

---

# Límites en la velocidad de evolución en sistemas cuánticos de dos fermiones

---

Adam Sebastian Rios Kirste



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



## Límites en la velocidad de evolución en sistemas cuánticos de dos fermiones

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por  
Adam Sebastian Rios Kirste  
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,  
2025



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

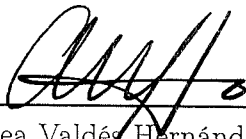


## Límites en la velocidad de evolución en sistemas cuánticos de dos fermiones

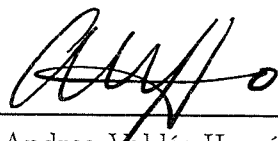
Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por  
Adam Sebastian Rios Kirste  
para optar al grado académico de Licenciado en Física

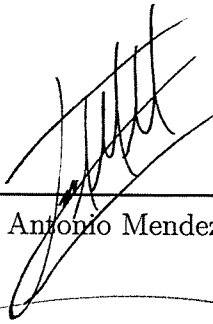
Guatemala,  
2025

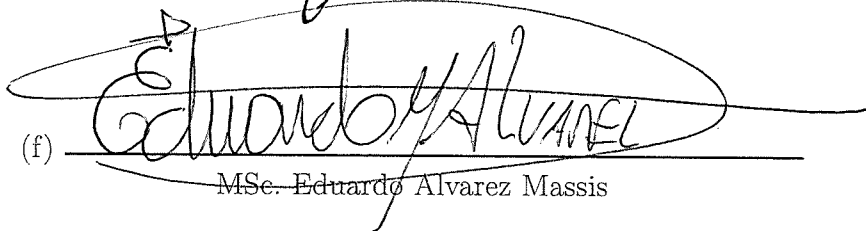
Vo.Bo.:

(f)   
Dra. Andrea Valdés Hernández

Tribunal Examinador:

(f)   
Dra. Andrea Valdés Hernández

(f)   
MSc. Antonio Mendez Giono

(f)   
MSc. Eduardo Alvarez Massis

Fecha de aprobación: Guatemala, 29 de octubre de 2025.

En el presente trabajo de tesis, el cual es una continuación del trabajo realizado por (Canseco, 2021), se desarrollan los cálculos para la obtención de límites en la rapidez de evolución de estados pertenecientes a sistemas cuánticos de dos fermiones idénticos no interactuantes, bajo diferentes configuraciones energéticas. Esto a través de un análisis matemático y del uso de recursos informáticos para la generación de gráficas, las cuales ayudarán a la identificación de dichos límites en cada uno de los sistemas cuánticos a estudiar.

Con los resultados obtenidos al abordar esta investigación se pretende aportar herramientas para el análisis de la dinámica cuántica, en donde los tiempos de evolución son fundamentales para el desarrollo teórico y práctico en diversas áreas, principalmente en el campo de la teoría de información cuántica.

Con esta contribución, se espera, además de enriquecer el conocimiento teórico sobre la dinámica de sistemas fermiónicos, sentar las bases para futuras investigaciones e incluso aplicaciones.

Expreso mis más sinceros agradecimientos a:

A mi familia por el apoyo y motivación brindada a lo largo de todos mis estudios. Gracias a su esfuerzo fui capaz de culminar mi carrera y sin ellos no lo hubiera podido lograr.

Y a mi asesora, Dra. Andrea Valdés Hernández, investigadora del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por brindarme de su tiempo y conocimientos para la realización de mi tesis. Fue fundamental para poder mejorar mi trabajo.

<b>Prefacio</b>	<b>v</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Lista de cuadros</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>x</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Justificación</b>	<b>3</b>
<b>3. Objetivos</b>	<b>4</b>
3.1. Objetivo general . . . . .	4
3.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>4. Marco teórico</b>	<b>5</b>
4.1. Sistemas de fermiones indistinguibles . . . . .	5
4.1.1. Estados de sistemas distinguibles . . . . .	5
4.1.2. Estados de fermiones indistinguibles . . . . .	6
4.2. Límites fundamentales a la rapidez de evolución . . . . .	9
4.2.1. La relación de Mandelstam-Tamm . . . . .	10
4.2.2. La relación de Margolus-Levitin . . . . .	11
4.2.3. La relación dual de Margolus-Levitin . . . . .	12
4.2.4. Límite de rapidez cuántica . . . . .	12
4.3. Sistema de dos fermiones con cuatro estados de ocupación accesibles . . . . .	14
4.3.1. Evolución temporal . . . . .	14
4.3.2. Cálculo del valor esperado y la dispersión de la energía . . . . .	16
<b>5. Límite de rapidez cuántica en sistemas fermiónicos</b>	<b>18</b>
5.1. Configuración con niveles de ocupación equidistantes . . . . .	18
5.2. Configuración tipo anillo para primeros vecinos . . . . .	24
5.3. Configuración tipo anillo con atajos . . . . .	30
<b>6. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>7. Recomendaciones</b>	<b>39</b>

<b>8. Bibliografía</b>	<b>40</b>
<b>9. Anexos</b>	<b>42</b>
9.1. Código en Wolfram Mathematica del sistema con niveles de energía equidistantes . .	42
9.2. Código en Wolfram Mathematica del sistema tipo anillo para vecinos cercanos . . . .	43
9.3. Código en Wolfram Mathematica del sistema tipo anillo atajos . . . . .	44
<b>10. Glosario</b>	<b>47</b>

---

## Lista de figuras

---

5.1. Gráfica del límite de rapidez cuántica para la configuración equidistante. . . . .	23
5.2. Diagrama de configuración tipo anillo para primeros vecinos . . . . .	24
5.3. Gráfica del límite de rapidez cuántica para la configuración tipo anillo para primeros vecinos . . . . .	29
5.4. Diagrama de configuración tipo anillo con atajos . . . . .	30
5.5. Gráfica del límite de rapidez cuántica para la configuración tipo anillo con atajos . .	35

---

Lista de cuadros

---

4.1. Límite fundamental dominante . . . . . 13

En el trabajo que se presenta a continuación se investigan los límites fundamentales en la evolución temporal de sistemas cuánticos conformados por dos fermiones idénticos no interactuantes, con cuatro niveles accesibles cada uno. Para poder estudiar dichos sistemas se utilizó el método de la segunda cuantización, el cual permite una formulación más práctica de la dinámica de los sistemas cuánticos, facilitando la construcción de los estados en los que se encuentra el sistema bipartito. Con esta base, se han considerado tres configuraciones distintas en los niveles energéticos del sistema, y para cada una de ellas se ha calculado el llamado *límite de rapidez cuántica*, que establece el tiempo mínimo que se requiere para que un estado inicial evolucione hacia un estado ortogonal.

Además del estudio analítico, se utilizó el software Wolfram Mathematica para la generación de gráficos que representan, para cada configuración, el límite de rapidez cuántica correspondiente a dicha evolución temporal. Se utilizó una escala de color para facilitar la identificación de puntos clave los cuales permiten calcular el tiempo mínimo en el cual un estado inicial del sistema cuántico evoluciona hasta alcanzar un estado ortogonal para un sistema en específico.

Al obtener dichos límites se logró avanzar en la comprensión y el establecimiento de cotas mínimas a la rapidez de evolución en sistemas de dos fermiones, bajo diferentes configuraciones.

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

Gracias al desarrollo de la teoría cuántica la humanidad ha sido capaz de comprender mejor los procesos a nivel subatómicos, como puede ser el comportamiento de una partícula. Se ha descubierto que a este nivel, las partículas no se comportan de manera determinista sino que están sujetas a leyes probabilistas y a fenómenos como la superposición y el entrelazamiento cuántico (Griffiths and Schroeter, 2018).

Uno de los temas centrales de estudio en las últimas décadas en relación con la dinámica de sistemas cuánticos es el de los límites fundamentales cuánticos. Estos son límites teóricos que definen muchos de los comportamientos en los sistemas cuánticos y gracias a ellos es posible comprender qué tanto un sistema puede cambiar en el tiempo (Frey, 2016; Deffner and Campbell, 2017; Margolus and Levitin, 1998). Uno de estos límites fundamentales es el límite de rapidez cuántica. Este indica cuán rápido puede un sistema cuántico evolucionar hacia un estado ortogonal al inicial. Gracias a trabajos como el de Mandelstam-Tamm (Mandelstam and Tamm, 1945), el de Margolus-Levitin (Margolus and Levitin, 1998) y el de Ness y colaboradores (Ness et al., 2022) (los cuales se abordarán más adelante en este trabajo) se tiene una mejor comprensión de dicho límite.

El entendimiento de los límites fundamentales cuánticos no es únicamente de carácter teórico, sino que también es crucial su comprensión práctica ya que también es posible de esta forma entender cómo se comportan y pueden controlar los sistemas cuánticos (Nielsen and Chuang, 2000). Un ejemplo de ello son las computadoras cuánticas, pues mientras más rápido un sistema cuántico pueda evolucionar de un estado a otro ortogonal, mejor será la capacidad de realizar operaciones. La velocidad de evolución también juega un papel importante en los procesos de decoherencia, la cual es la responsable de la pérdida de propiedades cuánticas en sistemas interactuando con el entorno. También tiene otras aplicaciones en áreas como la metrología y el procesamiento de información cuántica (Deffner and Campbell, 2017; Levitin and Toffoli, 2009).

Existen investigaciones previas a esta, como es el caso de (Canseco, 2021; Valdés-Hernández and Canseco, 2022), en las que se estudió el límite de rapidez cuántica en sistemas compuestos de dos fermiones indistinguibles, cada uno con niveles de energía equidistante, y en donde se tomaron en cuenta los límites fundamentales establecidos por Mandelstam-Tamm y Margolus-Levitin (Mandelstam and Tamm, 1945; Margolus and Levitin, 1998). Como una extensión de los trabajos (Canseco, 2021; Valdés-Hernández and Canseco, 2022), en la investigación presente se utilizará además el tra-

bajo presentado por Ness y colaboradores (Ness et al., 2022) en el 2022, el cual presenta una nueva cota para la evolución temporal de sistemas cuánticos. Esto plantea preguntas sobre cómo esta nueva cota influirá en los resultados de investigaciones ya realizadas, por lo que se pretende abordar aquí dicho problema. Además, se tomarán en cuenta los tres límites fundamentales antes mencionados aplicados al sistema de dos fermiones en las configuraciones de energía propuestas en (Oliveira et al., 2008) para estudiar como se comportará el límite de rapidez cuántico en cada una de ellas.

En los últimos años se han realizado múltiples investigaciones sobre la rapidez de evolución en diversos sistemas cuánticos (Frey, 2016; Deffner and Campbell, 2017), incluyendo sistemas compuestos por fermiones (Oliveira et al., 2008; Canseco, 2021; Valdés-Hernández and Canseco, 2022). Estos trabajos tomaron en cuenta las cotas de la evolución temporal de estados cuánticos propuestos en (Mandelstam and Tamm, 1945; Margolus and Levitin, 1998); sin embargo, no ha sido incluida en el análisis la cota propuesta por (Ness et al., 2022) en 2022. Esta será una tarea que se abordará en esta investigación. Además, estas tres cotas serán estudiadas en diferentes configuraciones del sistema, definidas en (Oliveira et al., 2008). Esto no solo permite una comprensión más profunda de la dinámica de estos sistemas en particular, sino que también aporta una mejor perspectiva sobre los propios límites cuánticos al observar su comportamiento en contextos específicos.

### 3.1. Objetivo general

Encontrar el tiempo mínimo de evolución (límite de rapidez cuántica) para tres configuraciones energéticas de un sistema cuántico conformado por dos fermiones idénticos no interactuantes, con cuatro niveles de energía accesibles cada uno.

### 3.2. Objetivos específicos

- Comprender y utilizar el método de la segunda cuantización para describir la dinámica de sistemas compuestos por fermiones idénticos.
- Comprender y calcular las cotas mínimas al tiempo de evolución entre estados ortogonales, para determinar el límite de rapidez cuántica.
- Encontrar expresiones matemáticas que describan la dinámica de los fermiones para cada una de las tres configuraciones a considerar, y calcular en cada caso el límite de rapidez cuántica analíticamente.
- Obtener gráficos de color que ayuden a identificar los tiempos mínimos de ortogonalidad de un estado inicial arbitrario para cada una de las configuraciones energéticas.

## 4.1. Sistemas de fermiones indistinguibles

### 4.1.1. Estados de sistemas distinguibles

Existen sistemas cuánticos compuestos, también llamados sistemas multipartitos, los cuales están conformados por dos o más subsistemas, que propiamente también son sistemas cuánticos. En un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  correspondiente a  $m$  subsistemas, se puede hacer referencia al subsistema  $\alpha$ , tal que  $1 \leq \alpha \leq m$ , el cual se describe en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_\alpha$  de dimensión  $d_\alpha$  (Buchleitner et al., 2009). Para poder expresar entonces el estado del sistema completo debe recurrirse al espacio de Hilbert completo  $\mathcal{H}$ , que se construye a partir del producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada subsistema:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\alpha=1}^m \mathcal{H}_\alpha, \quad (4.1)$$

donde  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_\alpha$  son los espacios correspondientes a cada subsistema (Buchleitner et al., 2009).

Posteriormente se considerará un **estado puro**, el cual es aquel que puede escribirse en términos de un solo vector de estado con la siguiente forma general:

$$|\psi\rangle = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_m} A_{v_1, v_2, \dots, v_m} |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_m\rangle, \quad (4.2)$$

donde  $\{|v_\alpha\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |d_\alpha\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}_\alpha$  y los coeficientes  $A_{v_1, v_2, \dots, v_m}$  son amplitudes de probabilidad. Cuando el estado es separable (o no enredado), la ecuación (4.2) puede expresarse como el producto de estados puros de sus  $m$  partes, es decir que

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_m\rangle. \quad (4.3)$$

### 4.1.2. Estados de fermiones indistinguibles

Dado el caso donde existan dos subsistemas conformando un sistema cuántico, es decir un sistema bipartito, se puede partir de la ecuación (4.1) tomando  $m = 2$ , obteniendo así,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Si los subsistemas son iguales se tiene que  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$  y debe recurrirse al subespacio simétrico de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  en el caso de los bosones, o al subespacio antisimétrico en el caso de fermiones (Canseco, 2021; de la Peña, 2006).

Si se continúa hablando de un sistema bipartito y se desea trabajar con fermiones, se puede denotar el espacio antisimétrico del espacio de Hilbert como un producto antisimétrico, es decir  $\mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f$  donde  $\mathcal{H}_f$  representa el espacio de Hilbert de un único fermión.

#### Sistema fermiónico

Se definirá  $\{|i\rangle\}$  como el conjunto de estados ortogonales accesibles que puede tener un solo fermión, también llamados estados o niveles de ocupación accesibles,

$$\{|i\rangle\} = \{|i_1\rangle, |i_2\rangle, \dots, |i_{d_f}\rangle\} \quad (4.4)$$

donde  $d_f = \dim \mathcal{H}_f$ . Además, los elementos de  $\{|i\rangle\}$  forman una base de  $\mathcal{H}_f$ .

