UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Topologías y pretopologías: Modelación en redes complejas

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Estefanía Barrio Cuartango
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática Aplicada

Guatemala,

2022

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Topologías y pretopologías: Modelación en redes complejas

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Estefanía Barrio Cuartango
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática Aplicada

Guatemala,

2022

Vo.Bo.:

(f) ______________________________
MA. Dorval José Manuel Carías Samayoa

Tribunal Examinador:

(f) ______________________________
MA. Dorval José Manuel Carías Samayoa

(f) ______________________________
Lic. José Ricardo Barrientos Quezada

(f) ______________________________
Lic. Cristian Eduardo Valdez Santos

Fecha de aprobación: Guatemala, 25 de mayo de 2022.

Prefacio

La elaboración del siguiente trabajo surgió del interés en profundizar en el área de aplicaciones de modelos matemáticos para el análisis económico, ya que a lo largo de la carrera no he tenido la oportunidad de estudiar muchas formas en las cuales se puede aplicar la matemática en economía y, sin embargo, el poco acercamiento que he tenido me hace considerar que la economía es uno de los pilares más influyentes en la forma en que se desarrolla una sociedad, y que, además, la economía es una aplicación directa de las matemáticas y, por ende, regida por esta.
La idea surgió a través de lecturas en línea, interés por las clases en la Universidad en las cuales estudiamos finanzas o economía; en algunas charlas con el Lic. Carías en cuanto a la influencia de la economía en nuestra sociedad, sobre todo en un país como Guatemala. Agradezco al Lic. Carías por sus aseorías en la delimitación del presente y la confianza que depositó en mí durante la elaboración de este.

Agradecimientos

A mi familia por siempre exhortarme a que me gustaran las matemáticas, y a todos mis profesores por inspirarme a seguir aprendiendo.

Índice

Lista de figuras

Resumen

La topología estudia propiedades geométricas que se quedan invariantes bajo la aplicación de mapeos continuos. Por otro lado, la teoría de grafos busca modelar la vida cotidiana a través de vértices y nodos para así resolver problemas con base a relaciones que puedan encontrarse entre los diferentes vértices. La topología se expone desde el concepto de abiertos, los axiomas de Kuratowski parten de conceptualizar la topología desde un enfoque más intuitivo, que es la cerradura, es más fácil asociar el concepto de cerradura a nuestra vida cotidiana que el concepto de "abiertos", pues intuitivamente no vemos espacios que no contengan a sus puntos límite. Estos axiomas permitieron el inicio de un estudio más intuitivo de las redes complejas y, sin embargo, el axioma 4, el que establece la idempotencia del operador que presentó Kuratowski no se adhiere a la realidad. Las redes complejas pretenden estudiar, entre otras cosas, fenómenos de la ciencias sociales, tales como redes de contagio de alguna enfermedad, modelos económicos u otros, y la propiedad de idempotencia contradice la idea de que en la realidad los objetos (vértices en una red) pueden acercarse aún más bajo el tiempo de estudio, de esto parte el desarrollo de nuevos conceptos para el estudio de redes y nace la rama de la matemática conocida como la pretopología. La pretopología pretende crear una conexión entre las dos ramas presentadas anteriormente: a través de nociones topológicas, grafos y relaciones se pretende innovar y crear nuevos conceptos con el fin de analizar modelos de redes complejas utilizando criterios de proximidad y "acercamiento".

En la primera parte de esta tesis se expondrán algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, así como ejemplos de modelos de teoría de grafos utilizados para redes complejas y sus deficiencias. En la segunda parte se expondrán las nociones básicas de topología hasta llegar a los axiomas de Kuratowski y se terminará presentando la teoría de Pretopología y su necesidad dada lo expuesto en la primera y segunda parte de esta tesis.

CAPÍTULO 1

Introducción

Uno de los principales objetivos del desarrollo de teorías matemáticas, más allá del interés mismo de desarrollar el conocimiento, es encontrar sus aplicaciones. De esta misma forma, quienes necesitan comprender un fenómeno recurren a menudo a las matemáticas, en busca del desarrollo de una, o varias, teorías que les permitan comprender y estudiar el fenómeno que se les presenta.

El estudio de redes complejas encuentra su importancia en el análisis de modelos de la realidad. Pero, ¿qué es un sistema de redes complejas? Un sistema de redes complejas puede definirse como un modelo de interacción entre varias entidades cuyo comportamiento global no puede definirse siguiendo los comportamientos individuales, de donde nace la necesidad de propiedades de estudio. El enfoque de la pretopología en redes complejas reconoce su importancia en su adherencia y coherencia a la realidad, pues muchos fenómenos no se representan de forma continua, pero tampoco basta con modelos de redes simples, ya que la realidad no es simple y, en la mayoría de casos, es necesario estudiar conjuntos "grandes"de elementos. Día a día, nos enfrentamos a fenómenos que pueden ser modelados a través de redes complejas. De forma habitual se recurre a la teoría de grafos para el estudio de redes complejas, sin embargo, como se podrá ver a lo largo de este trabajo, esta teoría tiene sus limitaciones.

¿Qué hacer desde un punto de vista matemático? En las matemáticas es interesante ver las conexiones entre las diferentes teorías y como estas pueden innovar la forma en que estudiamos los problemas a los que nos enfrentamos. Es a partir de esta línea de pensamiento que se encuentra el punto en común entre la topología y el estudio de redes complejas: a través de la pretopología.

El entendimiento de las diferentes áreas matemáticas que componen el área general de estudio es necesario, tanto para el desarrollo del conocimiento, como para un mejor entendimiento del tema principal. El transfondo es necesario para comprender el objetivo al que se quiere llegar. Es por eso que en este trabajo se desarrollará en primera instancia, la teoría de grafos y su aplicación en redes complejas. Luego el tema de topología, del cual nace el desarrollo de la pretopología, tema que se presentará en la tercera parate de esta tesis. Y, por último, la modelación de redes complejas en pretopología; los conceptos que se repiten según la teoría de grafos y un ejemplo de esto: el modelo insumo-producto.

CAPÍTULO 2

Objetivos

2.1. Objetivos generales

i Estudiar las propiedades topológicas desde el enfoque de pretopología.

ii Exponer el concepto de redes complejas y su importancia como aplicación matemática.

2.2. Objetivos específicos

i Estudiar el concepto de conexión en la pretopología.

ii Explicitar cómo diferentes enfoques matemáticos permiten el mismo estudio.

iii Mostrar aplicaciones de la pretopología en economía utilizando el ejemplo del modelo Insumo-Producto.

CAPÍTULO 3

Justificación

Habitualmente, se recurre a la utilización de grafos para modelar redes de información y así resolver problemas de la vida cotidiana y también analizar data con diversos objetivos, desde el área de mercadeo hasta la toma de decisiones administrativas, a estudios sociales o económicos de un país. La pretopología encuentra su utilidad en estudios de redes complejas pues permite modelar diferentes fenómenos en un mismo conjunto de estudio. En esta tesis se presentará una aplicación de la pretopología en economía, mediante el uso de redes complejas.

CAPÍTULO 4

Teoría de grafos y relaciones

4.1. Grafos

Definición 4.1.1. Un **grafo (no dirigido)** es el par ordenado (V, E) donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto contable no vacío de elementos denominados **vértices** y $E = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ es un subconjunto, que puede ser vacío, del producto cartesiano $V \times V$, cuyos elementos se denominan **arcos**. El arco $e = [v_i, v_j]$ describe al arco entre los vértices v_i y v_j.

Definición 4.1.2. Un **grafo dirigido** es aquel en donde los arcos tienen una dirección. Convencionalmente se utiliza el nombre U para el conjunto de arcos y se describe al elemento $u = (v_i, v_j)$ como el arco que va de v_i a v_j

NOTA:
El arco $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ en el caso de grafos dirigidos y por eso se utiliza una notación diferente a la utilizada en grafos no dirigidos.

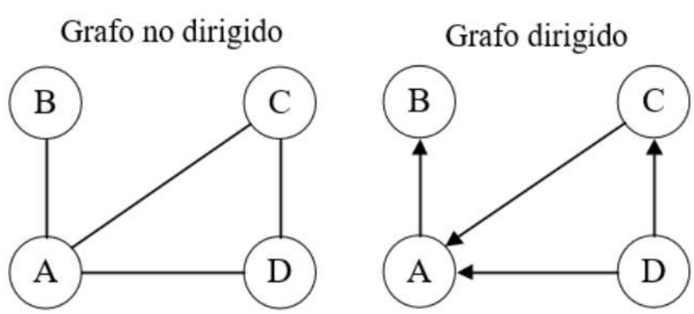


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo no dirigido y un grafo dirigido

NOTA:
Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.
- G es un **multigrafo** si existen diferentes arcos entre dos pares de vértices.

Para grafos dirigidos se denomina **multigrafo dirigido** al concepto homólogo.

- Se denomina *bucle* a un arco que va de un vértice a sí mismo.
- Un grafo sin blucles y que no es un multigrafo se dice **grafo simple**.

4.2. Grado de un grafo

Definición 4.2.1. En un grafo dos vértices son **adyacentes** si están unidos por un arco.
Dos arcos son **adyacentes** si tienen un vértice extremo en común.

Ejemplo: En el grafo no dirigido que se muestra en la Figura 4.1. se tienen los siguientes ejemplos:
- Los vértices A y C son adyacentes.
- Los arcos $[A, C]$ y $[A, D]$ son adyacentes.

Definición 4.2.2. Sea $G = (V, U)$ un grafo dirigido y $v \in V$:

i) El **semi-grado exterior** o **grado de salida** de $v, d^+(v)$ es el número de arcos que tienen a v como vértice extremo inicial.

ii) El **semi-grado interior** o **grado de entrada** de $v, d^-(v)$ es el número de arcos que tienen a v como vértice extremo final.

iii) El **grado** de $v, d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. En un grafo *no dirigido* es simplemente el número de arcos que tocan al vértice v.

Ejemplo: En el grafo dirigido de la Figura 4.1. se tienen los siguientes ejemplos:
i) $d^+(A) = 1$
ii) $d^-(A) = 2$
iii) $d(A) = d^+(A) + d^-(A) = 1 + 2 = 3$

NOTA:
Se puede definir el grado con base al conjuntos de nodos.

4.3. Grafos de interés

Definición 4.3.1. Sea $G = (V, U)$. Entonces se define al **grafo complementario** $G^C = (V, U^C)$ tal que los elementos de U^C cumplen lo siguiente: $(v_i, v_j) \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \notin U^C$ y si $(v_m, v_n) \in U^C \Rightarrow (v_m, v_n) \notin U$.

NOTA:
También podemos definir al grafo complementario como aquel cuyos vértices son adyacentes si y solo si no lo son en el grafo inicial.

Ejemplo: Continuando con la Figura 4.1. Explicitemos el grafo dirigido denotandolo $G = (V, U)$. Tenemos $V = \{A, B, C, D\}$ y $U = \{(A, B), (C, A), (D, A), (D, C)\}$. Entonces para un grafo complementario $\overline{G} = (V, \overline{U})$ se tendría el mismo conjunto V de vértices y $\overline{U} = \{(A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D)\}$

Definición 4.3.2. Sea $G = (V, U)$ y $U_p \subset U$. Entonces se define como **grafo parcial** al grafo $G_p = (V, U_P)$.

NOTA:
Con esta definición se pueden aislar vértices.

Definición 4.3.3. Sea $G = (V, U)$ y $V_s \subset V$. Entonces se define como **subgrafo** al grafo $G_s = (V_s, U_s)$ en donde V se restringe por la función característica de U en V_s, es decir $U_s = \{(x, y) \ni (x, y) \in U \cap V_s \times V_s\}$.

NOTA:
Un subgrafo de un grafo se dice **maximal** si posee todos los vértices del grafo. Sea S un subconjunto de vértices de un grafo G, se denomina **subgrafo generado** por S de G al subgrafo de G que tiene a S como conjunto de vértices y por aristas todas aquellas de G cuyos extremos están en S.

Definición 4.3.4. Sea $G = (V, U)$ un grafo. Entonces, se dice que G es:
i) **reflexivo** si $\forall v_i \in V \ni (v_i, v_i) \in U$.
ii) **irreflexivo** si $\forall v_i \in V \ni (v_i, v_i) \notin U$.
iii) **simétrico** si $\forall v_i, v_j \in V \ni (v_i, v_j) \in U \Rightarrow (v_j, v_i) \in U$.
iv) **asimétrico** si $\forall v_i, v_j \in V \ni (v_i, v_j) \in U \Rightarrow (v_j, v_i) \notin U$.
v) **antisimétrico** si $\forall v_i, v_j \in V \ni (v_i, v_j) \in U \wedge (v_j, v_i) \in U \Rightarrow v_j = v_i$.
vi) **transitivo** si $\forall v_i, v_j, v_k \in V \ni (v_i, v_j) \in U \wedge (v_j, v_k) \in U \Rightarrow (v_i, v_k) \in U$.
vii) **completo** si $\forall v_i, v_j \in V \ni (v_i, v_j) \notin U \Rightarrow (v_j, v_i) \in U$.

NOTA:
1. También se puede definir el grafo completo como el grafo simple en el cual cada par de vértices están conectados por un arco. Se representa como K_n al grafo completo de n vértices (Figura 4.2.).
2. Una **'clica'** es un subgrafo de un grafo que es completo (Figura 4.3.).

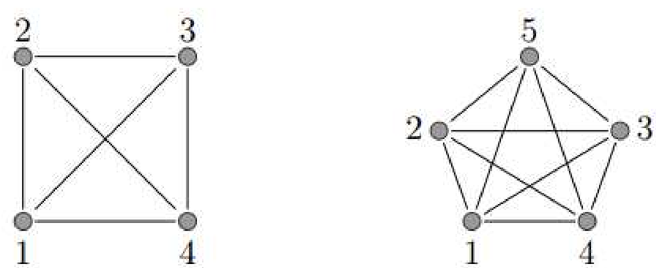


Figura 4.2: Ejemplo de grafo K_4 y K_5

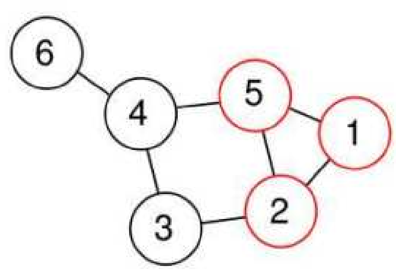


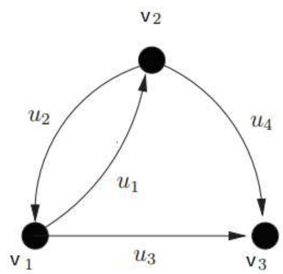
Figura 4.3: Ejemplo (en rojo) de una clica

4.4. Representaciones de un grafo

Existen diferentes formas de representar un grafo.

1. Matriz de adyacencia

Para construir la matriz de adyacencia se crea una matriz cuyas columnas y filas representan los vértices del grafo y las entradas representan si existe un arco entre los vértices.



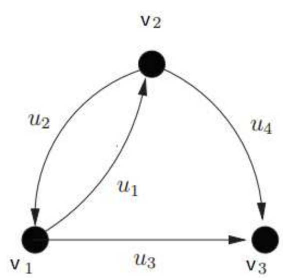
origen	v_1	v_2	v_3	destino
v_1	0	1	1	
v_2	1	0	1	
v_3	0	0	0	

Figura 4.4: Grafo y su matriz de adyacencia

2. Matriz de incidencia

Para construir la matriz de adyacencia se crea una matriz cuyas columnas representan los arcos y las filas los vértices. Por cada vértice unido por un arco se asigna uno (1) si el arco sale de dicho vértice y uno negativo (-1) si el arco entra en dicho vértice y cero (0) si el arco no toca ese vértice.

3. Lista de adyacencia



vértices	u_1	u_2	u_3	u_4	arcos
v_1	1	-1	1	0	
v_2	-1	1	0	1	
v_3	0	0	-1	-1	

Figura 4.5: Grafo y su matriz de incidencia

Las listas de adyacencia encuentran su interés en el poco uso de memoria que estas requieren para su representación computacional. Se define una lista de adyacencia para cada vértice y luego una lista de listas de adyacencia que representa las adyacencias de cada vértice.

Ejemplo: Para el grafo de las Figuras 4.4. y 4.5. la matriz de adyacencia sería: $[[v_2, v_3], [v_1, v_3]]$ en donde la primera sublista corresponde a los arcos que empiezan en el vértice 1 y termina en cada uno de los vértices de la sublista y asi sucesivamente con cada sublista.

4.5. Coloración de vértices de un grafo

Definición 4.5.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, entonces un subconjunto $S \subset V$ es un conjunto **estable** (o **simplmente estable**) si ningún par de vértices son adjayecetes, i.e., $\forall i, j \in$

$S \Rightarrow (i,j) \notin E$.

Ejemplo: Si retomamos el grafo no dirigido de la Figura 4.1, un ejemplo de un subconjunto estable podría ser $S = \{[B,C],[B,D]\}$.

