UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ECUACION DE PROPAGACION DE ONDAS GRAVITACIONALES EN EL VACIO

ADRIAN LICHT LICHT

GUATEMALA
1982

ECUACION DE PROPAGACION DE ONDAS GRAVITACIONALES EN EL VACIO

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ECUACION DE PROPAGACION DE ONDAS GRAVITACIONALES EN EL VACIO

ADRIAN LICHT LICHT

Trabajo de investigación presentado para optar al grado académico de licenciado en Física

GUATEMALA
1982

Vo. Bo. del asesor:

(f) ______________________________

Doctor Jorge Antillón

Tribunal:

(f) ______________________________

Doctor Jorge Antillón

(f) ______________________________

Licenciado Oscar Castañeda

(f) ______________________________

Licenciado Jose Luis Cofiño

Mes de aprobación: agosto de 1982

A todos aquellos que hicieron posible

la realización del presente trabajo

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN

Como consecuencia de la teoría de la relatividad general y de las ecuaciones de campo de Einstein se presentan las ondas gravitacionales como solución de estas últimas.

Einstein mismo encontró que existía una solución a las ecuaciones de campo, en las cuales una ondulación del espacio-tiempo se propaga a través del espacio vacío, a una velocidad igual a la de la luz.

En el presente trabajo se hace un estudio de dichas ecuaciones de propagación y sus soluciones. Para su realización se siguieron los lineamientos e ideas descritas por varios autores (ver bibliografía); sin embargo, se puso principal atención a las siguientes obras: "Gravitation" (de W. Misner, S. Thorne y A. Wheeler) y " An

Introduction to General Relativity (de S.K. Bose).

Es de hacer notar que este trabajo se centra básicamente en el tema de la ecuación de propagación de las ondas gravitacionales y no en la generación o detección de ellas; sin embargo, el material se presenta de forma tal que no es necesario el conocimiento específico acerca de la generación y detección de ondas para poder seguir el desarrollo hecho aquí. Por otra parte, a pesar de que en el desarrollo del tema se dan todas las herramientas necesarias para entenderlo, se recomienda la consulta de la bibliografía citada al final para facilitar la comprensión de la parte matemática.

El orden de presentación del material es el siguiente: en el capítulo II se define la notación y sistema geométrico de unidades utilizadas, el capítulo III desarrolla las herramientas matemáticas necesarias, en el capítulo IV se hace una presentación de la teoría linealizada de la gravitación; de esta forma se puede, entonces, tratar las soluciones de la ecuación de propagación de ondas gravitacionales en el vacío en el capítulo V. El capítulo VI presenta las conclusiones del trabajo a manera de resumen y, finalmente, en el capítulo VII se dan los datos bibliográficos del material utilizado.

II. NOTACIÓN Y SISTEMA GEOMÉTRICO DE UNIDADES UTILIZADAS

Para este trabajo se utilizaron los siguientes convenios de notación:

1. Los eventos se denotan por letras mayúsculas. Ej.: P, Q

2. Las coordenadas de un evento P se denotan por

$t(P)$, $x(P)$, $y(P)$, $z(P)$ o simplemente

t, x, y, z

o por:

$x^0(P)$, $x^1(P)$, $x^2(P)$, $x^3(P)$ o también por

x^0, x^1, x^2, x^3

o por:

$x^\mu(P)$ o x^μ

donde se entiende que el índice griego puede tomar uno de los siguientes valores: 0, 1, 2, 3

3. La coordenada temporal es $x^0(P)$

4. Las coordenadas espaciales son:

$$x^1(P),\ x^2(P),\ x^3(P)$$

o también se utiliza

$$x^j(P) \quad \text{o} \quad x^k$$

donde se entiende que el índice latino toma uno de los siguientes valores.

5. Otras coordenadas para el mismo evento P se denotan por:

$$x^{\bar{\alpha}} \quad \text{ó} \quad x^{\alpha'}$$

6. La transformación de un sistema coordenado a otro sistema se realiza por cuatro funciones

$$x^{\bar{\alpha}}(x^{\beta})$$

7. Se utiliza el convenio de suma de Einstein.

Ejemplo:

$$\frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}} \xi^{\beta} = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}} \xi^{\beta}$$

El sistema geométrico de unidades utilizado es aquel en el que la velocidad de la luz en el vacío, la constante de gravitación y la constante de Boltzman son todas iguales a la unidad.

III. TENSORES

A. Uno-formas

Un vector contravariante o uno-forma con cuatro componentes, V^{μ}, es un objeto geométrico que se transforma, bajo una transformación arbitraria de coordenadas

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'}$$

de la siguiente forma:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}$$

De la regla para diferenciación parcial se tiene, entonces, que:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

donde dx^{μ} es un vector contravariante o uno-forma.

B. Vectores covariantes

Un vector covariante con cuatro componentes, V_{μ}, es un objeto geométrico que se transforma bajo una transformación arbitraria de coordenadas

$$x_{\mu} \longrightarrow x_{\mu'}$$

de la siguiente forma:

$$V_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} V_{\nu}$$

En el presente trabajo se utilizará la siguiente notación:

a) en relatividad general: $\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = L^{\mu'}{}_{\nu}$

b) en relatividad especial: $\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$

Dado que

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\, x^{\beta} \qquad \text{y}$$

$$x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\, x^{\alpha'}$$

entonces

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\, \Lambda^{\beta}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'} \qquad \text{y}$$

$$\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\, \Lambda^{\alpha'}{}_{\gamma} = \delta^{\beta}{}_{\gamma}$$

C. Tensores

Un tensor mixto es un objeto geométrico con índices superiores $\mu, \nu, \ldots$ e índices inferiores $\alpha, \beta, \ldots$, se transforman como el producto de las uno-formas

$U^{\mu} x^{\nu} \ldots$, y los vectores covariantes $V_{\alpha} y_{\beta} \ldots$

Si un tensor no tiene índices superiores se dice que es covariante; si no tiene índices inferiores se dice que es contiovariante.

