices que posee, i.e.,  $r + s$ .

De las definiciones anteriores, se observa que un escalar es un tensor de rango 0 y un vector es un tensor de rango 1. Además, una revisión a esta definición menos rigurosa de tensor revela que, el análisis tensorial es la herramienta adecuada para la relatividad general (y siendo más amplios, para toda la física), ya que en caso de cumplirse una ecuación tensorial, esta es válida en cualquier sistema coordinado (no necesariamente inercial), siempre y cuando sea posible escribir la transformación entre sistemas como en la ecuación (1.5).

En los tensores se pueden definir operaciones de particular interés:

**Definición 1.7** Sea  $T$  un tensor de rango  $s$ ; que en el caso de la relatividad general se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que es un  $(0,s)$ -tensor (puesto que la métrica

nos permite subir o bajar índices, como se puede apreciar más adelante en las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9))

1. el *simetrizador* de  $T$  es  $S(T)_{a_1 \dots a_s} = \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^s T_{p(a_1 \dots a_s)}$ , donde  $p(a_1 \dots a_s)$

representa permutaciones cíclicas.

2. el *antisimetrizador* de  $T$  es  $A(T)_{a_1 \dots a_s} = \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^s T_{p(a_1 \dots a_s)} \text{sgn}(p)$ , donde

$\text{sgn}(p) = (-1)^m$ , con  $m$  el número de permutaciones necesarias para llegar de  $p$  a la original.

3. Dado un  $(r,s)$ -tensor, se define la *contracción* de  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ , como la suma sobre un índice superior y uno inferior, por ejemplo  $T^{\mu\nu\lambda}_{\rho\nu\tau} = T^{\mu\lambda}_{\rho\tau}$ .

La contracción es una operación de mucha importancia en la relatividad general, como se verá más adelante. Con fines ilustrativos, se proveen algunos ejemplos de tensores:

- El tensor de Faraday  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , donde  $A_\nu$  es el potencial vectorial y

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- El tensor de momentum-energía  $T_{\mu\nu}$ .
- El tensor de inercia proveniente de la mecánica clásica  $I_{\mu\nu}$ .
- La métrica  $g_{\mu\nu}$ , este  $(0, 2)$ -tensor es tan importante en la teoría, que merece discutirse por separado.

**1.4. La métrica** El tensor de la métrica desempeña un papel extremadamente importante en la RG (de aquí en adelante, se abreviará con RG a la Relatividad General), sin embargo, curiosamente, existen pocos requerimientos para que un  $(0, 2)$ -tensor sea

una métrica: solamente se requiere que  $g_{\mu\nu}$  sea un tensor simétrico. Generalmente, se prefiere que sea no-degenerado, es decir, que su determinante no sea cero  $g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$ ; esto por supuesto, con el fin de definir una métrica inversa cuyas componentes satisfagan la relación de ortogonalidad

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu = g_{\lambda\nu} g^{\lambda\mu} \quad (1.6)$$

Claramente, la simetría de la métrica  $g_{\mu\nu}$  implica la simetría de la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ . Con el fin de tratar de ilustrar la importancia de la misma, se citan los usos diversos de  $g_{\mu\nu}$  listados por Carroll:

1. La métrica provee una noción de ‘pasado’ y ‘futuro’.
2. La métrica permite un cálculo de la longitud de arco y el tiempo propio.
3. La métrica determina la ‘distancia más corta’ entre dos puntos, y por lo tanto el movimiento de las partículas de prueba, i.e., define las geodésicas.
4. La métrica reemplaza el campo gravitacional newtoniano  $\phi$ .
5. La métrica provee una noción de los marcos localmente inerciales.
6. La métrica define la causalidad, pues delimita la rapidez de la luz como la cota superior de rapidez para cualquier señal.
7. La métrica reemplaza el clásico producto interno Euclideo tridimensional.

Adicionalmente, la métrica permite realizar una operación de suma importancia: subir y bajar índices en un tensor, esto de la siguiente forma: dado el tensor  $T^{\alpha\beta\mu}_\nu$ , entonces se cumple

$$T^{\alpha\beta\mu}_\nu = g^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} \quad (1.7)$$

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu} T^{\gamma\beta}_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$T_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} T^{\gamma\delta}_{\sigma\tau} \quad (1.9)$$

Por otro lado, aún cuando se encuentra implícito en el listado anterior, vale la pena destacar que la métrica juega un papel determinante en la definición de la conexión en una variedad, y en nuestro caso de interés, en la conexión de Levi-Civita, como se verá posteriormente. Una vez se ha definido la métrica, se discutirá un poco más acerca de la misma. A estas alturas, no sería extraño preguntarse si la métrica puede servir como un indicador acerca de la geometría del espacio; la respuesta es que lo puede hacer de forma parcial, puesto que si los componentes de la métrica son constantes, entonces el espacio es plano (de Minkowski). Sin embargo, el converso de esta afirmación no es válido, pues basta con observar el espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas esféricas polares: claramente los componentes de la métrica no son constantes, pero se sabe que  $\mathbb{R}^3$  es plano.

Sin embargo, se puede obtener una caracterización muy útil de la métrica, esta es poner  $g_{\mu\nu}$  en su *forma canónica*, que consiste básicamente en diagonalizar la misma y donde las entradas de la diagonal son únicamente  $-1$ ,  $1$  ó  $0$ ; de esta forma, podemos clasificar a las métricas de acuerdo a su forma canónica (se supondrá que la métrica no posee ningún elemento igual a  $0$  en su diagonal, pues de ser así no podría definirse una métrica inversa, caso que, a pesar de ser matemáticamente válida, es de poco interés físico): si todos los signos de la métrica son positivos se dice que la métrica es *Euclideana* o *Riemanniana*, mientras que si posee un único negativo es llamada *Lorentziana* o *pseudo-Riemanniana*. En base a lo anterior, se puede observar que la métrica del espacio de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  es Lorentziana y ya se encuentra de por sí en su forma canónica, puesto que

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Existe una propiedad muy importante de la métrica aún por tratar, y es el hecho que dado un punto  $p \in M$ , siempre es posible encontrar un sistema coordinado  $x^{\mu}$  en el cual no sólo  $g_{\rho\nu}$  toma la forma canónica, sino que las primeras derivadas  $\partial_{\sigma}g_{\rho\nu}$  son todas idénticas a cero, aunque es necesario destacar que esto es válido solamente en el punto  $p$  y no en una vecindad del mismo. Esto quiere decir que, en el punto  $p$  es posible encontrar un sistema coordinado en el cual el espacio se parece, hasta primer orden, al espacio plano de Minkowski; esta es precisamente la idea detrás de los marcos localmente inerciales y debería ser un indicativo adicional al hecho que la estructura matemática elegida es la adecuada.

Por lo tanto, no debería ser sorpresa que al conjunto  $\{x^{\mu}\}$  reciba el nombre de coordenadas localmente inerciales. Si se desea observar la demostración acerca de la existencia de y construcción de dichas coordenadas, refiérase a Carroll (2003).

## 2. Curvatura y gravitación

La importancia de realizar toda la construcción matemática previa es, por supuesto, poseer la capacidad de formular un modelo que describa adecuadamente la nueva visión del universo, en la cual no se conceptualiza al espacio tiempo como un escenario estático, invariante e inalterable por los procesos que ocurren en el y las mediciones que nosotros, los observadores, llevamos a cabo; sino que se concibe un espacio-tiempo curvo, en el cual los fenómenos que se llevan a cabo tienen repercusiones directas en el mismo.

Ahora bien, nótese que se hizo mención de un espacio-tiempo curvo, pero ¿qué exactamente es la curvatura? sin duda alguna, la curvatura es un concepto bastante intuitivo y del cual prácticamente todos tienen una noción del mismo; precisamente este hecho lo hace más difícil de definir. No sería una mala suposición el hecho de pensar que la curvatura está relacionada de alguna forma con la métrica, que al final, es la responsable de la geometría de la variedad. Sin embargo, no es del todo claro cómo la

métrica caracteriza la curvatura de la variedad, pues como se vio con anterioridad es posible escoger los componentes de la métrica constantes en un punto (y que sus primeras derivadas sean cero) en cualquier espacio, así como también es posible la elección de un sistema coordinado, en el cual, incluso  $\mathbb{R}^3$  posea una métrica con coeficientes muy complicados.

La respuesta a este problema no es del todo trivial, y requiere de la introducción de nuevos y variados objetos y operadores. Comencemos con la derivada covariante.

**2.1. La derivada covariante.** Una propuesta para indagar acerca de la curvatura del espacio sería la de observar la variación de ciertos objetos al ser transportados a través de la variedad, puesto que asociamos el hecho que cuando se cuenta con un espacio ‘plano’, podemos transportar objetos y dejarlos invariantes ante dicho transporte. Obviamente, el primer recurso que se pensaría utilizar sería el de la derivada, que en el cálculo clásico nos mide la ‘razón de cambio’ de una función. Puesto que la variedad es localmente difeomorfa (por medio de las cartas) a  $\mathbb{R}^n$ , para ser más precisos, se pensaría en el operador derivada parcial  $\partial_\mu$ ; sin embargo, este operador posee un problema: no es de naturaleza tensorial. Para observar esto, considérese la derivada parcial de una 1-forma y su regla de transformación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} W_{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} W_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu \right) + W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nótese que, de ser la derivada parcial un operador de carácter tensorial, el último término de la derecha no debería estar ahí. Es por eso, que el primer paso a llevar a cabo es el de definir un operador que sirva como generalización de la derivada parcial. Este es el operador derivada covariante  $\nabla$ ; dentro de este operador se introducirá lo que se conoce como una *conexión* la cual, hablando informalmente, es la que otorgará el carácter tensorial deseado a  $\nabla$ . Las condiciones que debe satisfacer la derivada covariante son:

1. Linealidad:  $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
2. Regla de Leibniz (o del producto):  $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$
3. Conmuta con contracciones:  $\nabla_{\mu}(T^{\lambda}{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T^{\lambda}{}_{\lambda\rho})$
4. Se reduce a la derivada parcial en escalares :  $\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$

Con base en estos requerimientos, vemos que el operador derivada covariante  $\nabla$  actúa sobre vectores y 1-formas de la siguiente manera:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}V^{\lambda} \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\omega_{\lambda} \quad (2.3)$$

donde  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  es un conjunto de  $n$  matrices de  $n \times n$ , conocidas como los *coeficientes de conexión*. La deducción de la forma de tanto  $\nabla$  actuando en vectores como en 1-formas se puede encontrar en Carroll (2003, Pág. 95). De las ecuaciones (2.2) y (2.3) se tiene que para un  $(k, l)$ -tensor, su derivada covariante estará dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= \partial_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se ha definido este nuevo operador en base a la conocida derivada parcial y a estos coeficientes de conexión, sin embargo, parece haber un pequeño problema: es posible definir una gran cantidad de conexiones en cualquier variedad, y evidentemente, cada una de estas definirá un operador derivada covariante totalmente diferente; así que ¿cuál conexión es la deseada en Relatividad General? Resulta ser que, de imponer un par de condiciones adicionales, la métrica define una conexión única. Dichas condiciones son

- La conexión es libre de torsión o '*torsion-free*':  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda}$ .
- La conexión es compatible con la métrica:  $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$ .

**Nota 1:** el nombre de la primera condición deriva del hecho que el tensor de torsión es idéntico a cero, donde el tensor de torsión se define como  $T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}$ .

**Nota 2:** la compatibilidad de la métrica implica que la derivada covariante conmuta con la operación de subir y bajar índices, i.e.,

$$g_{\mu\nu} \nabla_{\rho} V^{\nu} = \nabla_{\rho} (g_{\mu\nu} V^{\nu}) = \nabla_{\rho} V_{\mu}$$

Por lo tanto, una vez se han impuesto estas dos condiciones iniciales, se tiene que la métrica define una conexión única<sup>1</sup>. Esta conexión es:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\sigma\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu}) \quad (2.5)$$

La Relatividad General se basa en la conexión descrita por la ecuación (2.5); esta recibe el nombre de conexión de *Christoffel*, conexión de *Levi-Civita* o conexión *Riemanniana*. Similarmente, los coeficientes de conexión reciben el nombre de *Símbolos de Christoffel*. Una vez se ha logrado definir el operador  $\nabla$  en base a la conexión única asociada a la métrica, se puede proceder a estudiar las geodésicas.

**2.2. La ecuación de la geodésica.** Es considerablemente famosa la frase con la cual el físico V.I. Arnold inicia su libro titulado '*Mathematical Methods of Classical Mechanics*' (Métodos matemáticos de la mecánica clásica): «*El universo es un espacio afín*». No se pretende dar un tratamiento formal y riguroso de los espacios afines, dicho tema corresponde a las matemáticas; más bien, se pretende hacer énfasis en el hecho que dicho concepto se encuentra tan arraigado en nuestras mentes que, erróneamente, se considera válido siempre. Dicho de una forma sencilla, un espacio afín es aquel en el que se pueden comparar y operar vectores (entre otros objetos) asociados a diferentes puntos, puesto que el hecho de transportar vectores no tiene ningún efecto sobre los mismos y, por lo tanto, el transporte se puede hacer a lo largo de cualquier trayectoria, obteniendo siempre el mismo resultado.

---

<sup>1</sup> Para una demostración acerca de la existencia y unicidad de la conexión definida por la métrica, consúltese Carroll (2003, sección 3.2)

Claramente, el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  en el cual suponemos estar inmersos, es afín; es por esto que se posee tanta libertad a la hora de trabajar con diversos vectores (velocidades, posiciones, fuerzas, etc.), sin importar al punto donde se encuentren asociados. Al trabajar en la física clásica, nos valemos de este principio gracias a la suposición que, en pequeñas escalas, la tierra es un sistema inercial muy similar a  $\mathbb{R}^3$ . Sin embargo, esta suposición ya no será válida cuando se trabaje con una variedad más general: recuérdese que en el momento que se definió el vector tangente se habló del vector tangente en el **punto p**, y con lo que se cuenta es con una colección de espacios tangentes  $T_p(M)$ . Es más, una variedad tan sencilla y familiar como lo es  $S^2$  carece de esta propiedad tan importante; como se evidencia en la figura 2.1, el resultado de transportar un vector en  $S^2$  dependerá de la trayectoria seguida por el vector.

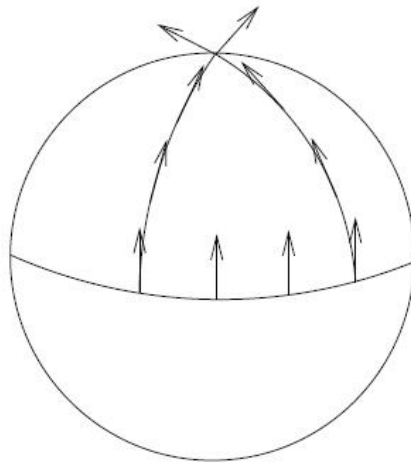


Figura 2.1 El resultado de transportar un vector  $S^2$ , claramente, depende de la trayectoria descrita durante el transporte.

Ahora bien, ¿cuál será la diferencia entre  $S^2$  y  $\mathbb{R}^2$ ? Una diferencia obvia es que la 2-esfera  $S^2$  es ‘curva’, mientras que  $\mathbb{R}^3$  no; pareciese ser que el transporte paralelo está relacionado de alguna forma con la curvatura de la variedad. Para indagar más al respecto, nótese que lo ideal fuese encontrar una caracterización o descripción que indicara si la trayectoria  $x^\mu(\lambda)$  escogida deja constantes a las componentes de un tensor

cualquiera, es decir (siendo poco formal), que la razón de cambio de las componentes del tensor respecto al parámetro  $\lambda$  sea cero. Para lograr esto, sería necesario utilizar la regla de la cadena, que en el espacio plano involucraría una derivada parcial  $\partial/\partial x^\mu$ ; el asunto es que, se desea una expresión de carácter tensorial. Lo más lógico sería reemplazar la derivada parcial por una derivada covariante, pero al hacer esto, se estaría definiendo un nuevo operador: la *derivada covariante direccional*

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (2.6)$$

Con base en esta derivada covariante direccional, se define el *transporte paralelo* de un tensor  $T$  a lo largo de una trayectoria  $x^\mu(\lambda)$  como el requisito que dicha derivada sea cero, i.e.,

$$\frac{D}{d\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0 \quad (2.7)$$

Claramente, el concepto de transporte paralelo depende de la conexión definida en la métrica. Por otro lado, el siguiente paso es tratar las geodésicas, que corresponde a la generalización al espacio curvo del enunciado ‘*la distancia más cercana entre dos puntos es una línea recta*’; cabe destacar que, existen dos caminos para deducir la ecuación de la geodésica: el primero consiste en partir de encontrar las trayectorias de ‘menor distancia’, que en el caso del espacio-tiempo curvo consisten de las trayectorias que maximizan el tiempo propio  $\tau$ , y el segundo consiste en un enfoque netamente geométrico. Dicho camino tiene como punto de partida, el hecho que una geodésica no es nada más que una trayectoria que transporta paralelamente su propio vector tangente; recordando que el vector tangente a una trayectoria  $x^\mu(\lambda)$  es  $dx^\mu/d\lambda$ , se tiene que la condición de transporte paralelo implica que

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) es conocida como la ecuación de la geodésica, nótese que fue derivada de una forma muy sencilla partiendo del principio que una geodésica no es nada

más que una trayectoria que transporta paralelamente su propio vector tangente. Sin embargo, se afirmó en el párrafo anterior que existían dos posibles caminos a seguir, la otra ruta consiste en encontrar las trayectorias  $x^\mu(\lambda)$  que maximizan el funcional del tiempo propio.

Más que realizar dicha variación del funcional (si se desean ver los detalles se puede consultar a Carroll (2003)), se hará la distinción que la importancia radica en el hecho que las geodésicas obtenidas por los diferentes caminos coincidirán si, y sólo si la conexión utilizada es la conexión de Christoffel; ya que éste es el caso en la Relatividad General, se hablará de la ecuación de la geodésica sin importar su origen, eso sí, haciendo la salvedad que el parámetro  $\lambda$  de la ecuación (2.8) debe ser el tiempo propio  $\tau$  (o un parámetro afín).

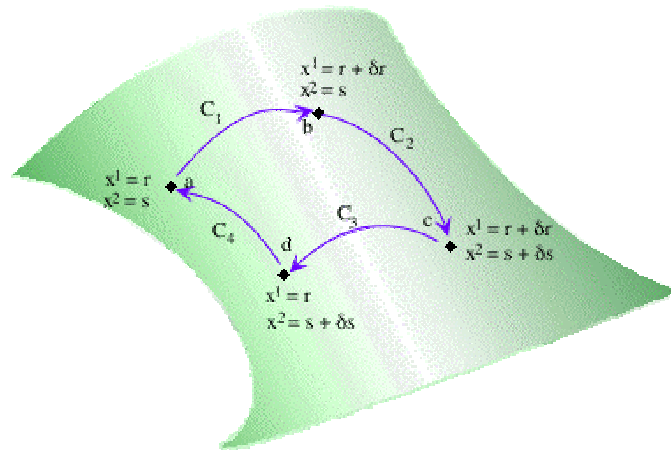


Figura 2.2: Transporte paralelo de un vector en una variedad 2-dimensional con coordenadas  $x^1$  y  $x^2$ , partiendo del punto  $a=(r,s)$ .

Las geodésicas poseen un par de características importantes, como el hecho que describen el comportamiento de las partículas de prueba, y además son de utilidad en la construcción de ciertas coordenadas especiales que son altamente útiles. Sin embargo, estas características no son de alta relevancia en el presente texto, motivo por el cual no se desarrollarán con la debida extensión.

**2.3. El Tensor de Riemann.** Habiendo introducido un nuevo operador, la derivada covariante  $\nabla$ , que permite sobreponer la dificultad de trabajar con espacios tangentes de diferentes puntos, y de poseer un criterio que nos determina las trayectorias  $x^\mu(\lambda)$  que describe una partícula de prueba (las geodésicas), sería deseable dar por fin, una formalización del concepto de curvatura. Existen un par de manifestaciones asociadas al hecho que una variedad sea plana: el transporte paralelo de un vector a lo largo de un rizo infinitesimal lo deja invariante, las derivadas covariantes de un tensor conmutan, y la propiedad que las geodésicas inicialmente paralelas lo siguen siendo. La figura 2.2 muestra el transporte paralelo de un vector en una variedad 2-dimensional con coordenadas  $(x^1, x^2)$ , a lo largo del rizo infinitesimal  $abcd$ , iniciando en el punto  $a$  con coordenadas  $x^1 = r, x^2 = s$ . De ser la variedad plana, el recorrido  $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$  dejaría a un vector  $V^\mu$  invariante, de lo contrario, debería de poder medirse un cambio en el vector; es por esto que, se propone la existencia de un  $(1, 3)$ -tensor  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  que cuantifique dicha variación.

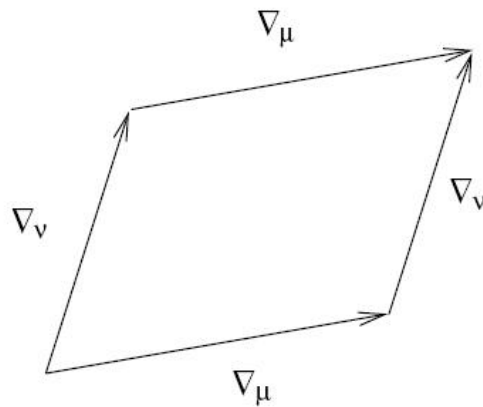


Figura 2.3: El conmutador de derivadas covariantes  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

Un argumento similar, con una diferencia sutil, radica en observar si las derivadas covariantes conmutan, i.e., si es lo mismo aplicar  $\nabla_\mu$  y luego  $\nabla_\nu$ , que aplicarlas en el orden opuesto; esto se cuantifica por medio del conmutador  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ . La figura 2.3 ilustra la idea detrás del conmutador de las derivadas covariantes, nótese que es una idea muy similar a la descrita con anterioridad y esto se debe, a que la

derivada covariante de un tensor en cierta dirección mide cuanto cambia el tensor en relación a si hubiese sido transportado paralelamente. Sin incluir los detalles del procedimiento, se tiene que

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} - T^{\lambda}{}_{\mu\nu}V^{\rho} \quad (2.9)$$

donde  $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  es el tensor de torsión, mencionado en la nota 1. Puesto que en la RG nos interesa trabajar con métricas cuyas conexiones son ‘torsion free’, se tiene que este nuevo objeto, el tensor de Riemann  $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ , parece medir adecuadamente el conmutador de las derivadas covariantes (medida que resulta ser equivalente a la distorsión que sufre un tensor al ser transportado paralelamente a lo largo de un ‘loop’ infinitesimal). El tensor de Riemann se identifica con la siguiente expresión

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es una de las más importantes de toda la relatividad general. Por otro lado, éste tensor posee numerosas y diversas propiedades importantes: (se trabajará con el tensor de Riemann con todos sus índices covariantes, i.e.,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$ , con el fin de observar ciertas propiedades con mayor facilidad)

- El tensor de Riemann es antisimétrico en sus dos primeros índices  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ .
- Es antisimétrico en sus dos últimos índices  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$ .
- Es invariante ante el intercambio de los primeros dos índices con los últimos dos  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ .
- La suma de las permutaciones cíclicas de los últimos tres índices es igual a cero,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0$ .
- Es equivalente (pero no deja de ser importante) el hecho que la parte antisimétrica de los tres índices sea idéntica a cero  $R_{\rho}[\sigma\mu\nu] = 0$ .

- El tensor de Riemann es totalmente simétrico, o lo que es equivalente, su parte antisimétrica es cero,  $R_{(\rho\sigma\mu\nu)} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$  o bien  $R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0$ .
- El tensor de Riemann satisface la identidad de Bianchi,  $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ .

Se pueden construir un par de objetos a partir del tensor de Riemann que merecen mención aparte. El primero de estos es el *tensor de Ricci*, un  $(0, 2)$ -tensor construido por medio de una contracción del primer y tercer índices del mismo,

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad (2.11)$$

La importancia del tensor de Ricci es que, al trabajar en una conexión de Christoffel (que recordemos es el interés en RG), la ecuación (2.11) es la única contracción independiente del tensor de Riemann. La propiedad del tensor de Riemann de ser simétrico ante el intercambio del primer par de índices con el segundo automáticamente confiere un carácter totalmente simétrico al tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (2.12)$$

de igual forma, podemos encontrar la traza del tensor de Ricci, denominada el *escalar de Ricci*

$$R = R^{\lambda}{}_{\lambda} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Para finalizar la parte matemática, es de especial utilidad e importancia realizar una doble contracción a la identidad de Bianchi  $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ , esto da como resultado la siguiente expresión

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R \quad (2.14)$$

en términos del tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ , la ecuación (2.14) puede ser escrita como

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.15)$$

#### 2.4. La Ecuación de Einstein (o ecuación de campo de la Relatividad General).

Habiendo dedicado la mayoría del texto previo a preparar una base concreta y adecuada, finalmente se está en la disposición de presentar una ecuación que sea capaz de describir la gravitación en esta nueva concepción del espacio-tiempo como una variedad que posee cierta curvatura. Recordando, la gravitación clásica consiste en su esencia de dos ecuaciones:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi \quad (2.16)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.17)$$

la primera ecuación, (2.16), es básicamente la segunda ley de Newton, reconociendo el hecho que la gravitación es una ‘fuerza’ que puede ser descrita por un campo conservativo (y por lo tanto por el gradiente de un campo escalar,  $\Phi$ ) y el principio de equivalencia débil (WEP, donde  $m_i = m_g$ ). La interpretación que se le puede dar a esta expresión es, que se trata de una ecuación que rige el movimiento de los cuerpos, cuando estos se encuentran en un campo gravitacional.

Por otro lado, la ecuación (2.17) es de una naturaleza diferente, y pareciera desempeñar, precisamente, el papel contrario que la ecuación anterior; puesto que, dada una distribución de masa  $\rho$ , la ecuación de Poisson determina la forma que tendrá el potencial gravitatorio  $\Phi$ .

No es de extrañarse entonces, que la meta sea encontrar la generalización de estas ecuaciones para el contexto de la RG, i.e., para variedades curvas. Hasta el momento, se ha logrado la mitad del cometido ya que la ecuación de la geodésica, (2.8), justamente logra cumplir el objetivo deseado: describe la trayectoria de las partículas que se encuentran en ‘caída libre’<sup>2</sup>, que como se mencionó con anterioridad, en la RG incluye a las partículas que se encuentran bajo el efecto de la ‘fuerza gravitacional’. Por lo tanto, la

---

<sup>2</sup> Incluso es posible, en base a la misma, conjeturar acerca de la forma que poseerán las trayectorias de las partículas al ser sometidas a una fuerza, como lo es la fuerza de Lorentz. Para indagar más al respecto, consulte Carroll (2003, sección 2.3).

búsqueda debe concentrarse en obtener una generalización de la ecuación de Poisson para la RG.

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial de segundo orden entre campos escalares,  $\rho$  y  $\Phi$ . Claramente, si se desea una generalización, la nueva ecuación debe ser de carácter tensorial: una primera propuesta sería reemplazar el potencial  $\Phi$  por el tensor de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y la densidad de masa  $\rho$  por el tensor estrés-energía  $T_{\mu\nu}$ . Así pues, se desea un objeto de carácter tensorial de rango 2 que involucre segundas derivadas de la métrica; naturalmente, el primer candidato es el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , un  $(0,2)$ -tensor simétrico que posee segundas derivadas de la métrica (recuérdese que se trata de una contracción del tensor de Riemann, que a su vez está construido de primeras derivadas de los símbolos de Christoffel, los que a su vez, están definidos por medio de primeras derivadas de la métrica). Es por esto que, la primera propuesta sería:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

donde  $\kappa$  es una constante de proporcionalidad, aún por determinar. Lastimosamente, esta primera conjetura es errónea, esto se debe al hecho que si se desea preservar la conservación de la energía (sería absurdo concebir una teoría física que no tratase de mantener este principio), entonces se debe cumplir que  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . El problema radica que, por medio de las identidades de Bianchi, se llega a la conclusión que

$$\nabla_\mu T = 0 \quad (2.19)$$

puesto que la derivada covariante de un escalar es simplemente la derivada parcial, la ecuación anterior nos dice el sin-sentido que  $T$  es constante a lo largo de todo el espacio, hecho que se sabe es totalmente falso, puesto que para la materia (por ejemplo el interior de una estrella)  $T \neq 0$ . Así pues, la conjetura deberá basarse en otro objeto; sin perder mucho tiempo, la identidad descrita en la ecuación (2.15) lleva a intuir que la ecuación buscada puede ser de la forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

donde la constante  $\kappa$  todavía debe determinarse. Para esto, se invocará a un principio fundamental de la física: al construir una nueva teoría que pretenda ser más general que las anteriores, es estrictamente necesario que contenga a sus antecesoras; en este caso, la RG debe ser capaz de describir la gravitación Newtoniana. Esto es posible, si se considera el llamado *límite Newtoniano*, que consiste de tres condiciones:

1. Las partículas se mueven lentamente respecto a la rapidez de la luz ( $v/c \ll 1$ ).
2. El campo gravitacional es débil (es posible expresar a  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ).
3. El campo es estático.

sin entrar en los detalles<sup>3</sup>, al realizar estas tres suposiciones, el hecho que la ecuación de la geodésica y la ecuación (2.20) deben describir a la ecuación (2.16) y a la ecuación de Poisson, respectivamente, implica que la constante debe ser  $\kappa = 8\pi G$ . Con esto en mente, finalmente se puede escribir la *ecuación de Einstein*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

o, en forma alternativa (utilizando el hecho que  $R = -8\pi GT$ )

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (2.22)$$

la diferencia entre (2.21) y (2.22) es un simple reordenamiento; sin embargo, permite apreciar con una gran facilidad que, de trabajarse en el vacío, la ecuación de Einstein se reduce a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.23)$$

Suficiente con las ecuaciones (de momento), el siguiente paso consiste en analizar un poco el significado y las propiedades de esta elegante e impresionante ecuación. Lo primero a observar, es el hecho que la ecuación de Einstein relaciona de un lado (el izquierdo) objetos de una naturaleza estrictamente geométrica (el tensor de Einstein) con un objeto (el lado derecho) cuya esencia es netamente física: el tensor estrés-energía. Es por esto que, al parecer, se ha logrado el objetivo de vincular la topología y la geometría

---

<sup>3</sup> Si se desea profundizar al respecto, consúltese Carroll (2003, sección 2.4).

de nuestra variedad (el espacio-tiempo) con las propiedades físicas relevantes del mismo, que se encuentran contenidas en  $T_{\mu\nu}$ .

Por otro lado, se puede percibir a la ecuación de Einstein como una ecuación diferencial de segundo orden (o siendo más precisos, un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales, puesto que la simetría, tanto de  $G_{\mu\nu}$ , como de  $T_{\mu\nu}$  reducen el número de índices independientes a 10). Inicialmente, esto no parece introducir alguna nueva dificultad, puesto que en la física se está totalmente acostumbrado a trabajar con ecuaciones diferenciales (el operador laplaciano,  $\nabla^2$ , juega un papel de especial importancia). Sin embargo, existe una diferencia fundamental en la ecuación de Einstein respecto de las demás: su no linealidad. Esto implica una dificultad tremenda, ya que usualmente se está acostumbrado a utilizar ampliamente el *principio de superposición*, el cual nos afirma que si se cuentan con dos soluciones de la ecuación, entonces cualquier combinación lineal de las mismas también será solución; en el ámbito físico, esto se manifiesta en el hecho que el potencial generado por dos fuentes diferentes es la suma del potencial generado por cada una (aplicable tanto en gravitación Newtoniana como en el electromagnetismo clásico).

Es por esto que en general, la ecuación de Einstein sin realizar ciertas suposiciones, como el hecho de encontrarse en el vacío y contar con isometrías (simetrías de la métrica), es prácticamente imposible de resolver y aún con estas suposiciones puede volverse un proceso extremadamente complicado y laborioso. Podría parecer que esta no-linealidad de la ecuación de Einstein es una característica molesta e indeseada; sin embargo es todo lo contrario, puesto que posee un significado físico importante y clave: el hecho que la gravedad se afecta a sí misma<sup>4</sup>.

En pocas palabras, el campo gravitacional interactúa consigo mismo, y esta característica única solo es describible por medio de la no-linealidad de la ecuación de Einstein (esto no es algo general, ya que el campo electromagnético no interactúa consigo

---

<sup>4</sup> O bien, como se dice en inglés, es 'self-coupled'.

mismo); como nota, la traza del tensor estrés-energía del campo electromagnético es cero, i.e.  $T_{\mu}^{\mu} = 0$ , motivo por el cual ¡La presencia de un campo electromagnético sin masas no afectaría la curvatura del espacio-tiempo!

No sería posible finalizar este capítulo, sin hacer aunque sea una breve mención al enfoque alternativo para deducir la ecuación de Einstein: la formulación Lagrangiana. Esta tiene como esencia el principio de mínima acción (o de extrema acción) que afirma que la trayectoria seguida por un sistema en el espacio de configuraciones es un extremo del funcional acción, i.e.,  $\delta S = 0$ . En el caso de la RG, la acción (llamada acción de Hilbert o de Einstein-Hilbert) está descrita por:

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x \quad (2.24)$$

la importancia del enfoque Lagrangiano radica básicamente en dos aspectos: el primero de estos consiste en que las simetrías de la teoría son más fácilmente observables en el Lagrangiano; y segundo, el hecho que prácticamente toda teoría física conocida al día de hoy, posee una formulación Lagrangiana.

### 3. Teoría de Perturbación

**3.1. ¿Por qué linealizar la Relatividad General?** Si se realiza un análisis crítico y frío, se puede afirmar que en la física, de nada sirve una teoría, por muy elegante, elaborada y bella que sea, si no es capaz de realizar predicciones correctas que concuerden con los fenómenos exhibidos por la naturaleza (dentro del límite de exactitud y precisión del experimentador). Así pues, cuando se contempla el hecho que la ecuación de Einstein consiste de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales (siendo estrictos, solo es necesario resolver 6, ya que las identidades de Bianchi remueven 4 grados de libertad) uno podría incluso llegar a preguntarse acerca del valor de la RG como modelo capaz de realizar predicciones.

Es por esto, que es de interés encontrar simplificaciones a la ecuación de Einstein. La primera opción es claro, buscar simetrías de la métrica<sup>5</sup> (llamadas isometrías). La otra alternativa, que es el objeto de estudio del presente capítulo, es suponer que los campos gravitacionales con los que se trabaja son ‘débiles’ (debe aclararse que esto no es necesariamente el límite Newtoniano descrito con anterioridad); como la RG relaciona la gravitación con la curvatura del espacio-tiempo, la suposición anterior implica que la métrica del mismo es casi plana.

Resulta ser, que en realidad, en la naturaleza ésta es una excelente aproximación, exceptuando fenómenos exóticos y extraños como lo son colapsos gravitacionales de objetos supermasivos (estrellas de neutrones o agujeros negros) o fenómenos cosmológicos (que tratan con la estructura global del universo); además, esta suposición es de particular interés, ya que en nuestra vida cotidiana tratamos con campos gravitacionales considerablemente pequeños (en el sistema solar, se tiene que  $|\phi| \approx M_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$ ).

Ahora bien, la forma matemática de expresar el hecho que el espacio-tiempo es prácticamente el espacio de Minkowski es la siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

donde la perturbación  $h_{\mu\nu}$  es ‘pequeña’. Debe tenerse el cuidado de notar que, ya que no se cuenta con una métrica natural positiva definida<sup>6</sup>, entonces no existe una norma natural con la cual se pueda cuantificar la ‘pequeñez’ de los tensores; es por esto que se pedirá que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  en algún sistema coordinado globalmente inercial. A continuación, se mencionan un par de convenciones:

- Con el fin de simplificar las cosas, se utilizará la métrica del espacio plano  $\eta_{\mu\nu}$  para subir y bajar índices. La validez de esto radica en el hecho que la diferencia

---

<sup>5</sup> Como dato, la primera solución a la ecuación de Einstein, la solución de Schwarzschild, es una solución en el vacío donde se supone una simetría esférica de la métrica.

<sup>6</sup> Una métrica se dice positiva definida si su determinante es mayor que cero.

entre utilizar  $\eta_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$  consiste en correcciones de órdenes superiores al cuadrático.

- Ignorando términos mayores al primer orden, se tiene que la métrica inversa será  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ .

El siguiente paso consiste en preguntarse si después de linealizada nuestra teoría, esta continúa siendo Lorentz-invariante. Para esto, observemos cuál es el resultado de aplicar una transformación de Lorentz a la métrica  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} h_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

pero, puesto que  $\eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \eta_{\mu\nu}$ , se tiene que

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'} \quad (3.3)$$

con  $h_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} h_{\mu\nu}$ . Vemos pues, que el objeto  $h_{\mu\nu}$  parece transformarse como cualquier otro tensor de la relatividad especial; es por esto, que podría dar la impresión que al linealizar la RG, lo que se obtiene es el estudio de la propagación de un campo tensorial simétrico  $h_{\mu\nu}$  propagándose en un espacio-tiempo plano; es por esto que, todos los objetos que se construyan (como por ejemplo, el tensor de Riemann) estarán definidos en términos de la perturbación  $h_{\mu\nu}$ . Es necesario aclarar que aunque, siendo estrictamente rigurosos, este es un enfoque ‘ficticio’, resulta ser de una tremenda utilidad e importancia, motivo por el cual, se empleará constantemente a lo largo del desarrollo a seguir.

Si se adopta la postura mencionada en el párrafo anterior, entonces veamos como quedan los familiares objetos construidos en la RG. Comencemos con los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left( \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \left( \partial_\mu h_{\nu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

El tensor de Riemann, con sus cuatro índices covariantes, será:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda} \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \eta_{\mu\lambda} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

como se podrá notar, se han obviado los términos  $\Gamma^2$ , puesto que se está trabajando con una teoría linealizada (las perturbaciones mayores al primer orden se desprecian); prosiguiendo, al realizar una contracción del tensor de Riemann en sus índices  $\mu$  y  $\nu$ , se obtiene el escalar de Ricci, que será:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\nu\sigma} \right) \quad (3.6)$$

donde se ha denotado a la traza de  $h_{\mu\nu}$  como  $h$ ,  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  y  $\square$  es el d'Alembertiano del espacio plano<sup>7</sup>. Contrayendo nuevamente para obtener el escalar de Ricci, se llega a:

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.7)$$

Finalmente, juntando todas las piezas construidas, el tensor de Einstein será:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Al igual que en la RG 'usual', la ecuación de campo será  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , donde  $G_{\mu\nu}$  está dado por la ecuación (3.8) y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor estrés-energía, calculado el cero-ésimo orden en  $h_{\mu\nu}$  (i.e., el orden de  $T_{\mu\nu}$  y  $h_{\mu\nu}$  es el mismo).

**3.2. 'Gauge Calibrations' y grados de libertad.** Ciertamente, uno de los mayores atractivos de la teoría de la Relatividad General es su invarianza ante la elección de un sistema coordinado. Utilizando la terminología del tema, se dice que la teoría es

---

<sup>7</sup> El d'Alembertiano del espacio plano es  $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . (3.9)

‘Lorentz-invariante’ en el sentido que la métrica resulta invariante ante productos de la siguiente forma:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

donde  $\Lambda$  es una matriz de  $4 \times 4$  perteneciente al llamado Grupo de Lorentz<sup>8</sup>. Ahora bien, se vio con anterioridad que desde el enfoque ‘ficticio’ adoptado, la perturbación de la métrica,  $h_{\mu\nu}$ , se comporta como un tensor de la relatividad especial, y por lo tanto, podemos aseverar el hecho que esta teoría linealizada de la relatividad también es Lorentz-invariante.

Ahora bien, la Lorentz-invarianza corresponde únicamente a la invariancia bajo ciertos cambios de coordenadas, en particular, aquellos entre ‘marcos inerciales’ (desde la perspectiva de la RS<sup>9</sup>). Queda pues, otro tipo muy importante de cambios de coordenadas que deja invariante la teoría, son las llamadas ‘*Gauge Transformations*’ o *Transformaciones de Calibración* por su analogía con las transformaciones hechas en la teoría electromagnética. Las transformaciones de calibración son de la siguiente forma:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\nu}) \quad (3.10)$$

donde la transformación es generada por un ‘vector’  $\xi^{\nu}$ . Resulta ser, que si únicamente se requiere que los  $\xi^{\nu}$  sean pequeños, entonces la transformación para la métrica será:

$$h_{\mu\nu}(\xi_{\nu}) = h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \quad (3.11)$$

Cabe destacar que, la ecuación (3.11) es equivalente a  $h_{\mu\nu}^{(c)} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$ , para cualquier  $\xi_{\nu}$ , siempre y cuando  $\epsilon$  sea suficientemente pequeño. Se procederá ahora a analizar las transformaciones de calibración desde una perspectiva más rigurosa, con el fin de comprenderlas un poco mejor.

---

<sup>8</sup> El grupo de Lorentz consiste de una familia de matrices de 6 parámetros -tres rotaciones y tres ‘boosts’- y es un subgrupo del Grupo de Poincaré, para mayor profundidad, consúltese un texto de relatividad especial, como Rindler (2006) o bien French (1968) y Landau (1980).

<sup>9</sup> Con el fin de ser lo más breve posible, RS denotará a Relatividad Especial.

Puesto que se ha adoptado la convención de visualizar a la teoría linealizada como un campo tensorial  $h_{\mu\nu}$  propagándose en un fondo con métrica plana, entonces formalmente, se está trabajando con dos variedades:  $M_b$  un espacio-tiempo de fondo, y  $M_p$  un espacio tiempo ‘físico’; entre estas variedades existirá un difeomorfismo  $\phi : M_b \rightarrow M_p$ <sup>10</sup>. Como variedades,  $M_b$  y  $M_p$  son la misma, ya que son difeomórficas; sin embargo, se puede ver que ambas poseen campos tensoriales totalmente diferentes ( $M_b$  posee la métrica plana de Minkowski y  $M_p$  alguna métrica ‘física’  $g_{\mu\nu}$  que satisface la ecuación de Einstein).

Por otro lado, gracias al hecho que todo difeomorfismo define el mapeo conocido como ‘*Pull-Back*’<sup>11</sup>, se puede definir a la perturbación como la diferencia entre la métrica física ‘jalada hacia atrás’ y la métrica plana  $\eta_{\mu\nu}$ . Además, el hecho que todo campo vectorial  $\xi^\mu(x)$  define una familia de un parámetro de difeomorfismos internos,  $\psi_\varepsilon$ , en  $M_b$ , permite (mediante la composición) generar una familia uniparamétrica de difeomorfismos,  $(\phi \circ \psi_\varepsilon)$ , entre  $M_b$  y  $M_p$ ; ya que cada difeomorfismo  $(\phi \circ \psi_\varepsilon)$  define un mapeo *pull-back* diferente, entonces cada difeomorfismo definirá una perturbación  $h_{\mu\nu}$  diferente. Si se requiere que la geometría de la variedad sea invariante, entonces se llega a la ya establecida transformación (3.11) (en realidad se llega a la formulación equivalente en términos del parámetro  $\varepsilon$ )<sup>12</sup>. La figura 3.1 ilustra una familia uniparamétrica de difeomorfismos generados por un campo vectorial  $\xi^\mu$ .

---

<sup>10</sup> Un difeomorfismo  $\phi$  entre dos espacios  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  es una biyección, donde tanto  $\phi$ , como  $\phi^{-1}$  son funciones  $C^\infty$ .

<sup>11</sup> Para profundizar más en el tema, se recomienda consultar un texto de geometría diferencial como Spivak (1999).

<sup>12</sup> Para una explicación más amplia y clara de este tema, refiérase a Carroll (2003, sección 7.1) y el apéndice B.

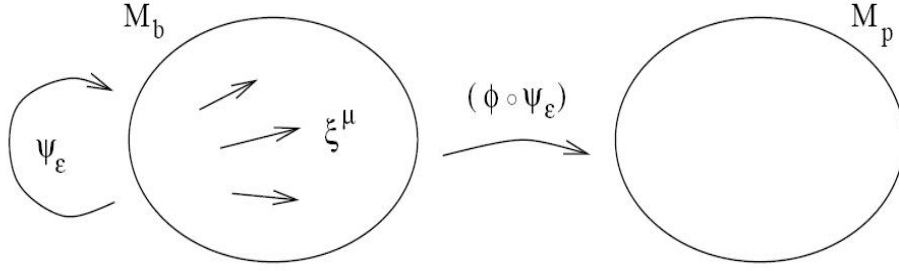


Figura 3.1: Familia uniparamétrica de difeomorfismos  $(\phi \circ \psi_\epsilon): M_b \rightarrow M_p$  generados por un campo vectorial  $\xi^\mu$ .

Así pues, las transformaciones de calibración corresponden a difeomorfismos entre variedades en las cuales la perturbación definida en cada una difieren en una cantidad infinitesimal. Es por esto que, se puede afirmar que ambos escenarios describen la ‘misma’ realidad física. Por lo tanto, sería más apropiado afirmar que las transformaciones de calibración definen clases de equivalencia de las  $h_{\mu\nu}$ , i.e., clases de equivalencia entre espacio-tiempos.

Dicho esto, se continuará con el desarrollo de la teoría; lo primero que se hará es descomponer el tensor  $h_{\mu\nu}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Phi \\ h_{0i} &= w_i \\ h_{ij} &= 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde contiene la traza de  $h_{ij}$ , y  $s_{ij}$  no posee traza:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij} \\ s_{ij} &= \frac{1}{2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, con base en las ecuaciones (3.12) y (3.13) la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j \quad (3.14)$$

en las definiciones anteriores  $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \text{diag}(1,1,1)$  denota a la métrica del espacio plano  $\mathbb{R}^3$ . Prosiguiendo con nuestro trabajo, el siguiente paso es calcular los símbolos de Christoffel para la métrica (3.14)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \partial_0 \Phi \\
\Gamma_{00}^i &= \partial_i \Phi + \partial_0 w_i \\
\Gamma_{j0}^0 &= \partial_j \Phi \\
\Gamma_{j0}^i &= \partial_{[j} \Phi_{i]} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} \\
\Gamma_{jk}^0 &= -\partial_{(j} \Phi_{k)} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} \\
\Gamma_{jk}^i &= \partial_{(j} \Phi_{k)} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ya que se posee la libertad de trabajar con un marco inercial, es conveniente expresar el 4-momentum  $p^\mu = dx^\mu / d\lambda$  en términos de la energía  $E$  y la 3-velocidad  $v^i = dx^i / dt$  como

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad p^i = E v^i \tag{3.16}$$

entonces, si se toma la ecuación de la geodésica (2.8) y se mueve el segundo término al lado derecho, con el fin que tome la forma de un término correspondiente a una fuerza, y dividiendo ambos lados por  $E$  se obtiene

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{E} \tag{3.17}$$

La primera componente,  $\mu = 0$ , describe la evolución de la energía

$$\frac{dE}{dt} = -E \left[ \partial_0 \Phi + 2(\partial_k \Phi) v^k - \left( \partial_{(j} w_{k)} - \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} \right) v^j v^k \right] \tag{3.18}$$

De manera similar, las componentes espaciales serán:

$$\frac{dp^i}{dt} = -E \left[ \partial_i \Phi + 2 \left( \partial_{[i} \Phi_{j]} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} \right) v^j + \left( \partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right] \quad (3.19)$$

Con el fin de intentar dar una interpretación física a las dos ecuaciones anteriores, primero nótese que, contrario a lo que se podría esperar, el término  $dE/dt \neq 0$ ; sin embargo, esto se debe a que  $E = p^0$  únicamente incluye la energía ‘inercial’ de la partícula, que no incluye las interacciones de la partícula con el campo gravitacional (y otros campos presentes). Por otra parte, es conveniente definir el campo ‘gravito-eléctrico’ y ‘gravito-magnético’ (ambos campos 3-vectoriales)

$$\begin{aligned} G^i &\equiv -\partial_i \Phi - \partial_0 w_i \\ H^i &\equiv (\nabla \times \vec{w})^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j w_k \end{aligned} \quad (3.20)$$

los cuales obtienen sus nombres por presentar una obvia similitud a la definición del campo eléctrico y magnético clásicos, los cuales se definen en términos de un potencial escalar y uno vectorial. De ser así, la ecuación (3.19) se convierte en

$$\frac{dp^i}{dt} = -E \left[ G_i + (\vec{v} \times \vec{H})^i - (\partial_0 h_{ij}) v^j - \left( \partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right] \quad (3.21)$$

Los primeros dos términos de la ecuación (3.21) describen como una partícula responde a las perturbaciones escalares y vectoriales  $\Phi$  y  $w_i$ , en una forma totalmente análoga a la fuerza de Lorentz en el electromagnetismo (lo cual es un indicio acerca de lo acertado que fue definir a los campos  $G_i$  y  $H_i$ ). Esta ecuación además muestra el efecto causado por las perturbaciones espaciales  $h_{ij}$ , de primer y segundo orden en la 3-velocidad. Ciertamente, la relevancia de las diferentes perturbaciones (escalar, vectorial y espaciales) dependerá de la situación física que se esté considerando.