NOTA:
Es evidente que para conjuntos estables, todos los subconjuntos son estables y por ende tiene sentido buscar el cardinal máximo de un conjunto estable (**maximal estable**); es decir, el subconjunto estable con el mayor número de vértices. A este número se le llama **número de estabilidad** y se denota $\alpha(G)$.

Definición 4.5.2. La **coloración** de un grafo consiste en colorear todos los vértices de tal forma que cada par de vértices adyacente no tenga el mismo color. Se dice que un grafo es k-*coloreable* si se puede colorear de forma que se usen k colores para hacerlo.

NOTA:
El número k más pequeño para el cual un grafo G es k-*coloreable* se denomina el **número cromático** del grafo, denotado $\gamma(G)$, se define como el número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices de G.Una k-*coloración* de los vértices es una partición $(S_1, S_2, ..., S_k)$ del conjunto de vértices en k subconjuntos estables.

Ejemplo:
El siguiente grafo es 3-coloreable.

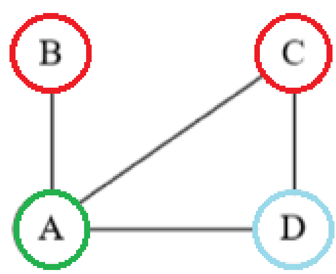


Figura 4.6: Coloración del grafo no dirigido de la Figura 1

4.6. Conexidad en grafos

Definición 4.6.1. Sea G un grafo no dirigido, entonces un **camino** es una secuencia de vértices tales que existe un arco entre cada vértice y el siguiente y no se repiten arcos. El mismo concepto se aplica a grafos dirigidos y se denomina **camino dirigido**. Se llama **camino cerrado** a un camino cuyas extremidades coinciden.

NOTA:
1. Un camino es **simple** si no se repiten vértices. Un camino es un **ciclo** si es simple y cerrado.

Definición 4.6.2. Un camino se dice **camino euleriano** si contiene a todos los arcos, apareciendo cada uno de los arcos exactamente una vez, es decir, pasa por cada vértice solo una vez y es cerrado. Un grafo que admite dicho camino se denomina **grafo euleriano**, y sus vértices o tienen grado par o dos de los vértices tienen grado impar.

Ejemplo:
En la imagen anterior:

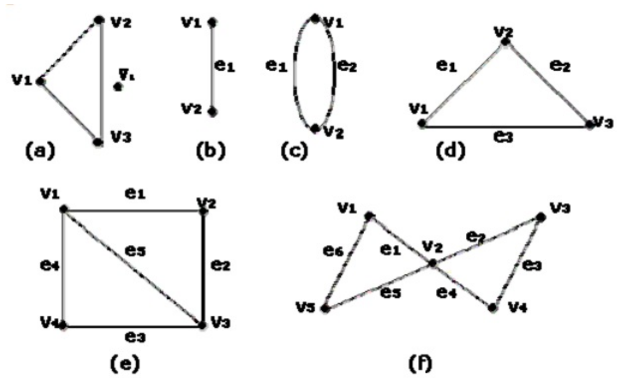


Figura 4.7: ¿Qué grafos son eulerianos?

(a) No es Euleriano porque v_4 es un vértice aislado.
(b) No lo admite porque cualquier ciclo utilizará la arista e_1 dos veces.
(c) El grafo es euleriano pues el camino v_1–v_2–v_1 es euleriano.
(d) El grafo es euleriano pues v_3-v_1–v_2–v_3 es euleriano.
(e) No admite ningún camino euleriano.
(f) El grafo es euleriano porque el camino v_1–v_2–v_3–v_4–v_2–v_5–v_1 es un camino euleriano.

Definición 4.6.3. Un camino se dice **camino hamiltoniano** si es un camino simple que contiene todos los vértices apareciendo cada uno de ellos exactamente una vez. Un ciclo que, a su vez, es un camino hamiltoniano se denomina **ciclo hamiltoniano**, y un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se denomina **grafo hamiltoniano**.

NOTA:
Note que la definición no exige que se pase por cada arco existente en el grafo.

Ejemplo:

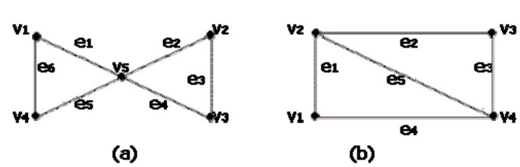


Figura 4.8: ¿Qué grafos son hamiltonianos?

En la imagen anterior:
(a) No es un grafo hamiltoniano pues no admite ciclos hamiltonianos:
- Si se inicia en cualquier vértice $v_j, j \neq 5$ entonces se tiene que pasar por v_5 dos veces.

- Si se inicia en v_5, para luego pasar por todos los vértices igual habría que volver a pasar por v_5 y terminar en v_5 con lo cual se pasaría por v_5 tres veces.
b) El ciclo hamiltoniano podría ser e_1-e_2-e_3-e_4.

Definición 4.6.4. En un grafo, el subconjunto de vértices accesibles dado un vértice se denomina **cerradura transitiva** de dicho vértice.

Definición 4.6.5. En un grafo no dirigido G, dos vértices **están conectados** si existe un camino entre ellos De lo contrario están **desconectados**. Un grafo es **conexo** si cada par de vértices del grafo están conectados. Un grafo en el que existe al menos un par de vértices desconectados es **disconexo**.

Ejemplo:

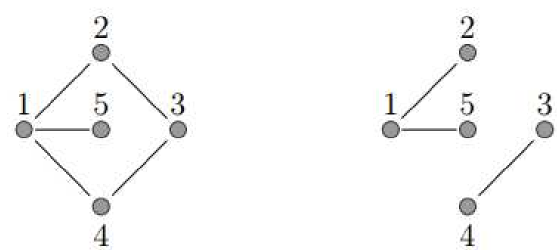


Figura 4.9: Ejemplo de un grafo conexo y un grafo disconexo

NOTA:
La relación 'estar conectado' es de equivalencia. (ver sección relaciones en la página 13)

Definición 4.6.6. Un grafo dirigido se denomina **débilmente conexo** si el grafo subyacente es conexo, i.e., si al reemplazar sus arcos dirigidos por arcos no dirigidos se obtiene un grafo no dirigido conexo.
Un grafo dirigido es **conexo** si $\forall i, j \in V$ existe un camino dirigido de i a j o de j a i.
Un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si $\forall i, j \in V$ existe un camino dirigido de i a j y de j a i.
Las **componentes débilmente conexas**, **conexas**, o **fuertemente conexas** son respectivamente, los subgrafos débilmente conexos, conexos, o fuertemente conexos.

Ejemplos:

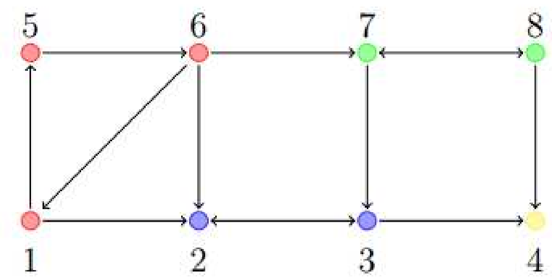


Figura 4.10: Ejemplo de las componentes fuertemente conexas de un grafo

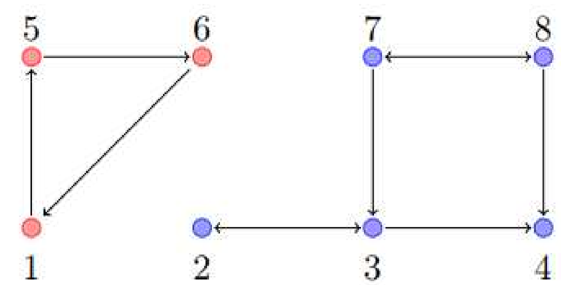


Figura 4.11: Ejemplo de las componentes débilmente conexas de un grafo

La Figura 4.10. representa a un grafo conexo y la Figura 4.11. a un grafo disconexo, pero que tiene componentes débilmente conexas, no son conexas porque por ejemplo no existe ningún camino que vaya del vértice 2 al 7, ni del 7 al 2.

NOTA:
Es evidente que:
- Todo grafo fuertemente conexo es conexo, pero no todo grafo conexo es fuertemente conexo.
- Todo grafo conexo es débilmente conexo, pero no todo grafo débilmente conexo es conexo.

Definición 4.6.7. Sea G un grafo conexo, un **conjunto de corte** de G es un conjunto de vértices que desconectan a G.
Un grafo se dice **super conexo** si cada conjunto de corte mínimo aísla un vértice.
Un grafo se dice **hiper conexo** si la eliminación de cada conjunto de corte mínimo crea exactamente dos componentes, siendo una de ellas un vértice aislado.

NOTA:
Todo grafo hiper conexo es super conexo, pero no todo grafo super conexo es hiper conexo.

Ejemplo:

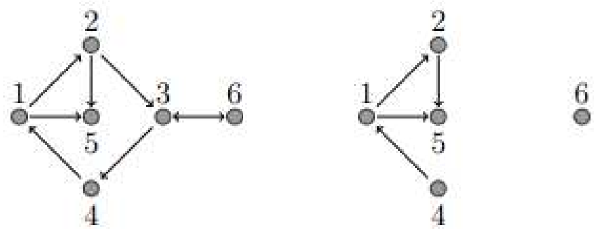


Figura 4.12: Ejemplo de un conjunto hiperconexo, removiendo el conjunto de corte mínimo $\{3\}$

4.7. Algunos conceptos básicos sobre relaciones

Definición 4.7.1. Una **relación** del conjunto E es un subconjunto del producto $E \times E$.

Ejemplo:
La relación R, llamada relación de igualdad de E está definida de modo que xRy o $(x, y) \in R \subset E \times E$ si $x = y$, i.e., $R = \{(x, y) \in E \times E \ni x = y\}$.

Definición 4.7.2. Una relación R es:
i) **reflexiva** si $\forall x \in E, xRX$.
ii) **simétrica** si $\forall x, y \in E \ni xRy \Rightarrow yRx$.
iii) **antisimétrica** si $\forall x, y \in E \ni xRy \wedge yRx \Rightarrow y = x$.
iv) **transitiva** si $\forall x, y, z \in E \ni xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

NOTA IMPORTANTE:
1. Una relación es **de equivalencia** si, y solo si, es reflexiva, simétrica y transitiva.
2. Una relación es **de orden** si, y solo si, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 4.7.3. Sea R una relacion para el conjunto E y $A \subseteq$ entonces se define a la **imagen del conjunto A por R** como:

$$R(A) = \{y \in E \ni xRy, x \in A\}$$

Y se define a la **imagen inversa de A por R** como:

$$R^{-1}(A) = \{x \in E \ni xRy, y \in A\}$$

.

NOTA:
Para $z \in E$, por convención, denotaremos a $R(\{z\})$ y $R^{-1}(\{z\})$ como $R(z)$ y $R^{-1}(z)$ respectivamente.

Definición 4.7.4. Sea S un conjunto parcialemente ordenado, por la relación $\leq$. Entonces se dice que S está **acotado superiormente por** u, o que u es una **cota superior de** S, si $x \leq u \forall x \in S$. Una cota superior u se llama **supremo** si no existe ningún l tal que $l \leq u$ y l cota superior de S.

Definición 4.7.5. Sea S un conjunto parcialemente ordenado, por la relación $\leq$. Entonces se dice que S está **acotado inferiormente por** u, o que u es una **cota inferior de** S, si $u \leq x \forall x \in S$. Una cota inferior u se llama **ínfimo** si no existe ningún l tal que $u \leq l$ y l cota inferior de S.

NOTA:
Note que el supremo, e ínfimo, para dos elementos se definen igual solo que se consideran solamente dos elementos del conjunto.

Definición 4.7.6. Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado para el cual, para cada par de elementos se tiene un supremo Y un ínfimo.

CAPÍTULO 5

Modelación de redes complejas por la teoría de grafos

5.1. Redes complejas

Las redes complejas son representaciones de la realidad de n elemntos interactuando entre sí y cuyas propiedades pueden estudiar el comportamiento de algún fenómeno, ya sea biológico, social, tecnológico o de informática. Un ejemplo de esto, y para entender la importancia de la herramienta necesaria para estudiar redes complejas, es que para leer esta tesis, se necesita la interacción (sinápsis) entre un conjunto de neuronas de nuestro cerebro.

En un sistema **complejo** los elementos (vértices) que lo constituyen inturactúan entre sí, pero su comportamiento global no puede deducirse de la suma de comportamientos por partes, y es por eso que resulta interesante buscar propiedades que permitan analizar, predecir y concluir sobre su comportamiento global.

Habitualmente se recurre a la teoría de grafos para el estudio de redes complejas y se define la red como el conjunto de vértices en donde la relación entre estos vértices se explicita cuando hay un arco. Se aplican entonces las definiciones y propiedades presentadas con anterioridad y, además, es interesante mencionar lo presentado a continuación.

Aún cuando se encuentran diferentes tipos de aplicaciones, las estructuras y comportamientos de estas redes pueden modelarse de manera muy similar. Y la ventaja de modelar una red como un grafo se encuentra en la simpleza de estudio que se consigue.

El matemático Euler presentó el problema de Koningsberg, ¿es posible cruzar la ciudad de Koningsberg pasando por los siete puentes que la constituyen una sola vez? Para esto, Euler recurrió por primera vez a la teoría de grafos en donde representó los puentes como vértices del grafo y la conexión entre ellos como los arcos del grafo, de esto, desarrolló la teoría de grafos eulerianos, presentados en el cápitulo anterior.

La teoría de grafos nos prove un lenguaje descriptivo de las redes. Pero, es necesario tener indicadores estructurales estadísticos cuando se busca estudiar redes muy grandes. Retomando el ejemplo de la sinápsis entre neuronas, el cerebro humano tiene aproximadamente $n \approx 10^{11}$ neuronas, con lo cual la representación visual del grafo (red) se vuelve más díficil y es necesario tener una descripción que no requiera el dibujo del grafo necesariamente.

5.2. Conceptos básicos y algunos indicadores estructurales de un grafo en redes complejas

Definición 5.2.1. Desde un punto de vista matemático, es posible representar una red según a la adyacencia entre sus vértices. Sea un grafo de n vértices, se define la **matriz de adyacencia** $A \in \mathcal{M}^n = [A_{ij}]$ de la froma siguiente:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ está conectado con } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{5.1}$$

NOTA:

1. En el caso de un grafo no dirigido, esta matriz es simétrica y se tiene que $A_{ij} = A_{ji}$, mientras que para un grafo no dirigido, $A_{ij} = 1$ implica que el arco sale del vértice i al vértice j, y no necesariamente es cierto que $A_{ji} = 1$.

2. También es posible modelar fenómenos en donde se le asigna un peso a los elementos de la matriz de adyacencia y se tiene en términos generales que $0 \leq A_{ij} \leq 1$.

Definición 5.2.2. Sea un grafo de n vértices y A su matriz de adyacencia. Es posible definir lo siguiente:

i) El **grado de salida** de i es $d^+(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ y es el número de arcos que tienen a i como extremo inicial.

ii) El **grado de entrada** de i es $d^-(i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}$ y es el número de arcos que tienen a i como extremo final.

iii) El **grado** de i es $d(i) = \sum_{j=1}^{n} A_i j = d^+(i) + d^-(i)$. En un grafo *no dirigido* es simplemente el número de arcos que tocan al vértice i.

Definición 5.2.3. Sea un grafo de n vértices y m arcos, entonces la **densidad** del grafo se define como:

$$\Delta = \frac{2m}{n(n-1)}$$

NOTA:

Note que $0 < \Delta < 1$, donde $\Delta = 0$ si todos los vértices son aislados y $\Delta = 1$ si todos los vértices están conectados. Si Δ es cercano a cero se dice que el grafo es **disperso** y si Δ es cercano a 1 se dice que el grafo es **denso**.

Definición 5.2.4. El **coeficiente de agrupamiento** C (en inglés "**clustering coefficient**") es la probabilidad de que dos vecinos de un vértice sean también vecinos entre ellos. Este coeficiente corresponde a la densidad local de un vértice, i.e, a la densidad según un vértice. Sea $d(i)$ el grado del vértice i entonces:

$$C(i) = 2 \times \frac{número\, de\, arcos\, entre\, los\, vértices\, adyacentes\, de\, i}{d(i)(d(i)-1)}$$

.

NOTA:
Se habla de **densidad local fuerte** cuando los vértices adyacentes al vértice de estudio están altamente relacionados entre ellos.

Ejemplo:

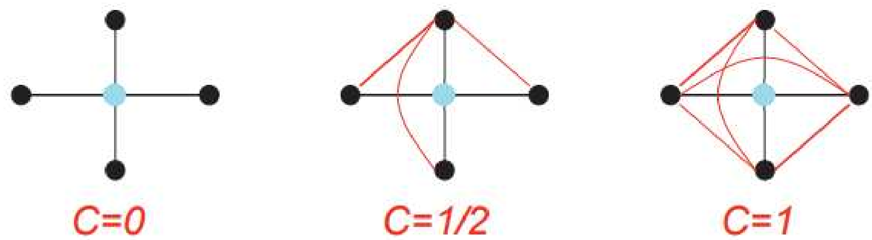


Figura 5.1: Ejemplo de diferentes coeficientes de agrupamiento para el punto celeste de los grafos

Definición 5.2.5. El **coeficiente de agrupamiento promedio** se define de la forma siguiente, para un grafo de n vértices:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \sum_i C(i)$$

Definición 5.2.6. El **grado de asortatividad** o **grado de correlación de Pearson** es el promedio de los grados de los vecinos del vértcice en cuestión.

