UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

PROPIEDADES MATEMATICAS DE LOS MODELOS INSUMO-PRODUCTO EN ECONOMIA

DORVAL JOSE MANUEL CARIAS SAMAYOA

Trabajo de graduación presentado para optar al grado académico de Licenciado en Matemática

Guatemala
1991

PROPIEDADES MATEMATICAS DE LOS MODELOS
INSUMO-PRODUCTO EN ECONOMIA

Vo. Bo.:

(f)____________________________________
Dr. Raúl González de Paz
Asesor

Tribunal:

(f)____________________________________
Dr. Raúl González de Paz

(f)____________________________________
Dr. Bernardo Morales F.

(f) Roberto Molina ____________________________________
Dr. Roberto Molina Cruz

A mis padres
A mi hermana
A los Compañeros

CONTENIDO

I. INTRODUCCION

El análisis insumo-producto en economía trata del estudio de las interdependencias sectoriales para establecer las proporciones y ritmos de crecimiento de las ramas de una economía nacional. Para los países en desarrollo, la formulación y puesta en marcha de programas de industrialización, aparecen hoy como la vía fundamental para construír economías interdependientes.

En el presente trabajo de investigación se presentan algunas propiedades matemáticas de los modelos insumo-producto, los cuales se deben al economista soviético-estadounidense Wassily Leontief. En el capítulo II se consideran algunos resultados de las matrices no-negativas, presentando una interesante caracterización de la irreducibilidad de estas matrices por medio de la teoría de grafos. En el capítulo III se presentan las principales caracterizaciones de la invertibilidad de matrices-M, tipo al cual pertenecen las matrices de coeficientes de los modelos insumo-producto. En estas caracterizaciones se propone un teorema que incluye cincuenta de ellas, siendo este el eje del presente trabajo de investigación. En el capítulo IV se presentan los modelos abierto y cerrado, en sus versiones estática y dinámica; el trabajo finaliza con el planteo de dos problemas, el primal y el dual, de control óptimo en un modelo dinámico de insumo-producto.

Este trabajo de investigación se centra en el estudio de las propiedades de las matrices de coeficientes de los modelos, estudiando éstas como operadores que dejan cierto tipo de conjuntos, llamados conos, invariantes. Además busca recopilar resultados de distintas ramas de la Matemática y relacionarlos para que el estudio de los modelos económicos en cuestión se realice con mayor facilidad. Se lograron recopilar resultados del Algebra Lineal, Análisis Funcional, Topología, Matemática Computacional (Matemática Discreta) y de teoría de control aplicada a la investigación de operaciones.

La importancia del presente radica en que proporciona una herramienta teórica para el estudio de las economías nacionales. Es evidente que algunos métodos y sistemas de computación electrónica aplicados en un área sumamente importante de la economía nacional surten todavía un efecto limitado y fragmentado. Los modelos de este tipo estudiados en forma teórica, pueden presentar problemas como el siguiente: no se puede descartar la posibilidad de que, al conseguirse el óptimo sectorial, no se logre el debido acercamiento al máximo de eficacia macroeconómica global.

El resultado más importante, como se mencionó con anterioridad, es lograr la conjunción de distintas ramas del quehacer matemático para el estudio de un modelo que, en una u otra forma, puede coadyuvar al desarrollo de nuestro país.

II. MATRICES NO-NEGATIVAS

Una matriz no-negativa es aquella cuyos elementos son todos no negativos. El estudio de tales matrices se puede enfocar de forma geométrica y combinatoria.

A. Estudio geométrico de las matrices no negativas.

1. Matrices que dejan un cono invariante

Definición (2.1.1): Con $S \subseteq R^n$ se asocian dos conjuntos: S^G, el conjunto generado por S, que consiste de todas las combinaciones lineales finitas no-negativas de elementos de S, y S', el dual de S, definido por

$$S' = \{y \in R^n : x \in S \Rightarrow (x, y) \geq 0\}.$$

Un conjunto K es un cono si $K = K^G$.

Definición (2.1.2): Un conjunto A es convexo si, para cualesquiera $x, y \in A$, éste contiene el segmento lineal de x a y.

Teorema (2.1.1): Un subconjunto K de R^n es un cono convexo si, y sólo si:

(i) $cK \subseteq K$, para todo $c>0$, y

(ii) $K+K \subseteq K$.

Demostración: K es un cono convexo. La definición de cono prueba la validez de la condición (i). Si, además, K es convexo, entonces la condición (ii) es una consecuencia de la condición (i). Se tiene la validez de $K+K=1K+1K\subseteq 2K\subseteq K$.

Conversamente, asumiendo que se satisface (i) y (ii), se tiene que, si $0<c<1$, se cumple entonces que $cK+(1-c)K\subseteq K+K\subseteq K$.

Algunos ejemplos de conos convexos son: $R^n; R^n_+ = \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$, el cono de helado o cono circular de Minkowski $K_n = \{x \in R^n : (x_1^2 + ... + x_{n-1}^2)^{1/2} \leq x_n\}$.

Definición (2.1.3): Un cono convexo es

a) Puntiagudo, si $K\cap(-K)=\{0\}$.

b) Sólido, si int(K), el interior de K, es no vacío, y

c) Reproductivo, si $K-K=R^n$.

Definición (2.1.4): Un cono convexo, cerrado, puntiagudo y sólido es llamado cono propio.

Ejemplos de conos propios son R^n_+ y K_n.

Un cono propio induce un orden parcial en R^n de la forma siguiente: $y \leq^k x$ si, y sólo si el elemento x-y$\in$K. Un espacio n-dimensional que es parcialmente ordenado por un cono propio es llamado espacio de Kantarovich de orden n.

Definición (2.1.5): El cono S^G es llamado cono poliedro si S es finito.

Así, K es un cono poliedro si $K = BR_+^r$, para algún número natural r y una matriz B de nxr.

Definición (2.1.6): Sea K un cono convexo cerrado, un vector x es un extremal de K si $0 \leq^k y \leq^k x$ implica que y es múltiplo no-negativo de x.

El teorema de Krein-Milman proporciona interesantes resultados para conos propios.

Teorema (2.1.2): Un cono propio es generado por sus extremales.

Definición (2.1.7): Si x es un vector extremal de K, entonces $\{x\}^G$ es llamado un rayo extremal de K. Un cono propio de $\mathfrak{R}^n$ que tiene n rayos extremales es llamado un símplice. En otras palabras, K$\subseteq R^n$ es un cono símplice si $K = BR_+^n$, donde B es una matriz no-singular de orden n.

En R^2 un cono poliedro es propio si y sólo si es símplice. En R^3, sin embargo, se puede construir un cono poliedro con k rayos extremales para cada número natural k.

Definición (2.1.8): Sean K y $F \subseteq K$ conos puntiagudos cerrados. Entonces F es llamado faceta de K si para $x \in F$, se tiene que $0 \leq^k y \leq^k x \Rightarrow y \in F$.

La faceta F es no-trivial si $F \neq \{0\}$ y $F \neq K$. La dimensión de una faceta es definida como la dimensión del subespacio F-F, el extendido de F.

Las facetas de R_+^n son de la forma

$$F_I = \{x \in R_+^n : x_i = 0, \text{sii} \notin I\}, I \subseteq \{1,\ldots,n\}.$$

Las facetas no-triviales de K_n son de la forma $\{x\}^G$, donde $x \in bd(K_n)$.

Notación: Sean K_1 y K_2 conos propios en R^n y R^m, respectivamente. Se denotará por $\Pi(K_1,K_2)$ el conjunto de todas las matrices $A \in R^{mxn}$, para las cuales $AK_1 \subseteq K_2$.

Para $K_1 = R_+^n$ y $K_2 = R_+^m$, $\Pi(K_1,K_2)$ es la clase de matrices no-negativas de mxn. Para m=n y $K_1=K_2=K$ se usa $\Pi(K)$ como una notación corta de $\Pi(K,K)$. Así $\Pi(R_+^n)$ es la clase de matrices no-negativas de orden n.

Definición (2.1.9): Las matrices de $\Pi(K)$ son llamadas K-no-negativas y se dice dejan K invariante. Una matriz A es K-positiva si

$$A(K-\{0\}) \subseteq \operatorname{int}(K).$$

2. Propiedades espectrales de las matrices en $\Pi(K)$.

Definición (2.2.1): Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son los eigenvalores de una matriz A de nxn, entonces $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, i=1,...,n, es llamado el radio espectral de A. El conjunto $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ es llamado el espectro de A.

Considérese K un cono propio en R^n, n>1. Sea $A \in \Pi(K)$. Sea λ un eigenvalor de A. El grado de λ, $\deg\lambda$, es el tamaño de la diagonal de bloque más grande en la forma canónica de Jordan de A, que contiene a λ (i.e. la multiplicidad de λ en el polinomio mínimo de A).

A continuación se presenta la demostración dada por Birkhoff a la versión finito-dimensional del teorema de Krein-Rutman.

Teorema (2.1.1) (Krein-Rutman): Si $A \in \Pi(K)$, entonces:

a) $\rho(A)$ es un eigenvalor,

b) Si λ es un eigenvalor de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$, entonces $\deg\lambda \leq \deg\rho(A)$.

c) K contiene un eigenvector de A correspondiente a $\rho(A)$.

Demostración: Si $\rho(A)=0$, A es nilpotente, por lo que $A^r=0$ para algún r, además existe $0\neq x\in K$ tal que $w=A^{r-1}x\neq 0$. Claramente $w\in K$ y $Aw=0$, por lo que w es el vector en (c).

Si $\rho(A)>0$, sea $\{x_{ij}\}$, $i=1,\ldots k$, $j=1,\ldots,m_i$; $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, una base canónica de Jordan (en C^n); i.e.,

$$A_{ij}=x_{ij}\lambda_i+x_{ij-1},\ x_{i0}=0,$$

donde los eigenvalores λ_i están ordenados por las siguienties reglas:

$$\rho=\rho(A)=|\lambda_1|=\ldots=|\lambda_v|>|\lambda_{v+1}|\geq\ldots\geq|\lambda_k|$$

$$m=m_1=m_2=\ldots=m_k>m_{k+1}\geq\ldots\geq m_v$$

$$\lambda_1=\rho e^{i\theta_1};\ 0\leq\theta_1\leq 2\pi;\ i=1,2,\ldots,h;\ 0\leq\theta_1\leq\ldots\leq\theta_h.$$

Los eigenvectores principales $\{x_{ij}\}$ son reales u ocurren en pares conjugados desde que A es real y cada vector $y\in\Re^n$ puede ser escrito como

$$y=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}x_{ij},\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{pq}},\mathrm{si}x_{ij}=\overline{x_{pq}}$$

Desde que K es sólido, se puede tomar $y\in int(K)$ y un pequeño δ tal que para todo i y j, se tiene que $c_{ij}=x_{ij}+\delta\neq 0$, y

$$z=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}x_{ij}=y+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}x_{ij}\in int(K).$$

Ahora, se probará que K contiene un vector no cero que es una combinación lineal de eigenvectores $x_{11},\ldots.x_{h1}$. Para hacerlo obsérvese que

$$A^r x_{ij} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{r}{k} \lambda_i^{r-k} x_{ij-k} \quad \text{(inducción sobre r)},$$

y de este modo

$$A^r z = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} \sum_{s=0}^{j-1} \binom{r}{s} \lambda_i^{r-s} x_{ij-s}.$$

Para valores grandes de r los sumandos dominantes serán de la forma $c_{im}\binom{r}{m-1}\lambda_i^{r-m+1} x_{i1}, i=1,...,h$, y así una buena aproximación de $A^r z$ es

$$A^r z \approx \binom{r}{m-1} \rho^{r-m-l} \sum_{l=1}^{h} c_{lm} e^{i\theta} x_{l1.} \qquad \text{(I)}$$

El término derecho de la ecuación anterior es claramente diferente de cero, ya que los eigenvectores son linealmente independientes y todos los coeficientes son no nulos. Así, para cada r, $A^r z \neq 0$ y $A^r \in K$ desde que $A \in \Pi(K)$. El conjunto de rayos en K es compacto, ya que K es cerrado, de aquí la sucesión de rayos $\{(A^r z)^G\}$ tiene una subsucesión convergente, sea $a \in \{x_n\}^G$.

Por (I)

$$x_h = \sum_{i=1}^{h} \beta_{ih} x_{i1}$$

el cual es un vector no cero en K.

A continuación se hará uso del siguiente lema, el cual se presenta sin demostración.

Lema: Para cada número complejo α fuera del eje real no-negativo, existen números positivos $w_0,\ldots,w_q$ tales que $\sum_{p=0}^{q} w_p\alpha^p = 0$.