Además de analizar el movimiento de partículas de prueba, descrito por la ecuación de la geodésica, es igual de importante examinar cuál es la ecuación de Einstein resultante para la teoría linealizada. En base a las variables introducidas, el tensor de Riemann es:

$$\begin{aligned}
R_{0j0l} &= \partial_j \partial_l \Phi + \partial_0 \partial_{(j} w_{l)} - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{ij} \\
R_{0jkl} &= \partial_j \partial_{[k} w_{l]} - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_{[k} h_{l]}{}_j \\
R_{ijkl} &= \partial_j \partial_{[k} h_{l]}{}_i - \frac{1}{2} \partial_i \partial_{[k} h_{l]}{}_j
\end{aligned} \tag{3.22}$$

los componentes que no se listan se encuentran relacionados con los anteriores por medio de alguna de las simetrías del tensor de Riemann. Usando  $\eta^{\mu\nu}$  para contraer<sup>13</sup>  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ , se llega al tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \nabla^2 \Phi + \partial_0 \partial_k w^k + 3\partial_0^2 \Psi \\
R_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + 2\partial_0 \partial_j \Psi + \partial_0 \partial_k s_j^k \\
R_{ij} &= -\partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} h_{l]} + \Psi \delta_{ij} - \square s_{ij} + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Finalmente, podemos escribir el tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2 \Psi + \partial_k \partial_l s^{kl} \\
G_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + 2\partial_0 \partial_j \Psi + \partial_0 \partial_k s_j^k \\
G_{ij} &= \left( \delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j \right) (\Phi - \Psi) + \delta_{ij} \partial_0 \partial_k w^k - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi \\
&\quad - \square s_{ij} + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij} \partial_k \partial_l s^{kl}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Ahora bien, el verdadero motivo para escribir la ecuación de Einstein en la teoría linealizada utilizando estas nuevas variables, es la de observar que, en realidad, sólo una

---

<sup>13</sup> Es justificable contraer usando  $\eta^{\mu\nu}$ , puesto que las correcciones respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  son de orden cuadrático o superior.

pequeña parte de la métrica contribuye a los grados de libertad del campo gravitacional; el resto obedece restricciones que los definen en términos de los otros campos. Para observar esto, se parte de la componente 00 de la ecuación (3.24), i.e.  $G_{00} = 8\pi GT_{00}$ , dicha ecuación será:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2} \partial_k \partial_l s^{kl} \quad (3.25)$$

Esta es una ecuación para la variable  $\Psi$  que no involucra derivadas temporales. Por lo que, si se conoce en un momento determinado el comportamiento de  $T_{00}$  y de  $s_{ij}$ , entonces es posible determinar  $\Psi$  (dadas las condiciones de frontera adecuadas). Por lo tanto,  $\Psi$  no es un grado de libertad, sino que se encuentra totalmente determinado por el tensor estrés-energía y el tensor estrés gravitacional  $s_{ij}$ . A continuación, se considera la ecuación  $0j$ , la cual escribiremos como

$$\left( \delta_{jk} \nabla^2 - \partial_j \partial_k \right) w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0 \partial_j \Psi + 2\partial_0 \partial_k s_j^k \quad (3.26)$$

Ésta también es una ecuación para  $w^j$  que no involucra derivadas temporales, así que una vez más, basta con conocer el tensor estrés-energía y el estrés para determinar el vector  $w^j$ .

Finalmente, la ecuación  $ij$  es

$$\begin{aligned} \left( \delta_{jk} \nabla^2 - \partial_i \partial_j \right) \Phi &= 8\pi GT_{ij} + \left( \delta_{jk} \nabla^2 - \partial_i \partial_j - 2\delta_{ij} \partial_0^2 \right) \Psi - \delta_{ij} \partial_0 \partial_k w^k \\ &+ \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij} \partial_k \partial_l s^{jl} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nuevamente, se puede ver que no existe ninguna derivada temporal actuando sobre  $\Phi$ , por lo que este es determinado como una función de los demás campos.

Por lo tanto, se puede concluir que los únicos grados de libertad en la ecuación de Einstein son aquellos provenientes del tensor de estrés  $s_{ij}$ , ya que los otros componentes

de  $h_{\mu\nu}$  se encuentran determinados en términos de  $s_{ij}$  y de los campos de la materia ( $T_{\mu\nu}$ ). Así pues, vemos que si se adopta la perspectiva de la teoría de campos; en la cual los escalares  $\Phi$  y  $\Psi$  serían de espín-0, el vector  $w_i$  sería de espín-1 y el tensor  $s_{ij}$  de espín-2, entonces la descripción anterior concuerda con la imagen de la RG como una teoría de campos con una partícula mensajera sin masa de espín-2<sup>14</sup>.

Cambiando un poco de tema, no es extraño encontrar críticas a la RG que se basan en afirmar que su invarianza ante ciertos cambios de coordenadas le dota cierto carácter ambiguo. Por el contrario, ésta es una de sus fortalezas, ya que permite elegir el sistema coordenado que simplifique en lo mayor posible, la situación física de interés. Tal es el caso de la **calibración transversal**, donde se establece que

$$\partial_i s^{ij} = 0 \quad (3.28)$$

$$\partial_i w^i = 0 \quad (3.29)$$

esto se logra al escoger  $\xi^\mu$  de tal forma que satisfaga

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij} \quad (3.30)$$

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i \quad (3.31)$$

En esta calibración, la ecuación de Einstein se convierte en

$$G_{00} = 2\nabla^2 \Psi = 8\pi G T_{00} \quad (3.32)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j} \quad (3.33)$$

$$G_{ij} = \left( \delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j \right) (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad (3.34)$$

---

<sup>14</sup> En la teoría cuántica de campos actual, se postula la existencia de partículas mensajeras o ‘portadoras’ de la fuerza, llamadas bosones. Los bosones no poseen masa y su espín es un múltiplo entero. En el caso de la gravedad, el bosón recibe el nombre gravitón y su espín es 2.

Otra calibración popular es la llamada **calibración sincrónica**, la cual es equivalente a una elección de coordenadas normales Gaussianas. En esta calibración se establece que

$$\Phi = 0 \quad (3.35)$$

$$w^i = 0 \quad (3.36)$$

esto por medio de elegir

$$\partial_0 \xi^0 = -\Phi \quad (3.37)$$

$$\partial_0 \xi^i = -w^i + \partial_i \xi^0 \quad (3.38)$$

En éste caso, la métrica toma la simple, pero atractiva, forma:

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \quad (3.39)$$

Obviamente, existe una amplia variedad de calibraciones diferentes, cada una de las cuales otorgará una simplificación considerable del problema a estudiar; la calibración a escoger dependerá, por supuesto, de las circunstancias físicas del sistema a estudiar.

**3.3. Campos Newtonianos y ondas gravitacionales.** Aunque éste no es el tema específico del presente trabajo, se considera importante, para tener un entendimiento más completo de la RG, presentar los conceptos básicos de la teoría de ondas gravitacionales. Es por esto que, aquí seguiremos básicamente la exposición de Carroll (2003) del tema.

En el proceso de deducción de la ecuación de campo de la RG (ecuación de Einstein), se determinó la constante de proporcionalidad entre el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  y el tensor estrés-energía  $T_{\mu\nu}$  por medio del requerimiento que, en el límite Newtoniano, la RG concordara con los resultados de la teoría Newtoniana.

Esta vez, se indagará en los efectos sobre la teoría linealizada al remover una de las tres restricciones del límite Newtoniano. Se seguirá trabajando con el supuesto que los campos son débiles (suposición ya hecha al trabajar con la linealización de la RG), así como también con la suposición que la métrica es estática. La diferencia radica en que no se restringirá a que las partículas se muevan ‘lentamente’ (en comparación a la rapidez de

la luz en el vacío  $c$ ). Claramente, existe una importante diferencia, ya que con anterioridad solo se necesitó considerar los efectos de la componente  $g_{00}$  de la métrica, pero resulta ser (como se podrá observar en breve) que las partículas relativistas responden también a las componentes espaciales de la métrica  $g_{ii}$ .

Se comenzará con el supuesto que se puede modelar las fuentes gravitacionales como ‘polvo’<sup>15</sup> (resulta ser que para la mayoría de la materia en el universo, estrellas, planetas y galaxias, ésta es una buena aproximación). Si se trabaja en el marco en el cual el polvo se encuentra en reposo, entonces el tensor estrés-energía toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu} U_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Como nota, se aclara que este procedimiento se puede realizar en diversas ocasiones, exceptuando el caso en que se esté trabajando con múltiples fuentes que posean grandes velocidades relativas. Si se utiliza la calibración transversal (3.28), entonces como la fuente se define estática, se eliminan todos los términos que involucren derivadas temporales. Si, adicionalmente, se reemplaza el tensor estrés-energía para esta situación, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \rho \\ \nabla^2 w_j &= 0 \\ (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \nabla^2 s_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ahora bien, ya que se está interesado en obtener soluciones que sean no singulares y posean un buen comportamiento asintótico (en el infinito), entonces, nótese que la segunda ecuación de (3.41) automáticamente implica que  $w^i = 0$ . A continuación, tómesese la traza de la tercera ecuación, al sumar sobre  $\delta^{ij}$ .

---

<sup>15</sup> El polvo se puede definir en el espacio-tiempo plano como una colección de partículas que se encuentran en reposo entre sí. Claramente, la presión del polvo en cualquier dirección será cero, ya que la presión surge del movimiento aleatorio de las partículas.

$$\begin{aligned}
& \delta^{ij} (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \delta^{ij} \nabla^2 s_{ij} = \delta^{ij} \cdot 0 \\
& \Leftrightarrow (\delta^{ij} \delta_{ij} \nabla^2 - \delta^{ij} \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \nabla^2 (\delta^{ij} s_{ij}) = 0 \\
& \Leftrightarrow (3\nabla^2 - \nabla^2) (\Phi - \Psi) = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\nabla^2 (\Phi - \Psi) = 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

esta última ecuación obliga la igualdad de ambos potenciales escalares,

$$\Psi = \Phi \tag{3.43}$$

Así pues, si se reemplaza  $\Psi = \Phi$  en la última ecuación de (3.41) se obtiene

$$\nabla^2 s_{ij} = 0 \tag{3.44}$$

lo cual implica que  $s_{ij} = 0$ , para una solución bien portada. Es importante recordar que esta simplificación ocurre debido a la conexión implícita establecida por la ecuación (3.42), la cual a su vez es posible ya que la traza de  $T_{ij}$  es igual a cero (ya que se trabaja con polvo, y por lo tanto la suma de las tres presiones principales es cero). Finalmente, se tiene que la métrica perturbada para las fuentes Newtonianas estáticas es

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{3.45}$$

o, de forma equivalente,

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Phi & & & \\ & -2\Phi & & \\ & & -2\Phi & \\ & & & -2\Phi \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

donde claramente, el potencial escalar satisface la ecuación de Poisson convencional

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{3.47}$$

Ahora bien, este análisis hecho de los campos Newtonianos permite analizar la deflexión de las geodésicas en comparación a una geodésica del espacio-tiempo plano (que es una recta). Utilizando la ecuación de la geodésica y los símbolos de Christoffel para esta métrica (es decir  $w^i = 0$  y  $h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}$ )

$$\begin{aligned}\Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi \\ \Gamma_{jk}^i &= \delta_{jk} \partial_i \Phi - \delta_{ik} \partial_j \Phi - \delta_{ij} \partial_k \Phi\end{aligned}\quad (3.48)$$

se puede calcular que para una partícula que se considera como una masa puntual, el ángulo de deflexión  $\hat{\alpha}$  es

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{b} \quad (3.49)$$

donde  $M$  es la ‘masa’ de la fuente,  $b$  es la distancia mínima que existe entre la partícula y la fuente, y  $\hat{\alpha}$  es el ángulo que mediría un observador entre la trayectoria curva de la partícula y una trayectoria recta. La figura (3.2) ilustra la situación descrita. La deflexión de la luz por el sol fue una de las primeras pruebas de la RG, cuyo valor máximo corresponde a  $1.75''$  (esto se discutirá a detalle más adelante).

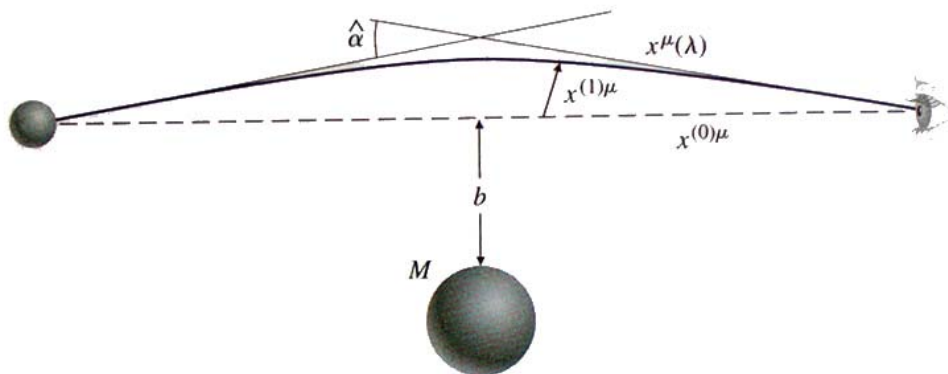


Figura 3.2: El ángulo de deflexión  $\hat{\alpha}$  que existe entre lo que un observador percibiría como una geodésica del espacio plano  $x^{(0)}(\lambda)$  y la geodésica actual ‘perturbada’  $x^{\mu}(\lambda)$ . El vector  $x^{(1)}(\lambda)$  es un vector ortogonal a  $x^{(0)}(\lambda)$  que cuantifica la deflexión de la geodésica.

Ahora bien, la aproximación de partículas relativistas en campos Newtonianos es apenas una de las aplicaciones de la RG linealizada. Existe otra solución a la ecuación de campo perturbada: *las ondas gravitacionales*; la importancia de las mismas es que no existe un fenómeno análogo predicho por la teoría Newtoniana, así pues, de ser detectadas las ondas gravitacionales, sería una prueba prácticamente contundente de la validez de la RG (se discutirá esto a mayor detalle más adelante).

Por el momento, retomemos las ecuaciones de campo para la RG linealizada, utilizando la calibración transversal (3.28), pero esta vez la diferencia será que se preservarán todas las derivadas temporales, mientras que se anulará por completo el tensor estrés-energía,  $T_{\mu\nu} = 0^{16}$ . La ecuación 00 es entonces

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (3.50)$$

al igual que en el capítulo anterior, se está interesado en las soluciones bien comportadas, por lo que junto con las condiciones de frontera, se tiene que  $\Psi = 0$ . Continuando el proceso, la ecuación 0j es

$$\nabla^2 w_j = 0 \quad (3.51)$$

la cual, por un argumento similar implica que  $w_j = 0$ . Por último, se ve que después de utilizar el resultado anterior, la ecuación ij será

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.52)$$

que, a su vez, implica que  $\Phi = 0$ . Por lo tanto, queda únicamente la parte ‘tracefree’ de la ecuación ij, la cual resulta convertirse en una ecuación de onda para el tensor de estrés  $s_{ij}$

$$\square s_{ij} = 0 \quad (3.53)$$

Con el fin de estar un poco más en concordancia con la mayoría de la literatura concerniente a la RG, se definirá la calibración transversa libre de traza de la siguiente forma:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Es importante tener en mente las propiedades de  $\square h_{\mu\nu}^{TT}$ : es totalmente espacial, sin traza y transversa, matemáticamente esto se traduce en:

---

<sup>16</sup> Esto es similar a la solución de Schwarzschild, en la cual se resuelve el tensor de Ricci igualado a cero  $R_{\mu\nu} = 0$ .

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{TT} &= 0 \\
\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} &= 0 \\
\partial_{\mu} h_{TT}^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

Con base en las definiciones anteriores, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \tag{3.56}$$

El siguiente paso consiste en comenzar a buscar soluciones para la ecuación de onda (3.56); una solución de particular interés y utilidad (dada su simplicidad) es la onda plana, descrita por

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \tag{3.57}$$

donde  $C_{\mu\nu}$  es un (0, 2)-tensor simétrico y constante, el cual además, obviamente carece de traza y es totalmente espacial

$$\begin{aligned}
C_{0\nu} &= 0 \\
\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

Ahora bien, se tiene una pequeña dificultad, y es que  $e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}}$  es complejo, mientras que  $h_{\mu\nu}^{TT}$  es real; sin embargo, esto se soluciona al realizar todos los cálculos y procesos utilizando tanto la parte real e imaginaria, y al final se toma solamente la parte real de la expresión resultante. Por otro lado, el vector constante  $k^{\sigma}$  es el vector de onda, comprobemos pues, que efectivamente, la solución propuesta satisface la ecuación de onda,

$$0 = \square h_{\mu\nu}^{TT}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\
&= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \left( i k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \right) \\
&= -\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\
&= -k^\sigma k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Puesto que se está interesado en otra solución que no sea la trivial, la última línea de la ecuación implica que

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \tag{3.60}$$

Así pues, la onda plana (3.57) es una solución a la ecuación de onda si el vector de onda es nulo; esto se puede interpretar físicamente como el hecho que las ondas gravitacionales se propagan a una rapidez igual a la de la luz. La componente ‘timelike’ del vector de onda es la frecuencia, por lo que escribimos  $k^\sigma = (\omega, k^1, k^2, k^3)$ . De ser así, escribimos la condición que  $k^\mu$  sea nulo como

$$\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j \tag{3.61}$$

Cabe destacar que, la onda plana propuesta como solución dista de ser la solución más general al problema. Es más, cualquier número de ondas planas diferentes pueden ser superpuestas y continuar siendo una solución (ya que se trata de una ecuación de onda, el principio de superposición sigue siendo válido).

Por otro lado, aún falta por asegurar la condición de que la perturbación sea transversa, es decir

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} \\
&= i C^{\mu\nu} k_\mu e^{i k_\sigma x^\sigma}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

la cual será cierta solamente si

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 \tag{3.63}$$

Así que se dirá que el vector de onda es ortogonal a  $C^{\mu\nu}$ . Por otro lado, la solución puede volverse mucho más ilustrativa si se hace el simple y adecuado cambio de coordenadas tal que la onda viaje en la dirección  $x^3$ , o sea que,

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.64)$$

donde la última igualdad está justificada por el hecho que el vector de onda es nulo  $\rightarrow (k^3)^2 = \omega^2$ . En este caso,  $k^\mu C_{\mu\nu} = 0$  junto con  $C_{0\nu} = 0$  implican

$$C_{3\nu} = 0 \quad (3.65)$$

Por lo tanto, las únicas componentes de  $C_{\mu\nu}$  que no son cero son  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ , y  $C_{22}$ . Pero la simetría de  $C_{\mu\nu}$  y el hecho que no posea traza implican que  $C_{\mu\nu}$  se pueda escribir como

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

De esto se puede ver que, para una onda plana viajando en la dirección  $x^3$ , las dos componentes  $C_{11}$  y  $C_{12}$ , junto con la frecuencia  $\omega$ , caracterizan totalmente la onda gravitacional. Sería agradable observar el efecto que tiene sobre una partícula el paso de una onda gravitacional, con el fin de comprender los efectos físicos de la misma; sin embargo, esto presenta una dificultad, ya que sería posible elegir un sistema coordenado adecuado donde los efectos de la onda sobre la partícula fueran de orden superior al lineal, y por lo tanto, imperceptibles.

Es por esto, que se considerará un conjunto de partículas cercanas cuyas 4-velocidades se encuentren descritas por un solo campo vectorial  $U^\mu(x)$  y que posean un vector de separación  $S^\mu$ . La ecuación de la desviación geodésica nos dice entonces,

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma \quad (3.67)$$

la ecuación anterior, en general, cuantifica el comportamiento o la aceleración relativa de un conjunto de geodésicas cercanas (lo cual es una medida más apropiada para el presente caso), la figura 3.3 ilustra la situación.

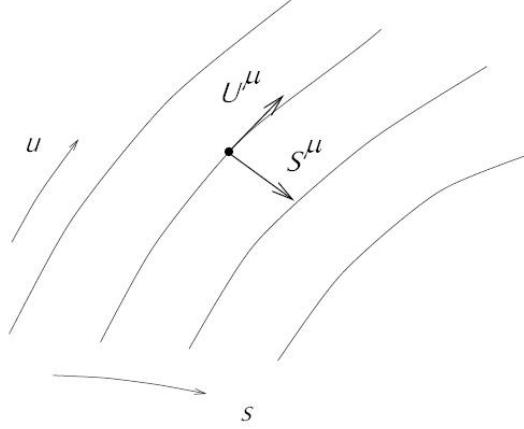


Figura 3.3: La ecuación de la desviación geodésica cuantifica que tanto se aleja o acerca un conjunto de geodésicas que inicialmente se encuentran ‘cerca’ y son ‘paralelas’.

Si suponemos que nuestras partículas se están moviendo lentamente, e ignorando correcciones de orden superior, entonces se puede expresar la 4-velocidad  $U^\mu$  como un vector unitario en la dirección temporal. Por lo tanto, solamente es necesario calcular  $R^\mu{}_{00\sigma}$  (o de manera equivalente,  $R_{\mu 00\sigma}$ ); de (3.5) se tiene que

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \left( \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00}^{TT} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_\mu \partial_0 h_{\sigma 0}^{TT} \right) \quad (3.68)$$

pero  $h_{\mu\nu}^{TT} = 0$ , entonces

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (3.69)$$

Ya que se está suponiendo que las partículas se mueven lentamente, entonces  $\tau = x^0 = t$ ; por lo tanto, la ecuación de la desviación geodésica se reduce a

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}_\sigma \quad (3.70)$$

Esto significa, que para una onda viajando en la dirección  $x^3$ , solamente  $S^1$  y  $S^2$  resultarán afectados; esto a su vez implica que las partículas solamente son perturbadas en direcciones perpendiculares al vector de onda (resultado familiar obtenido en el caso de una onda electromagnética). Ahora, dotemos con una nueva notación a los dos parámetros que caracterizan a la onda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_+ &= C_{11} \\ h_\times &= C_{12} \end{aligned} \quad (3.71)$$

por lo que, obviamente, se redefine el tensor  $C_{\mu\nu}$  como:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

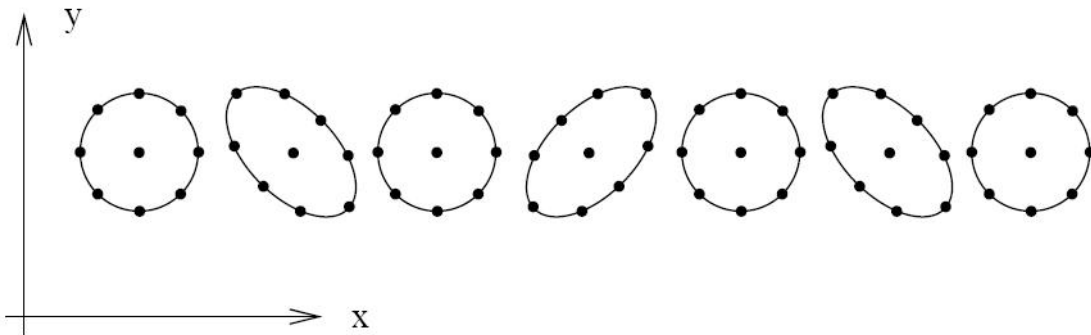


Figura 3.4: El efecto de una onda gravitacional pasajera que posee solamente el componente  $h_+$ . Nótese que el resultado es la distorsión de un círculo de partículas en una elipse oscilante.

Con el fin de ser más claros, se considerarán los efectos de cada uno de estos parámetros por separado. Comenzando con el caso  $h_\times = 0$ , se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S^2 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (3.74)$$

sin entrar en detalles acerca del procedimiento, se afirma que estas ecuaciones son resolubles para producir, al orden más bajo, la siguiente solución:

$$S^1 = \left( 1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) S^1(0) \quad (3.75)$$

$$S^2 = \left( 1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) S^2(0) \quad (3.76)$$

Por lo tanto, las partículas que se encuentren inicialmente separadas en la dirección  $x^1$  oscilarán en la dirección  $x^1$ , y de igual forma para aquellas que posean una separación inicial en  $x^2$ . En pocas palabras, si tuviera al inicio un anillo de partículas estacionarias en el plano  $x - y$ , conforme la onda pasara éstas oscilarían en la forma de una “+” (he ahí el por qué de la notación), como se ilustra en la figura 3.4.