Ejemplo:
El grado de i es 4 y los grados de los vértices adyacentes están explicitados en la figura. El grado

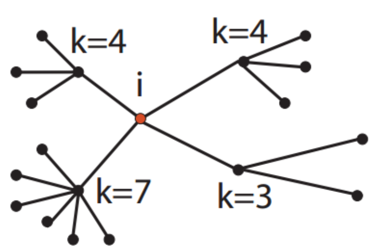


Figura 5.2: Ejemplo para calcular el grado de asortatividad de i

de asortatividad, denotemolo k_i, se calcula de la siguiente forma:

$$k_i = \frac{4+4+7+3}{4} = 4.5$$

NOTA:
A veces también resulta interesante estudiar la distribución de los grados de los vértices mediante distribuciones de probabilidades:
- Una distribución homogénea se estudia según una distribución de Poisson
- Una distribución heterogénea se estudia según una distribución exponencial

Definición 5.2.7. Un **grafo aumentado** $G = (V, E, E')$ es, como su nombre lo indica, un aumento del grafo (V, E) agregando vértices y arcos con el conjunto E' en donde las "distancias" entre los vértices se mantienen.

Definición 5.2.8. La **distancia** entre dos vértices i y j se define como el camino más corto que nos permite llegar de i a j, y se denota como l_{ij}.

Definición 5.2.9. Sea un grafo de n vértices, entonces la **la distancia promedio** del grafo se define de la manera siguiente:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij}$$

NOTA:
Es posible estimar el número de vértices adyacentes a una distancia l de un vértice dado, con $\langle k \rangle^l$ en donde $\langle k \rangle$ es el grado promedio y no se tienen ciclos. Entre más grande sea l, más grande la cantidad y se se asume que $\langle l \rangle \to n$ es posible estimar $\langle l \rangle$ con la igualdad $\langle k \rangle \approx \frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)}$

Definición 5.2.10. El **diámetro de un grafo** se define como el camino más largo de los caminos más cortos entre dos vértices.

Definición 5.2.11. Es posible también hablar de la **importancia de un nodo** i, se define de la siguiente forma:

$$b(i) = \sum_{k \neq i \neq j} = \frac{\sigma(kij)}{\sigma(kj)}$$

en donde $\sigma(kj)$ representa el número total de distancia desde k a j y $\sigma(kij)$ representa el número total de estas distancias que pasan por i.

Estas propiedades, en conjunto con las del cápitulo anterior, permiten estudiar las estructura de las redes complejas desde el enfoque de la teoría de grafos. Sin embargo, es importante destacar que la estructura de una red no es suficiente para su estudio. Para empezar, se necesita un conjunto de datos que no estén sesgados y una propiedad "pertinente", o sea que no se observe de forma general en todo el conjunto. También es importante el estudio del dinamismo en la red.

5.3. Algunas modelaciones existentes

A. El experimento de Milgram y los pequeños mundos

Stanley Milgram fue un psicólogo estadounidense graduado de la Universidad de Harvard. Entre sus numerosos estudios, desarrolló en los años sesenta uno que trataba el tema de "small world" y la idea de "six degrees of separation" desarrollada inicialmente por el escritor húngaro Frigyes Karinthy. Esta idea dice que, en el mundo, dos personas están conectadas por una cadena de, máximo, 6 intermediarios. Para hacer su estudio, Milgran dio cartas a diferentes personas con diferentes destinatarios y estudio cómo estas llegaban al destinatario, en cuánto tiempo y a través de cuántos intermediarios. Las personas entregaban la carta a la siguiente persona de forma aleatoria o sesgada, a quien creían pudiera estar conectado con el destinatario. Inicialmente solo 6 % de las cartas lograron llegar a su destinatario. Pero, cambiando las condiciones, afinando el mecanismo de entrega al siguiente intermediario, Milgram logró llevar el experimento a un 33 % de éxito. Y más adelante, otros investigadores, lograron llevarlo a 97 % de éxito. La evidencia presenciada por estos experimentos no es suficiente para concluir que el mundo es un "small world" pero, si basta para establecer que el mundo está compuesto de "small worlds". También se encontró que el número promedio de intermediarios es seis (6), con lo cual nació el concepto de "six degrees of separation" y Milgram notó que, aproximadamente, 66.67 % de las cadenas fueron completadas por las mismas personas.

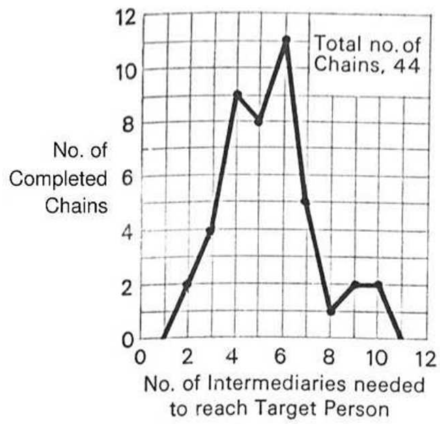


Figura 5.3: Los resultados de Milgram

B. Los grafos aleatorios

Uno de los primeros modelos desarrollados para el estudio de redes complejas fue dado por Paul Erdos y Alfred Renyi en 1959: los grafos aleatorios. Un grafo de n vértices es aleatorio si la colocación de los arcos se hace siguiendo una distribución aleatoria uniforme. Erdos y Renyi describieron diferentes modelos de grafos aleaotorios pero el más estudiado es $G_{n,p}$, un grafo aleatorio en donde la presencia de un arco entre dos vértices se da de forma independiente con una probabilidad p y su ausencia con una probabilidad 1-p. Sin embargo, los grafos $G_{n,p}$ suelen estudiarse con base en el grado medio de sus vértices z y como el promedio de arcos es $\frac{1}{2}n(n-1)p$ y el promedio de vértices corresponde al doble de esto (pues cada arco toca dos vértices) entonces se puede deducir el grado promedio:

$$z = \frac{n(n-1)p}{n} = (n-1)p \approx np$$

Una componente de un grafo es un subconjunto de vértices que están conectados (es decir un subgrafo conexo). Es fácil darse cuenta que para valores pequeños de z, cuando hay pocos vértices, estos, en su mayoría, no suelen estar conectados y por ende las componentes son pequeñas. Sin embargo, existe un valor crítico de z para el cual la más grande componente del grafo contiene una parte finita S del número total de vértices n, y su tamaño nS aumenta linealmente cuando lo hace el número de vértices (el tamaño del grafo). Esta componente se llama **componente gigante** y el grafo puede tener más componente pero pequeñas y con un tamaño que se queda constante aunque el tamaño del grafo aumente.

Este concepto se acerca mucho a la realidad, por ejemplo, si pensamos en las redes sociales es muy probable que exista una componente gigante en la cual la mayoría de los usuarios estén conectados. Pero, el concepto difiere de las redes complejas reales en diferentes puntos. Algunas de las diferencias más importantes fueron encontradaas por Strogatz y Albert-Barabasi. Una de estas fue el hecho que las redes reales presentan altos coeficientes de agrupamiento, lo cual no suele ser el caso en los grafos aleatorios pues la probabilidad de que dos vértices sean adyacentes es independiente, y por ende no hay diferencia en la probabilidad de que dos vértices estén conectados, o no, aunque tengan, o no, un vértice adyacente en común, esto no es cierto en la realidad.

C. Modelo de Barabasi-Albert

Este modelo consiste en dos pasos para la creación de una red compleja. Emmpezamos con m_0 vértices arbitrarios, de forma que cada uno tenga al menos un arco. Luego, para hacer crecer la red, agregamos un vértice que se conecta a $m \leq m_0$ vértices preexistentes en donde la probabilidad $\Pi(d_i)$ de que este vértice esté conectado (en el sentido de conexión expuesto anteriormente) al vértice i depende del grado d_i de i:

$$\Pi(d_i) = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$$

Este modelo es más pertinente respecto a la realidad pero varios estudios muestran que, al aplicar este modelo se crean árboles, lo cual no es necesariamente válido con respecto al comportamiento real de las redes complejas.

Habiendo expuesto esto, es posible defender que, aún siendo modelaciones bastante acertadas, presentan algunas desventajas y es por esto que se recurre a otras teorías como la pretopología. Para hablar de pretopología es necesario exponer algunos conceptos de topología que nos permiten entender incluso de donde nace la idea.

CAPÍTULO 6

Topología

6.1. Espacios topológicos

Definición 6.1.1. Sea $X \neq \varnothing$. Una clase $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **topología** para X si, y solo si, se satisfacen:
i) $\varnothing$, $X \in \tau$
ii) Cualquier unión de elementos de τ está en τ
iii) Si A, $B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
A los elementos de τ se les llama **abiertos** de X y al par (X, τ) se le llama **espacio topológico**.

Ejemplos importantes:
1. Dado el espacio $X \neq \varnothing$, $\mathcal{P}(X)$ es una topología para X. Se le llama **topología discreta** τ_D.
2. Dado el espacio $X \neq \varnothing$, y defináse $\tau = \{\varnothing, X\}$, entonces τ es una topología para X. Se le llama **topología indiscreta** o **topología trivial**.

NOTA:
Decir que una topología τ_1 es **más fina** que otra topología τ_2 quiere decir que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. También se puede decir que τ_2 es **más gruesa** que τ_1. La topología más fina es la discreta y la topología más gruesa es la trivial.

Definición 6.1.2. Sea X un espacio topológico. Un punto $p \in X$ es un **punto de acumulación** (o **punto límite**) de un subconjuto A de X si, y solo si, cada conjunto abierto G que contiene a p es tal que:

$$(G - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$$

El conjunto de todos los puntos límite de A, denotado A', se llama **conjunto derivado** de A.

Definición 6.1.3. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es **cerrado** si, y solo si, A^C es abierto.

Propiedad 1. *En un espacio topológico X, un subconjunto A de X es abierto si, y solo si, A^C es cerrado.*

Demostración. Se da por la definición de cerrado y el hecho que $(A^C)^C = A$.

□

Propiedad 2. *En un espacio topológico (X, τ), la clase de subconjutos cerrados de X cumple las siguientes propiedades:*
i) $X, \varnothing$ son cerrados.
ii) La intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es cerrado.
iii) La unión de cualquier par de cerrados es cerrado.

Demostración. i) $\varnothing$ es abierto de $X \Rightarrow \varnothing^C = X$ es cerrado.
X es abierto de $X \Rightarrow X^C = \varnothing$ es cerrado.
ii) Sea $\{F_i : i \in I\}$ una clase de conjuntos cerrados de X, entonces:

$$\bigcap_{i \in I} F_i = (\bigcup_{i \in I} F_i^C)^C$$

Pero note que

$$\bigcup_{i \in I} F_i^C \in \tau \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} F_i^C)^C$$

es un cerrado de X.

□

Propiedad 3. *Si $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$.*

Demostración. Sea $x \in A' \Leftrightarrow$ para cada abierto G de $A \ni x \in G$ se tiene que $(G - x) \cap A \neq \varnothing$. Y como $A \subset B \Rightarrow (G - x) \cap A \subset (G - x) \cap B \Rightarrow (G - x) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in B' \Rightarrow A' \subset B'$. □

Propiedad 4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Demostración. Se hará la demostración por doble contención de conjuntos.
1. $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)''$.
$A \subseteq A \cup B \wedge B \subseteq A \cup B \Rightarrow A' \subseteq (A \cup B)' \wedge B' \subseteq (A \cup B)'$ por la propiedad anterior. Por lo tanto $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.
2.$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \Leftrightarrow$ Si $p \in (A \cup B)' \Rightarrow p \in A' \cup B' \Leftrightarrow$ Si $p \notin A' \cup B' \Rightarrow p \notin (A \cup B)'$.
Partamos entonces de la suposición $p \notin A' \cup B' \Rightarrow p \notin A' \wedge p \notin B' \Rightarrow \exists G$ y $H \in \tau \ni (p \in G \wedge p \in H) \wedge ((G \cap A) \subseteq \{p\} \wedge (H \cap B) \subseteq \{p\})$. Por otro lado, sabemos que $G \cap H \in \tau$ y $p \in G \cap H$. Entonces $(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subseteq \{p\} \cup \{p\} = \{p\} \Rightarrow p \notin (A \cup B)' \Rightarrow (A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.
Por lo tanto, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

□

Definición 6.1.4. Sea A un subconjunto del espacio topológico X. La **cerradura** de A, denotada $\overline{A}$, es la intersección de todos los superconjuntos cerrados de A. Es decir, si $\{F_i : i \in I\}$ es la clase de todos los conjuntos cerrados de X tales que $A \subseteq F_i$, entonces

$$\overline{A} = \cap_i F_i$$

NOTA:
- $\overline{A}$ es cerrado.
- Si F es un cerrado que contiene a A, es decir $A \subseteq F$, entonces:

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq F$$

.

Definición 6.1.5. Sea A un subconjunto del espacio topológico (X, τ). Un punto $p \in A$ es un **punto interior de A** si $\exists G \in \tau \ni p \in G \subset A$.

Definición 6.1.6. El conjunto de los puntos interiores de A es el **interior** de A denotado $int(A)$, A°.

Propiedad 5. *El interior de un conjunto A es la unión de todos los abiertos coontenidos en A*

Demostración. Sea $\{G_i\}$ la clase de todos los abiertos contenidos en A. Queremos entonces probar que $A^\circ = \cup_i G_i$. Lo haremos por doble contención.
1. $A^\circ \subseteq \cup_i G_i$:
Si $x \in A^\circ \Rightarrow \exists i_0 \ni x \in G_{i_0} \in \tau \Rightarrow x \in \cup_i G_i$. Con lo cual se demuestra $A^\circ \subseteq \cup_i G_i$.
2. $\cup_i G_i \subseteq A^\circ$:
Si $y \cup_i G_i \Rightarrow y \in G_i$ para algún $i \Rightarrow y \in A^\circ$ por definición $\Rightarrow \cup_i G_i^\circ$.
Por lo tanto, $A^\circ = \cup_i G_i$

□

NOTA:
1. A° es abierto por ser unión de abiertos.
2. A° es el abierto más grande contenido en A, en efecto, si $G \in \tau \ni G \subset A$, entonces $G \subset \cup_i G_i = A^\circ \subseteq A$.
3. Si A es abierto, entonces $A \subseteq A^\circ A \Rightarrow A = A^\circ$.

Teorema 1. *Un subconjunto A de un espacio topológico es cerrado si, y solo si, $A' \subset A$*

Demostración. ($\Rightarrow$) A probar: si $p \in A' \Rightarrow p \in A \Leftrightarrow$ si $p \notin A \Rightarrow p \notin A'$.
Suponga entonces que A es cerrado y que $p \notin A \Rightarrow p \in A^C \in \tau$ y note que $A^C \cap A = \varnothing \Rightarrow p \notin A' \Rightarrow A' \subset A$.
($\Leftarrow$) Suponga ahora que $A' \subset A$ y queremos probar que A es cerrado, es decir que A^C es abierto. Sea $p \in A^C p \notin A \wedge p \notin A' \Rightarrow \exists$ un abierto $G \ni p \in G, (G - \{p\}) \cap A = \varnothing$. Pero como $p \notin A \Rightarrow G \cap A = (G - \{p\}) \cap A = \varnothing \Rightarrow G \subseteq A^C$ en donde p es un punto interior de $A^C \Rightarrow A^C$ es abierto $\Rightarrow A$ es cerrado.

□

Propiedad 6. *Si F es un superconjunto cerrado de cualquier conjunto A, entonces $A' \subset F$*

Demostración. Sabemos que $A \subset F \Rightarrow$ por la propiedad 3 $A' \subset F'$ y como F es cerrado, por el teorema 2 $F' \subset F \Rightarrow A' \subset F' \subset F \Rightarrow A' \subset F$.

□

Propiedad 7. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Demostración. Demostremos que $(A\cup A')^C$ es abierto. Sea $p \in (A\cup A')^C \Rightarrow (p \notin A)\wedge(p \notin A') \Rightarrow \exists G$ abierto $\ni p \in G \wedge G\cap A \subset \{p\}$. Como $p \notin A \Rightarrow G\cap A = \varnothing$ y además, si $g \in G$ y como $G\cap A = \varnothing \Rightarrow g \notin A' \Rightarrow G\cap A' = \varnothing$. Por lo que, $G\cap(A\cup A') = (G\cap A)\cup(G\cap A') = \varnothing\cup\varnothing = \varnothing \Rightarrow G \subseteq (A\cup A')^C$, con lo cual p es punto interior de $(A\cup A')^C \Rightarrow (A\cup A')^C$ es abierto $\Rightarrow A\cup A'$ es cerrado.

□

Teorema 2. $\overline{A} = A\cup A'$.