Ejemplo:

$$T_{\lambda'}{}^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\delta}{}_{\lambda'} T_{\delta}{}^{\alpha\beta} \qquad \text{(Tensor mixto)}$$

D. <u>Operaciones algebraicas:</u>

1. El tensor $T^{\mu\nu\ldots}{}_{\lambda\sigma\ldots}$ al multiplicarlo por el escalar "a" forma un nuevo tensor $a\,T^{\mu\nu\ldots}{}_{\lambda\sigma\ldots}$

2. Dos tensores con los mismos índices se pueden sumar para dar uno nuevo:

$$T_{\lambda}{}^{\mu\nu} + S_{\lambda}{}^{\mu\nu} = U_{\lambda}{}^{\mu\nu}$$

de 1 y 2 es claro que una

combinación lineal

$$a\, T_{\lambda\ldots}{}^{\mu\nu\ldots} + b\, S_{\lambda\ldots}{}^{\mu\nu\ldots} + \ldots$$

con $a, b, \ldots$ escalares es un tensor.

3. Multiplicando todas las componentes de un tensor con las de otro, se obtiene un nuevo tensor. Esta operación es el producto directo tensorial. Ejemplo:

$$L_{\lambda}{}^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu} S_{\lambda}{}^{\sigma}$$

4. La contracción de un tensor se define como la operación que consiste en igualar un índice inferior del tensor a uno superior y sumar sobre el índice ahora repetido.

5. El rango de un tensor se define como la cantidad total de índices que tenga un tensor. Nótese

que al contraer un tensor, se crea un nuevo tensor cuyo rango se ha reducido por dos.

Ejemplo:

$$T_\lambda{}^{\mu\lambda} = T_0{}^{\mu 0} + T_1{}^{\mu 1} + T_2{}^{\mu 2} + T_3{}^{\mu 3} = S^\mu$$

Nõtese que:

$$\delta^\mu{}_\nu \, T^{\dots\nu\dots}_{\dots\dots} = T^{\dots\mu\dots}_{\dots\dots} \qquad \text{y}$$

$$\delta_\nu{}^\mu \, T^{\dots\dots}_{\dots\mu\dots} = T^{\dots\dots}_{\dots\nu\dots}$$

E. <u>Bases de uno-formas y vectores</u>

Dado que tanto el conjunto de uno-formas como el de vectores forman, cada uno, un espacio sobre un campo de escalares, se pueden encontrar bases para cada uno de estos espacios. Se denotarã $\{\omega^\alpha\}$ a la base del espacio de uno-formas y $\{e_\alpha\}$ a la base del espacio de vectores.

De esta forma se puede, entonces, expresar una uno-forma $\boldsymbol{\sigma}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_\alpha \, \boldsymbol{\omega}^\alpha$$

Análogamente se expresa un vector $\mathbf{v}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} \equiv v^\alpha \, \mathbf{e}_\alpha$$

F. <u>El tensor métrico</u>

Se buscará ahora una operación, tal que su definición permita reemplazar un índice contravariante de un tensor por uno covariante o viceversa.

Esto se logra utilizando un tensor simétrico, de segundo rango, $g_{\mu\nu}$, con las siguientes propiedades:

1. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
2. $g_{\mu\nu} \, T_{\dots\dots}^{\dots\nu\dots} = T_{\dots\mu\dots}^{\dots\dots}$

para cualquier tensor arbitrario T.

Ejemplos:

1. $g_{\mu\nu} V^{\nu} = V_{\mu}$

2. $V_{\mu} V^{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$ (definición del producto interno)

$g_{\mu\nu}$ se conoce como tensor métrico.

El elemento de línea se define como la cantidad escalar, ds, de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$$

Nótese que en la teoría de la relatividad especial, con $\eta_{\mu\nu}$ como el tensor métrico el elemento de línea es

$$ds^2 = dr \cdot dr - dt^2$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$$

con

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que el elemento de línea tiene los signos $(- + + +)$.

Definimos los coeficientes de la métrica

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)$$

y definimos los coeficientes de la métrica contravariantes

$$g^{\alpha\beta} \equiv \| g_{\alpha\beta} \|^{-1}$$

por lo que

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$$

Sea

$$\langle \tilde{\mathbf{K}}, \mathbf{v} \rangle \equiv \text{número de superficies de } \tilde{\mathbf{K}} \text{ atravesadas por } \mathbf{V}.$$

Se tiene, por lo tanto, que

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$$

con $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ base de los vectores que determinan la base $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ de las uno-formas (base dual)

Nótese que

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \langle \nabla_\beta\, \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle$$

$$= \nabla_\beta \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle$$

$$= \nabla_\beta\, \delta^\beta{}_\alpha$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \nabla_\alpha$$

análogamente, si $\mathbf{v} = v^\beta \mathbf{e}_\beta$

$$\langle \omega^\alpha, \mathbf{v} \rangle = v^\alpha$$

por lo que es claro que

$$\langle \tilde{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_\alpha v^\alpha$$
$$= \text{contracción de } \tilde{\sigma} \otimes \mathbf{v}$$

Sea $\tilde{\mathbf{U}}$ la uno-forma correspondiente a $\mathbf{U}$, definida por

$$\langle \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v}$$

entonces

$$U_\alpha \equiv \langle \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_\alpha$$
$$= U^\beta \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha$$
$$= U^\beta g_{\beta\alpha}$$

Definimos los vectores de la "base coordenada" así

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}$$

G. <u>Derivada</u> <u>covariante</u>

Se define la derivada covariante de la siguiente forma.