Si $\lambda_h \neq \rho$, entonces por el lema existen números positivos $w_0,\ldots,w_q$ tales que $\sum_{p=0}^{q} w_p\lambda_h^p = 0$. En este caso, sea

$$x_{h-1} = \sum_{p=0}^{q} w_p A^p x_h = \sum_{p=0}^{q} w_p \sum_{i=1}^{h} \beta_{ih}\lambda_i^p x_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \beta_{ih} \sum_{p=0}^{q} w_p \lambda_i^p x_{i1} = \sum_{i=1}^{h-1} \beta_{ih-1} x_{i1},$$

donde

$$\beta_{ih-1} = \beta_{ih} \sum_{p=0}^{q} w_p \lambda_i$$

El vector x_{h-1} es un vector no cero en K. Esto se sigue de $w_pA^px_h \in K$ y $w_0x_h \neq 0$. Esto prueba que $\lambda_1=\rho$, en otro caso se puede utilizar el mismo procedimiento para generar una sucesión de vectores no-cero $x_{h-2},\ldots,x_1,x_0$, pero $x_0=0$ por el lema. Si $\lambda_h=\rho$, pero $\lambda_{f+1} \neq \rho$, entonces $x_f = \sum_{i=1}^{f} \beta_{if} x_{i1}$, el cual es un vector no cero en K y claramente

$$Ax_f=\rho(A)x_f$$

que prueba (a),(b) y (c).

Este resultado puede ser enunciado de manera alternativa, al considerar las matrices no-negativas de orden n como aquellas que mapean R^n_+, el ortante no-negativo de R^n, en él mismo, de la forma siguiente:

<u>Teorema</u> (Ver teorema 2.2.1): Si A es una matriz cuadrada no-negativa, entonces

(a) $\rho(A)$, el radio espectral de A, es un eigenvalor, y

(b) A tiene un eigenvector no-negativo correspondiente a $\rho(A)$.

En los siguientes teoremas serán necesarias las observaciones que son presentadas a continuación:

$$tu \geq^k y \Rightarrow tu\text{-}x = tu\text{-}y + y\text{-}x \in K \text{ y } tu + x = tu\text{-}x + x + x \in K.$$

Sea K un cono propio y sea $u \in int(K)$.

(a) El intervalo ordenado

$$B_u = \{x \in R^n : -u \leq^k x \leq^k u\}$$

es un cuerpo convexo, i.e., B_u es cerrado y convexo y para cualquier $x \in R^n$, existe un t positivo tal que $x \in tB_u$, y

$$x \in B_u,\ |\alpha| \leq 1 \Rightarrow x \in B_u.$$

(b) Cuando B_u es un cuerpo convexo define una norma sobre R^n,

$$\|x\|_u = \inf\{t > 0 : x \in tB_u\}$$

y así $\|u\|_u = 1$ (para $u^t=(1,...,1)$ y $K = R^n_+$ se tiene la norma l_∞).

Así la norma es monótona con respecto a K,

$$0 \leq^k x \leq^k y \Rightarrow \|x\|_u \leq \|y\|_u$$

Similarmente, la norma para operadores inducida

$$\|A\|_u = \sup_{\|x\|_u = 1} \|Ax\|_u$$

satisfacen

$$\|A\|_u = \|Au\|_u \text{ si } A \in \Pi(K),$$

desde que tu=Ax=tu-Au+A(u-x) y tu+Ax=tu-Au+A(u+x), si $tu \geq^k Au$, $x \in B_u$ y $A \in \Pi(K)$.

Sean K_1 y K_2 conos propios en R^n y R^m, respectivamente, y sea $A \in R^{mxn}$. Considérese los siguientes sistemas:

(i) $Ax \in \mathrm{int}(K_2)$, $x \in \mathrm{int}(K_1)$,

(ii) $A^t y \in K_1'$, $0 \neq y \in -K_2'$,

(i_0) $Ax \in K_2$, $0 \neq x \in K_1$

(ii_0) $A^t y \in \mathrm{int}(K_1')$, $y \in -\mathrm{int}(K_2')$.

Entonces, exactamente uno de los sistemas (i) y (ii) es consistente y exactamente uno de los sistemas (i_0) y (ii_0) es consistente.

Definición (2.2.2): El conjunto de matrices para las cuales (i) es consistente es denotado por $S(K_1,K_2)$. El conjunto de matrices para las cuales (i_0) es consistente es denotado por $S_0(K_1,K_2)$. Una matriz cuadrada A se dice K-semipositiva si $A \in S(K,K)$.

Definición (2.2.3): Una matriz B se dice es convergente si $\lim_{k\to\infty} B^k$ existe y es la matriz cero.

A continuación se presenta un importante resultado de la teoría de operadores acotados. La demostración de este teorema se presenta en el Apéndice 1.

Teorema (2.2.2): Una matriz B es convergente si y sólo si $\rho(B)<1$. Además es convergente si y sólo si I-B es no singular y

$$(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

A continuación se presentan algunos teoremas que describen la relación entre convergencia, semipositividad y otras propiedades similares.

Teorema (2.2.3): Sea $A=\alpha I-B$, donde $B \in \Pi(K)$. Entonces,

(a) Si $Ax \in K$ para algún $x \in \mathrm{int}(K)$, entonces $\rho(B) \leq \alpha$. Si, además, $\alpha > 0$, entonces $\lim\limits_{k \to \infty} (\alpha^{-1}B)^k x = x'$ existe y $x' \leq^k x$. Más aún $x'=0$ si y sólo si $\alpha^{-1}B$ es convergente, i.e., $\rho(B) < \alpha$.

(b) La matriz A es K-semipositiva si y sólo si $\alpha^{-1}B$ es convergente.

(c) Si $\rho(B) \leq \alpha$, entonces $A \in S_0(K,K)$.

Demostración:

(a) El radio espectral está acotado por todas las normas. En particular,

$$\rho(B) \leq \|B\|_x = \|Bx\|_x = \|\alpha x\|_x = \alpha.$$

Si α es positivo, entonces la sucesión $\{(\alpha^{-1}B)^k x\}$ decrece en el orden parcial inducido por K, y es acotado por $\{0\}$, lo cual asegura la existencia de x', y por x que implica $x' \leq^k x$. Si $\rho(\alpha^{-1}B) < 1$, entonces $\lim\limits_{k \to \infty} (\alpha^{-1}B)^k = 0$. Conversamente, $\|(\alpha^{-1}B)^k\|_x = \|(\alpha^{-1}B)^k x\|_x$ y así, si $x'=0$, $\|(\alpha^{-1}B)^k\| \to 0$, de lo que se deduce que $\rho(B) < 1$.

(b) Si: Sea $y \in \mathrm{int}(K)$. Entonces $x = \alpha A^{-1} y = (I - \alpha B)^{-1} y = y + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1}B) y \in \mathrm{int}(K)$ y $Ax \in \mathrm{int}(K)$.

Sólo si: A es K-semipositiva, entonces la prueba se sigue de la definición (2.2.2).

(c) Para cada número natural k, $\rho(B) < \alpha + \frac{1}{k}$. Por (b) existe $x^{(k)} \in K$ tal que $Bx^{(k)} < \left(\alpha + \frac{1}{k}\right)x^{(k)}$. Como los vectores $x^{(k)}$ se pueden normalizar, se tiene que $\|x^{(k)}\| = 1$ para todo k, por lo que existe un límite x' de una subsucesión convergente

$$x' \in K,\ \|x'\| = 1 \text{ y } x' \neq 0,\ Ax' \leq^{k} \alpha x'.$$

Definición (2.2.4): Una matriz en $\Pi(K)$ es K-irreducible si las únicas facetas de K que esta deja invariante son $\{0\}$ y K mismo. Una matriz en $\Pi(K)$ es K-reducible si ésta deja invariante una faceta no trivial de K.

Teorema (2.2.4): Una matriz $A \in \Pi(K)$ es K-irreducible si y sólo si ningún eigenvector de A está en la frontera de K.

Demostración: Si: Supóngase que F es una faceta no-trivial de K. F es un cono propio en F-F. Aplicando el teorema (2.2.1), parte (c), a A_f, la restricción de A a F-F, se tiene que posee un eigenvector de A y $x \in bd(K)$. Sólo si: Sea F_x la faceta de K generada por x. Si x es un eigenvector de A, entonces $AF_x \subseteq F_x$. Si $0 \neq x \in bd(K)$, entonces F_x es no trivial.

Teorema (2.2.5): Una matriz $A\in\Pi(K)$ es K-irreducible si y sólo si A tiene exactamente un (excepto múltiplos escalares) eigenvector en K, y este vector está en int(K).

Demostración: Si: Se sigue del teorema (2.2.4).

Sólo si: Por el teorema (2.2.4), A no tiene ningún vector en bd(K). Siendo K-no-negativa, ésta tiene un eigenvector en K que tiene que estar en int(K). La unicidad de este eigenvector se sigue de la primera parte del lema a continuación.

Lema: Si $A\in\Pi(K)$ tiene dos vectores en int(K), entonces A tiene un eigenvector en la frontera. Además, los eigenvalores correspondientes son todos iguales.

Demostración: Sean

$$Ax_1=\lambda_1 x_1,\ x_1\in \mathrm{int}(K),$$

$$Ax_2=\lambda_2 x_2,\ x_2\in \mathrm{int}(K).$$

Los eigenvalores λ_1 y λ_2 son no-negativos desde que A es K-no-negativa. Asumamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y sea

$$t_0 = \min\{t>0 : tx_2 - x_1 \in K\}.$$

Este mínimo existe desde que $x_2\in\mathrm{int}(K)$. Sea $x_3=t_0x_2-x_1$. Claramente $x_3\in\mathrm{bd}(K)$. Si $\lambda_1>0$, entonces

$$Ax_3 = t_0\lambda_2 - \lambda_1 x_1 = \lambda_1\left\{t_0\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)x_2 - x_1\right\}.$$

El vector $Ax_3 \in K$. Entonces, por la definición de t_0, $\lambda_2 \geq \lambda_1$. De aquí $\lambda_1=\lambda_2$ y $Ax_3=\lambda_1 x_3$, lo cual completa la demostración del lema y del teorema.

<u>Teorema</u> (2.2.6): Una matriz $A \in \Pi(K)$ es K-irreducible si y sólo si

$$Ax \leq^k \alpha x, \text{ para algún } 0 \neq x \in K, \quad (II)$$

implica que $x \in int(K)$.

<u>Demostración</u>: Si: Supóngase que A K-reducible. Entonces $Ax=\lambda x$, para algún $0 \neq x \in bd(K)$. Este x satisface (II) pero no está en int(K).

Sólo si: $AF_x \subseteq F_x$ para cada x que satisface (II).

Cada matriz K-positiva es K-irreducible. Conversamente se tiene el siguiente

<u>Teorema</u> (2.2.7): Una matriz $A \in \Pi(K)$ de nxn es K-irreducible si y sólo si $(I+A)^{n-1}$ es K-positiva.

<u>Demostración</u>: Si: Supóngase que A es K-irreducible, así $x \in bd(K)$ es un eigenvector de A. Entonces $(I+A)^{n-1}$ es K-positiva.

Sólo Si: Sea y un elemento arbitrario no-cero de bd(K). Por K-irreducibilidad $y_1=(I+A)y$ no está en Fy-Fy y la dimensión de Fy_1 es mayor que la dimensión de Fy. Repitiendo el argumento se muestra que $(I+A)^k y \in int(K)$, para algún $k \leq n-1$, de donde se tiene que $(I+A)^{n-1}$ es K-positiva.

Corolario (2.2.8): Si A y B están en $\Pi(K)$ y A es K-irreducible, entonces lo es A+B.

Teorema (2.2.8): Si $A \in \Pi(K)$ es K-irreducible, entonces

(a) $\rho(A)$ es un eigenvalor simple y cualquier otro eigenvalor con el mismo módulo es también simple, y

(b) Existe un eigenvalor correspondiente a $\rho(A)$ en int(K), y ningún otro eigenvector (excepto múltiplos escalares) está en K.

Más aún, (a) es suficiente para la existencia de un cono propio K, para el cual A es K-no-negativa y K-irreducible.