Demostración. La demostración se hará por doble contención de conjuntos.
1. $\overline{A} \subseteq A\cup A'$:
Como $A \subset A\cup A'$ y $A\cup A'$ es cerrado por propiedad 7, entonces $A \subset \overline{A} \subseteq A\cup A'$.
2. $A\cup A' \subseteq \overline{A}$:
Sabemos que $A \subset \overline{A}$ y por la propiedad 3 $A' \subset (\overline{A})'$ y como $\overline{A}$ es cerrado $(\overline{A})' \subset \overline{A} \Rightarrow A' \subset \overline{A} \Rightarrow A\cup A' \subseteq \overline{A}\cup\overline{A} = \overline{A}$.
Por lo tanto, $\overline{A} = A\cup A'$.

□

NOTA:
1. El **exterior** de A, denotado $ext(A)$, es $ext(A) := (A^C)^\circ$.
2. La **frontera** de A, denotada $b(A)$, es el conjunto de puntos que no está en A° y tampoco en $ext(A)$.

Teorema 3. $\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$.

Demostración. Nótese primero que $X = A^\circ \cup b(A)\cup ext(A) \Leftrightarrow (A^\circ\cup b(A))^C = ext(A)$ y que se quiere demostrar entonces $(\overline{A})^C = ext(A)$. Y ahora hágase la demostración por doble contención.
1. $ext(A) \subseteq (\overline{A})^C$:
Sea $p \in ext(A) \Rightarrow \exists$ un abierto $G \ni p \in G \subset A^C \Rightarrow G\cap A = \varnothing \Rightarrow p \notin A' \Rightarrow p \notin A\cup A' = \overline{A} \Rightarrow p \in (\overline{A})^C$.
2. $(\overline{A})^C \subseteq ext(A)$:
Sea $p \in (\overline{A})^C \Rightarrow (A\cup A')^C \Rightarrow p \notin A$ y $p \notin A' \Rightarrow \exists$ un abierto $G \ni p \in G$ y $G\cap A = \varnothing \Rightarrow p \in G \subset A^C \Rightarrow p \in ext(A) \Rightarrow$
Por lo tanto, $(\overline{A})^C = ext(A)$.

□

NOTA:
Los conjuntos cerrados contienen a sus puntos frontera.

Definición 6.1.7. Un subconjunto A del espacio topológico X es **denso en** $B \subset X$ si $B \subset \overline{A}$.

NOTA:
A es denso en X si, y solo si, $\overline{A} = X$.

Ejemplo:
Sea $X = \{a,b,c,d,e\}$ y una topología τ sobre $X \ni$ los cerrados son:

$$\varnothing, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}$$

Entonces, 1. $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$; $\overline{\{a,c\}} = X$; $\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$.
2. $\{a,c\}$ es denso en X.

Definición 6.1.8. Un subconjunto A del espacio topológico X se dice es **nunca denso en** X si $(\overline{A})^\circ$.

Ejemplo: Considere $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ y recordemos que $0 \in A'$ y $\overline{A} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \Rightarrow (\overline{A})^\circ = \varnothing \Rightarrow A$ es nunca denso en $\mathbb{R}$

6.2. Subespacios

Definición 6.2.1. Sea A un subconjunto no vacío del

NOTA:
En efecto, τ_A es topología para A:
i) $\varnothing \in \tau \Rightarrow \varnothing \cap A = \varnothing \in \tau_A$ y $X \in \tau \Rightarrow X \cap A = A \in \tau_A$.
ii) Sea $\{H_i\}$ una clase de miembros de $\tau_A \Rightarrow \exists G_i \in \tau \ni H_i = G_i \cap A, \forall i$. Entonces $\cup_i(G_i \cap A) = (\cup_i G_i) \cap A$ y como $(\cup_i G_i) \in \tau$, entonces $\cup_i(G_i \cap A) = (\cup_i G_i) \cap A \in \tau_A$.
iii) Sean $H_1,\ H_2 \in \tau_A \Rightarrow \exists G_1,\ G_2 \in \tau \ni H_1 = G_1 \cap A \wedge H_2 = G_2 \cap A \Rightarrow H_1 \cap H_2 = (G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = (G_1 \cap G_2) \cap A$ y como $(G_1 \cap G_2) \in \tau$, entonces $H_1 \cap H_2 = (G_1 \cap G_2) \cap A \in \tau_A$.

6.3. Continuidad

Definición 6.3.1. 1. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, y $f : X \to Y$ un mapeo. Entonces f es **continua** si $\forall G \in \tau_Y$ se tiene $f^{-1}(G) \in \tau_X$. Y la imagen $f(X) \subset Y$ se llama **imagen continua** de f.
2. Sea $f : X \to Y$ un mapeo entonces f es:
i) **abierto**: si $\forall H \in \tau_X$, se tiene $f(H) \in \tau_Y$.
ii) **cerrado**: si para cada cerrado F en X, se tiene que $f(F)$ es cerrado en Y.
3. Un **homeomorfismo** es un mapeo $f : X \to Y$ que cumple las siguientes condiciones:
i) f es biyectiva
ii) f es continua
iii) f es abierta
A la imagen de f en este caso se le llama **imagen homeomorfa** de f.
4. Una **propiedad topológica** es una propiedad que se conserva bajo mapeos homeomorfos.

NOTA:
Un mapeo que es continuo y abierto se dice **bicontinuo**.

Propiedad 8. *Sea $f : X \to Y$ una función constante, digamos $f(x) = p$, $\forall x \in X$. Entonces f es continua respecto a cualquier topología τ sobre X y cualquier topología τ^* sobre Y.*

Demostración. Sea $G \in \tau^*$, entonces tenemos dos opciones:
$p \in G \Rightarrow f^{-1}(G) = X \in \tau$
$p \notin G \Rightarrow f^{-1}(G) = \varnothing \in \tau$

□

Propiedad 9. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si (Y, τ^*) es tal que τ^* es la topología indiscreta para Y, entonces $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ es continua para cualquier τ.*

Demostración. $\tau^* = \{\varnothing, Y\}$ y nótese que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ que es abierto para cualquier topología τ, también $f^{-1}(Y) = X$ que también es abierto para cualquier topología τ sobre X.

□

Propiedad 10. *La función identidad $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$, en donde las topologías no necesariamente coinciden, es continua si, y solo si, $\tau_2 \subseteq \tau_1$*

Demostración. $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua $\Leftrightarrow \forall G \in \tau_2$, se tiene que $i^{-1}(G) = G \in \tau_1 \Leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1$.

□

Propiedad 11. *Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X. Si una función $f : X \to Y$ es continua para cada τ, entonces $f : X \to Y$ es continua para $\cap_i \tau_i$, esta es la topología más pequeña (menos fina) respecto a la cual f es continua.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua respecto a una colección de topología $\{\tau_i\}$ sobre X. Y sea, H un abierto de $Y \Rightarrow \exists G \in \tau_i \forall i \ni f^{-1}(H) = G$, entonces $f^{-1}(H) \in \cap \tau_i$

□

Propiedad 12. *Una funcion $f : X \to Y$ es continua si, y solo si, la preimagen de cada cerrado en Y, es cerrado en X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea A un cerrado de $Y \Rightarrow A^C$ es abierto de $Y \Rightarrow f^{-1}(A^C) = (f^{-1}(A))^C$ es abierto de X, y entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado de X.
($\Leftarrow$) Sea $f : X \to Y$ una función tal que para cada cerrado de Y, su preimagen es un cerrado en X. Sea A un abierto de $Y \Rightarrow A^C$ es un cerrado de $Y \Rightarrow f^{-1}(A^C) = (f^{-1}(A))^C$ es un cerrado de X, por lo que $f^{-1}(A)$. Por lo tanto f es continua.

□

6.4. Conexidad

Definición 6.4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, una **trayectoria** es un mapeo continuo γ de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ en X.

NOTA:
Nótese que puede ser cualquier conjunto $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$ al que se pueda llegar por transformaciones aplicadas a $[0, 1]$. Para pasar de $[a, b]$ a $[0, 1]$ podemos aplicar la transformación $f : [a, b] \to [0, 1], \ni f(t) = \frac{t-a}{b-a}$.

Definición 6.4.2. Sea (X, τ) un espacio topológico, $x_0, x_1 \in X$. Si $\exists$ una trayectoria $\gamma : [0, 1] \to X \ni \gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$, se dice que x_0 y x_1 están **conectados** por γ.

Definición 6.4.3. Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que X es **conexo por trayectorias** si cualesquiera dos puntos de X pueden conectarse por una trayectoria.

Teorema 4. *Sean* (X, τ) *y* (Y, τ^*) *espacios topológicos* $\ni X$ *es conexo por trayectorias y* $f : X \to Y$ *un mapeo continuo, entonces* $f(X)$ *es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $y_0, y_1 \in f(X) \Rightarrow \exists x_0, x_1 \in X \ni f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$. Como X es conexo por trayectorias, entonces $\exists$ trayectoria $\gamma : [0, 1] \to X \ni \gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Entonces, sea:

$$f \circ \gamma : [0, 1] \to Y \ni (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

y nótese que esta composición es continua y es tal que $(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(x_0) = y_0$ y $(f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(x_1) = y_1$ □

Definición 6.4.4. Un espacio topológico (X, τ) es **disconexo** si NO existen $U, V \in \tau$ tales que:
i) $U \neq \varnothing \wedge V \neq \varnothing$
ii)$U \cap V = \varnothing$
iii)$U \cup V = X$
En otro caso, se dice que X es **disconexo** y U, V se dice forman una **disconexión**.
Además, se dice que X es **conexo** si X NO es disconexo.

NOTA:
Los conjuntos unitarios son conexos.

Teorema 5. *Sea* (X, τ) *un espacio conexo por trayectorias, entonces* X *es conexo.*

Demostración. Suponga por contradicción que (X, τ) es conexo por trayectorias y no es conexo. Entonces $U, V \in \tau, U \neq \varnothing$ & $V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing \wedge U \cup V = X$. Sean $x_0 \in U$ y $x_1 \in V$, como X es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \to X \ni \gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Pero, nótese que, por definición, γ es continua $\Rightarrow \gamma^{-1}(U)$ y $\gamma^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de $[0, 1]$ tales que $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cap V) = \gamma^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cap V) = \gamma^{-1}(X) = [0, 1] \Rightarrow \gamma^{-1}(U)$ y $\gamma^{-1}(V)$ son una disconexión para $[0, 1](\to\leftarrow)$. Por lo tanto, X es conexo.
□

Corolario 1 (Teorema del valor intermedio)**.** *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $f : X \to \mathbb{R}$ *un mapeo continuo, entonces* $\forall x_1, x_2 \in X$ *y* $c \in \mathbb{R} \ni f(x_1) \leq c \leq f(x_2), \exists x_0 \in X \ni f(x_0) = c$

Demostración. Como X es conexo y f continua $f(X)$ es conexo en sus intervalos y por ende $[f(x_1), f(x_2)]$ contiene a todos los puntos de $f(X)$ en ese intervalo y, además sabemos que $c \in \mathbb{R} \ni f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$, con lo cual $\exists x_0 \in X \ni f(x_0) = c$.
□

Teorema 6. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* Y *un subespacio conexo y denso de* X*, entonces* X *es conexo.*

Demostración. Sean $U, V \in \tau \ni U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = X$. Nótese que $Y \cap U, Y \cup V \in \tau_Y$ y se cumple que

$$(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) = Y \cap \varnothing = \varnothing$$

$$(Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cup (U \cap V) = Y \cup \varnothing = Y$$

Como Y es conexo $Y \subseteq Y \cap U$ o_{EX} $Y \subseteq Y \cap V$ pues sino se tendría una disconexión en Y. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y \subseteq Y \cap U$ y como claramente $Y \cap U \subseteq Y$, entonces $Y = Y \cap U \Rightarrow Y \subset U$ que es abierto y cerrado, entonces $\overline{Y} \subset U$ y como Y es denso en X, entonces $X = \overline{Y} \subset U \Rightarrow X$ es conexo. □

Definición 6.4.5. Sea (X, τ) un espacio topológico, una **componente de** X es un subespacio conexo de X que no está contenido en ningún otro subespacio conexo de X (es maximal en el sentido de contención).

NOTA:
Este concepto es análogo al concepto de componentes conexas en grafos.

Ejemplos:
1. En $\mathbb{R}$ el subespacio $[0,1] \cup [2,3]$ es disconexo y sus componentes son $[0,1]$ y $[2,3]$.
2. Si (X, τ) es conexo, solo tiene una componente: X.

Definición 6.4.6. Sea (X, τ) un espacio topológico, es **totalmente disconexo** si $\forall x \in X$, la componente que contiene a x es $\{x\}$

6.5. Redes y filtros

En esta parte se comienza a relacionar los conceptos de relaciones y redes en la topología.

Definición 6.5.1. Un conjunto Λ es un **conjunto dirigido** si existe una relación binaria $\leq$ sobre que satisface:
i) $\leq$ es reflexiva
ii) $\leq$ es transitiva
iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \exists \lambda_3 \Lambda \ni \lambda_1 \leq \lambda_3 \wedge \lambda_2 \leq \lambda_3$.
La relación $\leq$ es una **dirección** sobre Λ y se dice que $\leq$ **dirige** a Λ.

NOTA:
Esta relación es parecida a una relación de orden parcial pero se quita una de las condiciones (la antisimetría) y se agrega una diferente; se tiene un supremo para cada par de elementos.

Ejemplos:
1. $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ es un conjunto dirigido.
2. Si $(\Lambda_1, \leq_1)$ y $(\Lambda_2, \leq_2)$ son conjuntos dirigidos, entonces $(\Lambda_1 \times \Lambda_2, \leq)$ en donde $(a, b) \leq (x, y)$ si, y solo si $a \leq_1 x \wedge b \leq_2 y$, es un conjunto dirigido.

Definición 6.5.2. Una **red** en un espacio topológico X es una función $f : \Lambda \to X$ donde Λ es un conjunto dirigido.

Definición 6.5.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\omega : \Lambda \to X$ una red, se dice que ω **converge** a un punto $x \in X$ si para cada abierto U que contiene a x, $\exists d \in \Lambda$ tal que

$$T_d = \{\omega(l) : d \leq l \in \Lambda\} \subseteq U$$

Notación: la red ω converge a x y se denota $\omega \to x$.

Teorema 7. *Sea (X,τ) un espacio topoloógico y sea $A \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una red $\omega : \Lambda \to A \ni \omega \to x$.*

Definición 6.5.4. Sea (X,τ) un espacio topológico y $\omega : \Lambda \to X$ una red y $x \in X$. Se dice que x es un **punto de acumulación** de la red si para cada abierto U que contiene a x y cada $d \in \Lambda$, $\exists l \in \Lambda$ con $d \leq l \ni \omega(l) \in U$, o sea, $\omega \to x$.

Definición 6.5.5. Un subconjunto Λ^* del conjunto dirigido Λ es **cofinal** si $\forall d \in \Lambda$, $\exists l \in \Lambda^* \ni d \leq l$.

Definición 6.5.6. Sean $\omega : \Lambda_1 \to X$ y $v : \Lambda_2 \to X$ dos redes sobre X (en donde los conjuntos dirigidos $(\Lambda_2, \leq_1)$ y $(\Lambda_2, \leq_2)$ no necesariamente tienen alguna relación), se dice que v es una **subred** de ω si existe un mapeo $h : \Lambda_2 \to \Lambda_1$ que cumple:
i) h es creciente, i.e., si $\alpha \leq \beta \Rightarrow h(\alpha) \leq h(\beta)$

Definición 6.5.7. Sea X un conjunto. Una colección no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un **filtro** sobre X, satisface:
i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
ii) Si $A \in \mathcal{F}$ & $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.
iii) Si $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
Un filtro sobre X es un **ultrafiltro** si NO está contenido propiamente en cualquier otro filtro sobre X.
Un subconjunto $\mathcal{F}^*$ de un filtro $\mathcal{F}$ que también es un filtro, es un **subfiltro** de $\mathcal{F}$.

Ejemplos:
1. Sea $X \neq \varnothing \Rightarrow \{X\}$ es el **filtro trivial**.
2. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $x \in X$, considere:

$$\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X \ni \exists U \in \tau \ni x \in U \subseteq A\}$$

esta clase es un filtro sobre X y se le conoce como **filtro de las vecindades de** x.
3. La colección $U_{x_0} = \{A \subseteq X \ni_0 \in A\}$ es un filtro sobre X que es maximal,i.e., es un ultrafiltro y se le conoce como el **ultra filtro principal**. Nótese que $\{x_0\} \in U_{x_0}$.
4. Sea $A_0 \subseteq X, A_0 \neq \varnothing$. Sea $\mathcal{A}_0 = \{B \subseteq X \ni A_0 \subseteq B\}$. Entonces, $\mathcal{A}_0$ es un filtro sobre X. En efecto:
i) Evidentemente, como $A_0 \neq \varnothing$ no puede estar contenido en $\varnothing \Rightarrow \varnothing \notin \mathcal{A}_0$
ii) Sea $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A_0 \subseteq A$. Si $A \subseteq B \Rightarrow A_0 \subseteq A \subseteq B \Rightarrow A_0 \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{A}_0$.
iii) Sean $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A_0 \subseteq A$ & $_0 \subseteq B \Rightarrow$ por propiedades de conjuntos, $A_0 \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_0$.