$$(\nabla_u T)_{\text{en } p(0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{T[p(\varepsilon)]_{\text{transportado paralelamente a } p(0)} - T[p(0)]}{\varepsilon} \right]$$

(ver figura 1)

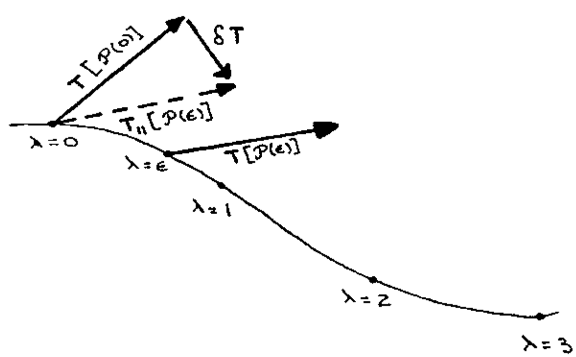

FIGURA 1

$$U \equiv \frac{dP}{d\lambda}$$

$$\delta T \equiv T_{\parallel}[P(\epsilon)] - T[P(0)]$$

$$\therefore \quad \nabla_u T \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\delta T}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{T_{\parallel}[P(\varepsilon)] - T[P(0)]}{\varepsilon} \right\}$$

Nótese que

$\nabla_u T = 0$ ssi T es transportado paralelamente a lo largo de $U = \frac{dP}{d\lambda}$

Se define ∇T como una máquina lineal que da $\nabla_u T$ cuando U se incerta en la última casilla

$$\nabla T(\underbrace{\ldots\ldots,}_{\text{uno-formas}}\underbrace{\ldots\ldots,}_{\text{vectores}} U) \equiv \nabla_u T$$

En un marco local de Lorentz las componentes de ∇T se definen como $T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$.

Si $\{e_\beta(P)\}$ varia de punto a punto en forma continua y suave, y $\{\omega^\alpha(P)\}$ es su base dual, entonces

$$\nabla T = \nabla (T^{\beta}{}_{\alpha}\, e_\beta \otimes \omega^\alpha)$$

Donde, en general

$$S = U \otimes V \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= U^\alpha V^\beta \\ T^{\alpha}{}_{\beta} &= U^\alpha V_\beta \\ T_{\alpha\beta} &= U_\alpha V_\beta \end{aligned}$$

por lo que

dado

$$\nabla_u T = \nabla_u (T^{\beta}{}_{\alpha}\, e_\beta \otimes \omega^\alpha)$$

se tiene

$$\nabla_U T = (\nabla_U T^{\beta}{}_{\alpha})\, e_{\beta} \otimes \omega^{\alpha} + T^{\beta}{}_{\alpha}\, (\nabla_U e_{\beta}) \otimes \omega_{\alpha} +$$
$$+ \; T^{\beta}{}_{\alpha}\, e_{\beta} \otimes (\nabla_U \omega^{\alpha})$$

y dado que

$U = U^{\gamma} e_{\gamma}$ y la linealidad en ∇_U en U

$\nabla_U = U^{\gamma} \nabla_{\gamma}$

obtenemos

$$\nabla_U T = U^{\gamma} \Big\{ T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}\, e_{\beta} \otimes \omega^{\alpha} + T^{\beta}{}_{\alpha}\, (\nabla_{\gamma} e_{\beta}) \otimes \omega^{\alpha} +$$
$$+ \; T^{\beta}{}_{\alpha}\, e_{\beta} \otimes (\nabla_{\gamma} \omega^{\alpha}) \Big\} \qquad \text{(III. 1)}$$

Se define

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \equiv \langle \omega^{\alpha}, \underbrace{\nabla_{\gamma}}_{\nabla_{\gamma} \equiv \nabla e_{\gamma}} e_{\beta} \rangle \quad \text{(coeficientes de conexión)}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{la componente } \alpha \text{ del cambio en } e_{\beta} \text{ relativo} \\ \text{al transporte paralelo a lo largo de } e_{\gamma} \end{pmatrix}$$

A los coeficientes de conexión también se les conoce como símbolos de Christoffel

Además:

$$\langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$$

$$\nabla_\gamma \langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \partial_{e_\gamma} \langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = 0$$

pero

$$\langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \text{contracción de } \omega^\alpha \otimes e_\beta$$

entonces

$$0 = \nabla_\gamma (\text{contracción de } \omega^\alpha \otimes e_\beta)$$

$$= \text{contracción de } \nabla_\gamma \omega^\alpha \otimes e_\beta$$

$$= \text{contracción de } \left[(\nabla_\gamma \omega^\alpha) \otimes e_\beta + \omega^\alpha \otimes (\nabla_\gamma e_\beta)\right]$$

$$0 = \langle \nabla_\gamma \omega^\alpha, e_\beta \rangle + \langle \omega^\alpha, \nabla_\gamma e_\beta \rangle$$

por lo que

$$-\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \langle \nabla_\gamma \omega^\alpha, e_\beta \rangle$$

y entonces, dado

$$\nabla_\gamma e_\beta = \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\, e_\mu \qquad \text{y}$$

$$\nabla_\gamma \omega^\alpha = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\, \omega^\mu$$

se obtiene

$$\nabla_U T = U^\gamma \{ T^\beta{}_{\alpha,\gamma}\, \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha + \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} T^\beta{}_\alpha\, \mathbf{e}_\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha +$$

$$- \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} T^\beta{}_\alpha\, \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\mu \}$$

renombrando índices mudos

$$\nabla_U T = U^\gamma \{ T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu \}\, \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha$$

se define, entonces

$$T^\beta{}_{\alpha;\gamma} = T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu$$

como las componentes del gradiente.