Demostración: La parte (b) se deduce del teorema (2.2.3). La parte (a) se sigue del teorema (2.2.1). Se probará que $\rho(A)$ es simple. Supóngase que $\rho(A)$ no es simple. Entonces existen vectores linealmente independientes x_1 y x_2, con $x_1 \in int(K)$, tales que

$$Ax_1=\rho(A)x_1 \qquad (III)$$

y también

$$Ax_2=\rho(A)x_2$$

o bien

$$Ax_2=\rho(A)x_2+x_1. \quad (IV)$$

Si (III) fuera verdad, entonces para $t>0$ grande, $x_3=tx_1+x_2$ en K, y x_3 sería otro eigenvector; esto contradice la unicidad del eigenvector. Si se cumpliera (IV), entonces $-x_2 \notin K$, y se podría definir

$$t_0=\min\{t>0: tx_1-x \in K\}.$$

Entonces, $\rho(A)\neq 0$ porque A es K-irreducible; pero $\rho(A)\neq 0$ implica

$$A(t_0x_1-x_2)=t_0\rho(A)x_1-\rho(A)x_2-x_1$$

$$=\rho(A)\{(t_0-1/\rho(A))x_1-x_2\} \in K,$$

lo cual contradice la definición de t_0.

El teorema anterior puede ser generalizado de la forma siguiente para matrices K-positivas (se presenta sin demostración):

<u>Teorema</u> (2.2.9): Si A es K-positiva, entonces

(a) $\rho(A)$ es un eigenvalor simple, mayor que la magnitud de cualquier otro eigenvalor,

(b) Un eigenvector correspondiente a $\rho(A)$ está en int(K).

Más aún, la condición (a) asegura que A es K-positiva para algún cono propio K.

Teorema (2.2.10): Sea $A \in \Pi(K)$ una matriz K-irreducible. Entonces la existencia de un número real α y del vector $x \in \text{int}(K)$ tal que $0 \neq \alpha x - Ax \in K$ implica que $\rho(A) < \alpha$.

Demostración: Por el teorema (2.2.3), $\rho(A) \leq \alpha$. Si $\rho(A)=0$ entonces $\rho(A)<\alpha$. Supóngase que $\rho(A)=\alpha=0$. Sea x_1 el eigenvector de A en int(K) y

$$z = \|x_1\|_x x - x_1$$

Entonces $z \in \text{bd}(K)$ y

$$0 \leq^k Az = \|x_1\|_x Ax - Ax_1 \leq^k \|x_1\|_x \alpha x - x_1 = \alpha z,$$

lo cual contradice la irreducibilidad de A.

Corolario (2.2.11): Sea $0 \leq^{\pi(K)} A \leq^{\pi(K)} B$, donde A es K-irreducible y $A \neq B$. Entonces $\rho(A) < \rho(B)$.

Demostración: Por (2.2.8) B es también K-irreducible. Sea x el eigenvector de B en int(K). Entonces

$$Ax \leq^{k} Bx = \rho(B)x.$$

Como B≠A, $\|B-A\|$ es positiva para cualquier norma. En particular $\|B-A\|_x > 0$. De esa manera

$$0 < \|B-A\|_x = \|(B-A)x\|_x = \|\rho(B)z - Ax\|_x,$$

de donde $\rho(B)x \neq Ax$. Aplicando (2.2.10) se prueba que $\rho(B) > \rho(A)$.

Corolario (2.2.12): Si $0 \leq^{\pi(K)} A \leq^{\pi(K)} B$, entonces $\rho(A) < \rho(B)$.

Demostración: Sea C una matriz K-positiva y defínase $A_t = A + tC$, $B_t = B + tC$, $t > 0$. Siendo K-positiva, A_t es K-irreducible y por el corolario (2.2.11) se tiene que $\rho(A_t) < \rho(B_t)$. Tomando $t \to 0$, se obtiene que $\rho(A) < \rho(B)$.

Teorema (2.2.13): Sea $A \in \Pi(K)$ una matriz K-irreducible. Si

$$\alpha x <^{k} Ax \text{ para algún } x \in K,\ \alpha > 0 \qquad (V)$$

entonces $\rho(A) > \alpha$. Conversamente, si $\rho(A) > \alpha$, entonces $Ax > \alpha x$, para algún $x \in \text{int}(K)$.

Demostración: Sea $\tilde{A} = \alpha^{-1a}$. Por (V), $\tilde{A}x >^{k} x$. Sea x_1 el eigenvector de A en int(K). Ahora, $\|x_1\|_{x_1} x_1 - x \in K$, y de aquí

$$0\leq^{k}\bar{A}(\|x_1\|_{x_1}x_1-x)<^{k}\|x_1\|_{x_1}\rho(\bar{A})x_1-x$$

o bien

$$x<^{k}\rho(\bar{A})\ \|x_1\|_{x_1}$$

que, por definición de $\|x_1\|_{x_1}$, implica que $\rho(\bar{A})\leq 1$. La igualdad es imposible debido a la desigualdad anterior y de la K-irreducibilidad , por lo que se tiene que $\rho(\bar{A})<1$, es decir, $\rho(A)<\alpha$.

Conversamente, sea $Ax_1=\rho(A)x_1>>\alpha x_1$, $x_1\in int(K)$.

<u>Corolario</u> (2.2.14): Sea $A\in\Pi(K)$. Entonces $Ax\geq^{k}\alpha x$ para algún $0\neq x\in K$, con $\alpha>0$, si y sólo si $\rho(A)\geq\alpha$.

<u>Teorema</u> (2.2.15):): Sea $A\in\Pi(K)$. Entonces

$$\alpha x\leq^{k}Ax\leq^{k}\beta x,\ \text{para algún}\ x\in int(K),$$

implica que $\alpha\leq\rho(A)\leq\beta$.

Además, si A es K-irreducible, $\alpha x \neq Ax$ y $Ax \neq \beta x$, entonces $\alpha < \rho(A) < \beta$.

Los teoremas (2.2.3) y (2.2.10) dieron las cotas superiores para el radio espectral de las matrices K-no-negativas, mientras que el teorema (2.2.13), el corolario (2.2.14) y el teorema (2.2.15) complementaron con las cotas inferiores.

Todos los resultados anteriores se pueden resumir, en el caso de las matrices no-negativas, en los teoremas siguientes:

<u>Notación</u>: Se escribirá:

$A \geq B$, si $a_{ij} \geq b_{ij}$, para todos i y j.

$A > B$, si $A \geq B$ y $A \neq B$, y

$A >> B$, si $a_{ij} > b_{ib}$, para todos i y j.

Las matrices que satisfacen $A >> 0$ son las llamadas matrices positivas.

<u>Definición</u> (2.2.5): (Ver definición 2.2.4) Una matriz A de nxn es cogradiente a una matriz E si para alguna matriz permutación P, $PAP^t = E$. A es reducible si es cogradiente a la matriz

$$E = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

donde B y C son matrices cuadradas, o si $n=1$ y $A=0$. En otro caso, la matriz A es irreducible.

Teorema (2.2.16) (Ver teoremas (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7)): Cada una de las siguientes condiciones caracteriza la irreducibilidad de una matriz no-negativa A de orden n ($n>1$).

(a) Ningún vector de A tiene una coordenada cero,

(b) A tiene exactamente un (excepto múltiplos escalares) eigenvector no-negativo, y este eigenvector es positivo.

(c) $\alpha x \geq Ax,\ x>0 \Rightarrow x>>0$.

(d) $(I+A)^{n-1}>>0$.

(e) A^t es irreducible.

Las matrices no-negativas irreducibles incluyen el caso positivo.

Teorema (2.2.17): (Perron-Frobenius) (Ver teoremas (2.2.8) y (2.2.9)):

(a) Si A es positiva, entonces $\rho(A)$ es un eigenvalor simple, mayor que la magnitud de cualquier otro eigenvalor.

(b) Si $A \geq 0$ es irreducible, entonces $\rho(A)$ es un eigenvalor simple, A tiene un eigenvector positivo x correspondiente a $\rho(A)$, y cualquier eigenvector no-negativo de A es un múltiplo de x.

Corolario (2.2.18): (Ver corolarios (2.2.11) y (2.2.12))

(a) Si $0 \leq A \leq B$, entonces $\rho(A) \leq \rho(B)$.

(b) Si $0 \leq A < B$ y $A+B$ es irreducible, entonces $\rho(A) < \rho(B)$.

Teorema (2.2.19) (Ver teoremas (2.2.14) y (2.2.15)): Para $A \geq 0$,

$\alpha x \leq Ax$, $x > 0$, implica que $\alpha \leq \rho(A)$;

$Ax \leq \beta x$, $x >> 0$, implica que $\rho(A) \leq \beta$.

Si, además, A es irreducible, entonces

$\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, $x > 0$, implica que $\alpha < \rho(A) < \beta$, y $x >> 0$.

Teorema (2.2.20): Si x es un eigenvector positivo de una matriz A no-negativa, entonces x corresponde a $\rho(A)$.

B. Caracterización combinatoria de las matrices no-negativas

Una interesante caracterización de la irreducibilidad de matrices está dada por el enfoque combinatorio. Sea $(a_{ij})^{(q)}$ el elemento (i,j) de A^q.

<u>Teorema</u> (2.3.1): Una matriz no-negativa A es irreducible si y sólo si para cada (i,j) existe un número natural q tal que $a_{ij}^{q}>0$.

<u>Demostración</u>: Sólo si: Se obtiene de la definición (2.2.5).

Si: Por el teorema (2.2.16), $(I+A)^{n-1}>>0$. Sea $B=(I+A)^{n-1a}$. Como el anterior es el producto de una matriz positiva con una irreducible, entonces es también positivo. Sea $B=A^{n}+C_{n-1}A^{n-1}+\ldots+C_{1}A$. Entonces $b_{ij}=a_{ij}^{n}+c_{n-1}{}^{a}{}_{ij}^{n-1}+\ldots+c_{1}a_{ij}>0$, para todo (i,j), de donde para cada (i,j) debe de existir un entero positivo q tal que $a_{ij}^{q}>0$.

<u>Definición</u> (2.3.1): El grafo dirigido asociado, G(A), de una matriz A de nxn, consiste en n vértices $p_1,\ldots,p_n$, donde un arco sale de p_i hacia p_j si y sólo si $a_{ij}\neq 0$.

<u>Definición</u> (2.3.2): Un grafo dirigido G es fuertemente conexo si para un par ordenado cualquiera (p_i,p_j) de vértices de G, existe una secuencia de arcos (una trayectoria) que sale de p_i hacia p_j.

Como $a_{ij}^{q}>0$ si y sólo si existe una trayectoria de q arcos de p_i a p_j, entonces el teorema (2.3.1) puede enunciarse de la forma siguiente:

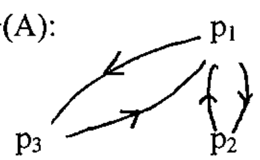
<u>Teorema</u> (2.3.2): Una matriz es irreducible si y sólo si G(A) es fuertemente conexo.

<u>Ejemplo</u>: Considérense las siguientes matrices

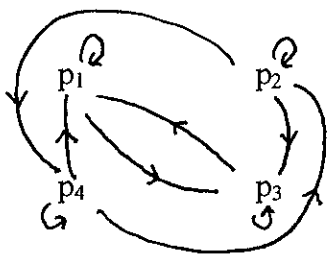
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los grafos asociados son

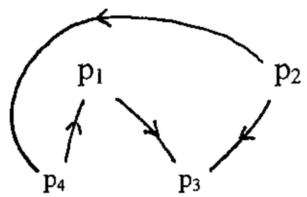
G(A):



G(B):



G(C):



III. MATRICES-M

En muchos problemas en ciencias biológicas, físicas y sociales es común encontrar soluciones es común encontrar soluciones que involucran matrices que tienen una estructura especial. Las matrices que a continuación se presentan ocurren a menudo en relación a sistemas de ecuaciones lineales o no-lineales o problemas de eigenvalores en una gran variedad de áreas incluyendo métodos de diferencias finitas para gran variedad de áreas incluyendo métodos de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales, modelos de producción, insumo-producto y modelos de crecimiento en economía, problemas de investigación de operaciones, y en procesos de Markov en probabilidad estadística.

<u>Notación</u>: Sea $Z^{nxn} = \{A = (a_{ij}) \in R^{nxn}; a_{ij} \leq 0, i \neq j\}$

El nombre de matrices-M fue utilizado por primera vez por Ostrowski en el año de 1937, en referencia al trabajo de Minkowski quien probó, a principios de siglo, si $A \in Z^{nxn}$ y tiene todas las sumas de filas positivas, entonces detA>0.

A continuación se presentan varios teoremas que serán necesarios para las caracterizaciones de matrices-M invertibles.

Definición(3.1): Sea K un cono propio. Una matriz A es llamada K-monótona si $Ax \in K \Rightarrow x \in K$.

Teorema(3.1): Una matriz A es K-monótona si y sólo si ésta es no-singular y $A^{-1} \in \prod(K)$.