NOTA:
Para cualquier filtro $\mathcal{F}$ sobre X, siempre es válido que $X \in \mathcal{F}$.

6.6. Axiomas de Kuratowski

Sea $X \neq \varnothing$ y $k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación. Entonces, se dice que esta satisface los **axiomas de Kuratowski** si satisface los siguientes axiomas:

(K1) $k(\varnothing) = \varnothing$
(K2) $A \subset k(A), \forall A \in \mathcal{P}(X)$
(K3) $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$
(K4) $k(k(A)) = k(A)$

Teorema 8. *Existe una única topología τ de $X \ni k(A)$ es la cerradura de A, $\forall A \subseteq X$.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y supóngase que $k(A) = \overline{A}$ entonces note que la clase de cerrados de X es la siguiente $\mathcal{F} = \{F \subset X \ni F = k(F)\}$ y sea $\tau = \{G \subset X \ni G^C \in \mathcal{F}\}$. Nótese que por la forma en que se construyó este conjunto, es único, y demuéstrese ahora que es una topología para X:

i) Como $\varnothing, X \in \mathcal{F}$ y $X = \varnothing^C, \varnothing = X^C$, entonces $\varnothing, X \in \tau$.

ii) Sean $\{G_i\}$ elementos de τ, y note que $\{G_i^C\}$ son elementos de $\mathcal{F}$, se tiene entonces $\bigcup\{G_i\} = (\bigcap\{G_i^C\})^C$, con lo cual se busca demostrar que $\bigcap\{G_i^C\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$. Por convención, sea $H_i = G_i^C$,y $H = \bigcap\{H_i\}$. Se tiene entonces que $H \subseteq H_i \Rightarrow k(H) \subseteq H_i, \forall i, \Rightarrow k(H) \subseteq \bigcap\{k(H_i)\} = \bigcap\{H_i\} = H$ y por el axioma **K2**, se tiene también que $H \subseteq k(H)$, con lo cual se demuestra que, $H = k(H) \Rightarrow H \in \mathcal{F} \Rightarrow H^C = \bigcup\{G_i\} \in \tau$.

iii) Sean A, $B \in \tau \Rightarrow A^C$, $B^C \in \mathcal{F} \Rightarrow k(A^C) = A^C$ y $k(B^C) = B^C \Rightarrow k(A^C \cup B^C) = k(A^C) \cup k(B^C) = A^C \cup B^C$ por el axioma **K3** y entonces se tiene $A^C \cup B^C \in \mathcal{F}$, por otro lado $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$, con lo cual $A \cap B \in \tau$. $\square$

CAPÍTULO 7

Pretopología

La pretopología nace de la idea de "quitar" condiciones (axiomas) de los axiomas de Kuratowski.

7.1. Espacios pretopológicos

Definición 7.1.1. Sea $X \neq \varnothing$, el mapeo $a : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ se denomina **pseudoclausura** si satisface lo siguiente:
i) $a(\varnothing) = \varnothing$
ii) $A \subseteq a(A)$, $\forall A \subseteq X$

NOTA:
1. De esta definición se desprende que $a(X) = X$ debido a que $X \subseteq a(X)$.
2. Este operador está asociado al proceso de **dilatación** ya que se puede aplicar siguiendo la secuencia siguiente $A \subseteq a(A) \subseteq a^2(A) \subseteq a^3(A) \subseteq ...$, la idempotencia ($a^2(A) = a(A)$) no se satisface y se puede modelar el concepto de **proximidad** en los conjuntos gracias al mapeo pseudoclausura.

Definición 7.1.2. Por otro lado, un mapeo $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ se define como **interior** si se cumple lo siguiente:
i) $i(A) = [a(A^c)]^c$
ii) $\forall A \subseteq X, i(A) \subseteq X$
iii) $i(a) \subseteq A$
En donde $A^c = X - A$.

Definición 7.1.3. Se denomina **espacio pretopológico** al triplete (X, a, i), es decir al conjunto X dotado de las aplicaciones *pseudoclausura* a e *interior* i, o por conveniencia puede solo referirse por el par (E, a), pues el mapeo i puede deducirse del mapeo a.

NOTA:
1. Si el mapeo a se dota de idempotencia ($a^2(A) = a(A)$) y es aditivo ($a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$, es decir, se agregan los axiomas de Kuratowski restantes, entonces se tienen **espacios topológicos**.
2. Los mapeos a e i se dicen ***c*-duales** (en donde c el operador complemento), es decir que se cumple

lo siguiente:
i) $i = c \circ a \circ c$
ii) $a = c \circ i \circ c$
3. Por convención, se puede notar al espacio pretopológico (X, a, i) como (X, a) pues el mapeo interior se define a partir del mapeo pseudoclausura, o solamente como X y al decir que es un espacio pretopológico se entiende que comprende a los mapeos explicitados previamente.

Definición 7.1.4. Sea (X, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$. Dado un entero positivo n, se define como la ***n*-ésima pseudoclausura** de A a la composición de n veces la pseudoclausura a a A, y se denota $a^n(A)$. $a^0(A)$ corresponde al operador identidad en $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo: En un grafo podemos definir a la pseudoclausura como agregrar los vértices adyacentes, i.e., para $A \subseteq X$, se define $a(A) = \cup_{x \in A}\{x\} \cup \mathcal{N}(\{x\})$ en donde $\mathcal{N}(\{x\})$ es el conjunto de vértices adyacentes a x. A continuación un ejemplo, en donde se hará una tabla del operardor pseudoclausura para el espacio pretopológico (X, a) donde $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ es el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido: La tabla siguiente muestra las aplicaciones del mapeo pseudoclausura a

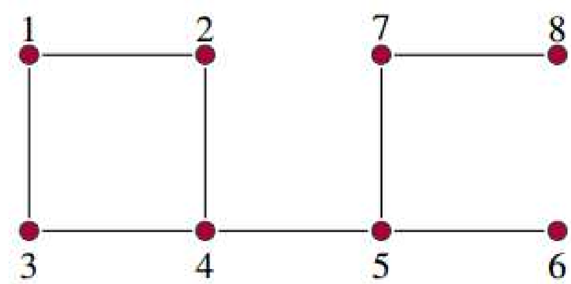


Figura 7.1: Un grafo no dirigido

los diferentes subconjuntos unitarios de X:

$\{x\}$	$a(x)$	$a^2(x)$	$a^3(x)$	$a^4(x)$	$a^5(x)$
$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	X
$\{2\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	X	X
$\{3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	X	X
$\{4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	X	X	X
$\{5\}$	$\{4,5,6,7\}$	$\{2,3,4,5,6,7,8\}$	X	X	X
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6,7\}$	$\{2,3,4,5,6,7,8\}$	X	X
$\{7\}$	$\{5,7,8\}$	$\{4,5,6,7,8\}$	$\{2,3,4,5,6,7,8\}$	X	X
$\{8\}$	$\{7,8\}$	$\{5,7,8\}$	$\{4,5,6,7,8\}$	$\{2,3,4,5,6,7,8\}$	X

NOTA:
1.El operador pseudoclausra para grafos definido anteriormente tiene una notación especial que es a_*.
2. Este ejemplo nos permite ver como, para un grafo conexo, se puede "estabilizar" cualquier subconjunto del espacio pretopológico gracias al operador pseudoclausura, es decir, se puede objeter el conjunto completo aplicando multiples veces el operador pseudoclausura. ¿Qué pasa si el grafo no es conexo? Entonces los subconjuntos se estabilizan hasta alcanzar las componentes conexas.

Ejemplo: ¿Qué pasa ahora si el grafo es dirigido? Consideremos el mismo conjunto de vértices pero ahora los arcos tienen dirección.

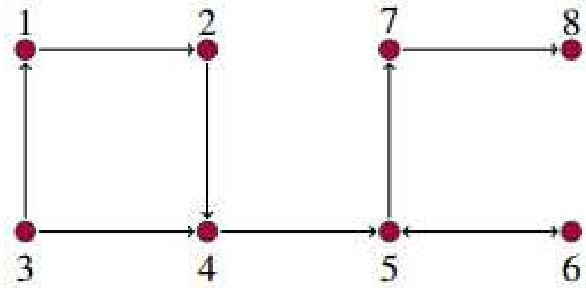


Figura 7.2: El mismo grafo, pero dirigido

La tabla siguiente muestra las aplicaciones del mapeo pseudoclausura a los diferentes subconjuntos unitarios de X:

$\{x\}$	$a(x)$	$a^2(x)$	$a^3(x)$	$a^4(x)$	$a^5(x)$	$a^6(x)$
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,4,5,6,7\}$	$\{1,2,4,5,6,7,8\}$	$a^5(\{1\})$
$\{2\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4,5\}$	$\{2,4,5,6,7\}$	$\{2,4,5,6,7,8\}$	$a^4(\{2\})$	$a^4(\{2\})$
$\{3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	X	X	X
$\{4\}$	$\{4,5\}$	$\{4,5,6,7\}$	$\{4,5,6,7,8\}$	$a^3(\{4\})$	$a^3(\{4\})$	$a^3(\{4\})$
$\{5\}$	$\{5,6,7\}$	$\{5,6,7,8\}$	$a^2(\{5\})$	$a^2(\{5\})$	$a^2(\{5\})$	$a^2(\{5\})$
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{5,6,7\}$	$\{5,6,7,8\}$	$a^3(\{6\})$	$a^3(\{6\})$	$a^3(\{6\})$
$\{7\}$	$\{7,8\}$	$a(\{7\})$	$a(\{7\})$	$a(\{7\})$	$a(\{7\})$	$a(\{7\})$
$\{8\}$	$a^0(\{8\}) = \{8\}$	$a^0(\{8\})$	$a^0(\{8\})$	$a^0(\{8\})$	$a^0(\{8\})$	$a^0(\{8\})$

NOTA:
Note que, aun si no se logra alcanzar el conjunto completo a través del operador pseudoclausura, se puede conjeturar que siempre se estabiliza, i.e., para cualquier subconjunto A del espacio topológico, $\exists N \in \mathbb{N}^+ \ni \forall n_0 \geq N, a^{n_0}(A) = a^N(A)$. Esta propiedad se probará (propiedad No.13)

Definición 7.1.5. Sea (X, a, i) un espacio pretopológico: $\forall A \subseteq X$:
i) A es a**-cerrado** (o simplemente **cerrado**) si, y solo si, $a(A) = A$
ii) A es i**-abierto** (o simplemente **abierto**) si, y solo si, $i(A) = A$

NOTA:
$\varnothing$ y X son cerrados y abiertos.

Lema 1. *Sea H un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces, cada sucesión monotona $\{x_n\}$ de elementos de H es eventualmente constante, es decir, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, tal que para cada $n \geq n_0$, $x_n = x_{n_0}$.*

Demostración. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente con $\leq$ el orden parcial para $H = \{e_1, e_2, ..., e_s\}$. Y sea, $N_i = \{n \in \mathbb{N} \ni x_n = e_i\}$ para $i = 1, 2, ..., s$. Entonces se tiene que $\mathbb{N} = \cup_i N_i$, pero, como $\mathbb{N}$ es infinito tiene que existir un $i_0 \ni N_{i_0}$ es infinito. Sea n_0 el primer elemento de N_{i_0} y probrmos que si $n \in \mathbb{N}$ y $n_0 \leq n$, se tiene que $x_n = x_{n_0}$. En efectio, dado $n \geq n_0$ y N_{i_0} infinito, $\exists m \in N_{i_0}$ tal que $m \geq n$. Tenemos asi que $n_0 \leq n \leq m$ y por ende, $x_{n_0} \leq x_n \leq x_m$. Pero, como $n_0, m \in N_{i_0}$, se tiene que $x_{n_0} = x_m$ con lo cual $x_n = x_{n_0}$. La demostración es analóga para sucesiones monótonas decrecientes.

□

Propiedad 13. *Sea (X, a) un espacio pretopológico finito, entonces para todo subconjunto $A \subset X$, existe un entero positivo $k \ni a^k(A)$ es cerrado (o a-cerrado).*

Demostración. Para esta demostración, considérese como la relación de orden parcial sobre $\mathcal{P}(X)$ a la inclusión de conjuntos. Sea $A \in \mathcal{P}(X)$ Y $\{A_n \ni n \in \mathbb{N}^+\}$ la sucesión dada por $A_n = a^n(A)$, y nótese que bajo la relación indicada, esta es una sucesión monótona creciente, por el lema anterior, $\exists k$ un entero positivo tal que $a^k(A) = a^{k+1}(A)$, i.e., $a^k(A)$ es cerrado (o a-cerrado).

□

Propiedad 14. *Sea $X(, a)$ un espacio pretopológico, entonces A es i-abierto si, y solo si, $A^C = X$-A es a-cerrado.*

Demostración. Nótese que $i(A) = (a(A^C)^C)$.

$$
\begin{aligned}
A \text{ es } i\text{-abierto} &\Leftrightarrow i(A) = A \\
&\Leftrightarrow (a(A^C)^C = A \\
&\Leftrightarrow ((a(A^C)^C)^C = A^C \\
&\Leftrightarrow a(A^C) = A^C \\
&\Leftrightarrow A^C \text{ es } a\text{-cerrado}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 9. *Sea (X, a) un espacio pretopológico. Para todo $A \subseteq X$ existe un único a-cerrado, denotado por $\mathcal{F}(A)$, que contenga a A y que esté contenido en cada conjunto a-cerrado que contiene a A si y, solo si, es la intersección de cualquier familia de a-cerrados de X es también a-cerrado e X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea (X, a) un espacio pretopológico y supóngase que para todo $A \subseteq X$ existe un único a-cerrado, denotado por $\mathcal{F}(A)$, que contiene a A y que está contenido en cada conjunto a-cerrado que contiene a A y sea $\{F_i\}$ una clase de conjuntos a- cerrados de X y $H = \cap_i F_i$. A probar: H es a-cerrado. Considérese $\mathcal{F}(H)$ y nótese que por definición $H \subseteq \mathcal{F}(H)$, y $\mathcal{F}(H) \subseteq F_i$, $\forall i \Rightarrow \mathcal{F}(H) \subseteq \cap_i F_i = H \Rightarrow H\mathcal{F}(H) \Rightarrow H$ es a-cerrado.
($\Leftarrow$) Sea (X, a) un espacio pretopológico y supóngase ahora que la intersección de cualquier familia de a-cerrados de X es a-cerrados. Sea entonces, $\{F_{i_A}\}$ la familia de todos los conjuntos a-cerrados de X que contienen a A y hágase $\mathcal{F}(A) = \cap_{i_A} F_{i_A}$, que por construcción es único y es a-cerrado. Además, nótese que, como $A \subseteq F_{i_A}$, entonces se tiene que $A \subseteq \mathcal{F}(A) = \cap_{i_A} F_{i_A}$ y por su construcción, $\mathcal{F}(A) = \cap_{i_A} F_{i_A} \subseteq F_{i_A}$, $\forall i$.

□

Definición 7.1.6. Sea (X, a) un espacio pretopológico, entonces se dice que la ***a*-cerradura** de $A \subseteq X$, si existe, es el mejor subconjunto a-cerrado de X que contiene a A, es decir es $\mathcal{F}(A)$.

NOTA:
Por convención, para $z \in X$, se denota a $\mathcal{F}(\{z\})$ como $\mathcal{F}(z)$

Propiedad 15. *Sea (X, a) un espacio pretopológico, $A \subseteq X$ es a-cerrado si, y solo si, $\mathcal{F}(A) = A$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea (X, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$ un subconjunto a-cerrado, entonces, evidententemente A es el menor subconjunto de X a-cerrado que contiene a $A \Rightarrow \mathcal{F}(A) = A$
($\Leftarrow$) Ahora, sea (X, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq X \ni \mathcal{F}(A) = A$, entonces, por definición, $\mathcal{F}(A)$ es a-cerrado y entonces $A = \mathcal{F}(A)$, también lo es.

□

Definición 7.1.7. Sea (X, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$ un conjunto a-cerrado, entonces se dice que A es **minimal** si el único conjunto a-cerrado no vacío contenido en A es él mismo. Esta definición nos da dos condiciones:
i) A es a-cerrado.
ii) $\nexists B$ a-cerrado de $X \ni B \subseteq A$.

NOTA:
1. La clase de a-cerrados minimales de X se denota por $\mathcal{F}_m$.
2. $\varnothing \notin \mathcal{F}_m$, es decir $\varnothing$ no es minimal.

Definición 7.1.8. Sea (X, a) un espacio pretopológico en donde existe la a-cerradura de cada subconjunto de X. Entonces, se dice que un a-cerrado $A \subseteq X$ es **elemental** si A es la a-cerradura de un conjunto unitario $\{z\}$ de X, i.e., $A = \mathcal{F}(z)$ y se denota $\mathcal{F}_z$.