La derivada covariante se puede reescribir así:

$$\nabla_U T = (T^\beta{}_{\alpha;\gamma}\, U^\gamma)\, \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha$$

$$D T^\beta_\alpha / d\lambda \equiv \text{componentes de } \nabla_U T$$

$$\frac{D T^\beta_\alpha}{d\lambda} \equiv T^\beta{}_{\alpha;\gamma} U^\gamma = T^\beta{}_{\alpha;\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\lambda}$$

$$= (T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \text{"}\Gamma T\text{" correcciones}) \frac{dx^\gamma}{d\lambda}$$

$$\frac{D T^\beta_\alpha}{d\lambda} = \frac{d T^\beta_\alpha}{d\lambda} + \left[\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu \right] \frac{dx^\gamma}{d\lambda}$$

Es de hacerse notar que si se hubiese deseado obtener las componentes del gradiente de un tensor que no tuviera el primer índice contravariante ni el segundo covariante (como el caso $T^{\beta}{}_{\alpha}$ deducido aquí), bastaría simplemente utilizar la base de las uno-formas (en el caso de que el índice "afectado" fuera covariante), o la base escogida en el espacio de los vectores (en el caso de que el índice "afectado" fuera contravariante) en la ecuación (III. 1)

Generalizando se puede, entonces, hacer las correcciones necesarias a cada uno de los índices del tensor al cual se le esté calculando su gradiente, de la forma siguiente:

1) El signo del término correspondiente al índice a ser "afectado" será "+" si es un

índice contravariante. y "−" si es covariante.

2) El índice que indica la diferenciación siempre será el último de Γ.

3) El índice que está siendo "afectado" conserva su posición en Γ y es reemplazado en T por un índice arbitrario, sobre el cual existe una sumatoria.

De esta forma, es claro que:

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta;\gamma} &= 0 \\
&= g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}\, g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\, g_{\mu\alpha} \\
&\equiv g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad g_{\alpha\beta,\gamma} = 2\,\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma}$ ... (los paréntesis denotan la parte simétrica)

entonces:

$$\tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) = \Gamma_{(\mu\beta)\gamma} + \Gamma_{(\mu\gamma)\beta} - \Gamma_{(\beta\gamma)\mu}$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{\mu\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\gamma\beta} + \right.$$

$$\left. + \Gamma_{\gamma\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma\mu} - \Gamma_{\gamma\beta\mu}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) = \Gamma_{\mu\beta\gamma} + \left(-\Gamma_{\mu[\beta\gamma]} + \Gamma_{\beta[\mu\gamma]} + \Gamma_{\gamma[\mu\beta]}\right) \quad \text{(III.2)}$$

(los corchetes denotan la parte antisimétrica)

Definimos el conmutador de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de la siguiente manera:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv [\partial_{\mathbf{u}}, \partial_{\mathbf{v}}]$$

$$\equiv \partial_{\mathbf{u}} \partial_{\mathbf{v}} - \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{u}}$$

Para cualquier base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ se definen los coeficientes de conmutación $c_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ y $c_{\beta\gamma\alpha}$ por:

$$[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma] \equiv c_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\, \mathbf{e}_\alpha \qquad \text{y}$$

$$c_{\beta\gamma\alpha} \equiv g_{\alpha\mu}\, c_{\beta\gamma}{}^{\mu}$$

entonces

$$c_{\mu\nu}{}^{\rho}\, \mathbf{e}_\rho \equiv [\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu]$$

$$\equiv \nabla_\mu \mathbf{e}_\nu - \nabla_\nu \mathbf{e}_\mu$$

$$c_{\mu\nu}{}^{\rho}\mathbf{e}_{\rho} = (\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu})\,\mathbf{e}_{\rho}$$
$$= 2\,\Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}\,\mathbf{e}_{\rho}$$

entonces:

$$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = -\tfrac{1}{2}\,c_{\mu\nu}{}^{\rho}$$

$$\Gamma_{\rho\,[\mu\nu]} = -\tfrac{1}{2}\,c_{\mu\nu\rho}$$

esto combinado con la ecuación (III.2) da como resultado:

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\,(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + c_{\mu\beta\gamma} + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu}) \quad \text{(III.3)}$$

Nótese que si la base es coordenada con

$$\mathbf{e}_{\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{e}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$$

y u y v son dos vectores (∂_u, ∂_v) entonces:

$$[u,v] \equiv uv - vu$$
$$= u^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}\,v^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} - v^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}\,u^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$[u, v] = u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$= \left(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$[u, v] = (u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\, \mathbf{e}_\alpha$$

de donde

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$$

y, por lo tanto, en una base coordenada

$$C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$$

de esta forma se reduce la ecuación (III.3) a

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right)$$

H. Tensores de Riemann, Ricci y Einstein

Considérese la derivada covariante de un tensor de rango dos $V_{\mu\nu}$

$$V_{\mu\nu;\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\delta} V_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta} V_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\delta} V_{\mu\alpha}$$

Sea

$$V_{\mu\nu} = V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} V_\lambda$$

entonces

$$V_{\mu;\nu;\delta} = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\delta \partial x^\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} +$$

$$- \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\delta} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\delta} V_\alpha + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta} \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu} V_\lambda +$$

$$+ \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\delta} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} V_\lambda \qquad \text{(III.4)}$$

Se nota que $V_{\mu;\nu;\delta}$ no es simétrico respecto al intercambio $\nu \leftrightarrow \delta$, entonces

$$V_{\mu;\nu;\delta} \neq V_{\mu;\delta;\nu}$$

entonces las derivadas covariantes no conmutan.