Se considerarán los estados  $|i_l\rangle$  y  $|i_m\rangle$ , donde cada uno de estos vectores pertenece a  $\{|i\rangle\}$ . Puesto que los estados del sistema compuesto de dos fermiones tienen que estar debidamente antisimetrizados, se aplicará el operador de antisimetrización ( $\hat{S}_-$ ) obteniendo así:

$$\hat{S}_- |i_m, i_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|i_m i_l\rangle - |i_l i_m\rangle). \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) es cero (es decir que  $\hat{S}_- |i_m, i_l\rangle = 0$ ), cuando los dos fermiones ocupan el mismo estado (esto quiere decir, cuando  $|i_m\rangle = |i_l\rangle$ ). Por lo tanto, sólo cuando los estados de las partículas en un sistema fermiónico son diferentes entre sí, la función de onda de dicho sistema será distinta de cero. Al principio que establece que los estados de fermiones indistinguibles deben ser antisimétricos frente al intercambio de las partículas se le conoce como **El principio de exclusión de Pauli** (de la Peña, 2006).

Para representar el estado de  $N$  fermiones debidamente antisimetrizado tal que un fermión se encuentra en el estado  $|i_1\rangle$ , otro en  $|i_2\rangle$ , y así sucesivamente hasta llegar al fermión que está en el estado  $|i_N\rangle$ , se debe aplicar de igual forma el operador de antisimetrización ( $\hat{S}_-$ ), obteniendo así:

$$\hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \cdots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \cdots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

lo cual se conoce como el determinante de Slater y se anula cuando dos partículas están en el mismo estado, cumpliendo así con el Principio de Exclusión de Pauli (Canseco, 2021). Nótese que para poder construir el estado (4.6) se requiere que  $d_f \geq N$ . Este también puede reescribirse como:

$$|\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{sl}\rangle = \hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\{i_1, i_2, \dots, i_N\}} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle, \quad (4.7)$$

en donde  $P\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$  son las  $N!$  permutaciones que se aplican en dicho conjunto y  $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$  es el número de Levi-Cita con dimensión  $N$  (Canseco, 2021).

Otra forma de representar un estado de  $N$  fermiones indistinguibles es empleando los estados de Fock. Estos proveen información de cuántos fermiones del sistema se encuentran en cada uno de los niveles de ocupación accesibles, dados por la ecuación (4.4). Se representará el estado de Fock como el vector

$$|n\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{d_f}\rangle, \quad (4.8)$$

donde  $n_k$  especifica el número de fermiones que se encuentran en el estado  $|i_k\rangle$ . Dado El Principio de Exclusión de Pauli, dos fermiones no pueden ocupar un mismo estado, por lo tanto,  $n_k$  solo puede tomar los valores 0 y 1 (de la Peña, 2006).

Si a partir de (4.8) todos los estados de ocupación  $|i_k\rangle$  tienen un valor de número de partículas  $n_k = 0$ , donde  $0 \leq k \leq d_f$ , es decir que

$$|0\rangle = |0, 0, \dots, 0, \dots, 0\rangle, \quad (4.9)$$

se dice que ese estado es un estado de vacío, denotado como  $|0\rangle$ . En dicho estado no existe fermión alguno, mientras que un estado de Fock donde únicamente existen dos fermiones con  $d_f$  estados de ocupación, cada uno está representado, por ejemplo, como  $|1, 0, \dots, 0, \dots, 1\rangle$ . En este ejemplo uno de los fermiones está en el estado  $|i_1\rangle$  y el otro en el estado  $|i_{d_f}\rangle$ , por lo que  $n_1 = n_{d_f} = 1$  y el resto de índices son iguales a cero, es decir que  $n_k = 0$ , donde  $k \neq 1, d_f$ . Es importante mencionar que la suma  $n_1 + n_2 + \dots + n_{d_f}$  debe ser  $N$ , el número total de fermiones en el sistema (de la Peña, 2006).

Para modificar el número de partículas que hay en cada uno de los estados de ocupación se utilizan los operadores de creación y aniquilación ( $\hat{f}_k^\dagger, \hat{f}_k$ ) de forma que si se aplican dichos operadores sobre el estado  $|n\rangle$  (afectando únicamente la  $k$ -ésima posición) (de la Peña, 2006), se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^\dagger |n\rangle &= \hat{f}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{d_f}\rangle = (-1)^{n_k} \sqrt{1 - n_k} |n_1, n_2, \dots, 1 - n_k, \dots, n_{d_f}\rangle \\ \hat{f}_k |n\rangle &= \hat{f}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_{d_f}\rangle = (-1)^{n_k} \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, 1 - n_k, \dots, n_{d_f}\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde se muestra claramente que  $\hat{f}_k^\dagger$  es un operador de creación, pues si el estado  $k$ -ésimo está inicialmente vacío ( $n_k = 0$ ) tras la aplicación del operador  $\hat{f}_k^\dagger$  estará completo ( $n_k = 1$ ). Análogamente  $\hat{f}_k$  actúa como operador de aniquilación. Puede notarse también, que si el operador de aniquilación se aplica a un estado de ocupación vacío, el resultado será cero, es decir que  $\hat{f}_k |n_1, n_2, \dots, n_k = 0, \dots, n_N\rangle = 0$ . Por lo tanto si se aplica este operador al estado vacío definido en (4.9) se tendrá de igual forma cero, es decir que

$$\hat{f}_k |0\rangle = 0. \quad (4.11)$$

El determinante de Slater de la ecuación (4.7) puede escribirse en términos de la aplicación de operadores de creación sobre el estado de vacío definido en (4.9) tal que

$$|\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{sl}\rangle \equiv \hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \hat{f}_{i_1}^\dagger \hat{f}_{i_2}^\dagger \dots \hat{f}_{i_N}^\dagger |0\rangle. \quad (4.12)$$

Seguendo la ecuación anterior y tomando como ejemplo de nuevo un sistema donde existen dos fermiones ( $N = 2$ ), a partir de la ecuación (4.5), tomando  $i_1 \rightarrow i$  y  $i_2 \rightarrow j$ , se tiene que:

$$|\psi_{ij}^{sl}\rangle = \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle - |ji\rangle) = |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_{d_f}\rangle, \quad (4.13)$$

donde  $n_k = 1$  para  $k = i, j$  y  $n_k = 0$  para cualquier otro valor de  $k$ . A partir de esto y de la expresión general para un estado puro en la ecuación (4.2) se puede escribir el siguiente estado (Batle et al., 2018):

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_f} w_{ij} \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j^\dagger |0\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_f} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \quad (4.14)$$

el cual describirá el sistema de dos fermiones con  $d_f$  estados accesibles cada uno, donde  $w_{ij}$  son coeficientes complejos y antisimétricos, esto quiere decir que

$$w_{ij} = -w_{ji}, \quad (4.15)$$

cumpliendo así la condición de normalización

$$\langle\psi|\psi\rangle = 2 \sum_{i,j} |w_{ij}|^2 = 1. \quad (4.16)$$

Si se toma como ejemplo cuatro niveles energéticos accesibles ( $d_f = 4$ ), se puede desarrollar la sumatoria en (4.14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i,j=1}^4 w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = w_{11} |\psi_{11}^{sl}\rangle + w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{13} |\psi_{13}^{sl}\rangle + w_{14} |\psi_{14}^{sl}\rangle \\ &\quad + w_{21} |\psi_{21}^{sl}\rangle + w_{22} |\psi_{22}^{sl}\rangle + w_{23} |\psi_{23}^{sl}\rangle + w_{24} |\psi_{24}^{sl}\rangle \\ &\quad + w_{31} |\psi_{31}^{sl}\rangle + w_{32} |\psi_{32}^{sl}\rangle + w_{33} |\psi_{33}^{sl}\rangle + w_{34} |\psi_{34}^{sl}\rangle \\ &\quad + w_{41} |\psi_{41}^{sl}\rangle + w_{42} |\psi_{42}^{sl}\rangle + w_{43} |\psi_{43}^{sl}\rangle + w_{44} |\psi_{44}^{sl}\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Al tratarse de estados antisimétricos, cada determinante de Slater cumple la siguiente propiedad:

$$|\psi_{ij}^{sl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle - |ji\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|ji\rangle - |ij\rangle) = -|\psi_{ji}^{sl}\rangle. \quad (4.18)$$

Nótese en la ecuación (4.18) que cuando  $i = j$  se tiene que el estado es igual a cero, es decir que  $|\psi_{ii}^{sl}\rangle = 0$ . Por otra parte, para el resto de casos, por ejemplo si se toman los estados  $w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle$  y  $w_{21} |\psi_{21}^{sl}\rangle$  de la ecuación (4.17), se tiene que  $w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{21} |\psi_{21}^{sl}\rangle = w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle - w_{21} |\psi_{12}^{sl}\rangle$  por (4.18), pero utilizando la propiedad de la ecuación (4.15) para los coeficientes antisimétricos  $w_{ij}$ , se obtiene que  $w_{21} = -w_{12}$ , por lo que al sustituir resulta que  $w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{21} |\psi_{21}^{sl}\rangle = 2w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle$ . Puede notarse entonces que los términos  $w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle$  cuando  $i > j$  no aportan nueva información puesto que son iguales a los términos  $w_{ji} |\psi_{ji}^{sl}\rangle$  correspondientes. Para evitar esta redundancia únicamente se tomarán los términos cuando  $i < j$ . Por esta razón se puede escribir el estado del sistema de dos fermiones de una forma general dada por la siguiente ecuación:

$$|\psi\rangle = 2 \sum_{i < j}^{d_f} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (4.19)$$

Según (de la Peña, 2006) el Hamiltoniano que describe a un sistema de dos fermiones idénticos no interactuantes puede reescribirse en términos de los operadores de creación y aniquilación (según el método de segunda cuantización). Si los estados individuales accesibles  $|i_k\rangle$  corresponden a una energía  $\epsilon_k$ , dicho hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{d_f} \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k. \quad (4.20)$$

## 4.2. Límites fundamentales a la rapidez de evolución

Una de las propiedades más peculiares de la mecánica cuántica es el fenómeno de la dualidad onda-partícula. Una forma de poder describir este comportamiento es recurriendo a una teoría estadística y utilizar la siguiente relación de incertidumbre entre el momento ( $p$ ), y la posición ( $x$ ), que posee una partícula (Deffner and Campbell, 2017), teniendo así

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar, \quad (4.21)$$

donde el símbolo Delta ( $\Delta$ ) se utiliza para representar la variación de cada una de las variables a las que acompaña, es decir su incertidumbre. En textos introductorios puede encontrarse una relación de incertidumbre análoga para el tiempo y la energía (Deffner and Campbell, 2017) a partir de

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{v} \quad \text{y} \quad \Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p = v \Delta p, \quad (4.22)$$

donde  $v$  es la velocidad de grupo de la onda y  $E$  su respectiva energía. De estas expresiones se puede concluir entonces que

$$\Delta t \Delta E \gtrsim \hbar, \quad (4.23)$$

indicando así, que no se puede conocer con infinita precisión el tiempo y la energía de una partícula (Deffner and Campbell, 2017).

El principio de incertidumbre de Heisenberg (cuya expresión más conocida es la desigualdad (4.21)), se puede demostrar a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, según como se muestra en (Robertson, 1929; de la Peña, 2006) teniendo así

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (4.24)$$

donde  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son cualesquiera dos operadores que representan una variable observable física,  $\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$  es el valor esperado del operador  $\hat{O}$  en el estado  $|\psi\rangle$  y  $\Delta \hat{O} = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$  es la desviación estándar de la variable  $O$ , que constituye una medida de la dispersión de dicha variable, cuando el sistema se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$ .

Es importante resaltar que de la ecuación (4.24) no se puede obtener la relación tiempo-energía de la ecuación (4.23) puesto que el tiempo no es un operador. Una forma de obtener e interpretar la ecuación (4.23) fue propuesta por Mandelstam-Tamm (MT), como se verá en la siguiente sección.

### 4.2.1. La relación de Mandelstam-Tamm

Esta relación dada por Mandelstam y Tamm (Mandelstam and Tamm, 1945) establece una conexión entre la dispersión de la energía total del sistema y el tiempo mínimo que le lleva a este evolucionar hacia un estado ortogonal. Para llegar a la relación de MT se parte de la evolución de un observable  $\hat{A}$  dada por la ecuación de Liouville-von-Neumann (de la Peña, 2006):

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}], \quad (4.25)$$

donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema. Apoyándose en la ecuación general de incertidumbre (4.24) con  $\hat{B} = \hat{H}$  se obtiene que

$$\Delta \hat{H} \Delta \hat{A} \geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \right|. \quad (4.26)$$

Tomando  $\hat{A}$  como el proyector sobre el estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ , es decir, con  $\hat{A} = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)|$ , se tiene entonces que  $\hat{A}^2 = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| \psi(0)\rangle \langle \psi(0)| = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| = \hat{A}$ , por lo tanto la desviación estándar de  $\hat{A}$  puede escribirse como

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} = \sqrt{\langle \hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}. \quad (4.27)$$

Además, si se define  $F(t) = \langle \hat{A} \rangle = |\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2$  (Frey, 2016) se obtiene que

$$\Delta \hat{H} \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{F(t) - F^2(t)}} \left| \frac{\partial F(t)}{\partial t} \right|. \quad (4.28)$$

Esta expresión puede integrarse respecto de  $t$  a partir de  $t = 0$ , tomando  $F(0) = 1$  y asumiendo que  $\hat{H}$  no depende explícitamente del tiempo (Frey, 2016), lo que conduce a

$$\frac{t}{\hbar} \Delta \hat{H} \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{F(t)}. \quad (4.29)$$

Si se toma en cuenta únicamente los procesos en los que el estado en un cierto tiempo  $\tau$  y el inicial son ortogonales, es decir que  $\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle = 0$ , se obtiene una cota mínima para el tiempo  $\tau$  en el que el sistema cuántico evoluciona entre los dos estados, por lo que se obtiene

$$\tau \geq \tau^{MT} = \frac{\pi \hbar}{2 \Delta \hat{H}}. \quad (4.30)$$

La cota  $\tau^{MT}$  es lo que se conoce como cota de Mandelstam-Tamm (MT). La desigualdad (4.30) revela la primera noción de un tiempo límite cuántico (o un límite de rapidez cuántica), estableciendo así una escala de tiempo intrínseca de la evolución de un sistema bajo un hamiltoniano independiente del tiempo.

Es importante señalar que el límite propuesto por (4.30) puede ser arbitrariamente pequeño, ya que la desviación estándar del Hamiltoniano  $\Delta \hat{H}$  puede divergir incluso si la energía promedio es finita (Deffner and Campbell, 2017). Otra cota inferior al tiempo  $\tau$  que no tiene este problema es la cota de Margolus y Levitin (ML) la cual se presentará a continuación.