NOTA:
La clase de a-cerrados elementales de X se denota por $\mathcal{F}_{el}$ y, por definición, se tiene que: $\mathcal{F}_{el} = \{\mathcal{F}_z \ni z \in X\}$.

Propiedad 16. *Todo subconjunto propio a-cerrado minimal, también es elemental.*

Demostración. Sea A subconjunto a-cerrado minimal del espacio pretopológico (X, a), y sea $z \in A \Rightarrow \{z\} \subseteq A \Rightarrow \mathcal{F}(z) \subseteq \mathcal{F}(A)$. Pero, como A es minimal, entonces $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(z)$, con lo cual $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(z)$ y se tiene que A es también elemental.

□

NOTA:
La implicación contraria no es siempre cierta.

7.2. Espacios pretopológicosde de tipo ν

Definición 7.2.1. Sea (X, a, i) un espacio pretopológico. Entonces se dice que este es **de tipo** ν si cumple lo siguiente:
$\forall A, B$ subconjuntos de X, si $A \subseteq B \Rightarrow a(A) \subseteq a(B)$.Se dice que a es **isótona**, es decir respeta la contención de conjuntos.

Propiedad 17. *En un espacio de tipo ν también se tiene que si A, B subconjuntos de X tales que $A \subseteq B$, entonces $i(A) \subseteq i(B)$.*

Demostración. Sea (X, a, i) un espacio pretopológico de tipo ν A, B subconjuntos de X tales que $A \subseteq B$. Nótese que por propiedades de conjuntos $B^C \subseteq A^C$ y por ser un espacio de tipo ν entonces se tiene que $a(B^C) \subseteq a(A^C)$ y, nuevamente por la propiedades de conjuntos, $(a(A^C))^C \subseteq (a(B^C))^C$, pero sabemos que los mapeos i y a son c-duales, i.e., $i = c \circ a \circ c$ con lo cual $i(A) = (a(A^C))^C \subseteq (a(B^C))^C = i(B) \Rightarrow i(A) \subseteq i(B)$ y la propiedad queda demostrada. □

Teorema 10. *Sea (X, a) un espacio pretopológico de tipo ν, entonces la intersección de cualquier familia de conjuntos a-cerrados en X también es un conjunto a-cerrado.*

Demostración. Sea δ una familia de conjuntos a-cerrados de X y sea $H = \cap\{G : G \in \delta\}$, nótese que, por esta definición, para cada G, se tiene $H \subseteq G$ y por ser X un espacio pretopológico de tipo ν se tiene que $a(H) \subseteq a(G) = G$, para cada $G \in \delta \Rightarrow a(H) \subseteq \cap\{G : G \in \delta\} = H$ y como la inclusión contraria, $H \subseteq a(H)$ siempre es cierta, por doble contención, se concluye que $a(H) = H$, es decir, H es un conjunto a-cerrado de X. Por ende, queda demostrado que la intersección de cualquier familia de conjuntos a-cerrados de X es un conjunto a-cerrado. □

NOTA:
Esto asegura la existencia de la a-cerradura $\mathcal{F}(A)$, $\forall A \subseteq X$.

Teorema 11. *Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico y A un subconjunto de X, si $\exists n \geq 0$ entero tal que $a^n(A)$ es a-cerrado, entonces $a^n(A) = \mathcal{F}(A)$.*

Demostración. Sea (X, a, i) un ν-espacio pretopológico y $A \subseteq X$ y sea $n \geq 0$ un entero tal que $a^n(A)$ es a-cerrado. Nótese que $\mathcal{F}(A)$ es un a-cerrado de X que contiene a A, i.e., $A \subseteq \mathcal{F}(A)$, y que, por ser un ν-espacio pretopológico se tiene que $a^n(A) \subseteq a^n(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A) \Rightarrow a^n(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$. Además, por definición de a-cerradura de A, se tiene que $\mathcal{F}(A) \subseteq a^n(A)$ pues $a^n(A)$ es un a-cerrado que contiene a A, con lo cual queda demostrado que $a^n(A) = \mathcal{F}(A)$. □

Lema 2. *Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, entonces se cumple los siguiente:*
i) Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$
ii) $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$
iii) $A = a(A)$ si, y solo si, $A = \mathcal{F}(A)$

Demostración. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico

i) Sea además $A \subseteq B$, entonces lo siguiente es válido $A \subseteq B \subseteq \mathcal{F}(B) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{F}(B)$, es decir, $\mathcal{F}(B)$ es un cerrado que contiene a A, por definición de a-cerrradura se tiene $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

ii) Sabemos que para $A \subseteq X$ se tiene que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$ y que por ser X un ν-espacio pretopológico, a es isótona $\Rightarrow a(A) \subseteq a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A)$ pues $\mathcal{F}(A)$ es a-cerrado.

iii) ($\Rightarrow$) Sea ahora $A \subseteq X \ni A = a(A)$ entonces A es un conjunto a-cerrado que contiene a A y por definición de a-cerradura se tiene $\mathcal{F}(A) \subseteq A$ y siempre es válido que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que A es tal que $A = \mathcal{F}(A)$, y por *ii)* y por como se define la función a sabemos que $A \subseteq a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$, como los extremos son equivalentes se tiene que $A = a(A)$. □

Teorema 12. *Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico y sea $A \subseteq X$, A es un a-cerrado minimal si, y solo si, $\forall x \in A$, $\mathcal{F}(x) = A$.*

Demostración. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico y sea $A \subseteq X$

($\Rightarrow$) Supóngase que A es un a-cerrado minimal y $x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A$ y por el lema anterior se tiene que $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(A) = A$ y como A es minimal y $\mathcal{F}(x) \neq \varnothing$, se cumple la contención $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(x)$ con lo cual se tiene $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(A)$.

(⇐) Ahora supóngase que $\forall x \in A \mathcal{F}(x) = A$. Esto nos indica que A es a-cerrado y ahora, supóngase por contradicción que $\exists B \neq \varnothing$ a-cerrado, distinto de A, tal que $B \subseteq A$, como B es no vacío, sea $z \in B \Rightarrow z \in A \Rightarrow \mathcal{F}(z) = A$ pero $\mathcal{F}(z) \subseteq B \subseteq A$ con lo cual $B = A$ (→←). Queda entonces demostrado que A es minimal pues es el único conjunto a-cerrado contenido en A.

□

NOTA:
En este tipo de espacios se puede definir el concepto de **a-vecindades** de un punto:

$$\forall x \in X, \mathcal{V}(x) = \{V \subset X \ni x \in i(V)\}$$

Además se define como **a-vecindad minimal**, si existe, al conjunto V_x que cumple lo siguiente:
i) $V_x \in \mathcal{V}(x)$ ii) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, se tiene $V_x \subseteq V$

SUBNOTA: Estos se pueden definir antes pero es en los espacios de tipo ν que comienzan a generar propiedades interesantes.

Lema 3. *En cualquier espacio pretopológico (X, a, i) de tipo ν se tiene que $y \in a(x)$ si, y solo si, x está en cada una de las a-vecindades de y.*

Demostración. Sea (X, a, i) un ν-espacio pretopológico
(⇒) y sea $y \in a(x)$ para un punto $x \in A$, sea además V una a-vecindad de y, entonces $y \in i(V) = (a(V^C))^C \Rightarrow y \notin a(V^C)$ y por ende $a(x) \nsubseteq a(V^C) \Rightarrow \{x\} \nsubseteq V^C$ por ser un espacio de tipo ν y ser a isótona. Entonces $x \notin V^C \Rightarrow x \in V$, con lo cual queda demostrado que x está en cada una de las vecindades de y.
(⇐) Se demostrará el converso. Supóngase ahora que $y \notin a(x) \Rightarrow y \in (a(x))^C = ((i(x^C)^C)^C = i(x^C) \Rightarrow$ por definición de a-vecindades, x^C es una a-vecindad de y que no contiene a x y queda demostrado que x no pertenece a ninguna vecindad de y.

□

Propiedad 18. *En los ν-espacios pretopológicos, el conjunto de a-vecindades de todo punto es un prefiltro.*

NOTA: La noción de prefiltro es análoga a la noción de filtro, quitando la tercera condición. Deben verificarse las dos primeras condiciones que son las siguientes, en donde se pretende verificar que $\mathcal{F}$ es un prefiltro:
i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
ii) Si $A \in \mathcal{F}$ & $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Demostración. i) $\varnothing \notin \mathcal{V}(x)$ ya que ningún x cumple que $x \in i(\varnothing) = \varnothing$.
ii) Sean $A \in \mathcal{V}(x)$ y $W \subseteq X \ni V \subset W$, tenemos $x \in i(V)$ por definición de a-vecindad, y por tratars de un ν-espacio pretopológico,$i(V) \subseteq i(W) \Rightarrow x \in i(W) \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$.

□

7.3. Espacios pretopológicos de de tipo $\nu_{\mathcal{D}}$

Definición 7.3.1. Sea (X, a) un espacio pretopológico, se dice que este de **tipo** $\nu_{\mathcal{D}}$ si para todo A, B subconjuntos de X se tiene que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$ y se dice que a es **aditiva**.

Propiedad 19. *En un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico (X, a, i) también se cumple para A, B subconjuntos de X que $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.*

Demostración. Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico y sean $A, B \subseteq X \Rightarrow A^C, B^C \subseteq X \Rightarrow a(A^C \cup B^C) = a(A^C) \cup a(B^C)$. Por otro lado, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} i(A \cap B) &= (a((A \cap B)^C))^C \\ &= (a(A^C \cup B^C))^C \\ &= (a(A^C) \cup a(B^C))^C \\ &= (a(A^C))^C \cap (a(B^C))^C \\ &= i(A) \cap i(B) \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la propiedad.

□

NOTA:
Es equivalente demostrar cualquiera de las propiedades para establecer que se tiene un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico.

Teorema 13. *Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico y A, B subconjuntos de X tales que $A \subseteq B$ entonces se tiene que $a(A) \subseteq a(B)$ y $i(A) \subseteq i(B)$. Esto demuestra que todo $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico es un ν-espacio pretopológico.*

Demostración. sean A, B subconjuntos de X tales que $A \subseteq B$ Por un lado, esto implica que $A \cup B = B$ y note que $A \subseteq A \cup B \Rightarrow a(A) \subseteq a(A) \cup a(B) = a(A \cup B)$, por ser X un ν-espacio pretopológico, y se sabe que $a(A \cup B) = a(B)$ con lo cual se concluye que $a(A) \subseteq a(B)$. Por otro lado, como $A \subseteq B \Rightarrow A = A \cap B \Rightarrow i(A) = i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$, , por ser X un ν-espacio pretopológico, y $i(A) \cap i(B) \subseteq i(B)$, con lo cual $i(A) \subseteq i(B)$.

□

Propiedad 20. *Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, entonces se cumple que $a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} a(A_i)$.*

Demostración. Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, $A_i \subseteq X, i \in I$ y nótese que $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i \Rightarrow$ por i) $a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq a(A_i) \Rightarrow a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} a(A_i)$. □

Propiedad 21. *Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, entonces se cumple lo siguiente:*
i) Si A y B son a-abiertos de X entonces $A \cap B$ también lo es.
ii) Cualquier unión de a-abiertos es a-abierto.

Demostración. Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico

i) Sean ahora A y B a-abiertos de X, entonces se tiene que $A = i(A)$ y $B = i(B)$ por definición de a-abiertos, entonces, por lo anterior y por ser X un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B) = A \cap B \Rightarrow A \cap B$ es también un a-abierto.

ii) Sea $\{A_i\}$ una colección de a-abiertos de X, $i \in I$. Se sabe que $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, y por ser i isótona, y A_i a-abiertos se tiene que $A_i = i(A_i) \subseteq i(\bigcup_{i \in I} A_i), \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq i(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Además, por definición de interior $i(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, con lo cual se prueba por doble contención que $(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i$, i.e. que cualquier unión de a-abiertos es a-abierto. □

Propiedad 22. *Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, entonces se cumple lo siguiente:*

i) Si A y B son a-cerrados de X, entonces $A \cup B$ también lo es.

ii) Cualquier intersección de a-cerrados es a-cerrado.

iii) Para todo A, B a-cerrados de X, se tiene que $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

Demostración. Sea (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico

i) Sean además A, B a-cerrados de X, entonces se tiene que $A = a(A)$ y $B = a(B)$ por definición de a-cerrados, entonces, por lo anterior y por ser X un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B) = A \cup B \Rightarrow A \cup B$ es también a-cerrado.

ii) Sea $\{A_i\}$ una colección de a-cerrados de X, $i \in I$. Se sabe que $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$, y por ser a isótona y A_i a-cerrados se tiene que $a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq a(A_i) = A_i$, $\forall i \in I \Rightarrow a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$. Además, por definición de pseudoclausura $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq a(\bigcap_{i \in I} A_i)$, con lo cual se prueba por doble contención que $\bigcap_{i \in I} A_i = a(\bigcap_{i \in I} A_i)$, i.e, que cualquier intersección de a-cerrados es a-cerrado.

iii) Sean A, B subconjuntos de X, $A, B \subseteq A \cup B$, como X es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico, también es un ν-espacio pretopológico, y por el lema 2, se tiene $\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cup B) \Rightarrow \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cup B)$. Ahora, nótese que $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}(B)$ son a-cerrados $\Rightarrow \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$ es a-cerrado que contiene a $A \cup B$, con lo cual $\mathcal{F}(A \cup B) \subseteq \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$. ☐

NOTA: Estas últimas dos propiedades se cumplen también en los espacios topológicos.

Teorema 14. *Un ν-espacio pretopológico (X, a, i) es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico si, y solo si, $\forall x \in X$, la familia de a-vecindades, $\mathcal{V}(x)$, es un filtro.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por la propiedad 24 se dan las dos primeras condiciones y solo hay que probar la tercera condición. Sean entonces (X, a, i) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico y $x \in X$ y $V, W \in \mathcal{V}(x)$, se tiene $x \in i(V)$ y $x \in i(W)$, entonces $x \in i(V) \cap i(W) = i(V \cap W)$ por ser un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio, y por lo tanto $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

($\Leftarrow$) Ahora, supóngase que se tiene un ν-espacio pretopológico (X, a, i) tal que $\forall x \in X$, la familia de a-vecindades, $\mathcal{V}(x)$, es un filtro y demuéstrese que X es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico. Pruebése entonces $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$. Sean A y B tales que $x \in i(A \cap B) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{V}(x)$ y $A \cap B \subseteq A$ & $A \cap B \subseteq B \Rightarrow$ por la naturalez de X se tiene que $i(A \cap B) \subseteq i(A)$ & $i(A \cap B) \subseteq i(B) \Rightarrow x \in i(A)$ & $x \in i(B) \Rightarrow x \in i(A) \cap i(B) \Rightarrow i(A \cap B) \subseteq i(A) \cap i(B)$. Por otro lado, $i(A) \subseteq A$ & $i(B) \subseteq B$, entonces $i(A) \cap i(B) \subseteq A \cap B \Rightarrow$ por la naturaleza de X, $i(i(A) \cap i(B)) \subseteq i(A \cap B)$, pero por la propiedad 26, sabemos que $i(A) \cap i(B)$ es abierto, con lo cual tenemos $i(A) \cap i(B) = (i(A) \cap i(B)) \subseteq i(A \cap B)$, y ahora si, por doble contención se tiene que $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ y se tiene el resultado. ☐

7.4. Espacios pretopológicosde de tipo $\nu_{\mathcal{S}}$

Definición 7.4.1. Sea (X, a) un espacio pretopológico, se dice que este es **de tipo** $\nu_{\mathcal{S}}$ si, $\forall A \subseteq X$, se tiene que $a(A) = \bigcup_{x \in A} a(x)$. Se dice que a es **completamente aditiva**.

NOTA:
No siempre es válido que $i(A) = \bigcap_{x \in A} i(x)$.

Teorema 15. *Sea (X, a) un $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico, entonces un subconjunto A de X es a-cerrado si, y solo si, $\forall x \in A$ se tiene que $a(x) \subseteq A$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es a-cerrado, entonces $A = a(A)$ y por la naturaleza de X se tiene que $\bigcup_{x\in A} a(x) = a(A) = A \Rightarrow \bigcup_{x\in A} a(x) \subseteq A \Rightarrow a(x) \subseteq A$, $\forall x \in A$.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que $a(x) \subseteq A$, $\forall x \in A \Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} a(x) = a(A) \Rightarrow A = a(A) \Rightarrow A$ es a-cerrado.

□

Teorema 16. *Todo $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico (y por ende un ν-espacio pretopológico).*

Demostración. Como a es completamente aditiva, también es aditiva y por ende se tiene que todo $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico. □

7.5. Espacios topológicos

Los últimos tipos de espacio pretopológico son los espacios topológicos. La definición de estos es aquella expuesta en el capítulo 3.