Se define el tensor de Riemann como:

$$v_{\mu;\nu;\delta} - v_{\mu;\delta;\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\nu\delta}\, v_{\lambda} \qquad \text{(III.5)}$$

Sustituyendo (III.4) en (III.5) se obtiene que

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\, \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\, \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\delta}$$

renombrando índices

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\, \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\, \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}$$

Se define el tensor de "curvatura de Ricci" de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

En un marco coordenado las componentes son

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\, \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\, \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$$

Así mismo se define la "curvatura escalar"

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}$$

y el "tensor de curvatura de Einstein"

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R$$

I. Tensor de esfuerzo-energía

En todo evento en el espacio-tiempo, existe un tensor de esfuerzo-energía. Este es una máquina que contiene información acerca de la densidad de energía, densidad de momentum, y esfuerzo tal como los mide cualquier observador en ese evento. Están incluidos en él, la energía, momentum y esfuerzo asociado con todas las formas de la materia y campos no gravitacionales.

El tensor de esfuerzo-energía se define como una máquina lineal, simétrica con dos casillas para la inserción de dos vectores $\mathbf{T}(\ldots, \ldots)$. Su salida para una entrada dada se puede resumir de la siguiente forma:

1. Si se inserta $\mathbf{U}$ la 4-velocidad de un observador en una de sus casillas y se deja vacía la otra,

la salida es:

$$T(U, \ldots) = T(\ldots, U) = -\begin{pmatrix}\text{densidad de 4-momen-} \\ \text{tum } dP/dV\end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix}\text{4-momentum por unidad} \\ \text{de volumen tridimensio-} \\ \text{nal medido en el} \\ \text{marco de Lorentz} \\ \text{de un observador en} \\ \text{el evento donde } T \text{ es} \\ \text{escogido.}\end{pmatrix}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta}\, U^{\beta} = T_{\beta}{}^{\alpha} U^{\beta}$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta}\, U^{\beta} = -\left(dP^{\alpha}/dV\right)$$ para un observador con 4-velocidad $\mathbf{U}$.

2. Si se inserta en una casilla la 4-velocidad del observador y un vector unitario arbitrario $\mathbf{n}$ en la otra casilla, la salida es:

$$T(u, n) = T(n, u)$$

$$T(\mathbf{u},\mathbf{n}) = -\begin{pmatrix}\text{la componente, "}\mathbf{n}\cdot dP/dV\text{", de la} \\ \text{densidad del 4-momentum a} \\ \text{lo largo de la dirección } \mathbf{n}, \\ \text{tal como se medirá en el mar-} \\ \text{co de Lorentz del observador.}\end{pmatrix}$$

$$T_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, n^{\beta} = T_{\alpha\beta}\, n^{\alpha}\, U^{\beta}$$

$$T_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, n^{\beta} = -n_{\mu}\, dP^{\mu}/dV$$

3. Si se inserta la 4-velocidad del observador en ambas casillas, la salida es:

$$T(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}\text{la masa-energía por unidad de vo-} \\ \text{lumen medida en un marco con} \\ \text{4-velocidad } \mathbf{u}\end{pmatrix}$$

4. Si se escogen dos vectores base $\mathbf{e}_j$ y $\mathbf{e}_k$ del marco de Lorentz del observador y se insertan en T, el resultado es:

$$T_{jk} = T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} \text{componente } j \text{ de la fuerza que ac-} \\ \text{túa del lado } x^k - \varepsilon \text{ al lado } x^k + \varepsilon \\ \text{a lo largo de la superficie per-} \\ \text{pendicular a } \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

En electrodinámica la conservación de carga se puede expresar por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{densidad de carga}) + \nabla \cdot (\text{densidad de corriente}) = 0$$

i.e. $J^0{}_{,0} + \nabla \cdot J = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$

Análogamente la conservación de energía-momentum se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0$$

IV. TEORÍA LINEALIZADA DE LA GRAVITACIÓN

A. Ecuaciones de campo en teoría linealizada

Sea la métrica siguiente.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

con

$$|h_{\mu\nu}| \cong |\Phi| \lesssim M_\odot / R_\odot \sim 10^{-6}$$

Como:

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + C_{\mu\beta\gamma} + C_{\mu\gamma\beta} - C_{\beta\gamma\mu}\right)$$

Debido a que se supone una base coordenada, se tiene que

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right)$$

$$g_{\beta\gamma,\mu} \equiv \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}$$

Entonces

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\eta_{\mu\gamma} + h_{\mu\gamma}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})\right]$$

como

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\eta_{\mu\beta} = 0 \qquad \forall\ \mu,\beta,\gamma$$

se obtiene

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\gamma} + h^{\mu}{}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h_{\nu\beta,\gamma} + h_{\nu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\nu}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\nu\beta,\gamma} + h_{\nu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\nu}\right)$$

entonces

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}\right)$$

como $[h_{ij}]$ es simetrica entonces

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}\right)$$

Por lo que el tensor de Ricci, que no es más que una contracción del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$$

se reduce a

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}\right)$$

donde

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

Por la contracción

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

se ve que las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

con

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

se transforman, tomando en cuenta las siguientes ecuaciones,

$$R \equiv \frac{1}{2}\left(h_{\mu}{}^{\alpha,\mu}{}_{\alpha} + h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu}{}^{\mu}\right)$$

$$2G_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = 16\pi\, T_{\mu\nu}$$

de la siguiente forma

$$16\pi\, T_{\mu\nu} = h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\left(h_{\mu}{}^{\alpha,\mu}{}_{\alpha} + h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu}{}^{\mu}\right)$$

$$= h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\left(h_{\mu}{}^{\alpha,\mu}{}_{\alpha} + h^{\nu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - 2h_{,\beta}{}^{\beta}\right)$$

$$= h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\left(2h_{\beta\alpha,}{}^{\beta\alpha} - 2h_{,\beta}{}^{\beta}\right)$$

$$= h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}$$
$$- \eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}\right) + O\left(|h_{\mu\nu}|^2\right)$$

$$16\pi\, T_{\mu\nu} = h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}$$
$$- \eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}\right) \qquad \text{(IV. 1)}$$