### 4.2.2. La relación de Margolus-Levitin

El límite de rapidez cuántico propuesto por Margolus y Levitin (ML) (Margolus and Levitin, 1998) no está dado en términos de la dispersión de la energía del estado sino de su energía media. Primeramente se considera un estado arbitrario inicial  $|\psi(0)\rangle$ . Al ser un estado cuántico arbitrario puede ser escrito en términos de una base cualquiera de  $\mathcal{H}$ , más específicamente en la base de eigenestados  $\{|E_n\rangle\}$  del Hamiltoniano (Sakurai and Napolitano, 2020), es decir que

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle, \quad (4.31)$$

donde  $c_n \in \mathbb{C}$ . En (Margolus and Levitin, 1998) se considera que el sistema posee un espectro de energía discreto y que los eigenvalores de energía  $\{E_n\}$  están asociados con los estados  $\{|E_n\rangle\}$ . Para hacer los cálculos sencillos se supone que  $E_0 = 0$  (donde se ha denotado con  $E_0$  el nivel de energía más bajo que contribuye en (4.31)). Por lo tanto la solución de la ecuación de Schrödinger con  $\hat{H}$  independiente del tiempo está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle. \quad (4.32)$$

Si se define  $S(t)$  como la proyección del estado al tiempo  $t$  a lo largo del estado inicial se obtiene que

$$S(t) \equiv \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (4.33)$$

Usando la relación  $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x)$  con  $x \geq 0$  (Frey, 2016) puede notarse que

$$\begin{aligned} \text{Re}(S) &= \sum_n |c_n|^2 \cos\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right) \\ &\geq \sum_n |c_n|^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{E_n t}{\hbar} + \sin\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right)\right)\right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\langle\hat{H}\rangle}{\hbar} t + \frac{2}{\pi} \text{Im}(S). \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde  $\langle\hat{H}\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n$  es la energía media del sistema. Además, al desearse que el estado final al que evoluciona sea ortogonal al estado inicial luego de un tiempo  $t = \tau$ , al tomar la proyección definida en (4.33), se tiene que  $S(\tau) = 0$ , por consiguiente  $\text{Re}(S) = 0$  y  $\text{Im}(S) = 0$ . Obteniendo así

$$0 \geq 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\langle\hat{H}\rangle}{\hbar} \tau, \quad (4.35)$$

por lo tanto se obtiene que

$$\tau \geq \tau^{ML} = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle\hat{H}\rangle} \quad (4.36)$$

donde  $\tau^{ML}$  es la cota de Margolus-Levitin (ML).

Si se supone que la energía mínima del sistema no es cero ( $E_0 \neq 0$ ), se tiene que (Canseco, 2021)

$$\tau \geq \tau^{ML} = \frac{\pi \hbar}{2(\langle \hat{H} \rangle - E_{min})}, \quad (4.37)$$

en donde  $E_{min}$  es la energía mínima que contribuye al estado, es decir que  $E_{min} = \min\{E_n | c_n \neq 0\}$

### 4.2.3. La relación dual de Margolus-Levitin

Mientras que la cota de Margolus-Levitin dada por la ecuación (4.37) involucra la distancia energética entre el valor medio de la energía y el mínimo nivel energético  $E_{min}$ , recientemente se derivó otra cota, llamada la cota dual de ML (denotada como  $ML^*$ ) (Ness et al., 2022), dada en términos de la diferencia entre la energía máxima que contribuye al estado (4.31) y la energía media. Al referirse al dual, se estudiará entonces la proyección antes definida en (4.33) de la siguiente manera:

$$S'(t) = e^{-iE_{max}t/\hbar} \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-i(E_{max}-E_n)t/\hbar}. \quad (4.38)$$

Tomando nuevamente la misma relación trigonométrica  $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x)$  y la ecuación (4.38) se tiene que (Ness et al., 2022)

$$\begin{aligned} Re(S') &= \sum_n |c_n|^2 \cos \frac{(E_{max} - E_n)t}{\hbar} \\ &\geq \sum_n |c_n|^2 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \frac{(E_{max} - E_n)t}{\hbar} + \sin \left( \frac{(E_{max} - E_n)t}{\hbar} \right) \right) \right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{(E_{max} - \langle \hat{H} \rangle)t}{\hbar} + \frac{2}{\pi} Im(S'). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Tomando entonces que para un tiempo  $\tau$  el estado  $|\psi(\tau)\rangle$  es ortogonal al inicial, de modo que  $S(\tau) = 0$ , y por lo tanto  $S'(\tau)$  también es cero, se llega a

$$0 \geq 1 - \frac{2}{\pi} \frac{(E_{max} - \langle \hat{H} \rangle)\tau}{\hbar}. \quad (4.40)$$

En consecuencia se tiene que

$$\tau \geq \tau^{ML^*} \equiv \frac{\pi \hbar}{2(E_{max} - \langle \hat{H} \rangle)}, \quad (4.41)$$

donde  $E_{max}$  es la energía máxima que contribuye al estado, es decir que  $E_{max} = \max\{E_n | c_n \neq 0\}$ . El límite  $\tau^{ML^*}$  es llamado la cota dual (Ness et al., 2022).

### 4.2.4. Límite de rapidez cuántica

Para poder determinar el tiempo mínimo de evolución de un estado inicial a uno ortogonal es importante tomar en cuenta los tres límites cuánticos antes mencionados, es decir  $\tau^{MT}$ ,  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML^*}$ . Al tomar estos en cuenta en un sistema cuántico puede averiguarse cuál de ellos es mayor, lo que a su vez mostrará cual es la cota que determina el **Límite de rapidez cuántica** (o *Quantum Speed Limit*, como se le conoce en inglés), definido como (Ness et al., 2022):

$$\tau \geq \tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2\Delta \hat{H}}, \frac{\pi \hbar}{2(\langle \hat{H} \rangle - E_{min})}, \frac{\pi \hbar}{2(E_{max} - \langle \hat{H} \rangle)} \right\}. \quad (4.42)$$

Para determinar más adelante en qué regiones del espacio de parámetros domina cada uno de los límites fundamentales, puede realizarse la comparación de dos cocientes definidos como

$$\alpha = \frac{\tau^{ML}}{\tau^{MT}} \quad y \quad \beta = \frac{\tau^{ML^*}}{\tau^{MT}}. \quad (4.43)$$

Puede notarse que si tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son menores que uno, es porque la cota MT es mayor que la cota ML (pues  $\alpha < 1$ ) y también es mayor que la cota dual (pues  $\beta < 1$ ), es decir que la cota MT es mayor a cualquiera de las otras dos, y por lo tanto

$$\max\{\tau^{MT}, \tau^{ML}, \tau^{ML^*}\} = \tau^{MT}. \quad (4.44)$$

Esto quiere decir que cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son menores que 1 el límite fundamental que dominará en esa región corresponderá a  $MT$ .

Otro caso que puede presentarse es cuando  $\alpha > 1$  y  $\beta < 1$ . En el cociente dado por  $\beta$  en (4.43) puede notarse que  $\tau^{MT} > \tau^{ML^*}$  (pues  $\beta < 1$ ), mientras que para el caso del cociente dado por  $\alpha$ , de igual forma dado por (4.43), se tiene que  $\tau^{ML} > \tau^{MT}$  (pues  $\alpha > 1$ ), por lo que se tiene que

$$\tau^{ML^*} < \tau^{MT} < \tau^{ML}. \quad (4.45)$$

Esto quiere decir que para el caso donde  $\alpha > 1$  y  $\beta < 1$  el límite fundamental que dominará en esa región corresponderá a  $ML$ .

Ahora se analizará el caso contrario, cuando  $\alpha < 1$  y  $\beta > 1$ . En el cociente dado por  $\alpha$  en (4.43) puede notarse que  $\tau^{MT} > \tau^{ML}$  (pues  $\alpha < 1$ ), mientras que para el caso del cociente dado por  $\beta$  en (4.43) se tiene que  $\tau^{ML^*} > \tau^{MT}$ , y por lo tanto

$$\tau^{ML} < \tau^{MT} < \tau^{ML^*}. \quad (4.46)$$

Esto quiere decir que para el caso donde  $\alpha < 1$  y  $\beta > 1$  el límite fundamental que dominará en esa región corresponderá a  $ML^*$ .

Los resultados dados por la ecuaciones (4.44), (4.45) y (4.46) pueden resumirse en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Límite fundamental dominante

$\alpha$	$\beta$	límite dominante
$< 1$	$< 1$	$\tau^{MT}$
$> 1$	$< 1$	$\tau^{ML}$
$< 1$	$> 1$	$\tau^{ML^*}$

Existe un cuarto caso y es cuando  $\alpha > 1$  y  $\beta > 1$ . Al ver los cocientes definidos en (4.43) puede notarse que el límite  $\tau^{MT}$  es menor que  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$ , pero puesto que no puede concluirse cuál de estos dos es mayor, este resultado no aporta información, por esta razón no es incluido en la tabla.

### 4.3. Sistema de dos fermiones con cuatro estados de ocupación accesibles

Para la investigación que se va a realizar es necesario definir el sistema fermiónico que se estudiará. En este caso será un sistema bipartito, es decir que  $N = 2$ . Además, se asumirá que los fermiones no interactúan entre ellos. Esto quiere decir que el estado  $|\psi\rangle$  pertenece a  $\mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f$  y que el Hamiltoniano tiene la forma dada por (4.20). Cada fermión tendrá cuatro estados de ocupación accesibles por lo que  $d_f = 4$  y a partir de la ecuación (4.4) se le llamará  $\mathcal{I}$  al conjunto de estados ortogonales accesibles tal que  $\mathcal{I} = \{|i_1 = 1\rangle, |i_2 = 2\rangle, |i_3 = 3\rangle, |i_4 = 4\rangle\}$ .

A partir del sistema fermiónico definido, se pretende determinar los límites explicados con anterioridad considerando diferentes configuraciones de energía, y por lo tanto diferentes espectros del hamiltoniano (4.20).

#### 4.3.1. Evolución temporal

Siguiendo la ecuación (4.19), el estado del sistema a considerar está definido como

$$|\psi\rangle = 2 \sum_{i < j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (4.47)$$

Puede notarse que el estado cumple con la condición de ortonormalización puesto que

$$\langle\psi|\psi\rangle = 4 \sum_{i' < j'} \sum_{i < j} w_{i'j'}^* w_{ij} \langle\psi_{i'j'}^{sl}|\psi_{ij}^{sl}\rangle = 4 \sum_{i < j} |w_{ij}|^2 = 1. \quad (4.48)$$

Según (4.20) el Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k. \quad (4.49)$$

Al aplicar dicho Hamiltoniano sobre el estado (4.47) se obtiene

$$\hat{H} |\psi\rangle = \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k |\psi\rangle = 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k \sum_{i < j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (4.50)$$

Al desarrollar la sumatoria se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{H} |\psi\rangle &= 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k \sum_i^4 w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k [w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{13} |\psi_{13}^{sl}\rangle + w_{14} |\psi_{14}^{sl}\rangle \\ &\quad + w_{23} |\psi_{23}^{sl}\rangle + w_{24} |\psi_{24}^{sl}\rangle + w_{34} |\psi_{34}^{sl}\rangle]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Utilizando la representación en el espacio de Fock del estado  $|\psi_{ij}^{sl}\rangle$  se realizará el cálculo únicamente del Hamiltoniano aplicado al primer término de la sumatoria ( $w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle$ ), tomando como referencia (Canseco, 2021). Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle &= \sum_{k=1}^4 w_{12} \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k \frac{1}{\sqrt{2}} (|12\rangle - |21\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^4 w_{12} \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k |1, 1, 0, 0\rangle \\ &= w_{12} (\epsilon_1 \hat{f}_1^\dagger \hat{f}_1 |1, 1, 0, 0\rangle + \epsilon_2 \hat{f}_2^\dagger \hat{f}_2 |1, 1, 0, 0\rangle \\ &\quad + \epsilon_3 \hat{f}_3^\dagger \hat{f}_3 |1, 1, 0, 0\rangle + \epsilon_4 \hat{f}_4^\dagger \hat{f}_4 |1, 1, 0, 0\rangle). \end{aligned} \quad (4.52)$$

A partir de la explicación dada de la ecuación (4.10) a la (4.11), se tiene que  $\epsilon_3 \hat{f}_3^\dagger \hat{f}_3 |1, 1, 0, 0\rangle = \epsilon_4 \hat{f}_4^\dagger \hat{f}_4 |1, 1, 0, 0\rangle = 0$ , mientras que  $\epsilon_1 \hat{f}_1^\dagger \hat{f}_1 |1, 1, 0, 0\rangle = \epsilon_1 |1, 1, 0, 0\rangle$  y  $\epsilon_2 \hat{f}_2^\dagger \hat{f}_2 |1, 1, 0, 0\rangle = \epsilon_2 |1, 1, 0, 0\rangle$ , consiguiendo así:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle &= w_{12} (\epsilon_1 + \epsilon_2) |1, 1, 0, 0\rangle \\ &= w_{12} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{1}{\sqrt{2}} (|12\rangle - |21\rangle) \\ &= w_{12} (\epsilon_1 + \epsilon_2) |\psi_{12}^{sl}\rangle. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Al operar el Hamiltoniano tal como se realizó en las ecuaciones (4.52) y (4.53) sobre el resto de los términos de la sumatoria de (4.51) se llega al siguiente resultado:

$$\hat{H} |\psi\rangle = 2 \sum_{i < j}^4 w_{ij} (\epsilon_i + \epsilon_j) |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (4.54)$$

Al aplicar el operador unitario  $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  sobre el estado definido en (4.47) para conocer cómo se que este evoluciona, se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} 2 \sum_{i < j}^4 w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = 2 \sum_{i < j}^4 w_{ij} e^{-\frac{i(\epsilon_i + \epsilon_j)t}{\hbar}} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \quad (4.55)$$

donde al aplicar  $\hat{H}$  al estado, tal como se tiene en la ecuación (4.53) se tiene que  $e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = e^{-i(\epsilon_i + \epsilon_j)t/\hbar} |\psi_{ij}^{sl}\rangle$ . Si se desarrolla el último término de (4.55) se obtiene

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = & 2(w_{12}e^{-\frac{i(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}|\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{13}e^{-\frac{i(\epsilon_1+\epsilon_3)t}{\hbar}}|\psi_{13}^{sl}\rangle \\
& + w_{14}e^{-\frac{i(\epsilon_1+\epsilon_4)t}{\hbar}}|\psi_{14}^{sl}\rangle + w_{23}e^{-\frac{i(\epsilon_2+\epsilon_3)t}{\hbar}}|\psi_{23}^{sl}\rangle \\
& + w_{24}e^{-\frac{i(\epsilon_2+\epsilon_4)t}{\hbar}}|\psi_{24}^{sl}\rangle + w_{34}e^{-\frac{i(\epsilon_3+\epsilon_4)t}{\hbar}}|\psi_{34}^{sl}\rangle).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Se reescribirán algunos términos de la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
|\psi_{12}^{sl}\rangle & \rightarrow |1\rangle, & E_1 & = \epsilon_1 + \epsilon_2; & |\psi_{13}^{sl}\rangle & \rightarrow |2\rangle, & E_2 & = \epsilon_1 + \epsilon_3 \\
|\psi_{14}^{sl}\rangle & \rightarrow |3\rangle, & E_3 & = \epsilon_1 + \epsilon_4; & |\psi_{23}^{sl}\rangle & \rightarrow |4\rangle, & E_4 & = \epsilon_2 + \epsilon_3 \\
|\psi_{24}^{sl}\rangle & \rightarrow |5\rangle, & E_5 & = \epsilon_2 + \epsilon_4; & |\psi_{34}^{sl}\rangle & \rightarrow |6\rangle, & E_6 & = \epsilon_3 + \epsilon_4.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

También se tomarán los coeficientes  $2w_{ij}$  tal como se definieron en (Valdés-Hernández and Canseco, 2022), como:

$$\begin{aligned}
2w_{12} & = \sqrt{p_1}e^{i\theta_1}; & 2w_{13} & = \sqrt{p_2}e^{i\theta_2}; \\
2w_{14} & = \sqrt{p_3}e^{i\theta_3}; & 2w_{23} & = \sqrt{p_4}e^{i\theta_4}; \\
2w_{24} & = \sqrt{p_5}e^{i\theta_5}; & 2w_{34} & = \sqrt{p_6}e^{i\theta_6};
\end{aligned} \tag{4.58}$$

donde el conjunto de  $\{\theta_\eta\}$  son fases arbitrarias y el coeficiente  $p_\eta \in [0, 1]$  es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $\eta$ , con  $\eta = 1, 2, \dots, 6$ . Al sustituir las ecuaciones (4.57) y (4.58) en (4.56), se puede escribir una nueva forma general de nuestro estado  $|\psi(t)\rangle$  tal que

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\eta=1}^6 \sqrt{p_\eta} e^{i\theta_\eta} e^{-\frac{iE_\eta t}{\hbar}} |\eta\rangle. \tag{4.59}$$

Al tomar el estado (4.59) debe cumplirse entonces la misma condición de normalización tal como sucede con los coeficientes  $w_{ij}$  por lo que se procede a realizar lo siguiente:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left( \sum_{\eta'=1}^6 \sqrt{p_{\eta'}} e^{i\theta_{\eta'}} e^{\frac{iE_{\eta'} t}{\hbar}} \langle\eta'| \right) \left( \sum_{\eta=1}^6 \sqrt{p_\eta} e^{-i\theta_\eta} e^{-\frac{iE_\eta t}{\hbar}} |\eta\rangle \right) = \sum_{\eta', \eta} \sqrt{p_{\eta'} p_\eta} e^{i(\theta_{\eta'} - \theta_\eta)} e^{\frac{i(E_{\eta'} - E_\eta)t}{\hbar}} \langle\eta'| \eta\rangle, \tag{4.60}$$

dado que  $\langle\eta'| \eta\rangle = \delta_{\eta' \eta}$ , entonces se concluye que la condición de normalización para los coeficientes  $p_\eta$  es la siguiente:

$$\sum_{\eta=1}^6 p_\eta = 1. \tag{4.61}$$

Cabe resaltar que el sistema compuesto por los dos fermiones posee una dimensión  $d_f = 6$ , es decir que se tiene ahora seis estados accesibles, con energías dadas por  $E_\eta$ .