Propiedad 23. *Sea (X, a, i) un espacio pretopológico, entonces este es un espacio topológico si, y solo si, es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico y, además se cumple que $\forall A \subseteq X$, $a(A) = a^2(A)$, i.e., si la pseudoclausura es aditiva e idempotente.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que X es un espacio pretopológico y un espacio topológico $\Rightarrow a(A) = \mathcal{F}(A)) \Rightarrow a^2(A) = a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A) = a(A)$ y que sea aditiva se da por las propiedades expuestas en el capítulo correspondiente.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que (X, a, i) es un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico para el cual a es idempotente. Pruebése que X es un espacio topológico:
Primero, definàse a la topología correspondiente como $\tau_a = \{A \subseteq X \ni i(A) = A = (a(A^C))^C\}$

i) $i(\varnothing) = \varnothing$ y $i(X) = X \Rightarrow \varnothing, X \in \tau_a$.

ii) Sean A, $B \in \tau_A$, entonces $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ por ser un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico y a su vez $A \cap B = i(A) \cap i(B) = i(A \cap B) \Rightarrow A \cap B \in \tau_a$.

iii) Sea $\{A_i\}$, $i \in I$ una colección de elementos de τ_a, entonces por la propiedad 21, $\bigcup_i \in IA_i$ es un a-abierto.

La función a tiene que ser idempotente por la forma en que se define la topología, pues de no serlo los conjuntos abiertos, y cerrados, cambiarían con cada aplicación.

□

7.6. Continuidad

Definición 7.6.1. Sea $f : (X, a) \to (Y, a^*)$ se dice que f **preserva la pseudoclausura** si para todo $A \subseteq X$ se tiene que $f(a(A)) \subseteq a^*(f(A))$.
Se dice que f es **continua** si para todo $B \subseteq Y$ se tiene que $a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a^*(B))$.

NOTA:
1. Esta propiedad es válida para funciones continuas en los espacios topológicos.
2. Es evidente que función identidad $I : (X, a) \to (X, a)$ es continua y preserva pseudoclausura.

Propiedad 24. *Sea $f : (X,a) \to (Y,a^*)$ y $g : (Y,a^*) \to (X,a)$, entonces $h = g \circ h$ es continua y preserva pseudoclausura.*

Demostración. Sea $f : (X,a) \to (Y,a^*)$ y $g : (Y,a^*) \to (X,a)$, y $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces:

$$h(a(A)) = g(f(a(A))) \subseteq g(a^*(f(A))) \subseteq a^*(g(f(A))) = a^*(h(A))$$
$$a(h^{-1}(B)) = a(f^{-1}(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(a^*(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(a^*(B))) \subseteq h^{-1}(a^*(B))$$

□

Teorema 17. *Sea $f : (X,a,i) \to (Y,a^*,i^*)$ entonces si f es continua si, y solo si, $f^{-1}(i^*(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f : (X,a,i) \to (Y,a^*,i^*)$ un mapeo continuo, entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}(i^*(B)) &= (f^{-1}(i^*(B)^C))^C \\ &= (f^{-1}(a^*(B^C)))^C \\ &\subseteq (a(f^{-1}(B^C)))^C \\ &= (a(f^{-1}(B)^C))^C \\ &= i(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

se obtiene al final el resultado buscado, tomando las extremidades $f^{-1}(i^*(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$.

($\Leftarrow$) Ahora supóngase que se tiene $f : (X,a,i) \to (Y,a^*,i^*)$ tal que $f^{-1}(i^*(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$, entonces:

$$\begin{aligned} a(f^{-1}(B)) &= ((a(f^{-1}(B)))^C)^C \\ &= (i(f^{-1}(B)^C))^C \\ &= (i(f^{-1}(B^C)))^C \\ &\subseteq (f^{-1}(i^*(B^C)))^C \\ &= (f^{-1}(a^*(B)^C))^C \\ &= f^{-1}(a^*(B)) \end{aligned}$$

se obtiene entonces, tomando las extremidades que $a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a^*(B))$, i.e., por definición f es continua. □

7.7. Conexidad

La conectividad permite modelar la homogeneidad de un espacio, un espacio conectado es aquel en el que no se pueden aislar los puntos. En la topología se vieron dos tipos de conexión mientras que, en pretopología se distinguen cinco diferentes tipos de conexiones que permiten relaciones más estrechas que en la teoría de grafos.

Definición 7.7.1. Sea (X,a) un ν-espacio pretopológico y sean $A, B \subseteq A$, se dice que **existe** un camino de A a B en (X,a) si se cumple que $B \subseteq \mathcal{F}(A)$.

Definición 7.7.2. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, (X, a) es **fuertemente conexo** si, y solo si, $\forall A \subseteq X$, con $A \neq \varnothing$, $\mathcal{F}(A) = X$, i.e., el conjunto distinto del vacío que es a-cerrado es el total. Esto equivale a decir que para todo $A, B \subseteq X$ no vacíos existe un camino de A a B.

Definición 7.7.3. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, se dice que (X, a) es **unilateralmente conexo** si, y solo si, $\forall A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, $\mathcal{F}(A) = X$ o si $\forall B \subseteq A^C$ con $B \neq \varnothing, A \subseteq \mathcal{F}(B)$.
Esto es equivale a decir que, para todo $A, B \subseteq X$ no vacíos, existe un camino de A a B o de B a A.

NOTA:
En este caso se dice que los conjuntos a-cerrados están **encajonados**, i.e., están ordenados por la relación de contención pues se tiene que $A \subseteq \mathcal{F}(B)$ o $B \subseteq \mathcal{F}(A)$ que, al tratarse de A, B conjuntos a-cerrados se tiene que $A \subseteq \mathcal{F}(B) = B$ o $b \subseteq \mathcal{F}(A) = A$, o sea, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Definición 7.7.4. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, se dice que (X, a) es **hiperconexo** si, y solo si, $\forall A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, $\mathcal{F}(A) = X$ o si $\exists B \subseteq A^C$ con $B \neq \varnothing, A \subseteq \mathcal{F}(B)$.
Esto es equivale a decir que para todo $A, B \subseteq X$ no vacíos existe un camino de A a B o de B a $(\mathcal{F}(B)^C, \ni A\mathcal{F}(B)$.

Definición 7.7.5. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, se dice que (X, a) es **apoconexo** si, y solo si, $\forall A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ o $\forall B \subseteq X$ con $B \neq \varnothing$ y $B \subseteq (\mathcal{F}(A))^C$ se tiene que $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B)$.
Esto es equivale a decir que para todo $A, B \subseteq X$ no vacíos existe un camino de A a B o existe $M \subseteq X$ no vacío tal que existe un camino de M a A y un camino de M a B.

Definición 7.7.6. Sea (X, a) un ν-espacio pretopológico, se dice que (X, a) es **conexo** si, y solo si, $\forall A, B \subseteq X$ no vacíos, se tiene que $\mathcal{F}(A) \neq \varnothing$ o $\mathcal{F}(\mathcal{F}(A)^C) \neq \varnothing$.
Esto es equivale a decir que para todo $A, B \subseteq X$ no vacíos existe un camino de A a B o existe $M \subseteq X$ no vacío tal que existe un camino de M a B y un camino de M a $\mathcal{F}(B)^C \subseteq A$.

Ejemplo: Sea X el conjunto de nodos siguientes:

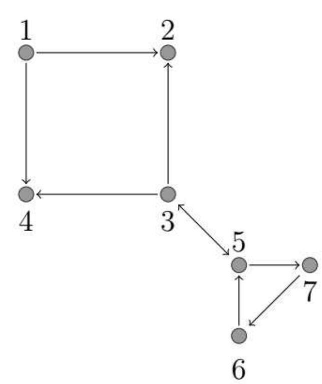


Figura 7.3: R-interior de A

Primero encontremos los a-cerrados, tomando a como la unión entre el nodo y sus vecinos. Tenemos la siguiente tabla:

$\{x\}$	$a(x)$	$a^2(x)$	$a^3(x)$	$a^4(x)$	$a^5(x)$
$\{1\}$	$\{1,2,4\}$	$a(\{1\}) = \{1,2,4\}$	$a(\{1\})$	$a(\{1\})$	$a(\{1\})$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{2,3,4,5,7\}$	$\{2,3,4,5,6,7\}$	$a^3(\{3\})$	$a^3(\{3\})$
$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
$\{5\}$	$\{3,5,7\}$	$\{2,4,3,5,6,7\}$	$a^2(\{5\}) = a^3(\{3\})$	$a^3(\{3\})$	$a^3(\{3\})$
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{3,5,6,7\}$	$\{2,3,4,5,6,7\}$	$a^3(\{6\}) = a^3(\{3\})$	$a^3(\{3\})$
$\{7\}$	$\{6,7\}$	$\{5,6,7\}$	$\{3,5,6,7\}$	$\{2,3,4,5,6,7\}$	$a^5(\{7\}) = a^3(\{3\})$

Los conjuntos a-cerrados son entonces: $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,2,4\}$ y $\{2,3,4,5,6,7\}$ y al hacer las intersecciones, por ser X un ν-espacio pretopológico, obtenemos también que $\{2,4\} = \{1,2,4\} \cap \{2,3,4,5,6,7\}$ es a-cerrado.
Entonces se tiene lo siguiente: $\mathcal{F}(1) = \{1,2,4\}$
$\mathcal{F}(2) = \{2\}$
$\mathcal{F}(4) = \{4\}$
$\mathcal{F}(3) = \mathcal{F}(5) = \mathcal{F}(6) = \mathcal{F}(7) = \{2,3,4,5,6,7\}$
$\mathcal{F}(\{2,4\}) = \{2,4\}$

- Es conexo
- No es fuertemente conexo
- No es unilateralmente conexo
- No es hiperconexo
- Si es apoconexo

NOTA:
Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\text{Hiper conexo}} \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{Fuertemente conexo}} \arrow[r] & \boxed{\text{Unilateralmente conexo}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\text{Conexo}} \\
 & & \boxed{\text{Apo conexo}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura 7.4: R-interior de A

7.8. Relaciones y pseudoclausura

Definición 7.8.1. Sea R una relación en un conjunto X, se define la **pseudoclausura de predecesores inducida por la relación** R **en** X o R**-pseudoclausra** como la aplicación $a_R : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$a_R(A) = A \cup R^{-1}(A),\ \forall A \subseteq X$$

a_R cumple con ser un operador pseudocesen X y por ende (X, a_R) representa un espacio pretopológico.

NOTA:
1. También es posible usar la pretopología de sucesores en donde

$$a'_R(A) = A \cup R(A)$$

sería nuestro operador pseudoclausura.
2. $R^{-1}(A) = \{x \in X \ni R(x) \cap A \neq \varnothing\}$.
3. Si la relación fuese simétrica, no habría diferencia, es decir a'_R sería equivalente a a_R.
4. Si la relación fuese reflexiva entonces $AR^{-1}(A) \Rightarrow a_R(A) = R^{-1}(A)$.

Propiedad 25. *Dada una relación R sobre un conjunto E el interior asociado a a_R es*

$$i_R(A) = \{x \in A \ni xRy \Rightarrow y \in A\}$$

Demostración. Como se trata de un espacio pretopológico, se tiene la dualidad entre a_R e i_R, entonces:

$$\begin{aligned} i_R(A) &= (a_R(A^C))^C \\ &= (A^C \cup \{x \in X \ni \exists y \in A^C : xRy\})^C \\ &= A \cap (\{x \in X \ni \exists y \in A^C : xRy\})^C \\ &= A \cap \{x \in X \ni \forall y \in A^C : (x,y) \notin R\} \\ &= \{x \in A \ni \forall y\, (xRy \Rightarrow y \in A)\} \end{aligned}$$

□

Es decir que el R-interior de A lo formas aquellos elementos que no están relacionados con ningún elemento de $A^C = X - A$ por la relación R. Veáse el ejemplo de la imagen siguiente:

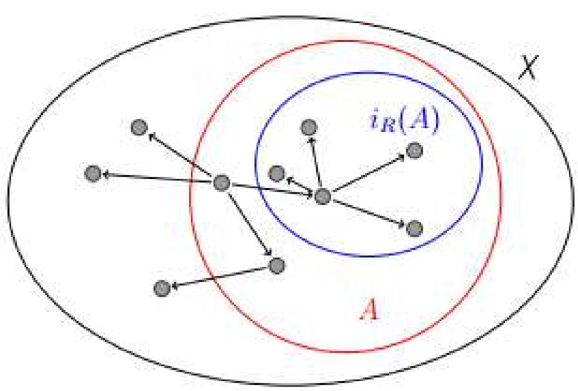


Figura 7.5: R-interior de A

Propiedad 26. *El operador a_R es aditiva, con lo cual se trata de (X, a_R) un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico.*

Demostración. Sean A, B subconjuntos de X, $a_R(A\cup B) = (A\cup B)\cup R^{-1}(A\cup B) = (A\cup B)\cup(R^{-1}(A)\cup R^{-1}(B))$ por las propiedades de relaciones, entonces tenemos $a_R(A\cup B) = A\cup B\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(B) = (A\cup R^{-1}(A))\cup(B\cup R^{-1}(B)) = a_R(A)\cup a_R(B)$, i.e., se tiene un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico. □

NOTA:
Por las propiedades de relaciones se tiene que $R^{-1}(A) = \bigcup\{R^{-1}(x) \ni x \in A\}$ por lo que se tiene un $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico y a_R es completamente aditiva.

Teorema 18. *Sea R una relación definida sobre un conjunto X y a_R la R-pseudoclausura, entonces R es transitiva si, y solo si, a_R es idempotente. En este caso (X, τ_{a_R}) es un espacio topológico.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que R es transitiva y sea $A \subseteq X$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} a_R^2(A) &= a_R \cup R^{-1}(a_R) \\ &= A\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(A\cup R^{-1}(A)) \\ &= A\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(R^{-1}(A)) \\ &= A\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(R^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Se busca que $a_R = a_R^2 \Leftrightarrow A\cup R^{-1}(A) = A\cup R^{-1}(A)\cup R^{-1}(R^{-1}(A)) \Leftrightarrow$ basta con probar que $R^{-1}(R^{-1}(A)) \subseteq R^{-1}(A)$. Sea entonces $x \in R^{-1}(R^{-1}(A)) \Rightarrow \exists y \in R^{-1}(A) \ni xRy$, además como $y \in R^{-1}(A) \Rightarrow \exists z \in A \ni yRz$ y como R es transitiva, entonces $xRz \Rightarrow x \in R^{-1}(A) \Rightarrow a_R = a_R^2$.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que se tiene $a_R = a_R^2$ y demuéstrese que R es transitiva. Sean $x, y, z \in X \ni xRy\&yRz \Rightarrow x \in a_R(y)\&y \in a_R(z) \Rightarrow x \in a_R(y) \subseteq a_R^2(z) = a_R(z) \Rightarrow x \in a_R(Z) \Rightarrow xRy$, con lo cual se demuetsra que R es transitiva. □

NOTA:

1.Sea (X, a_R) un espacio pretopológico entonces $a_R(\{x\})$ es la a_R-vecindad minimal de x si, y solo si, R es una relación simétrica.

2. Si (X, a_R) es un espacio topológico, entonces los abiertos son precisamente de las a_R-vecindades minimales, $\bigcup_{x\in A} V_x$, $A \subseteq X$.

Definición 7.8.2. Se dice que un $\nu_{\mathcal{D}}$-espacio pretopológico (X, a_R) es **conexio** si, y solo si X no es la unión de dos subconjuntos a-abiertos no vacíos.

NOTA:
Demuestrése que en el entorno más restringido: los $\nu_{\mathcal{S}}$-espacios pretopológicos, la conexión puede ser caracterizada directamnete en términos de la relación R que se utilice.

Definición 7.8.3. Sea (X, a_R) un $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico, y $A \subseteq E$, entonces se dice que dos puntos $x, y \in A$ están **conectados** si existe una secuencia $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$, en donde $n \geq 0$ tal que $x_{i-1}Rx_i \vee x_iRx_{i-1}$, para $i = 1, 2, ..., n$. Se denota $x \overset{R}{\sim} y$. La secuencia $(x_i) = x_0, x_1, ..., x_n$ se llama **camino** de x a y.

NOTA:
$\overset{R}{\sim}$es una relación de equivalencia para X, y las componentes conexas de (X, a_R) corresponden a las clases de equivalencia inducidas por $\overset{R}{\sim}$.