Demostración: Para una matriz no-singular A de orden n y conjuntos no vacíos P y Q en R^n es evidente que la equivalencia $Q \subset AP \Leftrightarrow A^{-1}Q \subseteq P$ se cumple. Se debe probar que A es no singular. Sea $x \in N(A)$, el espacio nulo de A. Entonces, por la definición de K-monótona, $x \in K$ y $-x \in K$, y, por ser K puntiagudo, x=0.

Teorema(3.2): Sea $A = \alpha I - B, B \in \prod(K)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) La matriz A es K-monótona.

ii) El radio espectral de B es menor que α.

iii) La matriz A es estable positiva; i.e., si λ es un eigenvalor de A, entonces $\mathrm{Re}\lambda<0$.

Demostración:

$i) \Rightarrow ii)$: Sea $x \in K$ un eigenvector de B, correspondiendo a $\rho(B)$. Entonces $Ax=(\alpha-\rho(B))x$.

Desde que A es no-singular, siendo K-monótona, $\alpha \neq \rho(B)$ y con $A^{-1}x=(\alpha-\rho(B))^{-1}x$. Por K-monotonía, $A^{-1}x \in K$ y de allí $\alpha > \rho(B)$.

ii) $\Rightarrow$ i): A es claramente no singular, desde que $\alpha^{-1}B$ es convergente,

$$A^{-1} = \alpha^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha^{-1} B\right)^{i}$$

de donde A es K-monótona.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sea λ un eigenvalor de A. Entonces $\lambda=\alpha-\mu$, donde μ es un eigenvalor de B. Entonces (iii) se sigue de $\alpha > \rho(B) \geq |\mu|$.

iii) $\Rightarrow$ ii): Sea $x \in K$ un eigenvector de B correspondiente a $\rho(B)$. Entonces $\lambda=\alpha-\rho(B)$ es un eigenvalor de A y $\mathrm{Re}\lambda>0$ implica $\alpha > \rho(B)$.

Definición (3.2): Una matriz A es

i) Una matriz-M K-no-singular si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema (3.2).

ii) Una matriz-M K-singular si puede ser expresada en la forma $A=\alpha I-B$, con $\alpha=\rho(B)$.

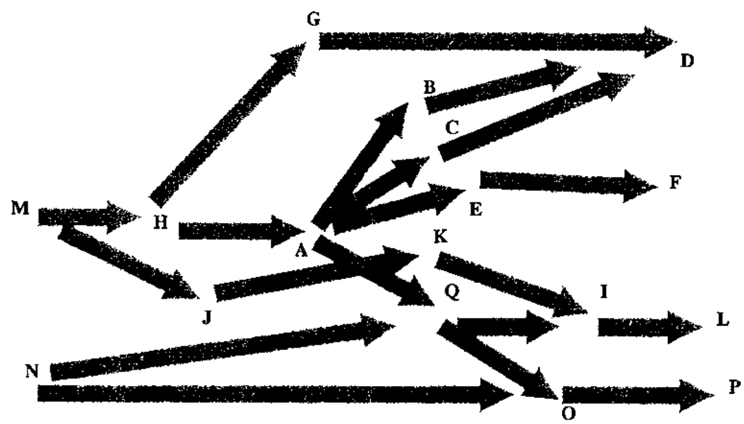
Corolario (3.3): Sea A=αI-B, $B \in \Pi(K)$, una matriz-M K-no-singular. Entonces, se tiene que $A^{-1}x \in int(K)$ si y sólo si B es K-irreducible.

Demostración: Si: Sea $0 \neq x \in K$. Sea $A^{-1}x=y$. Claramente, $0 \neq y \in K$ desde que A es K-monótona. También $\alpha y \overset{k}{\geq} By$ por el teorema (2.2.5) y la K-irreducibilidad de B, $y \in int(K)$.

Sólo si: Supóngase que B es K-irreducible y sea x un eigenvector de B sobre bd(K), sea, Bx=x. Entonces, $0 \neq (\alpha - \beta)x \in bd(K)$. Pero $A^{-1}y \notin int(K)$.

Definición (3.3): Cualquier matriz A de la forma A=sI-B, s>0, B≥0, para la cual s≥ρ(B), es llamada una matriz-M.

Teorema (3.4) Sea $A \in R^{nxn}$. Entonces, para cada letra ζ representando cada una de las siguientes condiciones, ζ_i son equivalentes para cada i. Además, si ζ representa cualesquiera de las condiciones ζ_i, el siguiente árbol de implicaciones se cumple



Finalmente, si $A \in Z^{nxn}$ entonces cada una de las 50 condiciones siguientes es equivalente al enunciado "A es una matriz-M no-singular".

(A_1) Todos los menores principales de A son positivos.

(A_2) Cada eigenvalor real de cada submatriz principal de A es positivo.

(A_3) Para cada $x \neq 0$ existe una matriz diagonal positiva D tal que $x^tADx>0$.

(A_4) Para cada $x \neq 0$ existe una matriz diagonal D no-negativa tal que $x^tADx>0$.

(A_5) A no reversa el signo de cada vector; es decir, si $x \neq 0$ y si $y=Ax$, entonces para algún subíndice i, $x_iy_i>0$.

(A_6) Para cada matriz signo S (S es una matriz diagonal con entradas ± 1), existe un $x>>0$, tal que $SAS>>0$.

(B_7) La suma de todos los menores principales kxk de A es positiva para k=1,2,..,n.

(C_8) A es no-singular y todos los menores principales de A son no negativos.

(C_9) A es no-singular y cada eigenvalor real de cada submatriz principal de A es no negativa.

(C_{10}) A es no-singular y A+D es no-singular para cada matriz diagonal positiva D.

(C_{11}) A+D es no-singular para cada matriz diagonal no-negativa D.

(C_{12}) A es no singular y para cada $x\neq 0$ existe una matriz diagonal no-negativa D tal que $x^tDx\neq 0$ y $x^tADx>0$.

(C_{13}) A es no-singular y para cada matriz signo S existe un vector $x>0$ tal que $SAS\geq 0$.

(C_{14}) A es no-singular y si $x\neq 0$ y $Ax=y$, entonces para algún subíndice i, $x_i\neq 0$ y $x_iy_i\geq 0$.

(D_{15}) $A+\alpha I$ es no singular para cada $\alpha\geq 0$.

(D_{16}) Todos los eigenvalores reales de A son positivos.

(E_{17}) Todos los menores principales dominantes de A son positivos.

(E_{18}) Existen matrices triangulares inferior y superior L y U, respectivamente, con diagonales positivas, tales que A=LU.

(F_{19}) Existe una matriz permutación P tal que PAP^t satisface la condición (E_{17}) o (E_{18}).

(G_{20}) A es estable positiva; es decir, la parte real de cada eigenvalor de A es positiva.

(G_{21}) Existe una matriz positivo definida y simétrica W, tal que $AW+AW^t$ es positivo definida.

(G_{22}) A+I es no-singular y $G=(A+I)^{-1}(A-I)$ es convergente.

(G_{23}) A+I es no singular y para $G=(A+I)^{-1}(A-I)$ existe una matriz positivo definida W tal que $W-G^tWG$ es positivo definida.

(H_{24}) Existe una matriz diagonal positiva D tal que $AD+DA^t$ es positivo definida.

(H_{25}) Existe una matriz diagonal positiva E tal que para $B=E^{-1}AE$, la matriz $(B+B^t)/2$ es positivo definida.

(H_{26}) Para cada matriz Q positivo semidefinida , la matriz QA tiene un elemento diagonal positivo.

(I_{27}) A es semipositiva; es decir, existe x>>0 con Ax>>0.

(I_{28}) Existe un x>0 con Ax>>0.

(I_{29}) Existe una matriz diagonal positiva D tal que AD tiene todas las sumas de filas positivas.

(J_{30}) Existe un x>>0 con Ax>0 y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > 0$, i=1,2,...,n.

(K_{31}) Existe una matriz permutación P tal que PAP^t satisface j_{30}.

(L_{32}) Existe x>>0 con y=Ax>0, tal que si $y_{i0}=0$, entonces existe una sucesión de índices $i_1,\dots,i_r$ con $a_{ij-1}i_j \neq 0$, j=1,...,r y con $y_{ir} \neq 0$.

(L_{33}) Existe un x>>0 con Ax=y>0, tal que la matriz $\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$ definida por

$$(\hat{a}_{ij}) = \begin{cases} 1, & a_{ij} \neq 0 \text{ ó } y_j \neq 0. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es irreducible.

(M_{34})Existe x>>0 tal que para cada matriz signo S, SAS>>0.

(M_{35})A tiene todos los elementos diagonales positivos y existe una matriz diagonal D tal que AD es estrictamente diagonalmente dominante, es decir $a_{ij}d_i > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| d_j$, $i = 1,2,\dots,n$.

(M_{36})A tiene todos los elementos diagonales positivos y existe una matriz diagonal positiva E tal que $E^{-1}AE$ es estrictamente diagonalmente dominante.

(M_{37})A tiene todos los elementos diagonales positivos y existe una matriz diagonal positiva D tal que AD es semiestrictamente diagonalmente dominante inferior; es decir

$$a_{ij}d_i \geq \sum_{i\neq j} |a_{ij}| d_j, \, i = 1,2,\ldots,n$$

y

$$a_{ij}d_i \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| d_j, \, i = 1,2,\ldots,n.$$

(N_{38}) A es inversa-positiva; es decir A^{-1} existe y $A^{-1} \geq 0$.

(N_{39}) A es monótona; es decir $Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, \forall x \in R^n$.

(N_{40}) Existen matrices B_1 y B_2 inversas positivas tales que $B_1 \leq A \leq B_2$.

(N_{41}) Existe una matriz inversa-positiva B≥A, tal que $I\text{-}B^{-1a}$ es convergente.

(N_{42}) Existe una matriz inversa-positiva B≥A y A satisface I_{27}, I_{28} ó I_{29}.

(N_{43}) Existe una matriz inversa positiva B≥A y una matriz-M no singular C tal que A=BC.

(N_{44}) Existe una matriz inversa-positiva B y uba matriz-M no singular C tal que A=BC.

(N_{45}) A tiene un fraccionamiento convergente regular; es decir, A tiene una representación A=M-N, $M^{-1}\geq 0$, N≥0, donde $M^{-1}N$ es convergente.

(N_{46}) A tiene un fraccionamiento regular convergente débil; es decir, A tiene una representación A=M-N, $M^{-1}\geq 0$, $M^{-1}N \geq 0$, donde $M^{-1}N$ es convergente.

(O_{47}) Cada fraccionamiento regular débil de A es convergente.

(P_{48}) Cada fraccionamiento regular de A es convergente.

(Q_{49}) Para cada $y \geq 0$ el conjunto $S_y = \{x \geq 0 : A^t x \leq y\}$ es acotado y A es no-singular.

(Q_{50}) $S_0=\{0\}$; esto es, las desigualdades $A^t x \leq 0$ y $x \geq 0$ tienen una sola solución trivial $x=0$, y A es no-singular.

A continuación se presenta la demostración para $A \in Z^{nxn}$; i.e., que cada una de las 50 condiciones (A_1)-(Q_{50}) pueden utilizarse para caracterizar a una matriz-M no singular.

Demostración Supóngase que A es una matriz-M no-singular. Observando el árbol de implicaciones en el enunciado del teorema, se tiene que las condiciones (M) y (N) se cumplen; estas condiciones juntas implican cada una de las restantes condiciones en el teorema para una matriz $A \in Z^{nxn}$ arbitraria. Por la definición (3.3), A tiene una representación $A=sI-B$, $B \geq 0$ con $s \geq \rho(B)$. Más aún, $s \geq \rho(B)$, desde que A es no-singular. Haciendo $T=B/s$, se sigue que $\rho(T)<1$ y por el teorema (2.2.2)

$$A^{-1}=(I-T)^{-1}/s \geq 0.$$

Entonces la condición (N_{38}) se cumple. Además, A tiene la diagonal positiva ya que el producto interno de la i-ésima fila con la i-ésima columna de A^{-1} es uno, para $i=1,\dots,n$. Sea $x=A^{-1}e$, donde $e=(1,\dots,1)^t$. Entonces, $D=\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)$, D es una matriz diagonal positiva, entonces

$$Ade=Ax=e>>0,$$

y entonces AD tiene todas las sumas de filas positivas. Pero $A \in Z^{nxn}$, esto significa que A es estrictamente diagonalmente dominante y entones (M_{35}) se cumple.

Supóngase que $A \in Z^{nxn}$. Se probará que A satisface cualquiera de las condiciones (A)-(Q), entonces DA es una matriz-M no-singular. De nuevo, por el árbol de implicaciones, es suficiente considerar sólo las condiciones (D), (F), (L) y (P).