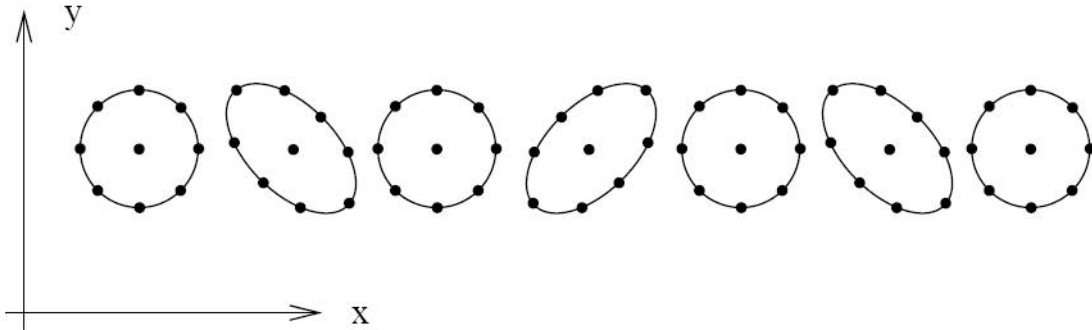


Figura 3.5: El efecto de una onda gravitacional que posee solamente el componente  $H_x$ . En este caso, el resultado es una distorsión en una elipse que oscila en un patrón  $\times$ .

Por otro lado, el análisis equivalente para el otro caso,  $h_+ = 0$  y  $h_\times \neq 0$ , generaría la solución

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2} h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \quad (3.77)$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2} h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0) \quad (3.78)$$

en éste caso, las partículas oscilarían en forma de una “×” como se puede apreciar en la figura 3.5.

Ciertamente, la solución presentada al problema de las ondas gravitacionales es solamente, la más sencilla posible; sin embargo, éste no es el tema principal del presente trabajo, aunque cabe destacar la importancia de un tratamiento más profundo y detallado, puesto que gran parte de los esfuerzos de la astrofísica experimental se concentran, en la actualidad, en la búsqueda de un mecanismo para detectar directamente las ondas gravitacionales.

Hasta aquí pues, llega la parte que pretendía abarcar la teoría preliminar a este trabajo, de ahora en adelante se dedicará a desarrollar la historia y la importancia del experimento Gravity Probe B.



# III. El experimento Gravity Probe-B

## 1. Historia del experimento

**1.1. Introducción.** Resulta curioso observar el hecho que, durante toda la historia de la ciencia, se han hecho un sinnúmero de descubrimientos y propuestas de forma independiente y simultánea, por parte de científicos, muchas veces separados por distancias de miles de kilómetros, que desconocen de su existencia mutua hasta mucho tiempo después. Tal es el caso del experimento *Gravity Probe B*.

La idea de probar la RG por medio de giroscopios fue discutida independientemente por primera vez poco después de 1915, año en que Einstein publicó la teoría, por Schouten, Fokker y Eddington. Consecuentemente, esta discusión motivó a Blackett en la década de 1930 a examinar la propuesta de construir un giroscopio que midiese la precesión predicha por la RG, sin embargo, la tecnología actual convertía en imposible la tarea.

No fue sino hasta 1959, dos años después del lanzamiento del Sputnik, que L.I. Schiff y G.E. Pugh propusieron de forma simultánea e independiente probar la teoría de Einstein al observar las precesiones respecto a una estrella distante de uno o más giroscopios colocados en un satélite orbitando la Tierra. Cabe destacar que cada uno de los científicos llegó a su propuesta por caminos independientes, y cada uno contribuyó de manera significativa al esquema del experimento que se conoce hoy en día.

Sin embargo, antes de indagar más en la precesión de dichos giroscopios, se discutirá brevemente las pruebas propuestas para verificar la RG.

**1.2. Pruebas de la Relatividad General.** Actualmente, se considera que existen solamente cuatro pruebas de la RG más una ‘medio-prueba’. Esta ‘medio-prueba’ es el llamado corrimiento al rojo gravitacional o ‘*gravitational redshift*’, que gracias al experimento Gravity Probe A, ha sido verificado a una exactitud de 1.4 partes en  $10^4$ ;

este fenómeno es en realidad una prueba a la RS y al principio de equivalencia de Einstein, más que a la RG, ya que no es necesario invocar a todo el formalismo y elegancia de la RG para deducirlo.

El primer fenómeno que se considerará como una prueba válida de la RG es la deflexión de la luz ('starlight deflection'), relacionado con este se encuentra también el retraso temporal de los radares ('radar time-delay'). Al día de hoy, es legendaria la expedición de Sir Arthur Stanley Eddington a la Isla Príncipe cerca de África, con el fin de observar el eclipse solar total del 29 de Mayo de 1919.

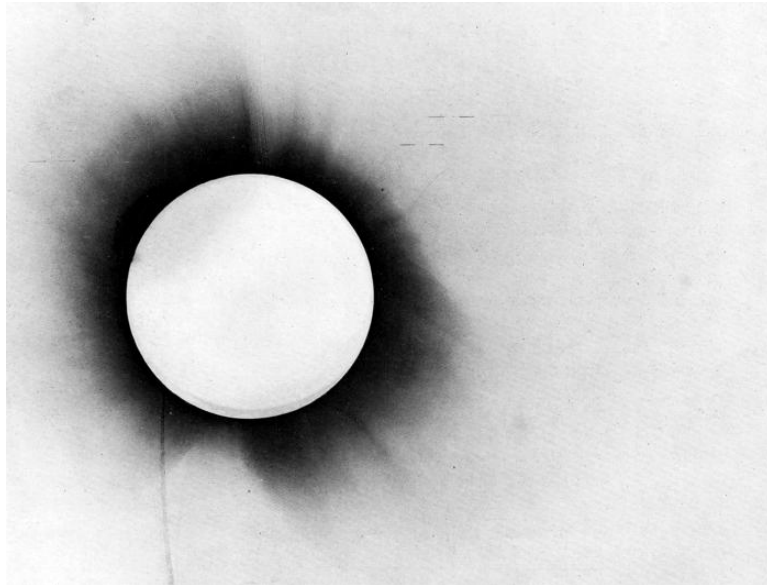


Figura 1.1: Placa fotográfica tomada por Sir Arthur Eddington durante el eclipse solar total del 29 de Mayo de 1919 en la Isla Príncipe, Oceano Atlántico, cerca de África

La teoría Newtoniana clásica predecía una deflexión de la luz que pasa 'rozando' el borde del sol de  $0.875 \text{ seg-arc}^{17}$ , adicionalmente, la mecánica clásica predice que el tirón gravitacional del Sol obliga a la luz a acelerarse. Ahora bien, la RG predice una deflexión del doble del valor predicho por la teoría clásica (como se pudo ver en la ecuación (II.3.49)), pero más importante aún es el hecho que el fundamento de esa

---

<sup>17</sup> Para futuras referencias, 1 segundo de arco corresponde a  $1/3600$  de grado,  $1 \text{ seg-arc} = 100 = 1/3600$  grado.

deflexión viene justificando precisamente por el argumento contrario al Newtoniano: la luz experimenta un retraso al atravesar el campo gravitacional del Sol.

Debido a que se trata de una deflexión muy pequeña, en condiciones normales, el brillo del sol imposibilita una observación de este fenómeno; es por esto que, Sir A. Eddington decidió buscar esta desviación de la luz durante un eclipse solar total (que disminuye el brillo del sol por varios órdenes de magnitud). La figura 1.1 es una de las placas fotográficas tomadas por Eddington durante el eclipse. De acuerdo a estas observaciones, Eddington afirmó que los datos estaban en concordancia con las predicciones de la RG (dentro de los límites experimentales). Esto disparó, de la noche a la mañana, la importancia y popularidad de la RG, convirtiendo a Einstein en una celebridad del mundo científico.

Sin embargo, algún tiempo después se argumentó que los resultados de Eddington no eran totalmente fidedignos y válidos como él afirmó, puesto que para el eclipse, Eddington contaba también con un telescopio localizado en Soral, Brazil. Utilizando las placas fotográficas de este telescopio, se concluía que la deflexión promedio era de  $0.86''$ , un valor muy cercano a la predicción Newtoniana; Eddington, de alguna forma, dio más peso a los resultados obtenidos por él mismo en la Isla Príncipe, y validó la predicción de la RG.

Ahora bien, el párrafo anterior sólo era una pequeña curiosidad, puesto que actualmente se ha logrado medir la deflexión de la luz con procedimientos mucho más sistemáticos y rigurosos (utilizando cuasares y ondas de radio, las cuales no son afectadas por el brillo del sol), y ésta ha sido verificada a una exactitud del 0.5% por medio de una técnica llamada '*Very Long Baseline Interferometry*' (VLBI por sus siglas en inglés). Es más, la desviación de la luz posee una utilidad inmensa en astrofísica y cosmología, ya que por medio del llamado '*gravitational lensing*', se determina la masa de muchos objetos astronómicos supermasivos, como galaxias o cúmulos de galaxias; y además, recientemente, ha sido utilizado éste fenómeno para estimar la cantidad y posición de materia oscura en galaxias.

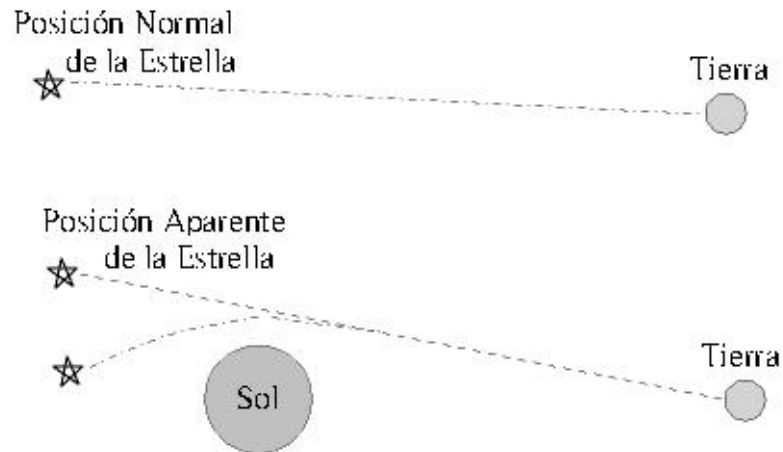


Figura 1.2: La figura ilustra de una forma sencilla la trayectoria 'normal' de un haz de luz en comparación de la trayectoria deflectada por la presencia de un objeto masivo, en este caso el Sol.

La figura 1.2 hace una comparación gráfica de la trayectoria 'normal' de un haz de luz proveniente de una estrella y la trayectoria desviada por la presencia del sol. Nótese que en el segundo caso, el resultado es que se obtiene una posición aparente de la estrella diferente a la posición real de la misma, un fenómeno totalmente similar a la formación de espejismos, los cuales ocurren también al deflectarse la luz, pero esta vez, la deflexión ocurre por un gradiente de temperatura en el aire (el cual genera un índice de refracción variable, y por lo tanto curva la luz).

El otro fenómeno relacionado con esto es el 'radar-time delay', como se mencionó en el párrafo anterior, el efecto del tránsito de la luz por las vecindades del Sol es un retraso de la misma. Por lo tanto, cuando se manda una señal de radar a un objeto que se encuentre detrás del Sol, el tiempo que le demora viajar ida y vuelta a la señal será mayor que el esperado por la teoría clásica. Este fenómeno fue observado por primera vez en 1976 por Irwin Shapiro por medio de mediciones con la sonda Mars Viking Lander; la medida fue hecha a una exactitud del 0.1% y, más recientemente por Bertotti, Iess y Tortora, los determinaron que la medida obtenida era  $1.00001 \pm 0.000012$  el valor predicho por la RG. No es de extrañarse que este fenómeno reciba el nombre de '**Shapiro Time Delay**'.

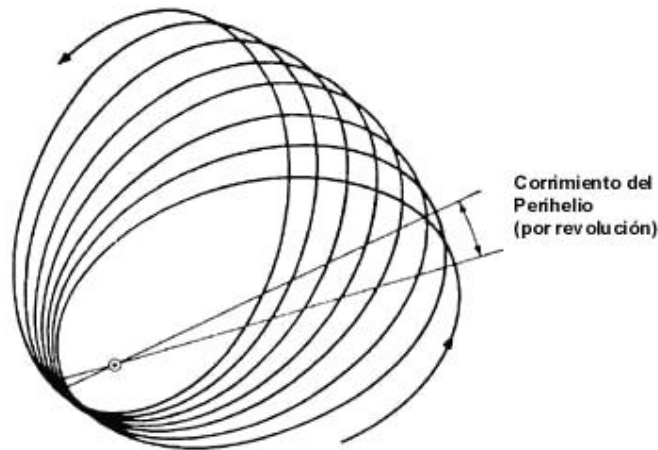


Figura 1.3: La precesión del perihelio de Mercurio.

La siguiente prueba a tratar es, probablemente la más conocida de otras (en parte quizás, por el hecho que fue la primera propuesta por Einstein<sup>18</sup>). Como se conocía desde mucho tiempo previo a la RS, el movimiento de los planetas no era exactamente en órbitas elípticas estáticas, sino más bien, en forma de elipses que se mueven o giran alrededor del sol; este fenómeno recibe el nombre de *precesión* y las órbitas de todos los planetas exhiben este comportamiento aunque, obviamente, a menor escala.

El caso de Mercurio es de particular interés ya que la precesión medida,  $5600''/\text{siglo}$ , no concordaba con el valor predicho por la teoría Newtoniana de  $5557''/\text{siglo}$ , aún cuando se tomaban en consideración todos los factores posibles: el efecto de las fuerzas gravitacionales de los demás planetas, la ligera deformación del sol causada por su rotación y el hecho que la Tierra en realidad no es un marco inercial. Así pues, existía una discrepancia de  $43''/\text{siglo}$  que no podía ser explicada por la teoría Newtoniana<sup>19</sup>. Por otro lado, la RG predecía exactamente los 43 segundos de arco por siglo adicionales.

<sup>18</sup> Originalmente Einstein propuso dos pruebas de su teoría: La precesión del perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz.

<sup>19</sup> Debe aclararse el hecho que esta discrepancia se encontraba muy por encima de las incertidumbres de la medición.

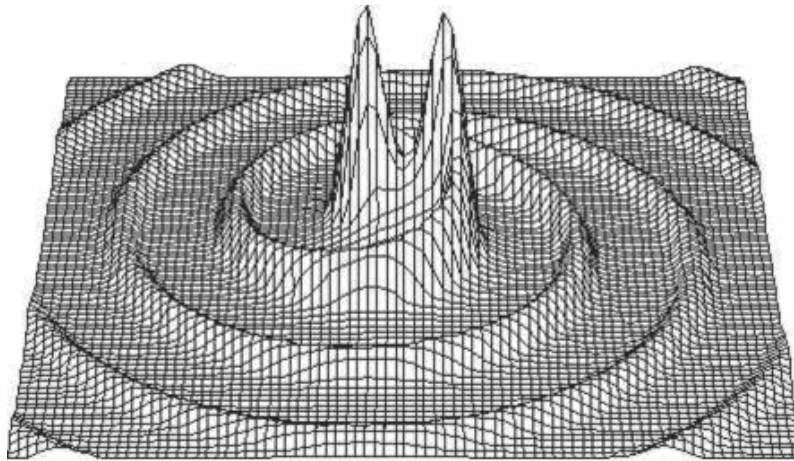


Figura 1.4: Ilustración de las ondas gravitacionales generadas por un sistema de objetos supermasivos que orbitan entre ellos, tales como dos pulsares o dos agujeros negros.

Relacionada con esta prueba, está el llamado efecto *geodético*, que es una precesión del sistema Tierra-Luna conforme este se mueve a través del espacio-tiempo curvo. Actualmente, se ha determinado la concordancia del perihelio de Mercurio a una exactitud del 0.3%, mientras que nuevamente, por medio del VLBI, se ha fijado a una exactitud del 2% el efecto geodético. La figura 1.3 muestra la precesión de la órbita de Mercurio alrededor del sol.

Por último, se discutirá la que se puede argumentar como la prueba más emocionante, en el sentido físico, de todas las propuestas: la detección de las ondas gravitacionales. Como se explicó en el capítulo anterior, las ondas gravitacionales son un fenómeno totalmente nuevo, con el cual no existe ningún análogo en la teoría Newtoniana. Sin embargo, debe aclararse que, por el momento, no ha sido posible detectar directamente las ondas gravitacionales; las mediciones con que se cuenta tienen su base en el decaimiento de la órbita de un sistema binario de pulsares, y resulta ser que la energía perdida en ese decaimiento coincide (dentro de límites experimentales, con una precisión de alrededor del 0,8 %) con la pérdida de energía en forma de ondas gravitacionales para ese sistema.

Actualmente, existen proyectos de significativa importancia y magnitud dedicados a la búsqueda y detección directa de ondas gravitacionales. Tal es el caso del proyecto LIGO (The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observer, por sus siglas en inglés).

Retornemos ahora, al tema principal del presente trabajo: un experimento diseñado para medir el arrastre de los marcos inerciales. Recuérdese que esta propuesta fue hecha de manera simultánea por dos científicos. Sin ninguna razón en particular y por conveniencia, se comenzará con la propuesta de Schiff.

**1.3. La Propuesta de Schiff.** El interés de Schiff por la RG se puede remontar hasta el año de 1939, cuando bajo la influencia de Oppenheimer, escribió un artículo acerca de la aplicación del principio de Mach a cargas eléctricas en rotación. Otro de los intereses de Schiff era el principio de equivalencia, y probablemente, sea esto lo que lo motivó posteriormente a observar y demostrar lo tenue que, en esa fecha, era la evidencia que respaldaba la RG. Esto lo hizo por medio de un artículo titulado ‘On Experimental Tests of the General Theory of Relativity’ (Acerca de las Pruebas Experimentales de la Relatividad General), remitido a la revista *American Journal of Physics* el 6 de Octubre de 1959<sup>20</sup>.

En este artículo, Schiff hace mención al hecho que en 1915, Einstein había identificado tres pruebas observacionales de la RG (mencionadas en la sección anterior): el corrimiento al rojo gravitacional, la deflexión de la luz por el sol y la precesión del perihelio de Mercurio. Cuarenta y cuatro años después, en 1959, esas seguían siendo las únicas observaciones factibles. El propósito de Schiff era investigar, hasta que punto, era necesario utilizar todo el formalismo de la RG en el cálculo de estos tres efectos.

Resulta ser que, como se mencionó con anterioridad, el corrimiento al rojo no es una prueba del formalismo de la RG, basta con la teoría de la RS y el principio de equivalencia para demostrar el mismo. Por otro lado, se creía que la deflexión de la luz

---

<sup>20</sup> L.I. Schiff, *Am. J. Phys.* **28**, 340 (1960).

era un fenómeno que necesitaba de todo el formalismo de la RG para ser explicado, ya que si se utilizaba la RS y una teoría clásica ‘balística’ de la luz, se obtenía una deflexión cuyo valor correspondía a solamente la mitad del valor calculado después de la publicación de la RG<sup>21</sup>, valor que Eddington afirmó medir en el eclipse de 1919.

Sin embargo, Schiff opinaba que Einstein había realizado su cálculo de forma errónea. Aplicando un razonamiento similar al de W. Lenz, Schiff afirma que adicional a la deflexión causada por la dilatación del tiempo (este fue el cálculo que hizo Einstein), existía además otro fenómeno relativista: éste resultaba de la ‘contracción FitzGerald’ del espacio radialmente hacia el Sol. Resulta ser que éste término es exactamente de la misma magnitud al término de Einstein, y además, en la misma dirección. Por lo tanto, la suma de ambos efectos correspondía a la deflexión observada. Por último Schiff admite que, efectivamente, la precesión del perihelio de Mercurio si constituye una verdadera prueba a la RG, ya que ésta no puede ser calculada sin introducir una ecuación de movimiento (la ecuación de la geodésica (II.2.8)).

Ahora bien, aunque posteriormente, el argumento de Schiff acerca de la deflexión de la luz ha sido duramente criticado, su importancia radica en el hecho que para el propio Schiff, dos de las ‘pruebas cruciales’ de la RG fracasaban en ser pruebas cruciales; y además, argumenta que resulta imposible realizar experimentos en la Tierra que no hagan otra cosa que corroborar la RS y el principio de equivalencia, ya que es imposible lograr la precisión necesaria de tales experimentos.

Así pues, en un lapso de tiempo de tres meses, Schiff había concebido un experimento involucrando giroscopios que trataba acerca de dos pruebas nuevas de la RG, donde ambas verificaban las ecuaciones de movimiento más allá de la aproximación Newtoniana, y en particular, una de ellas verificaba un aspecto totalmente nuevo y sin precedentes de la teoría.

---

<sup>21</sup> Fue el propio Einstein que hizo por primera vez este cálculo en un artículo fechado en 1911.

Aparentemente, juega un papel determinante la publicación de un anuncio del *JPL* (Jet Propulsion Lab, por sus siglas en inglés) en la revista *Physics Today* de diciembre de 1959. El anuncio poseía el siguiente título: *The Cryogenic Gyro: A fundamentally new type of gyroscope with the possibility of exceptionally low drift rates*. Se conjetura que éste fue el catalizador necesario para la redacción de 68 páginas de notas escritas a mano por Schiff; en éstas, Schiff comenta acerca de la posibilidad de realizar, con estos nuevos giroscopios, dos experimentos científicos: una prueba del principio de Mach y un experimento de relojes relativistas.

La prueba propuesta por Schiff acerca del principio de Mach carece de trascendencia, a excepción del hecho que propone una metodología interesante: el uso de varios giroscopios apuntando en diferentes direcciones. Además, Schiff acierta en afirmar que las precisiones requeridas deben ser del orden de 0.0100 a 0.10, comparables con las mejores observaciones astronómicas de la fecha. Ahora bien, el verdadero progreso lo logró Schiff al trabajar el segundo experimento, donde los giroscopios se utilizan como relojes.

Después de un análisis profundo Schiff, siguiendo en parte el razonamiento desarrollado por A. Papapetrou *Spinning test-particles in general relativity*<sup>22</sup> (Partículas de prueba giratorias en la RG), llega a la siguiente e importante conclusión: cambios en el potencial gravitatorio si afectan la velocidad de rotación del giroscopio en concordancia con la fórmula estándar del corrimiento al rojo. Además el movimiento a lo largo de los equipotenciales Newtonianos deja invariante la velocidad de giro pero causa una precesión: la precesión geodética.

Exactamente cuándo se le ocurrió a Schiff la idea de realizar un experimento espacial es una incógnita. Se podría argumentar que él tomó en consideración factores que si se operara en un ambiente cero-g (ingravidez), las prestaciones de un giroscopio incrementarían tremendamente al eliminarse factores como torques de pesos y otras complicaciones. Sin embargo, ¡Parece ser que la idea surgió por conveniencia

---

<sup>22</sup> E. Corinaldesi y A. Papapetrou. *Proc. Roy. Soc.* **A209**, 259 (1951).

matemática!, ya que las ecuaciones del artículo de Papapetrou, son válidas únicamente cuando se aplican al movimiento libre en el campo de Schwarzschild, y para Schiff resultaba complicado realizar los cálculos del movimiento con restricciones que experimentaba un giroscopio en la Tierra.

Finalmente Schiff, después de ésta investigación, se propuso a calcular el efecto correspondiente a lo que hoy llamamos '*frame dragging*' o arrastre de marcos inerciales. Éste cálculo fue mucho más elaborado que el realizado por Lense y Thirring en 1918, ya que los cálculos de Schiff predecían una precesión que dependía, a diferencia del arrastre de Lense y Thirring para un sistema luna-planeta, de la inclinación de la órbita, y además dicho arrastre cambiaba de signo en órbitas ecuatoriales.

**1.4. La Propuesta de Pugh.** Totalmente diferente al de Schiff, fue el camino seguido por Pugh, el cual se puede catalogar como extremadamente simple y directo. En el año de 1958, H. Yilmaz<sup>23</sup> publicó una nueva teoría covariante alternativa a la RG que concordaba en los experimentos claves con las predicciones de la RG. Además, Yilmaz argumenta que, una forma de diferenciar entre una teoría generalmente covariante escalar, vectorial y tensorial, sería observar y medir el arrastre Lense-Thirring; ya que una interacción vectorial o tensorial predice un arrastre de 0,5600/año, mientras que una interacción escalar no causaría arrastre alguno.