### 4.3.2. Cálculo del valor esperado y la dispersión de la energía

Hay que tomar en cuenta que al aplicar el Hamiltoniano definido en (4.49) sobre cualquiera de los estados  $|\eta\rangle$  definidos en (4.57) se tiene que

$$\hat{H} |\eta\rangle = E_\eta |\eta\rangle. \quad (4.62)$$

Conociendo esto, a partir del estado dado por la ecuación (4.59) y del Hamiltoniano descrito en (4.49) se puede calcular el valor esperado de la energía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{H} | \psi(0) \rangle \\ &= \sum_{\eta', \eta}^6 \sqrt{p_\eta p_{\eta'}} e^{i(\theta_{\eta'} - \theta_\eta)} \langle \eta' | \hat{H} | \eta \rangle, \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $\hat{H}$ , al ser diagonal en la base  $\{|\eta\rangle\}$  y por lo mencionado en (4.62), cumple que  $\langle \eta' | \hat{H} | \eta \rangle = E_\eta \delta_{\eta', \eta}$ . Por lo que a partir de (4.63) se obtiene como resultado:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{\eta=1}^6 p_\eta E_\eta. \quad (4.64)$$

Si se aplica el Hamiltoniano dos veces sobre un estado  $|\eta\rangle$  se obtiene, siguiendo (4.62), lo siguiente:

$$\hat{H}^2 |\eta\rangle = \hat{H} E_\eta |\eta\rangle = E_\eta \hat{H} |\eta\rangle = E_\eta^2 |\eta\rangle. \quad (4.65)$$

A partir de este resultado puede calcularse el valor esperado de  $\hat{H}^2$  análogamente a como se obtuvo el resultado de (4.64), llegando a:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \langle \psi | \hat{H}^2 | \psi \rangle = \sum_{\eta=1}^6 p_\eta E_\eta^2. \quad (4.66)$$

Finalmente, a partir de (4.64) y (4.66) se puede calcular la desviación estándar  $\Delta \hat{H}$  de la energía como sigue:

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2}. \quad (4.67)$$

---

## Límite de rapidez cuántica en sistemas fermiónicos

---

En este capítulo, en el que se muestran los resultados originales de la tesis, se pretende estudiar diferentes configuraciones de sistemas de dos fermiones idénticos no interactuantes, y determinar el límite de rapidez cuántica en cada caso. Lo que diferencia a cada configuración es la distribución de los niveles de energía accesibles para cada uno de los fermiones, lo que afectará directamente cómo estos pueden saltar entre cada estado accesible, modificando así los límites en la rapidez de evolución de los diferentes estados iniciales.

### 5.1. Configuración con niveles de ocupación equidistantes

Esta configuración fue considerada en (Canseco, 2021) y los correspondientes límites  $\tau^{MT}$  y  $\tau^{ML}$  fueron analizados en (Valdés-Hernández and Canseco, 2022). La finalidad de volver a analizar este sistema en esta tesis es introducir el trabajo realizado en (Ness et al., 2022) para así poder incluir el límite  $\tau^{ML*}$  en el análisis. En este sistema se asume que los niveles de energía de cada fermión individual se encuentran igualmente espaciados. Puesto que se habla de cuatro niveles accesibles ( $d_f = 4$ ), se tiene entonces que (Valdés-Hernández and Canseco, 2022).

$$\epsilon_k = k\epsilon, \quad (5.1)$$

con  $k = 1, 2, 3, 4$ . Si se sustituye cada uno de estos valores en las definiciones de  $\{E_\eta\}$  de la ecuación (4.57) se obtiene

$$\begin{aligned} E_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 = 3\epsilon; & E_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_3 = 4\epsilon \\ E_3 &= \epsilon_1 + \epsilon_4 = 5\epsilon; & E_4 &= \epsilon_2 + \epsilon_3 = 5\epsilon \\ E_5 &= \epsilon_2 + \epsilon_4 = 6\epsilon; & E_6 &= \epsilon_3 + \epsilon_4 = 7\epsilon. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por lo tanto, al sustituir dichos eigenvalores de energía del sistema compuesto en la ecuación (4.64), el valor medio de la energía para este sistema queda como:

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon(3p_1 + 4p_2 + 5p_3 + 5p_4 + 6p_5 + 7p_6). \quad (5.3)$$

Para poder facilitar los cálculos se utilizará la parametrización propuesta por (Valdés-Hernández and Canseco, 2022), siendo esta la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + p_6; & y &= p_1 - p_6 \\ u &= p_2 + p_5; & v &= p_2 - p_5 \\ w &= p_3 + p_4; & z &= p_3 - p_4. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Puede notarse que dicha parametrización cumple con la condición de normalización dada por la ecuación (4.61) en la forma

$$x + u + w = \sum_{\eta=1}^6 p_{\eta} = 1. \quad (5.5)$$

Tomando como referencia (Valdés-Hernández and Canseco, 2022) se puede encontrar el valor esperado de la energía reescribiendo (5.3) como

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \epsilon[5(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 2p_1 - p_2 + p_5 + 2p_6] \\ &= \epsilon[5(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 2(p_1 - p_6) - (p_2 - p_5)]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Utilizando la condición de normalización de la ecuación (4.61), además de sustituir los términos agrupados por los valores de la parametrización propuesta en la ecuación (5.4), se obtiene el siguiente valor esperado del Hamiltoniano

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon[5 - (2y + u)]. \quad (5.7)$$

Para calcular la desviación estándar de la energía de este sistema, primero deben encontrarse los valores de la ecuación (4.67). Se calculará primero el valor esperado de la energía elevada al cuadrado ( $\langle \hat{H}^2 \rangle$ ); para ello se tomará lo encontrado en (5.7) y se elevará al cuadrado, teniendo así

$$\langle \hat{H} \rangle^2 = \epsilon^2[5 - (2y + v)]^2 = \epsilon^2[25 - 10(2y + v) + (2y + v)^2]. \quad (5.8)$$

Ahora se calculará el término restante de la ecuación (4.67), es decir  $\langle \hat{H}^2 \rangle$ . Sustituyendo los valores obtenidos  $E_{\eta}$  de la ecuación (5.2) en la ecuación (4.66) se obtendrá entonces que

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2(9p_1 + 16p_2 + 25p_3 + 25p_4 + 36p_5 + 49p_6). \quad (5.9)$$

La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2[25(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 16p_1 - 9p_2 + 11p_5 + 24p_6]. \quad (5.10)$$

De igual manera al cumplirse la condición de la ecuación (4.61), y al reescribir los términos restantes se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}^2 \rangle &= \epsilon^2 [25 + 4p_1 - 20p_1 + p_2 - 10p_2 + 10p_5 + p_5 + 20p_6 + 4p_6] \\ &= \epsilon^2 [25 + 4(p_1 + p_6) - 20(p_1 - p_6) - 10(p_2 - p_5) + (p_2 + p_5)].\end{aligned}\quad (5.11)$$

Al sustituir los términos agrupados por los valores de la parametrización propuesta en (5.4) en la ecuación anterior puede obtenerse que

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2 [-10(2y + v) + 4x + u + 25]. \quad (5.12)$$

Conociendo  $\langle \hat{H} \rangle^2$  dado por la ecuación (5.8) y  $\langle \hat{H}^2 \rangle$  dado por la ecuación (5.12), se puede encontrar la desviación estándar de la energía sustituyendo dichas ecuaciones en (4.67), obteniendo así:

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\epsilon^2 [-10(2y + v) + 4x + u + 25] - \epsilon^2 [25 - 10(2y + v) + (2y + v)^2]}, \quad (5.13)$$

donde al simplificar se obtiene entonces la desviación estándar de la energía para este sistema tal que

$$\Delta \hat{H} = \epsilon \sqrt{4x + u - (2y + v)^2}. \quad (5.14)$$

Para determinar los límites cuánticos  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$ , tal como se indican en las ecuaciones (4.37) y (4.41), es necesario encontrar  $\langle \hat{H} \rangle - E_{min}$  y  $E_{max} - \langle \hat{H} \rangle$ . Para esto hay que identificar el valor mínimo y máximo del conjunto de eigenvalores de energía del sistema compuesto  $\{E_\eta\}$ . Tal como se puede ver en la ecuación (5.2),  $E_{min} = \min\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 3\epsilon$  y  $E_{max} = \max\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 7\epsilon$ . Esto quiere decir que dada la ecuación (4.59), para que existan estos valores de energía  $p_1$  y  $p_6$  deben ser distintos de cero. Dado esto se puede proceder a realizar los cálculos por lo que

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon [5 - (2y + v)] - 3\epsilon = \epsilon [2 - (2y + v)], \quad (5.15)$$

y

$$E_{max} - \langle \hat{H} \rangle = 7\epsilon - \epsilon [5 - (2y + v)] = \epsilon [2 + (2y + v)]. \quad (5.16)$$

Teniendo todo lo anterior, se pueden determinar las cotas de Mandelstam-Tamm, de Margolus-Levitin y dual. Para la primera, se sustituye la desviación estándar ( $\Delta \hat{H}$ ) encontrada en (5.14) en la ecuación (4.30) obteniendo así que

$$\tau^{MT} = \frac{\pi \hbar}{2\epsilon \sqrt{4x + u - (2y + v)^2}}. \quad (5.17)$$

Si se agrupan los términos para formar dos variables con base en los valores dados por la parametrización de (5.4) puede notarse que el límite  $\tau^{MT}$  queda en términos de  $2y + v$  y  $4x + u$ .

Para obtener el límite  $\tau^{ML}$  debe sustituirse el resultado de la ecuación (5.15) en (4.37) obteniendo así:

$$\tau^{ML} = \frac{\pi \hbar}{2\epsilon [2 - (2y + v)]}. \quad (5.18)$$

Por último para encontrar el límite  $\tau^{ML*}$  debe substituirse el resultado de la ecuación (5.16) en (4.41) obteniendo así:

$$\tau^{ML*} \equiv \frac{\pi\hbar}{2\epsilon[2 + (2y + v)]}. \quad (5.19)$$

Por otro lado, dado que  $E_\eta > 0$  para toda  $\eta$ , se tiene que el valor promedio de energía debe ser mayor que cero, y al mismo tiempo dicho valor es menor que la energía máxima del sistema, es decir que  $0 \leq \langle \hat{H} \rangle \leq E_{max}$ . A partir de esto se cumple que

$$0 \leq \langle \hat{H} \rangle - E_{min} \leq E_{max} - E_{min}. \quad (5.20)$$

Recurriendo a la ecuación (5.15) se tiene entonces que

$$0 \leq \epsilon[2 - (2y + v)] \leq 7\epsilon - 3\epsilon = 4\epsilon, \quad (5.21)$$

de donde se llega a que la variable  $2y + v$  está acotada como sigue:

$$-2 \leq 2y + v \leq 2. \quad (5.22)$$

Por su parte, la segunda variable dada por la parametrización  $(4x + u)$ , se delimita usando la condición de normalización de la siguiente manera:

$$4x + u = 3x + (x + u) \leq 3x + 1 \leq 4, \quad (5.23)$$

por lo que

$$0 \leq 4x + u \leq 4. \quad (5.24)$$

Ahora que se tienen nuevas variables, se puede determinar según los resultados de la Tabla 4.1 cómo se comportarán los límites fundamentales para esta configuración. Se partirá calculando los cocientes  $\alpha$  y  $\beta$  substituyendo los límites encontrados (5.17), (5.18) y (5.19) en (4.43). Al substituir y simplificar se obtiene

$$\alpha = \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 - a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 + a}, \quad (5.25)$$

donde  $a = 2y + v$  y  $b = 4x + u$ . Según el primer caso de la Tabla 4.1 se requiere que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  sean menores que uno para que el límite  $\tau^{MT}$  sea mayor que  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$  por lo que a partir de (5.25) se tiene que

$$\frac{\sqrt{b - a^2}}{2 - a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 + a} < 1, \quad (5.26)$$

por lo que al despejar para  $b$  en ambas desigualdades se obtiene

$$b < 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.27)$$

Puede notarse entonces que el límite  $\tau^{MT}$  domina en esta configuración cuando  $b$  es menor a ambos polinomios mostrados en (5.27), en donde  $4 - 4a + 2a^2 < 4 + 4a + 2a^2$  para  $a > 0$  mientras que  $4 - 4a + 2a^2 > 4 + 4a + 2a^2$  para  $a < 0$ .

Ahora se analizará el segundo caso dado en la Tabla 4.1 en donde el límite dominante será  $\tau^{ML}$ . Para este caso debe cumplirse que  $\alpha > 1$  y  $\beta < 1$  por lo que a partir de (5.25) se tiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{2-a} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{2+a} < 1, \quad (5.28)$$

por lo que al despejar  $b$  para ambas desigualdades se obtiene

$$b > 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.29)$$

Puede notarse que únicamente para  $a > 0$ , se cumplirá la ecuación (5.29), puesto que solo para  $a > 0$  es válida la desigualdad  $4 - 4a + 2a^2 < 4 + 4a + 2a^2$ . Es decir que solo cuando  $a$  sea positivo, el límite  $\tau^{ML}$  podrá ser mayor que el resto. Tomando en cuenta la desigualdad (5.22), se concluye entonces que la cota  $\tau^{ML}$  podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $0 < a < 2$ .

Por último se estudiará el caso donde el mayor de los límites será  $\tau^{ML*}$  por lo que debe cumplirse  $\alpha < 1$  y  $\beta > 1$  según la Tabla 4.1. por lo que se obtiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{2-a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{2+a} > 1. \quad (5.30)$$

De igual forma al despejar para  $b$  se llega a

$$b < 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b > 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.31)$$

Para este caso las desigualdades se cumplen únicamente cuando  $a < 0$ , puesto que solo entonces puede satisfacerse que  $4 + 4a + 2a^2 < 4 - 4a + 2a^2$ . Es decir que solo cuando  $a$  sea negativo, el límite  $\tau^{ML*}$  podrá ser mayor que el resto. Recurriendo de nuevo a (5.22), se observa que la cota dual podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $-2 < a < 0$ .