Consideremos que la condición (D_{16}) se cumple para A y sea $A=sI-B$, $B \geq 0$, $s>0$. Supóngase que $s \leq \rho(B)$. Entonces si $Bx=\rho(B)x$, $x \neq 0$, $Ax=(s-\rho(B))x$, se tiene que $s-\rho(B)$ debe ser un eigenvalor no-positivao real de A, contradiciendo (D_{16}). Ahora supóngase que la condición (F_{19}) se cumple para A. Entonces suponiendo que $PAP^t=LU$ donde L es una triangular inferior con diagonal positiva. Se demostrará primero que los elementos fuera de la diagonal de L y de U son no-positivos. Sea $L=(r_{ij})$ y $U=(s_{ij})$ con $r_{ij}=0$ para $i<j$ y si $s_{ij}=0$ para $i>j$ y $r_{ii}>0$, $s_{ii}>0$, para $i \leq j$, $j \leq n$.

Se probarán las desigualdades $r_{ij} \leq 0$, $s_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ por inducción sobre $i+j$. Sea

$$A'=PAP^t=(a'_{ij}).$$

Si $i+j=3$ las desigualdades $r_{21} \leq 0$ y $s_{12} \leq 0$ se siguen de $a'_{12}=r_{11}s_{12}$ y $a'_{21}=r_{21}s_{11}$. Sea $i+j>3$, $i \neq j$, y suponiendo que las desigualdades $r_{kl} \leq 0$ y $s_{kl} \leq 0$, $k \neq 1$, son válidas $k+1<i+j$. Entonces, si $i<j$ en la relación

$$a_{ij} = r_{ii}s_{ij} + \sum_{k<i} r_{ik}s_{kj},$$

se tiene que $a_{ij} \leq 0$, $\sum_{k<i} r_{ik}s_{kj} \geq 0$, desde que $r_{ik} \leq 0$, $s_{kj} \leq 0$, de acuerdo a las condiciones $i+k<i+j$, $k+j<i+j$. Entonces $s_{ij} \leq 0$. Análogamente, para $i>j$ la desigualdad $r_{ij} \leq 0$, puede ser probada. Es fácil ver entonces que L^{-1} y U^{-1} existen y son no-negativas. Entonces,

$$A^{-1}=(P^tLUP)^{-1}=P^tU^{-1}L^{-1}P\geq 0.$$

Ahora, sea $A=sI-B$, $s>0$, $B\geq 0$, se sigue que $(I-T)^{-1}\geq 0$, donde $T=B/s$. Entonces $\rho(B)<1$ por el teorema (2.2.2), y entonces $s>\rho(B)$ y A es una matriz-M no singular. A continuación, asumamos la condición (L_{33}) se cumple para A. Escribimos $A=sI-B$, $s>0$. $B\geq 0$ y $T=B/s$. Entonces, como $y=Ax>0$ para algún $x>>0$, se sigue que $Tx<x$. Se define ahora $\hat{T}=(\hat{t}_{ij})$ por:

$$\hat{t}_{ij}=\begin{cases} t_{ij},\ t_{ij}\neq 0 \\ \varepsilon,\ t_{ij}=0, y_i\neq 0 \\ 0,\ \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue entonces que $\hat{T}$ es irreducible desde que $\hat{A}$, tal como se define en (L_{33}) es irreducible. Más aún, para $\in>0$, suficientemente pequeño, se tiene que

$$\hat{T}x<x$$

así $\rho(T)<1$ por el teorema de Perron-Frobenius (2.2.17). Finalmente, como $T\leq\hat{T}$ se sigue que

$$\rho(T)\leq\rho(\hat{T})<1$$

por el corolario (2.2.18). Por lo anterior, A es una matriz no-singular del tipo M. Seguidamente, se asume que la condición (P_{48}), se cumple para A. Entonces como A tiene una división regular de la forma A=sI-B, s>0, $B\geq 0$, se sigue de (P_{48}) que T=B/s es convergente, así por eso $s>\rho(B)$ es una matriz-M no-singular.

<u>Teorema</u> (3.5): Sea $A\in R^{nxn}$, n>2. Entonces cada una de las siguientes condiciones es equivalente al enunciado "A es una matriz-M no-singular".

(i) A+D es inversa-positiva para cada matriz diagonal D.

(ii) A+I es inversa-positiva para cada escalar $\alpha\geq 0$.

(iii) Cada submatriz principal de A es inversa-positiva.

(iv) Cada submatriz principal de A de órdenes 1,2 y n es inversa positiva.

<u>Demostración</u>:Supóngase que A es una matriz-M no-singular y que D es una matriz diagonal positiva. Entonces cada menor principal de A es positivo implica que cada menor principal de A+D es positivo. Entonces, por la condición (A_1) del teorema (3.4), A+D es una matriz-M no-singular. Entonces, por la condición (N_{38}), A+D es inversa positiva. Por lo anterior, (i) y (ii) se cumplen. También por el teorema (3.4), cada submatriz principal de una matriz-M no-singular es también una matriz no-singular es también una matriz no-singular. Así (iii) y (iv) se cumplen.

Ahora, supóngase que $A\in R^{nxn}$ y que $A+\alpha I$ es inversa-positiva para cada $\alpha\geq 0$. Se sigue que $A^{-1}\geq 0$ al tomar $\alpha=0$. Por la condición (N_{38}) del teorema (3.4), para mostrar que A es una matriz-M no-singular es suficiente mostrar que $A\in Z^{nxn}$. Asumamos que A tiene una entrada positiva fuera de la diagonal, digamos, $a_{ij}>0$, $i\neq j$. Entonces para un $\alpha>0$ suficientemente pequeño,

$$(I+\alpha A)^{-1}=I-\alpha A+(\alpha A)^2-(\alpha A)^3+\ldots$$

tiene (i,j) entrada negativa, ya que el segundo término de la serie domina la entrada. Pero esto es una contradicción debido a lo asumido

$$0\leq(A+I/\alpha)^{-1}=\alpha(I+\alpha A)^{-1}$$

Desde que (i)$\Rightarrow$(ii) se sigue que si (i) se cumple para $A\in R^{nxn}$ entonces A es una matriz-M no-singular.

Ahora, sea $A\in R^{nxn}$ con la propiedad de que cada una de sus submatrices principales de órdenes 1,2 y n es inversa-positiva y $A^{-1}\geq 0$. Sea

$$B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

una submatriz principal de A de orden 2. Entonces a>0, d>0, y

$$B^{-1}=(ad-bc)^{-1}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\geq 0.$$

Entonces, como la diagonal de B tiene todos los elementos positivos, se sigue que $b\leq 0$ y $c\leq 0$. Por lo anterior se concluye que A tiene todos los elementos fuera de la diagonal no positivos. Finalmente, como (iii)$\Rightarrow$(iv) se sigue que si (iii) se cumple para $A\in R^{nxn}$, entonces A es una matriz-M no-singular.

Teorema(3.6) Sea $A \in Z^{nxn}$ irreducible. Entonces, cada una de las siguientes condiciones es equivalente al enunciado "A es una matriz-M no-singular".

i) $A^{-1} \gg 0$.

ii) $Ax > 0$ para algún $x \gg 0$.

Demostración:Supóngase que A es una matriz-M no-singular. Entonces, tomando $K = R_+^n$ en el corolario (3.3), se sigue que $A^{-1} \gg 0$ y así (i) se cumple. La condición (ii) se sigue inmediatamente de la condición (i) del teorema (3.4). Conversamente, si (i) se cumple, entonces A es una matriz-M no-singular por la condición (N_{38}) del teorema (3.4). Supóngase que $Ax > 0$ para algún $x \gg 0$. Entonces como A es irreducible, se sigue que $\hat{A}$ definida en la condición (L_{33}) del teorema (3.4) es irreducible, y entonces A es una matriz-M no-singular.

IV. MODELOS INSUMO-PRODUCTO

Los modelos insumo-producto son parte de la rama de la Economía conocida como Economía Interindustrial; ésta estudia, en particular, las interrelaciones que existen entre los productores en su carácter de compradores de sus producciones mutuas, como consumidores de recursos escasos, y como vendedores a los consumidores finales.

El primer modelo empírico interindustrial fue formulado por el profesor Wassily Leontief, cuyo sistema se conoce con el nombre de "Análisis de Insum- Producto".

A. Contabilidad Interindustrial

La función primordial de las cuentas interindustriales es investigar el curso de las corrientes de bienes y servicios en su paso de uno a otro sector de la producción. Las tablas de interdependencias intersectoriales, tipo de balance de realización y de predicción estática y dinámica, permiten reflejar el conjunto de relaciones interramales en su articulación con la demanda final y el consumo productivo.

En el sistema de contabilidad cada sector de la economía aparece dos veces, como creador de una producción y como usuario de insumos. Las unidades empleadas para la contabilidad serán unidades de valor, determinadas por precios constantes.

El plan fundamental de estas cuentas interindustriales se deriva de la división de los consumos en dos categorías -intermedio y final- y la correspondiente división de los insumos “primarios” y “producidos”.

A continuación se presenta el sistema de contabilidad interindustrial del modelo “abierto” de Leontief, en el cual el consumo final total tiene, aproximadamente, la misma significación que Producto Nacional Bruto.

		Sectores de Compras									
		Consumo Intermedio		Consumo Final						Oferta	
		Sector 1…j…n	Consumo Intermedio Total	Inversión	Consumo	Gobierno	Exportación	Uso Total Final	Uso Total	Importación	Producción
	1	$x_{11} \ldots x_{1j} \ldots x_{1n}$	W_1	I_1	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
	2	$x_{21} \ldots x_{2j} \ldots x_{2n}$	W_2	I_2	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
	.										
	.										
Sector de Producción	.										
	i	$x_{i1} \ldots x_{ij} \ldots x_{in}$	W_i	I_i	C_i	G_i	E_i	Y_i	Z_i	M_i	X_i
	.										
	.										
	.										
	n	$x_{n1} \ldots x_{nj} \ldots x_{nn}$	W_n	I_n	C_n	G_n	E_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
Insumos Producidos Totales		$U_1 \ldots U_j \ldots U_n$									
Insumos Primarios		$V_1 \ldots V_j \ldots V_n$		V_i	V_c	V_G	V_E		V	V	
Producción Total		$x_1 \ldots x_j \ldots x_n$		I	C	G	E	Y	Z	M	X

La separación entre consumo intermedio y final de producción, y entre insumos producidos y primarios conduce a la formación de cuatro tipos distintos de transacciones, que se indican en los cuatro cuadrantes de la Tabla de Transacciones:

Cuadrante I: Contiene el Consumo Final de mercancías y servicios producidos, subdivididos en tipos principales de consumo.

Cuadrante II: Comprenda la parte esencial de las cuentas interindustriales. Cada x_{ij} indica la cantidad de mercancía i consumida en el sector j, determinada a precios constantes. El consumo intermedio total de cualquier mercancía se encuentra identificado por W_i y el total de compras hechas a otros sectores por una industria dada, como U_j.

Cuadrante III. Contiene el empleo de insumos que no son producidos dentro del sistema (insumos primarios). El pago total de insumos primarios por cada sector corresponde, por tanto, aproximadamente al valor agregado en la producción, representando la diferencia que hay entre el valor de la producción y el costo de los insumos producidos fuera del establecimiento dado.

Cuadrante IV: Contiene el insumo directo de factores primarios en el consumo final, cuyos principales ejemplos son los servicios nacionales y los empleos del Gobierno. Estas transacciones no se incluyen en la mayoría de modelos interindustriales, pero se registran para la compatibilidad de totales.

Si cada mercancía se produce únicamente por un sector y no existen co-productos, la oferta total de la mercancía i es igual a la producción del sector i, más las importaciones de i.

B. Análisis Insumo-Producto en Economía

El análisis insumo-producto de Leontief, está referido a resolver el problema: ¿Qué nivel de producción debe tener cada una de n industrias en una situación económica particular, tal que sea suficiente para que satisfaga exactamente la demanda total de la economía para este producto?

En el enfoque de Leontief, las actividades de producción en una economía se disgregan en n sectores de industrias, y la transacción de bienes entre los sectores es analizada. Sus supuestos básicos son los siguientes:

(1) Cada uno de los n sectores producen un solo tipo de bienes. Ampliamente interpretado, esto significa que los n sectores y los n bienes están en una correspondencia uno-a-uno. El sector que produce el i-ésimo bien es denotado por i.

(2) En cada sector, producción significa la transformación de varios bienes en algunas cantidades en un tipo simple de bien en alguna cantidad. Más aún este patrón de transformación insumo-producto se asume estable.