Lema 4. *Un (X, a_R) $\nu_{\mathcal{S}}$-espacio pretopológico es conexo si, y solo si $\forall x, y \in X$ se tiene que $x \overset{R}{\sim} y$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Primero, supóngase que X es conexo y supóngase además, por contradicción, que existen puntos $x, y \in X$ no conectados por ningún camino. Sea A el conjunto de puntos conectados a x, i.e.,

$$A_x = \{z \in X \ni x \overset{R}{\rightsquigarrow} z\}$$

y demuéstrese que A es a-abierto. Sean además, $u, v \in X \ni u \in A$ y $uRv \Rightarrow x \overset{R}{\rightsquigarrow} v \Rightarrow v \in A \Rightarrow$ como cada punto relacionado con u está en A se puede concluir que $u \in i_R(A_x) \Rightarrow A \subseteq i_R(A_x)$, y como la inclusión contraria siempre es cierta se tiene que $A_x = i_R(A_x)$, i.e., A_x es a_R-abierto. También puede comprobarse que A_x^C, que contiene al conjunto A_y, es a_R-abierto pues de no serlo existirían puntos x_0, y_0 tales que $x_0 \in A_x$, $y_0 \in A_x^C \ni x_0 R y_0$ y por ende se tendría que $x_0 \overset{R}{\rightsquigarrow} y$ o $y_0 \overset{R}{\rightsquigarrow} x \Rightarrow x_0 \in A_y \subseteq A_x^C$ o $y_0 \in A_x$, lo cual es una contradicción. Al no estar conectados estos puntos se concluye que X es la unión de conjuntos a_R-abiertos disjuntos ($\rightarrow\leftarrow$). Con lo que se concluye que todos los pares de puntos en X están conectados.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que todos los pares están conectados y además supóngase, por contradicción, que $X = A \cup B$ con A, B a-abiertos tales que $A \cap B = \varnothing$. Sea $x \in A$, $y \in B$, entonces, por la hipótesis $x \overset{R}{\rightsquigarrow} y \Rightarrow$ existe un camino $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$. Como $x_0 \in A \wedge x_n \notin A$, tiene que existir $i_0 \in \{0, 1, 2, .., n\} \ni x_{i_0} \in A \wedge x_{i_0+1} \notin A \Rightarrow x_{i_0+1} \in A^C = B$. Por la definición de camino, $x_{i_0} R x_{i_0+1} \vee x_{i_0+1} R x_{i_0}$. En el primer caso $x_{i_0} \in a_R(A^C) \Rightarrow x_{i_0} \notin i_R(A) \Rightarrow x \in A - i_R(A) \Rightarrow A$ no es a-abierto, de tomarse el seungo caso se tendría que $B = A^c$ no sería abierto, X no sería unión de a-abiertos ($\rightarrow\leftarrow$).Por lo tanto, se concluye que X es conexo.

$\square$

CAPÍTULO 8

Una aplicación interesante: El modelo insumo-producto

8.1. Modelación de redes complejas mediante la pretopología

Los diversos tipos de grafos presentan limitaciones a la hora de utilizarlos para el estudio de redes complejas, entre ellas el hecho que no es posible representar una cantidad muy grande de distintas relaciones en un mismo grafo, ni de reflejar relaciones entre conjuntos de vértices. Tampoco permite analizar dinámicas que se dan en la realidad, como incorporación de nuevos elementos ni salidas de elementos o división de conjuntos. Estas limitaciones dejan de existir cuando se recurre a la pretopología.

Definición 8.1.1. Dado un conjunto X y un conjunto de relaciones $(R_i)_{i=1,..,p}$, la **pseudoclausura inducida por** $(R_i)_{i=1,..,p}$, se define como la intersección de las pseudoclausuras a_{R_i}. Es decir:

$$\begin{aligned} a_{R_S}(A) &= \bigcap\{a_{R_i}(A)\} \\ &= A \cup (\bigcap\{R_i^{-1}(A)\}) \\ &= A \cup \{x \in X \ni \forall i = 1, ..., p,\ R_i(x) \cap A \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

Definición 8.1.2. Sea X un conjunto $\{a_{R_i}, i \in I\}$, para $I = 1, ..., n$, una familia de R_i-pseudoclausuras que inducen, cada una, una pretopología en X, entonces $\{(X, a_i), i \in I\}$ es una **red** en X.

NOTA:
Esto permite trabajar diferentes relaciones, con diferentes pretopologías, en un mismo conjunto.

Propiedad 27. *Un grafo (V, U) es una red.*

Demostración. Si se define la relacion como la adyacencia entre los vértices, se tenga un grafo no dirigido o uno dirigo, se cumple la definición. □

8.2. Algunos indicadores estructurales en pretopología

8.2.1. Coeficiente de pseudoclausura y pseudointerior

Definición 8.2.1. Sea (X, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$ no vacío entonces se puede definir lo siguiente:

- El **coeficiente pseudoclausura** de A:

$$R_a(A) = \frac{Card(a_R(A))}{card(A)}$$

- El **coeficiente pseudointerior** de A:

$$R_i(A) = \frac{Card(i_R(A))}{Card(A)}$$

NOTA:
1. $1 \leq R_a(A) \leq \frac{Card(X)}{Card(A)}$ para A no vacío y A es a_R-cerrado si, y solo si, $R_a(A) = 1$.
2. $0 \leq R_i(A) \leq 1$ para A no vacío y A es a_R-cabierto si, y solo si, $R_i(A) = 1$.

Estos coeficientes miden la capacidad de un conjunto de recibir o transmitir influencia en el conjunto que lo complementa. Se tiene entonces:
1. $A = i(A) = a(A)$ implica que A recibe y transmite poca influencia.
2. $i(A) \subseteq A = a(A)$ implica que A recibe poca influencia pero transmite mucha.
3. $i(A) \subseteq A \subseteq a(A)$ implica que A recibe y transmite mucha influencia.
4. $i(A) = A \subseteq a(A)$ implica que A recibe mucha influencia y transmite poca.

8.2.2. Indicadores de cercanía

Definición 8.2.2. La **longitud** de un camino (x_i) con $0 \leq i \leq n$ que conecta a $x = x_0$ con $y = x_n$ en (X, a_R) es el entero n.
La **distancia** entre x y y en (X, a_R), denotada como $d_R(x, y)$, es el menor n de forma que x esté conectado con y por un camino, si existe, de longitud n.

Definición 8.2.3. Sea (X, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$, entonces se define como **frontera externa** al conjunto $a_R(A) - A$, denotado $bd(A)$. En teoría de grafos corresponde al conjunto de vértices adyacentes a los elementos de A.

En teoría de grafos es posible calcular el coeficiente de acercamiento ("clustering" en inglés) para cualquier vértice x, la idea es entonces hacer lo mismo mediante la pretopología.

Definición 8.2.4. Sea (X, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq X$. Se define **la derivada** como:

$$d(A) = \{x \in X \ni \forall V \in \mathcal{V}(x), (V - \{x\}) \cap A \neq \varnothing\}$$

La **función coherencia** se define como $c(A) = d(A) \cap A$ Este es el conjunto de elementos de A que no están aislados en A, i.e., si x pertenece a $c(A)$, entonces algún vecino de x debe estar en A.

Definición 8.2.5. Se define entonces el **coeficiente de agrupamiento del conjunto A** de la siguiente forma:

$$C(A) = ||A - c(A)||$$

NOTA:
Este coeficiente es análogo al estudiado en teoría de grafos y permite medir la probabilidad de que los vecinos de los elementos de A sean vecinos entre ellos.

8.2.3. Grado de correlación y función de asortatividad

Definición 8.2.6. Para cualquier elemento x de un espacio pretopológico (X, a, i) se define el **grado de correlación de** x, denotado como k_x, como:

$$g_x = \frac{1}{||a(\{x\})||} \sum_{y \in a(\{x\})}, y \neq x ||a(\{y\})||$$

NOTA:
Este grado estudia lo mismo que el definido en la teoría de grafos.

Definición 8.2.7. La función de asortatividad, denotada por ca_k se define como:

$$ca_k = \frac{1}{||N_k||} \sum_{x \in N_k} k_x$$

en donde $N_k = \{x \in X \ni ||a(\{x\})|| = k\}$

NOTA:
La asortatividad habla sobre la preferencia que tienen los vértices de una red de unirse a otros nodos que le son similares.

8.3. El modelo insumo-producto

El fin del modelo insumo-producto es analizar la interdependencia de las diferentes industrias de una economía. El modelo estudia cómo varía la producción de un insumo con base en la demanda de consumo de diferentes industrias. La parte de la producción de una mercancía se convierte en consumo de otra industria para la producción de otro bien o mercancía.

Se estudia un modelo cerrado, es decir una economía en un espacio delimitado, con n industrias en los que cada industria representa un solo bien o mercancía.
Nótese que, por el tamaño de las economías, se trata de una red compleja y el fin es encontrar una relación que nos permita inducir una pretopología para estudiar esta red compleja. Entendamos primero el modelo insumo-producto.

Los coeficientes se calculan en un periodo dado de tiempo considerando cuántas unidades de una industria j se necesitan para producir una unidad de la industria k, en donde $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ y se asume que estos coeficientes son estables en el tiempo, es decir que no cambian tan fácilmente, lo cual permite hacer estudios en el futuro.

Para construir el modelo se asumen las siguientes proposiciones:

1. Se divide la economía en n sectores (industrias) en los que cada sector produce unicamente un bien (mercancía). Y se denota x_j a la cantidad del bien producido por la industria j.

2. Se asume también que el consumo de un bien producido se distribuye en dos tipos de sectores: los endógenos y los exógenos. Los endógenos representan a las industrias analizadas en el sistema económico (los sectores $1, 2, \ldots, n$) y los exógenos representan el consumo por parte de sectores externos al sistema económico de estudio (importaciones, consumo doméstico, $\ldots$). Se denota como x_{jk} a la cantidad de mercancía producida por la industria j que consume la industria k y como c_j a la parte de mercancía producida por el sector j que no se consume dentro de la economía estudiada, es decir a la demanda final.

3. Se supone que la producción de cada bien se agota en el tiempo de estudio; con lo cual se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} x_{jk} + c_j$$

4. La cantidad de producción de la industria j necesaria para producir el bien de la industria k es constante y por ende define un parámetro del sistema. Par producir x_k unidades del sector k se requieren x_{jk} unidades del sector j, por lo que para producir una unidad del sector k se requieren $a_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_k}$ unidades del sector j. Gracias a esto se puede escribir que el consumo que el sector k hace del sector j es $a_{jk}x_k$ y se tiene entonces la ecuación siguiente:

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k + c_j \, , \, j = 1, 2, \ldots, n$$

En donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$$

representa la suma de todo lo que utiliza cada industria k del sector j, es decir, todo lo que el sistema económico consume del bien producido por el sector j.
Con lo anterior se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + c_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + c_2 \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + c_2
\end{aligned}$$

Que se puede escribir de la forma matricial: $x = Ax + c$ en donde x es el vector de las cantidades producidas por los diferentes sectores , A la matriz de coeficientes técnicos y c el vector de demandas finales, definidos de las siguientes formas:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Nótese que el sistema $x = Ax + c$ puede reescribirse como $(I - A)x = c$ y escribáse $B = I - A$ en donde entonces se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

en donde $b_{jk} = 1 - a_{jk}$ para $j = k$ y $b_{jk} = -a_{jk}$ para $j \neq k$.
Con lo cual se puede escribir el sistema básico de ecuaciones $Bx = c$.
5. El fin es en ¿Es posible asegurar que para una demanda c no negativa siempre existe una solución x no negativa del sistema?

Como el fin de esta tesis no es un desarrollo completo de esta teoría no se explicitarán las demostraciones pero existen difentes teoremas que permiten asegurar la solución no negativa del sistema, como el teorema de Hawkins-Simon (Ver Anexo).

Nótese que por el tamaño de las economías, se trata de una red compleja y el fin es encontrar una relación que nos permita inducir una pretopología para estudiar esta red compleja.
El objetivo del modelo insumo-producto sería entonces estudiar la variación de la oferta (producción) en términos de la demanda, o más bien, la variación de la demanda. Para esto primero reescribase la ecuación como $x = B^{-1}c$.
Nótese que si se hace variar la demanda final entonces para tiene una variación Δc_j en la demanda necesaria en el sector j y se tiene lo siguiente $\Delta x_k = B^{-1}\Delta c_j$ representa la variación en el sector k según la variación en la demanda del sector j. Esto se puede hacer para cada sector i y su respectiva variación que tendrá una diferente influencia en la variación de la producción. Se denomina entonces a la matriz $B^{-1} = (\pi_{jk})$ como matriz de influencias globales.

NOTA:
Es importante distinguir entre la influencia global y la influencia directa, la influencia directa se daría cuando solo varía la demanda de un sector, mientras que, para la influencia global se supone que todas las demandas de los diferentes sectores varían.

8.3.1. Relaciones de influencia en el modelo insumo-producto

Definición 8.3.1. Sea $0 < s \leq 1$, diremos que k s-influye en j si $\pi_{jk} \geq s$, es decir, se define la relación binaria Ω_s sobre X dada por:

$$j\Omega_s k \text{ si } \pi_{jk} \geq s$$

como **relación de influencia al nivel** s.
Para cada $j \in X$, el conjunto de sectores k que influyen sobre j es el conjunto:

$$\Omega_s(j) = \{k \in X \ni \pi_{jk} \geq s\}$$

Sea la relación de influencia $R = \Omega_s$ y los sectores de la economía de estudio, k y j.

Definición 8.3.2. La **R-pseudoclausura del sector** j se define de la siguiente forma:

$$a_R(\{k\}) = \{j \in X \ni \pi_{jk} \geq s\} = \{j \in X \ni k \in \Omega_s(j)\}$$

y representa al conjuntos de los sectores j que son influidos por k.
Para un grupo de sectores $A \subseteq X$, **la R-pseudoclausura de** A se define:

$$a_R(A) = \bigcup_{k \in A} (a_R(\{k\}) \cap A) = \{j \in X \ni \exists k \in A \cap \Omega_s(j)\}$$

y representa al conjunto de sectores influídos por al menos un sector de A.

Definición 8.3.3. El **interior** se define como:

$$i_R(A) = \{j \in A \ni \Omega_s(j)) \subseteq A\}$$

y representa entonces al conjunto de sectores j pertenecientes al subconjunto A que son solamente influenciados por sectores elementos del conjunto A.

NOTA:
Con base en estas definiciones y lo estudiado en la sección 7.9.2, se puede decir entonces lo siguiente:
1. Si A es a_R-abierto y a_R-cerrado, $i_R(A) = A = a_R(A)$, se tiene un sector aislado.
2. Si A es a_R-cerrado pero no a_R-abierto, $i_R(A) \subseteq A = a_R(A)$, implica que A influye solo en los sectores de A, que a su vez pueden ser influídos por sectores externos.
3. $i(A) \subseteq A \subseteq a(A)$ implica que A recibe y transmite influencia.
4. Si A es a_R-abierto pero no a_R-cerrado, $i_R(A) = A \subseteq a_R(A)$ implica que A es influida por si misma pero no recibe mucha influencia externa y que transmite, no necesariamente mucha, influencia a los elementos externos a A

Lo interesante es que, en economía, las variaciones que conducen a las relaciones de influencia pueden ser causados por diferentes parámetros como precios, cantidades, políticas económicas. Y es así que puede considerarse una red en la que se estudien diferentes relaciones desde el enfoque pretopológico. Se toman diferentes relaciones de influencia, definidas según paramétros distintos.

CAPÍTULO 9

Conclusiones

- El desarrollo en diferentes áreas de la matemática puede concluirse en la complementación de dos áreas distintas para el mismo fin de estudio.
- Cambiar la perspectiva desde la cual se estudia una teoría puede permitirnos ir más allá en nuestro análisis.

CAPÍTULO 10

Bibliografía

[1] Almaas, E., R. V. Kulkarni y D. Stroud: *Characterizing the Structure of Small-World Networks*. Phys. Rev. Lett., 88:098101, Feb 2002. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.098101`.

[2] Auray, J. P., Bonnevay S. Bui M. Duru G. Lamure M: *Eléments de prétopologie généralisée*. Hermann, 2009.

[3] Auray, J. P., Bonnevay S. Bui M. Duru G. Lamure M: *Prétopologie et applications: un état de l'art*. Hermann, 2009.

[4] Auray, J. P., Duru G. Mougeot M.: *A pre-topological analysis of the input-output model*. 1979.

[5] Belmandt, Z.T: *Basics of pretopology*. Hermann, 2011.

[6] Bondy, J. A., Murty U. S. R.: *Graph Theory*. Springer, 2008.

[7] Brissaud, M.: *Les espaces prétopologiques*. 1975.

[8] Contreras, J., Guarata N. Reyes A.: *Caracterización de las variables de una matriz de contabilidad social mediante la teoría de la pretopología*. 2011.

[9] Levorato, V.: *Contributions à la modélisation des réseaux complexes: pré-topologie et applications*. 2008. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00460708/document`.

[10] Morse, G.: *The Science Behind Six Degrees*. 2003. `https://hbr.org/2003/02/the-science-behind-six-degree`.

[11] Ramirez, P.: *El sistema de Leontief y su solución matemática*. 1992.

[12] Sousa, A.: *Complex networks: a mini review*. 2020. `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13538-020-00772-9.pdf`.

[13] Vu Buio, Q.: *Pretopology and Topic Modeling for Complex Systems Analysis : Application ou Document Classification and Complex Network Analysis*. 2019. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02147578/document`.

[14] Willard, S.: *General Topology*. Dover Publications Inc, 1970.

CAPÍTULO 11

Anexos

Teorema 19 (Hawkins-Simon)**.** *Considerése el sistema $Bx = c$ en donde $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Para algún $c > 0$, $Bx = c$ tiene una solución x no negativa.

ii) $\forall c \geq 0$, $Bx = c$ tiene solución x no negativa.

iii) Todos los menores principales de B son positivos.

iv) B es una P-matriz.