Conociendo ahora los rangos en donde cada uno de los límites cuánticos aparecen se procede a realizar la gráfica del  $\tau_{QSL}$ , en escala de color, como función de los parámetros  $a = 2y + v$  y  $b = 4x + u$  tal como puede verse en la Figura 5.1.

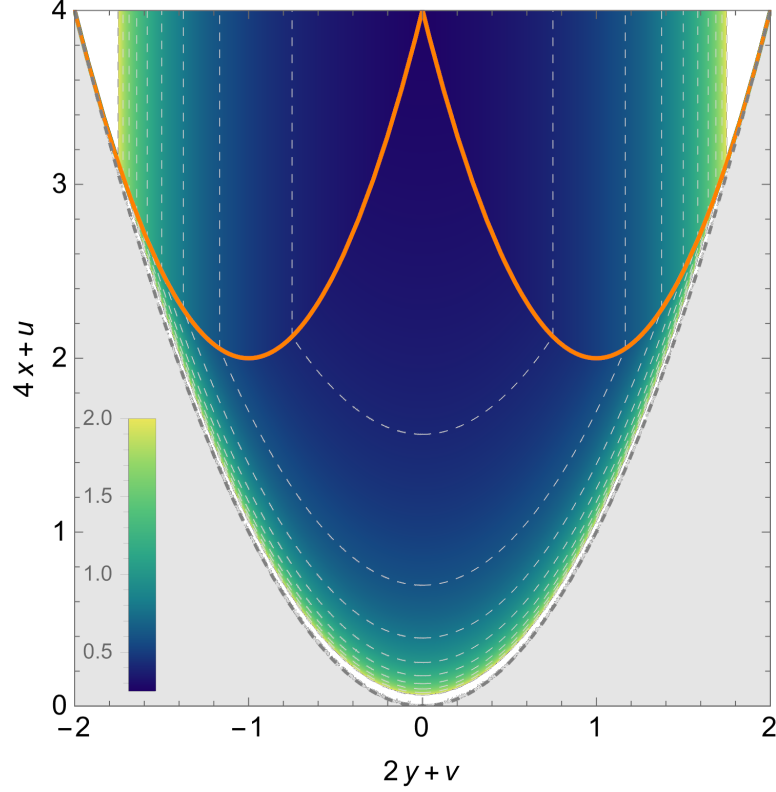


Figura 5.1: Límite de rapidez cuántica  $\tau_{QSL}$  en escala de color en unidades de  $\pi\hbar/\epsilon$  en un rango de  $[1/4, 2]$ . La parábola naranja izquierda corresponde a estados para los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML*}$  y la parábola naranja de la derecha corresponde a puntos en los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML}$ . La región superior de la parábola izquierda es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML*}$  mientras que la parte superior de la parábola del lado derecho es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML}$ . Todo lo que está por debajo de las parábolas naranjas y por encima de la parábola punteada gris corresponde a  $\tau_{QSL} = \tau^{MT}$ . La línea grisácea punteada corresponde a tiempos indefinidos donde  $\tau_{QSL} \rightarrow \infty$ . Las regiones blancas corresponden a valores  $\tau_{QSL} > 2\pi\hbar/\epsilon$  y las regiones grises corresponden a casos los cuales no son físicamente posibles.

A cada estado inicial (determinado por el conjunto  $\{p_\eta\}$ ) le corresponde un punto en la gráfica de color, que determina el límite de rapidez cuántica de dicho estado cuando el sistema evoluciona bajo un Hamiltoniano con el espectro (5.2). Tomando en cuenta el punto que corresponde al menor  $\tau_{QSL}$ , propio a las coordenadas (0,4), es decir,

$$\begin{aligned} 2y + v &= 0 \\ 4x + u &= 4, \end{aligned} \tag{5.32}$$

podrá verse a qué valores de  $p_\eta$  corresponde. Dada la condición de normalización (5.5) puede notarse que  $x + u \leq 1$ . Para que se cumpla dicha condición y simultáneamente la segunda ecuación en (5.32) debe cumplirse que  $x = 1$  y  $u = 0$ . Dado este resultado y tomando en cuenta (5.4),  $u = p_2 + p_5 = 0$ . Esto quiere decir que  $p_2 = p_5 = 0$ , por ende  $v = 0$  en la primer ecuación mostrada en (5.32). De (5.4) y los resultados obtenidos, se tiene que  $4x = 4(p_1 + p_6) = 4$  y  $2y = 2(p_1 - p_6) = 0$ . Para satisfacer estas ecuaciones se concluye entonces que  $p_1 = p_6 = 1/2$ . Puesto que debe cumplirse la condición dada por (4.61) y teniendo que  $p_1 + p_6 = 1$ , entonces  $p_\eta = 0$  con  $\eta = 2, 3, 4, 5$ .

Ya que se conocen los valores  $p_\eta$  para el menor  $\tau_{QSL}$  de la Gráfica 5.1, se procederá a sustituirlos en la ecuación (4.59) para conocer el estado correspondiente a dicho límite, obteniendo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\theta_1} e^{-\frac{i3t}{\hbar}} |1\rangle + e^{-i\theta_6} e^{-\frac{i7t}{\hbar}} |6\rangle \right], \quad (5.33)$$

de manera que al tiempo  $t$  existe un estado el cual está en superposición entre  $|1\rangle$  y  $|6\rangle$ , cada uno con la misma probabilidad. Cada estado posee una fase geométrica  $e^{-i\theta_\eta}$  donde  $\theta_\eta$  son valores arbitrarios, además de una fase dinámica  $e^{-i3t/\hbar}$  y  $e^{-i7t/\hbar}$ , respectivamente.

Otras coordenadas relevantes a tomar en la gráfica dada por 5.1 son  $(2, 4)$  y  $(-2, 4)$ . Puede notarse que justamente en estos puntos pasa la parábola punteada de color grisáceo. Tomando en cuenta los límites (5.17) y (5.18) y al sustituir la coordenada  $(2, 4)$  en estos, recordando que el primer valor de cada coordenada corresponde a  $2y + v$  y el segundo a  $4x + u$ , se obtiene como resultado que los límites  $\tau^{MT} = \tau^{ML} \rightarrow \infty$ . Por otra parte al tomar la segunda coordenada  $(-2, 4)$  y sustituirla en los límites (5.17) y (5.19) se obtiene que  $\tau^{MT} = \tau^{ML^*} \rightarrow \infty$ .

## 5.2. Configuración tipo anillo para primeros vecinos

Para este tipo de configuración, propuesta en (Oliveira et al., 2008), se tiene que los fermiones pueden realizar saltos entre cuatro sitios, con la condición de que para pasar de un sitio a otro estos deben ser vecinos inmediatos. Una forma de representar es a través del siguiente diagrama:

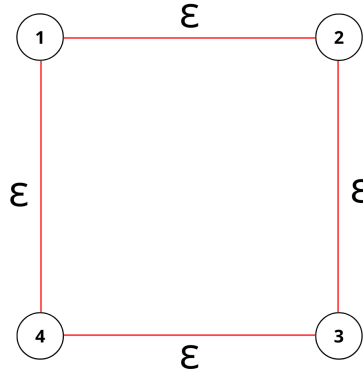


Figura 5.2: Diagrama de una configuración de anillo donde un fermión puede moverse a través de cuatro sitios con la condición de que se traslade de un sitio a otro solo si el segundo se encuentra en la vecindad más cercana del primero, requiriendo una energía  $\epsilon$  para pasar de un estado a otro.

Se definirán subíndices para indicar el estado inicial en el que se encuentra una partícula y el estado al que desea moverse, siendo  $m$  y  $n$  los índices respectivamente. Además se definirá un valor  $a_{mn}$  para referirse al coste energético que se requiere para que la partícula realice el salto de  $m$  a  $n$ . Es importante resaltar que este coste energético es igual si se regresa al estado del que partió, es decir que  $a_{mn} = a_{nm}$ . Se puede entonces ver según el diagrama 5.2 que una partícula que está inicialmente en el sitio  $m = 1$ , puede saltar al estado  $n = 2$  o al estado  $n = 4$  con un coste energético de  $\epsilon$ , es decir que  $a_{12} = a_{14} = \epsilon$ . Se tendrá el mismo costo energético si la partícula regresa desde donde realizó el salto, es decir que  $a_{21} = a_{41} = \epsilon$ . Sin embargo, si la partícula está inicialmente en  $m = 1$ , esta no puede realizar un salto al sitio  $n = 3$ , puesto que no es su vecino

más cercano, además si no realiza un salto, no requerirá un valor energético para moverse por lo que  $a_{11} = a_{13} = a_{31} = 0$ . De la misma forma se tendrán los mismos valores de los costes energéticos para cada uno de los posibles saltos permitidos. A partir de estos valores se puede definir el Hamiltoniano de dicha configuración, el cual describe el comportamiento de un solo fermión al saltar hacia cada uno de los diferentes sitios, de acuerdo con la siguiente matriz (Oliveira et al., 2008):

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Al calcular los eigenvalores de dicha matriz se obtiene como resultado que estos son  $\epsilon_1 = -2\epsilon$ ,  $\epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_3 = 0$ ,  $\epsilon_4 = 2\epsilon$ . Se tomará la energía del estado base en 0, por lo que los nuevos niveles de energía quedarían como  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 2\epsilon$ ,  $\epsilon_3 = 2\epsilon$ ,  $\epsilon_4 = 4\epsilon$ .

Al sustituir estos nuevos niveles de energía en la ecuación (4.57) se puede encontrar los eigenvalores que conforman el sistema compuesto ( $\{E_\eta\}$ ) obteniendo:

$$\begin{aligned} E_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\epsilon; & E_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_3 = 2\epsilon \\ E_3 &= \epsilon_1 + \epsilon_4 = 4\epsilon; & E_4 &= \epsilon_2 + \epsilon_3 = 4\epsilon \\ E_5 &= \epsilon_2 + \epsilon_4 = 6\epsilon; & E_6 &= \epsilon_3 + \epsilon_4 = 6\epsilon. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dado los valores  $E_\eta$  se puede encontrar el valor medio del Hamiltoniano del sistema compuesto para este sistema a partir de la ecuación (4.64), obteniendo así

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon(2p_1 + 2p_2 + 4p_3 + 4p_4 + 6p_5 + 6p_6), \quad (5.36)$$

donde los términos de esta ecuación se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \epsilon(4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 2p_1 - 2p_2 + 2p_5 + 2p_6) \\ &= \epsilon(4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 2(p_1 + p_6) - 2(p_2 - p_5)). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Al utilizar la condición de normalización de la ecuación (4.61), además de sustituir los términos agrupados por los valores de la parametrización propuesta en la ecuación (5.4), se obtiene entonces el siguiente valor esperado del Hamiltoniano:

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon[4 - 2(y + v)]. \quad (5.38)$$

Para calcular la desviación estándar de este sistema, deben encontrarse los valores de la ecuación (4.67). Primeramente se calculará el valor esperado de la energía elevada al cuadrado ( $\langle \hat{H}^2 \rangle$ ), para ello se tomará lo encontrado en (5.38) y se elevará al cuadrado obteniendo así:

$$\langle \hat{H} \rangle^2 = \epsilon^2[4 - 2(y + v)]^2 = \epsilon^2[16 - 16(y + v) + 4(y + v)^2]. \quad (5.39)$$

Ahora se calculará el término restante de la ecuación (4.67), es decir,  $\langle \hat{H}^2 \rangle$ . Para ello se sustituirán los valores encontrados de  $E_\eta$  de la ecuación (5.35) en la ecuación (4.66) por lo que se obtiene

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2(4p_1 + 4p_2 + 16p_3 + 16p_4 + 36p_5 + 36p_6), \quad (5.40)$$

donde los términos se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2 [16(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 12p_1 - 12p_2 + 20p_5 + 20p_6]. \quad (5.41)$$

De igual manera al cumplirse la condición de la ecuación (4.61), y al reescribir los términos restantes se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}^2 \rangle &= \epsilon^2 [16 - 16p_1 + 4p_1 - 16p_2 + 4p_2 + 16p_5 + 4p_5 + 16p_6 + 4p_6] \\ &= \epsilon^2 [16 + -16(p_1 - p_6) - 16(p_2 - p_5) + 4(p_1 + p_6) + 4(p_2 + p_5)]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Al sustituir los términos agrupados por los valores de la parametrización propuesta en (5.4) en la ecuación anterior, y al ordenar los términos se obtiene entonces lo siguiente:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2 [-16(y + v) + 4(x + u) + 16]. \quad (5.43)$$

Conociendo  $\langle \hat{H} \rangle^2$  dado por la ecuación (5.39) y  $\langle \hat{H}^2 \rangle$  dado por la ecuación (5.43), se puede encontrar la desviación estándar de la energía sustituyendo dichas ecuaciones en (4.67) respectivamente,

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\epsilon^2 [-16(y + v) + 4(x + u) + 16] - \epsilon^2 [16 - 16(y + v) + 4(y + v)^2]}. \quad (5.44)$$

Al simplificar se tiene como resultado la desviación estándar de la energía para este sistema dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta \hat{H} = \epsilon \sqrt{4(x + u) - 4(y + v)^2}. \quad (5.45)$$

Tal como se realizó en la configuración anterior es importante encontrar  $\langle \hat{H} \rangle - E_{min}$  y  $E_{max} - \langle \hat{H} \rangle$  para poder calcular los límites cuánticos de  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$ , tal como se indica en las ecuaciones (4.37) y (4.41). Para esto se identifica del conjunto de eigenvalores de energía de  $\{E_\eta\}$  el valor mínimo y máximo de los que se encuentran en (5.36), siendo estos  $E_{min} = \min\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 2\epsilon$  y  $E_{max} = \max\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 6\epsilon$  respectivamente. Dado esto se puede encontrar que

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon[4 - 2(y + v)] - 2\epsilon = \epsilon[2 - 2(y + v)], \quad (5.46)$$

y

$$E_{max} - \langle \hat{H} \rangle = 6\epsilon - \epsilon[4 - (y + v)] = \epsilon[2 + 2(y + v)]. \quad (5.47)$$

Teniendo todo lo anterior, se puede encontrar los límites que necesarios. Si se sustituye la desviación estándar ( $\Delta \hat{H}$ ) encontrada en (5.45) en la ecuación (4.30) se obtiene el límite  $\tau^{MT}$  para este sistema, el cual está dado por:

$$\tau^{MT} = \frac{\pi \hbar}{2\epsilon \sqrt{4(x + u) - 4(y + v)^2}}. \quad (5.48)$$

Al volver a agrupar los términos se tiene que la cota MT solo depende de dos variables:  $y + v$  y  $x + u$ .