En éste punto, Pugh toma la idea de Yilmaz y la lleva un paso más allá, al concebir la colocación de un cuerpo giratorio grande en órbita, y comparar su dirección de giro con la línea de visión (line of sight) a una estrella de referencia 'fija'; el telescopio de referencia se debería montar en el cuerpo giratorio, alineado con el principal eje de inercia del sistema. Las mediciones consistirían en observar los cambios graduales en el diámetro de los círculos trazados por la imagen de la estrella en el plano focal del telescopio.

---

<sup>23</sup> H. Yilmaz, *Phys. Rev.* **111**, 1417 (1958).

Posteriormente, Pugh decide analizar las perturbaciones no-relativistas que podrían afectar el giro del satélite, y se enfoca principalmente en tres: gradientes gravitacionales, efectos magnéticos y arrastre atmosférico. De estos, el principal obstáculo del experimento lo conforma el arrastre atmosférico.

Precisamente es acá donde se observa la brillantez de Pugh, ya que cuando muchos daban por insalvable ésta dificultad, él propuso el uso de un satélite secundario, el cual podría consistir de un cascarón esférico cuyo centro de masa fuera igual al del satélite principal. La función de dicho satélite secundario sería, claramente, eliminar el efecto del arrastre atmosférico en el satélite principal; además, el satélite secundario estaría equipado con pequeños cohetes o retro-propulsores, los cuales se encargarían de reposicionar al mismo y así evitar una colisión de los dos satélites.

Esta es, brevemente, la historia detrás del experimento Gravity Probe B. Solamente falta realizar una deducción rigurosa de los fenómenos que pretende medir el mismo, y por último, lo más importante de todo experimento: un análisis de las consecuencias e implicaciones que tendrá en la física éste experimento.

## 2. Diseño del experimento

**2.1 El efecto Lense-Thirring y el arrastre de los marcos inerciales.** Las analogías entre el electromagnetismo y la versión linealizada de la RG son muchas. Para comenzar, se conocía desde hacía mucho tiempo la similitud entre la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{e12} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (2.1)$$

donde  $\hat{r}_{12}$  es un vector unitario que va de la carga  $q_1$  a la carga  $q_2$  y  $k$  es una constante de proporcionalidad, y la conocida Ley de Gravitación Universal de Newton,

$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.2)$$

Vemos pues, que la principal diferencia entre estas fuerzas radica en el hecho que la gravitación (2.2) siempre es atractiva (por la presencia del signo menos -, junto con el hecho que las masas siempre son positivas), mientras que la fuerza eléctrica (2.1) puede ser tanto atractiva como repulsiva. Por otro lado, ambas fuerzas son proporcionales al producto de cargas (masas) e inversamente proporcionales al cuadrado de la separación entre las mismas y, además, ambas fuerzas actúan en dirección a la línea que une a los objetos (cargas y masas respectivamente).

Así pues, dejando a un lado los nombres de carga y masa, es evidente la similitud que existe entre ambas fuerzas. Ahora bien, uno de los grandes misterios y retos de la física consiste en el hecho de lo contrastantes que son las magnitudes de dichas fuerzas, ya que si se toma la razón entre la fuerza eléctrica y gravitatoria de dos partículas elementales, por ejemplo dos electrones, entonces se tiene que  $F_e / F_g \approx 10^{42}$ .

Cambiando un poco de tema, haciendo un análisis relativamente simplista, se puede afirmar que, la diferencia entre las fuerzas ‘electrostáticas’ y ‘electromagnéticas’ es un simple cambio de coordenadas. Esto se sustenta en el hecho que si se cuenta con una carga de prueba en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$ , entonces para cierto sistema coordenado (uno que tenga su origen fijo en el centro de masa de la carga  $Q$ ) la fuerza magnética  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  será cero, mientras que para otro sistema coordenado donde  $\vec{v} = d\vec{r} / dt \neq 0$ , se tendrá que  $\vec{F}_m \neq 0$ .

Ya que tanto el EM como la RG son tan dependientes a los cambios de coordenadas, se podría conjeturar que también existe un análogo a la fuerza electromagnética para el caso de la gravitación: una fuerza ‘gravitomagnética’. En base a esto, siguiendo la ley de Biot-Savart, se puede hacer un proceso análogo, reemplazando cargas por masas, junto con sus respectivas constantes, y llegar eventualmente, después de un considerable trabajo y técnicas específicas, a una expresión para el campo gravitomagnético (el cual se definió con anterioridad en la ecuación (II.3.20)). Sin embargo, dicho procedimiento podría parecer un abuso de la analogía entre el EM y la

RG linealizada, motivo por el cual se seguirá un procedimiento un poco más riguroso, que es el empleado por O’hanian & Ruffini.

Comencemos analizando el campo gravitacional que rodea a una masa que se encuentra en rotación, ciertamente, éste campo diferirá del campo generado por una masa que no esté rotando (aquí es útil invocar a la analogía del EM, donde una carga que se encuentra en rotación produce un campo eléctrico y magnético, mientras que una carga en ‘reposo’ producirá únicamente un campo eléctrico  $\vec{E}$ ). Como primer paso, definiremos una versión ‘*trace-reversed*’ (con la traza invertida) de nuestra perturbación  $h_{\mu\nu}$  como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.3)$$

el nombre de éste objeto se hace evidente al notar que

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = -h \quad (2.4)$$

Esta nueva perturbación sigue manteniendo la posibilidad de realizar transformaciones de calibración, bajo una de éstas transformaciones, la perturbación  $\bar{h}_{\mu\nu}$  se transforma como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} - \partial_\lambda\xi^\lambda\eta_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

por lo que, si se escoge que el parámetro de calibración  $\xi_\mu$  satisfaga  $\square\xi_\mu = -\partial_\lambda\bar{h}^\lambda{}_\mu$ , entonces, logramos obtener que

$$\partial_\mu\bar{h}^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

La condición expresada en la ecuación (2.6) se conoce como **calibración de Lorenz**, la cual es análoga a la condición  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , usada en EM. Nótese la utilidad y ventaja de utilizar la versión ‘*trace-reversed*’ de la perturbación, ya que la original no es transversa, puesto que

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\nu h \quad (2.7)$$

Otra ventaja más de utilizar  $\bar{h}_{\mu\nu}$  se mira al introducir esta definición en la ecuación del tensor de Einstein (II.3.8) y utilizar la calibración de Lorenz para obtener la siguiente simple expresión:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

por lo que la ecuación de campo será

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu} \Leftrightarrow \square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi GT^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

la cual es una ecuación de onda para cada uno de los componentes (si se hubiera utilizado la perturbación original  $h_{\mu\nu}$ , se obtendría una expresión más complicada). En el caso de contar con una rotación constante, el campo generado será estático (independiente del tiempo) y la ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu}(\bar{x}) = -16\pi GT^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

ésta tiene como solución la siguiente expresión:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\bar{x}) = -4G \int \frac{T^{\mu\nu}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x' \quad (2.11)$$

Este tipo de soluciones son familiares en la teoría de los potenciales retardados. Con el fin de evaluar la integral que aparece en (2.11), se realiza la expansión de Taylor del término  $1/|\bar{x} - \bar{x}'|$ , manteniendo únicamente los primeros dos términos de la serie, i.e.

$$\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{x^k x'^k}{r^3} \quad (2.12)$$

utilizando dicha aproximación, rescribimos (2.11) como

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\bar{x}) = -4G \int \frac{T^{\mu\nu}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x' - \frac{4Gx^k}{r^3} \int x'^k T^{\mu\nu}(\bar{x}') d^3x' \quad (2.13)$$

Desglosemos un poco la última expresión y evaluemos parte por parte. Para la primera integral, se tiene que

$$\int T^{00}(\bar{x}') d^3x' = M \quad (2.14)$$

$$\int T^{\mu\nu}(\bar{x}') d^3x' = 0 \quad (2.15)$$

donde  $M$  es la masa total del sistema. La primera expresión de la ecuación anterior se deduce sin mucha dificultad de la definición de la componente 00 del tensor estrés-energía; mientras que para obtener la ecuación (2.15) partamos de la ley de conservación  $\partial/\partial x'^{\mu} T^{\mu\nu}(\bar{x}') = 0$ . Puesto que se asume que el campo es estático, entonces la distribución de materia también será independiente del tiempo y se tiene que la ley de conservación se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} T^{i\mu}(\bar{x}') = 0 \quad (2.16)$$

a continuación, si se multiplica la ecuación anterior por  $\bar{x}'^k$  y se integra sobre todo el volumen del sistema obteniendo

$$\int \bar{x}'^k \frac{\partial}{\partial x'^i} T^{i\mu}(\bar{x}') d^3 x' = 0 \quad (2.17)$$

por último, se integra por partes la expresión anterior para obtener (2.15). Continuando con el proceso, la segunda integral de (2.13) tiene el siguiente valor:

$$\int \bar{x}'^k T^{00}(\bar{x}') d^3 x' = 0 \quad (2.18)$$

$$\int \bar{x}'^k T^{i0}(\bar{x}') d^3 x' = \frac{1}{2} \varepsilon^{kij} S^j \quad (2.19)$$

$$\int \bar{x}'^k T^{ij}(\bar{x}') d^3 x' = 0 \quad (2.20)$$

donde  $\varepsilon^{kij}$  es el símbolo de Levi-Civita<sup>24</sup> y  $S^j$  es el momentum angular del sistema. La ecuación (2.19) simplemente es una forma de afirmar el hecho que el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el centro de masa, ésta es una suposición que se hace con el fin de simplificar en lo mayor posible los cálculos.

Para derivar la ecuación (2.20) se partirá nuevamente de la ecuación (2.16), sólo que ésta vez se multiplicará por  $\bar{x}'^k \bar{x}'^j$  y se integrará sobre todo el volumen para obtener

$$\int \bar{x}'^k \bar{x}'^j \frac{\partial}{\partial x'^i} T^{i\mu}(\bar{x}') d^3 x' = 0 \quad (2.21)$$

nuevamente, usando integración por partes se llega a la siguiente identidad

$$-\int \bar{x}'^j T^{i\mu}(\bar{x}') d^3 x' - \int \bar{x}'^i T^{j\mu}(\bar{x}') d^3 x' = 0 \quad (2.22)$$

<sup>24</sup> La definición de éste objeto se encuentra en cualquier texto de análisis vectorial avanzado.

Ahora bien, el momentum angular se define como la integral del producto cruz del vector posición con la densidad de momentum. Por ejemplo, la componente  $x$  es  $S^1 = \int \bar{x}'^2 T^{30} - \bar{x}'^3 T^{20} d^3 x'$ . En general se tiene que

$$S^j = \int \varepsilon^{jki} \bar{x}'^k T^{i0} d^3 x' \quad (2.23)$$

Si se utiliza la identidad (5.22), se observa que podemos describir a  $S^1$  como  $S^1 = 2 \int \bar{x}'^2 T^{30} d^3 x'$ . Esta última ecuación es precisamente la componente  $k = 2, i = 3$  de la ecuación (2.20). El resto de componentes se calcula de forma similar. Por último, comencemos con la siguiente identidad

$$T^{ij}(\bar{x}') = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'^m} \left[ x'^j T^{im}(\bar{x}') + x'^i T^{jm}(\bar{x}') \right] \quad (2.24)$$

por lo tanto, integrando por partes

$$\begin{aligned} \int \bar{x}'^k T^{ij}(\bar{x}') d^3 x' &= \frac{1}{2} \int x'^k \frac{\partial}{\partial x'^m} \left[ x'^j T^{im}(\bar{x}') + x'^i T^{jm}(\bar{x}') \right] d^3 x' \\ &= -\frac{1}{2} \int \delta_m^k \left[ x'^j T^{im}(\bar{x}') + x'^i T^{jm}(\bar{x}') \right] d^3 x' \\ &= -\frac{1}{2} \int \left[ x'^j T^{ik}(\bar{x}') + x'^i T^{jk}(\bar{x}') \right] d^3 x' \end{aligned} \quad (2.25)$$

La última expresión es igual a cero como consecuencia de la identidad (2.22).

Utilizando todos los resultados obtenidos, finalmente llegamos a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} h_{00}(\bar{x}') &= -\frac{2GM}{r} \\ h_{i0}(\bar{x}') = h_{0i}(\bar{x}') &= -\frac{2G}{r^3} \varepsilon^{kij} x^k S^j \\ h_{ij}(\bar{x}') &= -\frac{2GM}{r} \delta_i^j \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si además suponemos que la dirección del momentum angular coincide con el eje  $z$  del sistema coordenado, se obtiene

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Phi & -2GS_z y/r^3 & 2GS_z x/r^3 & 0 \\ -2GS_z y/r^3 & -2\Phi & 0 & 0 \\ 2GS_z x/r^3 & 0 & -2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Phi \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Si se compara la perturbación  $h_{\mu\nu}$  del caso con rotación respecto a la perturbación para un campo de una masa esférica sin rotación (II.3.46), se ve que difieren en la presencia de los términos no diagonales  $h_{0i}$ .

Ahora bien, se podría preguntar qué tan significativos son éstos nuevos términos, y en realidad debido a que las rotaciones de la Tierra y el Sol son bastante pequeñas, los efectos en la vida diaria son indetectables. Para observarlos, es necesario el uso de satélites artificiales especialmente diseñados; en el caso de un satélite, el efecto principal de dichos términos es una precesión del momentum angular orbital (es decir, una precesión del plano de la órbita) alrededor del eje de rotación de la Tierra. Ésta es la llamada **Precesión de Lense-Thirring**.

Para calcular esta precesión, si se deseara ser totalmente formal, sería necesario examinar la ecuación de movimiento (ecuación de la geodésica) de una partícula en el campo gravitacional descrito por (2.27); sin embargo, ese procedimiento resulta ser bastante complicando, y es mucho más simple obtener una respuesta valiéndose de la analogía entre EM y RG.

Resulta ser que la precesión de Lense-Thirring es análoga a la precesión del momentum angular orbital de una partícula cargada que orbita otra partícula, la cual está provista de un momento dipolar magnético. Recordando, el campo magnético de un dipolo  $\vec{m}$  está dado por la siguiente fórmula (omitiendo constantes)

$$B = \frac{3\vec{n} \cdot \vec{m} - \vec{m}}{r^3} \quad (2.28)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario en la dirección radial,  $\vec{n} = \vec{r}/\|\vec{r}\|$ . El torque ejercido por este campo magnético en el dipolo  $\vec{m}'$  es

$$\tau = \vec{m}' \times \vec{B} = \vec{m}' \times \frac{3\vec{n} \cdot \vec{m} - \vec{m}}{r^3} \quad (2.29)$$

Por analogía, postularemos que el campo gravitomagnético de la Tierra es

$$\vec{H} = -4G \frac{3\vec{n} \cdot \vec{S} - \vec{S}}{2r^3} \quad (2.30)$$

Si se nota cuidadosamente, se ha introducido un factor de 2 en el denominador, porque que el análogo del momento magnético  $\vec{m}$  es  $\vec{S}/2$  y no  $\vec{S}$ , puesto que la definición de  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int x' \times J d^3 x'$  incluye un factor de  $1/2$ , mientras que la definición de  $\vec{S}$  no. Continuando con la analogía, el torque ejercido por el campo gravitomagnético es

$$\tau = \frac{\vec{L}}{2} \times \vec{H} = -G\vec{L} \times \frac{3\vec{n} \cdot \vec{S} - \vec{S}}{r^3} \quad (2.31)$$

Ahora bien, en ésta última expresión, el término  $\vec{n} \cdot \vec{S}$  debe ser sustituido por su valor promedio a lo largo de la órbita, puesto que únicamente al considerar promedios es que podemos conceptualizar a la partícula que órbita como un cuerpo giratorio para el cual la interacción dipolo-dipolo es válida. Para una órbita polar circular (o casi circular), el valor promedio  $\langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle$  es  $\vec{S}/2$ , mientras que para una órbita ecuatorial es cero<sup>25</sup>.

Por lo tanto, la tasa de cambio del momentum angular orbital es

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -G \frac{\vec{L} \times (3\langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle - \vec{S})}{r^3} \quad (2.32)$$

De la última ecuación, podemos identificar a la velocidad de precesión angular como:

$$\vec{\Omega}_{LT} = G \frac{3\langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle - \vec{S}}{r^3} \quad (2.33)$$

<sup>25</sup> Con fines de simplicidad, se omitirán los cálculos de éstas afirmaciones.

En el caso de una órbita polar, donde  $\langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle = \bar{S}/2$ , la dirección de la precesión es la misma que la dirección de rotación de la Tierra. Para una órbita ecuatorial,  $\langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle = 0$ , y la rotación es en sentido contrario.

Más aún, si la órbita polar es de baja altitud (es decir, si  $r \approx R_E$ ), entonces la magnitud de la precesión Lense-Thirring corresponde a unos 0.05 segundos de arco por año. En los años sesenta, Schiff realizó éste cálculo con mayor precisión y determinó que para una órbita polar de 650 km de altitud,  $|\bar{\Omega}_{LT}|$  es **0.042 segundos de arco por año**. Ésta es una de las predicciones teóricas que tratará de medir el GP-B.

**2.2. La precesión geodética o precesión de de Sitter-Fokker.** Cuando se discutió por primera vez el concepto de curvatura en II.2, se hizo énfasis en el hecho que una de las características que diferencian al espacio plano del curvo, es que en el primero el transporte paralelo deja invariante a un vector, mientras que en el último altera su dirección (recuérdese la figura (II.2.1)). Éste hecho sugiere que una forma factible de detectar la curvatura del espacio-tiempo circundante a la Tierra es, precisamente, examinar el transporte paralelo.

Si nos decantamos por la propuesta del transporte paralelo, sin duda alguna, la primera duda que surgirá sería: ¿en qué vector tratamos de medir y observar dicha diferencia en el transporte paralelo? Para responder a esta pregunta, primero recordemos que en la física ‘no gravitacional’, el transporte de un giroscopio en el espacio (suponiendo la ausencia de fuerzas resistivas) no altera la dirección de su espín  $S$ ; el panorama cambia radicalmente al considerar el caso de la física gravitacional.

En este caso, un cuerpo rígido en un campo gravitacional está sujeto a un torque, el cual a su vez genera una variación del espín descrita por<sup>26</sup>

---

<sup>26</sup> Con fines de simplicidad y brevedad se introduce sin mayor explicación ésta ecuación, si desea profundizar más en el tema consulte, por ejemplo, el capítulo 1 del texto de O’hanian (1994, capítulo 1), en particular la ecuación (1.66).

$$\frac{dS^\mu}{dt} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma} R'_{0\tau 0}{}^\mu \left( -I^{V\tau} + \frac{1}{3} \delta_\nu^\tau I^{rr} \right) \quad (2.34)$$

donde  $R'_{0\tau 0}{}^\mu$  es el tensor de Riemann evaluado en el marco de reposo del giroscopio y  $I^{V\tau}$  es el tensor de inercia del mismo. En general, la presencia del tensor de Riemann del lado derecho de la ecuación (2.34) es un indicador que en general el transporte del vector espín  $S^\mu$  no imita al transporte paralelo. Sin embargo, se puede introducir un alto grado de simplificación si se hace la suposición acerca de la existencia de un giroscopio perfectamente esférico, para el cual no sólo  $I^{V\tau} \propto \delta_\nu^\tau$  sino que  $I^{V\tau}$  es tal que hace cero el término que se encuentra en paréntesis en el lado derecho de la ecuación (5.34). En este caso, la ecuación de movimiento se reduce a  $dS^\mu/dt = 0$ .

Ahora bien, en este punto es totalmente válido dudar acerca de la existencia de este hipotético giroscopio perfecto; en realidad, éste es uno de los puntos débiles del experimento, ya que, por muy buena que sea la manufactura de los giroscopios, es imposible en la realidad alcanzar la perfección matemática necesaria (más aún, no sólo sería necesario fabricar dicho giroscopio perfecto, sino que también sería necesario alinearlo perfectamente, otra labor imposible en la realidad) y  $dS^\mu/dt \neq 0$ . Sin embargo, esto ha sido tomado en cuenta, y durante el experimento se realizarán las correcciones apropiadas que mantendrán éstas fuentes de error por debajo del nivel de tolerancia aceptado para el experimento.

Dicho esto, generalizando la  $dS^\mu/dt = 0$  para el espacio curvo tendríamos,

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.35)$$

es necesario destacar que el último resultado es válido únicamente para un sistema de referencia que se mueva a lo largo de una geodésica, i.e., que se encuentre en caída libre; ya que si una fuerza adicional (de carácter no gravitacional) actúa sobre el giroscopio, incluso en el espacio plano ocurrirá una precesión del espín del giroscopio, conocida como **Precesión de Thomas**. Si deseamos generalizar la ecuación (2.34) para que sea

válida en todo sistema coordenado, entonces es necesario recurrir a la ecuación del transporte paralelo del vector  $S^\mu$

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu S^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.36)$$

Con base en la ecuación anterior, es posible calcular cómo el vector de espín  $S^\mu$  cambia de dirección mientras el giroscopio se mueve en caída libre. Ésta es la respuesta a la pregunta que se planteó, ya que si suponemos que nuestro giroscopio se encuentra en una órbita circular de radio  $r_0$  alrededor de la Tierra entonces, experimentalmente se puede medir el cambio de la dirección del espín respecto a las ‘estrellas fijas’ (en teoría, esto es equivalente a medir el cambio respecto a un sistema coordenado fijo que se encuentre en el infinito).

Resulta ser que, para realizar dicha medición, es mucho más conveniente escoger las coordenadas rectangulares usuales  $x, y, z$  (las cuales asumiremos son ‘isotrópicas’<sup>27</sup>). Esto se justifica ya que cualquier cambio en las componentes rectangulares de  $S^\mu$  se puede atribuir a la curvatura del espacio-tiempo, mientras que un cambio en las componentes polares es la suma de la curvatura de las coordenadas, junto con la curvatura del espacio-tiempo.

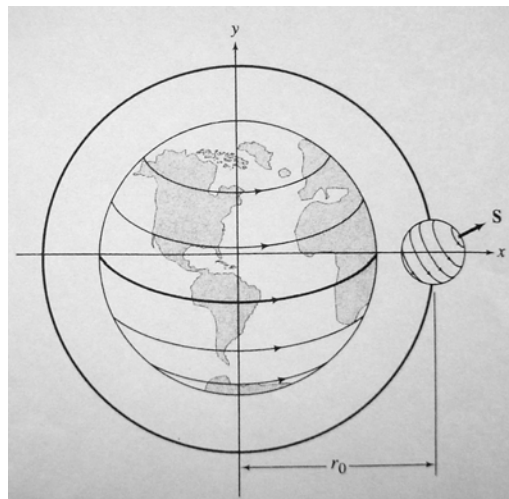


Figura 2.1: Órbita circular ideal en el plano  $x$ - $y$ , en la cual se estudia en particular el punto  $x=r_0, y=0, z=0$ .