Intuitivamente, en un sistema de Leontief este patrón se asume de la forma siguiente: Para producir una unidad de j-ésimo bien, C unidades del i-ésimo bien son necesarias como insumos para i=1,2...,n, en el sector j, y λ unidades de producto del j-ésimo bien requieren λt_{ij} unidades del i-ésimo bien. Las cantidades t_{ij} son los llamados coeficientes de insumo y son usualmente consideradas como constantes.

Sea x_i la producción del i-ésimo bien por una unidad fija de tiempo. Parte de esta producción bruta es consumida como insumos necesarios para las actividades de producción de los n sectores así

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

unidades del i-ésimo bien es consumida en actividades de producción, por lo que

$$d_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

unidades del i-ésimo bien forman la producción neta. Esta producción neta es normalmente llamada demanda final del i-ésimo bien. En forma alternativa, d_i puede pensarse como la contribución del sector abierto de la economía, donde los salarios laborales, etcétera, son tomados en cuenta.

Si x y d denotan los vectores con n componentes x_i y d_i, respectivamente, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$(I-T)x=d$$

La matriz de coeficientes A=I-T de este sistema de ecuaciones lineales está evidentemente en Z^{nxn}. Las matrices en Z^{nxn} son a menudo llamadas matrices del tipo Leontief, o algunas veces, matrices esencialmente no positivas.

Entonces, resolviendo la ecuación matricial anterior para x, si I-T es no singular

$$x=(I-T)^{-1}d$$

El modelo descrito anteriormente se clasifica como un modelo insumo-producto estático, o sea independiente del tiempo (se supone que toda actividad ocurre simultáneamente), y abierto, en el cual la fuerza de trabajo y los consumidores se consideran exógenos al proceso productivo.

Asociado al modelo abierto estático insumo-producto se tiene el modelo dual de precios y valores agregados. La matriz T de coeficientes tecnológicos puede ser utilizada para determinar los valores agregados durante el proceso de producción. Sea P_i el precio de una unidad del i-ésimo artículo, entonces el costo de todos los insumos usados para la producción de una unidad del j-ésimo artículo es

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}p_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Así

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} t_{ij}p_i$$

es el valor agregado por unidad de producto, v_j. Entonces, si p denota el vector con entradas p_j y v denota el vector con entradas v_j, las relaciones entre ellos están descritas en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p^t-p^tT=v^t$$

o

$$p^tA=v^t$$

donde A=I-T. El vector p es llamado el vector de precios y el vector v es llamado vector de valor agregado asociado del modelo abierto de Leontief. Obviamente $v \geq 0$ y los economistas se interesan en soluciones $p \geq 0$.

Una relación entre los modelos primal y dual del sistema abierto de Leontief está dada por

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = \sum_{j=1}^{n} p_j d_j$$

que se puede interpretar por el siguiente enunciado económico: El ingreso nacional y el producto nacional son iguales.

Definición(4.1): Un modelo abierto de Leontief con matriz tecnológica (o de insumos) T se dice es factible si el sistema

$$(I-T)x=d$$

tiene una solución no-negativa para el vector producción x, para cada vector demanda d. Además el modelo es rentable si el sistema

$$p^t-p^tT=v^t$$

tiene una solución no-negativa para el vector de precios p, para cada vector de valor agregado v.

<u>Teorema</u> (4.1): Considere un modelo abierto de Leontief con matriz tecnológica T y sea A=I-T. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) El modelo es factible.

(2) El modelo es rentable.

(3) A es una matriz-M no-singular.

<u>Demostración</u>: Se probará que (1) y (3) son equivalentes. Si (1) se cumple, entonces por ser el vector de demanda d positivo, se sigue que A satisface: Existe $x>0$ con $Ax=d\gg 0$. Pero esta es la condición I_{28} del teorema (3.4), que caracteriza las matrices-M no-singulares. Entonces (3) se cumple para $A\in Z^{nxn}$. Conversamente, si (3) se cumple, entonces por la condición N_{38} del teorema (3.4), $A^{-1}\geq 0$. Así el sistema de ecuaciones tiene una solución no-negativa $x=A^{-1}d$, para cada $d\geq 0$, por lo que (1) se cumple. La equivalencia entre (2) y (3) es establecida de una manera similar usando el hecho que A es no-singular si y sólo si lo mismo es verdadero para A^t.

El teorema (4.1) puede ser enunciado de otra forma al considerar las 50 caracterizaciones de una matriz-M no-singular, de la forma siguiente:

<u>Teorema</u> (4.2): Considere un modelo abierto de Leontief con matriz tecnológica T y sea A=I-T. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) El modelo es factible.

(2) El modelo es rentable.

(3) A satisface una (y todas) las condiciones de (A_1) a (Q_{50}) del teorema (3.4).

A continuación se presentan algunas ideas sobre el modelo cerrado insumo-producto de Leontief.

Si el sector externo del modelo abierto insumo-producto es absorbido en el sistema como otra industria, entonces el sistema será un sistema cerrado. En este modelo, la demanda final y el insumo primario no aparecen; en su lugar aparecen los requerimientos de insumo y el producto de la nueva industria concebida. Aquí todos los bienes pueden ser intermedios en su naturaleza, de aquí que cada artículo es producido sólo para los requerimientos de insumo de los sectores o industrias dentro del modelo mismo.

De este modo, en el sistema cerrado insumo-producto, el consumidor o sector abierto será considerado como un sector productivo. En esta formulación particular del modelo cerrado, los "insumos" del sector abierto son varios bienes de consumo y servicios, y su "producto" es trabajo. En este sistema, la demanda final y los elementos, tales como el empleo y la tasa de salarios son tratados como incógnitas y sus valores de equilibrio son resueltos simultáneamente con el resto de las variables.

Debido a que no hay variables determinadas desde fuera del sistema, el modelo trata de responder una nueva pregunta: Dada una tecnología de producción ¿Cuáles son los niveles de equilibrio de producción y de precio para que no haya demanda insatisfecha?. Se tiene la ecuación Ax=d, del modelo anterior, donde x_i es la producción del i-ésimo sector y d_i es la demanda del i-ésimo sector. Estas demandas finales serán, ahora, consideradas como insumos del sector consumo. Cada componente d_i de d es ahora relativa a un nivel de empleo ξ, de modo que los consumidores adquieren una cantidad d_i que varía con el nivel de empleo ξ. Para obtener lo anterior, se definen los coeficientes técnicos fijos c_i por:

$$c_i=d_i/\xi$$

de tal forma que

$$d_i=c_i\xi$$

entonces, asumiendo que el modelo abierto original consta de n-1 sectores, las relaciones insumo-producto en el modelo cerrado serán descritas por las n-1 ecuaciones simultáneas

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} x_j + c_i, \quad i = 1, \ldots, n-1. \qquad \text{(I)}$$

Ahora el abastecimiento total del trabajo, esto es, el nivel de empleo ξ, es la suma del trabajo usado por cada sector:

$$\xi = \sum_{i=n}^{n} L_i$$

donde L_i es la cantidad de trabajo utilizado por el sector y, donde i=n es el sector de consumo. Definimos ahora los coeficientes de insumo del trabajo fijo k_i,

$$k_i = L_i / x_i \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad k_n = L_n / \xi$$

entonces el suministro total del trabajo puede ser expresado en términos de la relación lineal

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j + k_n \xi \qquad \text{(II)}$$

entonces con el sistema de ecuaciones lineales (I) t tomado (II) como última ecuación, se tiene:

$$x_1 = t_{11} x_1 + \ldots . t_{1n} x_{n-1} + c_1$$

$$x_2 = t_{21} x_1 + \ldots . t_{2n} x_{n-1} + c_2$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$x_{n-1}=t_{n-1,1}x_1+\ldots.t_{n-1,n}x_{n-1}+c_{n-1}$$

$$\xi=k_1x_1+\ldots.k_{n-1}x_{n-1}+k_n\xi$$

el cual en forma matricial es

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & . & . & t_{1,n-1} & c_1 \\ t_{21} & . & . & t_{2,n-1} & c_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ t_{n-1,1} & . & . & t_{n-1,n-1} & c_{n-1} \\ k_1 & . & . & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}$$

Por conveniencia se utilizará la notación:

$$t_{in}=c_i, \quad i=1,\ldots,n-1;\ t_{nj}=k_j \quad j=1,\ldots,n.$$

y también se define

$$x^t=(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)^t,\ x_n=\xi$$

de donde, las relaciones insumo-producto para el modelo cerrado son descritas por el sistema de ecuaciones lineales

$$x=Tx \quad \text{(III)}$$

y T es llamada la matriz de insumo para el modelo. Sea A=I-T, el sistema (III) puede escribirse como

$$Ax=0 \qquad \text{(IV)}$$

de donde el sistema (IV) tiene una solución única x=0 ó tiene infinitas soluciones; como en el modelo anterior, estamos interesados en soluciones donde las x_i son todos no negativos y, en este caso, positivos.

En este modelo cerrado insumo-producto de Leontief se toman en cuenta los factores de demanda como factores de suministro. En cierto sentido, el nivel de empleo ξ representa la demanda final sobre el sistema.

Esta demanda no es dada, pero es determinada como las otras variables de suministro, las producciones totales x_i de cada una de las n-1 industrias originales. Entonces para resolver la demanda final ξ, y para los requerimientos de producciones x_i simultáneamente, el modelo cerrado toma en cuenta el impacto de la demanda sobre los suministros y la de los suministros sobre la demanda. Entonces los niveles de producción de equilibrio calculadas sobre el modelo cerrado, no sólo incorporan las producciones requeridas para conocer el cambio en la demanda final que es inducida en la producción.

Sea x un vector de producción de este sistema. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

es la cantidad del i-ésimo bien necesario como insumo para obtener la producción buscada, $y=Tx$ es el vector de insumos. Pero desde que el vector x produce únicamente insumos, el sistema no puede operar a menos que $y \leq x$. Más aún, los procesos de producción serán asumidos irreversibles desde que x es necesariamente no-negativo y, en efecto, positivo en nuestro caso.

<u>Definición</u> (4.2): Un modelo cerrado de Leontief con matriz de insumos T es factible si existe algún x tal que $Tx \leq x$, $x \geq 0$. Este x, si existe, es llamado una solución factible de producción para el modelo.

<u>Definición</u> (4.3): Un vector x es llamado un vector de equilibrio de producción si, y sólo si, el sistema homogéneo (IV) tiene una solución positiva, es decir, si $Ax=0$, $x>>0$ es consistente. En este caso, el modelo es, entonces, factible. Un modelo factible no tiene necesariamente un vector de equilibrio de producción.

<u>Definición</u> (4.4): Se dice que una matriz A es una matriz-M con propiedad "c" si se tiene que A tiene una representación $A=sI-B$, con $s>0$, $B \geq 0$, donde las potencias de B/s convergen en una matriz.

Teorema (4.3): Un modelo cerrado de Leontief con matriz de insumo T es factible si y sólo si A=I-T es una matriz-M con propiedad "c".

Demostración: El modelo es factible sólo si $Ax \geq 0$ para $x >> 0$. Por otra parte, como $A \in Z^{nxn}$, se tiene que A es una matriz-M con propiedad "c".

Lema (4.5): Supóngase que la matriz de insumos T de un modelo cerrado de Leontief es irreducible y sea A=I-T. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) El modelo es factible.

(2) El modelo tiene un vector de equilibrio de producción que es único y con múltiplos escalares positivos.

(3) A es una matriz-M con propiedad "c".

Demostración:

(1)$\Rightarrow$(3): Se establece del teorema (4.3).

(3)$\Rightarrow$(2): Asumiendo que (3) se cumple, existe $x >> 0$ con $Ax=0$. Pero como T es irreducible y $Tx=x$, se tiene que x es único con múltiplos escalares, por el teorema de Perron-Frobenius se obtiene 2.

(2)$\Rightarrow$(1): Es clara de las definiciones (4.2) y (4.3).

Teorema (4.6): Sea T una matriz de insumo para un modelo cerrado de Leontief y supóngase que PTP^t tiene una matriz reducida a una forma triangular de bloques. Sea

$A=I-PTP^t$, entonces el modelo es factible si y sólo si A es una matriz-M para cada i, $1\leq i\leq k$, A_{ii} singular$\Rightarrow T_{ij}=0, \forall i\neq j$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Asumamos que el modelo es factible, por lo que se tiene que A es una matriz-M por el teorema (4.3) y existe un vector $x=(y_1,\ldots,y_k)^t>>0$, tal que $PTP^tx>>0$, entonces $A_{ij}=I-T_{ij}$,

$$\sum_{j<i} A_{ij}y_j \geq 0, \quad 1\leq i\leq k. \qquad \text{(VI)}$$

Debido a que A_{ij}, $\forall j<i$, se sigue que $A_{ii}y_i\geq 0$, $1\leq i\leq k$. Pero como A_{ii} es singular, entonces $A_{ii}y_i=0$, debido a que A_{ii} es irreducible, se sigue que $A_{ij}y_j=0$, $\forall i>j$, ya que $A_{ij}\leq 0$. De aquí que $A_{ij}=0$, $\forall i\neq j$, y es consecuentemente $T_{ij}=A_{ij}=0$, $i\neq j$, cumpliéndose así (V).