Para obtener el límite  $\tau^{ML}$  se debe sustituir el resultado de la ecuación (5.46) en (4.37) obteniendo así:

$$\tau^{ML} = \frac{\pi\hbar}{2\epsilon[2 - 2(y + v)]}. \quad (5.49)$$

Por último para encontrar el límite  $\tau^{ML*}$  debe sustituirse el resultado de la ecuación (5.47) en (4.41) obteniendo así:

$$\tau^{ML*} \equiv \frac{\pi\hbar}{2\epsilon[2 + 2(y + v)]}. \quad (5.50)$$

Para obtener los rangos de valores de la variable  $y + v$  se utilizará el resultado de la ecuación (5.46) y se sustituirá en (5.20), tomando en cuenta que  $E_{max} = 6\epsilon$  y  $E_{min} = 2\epsilon$ , por lo que se obtiene

$$0 \leq \epsilon[2 - 2(y + v)] \leq 6\epsilon - 2\epsilon = 4\epsilon. \quad (5.51)$$

de donde se llega a que los límites para la variable  $y + v$  son:

$$-1 \leq y + v \leq 1. \quad (5.52)$$

Para la segunda variable dada por  $(x + u)$ , puede utilizarse la condición dada por (5.5). Esta dice que  $x + u + w = 1$ , por lo que a partir de ello puede concluirse que los límites para esta segunda variable están dados por:

$$0 \leq x + u \leq 1. \quad (5.53)$$

Teniendo nuevas variables para este sistema, se procede a determinar cómo se comportarán los límite fundamentales utilizando los resultados de la Tabla 4.1. Calculando los cocientes  $\alpha$  y  $\beta$  sustituyendo los límites encontrados (5.48), (5.49) y (5.50) en (4.43) se obtiene

$$\alpha = \frac{\sqrt{b - a^2}}{1 - a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{b - a^2}}{1 + a}, \quad (5.54)$$

donde  $a = y + v$  y  $b = x + u$ . Según el primer caso de la Tabla 4.1 se requiere que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  sean menores que uno para que el límite  $\tau^{MT}$  sea mayor que  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$  por lo que a partir de (5.54) se tiene que

$$\frac{\sqrt{b - a^2}}{1 - a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b - a^2}}{1 + a} < 1, \quad (5.55)$$

por lo que al despejar para  $b$  en ambas desigualdades se obtiene

$$b < 1 - 2a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 1 + 2a + 2a^2. \quad (5.56)$$

Puede notarse entonces que el límite  $\tau^{MT}$  domina en esta configuración cuando  $b$  es menor a ambos polinomios mostrados en (5.56), en donde  $1 - 2a + 2a^2 < 1 + 2a + 2a^2$  para  $a > 0$  mientras que  $1 - 2a + 2a^2 > 1 + 2a + 2a^2$  para  $a < 0$ .

Ahora se analizará el segundo caso dado en la Tabla 4.1 en donde el límite dominante será  $\tau^{ML}$ . Para esto debe cumplirse que  $\alpha > 1$  y  $\beta < 1$  por lo que a partir de (5.54) se tiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{1-a} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{1+a} < 1, \quad (5.57)$$

por lo que al despejar  $b$  para ambas desigualdades se obtiene

$$b > 1 - 2a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 1 + 2a + 2a^2. \quad (5.58)$$

Puede notarse que únicamente para  $a > 0$ , se cumplirá la ecuación (5.58), puesto que solo con estos valores para  $a$  es válida la desigualdad  $1 - 2a + 2a^2 < 1 + 2a + 2a^2$ . Es decir que solo cuando  $a$  sea positivo, el límite  $\tau^{ML}$  podrá ser mayor que el resto. Tomando en cuenta la desigualdad (5.52), se concluye entonces que la cota  $\tau^{ML}$  podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $0 < a < 1$ .

Por último se estudiará el caso donde el mayor de los límites será  $\tau^{ML*}$  por lo que debe cumplirse  $\alpha < 1$  y  $\beta > 1$  según 4.1. por lo que se obtiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{1-a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{1+a} > 1. \quad (5.59)$$

despejando para  $b$  se llega a

$$b < 1 - 2a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b > 1 + 2a + 2a^2. \quad (5.60)$$

Para este caso las desigualdades se cumplen únicamente cuando  $a < 0$ , puesto que solo así se puede satisfacer que  $1 + 2a + 2a^2 < 1 - 2a + 2a^2$ . Es decir que solo cuando  $a$  sea negativo, el límite  $\tau^{ML*}$  podrá ser mayor que el resto. Recurriendo de nuevo a (5.52), se observa que la cota dual podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $-1 < a < 0$ .

Conociendo los rangos en los que los límites cuánticos aparecen se procede a realizar la gráfica del  $\tau_{QSL}$  para esta configuración, en escala de color, como función de los parámetros  $a = y + v$  y  $b = x + u$  tal como se presenta en la Figura 5.3.

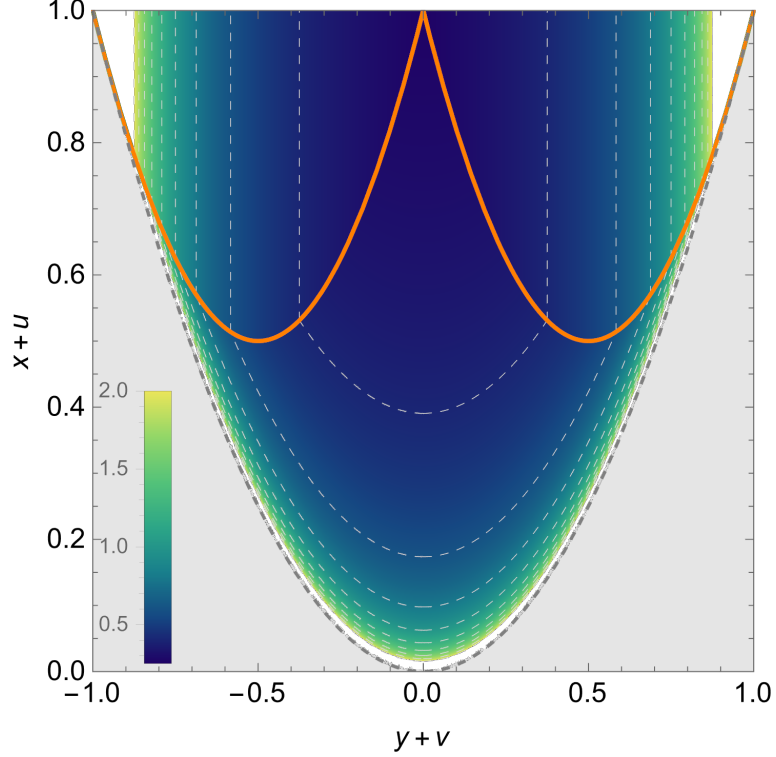


Figura 5.3: Límite de rapidez cuántica  $\tau_{QSL}$  en escala de color en unidades de  $\pi\hbar/\epsilon$  en un rango de  $[1/4, 2]$ . La parábola naranja izquierda corresponde a estados para los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML*}$  y la parábola naranja de la derecha corresponde a puntos en los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML}$ . La región superior de la parábola izquierda es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML*}$  mientras que la parte superior de la parábola del lado derecho es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML}$ . Todo lo que está por debajo de las parábolas naranjas y por encima de la parábola punteada gris corresponde a  $\tau_{QSL} = \tau^{MT}$ . La línea grisácea punteada corresponde a tiempos indefinidos donde  $\tau_{QSL} \rightarrow \infty$ . Las regiones blancas corresponden a valores  $\tau_{QSL} > 2\pi\hbar/\epsilon$  y las regiones grises corresponden a casos los cuales no son físicamente posibles.

Tomando en cuenta el punto que corresponde al menor  $\tau_{QSL}$  para este sistema, correspondiente a las coordenadas  $(0,1)$  (esto para encontrar los parámetros  $p_\eta$  del estado inicial asociado a dicho punto) se tiene que

$$\begin{aligned} y + v &= 0 \\ x + u &= 1, \end{aligned} \tag{5.61}$$

Dada la parametrización utilizada debe cumplirse la ecuación (5.5); puede notarse que  $x + u \leq 1$  y la segunda ecuación dada por (5.61) ya cumple con dicha condición. Por otro lado, tomando la parametrización de (5.4) se tiene que  $x + u = p_1 + p_6 + p_2 + p_5 = 1$  y  $y + v = p_1 - p_6 + p_2 - p_5 = 0$ , por lo que al considerar la condición de (4.61) se concluye que  $p_3 = p_4 = 0$ . A partir de la primera ecuación de (5.61) se tiene que  $p_1 + p_2 = p_5 + p_6$ . Al sustituir esto en la segunda ecuación de (5.61) se tiene que

$$p_1 + p_2 = p_5 + p_6 = 1/2. \tag{5.62}$$

Puede notarse que no existe una única solución para esta ecuación, por lo que se tienen infinitas soluciones para este sistema cuántico, es decir que a partir de (4.59) los estados con el mínimo  $\tau_{QSL}$

tienen la siguiente estructura:

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{p_1}e^{-i\theta_1}e^{\frac{-i2t}{\hbar}}|1\rangle + \sqrt{p_2}e^{-i\theta_2}e^{\frac{-i2t}{\hbar}}|2\rangle + \sqrt{p_5}e^{-i\theta_5}e^{\frac{-i6t}{\hbar}}|5\rangle + \sqrt{p_6}e^{-i\theta_6}e^{\frac{-i6t}{\hbar}}|6\rangle, \quad (5.63)$$

donde la probabilidad de cada estado puede variar, siempre y cuando se satisfaga (5.62). Además se tiene que  $\theta_\eta$  son valores arbitrarios y se posee una fase dinámica  $e^{-iE_\eta t/\hbar}$  para cada estado  $|\eta\rangle$  con  $\eta = 1, 2, 5, 6$  respectivamente.

Una solución particular de la ecuación (5.62) es  $p_1 = p_2 = p_5 = p_6 = 1/4$ . Esto, a partir de (5.63) da como resultado

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[ e^{-i\theta_1}e^{\frac{-i2t}{\hbar}}|1\rangle + e^{-i\theta_2}e^{\frac{-i2t}{\hbar}}|2\rangle + e^{-i\theta_5}e^{\frac{-i6t}{\hbar}}|5\rangle + e^{-i\theta_6}e^{\frac{-i6t}{\hbar}}|6\rangle \right], \quad (5.64)$$

de manera que al tiempo  $t$  existe un estado el cual es una superposición de los estados  $|1\rangle, |2\rangle, |5\rangle$  y  $|6\rangle$ , donde cada uno de estos estados tiene la misma probabilidad.

Otras coordenadas relevantes a tomar en la Gráfica 5.3 son  $(1, 1)$  y  $(-1, 1)$ . Puede notarse que justamente en estos puntos pasa la parábola punteada de color grisáceo. Tomando en cuenta los límites (5.48) y (5.49) y al sustituir la coordenada  $(1, 1)$  en estos (recordando que el primer valor de cada coordenada corresponde a  $y + v$  y el segundo a  $x + u$ ), se obtiene como resultado que los límites  $\tau^{MT} = \tau^{ML} \rightarrow \infty$ . Por otra parte, tomando en cuenta la coordenada  $(-1, 1)$  y al sustituir en los límites (5.48) y (5.50) se obtiene que  $\tau^{MT} = \tau^{ML^*} \rightarrow \infty$ .

### 5.3. Configuración tipo anillo con atajos

Para este caso, también se supondrá que cada fermión puede ocupar alguno de los cuatro sitios, pero la diferencia con la configuración de anillo anterior es que ahora sí está permitido realizar saltos a pesar que el estado no sea el vecino más cercano. Esto puede visualizarse de una mejor forma con el siguiente diagrama:

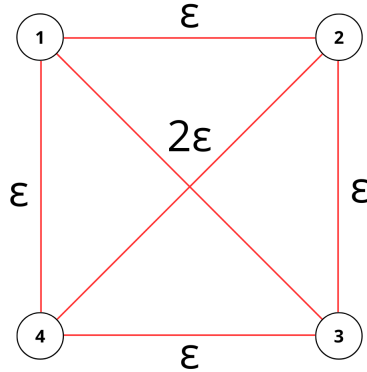


Figura 5.4: Diagrama de una configuración de anillo donde un fermión puede moverse a través de cuatro sitios energéticos en donde al moverse entre sitios vecinos cercanos el coste de energía será de  $\epsilon$ , mientras que al realizar un salto de energía al estado más lejano el coste será de  $2\epsilon$ .

A partir del diagrama anterior y tomando en cuenta la misma notación definida para la configuración anterior, se puede obtener entonces la matriz que define al Hamiltoniano de un fermión para esta configuración (Oliveira et al., 2008):

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 2\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 0 & \epsilon & 2\epsilon \\ 2\epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 2\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Al realizar el cálculo para encontrar los eigenvalores de dicha matriz se obtiene como resultados que estos son:  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_3 = 2\epsilon$ ,  $\epsilon_4 = 6\epsilon$ . Para evitar que los valores de  $E_\eta$  queden iguales a cero se realizará un corrimiento positivo de todos los valores por lo que los eigenvalores de energía serán ahora  $\epsilon_1 = \epsilon$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon$ ,  $\epsilon_3 = 3\epsilon$ ,  $\epsilon_4 = 7\epsilon$ . Una vez conocidos los eigenvalores de energía de (5.65) se pueden encontrar los del sistema compuesto a partir de la ecuación (4.57), obteniendo así:

$$\begin{aligned} E_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\epsilon; & E_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_3 = 4\epsilon \\ E_3 &= \epsilon_1 + \epsilon_4 = 8\epsilon; & E_4 &= \epsilon_2 + \epsilon_3 = 4\epsilon \\ E_5 &= \epsilon_2 + \epsilon_4 = 8\epsilon; & E_6 &= \epsilon_3 + \epsilon_4 = 10\epsilon. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Sustituyendo dichos valores de  $E_\eta$  en (4.64) se obtiene que

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon(2p_1 + 4p_2 + 8p_3 + 4p_4 + 8p_5 + 10p_6), \quad (5.67)$$

donde los términos de esta ecuación se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \epsilon[6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 4p_1 - 2p_2 + 2p_3 - 2p_4 + 2p_5 + 4p_6] \\ &= \epsilon(6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 4(p_1 - p_6) - 2(p_2 - p_5) + 2(p_3 - 2p_4)). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Al utilizar la condición de normalización de (4.61) y volviendo a utilizar la parametrización de (5.4), se obtiene entonces el siguiente valor esperado del Hamiltoniano:

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon[6 - 2(2y + v - z)]. \quad (5.69)$$

Nuevamente hay que elevar el resultado anterior al cuadrado para poder calcular la desviación estándar de energía, tal como se indica en (4.67). Por lo que se obtiene que

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2[6 - 2(2y + v - z)]^2 = \langle \hat{H} \rangle^2 = \epsilon^2[36 - 24(2y + v - z) + 4(2y + v - z)^2]. \quad (5.70)$$

Se procede a calcular ahora  $\langle \hat{H}^2 \rangle$ , sustituyendo los valores de  $E_\eta$  de la ecuación (5.66) en la ecuación (4.66), dando como resultado:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2(4p_1 + 16p_2 + 64p_3 + 16p_4 + 64p_5 + 100p_6), \quad (5.71)$$

donde al reescribir se obtiene que

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2[52(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) - 48p_1 - 36p_2 + 12p_3 - 36p_4 + 12p_5 + 48p_6]. \quad (5.72)$$

Usando la condición de (4.61), y reescribiendo los términos restantes se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}^2 \rangle &= \epsilon^2[52 - 48(p_1 - p_6) - 24p_2 - 12p_2 + 24p_3 - 12p_3 - 24p_4 - 12p_4 + 24p_5 - 12p_5] \\ &= \epsilon^2[52 - 48(p_1 - p_6) - 24(p_2 - p_5) - 12(p_2 + p_5) + 24(p_3 - p_4) - 12(p_3 + p_4)].\end{aligned}\quad (5.73)$$

Al sustituir los términos agrupados nuevamente por la parametrización de (5.4) y ordenando estos da como resultado

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \epsilon^2[52 - 12(u + w) - 24(2y + v - z)].\quad (5.74)$$

Ahora se puede encontrar la desviación estándar de energía sustituyendo (5.70) y (5.74) en la ecuación (4.67), obteniendo así

$$\Delta \hat{H} = \sqrt{\epsilon^2[-12(u + w) - 24(2y + v - z) + 52] - \epsilon^2[36 - 24(2y + v - z) + 4(2y + v - z)^2]},\quad (5.75)$$

donde al simplificar se tiene que

$$\Delta \hat{H} = \epsilon \sqrt{16 - 12(u + w) - 4(2y + v - z)^2}.\quad (5.76)$$

Puede notarse que al reescribir el término  $16 - 12(u + w)$  utilizando la condición de normalización dada por (5.5), se tiene que  $16 - 12(u + w) = 16(x + u + w) - 12(u + w) = 4(4x + u + w)$ , por lo que la ecuación (5.76) ahora se puede escribir como:

$$\Delta \hat{H} = \epsilon \sqrt{4(4x + u + w) - 4(2y + v - z)^2},\quad (5.77)$$

obteniendo así la desviación estándar de energía para este sistema.