<sup>27</sup> Con esto, nos referimos a que, como se trabaja con un espacio que es casi plano, entonces las coordenadas cartesianas  $x, y, z$  son prácticamente las mismas a lo largo de todo el espacio

Prosiguiendo, si se recuerda que nos encontramos en el contexto de la teoría linealizada, basta con tomar una aproximación de la solución de Schwarzschild. En esta aproximación, el elemento de línea es de la forma:

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.37)$$

o equivalentemente

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - 2GM/r) & & & \\ & 1 + 2GM/r & & \\ & & 1 + 2GM/r & \\ & & & 1 + 2GM/r \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Con el fin de simplificar un poco el análisis se supondrá, sin pérdida de generalidad, que la órbita es en el plano  $x$ - $y$ . Además se evaluará la ecuación (2.36) en un punto específico de la órbita, digamos  $x = r_0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , como se muestra en la figura 2.1. Ya que todos los puntos en una órbita circular son equivalentes, entonces si se conoce la razón de cambio del espín en un punto, es posible deducirla para cualquier otro punto. En el punto escogido, al orden más bajo en  $GM$  (es decir, despreciando todos los términos de orden  $(GM)^2$  o superior) siguiendo (II.3.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{1\rho} (\partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00} + \partial_0 h_{\rho 0}) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{11} (\partial_0 h_{01} - \partial_1 h_{00} + \partial_0 h_{10}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{11} (2\partial_0 h_{10} - \partial_1 h_{00}) = \frac{1}{2} \partial_1 h_{00} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2GM}{2r} = \frac{GM}{r^2} + O(h^2) \\ &= \frac{GM}{r^2} \Big|_{x=r_0} = \frac{GM}{r_0^2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

de manera similar, se obtienen que los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = GM / r_0^2 \\
&= \Gamma_{00}^1 = GM / r_0^2 \\
&= \Gamma_{11}^1 = -GM / r_0^2 \\
&= \Gamma_{22}^1 = GM / r_0^2 \\
&= \Gamma_{33}^1 = GM / r_0^2 \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -GM / r_0^2 \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = -GM / r_0^2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Mientras que el resto de símbolos de Christoffel son cero. Por lo tanto, se tiene que para las componentes espaciales del espín, la ecuación (2.36) será

$$\frac{dS^k}{d\tau} = -\Gamma_{\alpha\beta}^k S^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{2.41}$$

Con el fin de poder evaluar el lado derecho de (2.41), necesitamos la cuatro-velocidad,  $dx^\beta/d\tau$ , que en nuestro caso será  $dx^\beta/d\tau \approx (1, 0, v, 0)$ ; así como también de la componente temporal  $S^0$  del espín. Para encontrar esta última, nótese que en el marco de referencia de reposo del giroscopio,  $S^0 = 0$  (la interpretación física es que para el sistema coordinado en cuestión, el espín no cambia con respecto al tiempo) y  $dx^\beta/d\tau = (1, 0, 0, 0)$ , por lo que  $g'_{\mu\nu} S^\mu dx^\nu/d\tau = 0$ . Ahora bien, esta ecuación deberá ser válida en cualquier sistema coordinado, i.e.,  $g_{\mu\nu} S^\mu dx^\nu/d\tau = 0$  de donde

$$S^0 = -\frac{1}{g_{00}} \left( S^x g_{11} \frac{dx}{d\tau} + S^y g_{22} \frac{dy}{d\tau} + S^z g_{33} \frac{dz}{d\tau} \right) \approx S^y v \tag{2.42}$$

con este resultado en mano, es posible evaluar (2.41) y obtener

$$\frac{dS^x}{d\tau} = -2 \frac{GM}{r_0^2} S^y v \tag{2.43}$$

$$\frac{dS^y}{d\tau} = \frac{GM}{r_0^2} S^x v \tag{2.44}$$

$$\frac{dS^z}{d\tau} = 0 \tag{2.45}$$

Recuérdese que las ecuaciones anteriores sólo son válidas en el punto elegido  $x=r_0, y=0, z=0$ ; sin embargo, es posible describir las últimas tres ecuaciones como una sola ecuación vectorial

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = -2\vec{v} \cdot \vec{S} \nabla\Phi + \vec{v} \vec{S} \cdot \nabla\Phi \quad (2.46)$$

Si se analiza un poco la ecuación (2.46), se verá que, como la velocidad  $\vec{v}$  y el gradiente  $\nabla\Phi$ , varían ambos con la posición alrededor de la órbita, entonces el comportamiento de  $\vec{S}$  es bastante complicado, e incluso incluye pequeñas oscilaciones periódicas, tanto en la magnitud como en la dirección de  $\vec{S}$ . Ahora bien, no estamos interesados en pequeños cambios y oscilaciones, sino más bien, en un valor a largo plazo del cambio en  $\vec{S}$ . Para calcular dicho valor promedio, primero defínase a  $\vec{v}$  y a  $\nabla\Phi$  como funciones del tiempo:

$$\vec{v} = -v \operatorname{sen}(\omega t) \hat{x} + v \cos(\omega t) \hat{y} \quad (2.47)$$

$$\nabla\Phi = \frac{GM}{r_0^2} \cos(\omega t) \hat{x} + \frac{GM}{r_0^2} \operatorname{sen}(\omega t) \hat{y} \quad (2.48)$$

si reemplazamos los valores anteriores en (2.46) y promediamos sobre un periodo de la órbita, se tiene que

$$\left\langle \frac{d\vec{S}}{d\tau} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{GM}{r_0^2} v (-S^y \hat{x} + S^x \hat{y}) \quad (2.49)$$

o si definimos a  $\vec{r} = (\operatorname{sen}(\omega t), \cos(\omega t), 0)$  como un vector unitario de posición en el plano  $x$ - $y$ , entonces se tiene de forma alternativa y más elegante

$$\left\langle \frac{d\vec{S}}{d\tau} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{GM}{r_0^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{S} \quad (2.50)$$

Así pues, de la ecuación (2.50), podemos ver que, en promedio,  $\vec{S}$  precesa respecto al eje de la órbita con una velocidad angular

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3}{2} \frac{GM}{r_0^3} \vec{r} \times \vec{v} \quad (2.51)$$

ésta es la llamada **precesión geodética** o **precesión de de Sitter**. No es extraño encontrar en algunos lugares la afirmación que la precesión geodética es el análogo a la precesión

de Thomas de la RS, sin embargo, esta analogía puede no ser del todo apropiada: recuérdese que la precesión de Thomas en el espacio-tiempo plano (RS) surge como resultado de un movimiento acelerado causado por alguna fuerza externa no-gravitacional que actúa sobre un giroscopio o una partícula en rotación. Si se deseara encontrar un verdadero análogo en la RG a la precesión de Thomas, sería necesario estudiar el comportamiento de un giroscopio cuando éste es sometido a una fuerza no-gravitacional que lo desvíe de su movimiento a lo largo de una geodésica; esto se reflejaría como una contribución extra a la precesión aparte de la contribución proveniente del transporte paralelo (la geodética).

Cabe destacar, que aunque la ecuación (2.51) se derivó en el caso de una órbita circular, es posible (aunque no se hará acá) mostrar que el resultado es válido para cualquier órbita en general. Además, es posible rescribir (2.50) de una forma más compacta:

$$\left\langle \frac{d\vec{S}}{d\tau} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{GM}{m r_0^3} \vec{L} \times \vec{S} \quad (2.52)$$

donde  $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$  es el momentum angular orbital del giroscopio. En la mecánica Newtoniana se interpretaría el lado derecho de la ecuación (2.52) como un torque generado por un potencial de la forma:

$$U = \frac{3}{2} \frac{GM}{m r_0^3} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (2.53)$$

Sin mucha complicación, se puede demostrar (aunque no se hará acá), que el ‘torque’ del lado derecho de (2.52) está dado por  $-\partial U / \partial \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que existe entre  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$ . Pero, ¿cuál es el efecto de dicho ‘torque’?, Papapetrou realizó por primera vez en 1951<sup>28</sup> un análisis detallado de la ecuación de movimiento de un cuerpo giratorio en un espacio-tiempo curvo, este análisis confirma la conjetura que un cuerpo que gira en un campo gravitacional no sólo experimenta una precesión de su espín, sino que también posee una aceleración traslacional, fruto de ésta ‘fuerza espín-orbital’. Esta afirmación tiene una relevancia teórica al ser un contraejemplo que demuestra que el

---

<sup>28</sup> Papapetrou, A., Proc. Roy Soc. London **A209**, 248 (1951).

principio de equivalencia de Galileo deja de ser válido para partículas giratorias. Un electrón, por ejemplo, no se mueve exactamente a lo largo de una geodésica en un campo gravitacional.

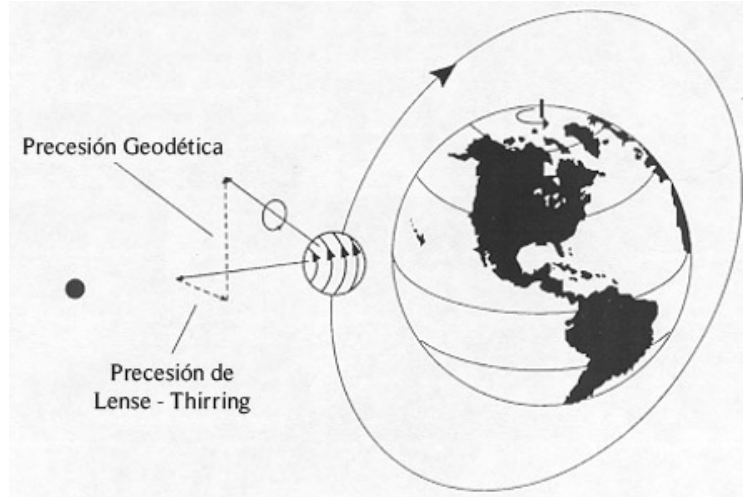


Figura 2.2: La precesión de de Sitter-Fokker  $\sim G$ , y de Lense-Thirring  $\sim \Omega_{LT}$  para el caso de una órbita circular polar. Nótese que en éste caso, los efectos son perpendiculares.

Por otro lado, si el giroscopio en cuestión se localiza en una órbita a 650km de altura, y si además el espín se encuentra en el plano de la órbita (como es el caso del Gravity Probe B), entonces la precesión geodética (2.51) corresponde a:

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{c^2 r_0^3} \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \approx 6.6 \text{ segundos de arco por año} \quad (2.54)$$

la **precesión geodética** o **precesión de de Sitter-Fokker**, que para una órbita polar de 650km corresponde a 6.6 segundos de arco por año, es el otro fenómeno principal que intentará medir el GP-B. La figura 2.2 ilustra las dos precesiones,  $\vec{\Omega}_G$  y  $\vec{\Omega}_{LT}$ , que pretende medir el Gravity Probe B.

En este punto, es necesario enfatizar el hecho que, aunque en la sección anterior se realizó la deducción de la precesión de Lense-Thirring  $\vec{\Omega}_{LT}$  por medio de una analogía con el EM, se puede realizar el mismo procedimiento seguido en ésta sección, pero con la métrica (2.27) (la cual incluye términos no diagonales) en vez de la métrica aproximada (2.38).

El resultado de este análisis más complicado y extenso daría como resultado tanto la precesión geodética  $\bar{\Omega}_G$ , como la precesión de Lense-Thirring  $\bar{\Omega}_{LT}$ ; sin embargo, se considera que el procedimiento seguido en la sección anterior no solamente es más sencillo, sino que también otorga una visión más extensa de la analogía que existe entre la RG linealizada y el EM (recuérdese que el campo gravito-eléctrico  $G^i$  y gravito-magnético  $H^i$  se definen en base a una analogía con el EM).

Por último, se discute las que hasta ahora han sido las dos comprobaciones de la precesión de de Sitter-Fokker. En 1916, cuando de Sitter propuso por primera vez la existencia del fenómeno en cuestión, ni siquiera se imaginaba la existencia de un giroscopio capaz de medir dicha precesión. Es por esto, que la propuesta original de de Sitter era observar el fenómeno en el sistema Tierra-Luna mientras viajan a través del espacio-tiempo curvado por el Sol.

En este caso, el eje de espín del giroscopio corresponde al eje de la órbita geocéntrica de la luna, y éste eje precesa a una razón de 0.0192 segundos de arco por año; por medio de mediciones láser de altísima precisión, se ha podido determinar la precesión de de Sitter a una precisión del 2%.

El otro sistema donde se ha podido detectar la precesión, es el pulsar binario Hulse-Taylor; éste, por ser mucho más masivo y dinámico, experimenta una precesión de  $1.21^\circ$  por año. Sin embargo, esta observación no ha sido posible compararla con un valor teórico.

**2.3. La tecnología y algunos datos del GP-B.** Sin exagerar, se podría afirmar que el experimento Gravity Probe B se encuentra entre los proyectos de investigación más laboriosos y minuciosos de la humanidad, dando como fruto una tecnología de una precisión y exactitud sin parangón en la historia, la cual incluso se podría afirmar que compite con los mejores diseños de la naturaleza.

Pero, antes de proseguir con tales exquisiteces tecnológicas, realicémosnos primero una pregunta muy sencilla: ¿qué es un giroscopio? El primero de estos instrumentos fue inventado en el año de 1852 por el físico francés J.B.L. Foucault y consistía de un volante de inercia (o ‘flywheel’ en inglés) con el fin de estudiar la rotación de la Tierra; desde entonces, los giroscopios han jugado un papel vital en muchas aplicaciones, en particular en la navegación. Los giroscopios del Gravity Probe B no son ‘flywheels’, sino esferas eléctricamente suspendidas. Sin embargo, en todos los tipos de giroscopios existentes, el principio fundamental es el mismo: si no se perturba a estos sistemas rotantes, la dirección en la que apuntan permanece invariante.

Un pequeño comentario al respecto, el GP-B comprende un tipo de experimento totalmente diferente a las pruebas precedentes de la RG por tres razones:

(a) Primero, el GP-B sí es un **experimento de física**, a diferencia de las demás pruebas, que consisten en observaciones astronómicas de fenómenos complejos ocurrentes en el sistema solar. En éste experimento, existe un alto grado de control por parte de los experimentadores, y las perturbaciones al sistema pueden ser minimizadas (o incluso eliminadas) más que calculadas (como en el caso digamos, de la precesión del perihelio de Mercurio).

(b) Segundo, el GP-B provee dos nuevas pruebas (ambas extremadamente precisas) de efectos relativistas en **cuerpos masivos**, ya que de los anteriores, solamente la precesión del perihelio de Mercurio es una prueba en cuerpos masivos (las demás caen en la categoría de pruebas de relojes o de ondas electromagnéticas); mientras que los efectos a observar en los giroscopios, se siguen de las leyes de conservación para cuerpos masivos rotantes derivadas de la ecuación de campo de Einstein.

(c) Tercero, el GP-B investigará, por primera vez, la acción gravitacional de la materia en movimiento a través del espacio-tiempo, la cual se puede concebir como fuente de una fuerza totalmente nueva: el gravitomagnetismo.

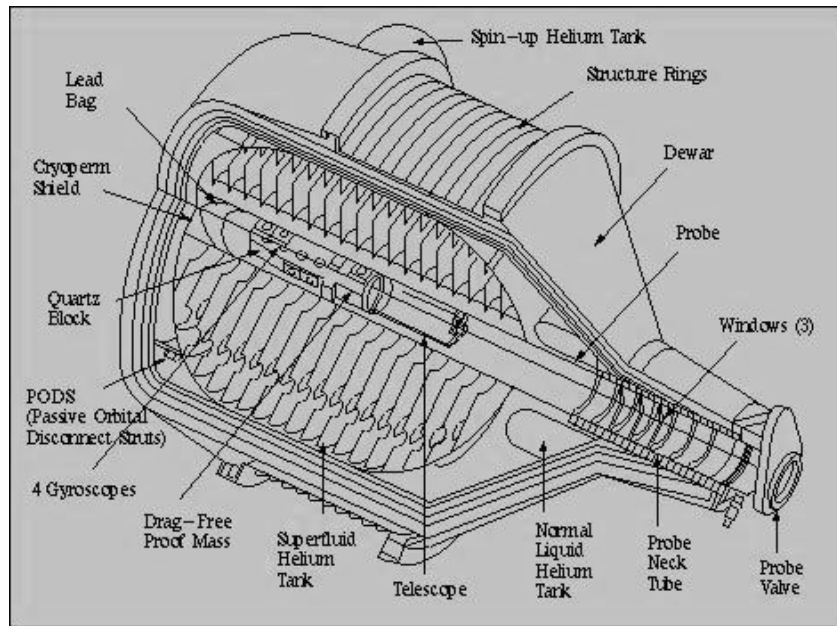


Figura 2.3: éste diagrama ilustra los diferentes componentes del satélite Gravity-Probe B

Regresando al experimento en sí, como se mencionó con anterioridad, el objetivo primordial del GP-B es medir la precesión de Lense-Thirring, así como también la precesión de de Sitter-Fokker; la primera a una precisión del 1% o mejor, mientras que la última a 1 parte en 10,000. Ahora, en sí, el concepto del experimento es relativamente sencillo: el núcleo del GP-B está compuesto por un bloque de cuarzo fundido de 0.5334m (21 pulgadas), el cual se encuentra unido a un telescopio de cuarzo que contiene a cuatro giroscopios. La figura 2.3 muestra un plano (en inglés) de los componentes claves del GP-B.

Esta estructura de giroscopios-telescopio se mantiene al vacío en el interior de un gran vaso Dewar, inicialmente lleno con 400 galones de helio superfluido. El vaso Dewar mantiene todo el instrumento a una temperatura de operación de 1.8 K. En adición la órbita del satélite es polar, de 650km. de altitud y es coplanar con la línea a la estrella guía, HR8703 (conocida también como IM Pegaso).

Los giroscopios se encuentran alineados paralelamente al eje del telescopio, dos girando a favor de las manecillas del reloj, y dos en contra. En esta configuración los dos efectos saldrán perpendiculares entre sí, como se puede apreciar en la figura 2.2.

Si se toma en cuenta que ambos fenómenos a observar son extremadamente pequeños para el campo gravitacional débil que rodea la Tierra, entonces uno se preguntaría ¿cuál debería ser la precisión alcanzada por estos giroscopios para obtener resultados tan precisos? La respuesta es que los giroscopios deben proveer un sistema de referencia tan estable que su variación debe ser menor a  $10^{-11}$  grados/hora (la cual es un millón de veces menor que los mejores giroscopios de navegación). La tarea podría parecer utópica, sin embargo dos factores claves del GP-B la vuelven factible: El espacio y una temperatura de operación cercana al cero absoluto.

Realizar el experimento en el espacio permite que el soporte necesario para operar los giroscopios sea prácticamente cero (y por lo tanto, incrementando de forma increíble el rendimiento de los mismos), mientras que la operación a baja temperatura mejora la estabilidad mecánica del instrumento, a la vez que lo resguarda de perturbaciones externas indeseables.

Siendo un poco más concisos, se requiere que se satisfagan, como mínimo, seis prerequisites técnicos si se desea llevar a cabo ésta misión:

1. **Un giroscopio estable:** Se necesita un giroscopio cuyo cambio en la dirección del espín debido a fuentes no-relativistas sea menor que  $10^{-11}$  grados/hora.
2. **Una lectura del giro:** Un método para determinar cambios en el ángulo del espín con una precisión de 0.1 milisegundos de arco, sin perturbar al giroscopio.
3. **Una referencia estable:** Un medio que comprenda una estructura mecánica y un telescopio, capaz de referir la lectura del giroscopio a la estrella guía.
4. **Una estrella guía confiable:** Una estrella brillante y adecuadamente localizada, cuyo movimiento con respecto al espacio inercial sea conocido.

5. **Una técnica para separar los efectos:** Se requiere tanto una órbita adecuada como un método de procesamiento, los cuales permitan separar los fenómenos geodéticos y de ‘frame-dragging’.

6. **Una calibración creíble:** Un esquema de calibración que realice pruebas en vuelo, y que valide los resultados obtenidos por el sistema.

Curiosamente, el requisito más difícil de lograr es el cuarto, ya que no depende del GP-B, sino que concierne al campo de la astrometría.

Indaguemos ahora, en particular, un poco más en los requisitos mecánicos de éste satélite: aún al operar en una órbita de 650km, el satélite de por sí no se encuentra totalmente exento de fuerzas que actúen sobre él, en particular, sufre de un arrastre causado por los residuos de la atmósfera, así como también de la presión solar de radiación (que es la responsable de las colas de los cometas). La acción de estas fuerzas se traduce en una aceleración igual a una diez-millonésima de la gravedad de la Tierra, i.e.  $10^{-7}g$ , que aunque para nosotros podrían parecer insignificantes, en un experimento tan delicado y frágil como lo es el GP-B resultan devastadoras.

Como se mencionó con anterioridad, el principal valor de la propuesta de Pugh para el experimento de los giroscopios yace en una propuesta para eliminar dichas aceleraciones; éste sistema fue desarrollado por Standford y probado exitosamente por primera vez en 1972. La idea es la siguiente: una ‘masa de prueba’<sup>29</sup> flota en una cavidad prácticamente al vacío cercana al centro de masa del satélite. Puesto que esta masa se encuentra aislada de las aceleraciones externas, entonces se mueve prácticamente a lo largo de una órbita ‘ideal’, y si se logra que el satélite sea capaz de detectar la posición de la masa de prueba y, por medio de un sistema de propulsores, ‘persiga’ a la masa, entonces se habrá obtenido que el satélite también sea libre de arrastre o ‘drag-free’. El resultado de esto es una aceleración efectiva de los giroscopios de  $10^{-10}g$ , es decir, su desempeño se mejora en un factor de mil.

---

<sup>29</sup> Siendo un poco específicos, para el caso del GP-B, la masa de prueba la constituye una esfera de cuarzo idéntica a uno de los giroscopios.

Otro principio que contribuye a esta tarea es la simetría, en particular, la isotropía respecto a un eje que coincida con la línea de vista a la estrella HR8703; puesto que si se hace rotar lentamente el satélite (una revolución cada diez minutos), entonces no sólo se reducen fuerzas perturbadoras, sino que también se minimizan los errores en las lecturas del telescopio y los giroscopios.

Prosiguiendo, es el turno de exponer un poco más acerca del componente que podría aparentar ser la piedra angular sobre la cual se edifica todo el proyecto: los giroscopios. Estas esferas de cuarzo fundido, con un tamaño similar al de pelotas de ping-pong, se encuentran recubiertas con una capa muy delgada y muy uniforme, químicamente pura del metal eléctricamente estable niobio (Nb). Los giroscopios son el resultado de una sinfonía tecnológica que involucra una combinación magistral de procesos e instrumentos, puesto que éstas esferas deben satisfacer tres requisitos ‘extremos’:

- **Homogeneidad:** el cumplimiento de esta condición depende de la elección adecuada del material de fabricación. En éste caso el cuarzo es estable, presenta una alta uniformidad y se contrae de forma uniforme al enfriarse; además presenta la ventaja de ser transparente a las frecuencias ópticas. Las variaciones en densidad del cuarzo son minúsculas, probablemente en el orden de magnitud de una parte por diez millones (lo que es unas mil veces mejor que una esfera de metal típica).
- **Esfericidad mecánica:** los giroscopios - que cuentan con un diámetro de 3.81cm (o 1.5 pulgadas) - se encuentran dentro de un margen de error de 40 capas atómicas de una esfera perfecta (el grosor de una capa atómica es aproximadamente del orden de magnitud de  $10^{-10}$ m). Como comparación, si la Tierra se pudiera ‘pulir’ a la esfericidad de los giroscopios, entonces ¡La altura entre la montaña más grande y la fosa oceánica más profunda sería solamente de 4.87 m! en la naturaleza, *solamente una estrella de neutrones es más redonda.*
- **Esfericidad eléctrica:** este requerimiento consiste en que el momento dipolar eléctrico, cantidad que se encuentra determinada por las

propiedades de la superficie del rotor, sea infinitesimalmente pequeño. Éste momento dipolar debe ser tan pequeño, que la proporción entre el momento dipolar y la máxima carga en el giroscopio debe ser del orden de magnitud de  $10^{-10}$ .



Figura 2.4: Los giroscopios del Gravity Probe B.

No debería ser sorpresa que para lograr satisfacer las extremas condiciones anteriores, se demandó no sólo la invención de nuevos métodos para cortar, pulir y recubrir, sino que también de nuevos y ultra sensibles instrumentos que permitieran medir y comprobar las condiciones requeridas por los giroscopios.

Ahora bien, la manufactura es únicamente el primer paso que se debe lograr, el siguiente punto a tratar es donde almacenar dichos giroscopios dentro del satélite; no debería sorprender que el material elegido sea nuevamente el cuarzo, ésta vez en forma de dos hemisferios que juntos conforman una cavidad esférica, en la cual el espacio libre entre el giroscopio y la cavidad es de apenas una milésima de pulgada. La figura 2.4 muestra uno de éstos giroscopios junto con la cavidad de cuarzo dentro en las que levita.

Cuando se planeó el experimento, se debían resolver tres dificultades técnicas, que listamos a continuación:

1. **Suspensión:** aún cuando se cuenta con la ventaja de operar en el espacio, sigue siendo necesaria la aplicación de fuerzas (débiles por estar en un ambiente cero-g) para mantener centrados los giroscopios dentro de sus respectivas cavidades. La técnica de suspensión utilizada es la gravitación eléctrica por medio de tres pares de electrodos en forma de platillo, los cuales en la Tierra necesitan de 1,000 V para levantar a los rotores, mientras que en el espacio solamente necesitan una fracción de un volt. Por medio de esto se logra mantener a los giroscopios centrados con una precisión de  $O(10^{-8}\text{m})$ , algo crucial para las aspiraciones del GP-B.