Se define

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \quad ; \quad \forall\ h \text{ tensor simétrico}$$

De esta forma:

$$G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} \qquad \text{(para primer orden en } h_{\mu\nu})$$
$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

esto es

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

y

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

De la ecuación (IV.1) se tiene

$$16\pi T_{\mu\nu} = h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} h_{,\beta}{}^{\beta}$$

$$16\pi T_{\mu\nu} = h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha}$$

reordenando

$$16\pi T_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} h^{,\alpha\beta}$$

agrupando

$$16\pi T_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^{,\alpha\beta}\right)$$

$$= -h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^{,\alpha\beta}\right) + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\alpha} h^{,\alpha}{}_{\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\nu\alpha} h^{,\alpha}{}_{\mu}$$

y como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$$

se obtiene

$$16\pi T_{\mu\nu} = -\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu}$$

B. Transformaciones de calibración en teoría linealizada

Utilizando transformaciones globales de Lorentz se hace notar que dados

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} x^{\alpha'}$$

$$\eta_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} \eta_{\mu\nu}$$

los coeficientes de la métrica se transforman así

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu}$$

$$= \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

entonces $h_{\mu\nu}$ (y análogamente $\bar{h}_{\mu\nu}$) se transforman como componentes de un tensor en espacio-tiempo plano.

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

Sea la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x^{\mu'}(P) = x^{\mu}(P) + \xi^{\mu}(P)$$

donde $\xi^{\mu}(P)$ son cuatro funciones lo suficientemente pequeños para que permanezca la condición $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$

Estos pequeños cambios se pueden ignorar en todas las cantidades excepto en la métrica ya que ahí las pequeñas desviaciones de $\eta_{\mu\nu}$ contienen toda la información gravitacional.

Dado

$$g_{\rho'\sigma'}\left[x^{\alpha'}(P)\right] = g_{\mu\nu}\left[x^{\alpha}(P)\right] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}}$$

y

$$g_{\mu\nu}\left[x^{\alpha}(P)\right] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\left[x^{\alpha}(P)\right]$$

y

$$x^{\mu'}(P) = x^{\mu}(P) + \xi^{\mu}(P)$$

tenemos que

$$g_{\rho'\sigma'} = \eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma} - \xi_{\rho,\sigma} - \xi_{\sigma,\rho} + \text{correcciones despreciables}$$

entonces la perturbación de la métrica en $x(\mu)$ y $x(\mu')$ están relacionadas por

$$h_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = h_{\mu\nu}^{\text{viejo}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

mientras que las formas funcionales de todos los demás escalares, vectores y tensores son inalteradas dentro de la precisión de la teoría linealizada.

Dados

$$h^{nuevo}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \,.$$

$$h = h_{\alpha}{}^{\alpha}$$

entonces

$$\bar{h}^{nuevo}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{nuevo}$$

$$\bar{h}^{nuevo}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = h_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} - \xi^{\nu}{}_{,\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\nu} - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha\nu}\right)$$

$$= \bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} - \xi^{\nu}{}_{,\mu\nu} + \eta_{\mu}{}^{\nu}\,\xi^{\alpha}{}_{,\alpha\nu}$$

$$= \bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} - \xi^{\nu}{}_{,\mu\nu} + \xi^{\alpha}{}_{,\alpha\mu}$$

$$\bar{h}^{nuevo}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu}$$

por lo que necesariamente existen cuatro funciones generadoras $\xi_{\mu}(t, x^j)$ cuyas transformaciones de calibración dadas por

$$h^{nuevo}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

hacen

$$\bar{h}^{nuevo}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$$

que se conoce como la calibración de Lorentz

Sea

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}^{nueva}_{\mu\nu}$$

entonces una subsecuente transformación de calibración a la calibración de Lorentz se comporta de la siguiente manera

$$\bar{h}''_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}'_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi'_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu}$$

por lo que la condición de calibración de Lorentz no se ve afectada. si y sólo si sus funciones generadoras satisfacen la ecuación de onda

$$\xi'_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \xi'^{\alpha,\beta}{}_{\beta} = 0$$

para esta segundo transformación y todas las subsecuentes.

C. Calibración invariante del tensor de Riemann

Se observa que

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(h_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\delta\gamma} + h_{\delta}{}^{\alpha}{}_{,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}{}^{,\alpha}{}_{\gamma}) -$$

$$(h_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\gamma\delta} + h_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{,\beta\delta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}{}_{\delta})\Big] + O(|h_{\mu\nu}|^2)$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(h_{\delta}{}^{\alpha}{}_{,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}{}^{,\alpha}{}_{\gamma} - h_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{,\beta\delta} + h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}{}_{\delta})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\mu} = \frac{1}{2}(h_{\mu\alpha,\beta\gamma} - h_{\beta\mu,\alpha\gamma} - h_{\gamma\alpha,\beta\mu} + h_{\beta\gamma,\alpha\mu})$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\beta\alpha,\mu\nu} + h_{\mu\beta,\alpha\nu})$$

y por ser $[h_{ij}]$ simétrica

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu})$$

Aplicando a la expresión anterior una transformación de calibración, se tiene

$$R^{nuevo}_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\Big(h^{viejo}_{\alpha\nu,\mu\beta} - \xi_{\alpha,\nu\mu\beta} - \xi_{\nu,\alpha\mu\beta} +$$

$$+ h^{viejo}_{\mu\beta,\nu\alpha} - \xi_{\mu,\beta\nu\alpha} - \xi_{\beta,\mu\nu\alpha} - h^{viejo}_{\mu\nu,\alpha\beta} +$$

$$+ \xi_{\mu,\nu\alpha\beta} + \xi_{\nu,\mu\alpha\beta} - h^{viejo}_{\alpha\beta,\mu\nu} + \xi_{\alpha,\beta\mu\nu} + \xi_{\beta,\alpha\mu\nu}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(h^{viejo}_{\alpha\nu,\mu\beta} - h^{viejo}_{\mu\nu,\alpha\beta} + h^{viejo}_{\mu\beta,\nu\alpha} - h^{viejo}_{\alpha\beta,\mu\nu}\Big)$$

$$R^{nuevo}_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{viejo}_{\alpha\mu\beta\nu}$$