($\Leftarrow$) Asumimos que $A=I-PTP^t$ es una matriz-M y que (VI) se cumple. Si A_{ii} es singular, entonces por construcción, A_{ii} es una matriz-M singular e irreducible y como tal, existe $y_i\geq 0$ para el cual $A_{ii}y_i=0$. Similarmente, si A_{ii} es no-singular debida a que A es una matriz-M, de aquí que exista $y_i>>0$ para los cuales $A_{ii}y_i>>0$. Asumiendo que (V) se cumple, se sigue que los y_i pueden ser ordenados $x=(y_1,\ldots,y_k)$, satisfaciendo $x>>0$ y que (VI) se cumple.

Entonces $Ax>>0$ y $PTP^tx\leq x$, por lo que en consecuencia, $T(P^tx)\leq P^tx$, $P^tx>>0$, y así el modelo es factible.

Teorema (4.7): Sean T y A como en el teorema anterior. Entonces el modelo tiene un vector de equilibrio si y sólo si se tiene que, si A es una matriz-M y para cada i, $1 \leq i \leq k$,

A_{ii} es singular si y sólo si $T_{ij}=0$, $\forall i \neq j$. (VIII)

Demostración: Si el modelo tiene un vector de equilibrio de producción, entonces el modelo es factible y, por el teorema anterior, se concluye que A es una matriz-M que satisface (V). Suponiendo ahora que i es un índice tal que $T_{ij}=0, \forall i \neq j$. De lo anterior, y debido a lo supuesto, existe un vector $x=(y_1,\ldots,y_k)^t >> 0$, tal que $Ax=0$. Entonces, $A_{ii}y_i=0$, y, por lo tanto, A_{ii} es singular estableciendo, de esa manera (VIII).

Para el converso, se asume que A es una matriz-M y que (VIII) se cumple. Supóngase inicialmente que i es un índice tal que A_{ii} es singular. Por lo anterior, se puede considerar $y_i >> 0$ tal que $A_{ii}y_i=0$, debido a que A_{ii} es una matriz-M singular irreducible. Además $A_{ij}=0$, para todo $i \neq j$ en (VIII). Se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que los bloques A_{ii} han sido ordenado de tal manera que son todos los bloques singulares en la diagonal de A. Sea $y_i >> 0$ tal que $A_{ii}y_i=0$, $i=1,\ldots,g$. Ahora, si $g=k$ entonces el resultado se obtiene. Si $k>g$, se define

$$y_h = A^{-1}{}_{hh}\sum_{j=1}^{h-1} A_{hj}y_j, \quad h = g+1,\ldots,k.$$

Consecuentemente, sea $x=(y_1,...,y_k)$, es evidente que $x>>0$ y $Ax=0$, por lo que $TP^t x=P^t x$ y $P^t x$ es un vector de equilibrio de producción para el modelo.

C. Una Aplicación Simple

A manera de ejemplo, considérese una economía hipotética y simple que consiste en tres vectores: (1) agricultura, (2) manufacturas, y (3) servicios. Cada uno de los sectores produce sólo el tipo de producto: agrícolas, bienes manufacturados y servicios. En este caso, por facilidad, no se considerarán las importaciones, ni el sector gobierno y tampoco el capital en equipo. Se considerará un modelo abierto y estático de Leontief.

A continuación se presenta la tabla del flujo de bienes y servicios. Las cantidades están en unidades monetarias.

Producto a	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Insumo de	Agricultura	Manufactura	Servicios	Demanda Externa	Producto Bruto
(1) Agricultura	15	20	30	35	100
(2) Manufactura	30	10	45	115	200
(3) Servicios	20	60	0	70	150

Aquí, un dato en cualquier fila muestra la distribución de insumos a varios sectores, mientras los datos en columna indican las cantidades de insumos necesarios por cada sector para la producción.

Notación: x_i: Producción bruta del sector i.

x_{ij}: Ventas del sector i al sector j.

d_i: Demanda final sobre el sector i.

Evidentemente, la relación básica que muestran las filas de la tabla anterior es

$$x_i=x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+d_i,\ i=1,2,3.$$

Sea t_{ij} el coeficiente de insumos indicando la cantidad de producto i necesaria para producir una unidad de producto del bien j. Se tiene entonces

$$t_{ij}=x_{ij}/x_j,\quad 1\leq i,j\leq 3.$$

Con estos coeficientes de insumo se construye la tabla técnica de insumo-producto:

Producto a / Insumo de	(1) Agricultura	(2) Manufactura	(3) Servicios
(1) Agricultura	0.15	0.10	0.20
(2) Manufactura	0.30	0.05	0.30
(3) Servicios	0.20	0.30	0.00

Entonces, rescribiendo la relación básica anterior se tiene:

$$x_i=t_{i1}x_{i1}+t_{i2}x_{i2}+t_{i3}x_{i3}+d_i,\ i=1,2,3.$$

Entonces, haciendo $T=(t_{ij})$, se tiene

$$T=\begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.00 \end{bmatrix}$$

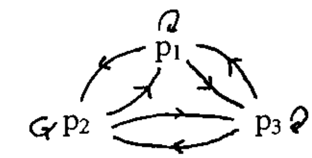
de donde la matriz A=I-T está dada por

$$A=\begin{bmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.20 & -0.30 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que la matriz A es una matriz en Z^{3x3}, y aún más, por la definición(3.3) A es una matriz-M. Aplicando la condición (L_{33}) del teorema (3.4), se tiene que la matriz A asociada está dada por

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A es irreducible. En efecto, considerando el teorema (2.3.2), se encuentra el grafo asociado a la matriz A.



Este grafo es simplemente conexo, lo que implica la irreducibilidad y posterior invertibilidad de la matriz A (Teorema (3.4)); además, por el teorema (4.1) tenemos que el modelo es factible y rentable. La inversa de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2670 \end{bmatrix}$$

y por la condición (N_{38}) del teorema (3.4) sabemos que A^{-1} existe y $A^{-1} \geq 0$. Entonces para cualquier vector demanda $d \geq 0$, el vector propio x será no-negativo.

D. Modelos de crecimiento equilibrado

En un sistema dinámico, equilibrio económico significa una solución estacionaria, la que se repetirá sin cambio a través del tiempo. Es decir, un sistema dinámico estará en equilibrio si las fuerzas involucradas, tales como las cantidades y precios están balanceadas, de tal manera que no requerirán de cambios futuros. El crecimiento equilibrado no involucra una solución estacionaria, sino una en la cual, cantidades comparables crecen a la misma tasa constante, manteniendo fijas sus proporciones. El prototipo es para algún $0 < y \in R^{n \times 1}$, $\alpha > 1$

$$y(t)=\alpha^t y,\ t=0,1,2,...$$

1. Un modelo abierto y dinámico de insumo-producto

En el modelo estático abierto de insumo-producto con el modelo dual de evaluación de precios se tenía

$$x=Tx+d \;\text{ y }\; p=pT+v$$

Suponga que $(I-A)^{-1}$ es una matriz-M no singular. Sean

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & V_n \end{bmatrix}$$

Si y_j es el ingreso del j-ésimo sector $y_j=v_jx_j$, y para el vector columna y de ingresos sectoriales, $y=Vx$.

Sea $c_{ij}\geq 0$ la porción de ingreso (i.e., valor agregado) de una unidad de producto del sector j usada para comprar el producto del sector i. Los c_{ij} son las llamadas propensiones al consumo, y se suponen constantes a través del tiempo. Suponiendo que existen ganancias, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1, \quad \forall j \qquad \text{(I)}$$

Las suposiciones básicas en la formulación de un modelo dinámico de propagación del ingreso serán:

(i) El gasto de ingreso sectorial se retrasa a su recibo por un período.

(ii) Existe un vector de ingresos del tiempo de gasto exógeno $e(t)>>0$.

Si $y(t)$ es el vector de ingresos sectoriales en el tiempo t, el vector en el tiempo t+1 de gasto total es

$$Cy(t)+e(t+1),$$

el vector de demanda final (cantidades) es

$$P^{-1}(Cy(t)+e(t+1)),$$

el vector de producto interno bruto es

$$(I-T)^{-1}\,P^{-1}(Cy(t)+e(t+1)),\ y$$

$$y(t+1)=V(I-T)^{-1}\,P^{-1}(Cy(t)+e(t+1)),$$

$$y(t+1)=By(t)+a(t) \qquad \text{(II)}$$

donde

$$B=V(I-T)^{-1}C\geq 0,\ y$$

$$a(t)=V(I-T)^{-1}P^{-1}e(t+1).$$

Para un vector inicial dado $y(0)\geq 0$, se tiene $y(t)\geq 0$, t=1,2,....Examinemos la propagación de $y(t)$ bajo el supuesto que $a(t)=\rho^t a$, donde $\rho I-B$ es una matriz-M no-singular y a es un vector arbitrario no-negativo. Sean $y=(\rho I-B)^{-1}$ a y $\hat{y}=\rho^t y$ Claramente $\hat{y}\geq 0$, de hecho es una solución de (II). Por otra parte,

$$\hat{y}(t+1) - B\,y(t) = (\rho^{t+1}I - \rho^{t}B)y = \rho^{t}(\rho\hat{I} - B)(\rho I - B)^{-1}a = \rho^{t}a = a(t).$$

Esta solución, por supuesto, exhibe un crecimiento equilibrado.

Por otra parte, se cumple que, comenzando con un y(0)>0 arbitrario, la solución de crecimiento equilibrado obtenida con anterioridad será aproximada eventualmente por la solución y(t) de (II) determinada por y(0), i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{\rho^{t}} = y$$

En efecto, se debe observar que $y = (\rho I - B)^{-1}a$ implica que $(\rho I - B)y = a$, así como $\rho y = By + ay$, y $y = \frac{1}{\rho}By + \frac{1}{\rho}a.$

Para cualquier solución y(t) de (II), dividiendo entre ρ^{t+1} se obtiene

$$\frac{y(t+1)}{\rho^{t+1}} = \frac{1}{\rho}\frac{By(t)}{\rho^{t}} + \frac{1}{\rho}a.$$

Restando y, se tiene

$$\frac{y(t+1)}{\rho^{t+1}} - y = \frac{1}{\rho}B\left(\frac{y(t)}{\rho^{t}} - y\right).$$

Sea $Z(t) = \frac{y(t)}{\rho^{t}} - y$; se tiene $Z(t+1) = \frac{1}{\rho}BZ(t), \forall t = 1,2,\ldots$, de lo que se sigue que

$$Z(t) = \left(\frac{1}{\rho}B\right)^{t} Z(0), \forall t = 1,2,\ldots$$

Como ρI-B es una matriz-M no singular, ρ>ρ(B), y el radio espectral de $\frac{1}{\rho}B$ es menor que 1. Ahora, $(\frac{1}{\rho}B)^t \to 0$, por lo que $Z(t) \to 0$.

Puede mostrarse que para a>0, una solución de crecimiento equilibrado con $a(t)=\rho^t a$ es posible sólo si ρI-B es una matriz-M no-singular. La mayor cota inferior de tal ρ es el radio espectral ρ(B). Así, para mantener una situación de crecimiento equilibrado, la tasa de crecimiento común de gastos exógenos y de ingreso sectorial endógeno no puede ser arbitrariamente bajo.

2. Un modelo dinámico cerrado de insumo-producto

Suponga que no hay gasto exógeno en el modelo anterior: e(t)=0, t=0,1,2,..., lo cual define un modelo cerrado. Nuestro modelo

$$y(t+1)=By(t), t=0,1,2,... \qquad \text{(III)}$$

tiene una solución de crecimiento equilibrado $\hat{y}(t) = \lambda^t y$, para $\lambda = \rho(B)$ y $\hat{y} > 0$ un eigenvalor asociado con ρ(B). Cada solución de crecimiento equilibrado tiene la forma $y(t)=\lambda^t$ y para algún eigenvector λ, $0 \leq \lambda \leq \rho(B)$, y con y un eigenvector semipositiva y asociado a $\hat{y}$ (Si B es irreducible, no hay tales $y \neq \hat{y}$). Si e=(1,...,1), entonces

$$eB=eV(I-T)^{-1}P^{-1}C=V(I-T)^{-1}P^{-1}C=PP^{-1}C=eC\leq\gamma e,$$

donde por (I),

$$\gamma = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} < i$$

así para y>0,

$$Be(y)=eBy\leq\gamma ey<ey.$$

Por otra parte, $\rho(B)<1$. Por lo anterior, $\hat{y} \to 0$, por lo que no es posible una solución de crecimiento equilibrado.