Ahora se procede a encontrar  $\langle \hat{H} \rangle - E_{min}$  y  $E_{max} - \langle \hat{H} \rangle$ . Para ello se partirá de los valores de  $\{E_\eta\}$  que están en la ecuación (5.66). Se tiene que  $E_{min} = \min\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 2\epsilon$  y  $E_{max} = \max\{E_\eta | p_\eta \neq 0\} = 10\epsilon$  (lo que implica que estamos suponiendo que  $p_1 \neq 0$  y  $p_6 \neq 0$ ). Dado esto se puede encontrar:

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon[6 - 2(2y + v - z)] - 2\epsilon = \epsilon[4 - 2(2y + v - z)],\quad (5.78)$$

también puede calcularse

$$E_{max} - \langle \hat{H} \rangle = 10\epsilon - \epsilon[6 - 2(2y + v - z)] = \epsilon[4 + 2(2y + v - z)].\quad (5.79)$$

Sustituyendo ahora lo encontrado en (5.77) en la ecuación(4.30) se obtiene el límite  $\tau^{MT}$  para este sistema, el cual está dado por

$$\tau^{MT} = \frac{\pi \hbar}{2\epsilon \sqrt{4(4x + u + w) - 4(2y + v - z)^2}}.\quad (5.80)$$

Nuevamente se agruparán términos en base a la parametrización dada por (5.4) por lo que el límite  $\tau^{MT}$  para este sistema queda en términos de la dos variables:  $2y + v - z$  y  $4x + u + w$ .

Para obtener el límite  $\tau^{ML}$  se sustituirá (5.78) en (4.37) obteniendo así

$$\tau^{ML} = \frac{\pi\hbar}{2\epsilon[4 - 2(2y + v - z)]}. \quad (5.81)$$

Por último para encontrar el límite  $\tau^{ML*}$  se sustituirá (5.79) en (4.41) obteniendo así

$$\tau^{ML*} \equiv \frac{\pi\hbar}{2\epsilon[4 + 2(2y + v - z)]}. \quad (5.82)$$

De nuevo se usará la ecuación (5.20) para encontrar el rango de la variable  $2y + v - z$ . Se tiene que  $\langle \hat{H} \rangle - E_{min}$  es igual a lo obtenido en (5.78) y que  $E_{max} = 10\epsilon$  y  $E_{min} = 2\epsilon$ , por lo que al sustituir en (5.20) se obtiene que:

$$0 \leq \epsilon[4 - 2(2y + v - z)] \leq 10\epsilon - 2\epsilon = 8\epsilon, \quad (5.83)$$

de donde se llega que los límites para la variable  $2y + v - z$  son

$$-2 \leq 2y + v - z \leq 2. \quad (5.84)$$

Para la segunda variable, dada por  $4x + u + w$ , se partirá de nuevo de (5.5) por lo que se sabe que  $x \leq 1$ . Multiplicando por tres de cada lado de la inecuación y sumando 1 se obtiene  $3x + 1 \leq 4$ . Dado que  $x + u + w = 1$ , se tiene entonces que

$$3x + 1 = 3x + (x + u + w) = 4x + u + w \leq 4, \quad (5.85)$$

obteniendo así que la segunda variable queda delimitada de la siguiente manera:

$$0 \leq 4x + u + w \leq 4. \quad (5.86)$$

Teniendo de nuevo las nuevas variables para este sistema, se determinará cómo se comportan los límites fundamentales utilizando los resultados de la Tabla 4.1. Calculando los cocientes  $\alpha$  y  $\beta$  sustituyendo los límites encontrados (5.80), (5.81) y (5.82) en (4.43) se obtiene

$$\alpha = \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 - a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 + a}, \quad (5.87)$$

donde  $a = 2y + v - z$  y  $b = 4x + u + w$ . Según el primer caso de 4.1 se requiere que  $\alpha < 1$  como  $\beta < 1$  para que el límite  $\tau^{MT}$  sea mayor que  $\tau^{ML}$  y  $\tau^{ML*}$  por lo que a partir de (5.87) se tiene que

$$\frac{\sqrt{b - a^2}}{2 - a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b - a^2}}{2 + a} < 1, \quad (5.88)$$

por lo que al despejar para  $b$  en ambas desigualdades se obtiene

$$b < 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.89)$$

Puede notarse entonces que el límite  $\tau^{MT}$  domina en esta configuración cuando  $b$  es menor a ambos polinomios mostrados en (5.58), en donde  $4 - 4a + 2a^2 < 4 + 4a + 2a^2$  para  $a > 0$  mientras que  $4 - 4a + 2a^2 > 4 + 4a + 2a^2$  para  $a < 0$ .

Al analizar el segundo caso dado en la Tabla 4.1 en donde el límite dominante será  $\tau^{ML}$ , debe cumplirse que  $\alpha > 1$  y  $\beta < 1$  por lo que a partir de (5.87) se tiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{2-a} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{2+a} < 1, \quad (5.90)$$

por lo que al despejar  $b$  para ambas desigualdades se obtiene

$$b > 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b < 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.91)$$

Puede notarse que únicamente para  $a > 0$ , se cumplirá la ecuación (5.91), puesto que solo con dichos valores de  $a$  es válida la desigualdad  $4 - 4a + 2a^2 < 4 + 4a + 2a^2$ . Por lo que el límite  $\tau^{ML}$  podrá ser mayor que el resto solo cuando  $a$  sea positivo. Tomando en cuenta la desigualdad (5.84), se concluye entonces que la cota  $\tau^{ML}$  podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $0 < a < 2$ .

Por último se estudiará el caso donde el mayor de los límites será  $\tau^{ML*}$  por lo que debe cumplirse  $\alpha < 1$  y  $\beta > 1$  según 4.1. por lo que se obtiene

$$\frac{\sqrt{b-a^2}}{2-a} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b-a^2}}{2+a} > 1. \quad (5.92)$$

Despejando para  $b$  se llega a

$$b < 4 - 4a + 2a^2 \quad \text{y} \quad b > 4 + 4a + 2a^2. \quad (5.93)$$

Para este caso ambas desigualdades se cumplen únicamente cuando  $a < 0$ , puesto que solo así se satisface que  $4 + 4a + 2a^2 < 4 - 4a + 2a^2$ . Entonces el límite  $\tau^{ML*}$  podrá ser mayor que el resto solo cuando  $a$  es negativo. Recurriendo de nuevo a (5.84), se observa que la cota dual podrá ser el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  solo en el rango  $-2 < a < 0$ .

Nuevamente, al conocer los rangos en los que los límites cuánticos aparecen se procede a realizar la gráfica del  $\tau_{QSL}$  para esta configuración, en escala de color, como función de los parámetros  $a = 2y + v - z$  y  $b = 4x + u + w$  tal como se muestra en la Figura 5.5.

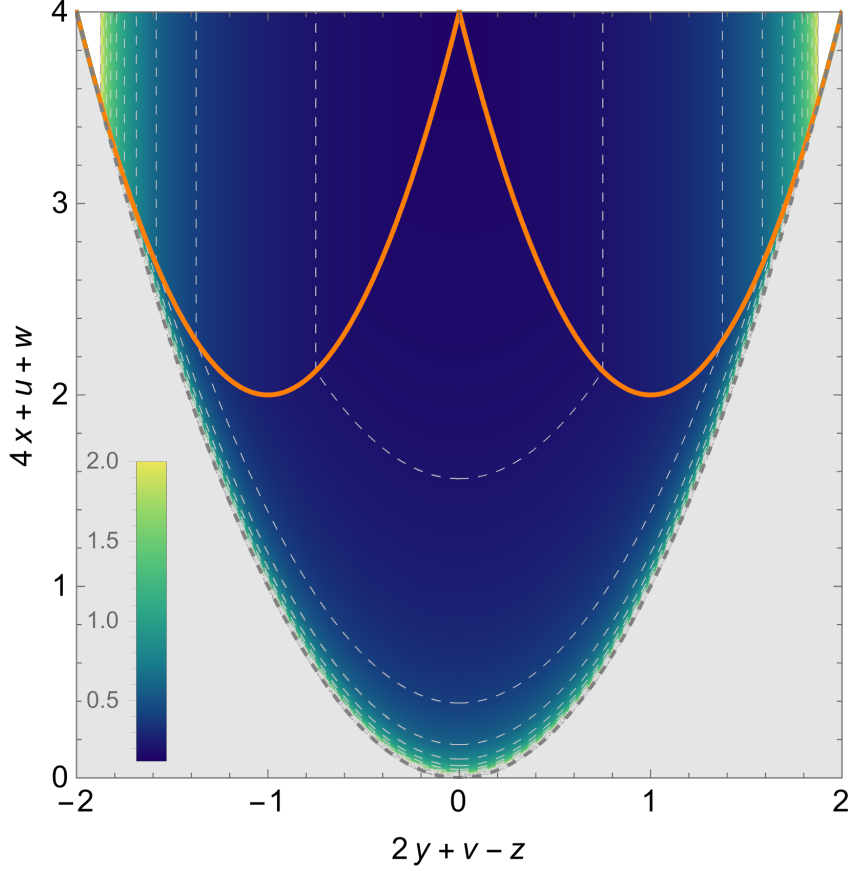


Figura 5.5: Límite de rapidez cuántica  $\tau_{QSL}$  en escala de color en unidades de  $\pi\hbar/\epsilon$  en un rango de  $[1/8, 2]$ . La parábola naranja izquierda corresponde a estados para los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML*}$  y la parábola naranja de la derecha corresponde a puntos en los que  $\tau_{QSL} = \tau^{MT} = \tau^{ML}$ . La región superior de la parábola izquierda es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML*}$  mientras que la parte superior de la parábola del lado derecho es  $\tau_{QSL} = \tau^{ML}$ . Todo lo que está por debajo de las parábolas naranjas y por encima de la parábola punteada gris corresponde a  $\tau_{QSL} = \tau^{MT}$ . La línea grisácea punteada corresponde a tiempos indefinidos donde  $\tau_{QSL} \rightarrow \infty$ . Las regiones blancas corresponden a valores  $\tau_{QSL} > 2\pi\hbar/\epsilon$  y las regiones grises corresponden a casos los cuales no son físicamente posibles.

A cada estado inicial, el cual es determinado por el conjunto  $\{p_\eta\}$ , le corresponde un punto en la gráfica de color, que determina el límite de rapidez cuántica de dicho estado. Tomando en cuenta el punto que corresponde al menor  $\tau_{QSL}$ , propio a las coordenadas  $(0, 4)$ , es decir,

$$\begin{aligned} 2y + v - z &= 0 \\ 4x + u + w &= 4, \end{aligned} \tag{5.94}$$

podrá verse a qué valores de  $p_\eta$  corresponde. Dada la parametrización utilizada debe cumplirse la ecuación (5.5), por lo que tomando la segunda ecuación de (5.94) se tiene que  $4x + u + w = 3x + (x + u + w) = 3x + 1 = 4$ . Esto implica que  $x = 1$ , por lo que tomando en cuenta la parametrización de las variables en (5.4) se llega a la conclusión de que  $p_1 + p_6 = 1$ . Teniendo este resultado, para cumplir con (4.61) se tiene que  $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$ , por ende  $u = w = v = z = 0$ . Para que se cumpla entonces la primer ecuación de (5.94), que se reduce a  $2y = 2(p_1 - p_6) = 0$ , y sabiendo que  $p_1 + p_6 = 1$ , debe tenerse que  $p_1 = p_6 = 1/2$ .

Ya que se conocen los valores  $p_\eta$  para el menor  $\tau_{QSL}$  de la Gráfica 5.5, se procederá a sustituirlos en la ecuación (4.59) para conocer el estado correspondiente a dicho límite, por lo que se tiene que

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\theta_1} e^{-\frac{i2t}{\hbar}} |1\rangle + e^{-i\theta_6} e^{-\frac{i10t}{\hbar}} |6\rangle \right] \quad (5.95)$$

de manera que al tiempo  $t$  el sistema está en una superposición entre los estados  $|1\rangle$  y  $|6\rangle$ , cada uno de los cuales tiene la misma probabilidad. Cada uno de estos posee una fase geométrica  $e^{-i\theta_\eta}$  donde  $\theta_\eta$  con  $\eta = 1, 6$  posee valores arbitrarios, además de una fase dinámica  $e^{-i2t/\hbar}$  y  $e^{-i10t/\hbar}$ , respectivamente .

De nuevo, se tomarán otras coordenadas relevantes en la Gráfica 5.5, en particular los puntos  $(2, 4)$  y  $(-2, 4)$ . Puede notarse que nuevamente, en estos puntos pasa la parábola punteada de color grisáceo. Tomando en cuenta los límites (5.80) y (5.81) y al sustituir la coordenada  $(2, 4)$  en estos, recordando que el primer valor de cada coordenada corresponde a  $2y+v-z$  y el segundo a  $4x+u+w$ , se obtiene como resultado que los límites  $\tau^{MT} = \tau^{ML} \rightarrow \infty$ . Tomando por otra parte la segunda coordenada  $(-2, 4)$  y al sustituir en los límites (5.80) y (5.82) se obtiene que  $\tau^{MT} = \tau^{ML^*} \rightarrow \infty$ .

En el presente trabajo se abordó la tarea de analizar el límite de rapidez cuántica de un sistema de dos fermiones idénticos no interactuantes, bajo tres configuraciones energéticas distintas. En la primera los cuatro niveles de energía de cada fermión individual eran equidistantes; la segunda era una configuración tipo anillo en la que cada fermión individual podía saltar a vecinos cercanos y la tercera configuración tipo anillo tenía un atajo, que permitía saltos directos a cualquier sitio.

Se usaron herramientas del método de segunda cuantización para la obtención de expresiones matemáticas que facilitaron la descripción de la dinámica fermiónica para cada uno de los sistemas estudiados. Con este enfoque fue posible expresar cómo evolucionan los estados de fermiones idénticos de una forma más sencilla mediante la introducción de operadores de creación y aniquilación, los cuales simplificaron la representación matemática de los estados cuánticos, además de explicar de una mejor forma las transiciones de un estado energético a otro, respetando siempre principios como el Principio de exclusión de Pauli.