Además, ya que los componentes del tensor de Riemann no son alteradas por una transformación de calibración, el tensor de Einstein (que es una contracción del tensor de Riemann) tompoco se ve alterado por una transformación de este tipo.

D. Observaciones

Nōtese que

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\,\eta_{\mu\nu}$$

y

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h\,\eta_{\mu\nu}$$

entonces

$$h \equiv h_\alpha{}^\alpha = -\bar{h}_\alpha{}^\alpha \equiv -\bar{h}$$

Obsērvese que

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = h_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{\text{nuevo}}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{\text{nuevo}}$$

$$h \equiv h_\alpha{}^\alpha$$

$$h_\alpha^{\text{nuevo}\,\alpha} = h_\alpha^{\text{viejo}\,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\alpha}$$

$$h_\alpha^{\text{nuevo}\,\alpha} = h_\alpha^{\text{viejo}\,\alpha} - 2\,\xi^\alpha{}_{,\alpha}$$

entonces

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h_\alpha^\alpha - 2\,\xi^\alpha{}_{,\alpha}\right)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = \bar{h}_{\mu\nu}^{\text{viejo}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\,\xi^\alpha{}_{,\alpha}$$

Específicamente, la teoría linealizada describe a la gravitación por medio de un tensor simétrico de segundo rango, $\bar{h}_{\mu\nu}$. En la transformación de calibración estándar de Lorentz, este campo tensorial satisface las condiciones (condiciones coordenadas)

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

En esta calibración las ecuaciones de propagación para campos gravitacionales en el vacío, toman la forma

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$$

V. ECUACIONES DE ONDA

A. Soluciones de onda plana en teoría linealizada

Una solución a las ecuaciones de campo de la teoría linealizada:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$$

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

es la solución de una onda plana:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = R\left[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)\right]$$

donde R indica que se tome la parte real de la expresión encerrada entre corchetes y $A_{\mu\nu}$ (amplitud) y k_μ (vector de onda) son constantes que satisfacen

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \qquad \text{(i.e. } k \text{ es un vector nulo)}$$

$$A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0 \qquad \text{(i.e. } A \text{ es ortogonal a } k\text{)}$$

Las ecuaciones anteriores se justifican, ya que dadas

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \qquad \text{y}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = R\left[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)\right]$$

se tiene que

$$R\left[A_{\mu\nu}(-k_\alpha k^\alpha)\, u_\alpha u^\alpha \exp(ik_\alpha x^\alpha)\right] =$$

$$= R\left[A_\mu{}^\alpha\,(ik_\alpha)\, u^\alpha \exp(ik_\alpha x^\alpha)\right] = 0$$

pero como en un marco de Lorentz las componentes de U, u^{μ}, tienen la forma $u^{0} = 1$, $u^{j} = 0$ ($j=1,2,3$) entonces es claro que

$$k_{\alpha} k^{\alpha} = 0 \qquad y$$

$$A_{\mu}{}^{\alpha} k_{\alpha} = 0$$

La frecuencia de la onda se define como

$$\omega \equiv k^{0} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$$

que se propaga con la velocidad de la luz en la dirección $(1/k_0)(k_x, k_y, k_z)$.

A primera vista la amplitud $A_{\mu\nu}$ de esta onda plana parecería tener seis componentes independientes (diez por ser simétrico, menos las cuatro restricciones de ortogonalidad $A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = 0$), pero al establecer la calibración se vio que ξ cumplía la condición restrictiva $\xi_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$, entonces:

$$\xi^{\mu} \equiv -ic^{\mu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})$$

con cuatro constontes arbitrarias c^{μ} genera una transformación de calibración que puede cambiar arbitrariamente cuatro de las seis componentes de $A_{\mu\nu}$, por lo que se ve que el campo gravitacional en relatividad general sólo tiene dos grados de libertad dinámica.

B. La calibración tt

Se tiene que

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} = 0$$

con

$$\bar{h}_{\mu\nu} = R\left[A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})\right]$$

$$\xi^{\mu} = -ic^{\mu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})$$

por lo que

$$R\left[A_{\mu}{}^{\nu}\, ik^{\alpha} u_{\nu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})\right] - ic^{\mu} k_{\alpha} k^{\alpha} u^{\nu} u_{\nu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha}) = 0$$

entonces es claro que se imponen las siguientes condiciones:

1) $A_{\mu\nu} u^{\nu} = 0$

estas son sólo tres restricciones en $A_{\mu\nu}$, no cuatro porque una de ellas, cuando $\alpha = \mu$, $k^{\mu} (A_{\mu\nu} u^{\nu}) = 0$ la satisface $A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = 0$.

2) dados $\nu = \mu$, la transformación de calibración y $u^{0} = 1$, $u^{j} = 0$

$$A^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

que es una cuarta restricción.

Se tienen entonces ocho restricciones en las diez componentes de la amplitud

$$A_{\nu\alpha} u^{\alpha} = A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\alpha} = 0$$

y se tiene también un sistema de coordenadas (calibración) que se ha impuesto. Entonces las dos componentes libres de $A_{\mu\nu}$ representan los dos grados de libertad (dos polarizaciones) en la onda plana y gravitacional.