2. **Aceleración:** a la hora de realizar el lanzamiento del satélite, los giroscopios se encontrarán inicialmente en reposo, motivo por el cual era necesario concebir una forma de llevarlos a su velocidad de giro final (alcanzan una frecuencia de 10,000 revoluciones por minuto, o rpm, equivalentes a unos 166Hz). El esquema es análogo a una rueda de agua, solamente que en el GP-B se utilizará helio a una rapidez similar a la del sonido, el cual circulará a través de un sofisticado sistema de canales tallados en el interior de la cavidad esférica. La rapidez máxima de los rotores se alcanza en aproximadamente media hora, después de esto, es necesario bombear hacia el exterior todo el gas que se encuentre en la cavidad con el fin de obtener una presión incluso menor que la del espacio alrededor del satélite. Ciertamente, la parte crucial de éste requisito consiste en obtener la presión extrema de  $10^{-11}$  torr (1 torr = 133,322368 Pa); éste ambiente es tan extraordinario que aún después de 1,000 años el giroscopio solamente habría perdido un 1% de su rapidez inicial.

3. **Lectura:** como ya se comentó con anterioridad, debido a que los efectos relativistas a medir por el GP-B son tan minúsculos, es imprescindible un sistema apropiado para leer los giroscopios, y más importante aún, no debe afectar los giroscopios durante el proceso de lectura. La sensibilidad deseada del método es de 0.1 mili segundos de arco, y en éste momento podemos preguntarnos ¿cómo es posible medir la dirección del espín de una esfera perfecta, sin marca alguna, sin perturbarla, a ésta precisión? Para poder hacerse una idea de lo complicado del proceso, 1 milisegundo<sup>30</sup> de

---

<sup>30</sup> Formalmente, 1 mili segundo de arco es igual a  $2.78 \times 10^{-7}$  grados.

arco equivale al grosor de una hoja de papel, vista desde una distancia de 160 kilómetros; o lo que es igual, al tamaño de un astronauta de 1.45 metros que se encuentra en la luna. La figura 2.5 ilustra esta comparación.

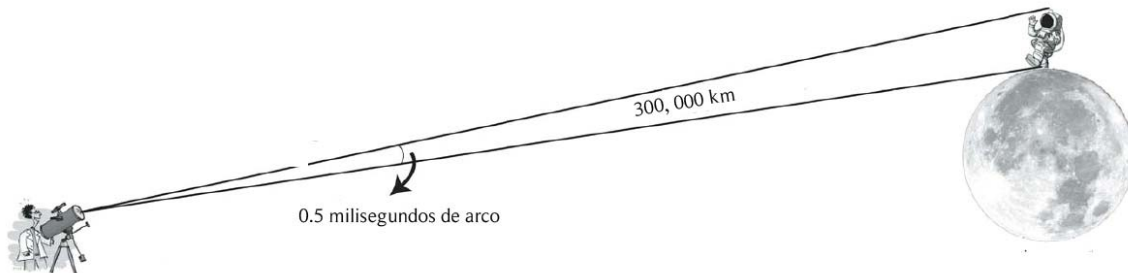


Figura 2.5: La figura muestra lo extremadamente pequeño que es un mili segundo de arco, ya que sería el arco subtendido si se viera a un astronauta de 1.45 m parado en la luna, i.e., a una distancia de unos 300,000km.

La respuesta a la pregunta planteada se obtiene gracias al fenómeno, visto por primera vez en 1911 por H. Onnes en metales a bajas temperaturas, conocido hoy en día como superconductividad. La superconductividad ocurre en ciertos materiales cuando su temperatura cae por debajo de la llamada *temperatura de transición*, después de la cual pierden completamente su resistencia eléctrica, i.e., para corrientes estables son conductores perfectos. El resultado es que una corriente estable se puede mantener sin alteración incluso durante varios años. Adicionalmente, la superconductividad provee un ambiente que posee un campo magnético muy pequeño y estable, necesario para que el giroscopio trabaje adecuadamente.

Otro fenómeno observado en los superconductores que rotan es el efecto de campo magnético conocido, en honor al físico Fritz London, como *momento London*. Imagínese el recubrimiento de niobio de los rotores como un retículo cristalino de átomos positivamente cargados, que contienen una infinidad de pares de electrones. Conforme el giroscopio comienza a rotar, los átomos de niobio giran con él, pero por un instante de tiempo, no lo hacen los pares de electrones.

Así pues, cada carga positiva que rota genera un pequeño campo magnético paralelo al eje de rotación, entonces, el campo total producido por todo el recubrimiento sería muy grande, de no ser por la reacción por parte de los pares de electrones; ya que prácticamente todos son obligados a moverse con el retículo, generando así un campo que cancela al generado por los átomos. Éste proceso ocurre para la mayoría del recubrimiento, a excepción de una capa superficial de un espesor de unos 100 átomos, en ésta capa, los pares de electrones se encuentran ligeramente retrasados respecto al retículo cargado, resultando en una pequeña diferencia entre los campos - el momento London - que es proporcional a la rapidez de giro y, más importante aún, *se encuentra exactamente alineado con el eje de rotación*. Éste es la marca o puntero que se deseaba.

Para medir la dirección del espín, el rotor se envuelve en un rizo superconductor conectado a un SQUID - Superconducting QUantum Interferente Device - por sus siglas en inglés. Una vez conectado al SQUID, al precesar el giroscopio también lo hará el momento London, resultando en un diminuto cambio en el campo magnético a través del rizo. Tan sensible es el SQUID, que un cambio de  $5 \times 10^{-14}$  Gauss, correspondiente a una precesión de 0.1 milisegundos de arco, es detectable en tan sólo un par de días.

Ahora, la exquisita sensibilidad del SQUID viene a un alto costo: es requerido que los giroscopios operen en un campo magnético extremadamente pequeño (menor a  $10^{-7}$ G), que en adición debe ser muy estable (las variaciones de dicho campo deben ser menores a  $2 \times 10^{-13}$ G). En términos de cifras, la hazaña consiste en atenuar las variaciones del campo magnético de la Tierra en un factor de 10, 000, 000, 000, 000.

De nuevo, la superconductividad juega un papel fundamental, ya que otra propiedad de los superconductores es que un cascarón superconductor no puede ser penetrado por campos magnéticos externos. En el GP-B se cuenta con cuatro bolsas largas de plomo (apodados 'los globos') se insertan una dentro de otra, con el fin de aislar a los giros del campo magnético externo. En adición, el satélite cuenta con un escudo externo fabricado con una aleación especial de hierro; finalmente, las cavidades esféricas que contienen a los giroscopios también cuentan con un blindaje magnético. Así pues, a

una temperatura extremadamente fría, libres de la gravedad y otras fuerzas, sin ser afectados por campos eléctricos o magnéticos, los giroscopios giran en el mayor aislamiento posible.

Pero todas las maravillas tecnológicas mencionadas en los párrafos anteriores serían inútiles si no se posee una estructura mecánica estable, junto con un telescopio capaz de medir cambios angulares a una precisión de 0.1 milisegundos de arco, que representa una mejora con respecto a los típicos telescopios por un factor de 1,000. Al igual que el resto del instrumento, el telescopio se encuentra fabricado de cuarzo fundido, su apertura es de 142.24mm (5.6 pulgadas), su óptica es del tipo Cassegrainiana (que es la misma del telescopio espacial Hubble - HST) con una longitud focal de 3810mm (12 pies, 6 pulgadas).

El telescopio también debe sobreponer la dificultad que significa el hecho que en realidad las estrellas no son puntos (HR8703 tiene un diámetro angular de 1.3 milisegundos de arco), y aún cuando lo fueran, las limitaciones ópticas del instrumento (como lo es la difracción) dificultan considerablemente el hecho que el telescopio debe localizar el centro de la imagen óptica a una precisión de 0.1 millonésimas de pulgada.

Por otro lado, otro factor que contribuye a la estabilidad del instrumento es el hecho que sus veinte componentes se mantienen juntos con una técnica conocida como *contacto óptico* (*optical contacting*, en inglés). Lo innovador de esta técnica es el hecho que no se usa ninguna especie de pegamento o cemento, ni ninguna junta mecánica; en vez de esto, ya que las superficies de los componentes son tan planas y lisas que se unen permanentemente por medio de la adhesión molecular, casi como si toda la estructura hubiese sido tallada de un solo trozo masivo de cuarzo.

En adición, sería injusto no mencionar que, igual de importante que lo anterior, fue sobreponerse a las dificultades de índole administrativo. En un proyecto de tal magnitud, es imprescindible un plan estructurado al mayor detalle posible, que minimice costos y maximice la eficiencia del grupo de trabajo.

En el Apéndice B se incluyen algunas tablas con los datos más relevantes del experimento GP-B.

**2.4. Conclusiones e implicaciones del experimento.** Sería irracional, aún después de haber dado solamente una breve descripción en la sección anterior, negar el aporte tecnológico del GP-B en un gran número de campos. Sin embargo, a pesar de este inconmensurable aporte, se necesita más que esto para justificar una inversión de 40 años y \$760 millones de dólares<sup>31</sup>. El propósito de esta sección es discutir la relevancia científica del GP-B.

Es mundialmente conocida la historia que, en 1905, mientras trabajaba en una oficina de patentes suizas, Albert Einstein publicó un artículo titulado ‘Acerca de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento’ (*On the Electrodynamics of moving bodies*, en inglés). Está de más hablar acerca de la trascendencia de ese artículo, que estableció la teoría de la relatividad especial (RS). La RS es una corrección a la teoría Newtoniana en el sentido que destruyó la noción de absolutismo del tiempo y el espacio, conceptos sagrados en la física clásica.

De igual forma, estableció un límite a la rapidez de propagación de toda señal en el universo (y de cualquier objeto en el mismo) como  $c$ , la rapidez de la luz en el vacío (de paso, derribando el concepto de un éter gelatinoso que perneaba todo el universo) la cual era constante para todos los observadores. La RS conllevó una revolución intelectual a inicios del siglo XX, y durante el lapso de tiempo comprendido entre 1905 y la actualidad, se han dado numerosas pruebas que confirman su validez (algunas involucrando decaimientos de partículas subatómicas).

Ahora bien, es importante destacar que la RS **no** modificó la gravitación Newtoniana, y Einstein continuó trabajando durante un periodo de unos 10 años, con el

---

<sup>31</sup> Fuente: Reporte divulgativo publicado por NASA/Stanford. Disponible en el sitio web oficial del Gravity Probe B: <http://einstein.stanford.edu>

fin de formular una nueva teoría que describiera la gravitación de una forma más elegante y moderna (y no como una acción a distancia que aparenta ser ‘cuasimilagrosa’).

Comúnmente se hace la falsa afirmación que la RS solamente es capaz de trabajar con sistemas no acelerados, y por esto Einstein formuló la RG, con el fin de trabajar con sistemas acelerados (o no inerciales); dicha afirmación es doblemente incorrecta, ya que la RS sí es capaz de trabajar con sistemas acelerados y además, Einstein desarrolló su teoría como una nueva ideología alternativa a la gravitación clásica, diferente tanto en su esencia conceptual, como en la estructura matemática subyacente. Infortunadamente ambas teorías llevan el nombre de Relatividad, ya que un nombre más apropiado para la RG podría ser, por ejemplo, *geometrodinámica*.

Posteriormente, con la expedición de Sir Arthur Eddington, y la ‘aparente’ confirmación de la RG en 1919, Einstein se transformó, de la noche a la mañana, en una celebridad, no sólo de la comunidad científica, sino a nivel mundial. Irónicamente, una de las teorías que más choque causó en aquella época, se convirtió en el mejor estandarte de la física, ya que términos como ‘relativo’ y expresiones como  $E = mc^2$  se convirtieron de dominio común.

Quizás por este mismo hecho, se tiene la idea que la RG funciona a la perfección y que es la teoría que reina exclusivamente en el ámbito de la gravitación. La realidad no podría ser más contraria: entre 1920 y 1970 se construyeron unas 80 teorías métricas alternativas a la RG para describir la gravitación, algunas como la de Whitehead poseían un marco de referencia preferido, otras involucraban campos adicionales específicos (como la teoría de Brans-Dicke, que incluye un campo escalar).

Ciertamente, éste es un escenario propenso a causar confusión en la comunidad científica, y el problema radica en el hecho que la teoría de Einstein, la relatividad general, es una *teoría minimalista*; minimalista en el sentido que fue formulada de tal manera en que las predicciones que hace son mínimas alteraciones (pero precisamente las

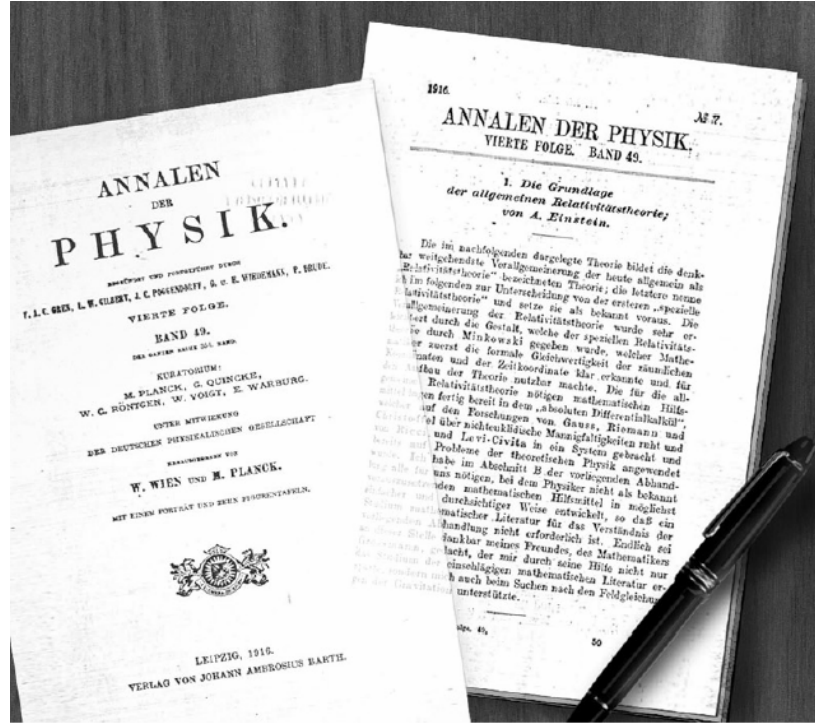


Figura 2.6: El ya legendario artículo de 1916 de Einstein.

necesarias) a los fenómenos predichos por la teoría Newtoniana, y es difícil encontrar predicciones medibles fuera del límite del campo débil.

Adicionalmente, se tenía que de las pruebas presuntamente contundentes de la RG, el corrimiento al rojo gravitacional es deducible solamente invocando a la maquinaria de la RS y el principio de equivalencia, mientras que el valor de la precesión del perihelio de Mercurio discrepaba o concordaba con la predicción de la RG dependiendo del dato del valor del achatamiento del Sol que se manejara. Además, en la época, Schiff propuso un argumento que desacreditaba la ‘starlight deflection’ (y por lo tanto el Shapiro ‘time delay’, ya que son equivalentes) como una prueba de la RG siguiendo la próxima idea: supóngase que un observador se encuentra en caída libre en un potencial Newtoniano clásico  $\phi = GM/r$ . Después de caer desde el infinito hasta una distancia  $r$ , nuestro marco inercial  $I$  (de acuerdo a la RS, caída libre = inercial) poseerá una velocidad  $v = \sqrt{2GM/r}$  con respecto al marco del cuerpo que genera el potencial.

A continuación, imagínese que el observador en caída libre compara su reloj y varillas de medición con un sistema coordenado esférico simétrico fijo a una distancia  $r$  del origen. Puesto que la RS afectará la varilla y el reloj del observador, existe una discrepancia entre el tiempo y la longitud propia del observador: éste medirá un tiempo  $\delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$  y una distancia radial  $\delta r / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ; si entonces, se toma a los intervalos  $\delta r$  y  $\delta t$  como los diferenciales para las coordenadas radiales y temporales en el sistema coordenado estacionario, uno arriba a la espacio tridimensional curvo y el tiempo modificado de la métrica de Schwarzschild **sin necesidad de la RG**.

Aunque Rindler y otros físicos encontraron ciertas falacias en el argumento de Schiff, el valor de éste consiste en mostrar lo desalentador que parecía el panorama, hasta que, a finales de la década de 1960, Will y Nordtvedt (entre otros) inventaron el *marco de trabajo parametrizado post-Newtoniano* (o PPN - post parametrized post-Newtonian, por sus siglas en inglés). Nació como una extensión de la idea de Eddington de escribir la métrica de un cuerpo ideal (sin rotación) gravitante de una forma más general que la métrica de Schwarzschild, por medio de dos parámetros, un  $\gamma$  que represente la curvatura del espacio tridimensional y un  $\beta$ , que represente la no linealidad del componente espacial de la métrica. En su forma más general, el PPN consiste de diez parámetros libres que se fijan por medio de la observación.

El novedoso y gran aporte del PPN vino en una forma sin precedentes: *experimentos negativos*. La diferencia entre muchas de las teorías alternativas y la RG es que las primeras hacen predicciones de fenómenos que la RG no hace; dichas diferencias se hacen cuantificables en los diversos valores de los parámetros del PPN para cada teoría, y al fijar estos valores con cierta precisión, se puede descartar ciertas teorías alternativas. Un ejemplo de esto es la hipotética oscilación en la distancia Tierra-Luna, conocido como ‘efecto Nordtvedt’, el cual por medio de mediciones láser ha sido descartado.

Cabe destacar que, a pesar de lo útil que es el PPN, éste no es aplicable ni siquiera a todas las teorías métricas alternativas a la RG y, aunque descarta un gran número de

éstas, **NO prueba a la RG**. Así pues, es necesario buscar una nueva prueba de una índole diferente a las anteriores, que valide la RG: una alternativa es la búsqueda de ondas gravitacionales y otra (que es la que nos concierne) es, precisamente, intentar medir la precesión geodética y la mocional (Lense-Thirring).

Resulta ser que de las 80 teorías que llegaron a existir, solamente sobreviven unas seis candidatas, proseguiremos a hablar un poco acerca de ellas. En 1984, I. Ciufolini<sup>32</sup> expuso la posibilidad de construir teorías alternativas que involucraran potencias inversas o fraccionales de los potenciales ‘clásicos’, más relevante aún fue el aporte de R. Matzner al estudiar una teoría modelo que involucraba una potencia inversa de un potencial clásico, y que poseía la sorprendente característica de predecir un efecto geodético idéntico a la RG, pero una precesión de Lense-Thirring cuantitativamente diferente a la de la RG.

Otra investigación importante es la de T. Damour, quien formuló otra teoría modelo que contenía, además del potencial de Einstein, un campo tensorial de rango finito y largo alcance adicional (digamos,  $10^3$ km). El crédito de la teoría de Damour consiste en el hecho de estar formulada de una manera rigurosa, y de concordar con todas las pruebas conocidas de la RG (i.e. pruebas del principio de equivalencia y de la ley del inverso cuadrado de Newton), y a la vez generar resultados arbitrariamente diferentes para ambas precesiones.

De particular interés es la teoría de Moffat, que representa un enfoque diferente a los anteriores, al tratarse de una teoría no métrica (otro ejemplo de éstas es la teoría de Belinfante-Swihart, descartada por el experimento Braginsky-Panov en 1972). La teoría de Moffat puede, con cierta dificultad, ajustarse para describir las pruebas tradicionales de la RG, y tiene la gran ventaja de describir exitosamente la precesión del periastro de un sistema de binarias eclipsantes (estos datos están en fuerte desacuerdo con la

---

<sup>32</sup> I. Ciufolini, disertación de Ph. D. “Theory and Experiments in General Relativity and Other Metric Theories of Gravity”, Departamento de Física, Universidad de Texas en Austin (Agosto de 1984).

predicción de la RG); además da una explicación a la aceleración anómala observada por las sondas Pioneer 10 y 11.

La única diferencia, puesto que ambas predicen la misma  $\sim LT$ , radica en la precesión de de Sitter-Fokker, que en el caso de la teoría de Moffat<sup>33</sup> es:

$$\bar{\Omega}_G \sim \left( \frac{3M}{G} - \sigma \right) \frac{M^{1/2}}{r^{5/2}} \quad (2.55)$$

si promediamos éste valor instantáneo sobre el obtenido a lo largo de una órbita terrestre se llega a

$$\langle |\Omega_G| \rangle = B_{\oplus} \frac{(G_0 M_{\oplus})^{1/2}}{c^2 R_{\oplus}^{5/2}} \left( \frac{R_{\oplus}^{5/2}}{r^{5/2}} \right) \quad (2.56)$$

donde

$$B_{\oplus} = \frac{3}{2} G_0 M_{\oplus} - \sigma_{\oplus} \quad (2.57)$$

$M_{\oplus}$  denota a la masa de la Tierra y  $R_{\oplus}$  al radio ecuatorial. Además en la última ecuación se tiene que

$$\sigma_{\oplus} = \frac{\lambda_{\oplus} s G_0^2 M_{\oplus}^2}{3c^2 (r_0)_{\oplus}^{5/2}} \quad (2.58)$$

donde en la teoría de Moffat  $r_0$  es el parámetro asociado a la ‘masa’ del campo torcido  $g_{[\mu\theta]}$ , y  $s$  y  $\lambda$  denotan la fuerza de acoplamiento del campo torcido  $g_{[\mu\theta]}$  y la fuerza de acoplamiento de una partícula de prueba a la materia, respectivamente. Para el caso de los giroscopios del GP-B, lo anterior se reduce a una diferencia de 3.4 milisegundos de arco por año entre la RG y la teoría alternativa de Moffat, una diferencia totalmente discernible y medible en el GP-B a una precisión del 3 %.

La siguiente teoría, que consideraremos, desarrollada por R. Cahill<sup>34</sup> es de una naturaleza totalmente diferente, aunque también comparte con la precedente de Moffat la

---

<sup>33</sup> Los cálculos detallados se encuentran en el artículo “Modified Gravitational Theory and the Gravity Probe-B Gyroscope Experiment”, J.W. Moffat, arXiv:gr-qc/0405091 v1, 17 de Mayo de 2004.

característica de concordar con todas las pruebas estándares de la RG, pero presenta el beneficio de explicar el llamado efecto de ‘materia oscura’ (*dark matter*, en inglés) en las galaxias espirales. Para comenzar, primero nótese que, en términos del campo vectorial aceleración gravitacional  $\bar{g}$ , la ecuación de Poisson (II.2.17) se escribe como

$$\nabla \cdot \bar{g} = -4\pi G\rho \quad (2.59)$$

Ahora bien, existe una formulación alternativa en términos de un campo vectorial de ‘flujo’  $\bar{v}(\vec{r}, t)$  descrita por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{v}) + \nabla \cdot ((\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}) = -4\pi G\rho \quad (2.60)$$

donde ahora  $\bar{g}$  está dada por la aceleración de ‘flujo’ de Euler:

$$\bar{g} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.61)$$

La cual, trivialmente, también satisface a (2.59). Pero la ecuación (2.60) no se encuentra determinada de manera única, y podemos construir una solución más general como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{v}) + \nabla \cdot ((\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}) + C(\bar{v}) = -4\pi G\rho \quad (2.62)$$

donde el término  $C(\bar{v})$  es un factor totalmente nuevo que no posee una contraparte en la

teoría Newtoniana. Si definimos a  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ , entonces se puede deducir una

nueva ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot \bar{g} = -4\pi G\rho - 4\pi G\rho_{DM} \quad (2.63)$$

donde  $\rho_{DM}$  es una densidad de materia que representa la dinámica de flujo asociada al término  $C(\bar{v})$ . Es precisamente de esta dinámica que se puede explicar el efecto de ‘materia oscura’ (uno de los grandes enigmas de la física actual). Matemáticamente,  $\rho_{DM}$  es igual a

$$\rho_{DM}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{32\pi G} \left( (trD)^2 - tr(D^2) \right) \quad (2.64)$$

---

<sup>34</sup> “*Novel Gravity Probe B Frame-Dragging Effect*”, R.T. Cahill, arXiv:physics/0406121v3, 21 de Agosto de 2004.

En este caso  $\alpha$  es una constante adimensional, en realidad, una nueva constante gravitacional adicional a la tradicional  $G$  de la teoría de Newton (el valor aproximado de  $\alpha$  es  $e^2\hbar/c \approx 1/137$ ). Ahora bien, una interpretación del campo vectorial de flujo  $\vec{v}$  es, citando a Cahill, «una manifestación, al nivel clásico, de un sustrato cuántico del espacio; el flujo es un reordenamiento de ese sustrato, y no un flujo a través del espacio». Resulta ser que para generalizar aún más al campo  $\vec{v}$  es necesario incluir la **vorticidad y el efecto del movimiento de la materia a través de dicho sustrato**.