Se estudió el concepto de QSL y su relación con las cotas de Maldestam-Tamm ( $MT$ ), de Margolous-Levitin ( $ML$ ), y dual ( $ML^*$ ). Dichas cotas al analizarse en conjunto proporcionan información importante sobre la evolución temporal de un sistema cuántico y fueron esenciales para la interpretación de los resultados obtenidos en este trabajo.

Se calcularon analíticamente las cotas  $MT$ ,  $ML$  y dual para cada una de las configuraciones, y a partir de los resultados se implementaron gráficos de densidad de color, mediante la utilización del software Wolfram Mathematica. Los gráficos desempeñaron un papel importante en la identificación de los tiempos mínimos asociados al QSL, y en cómo este tiempo se asocia a estados cuánticos relevantes en cada uno de los sistemas estudiados. Gracias a esta representación visual, es posible explorar de forma más intuitiva cómo es que están distribuidos los valores mínimos del tiempo de ortogonalización en términos de dos variables definidas por el estado inicial del sistema, que son funciones (diferentes en cada configuración) de las probabilidades  $\{p_\eta\}$ . De esta forma, no solo se identificó gráficamente el valor mínimo de  $\tau_{QSL}$ , sino que fue posible ubicar puntos clave (y sus estados asociados) correspondientes a valores importantes que este límite puede tomar, llegando a tomar incluso tendencias al infinito.

Gracias a la identificación del  $\tau_{QSL}$  para cada una de las configuraciones fue posible identificar los estados correspondientes al menor valor de  $\tau_{QSL}$ , es decir, los estados que en cada caso poseen el mínimo QSL. Pudo notarse que para el caso de la configuración con niveles de energía equidistantes y para la configuración de tipo anillo con atajos dichos estados (dados respectivamente por las

ecuaciones (5.33) y (5.95)) son únicos, y corresponden a una superposición de dos estados, el de menor y el de mayor energía, los cuales tienen la misma probabilidad de ser medidos. En cambio para el caso de la configuración tipo anillo para vecinos cercanos, se tienen infinitas soluciones que pueden satisfacer el sistema de ecuaciones (5.61), por lo que hay una infinidad de estados que corresponden al menor  $\tau_{QSL}$ . Esta es una gran diferencia con respecto a las otras dos configuraciones. Un estado particular (de los infinitos posibles) fue el mostrado en (5.64), en donde puede notarse una superposición de cuatro estados con la misma probabilidad de ser medidos. Es importante notar que para esta configuración, los estados con el menor QSL corresponden a estados en los que la probabilidad de encontrar al sistema con la menor energía posible ( $E_1 = E_2 = 2\epsilon$ ), dada por  $p_1 + p_2$ , es igual a la probabilidad de encontrar al sistema con la mayor energía posible ( $E_5 = E_6 = 6\epsilon$ ), dada por  $p_5 + p_6$ . Algo relevante a resaltar es que en todos los estados asociados al menor valor de QSL, hay presente una superposición únicamente entre los niveles energéticos más bajos y más altos de cada uno de los sistemas.

Es relevante también que para las primeras dos configuraciones, es decir el caso de niveles de energía equidistante y la configuración tipo anillo para vecinos cercanos, la escala de color al momento de graficar  $\tau_{QSL}$  se mantuvo en el rango de  $[1/4, 2]$ , en unidades de  $\pi\hbar/\epsilon$ , puesto que al analizar el nivel mínimo que se podía obtener para el QSL de ambas configuraciones este fue igual a  $\pi\hbar/4\epsilon$ . Sin embargo, al analizar el último sistema, el de la configuración tipo anillo con atajos, puede notarse que el valor mínimo que puede tomar  $\tau_{QSL}$  es de  $\pi\hbar/8\epsilon$  por lo que su rango de color al momento de realizar la gráfica de densidad se diferenció del resto. Esto quiere decir que de los tres sistemas, este tercero es el que posee el menor valor del QSL.

---

## Recomendaciones

---

Este trabajo se enfoca en el estudio del límite de rapidez cuántica, que es la cota mínima al tiempo de ortogonalización (tiempo en el que el sistema evoluciona a un estado ortogonal al inicial), de manera que una extensión natural de esta tesis sería encontrar los tiempos de ortogonalización  $\tau$ , a partir de resolver la ecuación  $\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle = 0$ . En particular, pueden considerarse los estados encontrados en (5.33), (5.63) y (5.95). Además, dado que para la configuración tipo anillo con saltos a vecinos cercanos se tiene la peculiaridad de que hay infinitas soluciones que satisfacen la condición del mínimo  $\tau_{QSL}$ , se recomienda estudiar diferentes combinaciones de los parámetros que determinan el estado inicial para así poder conocer más sobre la naturaleza de este sistema.

Este trabajo puede ser extendido a sistemas cuánticos más complejos en donde se incluyan más fermiones o se agreguen más niveles energéticos a cada sistema.

- 
- Batle, J., Casas, M., Plastino, A., and Plastino, A. R. (2018). On the connection between entanglement and the speed of quantum evolution. *Physical Review A*, 72:032337.
- Buchleitner, A., Viviescas, C., and Tiersch, M., editors (2009). *Entanglement and Decoherence: Foundations and Modern Trends*, volume 768 of *Lecture Notes in Physics*. Springer.
- Canseco, S. (2021). Límite de rapidez cuántico en sistemas fermiónicos enredados. Master's thesis, Maestría en Ciencias (Física), Universidad Nacional Autónoma de México.
- de la Peña, L. (2006). *Introducción a la Mecánica Cuántica*. EDICIONES CIENTÍFICAS UNIVERSITARIAS.
- Deffner, S. and Campbell, S. (2017). Quantum speed limits: from heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50:453001.
- Frey, M. R. (2016). Quantum speed limits—primer, perspectives, and potential future directions. *Quantum Information Processing*, 15(10):3919–3950.
- Griffiths, D. J. and Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3rd edition.
- Levitin, L. B. and Toffoli, T. (2009). Fundamental limit on the rate of quantum dynamics: The unified bound is tight. *Physical Review Letters*, 103(16).
- Mandelstam, L. and Tamm, I. (1945). The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics. *Journal of Physics*, 9:249.
- Margolus, N. and Levitin, L. (1998). The maximum speed of dynamical evolution. *Physica D*, 120:188–195.
- Ness, G., Alberti, A., and Sagi, Y. (2022). Quantum speed limit for states with a bounded energy spectrum. *Physical Review Letters*, 129(14):140403.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Oliveira, V. C. G., Santos, H. A. B., Torres, L. A. M., and Souza, A. M. C. (2008). Entanglement in the dynamical evolution of composite fermionic systems. *International Journal of Quantum Information*, 6(2):379–391.

Robertson, H. P. (1929). The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1):163–164.

Sakurai, J. J. and Napolitano, J. (2020). *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3rd edition.

Valdés-Hernández, A. and Canseco, S. (2022). Speed of evolution in entangled fermionic system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55:22.

## 9.1. Código en Wolfram Mathematica del sistema con niveles de energía equidistantes

```

1 Sistemal = Show[
2   DensityPlot[
3     1/(2 Sqrt[y - x^2]),
4     {x, -2, 0}, {y, 0, 2 x^2 + 4 x + 4},
5     PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
6     ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
7     ColorFunctionScaling -> False,
8     PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/4, 2}},
9     Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
10    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed},
11    PlotLegends -> Placed[BarLegend[Automatic, LegendMarkerSize -> {15,
12      150}], Scaled[{0.0685, 0.2}]]
13  ],
14  DensityPlot[
15    1/(2 Sqrt[y - x^2]),
16    {x, 0, 2}, {y, 0, 2 x^2 - 4 x + 4},
17    PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
18    ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
19    ColorFunctionScaling -> False,
20    PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/4, 2}},
21    Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
22    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
23  ],
24  DensityPlot[
25    1/(2 (2 - x)),
26    {x, -2, 2}, {y, 2 x^2 - 4 x + 4, 4},
27    PlotTheme -> "Detailed", PlotLegends -> Automatic, PlotPoints -> 200,
28    ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
29    ColorFunctionScaling -> False,
30    PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/4, 2}},
31    Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
32    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}

```

```

32 ],
33 DensityPlot[
34   1/(2 (2 + x)),
35   {x, -2, 2}, {y, 2 x^2 + 4 x + 4, 4},
36   PlotTheme -> "Detailed", PlotLegends -> Automatic, PlotPoints -> 200,
37   ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
38   ColorFunctionScaling -> False,
39   PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/4, 2}},
40   Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
41   MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
42 ],
43 Plot[2 z^2 - 4 z + 4, {z, -2, 2}, PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}},
44   PlotStyle -> {Orange, Thick}],
45 Plot[2 z^2 + 4 z + 4, {z, -2, 2}, PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}},
46   PlotStyle -> {Orange, Thick}],
47 Plot[z^2, {z, -2, 2}, PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}}, PlotStyle -> {Dashed
48   , Gray}, Filling -> Axis],
49 FrameLabel -> {{HoldForm[4 x + u], None}, {HoldForm[2 y + v], None}},
50 LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial", 13, GrayLevel[0]}
51 ]

```

## 9.2. Código en Wolfram Mathematica del sistema tipo anillo para vecinos cercanos

```

1 Sistema2 = Show[
2   DensityPlot[
3     1/(4 Sqrt[y - x^2]),
4     {x, -1, 0}, {y, 0, 2 x^2 + 2 x + 1},
5     PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
6     ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
7     ColorFunctionScaling -> False,
8     PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}, {1/4, 2}},
9     Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
10    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
11  ],
12  DensityPlot[
13    1/(4 Sqrt[y - x^2]),
14    {x, 0, 1}, {y, 0, 2 x^2 - 2 x + 1},
15    PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
16    ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
17    ColorFunctionScaling -> False,
18    PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}, {1/4, 2}},
19    Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
20    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
21  ],
22  DensityPlot[
23    1/(4 (1 - x)),
24    {x, -1, 1}, {y, 2 x^2 - 2 x + 1, 1},
25    PlotTheme -> "Detailed", PlotLegends -> Automatic, PlotPoints -> 200,
26    ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
27    ColorFunctionScaling -> False,
28    PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}, {1/4, 2}},
29    Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
30    MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
31  ],

```

```

32 DensityPlot[
33     1/(4 (1 + x)),
34     {x, -1, 1}, {y, 2 x^2 + 2 x + 1, 1},
35     PlotTheme -> "Detailed", PlotLegends -> Automatic, PlotPoints -> 200,
36     ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/4, 2}}],
37     ColorFunctionScaling -> False,
38     PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}, {1/4, 2}},
39     Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
40     MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
41 ],
42 Plot[2 z^2 - 2 z + 1, {z, -1, 1}, PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}},
43     PlotStyle -> {Orange, Thick}],
44 Plot[2 z^2 + 2 z + 1, {z, -1, 1}, PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}},
45     PlotStyle -> {Orange, Thick}],
46 Plot[z^2, {z, -1, 1}, PlotRange -> {{-1, 1}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Dashed
47     , Gray}, Filling -> Axis],
48 FrameLabel -> {{HoldForm[x + u], None}, {HoldForm[y + v], None}},
49 LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial", 13, GrayLevel[0]}
50 ]

```

### 9.3. Código en Wolfram Mathematica del sistema tipo anillo atajos

```

1 Sistema3 = Show[
2     DensityPlot[
3         1/(2*sqrt[4 y - 4 x^2]), {x, 0, 2}, {y, 0, 4 - 4 x + 2 x^2},
4         PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
5         ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/8, 2}}],
6         ColorFunctionScaling -> False,
7         PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/8, 2}},
8         Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
9         MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed},
10        PlotLegends -> Placed[
11            BarLegend[Automatic, LegendMarkerSize -> {15, 150}],
12            Scaled[{0.0685, 0.2}]
13        ]
14    ],
15    DensityPlot[
16        1/(2*sqrt[4 y - 4 x^2]), {x, -2, 0}, {y, 0, 4 + 4 x + 2 x^2},
17        PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
18        ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/8, 2}}],
19        ColorFunctionScaling -> False,
20        PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/8, 2}},
21        Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
22        MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
23    ],
24    DensityPlot[
25        1/(2 (4 - 2 x)), {x, 0, 2}, {y, 4 - 4 x + 2 x^2, 4},
26        PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
27        ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/8, 2}}],
28        ColorFunctionScaling -> False,
29        PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}, {1/8, 2}},
30        Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
31        MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
32    ],

```

```

33 DensityPlot[
34   1/(2 (4 + 2 x)), {x, -2, 0}, {y, 4 + 4 x + 2 x^2, 4},
35   PlotTheme -> "Detailed", PlotPoints -> 200,
36   ColorFunction -> ColorData[{"BlueGreenYellow", {1/8, 2}}],
37   ColorFunctionScaling -> False,
38   PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 1}, {1/8, 2}},
39   Mesh -> {Range[0, 3, 0.2]}, MeshFunctions -> {#3 &},
40   MeshStyle -> {Thickness[0.003], LightGray, Dashed}
41 ],
42 Plot[
43   4 - 4 z + 2 z^2, {z, 0, 2},
44   PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}},
45   PlotStyle -> {Orange, Thick}
46 ],
47 Plot[
48   4 + 4 z + 2 z^2, {z, -2, 0},
49   PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}},
50   PlotStyle -> {Orange, Thick}
51 ],
52 Plot[
53   z^2, {z, -2, 2},
54   PlotRange -> {{-2, 2}, {0, 4}},
55   PlotStyle -> {Dashed, Gray}, Filling -> Axis
56 ],
57 FrameLabel -> {{HoldForm[4 x + u + w], None},
58               {HoldForm[2 y + v - z], None}},
59 LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial", 13, GrayLevel[0]}
60 ]

```



**Antisimetrización:**

Proceso matemático mediante el cual se construyen los estados de fermiones de forma que cambien de signo al intercambiar dos partículas, cumpliendo el principio de Exclusión de Pauli.

**Cota mínima al tiempo de ortogonalización:**

Tiempo más corto posible para que un sistema cuántico evolucione hacia un estado ortogonal, referente a las cotas propuestas por Mandelstam-Tamm (MT), Margolus-Levitin (ML) y dual de Margolus-Levitin (ML\*).

**Estado cuántico:**

Representa toda la información posible de una partícula o sistema cuántico.

**Estado de Fock:**

Representación de un sistema cuántico que indica cuántas partículas hay en cada nivel de energía accesible (0 o 1 para fermiones).

**Evolución temporal:**

Cambio del estado cuántico con el tiempo, gobernado por el Hamiltoniano.

**Fermión:**

Partícula subatómica, como el electrón, que obedece el Principio de Exclusión de Pauli.

**Hamiltoniano:**

Operador que representa la energía total del sistema y determina cómo evoluciona en el tiempo.

**Límite de rapidez cuántica (QSL):**

Tiempo mínimo necesario para que un sistema cuántico evolucione hacia un estado completamente diferente (ortogonal).

**Operadores de creación y aniquilación:**

Operadores matemáticos que permiten agregar o eliminar partículas en un estado, esenciales en la segunda cuantización.

**Ortogonalidad:**

Propiedad de dos estados cuánticos completamente distintos, donde la probabilidad de pasar de uno a otro es cero.

**Principio de Exclusión de Pauli:**

Regla que establece que dos fermiones no pueden estar en el mismo estado cuántico..

**Segunda cuantización:**

Formalismo que simplifica la descripción de sistemas con muchas partículas, utilizando operadores de creación y aniquilación en lugar de tratar cada partícula individualmente.

**Superposición cuántica:**

Fenómeno en el que una partícula puede encontrarse en varios estados posibles simultáneamente, hasta que se mide.