Si se tiene que

$$A_{\mu\alpha} u^{\alpha} = A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = A^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

en un marco de Lorentz, donde $u^0 = 1$ y $u^j = 0$,

dado

$$\bar{h}_{\mu\nu} = R\left[A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha})\right]$$

se tiene:

1) Si $\nu = 0$

entonces

$$A_{\mu 0} = A_{\mu 0} u^0 = 0$$

por lo que

$h_{\mu 0} = 0$ (sólo las componentes de h_{jk} son distintas de cero).

2) $h_{kj,j} = 0$

3) $h_{\mu}{}^{\mu} = 0$ (traza = 0 para componentes espaciales)

Una onda gravitacional puede ser resuelta como una superposición de ondas planas, introduciendo la calibración

$$h_{\mu 0} = 0$$
$$h_{kj,j} = 0 \qquad (V.1)$$
$$h_{kk} = 0$$

entonces una onda arbitraria también satisface la calibración. De esta manera, dado $h_{\mu\nu}$, toda onda satisface las restricciones y sólo las componentes de h_{jk} (espaciales) son distintas de cero, se necesita imponer solamente seis ecuaciones de onda:

$$\Box\, h_{jk} \equiv h_{jk,\alpha}{}^{\alpha} = 0 \qquad (V.2)$$

Todo tensor simétrico que satisface (V.1) - pero no necesariamente (V.2) - se llama "tt tensor" (transverse traceless).

La calibración especial en la cual $h_{\mu\nu}$ se reduce a su parte tt se llama calibración tt.

Las condiciones (V. 1) se pueden resumir entonces así

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{++}$$

Recordando que

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}\right)$$

se tiene que

$$R_{joko} = R_{ojok} = -R_{jook} = -R_{ojko}$$

además

$$R_{joko} = \frac{1}{2}\left(h_{jo,ok} + h_{ok,oj} - h_{oo,jk} - h_{jk,oo}\right)$$

por lo que, recordando que $h_{\mu o} = 0$, se obtiene

$$R_{joko} = -\frac{1}{2} h_{jk,oo}^{++}$$

VI CONCLUSIONES

1. Se puede asumir como una buena aproximación que, las ondas gravitacionales se propagan en un espacio - tiempo plano en el vacío desde un punto de vista local. Se puede entonces analizar el problema mediante el uso de la teoría linealizada en la cual la métrica está dada por: $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}$

2. La teoría linealizada describe la gravitación por medio de un tensor simétrico de segundo rango $\bar{h}_{\mu\nu}$. En la calibración estandar (de Lorentz o Hilbert) este campo satisface las condiciones

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

3. Las ecuaciones de propagación para campos gravitacionales en el vacío están dadas por

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$$

4. Calibraciones sucesivas (i.e. transformaciones infinitesimales sucesivas) satisfacen la condición restrictiva

$$\xi_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$$

Entonces, dada la transformación de coordenadas

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

se obtiene

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{nuevo}} = \bar{h}_{\mu\nu}^{\text{viejo}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\, \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$$

5. Una solución a las ecuaciones

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

es la llamada solución monocromática o solución de onda plana:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = R\left[A_{\mu\nu} \exp\left(ik_{\alpha} x^{\alpha}\right)\right]$$

que tiene dos grados de libertad en la amplitud (dos polarizaciones).

6. En la calibración TT para una onda plana al establecer ocho restricciones

$(A_{\mu\alpha} u^{\alpha} = A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = A^{\mu}{}_{\mu} = 0)$ en un marco de Lorentz donde $u^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0}$, se obtiene

$$h_{\mu 0} = 0$$

$$h_{kj,j} = 0$$

$$h_{kk} = 0$$

VII BIBLIOGRAFÍA

- Bose, S.K. An Introduction to General Relativity. New York, A Halsted Press Book. John Wiley & Sons. 1980.
- Brever, Reinhart. Lecture Notes in Physics, No. 44 (Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation). Heidelberg, Springer Verlag. 1975.
- Davies, P.C.W. The Search for Gravity Waves. New York, Cambridge University Press. 1980.
- Edwards, Cyril. ed. Lecture Notes in Physics. No. 124 (Gravitational radiation, collapsed objects and exact solutions). Heidelberg, Springer Verlag. 1980.
- Gowdy, Robert H. Gravitational Waves in Closed Universes. Physical Review Letters. Vol. 27 Nos. 12 y 16. U.S.A. Sept. & Oct. 1971.
- Levi-Civita. The Absolute Differential Calculus. New York, Dover. 1977.

- Misner, Charles W., Kip S. Thorne & John Archibald Wheeler. Gravitation. San Francisco, W.H. Freeman & Company. 1973.
- Prasanna, A.R. ed. Gravitation, Quanta and the Universe. New York, A Halsted Press Book. John Wiley & Sons. 1980.
- Ryan, Michael P. & L.C. Shepley. Resource Letter RC-1: Cosmology. American Journal of Physics. Vol. 44, No. 3. March 1976.
- Smarr, Larry, ed. Sources of Gravitational Radiation. New York, Cambridge University Press. 1979.
- Thorne, Kip S. Gravitational Wave Research. Reviews of Modern Physics. Vol. 52, No. 2, part 1. April 1980.
- Weimberg, Steven. Gravitation and Cosmology. New York, John Wiley & Sons. 1972
- Weisberg, Joel M. Gravitational Waves From an Orbiting Pulsar. Scientific American. Vol. 245, No. 4. Oct. 1981.

- Weyl, Hermann. Space Time Matter. New York, Dover. 1952.
- Zel'dovich, B. & I.D. Novikov. Relativistic Astrophysics. Vol. 1. Chicago, The University of Chicago Press. 1971.