Hacer toda la deducción de la ecuación de Einstein para esta nueva formulación sería significativamente complicado y laborioso<sup>35</sup>. Por lo tanto, sólo se afirmará que la vorticidad en el caso de la RG corresponde al campo gravitomagnético, mientras que en la nueva teoría el vector  $\vec{v}_R$  usado en la deducción de la vorticidad (éste se calcula mediante una expresión de la forma Biot-Savart) es la suma vectorial de la velocidad rotacional (el único termino que se usa a la hora de calcular la vorticidad en la RG) y la velocidad traslacional de la Tierra a través del sustrato. La figura 2.7 ilustra los campos vectoriales vorticidad para ambas teorías.

Más importante aún es el hecho que al menos siete experimentos<sup>36</sup> han detectado ésta velocidad, y han fijado su valor (dentro de márgenes experimentales) en unos 430km/s.

Esta vorticidad,  $\vec{\omega}$ , se puede detectar por medio de la observación de la precesión de los giroscopios del GP-B (al igual que la ‘vorticidad clásica’, el campo gravitomagnético, de la RG); sin embargo, existe una diferencia sustancial y es que ésta nueva precesión no es acumulativa, y es detectable solamente por su variación a lo largo

---

<sup>35</sup> La deducción completa se encuentra en el artículo de Cahill.

<sup>36</sup> (i) R.T. Cahill, “Quantum Foam, Gravity and Gravitational Waves” en *Relativity, Gravitation, Cosmology* - 2004.

(ii) R.T. Cahill, “Absolute Motion and Gravitational Effects”, Apeiron - 2004.

(iii) D.C. Miller, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 203-242 (1933).

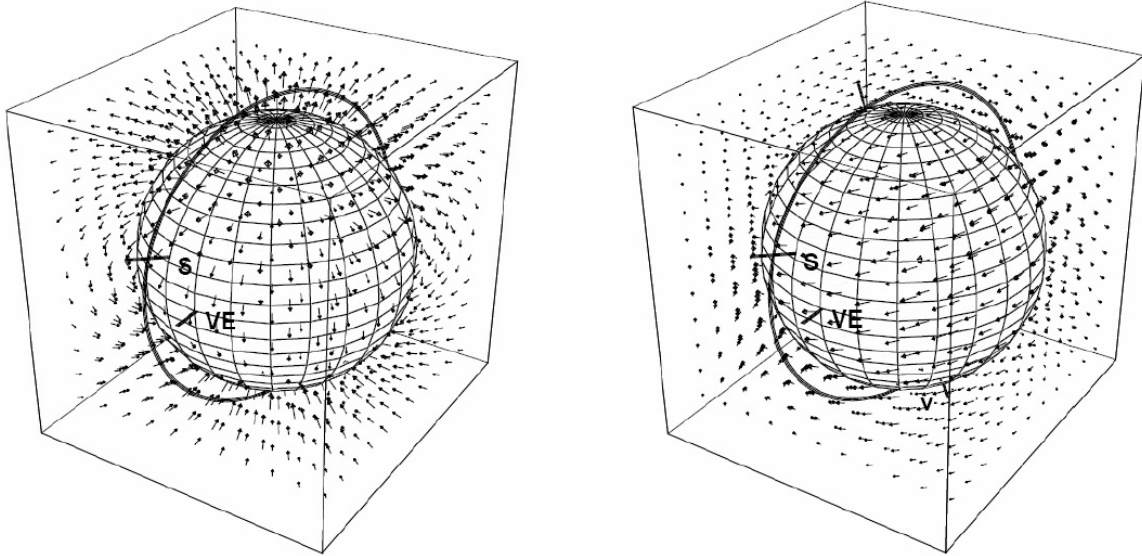


Figura 2.7: Comparación del campo vectorial vorticidad para la RG y la nueva teoría, el diagrama de la izquierda muestra la vorticidad en la RG, i.e., el campo gravitomagnético; mientras que la derecha ilustra la vorticidad para la nueva teoría.

de cada órbita, ya que su promedio sobre una órbita es cero.

En general, se tiene aproximadamente que

$$\Delta \vec{S}(t) \approx \int_0^t \frac{1}{2} \vec{\omega}(\vec{r}(t')) dt' \times \vec{S}(0) \quad (2.65)$$

donde  $\Delta \vec{S}(t)$  es el cambio en el espín de los giroscopios. Este efecto es unas treinta veces más grande que los errores esperados por el GP-B, motivo por el cual debería ser fácil detectarlo (siempre y cuando exista). Además, la precesión no es ni en el plano de la órbita (como la geodética<sup>37</sup>), ni perpendicular al plano de la órbita (Lense-Thirring), hecho que simplifica aún más su posible detección.

Vamos pues, con la última de las ‘teorías alternativas’ que trataremos aquí, las comillas en el calificativo alternativas se colocan debido a que en realidad lo que se examinará (siguiendo la idea de S. Robertson<sup>38</sup>) es la posibilidad de realizar una

<sup>37</sup> De paso, se aclara que en ésta teoría alternativa, la precesión geodética coincide con la predicción de la RG.

<sup>38</sup> “Newtonian Gravity Predictions for Gravity Probe B”, Stanley L. Robertson, arXiv:gr-qc/0502088v3, 24 de Febrero de 2005.

extensión a la gravedad Newtoniana que pueda predecir la precesión. Las únicas herramientas necesarias son el EM y las transformaciones de Lorentz de la RS.

Se comenzará considerando a dos sistemas inerciales,  $S$  y  $S'$ , donde  $S'$  se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto al sistema  $S$ . Además, se cuenta con dos partículas, una de las cuales se encuentra fija al origen del sistema coordenado  $S'$  (llamemos a ésta partícula 1) y la otra (partícula 2) se mueve con una velocidad  $\vec{u}'$  respecto a la partícula 1. Si se denota con  $F'$  a la fuerza de interacción entre las partículas 1 y 2 (tómese a 1 como la fuente y 2 sobre la que actúa), y  $F$  es la misma interacción, pero observada desde el sistema  $S$ , entonces se puede separar una componente de la fuerza, una fuerza “estática”  $\vec{F}_{st}$  (aquella cuyas componentes no dependen de  $\vec{u}$ ) y, en base a esto, definir una cantidad de campo “magnético”  $\vec{K}_f$  como

$$\vec{K}_f = \vec{v} \times \vec{F}_{st} / c^2 \quad (2.66)$$

de acuerdo a esta separación, se tiene que la fuerza  $\vec{F}$  actuando sobre la partícula 2, observada en el sistema  $S$  será

$$\vec{F} = \vec{F}_{st} + \vec{u} \times \vec{K}_f \quad (2.67)$$

Si en particular se toma a  $\vec{F}'$  como la fuerza de Coulomb entre las cargas 1 y 2, entonces se tiene que

$$\vec{K}_f = q_2 \vec{v} \times \vec{E} / c^2 \quad (2.68)$$

de donde  $\vec{E} = \vec{F}_{st} / q_2$  y, además, se interpreta a  $\vec{B} = \vec{K}_f / q_2$  como el campo magnético en  $\vec{r}$  de una carga moviéndose con velocidad  $\vec{v}$ . Nótese que algo muy importante de este procedimiento es el hecho que las fuerzas “magnéticas” son impuestas directamente por la RS, y no es necesario que la fuerza a considerar sea una fuerza eléctrica.

Si se deseara hacer la extensión al caso de la gravedad, considérese la atracción gravitatoria entre dos masas  $m_1$  (fuente) y  $m_2$  (partícula de prueba); y con base en esto, calcúlese un campo  $\vec{g}$  dado por

$$\vec{g} = \vec{F}_{st} \vec{K}_f \quad (2.69)$$

Al igual que en el caso anterior, es totalmente válido definir un campo gravitomagnético  $\vec{H} = \vec{K}_f / m_2$ , y tener un campo vectorial gravitomagnético dado por

$$\vec{H} = \vec{v} \times \vec{g} / c^2 \quad (2.70)$$

y, por lo tanto, la fuerza completa sobre  $m_2$  está dada por

$$\vec{F} = m_2 \vec{g} + m_2 \vec{u} \times \vec{H} \quad (2.71)$$

Ahora bien, nuevamente es posible calcular el campo gravitomagnético siguiendo un procedimiento del tipo “Biot-Savart”<sup>39</sup>, después del cual se obtiene

$$\vec{H} = -\frac{GI\vec{\omega}}{c^2 r^3} \quad (2.72)$$

aquí  $I$  es el momento de inercia de la Tierra respecto a su eje de rotación,  $r$  es el radio terrestre y  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular rotacional de la Tierra. Éste último resultado se puede escribir de forma más compacta y elegante como:

$$\vec{H} = -G \frac{3\vec{n} \cdot \vec{S} - \vec{S}}{2c^2 r^3} \quad (2.73)$$

Si se compara cuidadosamente con el campo gravitomagnético predicho por la RG, ecuación (2.30), entonces se puede observar que este último resultado es cuatro veces más pequeño que el campo gravitomagnético de la RG. Lo crucial del asunto es que el campo calculado de esta forma **no es cero**.

Por otro lado, las teorías Newtonianas extendidas logran, por medio de una métrica exponencial de la forma

$$ds^2 = c_0^2 dt^2 e^{2\phi} - e^{-2\phi} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.74)$$

describir los mismos efectos geodéticos que la RG. Por lo tanto, la diferencia entre una teoría Newtoniana extendida radica *solamente en la intensidad de sus campos gravitomagnéticos*  $\vec{H}$  (ya que por medio del uso de dichas métricas exponenciales, se puede demostrar que las partículas sujetas sólo a fuerzas gravitacionales siguen geodésicas, y por lo tanto, se pueden explicar todas las pruebas previas del campo débil de la RG).

<sup>39</sup> Los detalles de este procedimiento se encuentran en el artículo de Robertson.

Si esto no fuese suficiente, el Gravity Probe B tiene aún repercusiones en otros campos: la medición exacta del campo gravitomagnético  $H$ , junto con las precesiones Lense-Thirring y de Sitter-Fokker, determinará algunos parámetros importantes para la teoría de cuerdas. Otro resultado importante es que el GPB comprobará la validez de la llamada ‘ley’ de Wilson-Blackett<sup>40</sup>: ésta pone en duda la naturaleza del campo gravitomagnético.

Si resulta ser que  $H$  es incompatible con un campo de inducción magnética  $B$  de origen electromagnético, entonces se obtiene la precesión  $\Omega_{LT}$  predicha para el experimento GP-B (esto es lo que se espera). Sin embargo, podría darse el caso que el campo gravitomagnético se comporte como un campo de inducción magnética de origen electromagnético; en cuyo caso, el soberbio blindaje del satélite aislaría a los giroscopios de ambos campos ( $B$  y  $H$ ), dando como resultado una precesión aproximada de  $|\Omega_{LT}| \approx 1.1 \times 10^{-5}$  milisegundos de arco por año  $\approx 0$ , totalmente inaccesible incluso para el GP-B. De ser así, significaría que la masa y la carga se encuentran íntimamente conectadas por medio del magnetismo: tal resultado sería un paso crucial hacia la búsqueda de la unificación en la física.

Con esta breve y poco profunda revisión de algunas teorías alternativas, se intentó otorgar una perspectiva más amplia que permita apreciar, sino en su totalidad, al menos en un gran porcentaje, la importancia y trascendencia del experimento Gravity Probe B. Los valores medidos de la precesión geodética (de Sitter-Fokker) y de la precesión de Lense-Thirring (mocional) discriminarán entre la colección de teorías candidatas a describir a la fuerza que primero conocimos, y que irónicamente, es la que menos sabemos cómo funciona.

---

<sup>40</sup> Para más detalles de este tema, refiérase a “Which gravitomagnetic precession rate will be measured by Gravity Probe B?” de Jacob Biemond.



## IV. Conclusiones y recomendaciones

La gravedad cuántica ha sido el Santo Grial de la física durante gran parte de la segunda mitad del siglo XX, y si se alberga la esperanza de algún día poder formular una gran teoría unificadora que lo explique todo (que era el sueño del propio Einstein), es imprescindible contar con la gravedad cuántica. Pero antes de poder seguir intentando obtenerla, es necesario comprender con el mayor detalle posible el funcionamiento de la gravedad a escalas ‘clásicas’. Ciertamente sería una impactante sorpresa, incluso se atreve a decir que sería grata, encontrar que la RG no concuerda *en su totalidad* con los resultados obtenidos, ya que esto implicaría la necesidad de considerar otra teoría alternativa, o como mínimo realizar correcciones a la ya existente.

Sin embargo, sería una injusticia afirmar que, de obtenerse resultados contradictorios a la RG, el trabajo de Einstein fue inútil o infructífero, y que la RG debería ir a una especie de ‘cementerio’ de las teorías físicas. Tal enunciado sería igual de ridículo a afirmar que la teoría Newtoniana o el electromagnetismo clásico son igual de inútiles.

La teoría de Einstein debe ser apreciada y valorada en el contexto adecuado, primero, porque introdujo una revolución científica de igual magnitud a la causada por Newton y la mecánica cuántica; válida o no, la RG logró demoler de nuestras limitadas mentes humanas la noción de absolutismo del tiempo y el espacio que se encontraba tan arraigada en nuestras mentes, en base a nuestro ‘sentido común’ y nuestra restringida experiencia humana cotidiana.

Segundo, la RG es una teoría que posee una estructura matemática de tal elegancia, simplicidad y belleza como no existió durante mucho tiempo; siendo pionera en el uso de los tensores y la geometría diferencial. Además, la RG logró mostrarnos un universo donde la física no ocurre en un fondo estático e imperturbable, sino que los procesos físicos transcurren en un escenario altamente dinámico, donde éste dinamismo altera de forma significativa los fenómenos físicos que ocurren en él.

No por nada Albert Einstein fue nombrado como la persona del siglo por la revista *Time*, como aquel personaje que impactó más a la humanidad en el siglo XX, por delante de otras grandes figuras como Mohandas Gandhi y Franklin Delano Roosevelt. Sin duda alguna, su figura y teoría continuarán sirviendo como estandarte y perdurarán a lo largo de toda la historia de la humanidad.

Lamentablemente, el equipo investigador principal del GP-B solicitó una extensión en el plazo de entrega de los resultados (originalmente previstos a ser publicados en el mes de Abril del presente año, en la reunión de la Sociedad Americana de Física (APS) que se llevó a cabo en Jacksonville, Florida). Dichos resultados serán lanzados al público en general en el mes de Diciembre de 2007.

Se recomienda seguir con detalle el progreso de ésta última etapa del experimento, y analizar cuidadosamente los resultados del GP-B, viendo con cual de las teorías existentes concuerdan; pero sobre todo, sería óptimo determinar el impacto y trascendencia que tendrán éstos resultados en la física del siglo XXI.

## V. Bibliografía

Adler, Ronald J. y Alexander S. Silbergleit. 1999. *General Treatment of Orbiting Gyroscope Precession*. International Journal of Theoretical Physics, (arXiv:gr-qc/9909054v2).

Biemond, Jacob. 2004. *Which gravitomagnetic precession rate will be measured by Gravity Probe B?* arXiv:physics/0411129v1.

Cahill, Reginald T. 2004. *Novel Gravity Probe B Frame-Dragging Effect*. (arXiv:physics/0406121v3).

Carroll, Sean M. 2003. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Primera Edición. Benjamin Cummings Ed.

Everitt, C.W.F. 1991. *Gravity Probe B: I. The Scientific Implications*. Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, Japan, eds. H. Sato y T. Nakamura, World Scientific, págs. 1632-1644.

Everitt, C.W.F. 1988. «*The Stanford Relativity Gyroscope Experiment(A): History and Overview*». En *Near Zero: New Frontiers of Physics*, de W. H. Freeman. 2nd Company, New York.

Hand, Louis y Finch, Janet. 1998. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, Estados Unidos.

*Facts - Gravity Probe B*. 2005. NASA, Marshall Space Flight Center. Huntsville, Alabama.

French, A.P. 1968. *Special Relativity*. Massachusetts Institute of Technology Editorial, Massachusetts.

Griffiths, David J. 1999. *Introduction to Electrodynamics*. Tercera Edición, Prentice Hall, Estados Unidos.

Landau, Lev Davidovich y E.M. Lifshitz. 1980. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Cuarta Edición, Elsevier, Estados Unidos.

Landau, Lev Davidovich y G.B. Rumer. 2003. *What Is Relativity?* Dover Publications, Inc. New York.

Marsden, Jerrold E. y Anthony Tromba. 2003. *Vector Calculus*. Quinta Edición, W. H. Freeman and Company, New York.

Misner, Charles W., J. A. Wheeler y K. S. Thorne. 1973. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.

Moffat, J. W. 2004. *Modified Gravitational Theory and the Gravity Probe-B Gyroscope Experiment*. (arXiv:gr-qc/0405091v1).

Munkres, James. 2000. *Topology*. Segunda Edición, Prentice Hall, Estados Unidos.

O'Connell, R. F. 2006. *A Note on Frame Dragging*. Department of Physics and Astronomy, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, Estados Unidos.

Ohanian, Hans C. y Remo Ruffini. 1994. *Gravitation and Spacetime*. Segunda Edición, W.W. Norton & Company, Estados Unidos.

Papapetrou, A. *Spinning Test-Particles in General Relativity. I*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **209**(1097), 1951.

Papapetrou, A. y E. Corinaldesi. *Spinning Test-Particles in General Relativity. II*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **209**(1097), 1951.

Pugh, George E. 2002. «*Proposal for a Satellite Test of the Coriolis Prediction of General Relativity*». En *Nonlinear Gravitodynamics, The Lense Thirring Effect, a documentary introduction to current research*, de Remo J. Ruffini y Costantino Sigisniondi.

Rindler, Wolfgang. 2006. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Segunda Edición, Oxford University Press, Estados Unidos.

Robertson, Stanley L. 2005. *Newtonian Gravity Predictions For Gravity Probe B*. arXiv:gr-qc/0502088v3.

Russell, Bertrand. 2001. *ABC of Relativity*. Sexta Edición, Routledge, Estados Unidos.

Schiff, L.I. 2002. «*Motion of a Gyroscope According to Einstein's Theory of Gravitation*». En *Nonlinear Gravitodynamics, The Lense Thirring Effect, a documentary introduction to current research* de Remo J. Ruffini y Costantino Sigisniondi..

Schutz, Bernard F. 1985. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Estados Unidos.

Spivak, Michael. 1999. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1. Tercera Edición, Publish or Perish, Inc., Estados Unidos.

Stewart, John. 2003. *Advanced General Relativity*. Cambridge University Press, Estados Unidos.

't Hooft, Gerard y Wei Chen. 2001. *Introduction to General Relativity*. Primera Edición, Rinton Press, Estados Unidos.

Thorne, Kip S.1988. «*Gravitomagnetism, Jets in Quasars, and the Stanford Gyroscope Experiment*». En *Near Zero: New Frontiers of Physics*. W. H. Freeman 2nd Company, New York.

Tolman, Richard C 1987. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Dover Publications, New York.

Turtur, Claus W. 2004. *An easy way to Gravimagnetism*. University of Applied Sciences Braunschweig, Alemania.

Wald, Robert M.1984. *General Relativity*. University Of Chicago Press, Estados Unidos.

Weinberg, Steven. 2001. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley and Sons, Estados Unidos.

Sitios de información en internet:

Sitio web oficial del Gravity Probe B

<http://einstein.stanford.edu>

# VI. Apéndices

## 1. Símbolos utilizados

- Variables griegas  $\mu, \nu$  Representan componentes espaciales y temporales, 0,1, 2, 3.
- Variables latinas  $i, j, k$  Representan solamente a las componentes espaciales, 1, 2, 3.
- $\eta_{\mu\nu}$  Métrica del espacio plano de Minkowski.  $\text{diag}\{-1 \ 1 \ 1 \ 1\}$
- $h_{\mu\nu}$  En la teoría linealizada, parte de la métrica que corresponde a la perturbación
- $\bar{h}_{\mu\eta}$  Versión ‘trace-reversed’ de  $h_{\mu\nu}$
- $R^\sigma_{\rho\mu\nu}$  Tensor de Riemann
- $R_{\mu\nu}$  Tensor de Ricci
- $R$  Escalar de Ricci
- $G_{\mu\nu}$  Tensor de Einstein
- $T_{\mu\nu}$  Tensor estrés-energía o momentum energía
- $\delta^i_j$  Delta de Kroenecker
- $\epsilon^{ijk}$  Símbolo de Levi-Civita
- $\nabla$  Laplaciando el espacio plano
- $\square$  D’Alembertiano
- $\partial_\mu$  La derivada parcial  $\partial / \partial x^\mu$
- $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  Símbolo de Christoffel
- $\nabla_\mu$  Derivada covariante respecto a  $\mu$

## 2. Datos relevantes del GP-B

Cuadro B.1: Medidas del GP-B

Efecto geodético predicho	6.61 segundos de arco ( $1.84 \times 10^{-3}$ grados por año)
Efecto de arrastre predicho	0.041 segundos de arco ( $1.14 \times 10^{-5}$ grados por año)
Precesión requerida	Mejor que 0.5 milisegundos de arco ( $1.4 \times 10^{-7}$ grados por año)

Cuadro B.2: Giroscopios (4)

Forma	Esféricos (esfericidad < 40 capas atómicas de la perfección)
Diámetro	3.8 centímetros (1.5 pulgadas)
Composición	Cuarzo homogéneo fundido
Recubrimiento	Niobio (capa uniforme de 1,270 nanómetros de espesor)
Velocidad de giro	72 Hz (4,300 rpm) en promedio
Razón de arrastre	Menor a $10^{-11}$ grados por hora

Cuadro B.3: Telescopios

Composición	Cuarzo homogéneo fundido
Longitud	35.6 centímetros (14.0 pulgadas)
Apertura	14.0 centímetros (5.5 pulgadas)
Longitud focal	3.8 metros (12.5 pies)
Diámetro del espejo	14.2 centímetros (5.6 pulgadas)
Estrella guía	HR8703 (IM Pegasi)
Precisión en el movimiento de HR 8703	0.00015 segundos de arco ( $4.1667 \times 10^{-8}$ grados por año)

Cuadro B.4: Aeronave

Longitud	6.4 metros (21.1 pies)
Diámetro	2.6 metros (8.7 pies)
Peso	3,100kg (3.4 toneladas US)
Potencia	Potencia total: 606 (Aeronave: 293W, Carga: 313W)
Baterías (2)	35Amp hora
Precisión para apuntar	0.2 segundos de arco ( $5.6 \times 10^{-5}$ grados por año)
Capacidad de 'Drag-Free'	$10^{-11}$ g

Cuadro B.5: Vehículo de Lanzamiento

Tipo	Boeing Delta II, modelo 7920-10
Longitud	38.6 metros (126.6 pies)
Diámetro	3.0 metros (9.8 pies)
Peso	231,821kg (255.5 toneladas US)
Etapas	2
Combustible	9 motores de cohete: kerosén y oxígeno líquido en la primera etapa, tetraóxido de nitrógeno e hidracina en la segunda etapa

Cuadro B.6: Órbita y misión

Tipo	Polar de 642km, realizando un tránsito por encima de uno de los polos cada 48.75min
Semi-eje mayor	7,027.4km
Excentricidad	0.0014
Altitud de apogeo	659.1km
Altitud de perigeo	639.5km
Inclinación	90.007
Lanzamiento	20 de Abril de 2004, 9:57:24am.
Sitio	Base de la Fuerza Aérea de Vandenberg, CA
Duración	11 meses, posteriores a 120 días de inicialización y chequeo después del lanzamiento

Cuadro B.7: Los siete “casi ceros” requeridos

	Requerimientos	Razón
<b>Giroscopios</b>		
Inhomogeneidad	$3 \times 10^{-7}$	Torques causados por desbalanceo de masa y gradientes de gravedad
Fuera de esfericidad	$5 \times 10^{-7}$	Torques de suspensión
Momento dipolar eléctrico	$10^{-10}$ e.s.u.	Torque eléctrico
<b>Ambiente</b>		
Temperatura	1.8K	Superconductividad y estabilidad mecánica
Aceleración	$10^{-10}$ g	Torques de suspensión y desbalance de masa
Campo magnético	$10^{-7}$ G	Torques magnéticos causados por la lectura
Presión del gas	$10^{-7}$ torr	Torques de gas