3. Modelo de optimización de crecimiento económico

A continuación se presenta el planteo del problema de crecimiento óptimo de un modelo de Leontief para un sistema económico. Para un estudio más profundo del tema, en González de Paz (1990), se encuentran las condiciones de recurrencia de los problemas dual y primal y las interpretaciones económicas respectivas.

3.1 El problema primal

El primal del problema de crecimiento óptimo es un problema de programación lineal aplicado al estudio del crecimiento económico de un sistema dinámico de Leontief con n sectores de producción: Dado un vector c de ponderaciones o precios ajustados al período T, la matriz de coeficientes de capital-producto B, la matriz de insumo-producto A y el vector x_0 de producciones en el período 0, se busca la sucesión o trayectoria de vectores de producción (x_t), $t=0,1,...,T$, tal que se minimice el producto escalar (c,x_t) bajo las restricciones:

(i) $B(x_{t+1}-x_t)\leq(I-T)x_t$, $t=0,1,...,T-1$.

(ii) $x_t\geq 0$, $t=0,1,...,T-1$.

Introduciendo un vector de variables de holgura, el cual puede interpretarse, ya sea como un vector de demandas exógenas al sistema, o como un vector de excedentes de producción, se convierte el sistema de inecuaciones en uno de ecuaciones.

En este caso se tiene:

$$B(x_{t+1}-x_t)=(I-T)x_t-d_t,\ t=0,1,...,T-1.$$

donde $0\leq d_t\leq D_t$. Los vectores D_t tendrán como componentes las cotas superiores de las demandas sectoriales (vectores de disponibilidad) y estarán en función de las capacidades de producción.

Definamos las matrices:

$$W=(I-T)^{-1}B \ \text{ y } \ U=(I-T)^{-1}$$

de manera que el sistema de ecuaciones se escribe:

$$W(x_{t+1}-x_t)=x_t-Ud_t,\ t=0,1,...,T-1 \qquad \text{(I)}$$

El vector $u_t=Ud_t$ puede interpretarse como el vector de producción requerido para satisfacer la demanda exógena d_t. A continuación se plantea el problema de control óptimo:

Problema: Encontrar las trayectorias de vectores de producción y de demanda (x_t), $t=0,1,2,...T$ y (d_t), $t=0,1,...,T-1$, tales que la expresión (c,x_t) sea maximizada y de forma que se cumplan las ecuaciones de recurrencia:

$$Wx_{t+1}=(I+W)x_t-Ud_t,\ t=0,1,...,T-1$$

y las restricciones

$$0\leq d_t\leq D_t,\ t=0,1,...,T-1. \quad \text{(II)}$$

Según la terminología de la teoría de control óptimo, los vectores x_t y d_t serían las variables de estado y control, respectivamente.

3.2 El problema dual

Si se introducen las familias de multiplicadores de Lagrange (p_t), $t=0,1,...,T$, y (λ_t), $t=0,1,...,T-1$, correspondiente a las restricciones (I) y (II), respectivamente, se puede construir el Lagrangiano:

$$L(x,u;p,\lambda)=(c,x_t)+\sum_{t=0}^{T-1}(p_{t+1},(I+W)x_{t+1}-Wx_t-Ud_t)+\sum_{t=0}^{T-1}(\lambda_t,D_t-d_t)$$

Reordenando términos se obtiene:

$$L(x,u;p,\lambda)=((I+W^T)p_1,x_0)+\sum_{t=0}^{T-1}(\lambda_t,D_t)+((c-W^T)p_t,x_t)+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}((I+W^T)p_{t+1}-W^Tp_t,x_t)+\sum_{t=0}^{T-1}(-U^Tp_{t+1}-\lambda_t,d_t).$$

Lo anterior motiva a definir el problema dual:

Problema: Encontrar las trayectorias de vectores de estado dual y de control dual (p_t), $t=1,2,\ldots,T-1$, tales que se minimice la expresión:

$$((I+W^T)p_1, x_0) + \sum_{t=0}^{T-1}(\lambda_t, D_t),$$

bajo las restricciones

(iii) $(I+W^T)p_{t+1}-W^t p_t$, $t=1,2,\ldots,T-1$

(iv) $W^T p_t=c$

(v) $-U^t p_{t+1}-\lambda_t \leq 0$, $t=0,1,\ldots,T-1$

(vi) $\lambda_t \geq 0$, $t=0,1,2,\ldots,T-1$.

Es un resultado clásico que si uno de los problemas primal o dual tiene un control óptimo, entonces el otro también lo tiene y los valores óptimos de las funciones objetivo de los problemas primal y dual son iguales. Asimismo, del punto de vista macroeconómico es sabido que si el problema primal se encuentra planteado en términos de producciones dual, se interpretará en términos de precios y valores agregados.

V. BIBLIOGRAFIA

Berberian, S. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory. New
1974 York, Springer Verlag. 345 pp.

Berman,A. & R. Plemmons. Nonnegative Matrices in the Mathematical
1979 Science. New York, Academic Press. 316 pp.

Carlson, D. Algunos tipos especiales de matrices y sus aplicaciones. Memorias
1982 V, CURCAM, Tegucigalpa, Honduras.

Chatelin, F. Spectral Aproximation of Linear Operators. New York, Academic
1983 Press. 458 pp.

Fedorenko,N. Desarrollo económico y planificación perspectiva. Moscú,
1976 Editorial Progreso. 280 pp.

Galperin,A. & Z. Waksman. An elementary approach to Jordan Theory. The
1980 American Mathematical Monthly. 87 (9): 728-732.

González de Paz, R. "Sobre un modelo de optimización de crecimiento
1990 económico. Lista de la asociación latino-iberoamericana de Investigación operativa (Brasil). Por aparecer.

Graham, A. Nonnegative matrices and aplicable topics in Linear Algebra.
1987 Chichester, Ellis Wood. 264 pp.

Halmos,P. Finite-Dimensional Vector Spaces. New York, Springer Verlag. 199
1974 pp.

Kolmogorov,A & S.Fomin. Elementos de la teoría de funciones y del Análisis
1975 Funcional. Moscú, Editorial Mir. 534 pp.

Roberts,W & D Varberg. Convex Functions. New York, Academic Press. 300
1973 pp.

Schaefer,H.H. Topological Vector Spaces. New York. Springer Verlag. 294 pp.
1971

APENDICE A

Convergencia de Operadores

Lineales Acotados

Definición (A.1): Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal, donde X e Y son espacios de Banach completos. Definimos

Dom(T):=$\{x \in X: Tx \in Y\}$, el Dominio de T;

Im(T):=$\{y \in Y:$ existe $x \in Dom(T)$ t.q. $y=Tx\}$, la imagen de T;

Ker(T):=$\{x \in X: Tx=0\}$, el espacio nulo o kernel de T;

T es acotado si y sólo sí $\|T\| = \sup\limits_{0 \neq x \in Dom(T)} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$;

L(X,Y) es el espacio de todos los operadores lineales acotados de X en Y. Con la norma $\|T\| = \sup\limits_{0 \neq x \in Dom(T)} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$, L(X,Y) es un espacio de Banach. Cuando X=Y, L(X,Y) es denotado L(X).

Sea $T \in L(X)$. El operador T es invertible si y sólo sí Ker(T)=0. Su inverso es denotado por T^{-1}.

Teorema (A.1): Sea $T \in L(X)$. El límite $\rho(T) = \lim\limits_{k \to \infty} \|T^k\|^{1/k} = \inf\limits_{k} \|T^k\|^{1/k}$ existe. Este es llamado el radio espectral de T.

Demostración: Sea $a_k = \log\|T^k\|$. A demostrar: $\frac{a_k}{k} \to b$ donde $b = \inf\limits_K \frac{a_k}{k}$.

Entonces $\|T^{m+k}\| \le \|T^m\| \cdot \|T^k\|$, dado que $a_{m+k} \le a_m + a_k$, para $m \in Z^+$, fijo, sea $k=mq+r$, donde $q \in Z^+$, y $0 \le r < m$. De lo anterior, $a_k \le qa_m + a_r$. y

$$\frac{a_k}{k} \le \left(\frac{q}{k}\right)a_m + \left(\frac{1}{k}\right)a_r$$

Si $k \to \infty$, para m fijo, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$. De aquí que $\lim\sup\limits_k \left(\frac{a_k}{k}\right) \le \frac{a_m}{m}$, donde m es arbitrario.

Entonces $\lim\sup\limits_k \left(\frac{a_k^k}{k}\right) \le b$.

Por otro lado, $\frac{a_k}{k} \ge b$, entonces se tiene que $\lim\inf\limits_k \left(\frac{a_k^k}{k}\right) \ge b$.

El teorema anterior muestra que $\rho(T) \le \|T^k\|^{1/k}$, $k \in Z^+$; en particular, que se cumple la desigualdad $\rho(T) \le \|T\|$.

Definición (A.2): Un operador T ta que $\rho(T)=0$ es llamado cuasi-nilpotente.

Teorema (A.2): Sea $T \in L(X)$, tal que $\|T\| < 1$. Entonces Im(I-T)=X, $(I-T)^{-1}$ existe, es acotada sobre X, y

$$(I-T)^{-1}=I+T+T^2+...+T^k+...$$

donde la serie converge en L(X), y $\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.

<u>Demostración</u>: Como $\|T\|<1$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k$ converge. Como $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty}T^k$ converge a L(X). Sea R su límite. RT=TR=$\sum_{k=0}^{\infty}T^{k+1}$; de aquí (I-T)R=R(I-T)=I, lo que prueba el teorema.

<u>Definición</u> (A.3): Sea $T:X\rightarrow Y$. El grafo de T, denotado G(T), se define como

$$G(T)=\{(x,Tx):x\in Dom(T)\}.$$

<u>Definición</u> (A.4): T es cerrado si y sólo si su grafo G(T) es un conjunto cerrado en XxY, con la topología del espacio producto. Se considera sobre XxY, la norma del producto

$$\|(x,y)_{XxY}\| = (\|x\|_x^2 + \|y\|_y^2)^{1/2}.$$

C(X,Y) es el conjunto de operadores cerrados de X en Y. Si X=Y, C(X) es una notación para C(X,X). $T\in C(X,y)$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}$, tal que $x_n\rightarrow x$, $x_n\in Dom(T)$ y $Tx_n\rightarrow y$ y $Tx=y$.

Definición (A.5): Si $T \in C(X)$, entonces para cualquier $z \in C$, $T-z \in C(X)$, donde z se entiende como zI. Definimos:

(i) El conjunto resolvente $p(T)=\{z \in C:(T-z)^{-1} \in L(X)\}$;

(ii) El operador resolvente $R(T,z)=(T-z)^{-1}$; $z \in p(T)$;

(iii) El espectro de T es el conjunto complementario, sobre C, de p(T). Notación: $\sigma(T)$.

Sea $T \in L(X)$, acotado y no vacío. Asumimos que $\lim_{k \to \infty} \|T^k\|^{1/k}$ existe y es igual al radio espectral de T, $\rho(T)$.

Teorema (A.3): Sea T acotado. Si $|z| > \rho(T)$, el resolvente R(z) existe y está dado por

$$R(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} x^{-k-1}$$

la cual converge en L(X).

Demostración: Para probar esta propiedad, debe considerarse la expresión $|z| > \rho(T) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, entonces $|z|^{-1} \|T^k\|^{1/k} \leq (\rho(T)+\varepsilon)^{-1}(\rho(T)+\varepsilon/2)$, y por consiguiente $\left\|(z^{-1}T)^k\right\| \le (\rho(T)+\varepsilon/2)^k(\rho(T)+\varepsilon)^k$. La serie $z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1}T)^k$ es entonces convergente en la norma de operadores cuando $|z| > \rho(T)$. Multiplicando por T-z ambos lados de la serie, se obtiene que la serie resultante será el resolvente R(z).

Corolario (A.4): Para un operador acotado T, $\rho(T)$ y $\sigma(T)$ son no vacíos y $\sigma(T)$ es compacto.

Corolario (A.5): Para $T \in L(X)$, $\rho(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Teorema (A.6): Dado $T \in L(X)$, tal que $\rho(T)<1$, R(I) existe y su expansión de Neumann

$$I+T+T^2+\ldots+T^k+\ldots=(I-T)^{-1}$$

converge en L(X).

Demostración: Por teorema (A.3) con z=1, si $\rho(T)<1$, R(I) existe y se tiene que $R(I)=(I-T)^{1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k$, la cual converge en L(X).