UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Modelos binomiales de procesos aleatorios discretos: aplicación a valuación de proyectos

Trabajo de investigación presentado por Carlos Chávez Rodríguez, para optar por el grado académico de Licenciado en Matemáticas

Guatemala
2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Modelos binomiales de procesos aleatorios discretos: aplicación a valuación de proyectos

Trabajo de investigación presentado por Carlos Chávez Rodríguez, para optar por el grado académico de Licenciado en Matemáticas

Guatemala
2013

Vo.Bo.:

(f)________________________________
Doctor Raúl Benjamín González de Paz

Tribunal:

(f)________________________________
Doctor Raúl Benjamín González de Paz

(f)________________________________
Licenciado Adrián Licht Licht

(f)________________________________
M.A. Nancy Anely Zurita Villagrán

Fecha de aprobación: Guatemala, 17 de mayo 2013

Prefacio

Este trabajo de investigación trata sobre los procesos aleatorios binomiales y cómo pueden ser aplicados a la matemática financiera. Una de las aplicaciones más conocidas son las opciones financieras (basado en el trabajo de Cox-Ross-Rubinstein) y este trabajo también trata de qué son y para qué sirven éstas. El trabajo incluye una descripción general de los modelos binomiales, opciones, la comparación con otros métodos de valuación, opciones financieras. Además de un ejemplo de la vida real en donde podamos aplicarlas en el ámbito guatemalteco. Hace referencias a varias bibliografías, que también estudian los temas relacionados.

Este estudio no se hubiera podido realizar, sin el apoyo de la Universidad del Valle de Guatemala por medio del Departamento de Matemáticas, al igual que la valiosa ayuda de mis asesor Dr. Raúl González de Paz y el apoyo del Lic. Adrián Licht.

Agradezco a Dios por las oportunidades que me ha dado y a mis padres, hermanos y amigos por todo su apoyo y paciencia durante toda mi carrera y la realización de la tesis. Por último, agradezco a mis maestros por el conocimiento que me compartieron durante toda la universidad.

Índice

Lista de tablas

Listado de figuras

Resumen

Este trabajo surgió con un interés de trabajar temas relacionados con la unión de las finanzas con las matemáticas. El trabajo inicia con una definición, descripción y propiedades básicas de los principales conceptos de la teoría de probabilidades y las variables aleatorias binomiales. Luego, habla de los modelos tradicionales para modelar precios de activos en el tiempo con el modelo de caminata aleatoria y el movimiento browniano.

Después del desarrollo teórico, el trabajo presenta una de las aplicaciones financieras: la valuación de opciones reales. La aplicación comienza con definir y presentar las suposiciones básicas de los modelos de mercados financieros, luego los métodos tradicionales de valuación, una definición de las opciones financieras y los tipos de éstas.

Por último, se estudia el modelo de Cox-Ross-Rubinstein, el cuál se basa en una distribución binomial, y se comienza al generalizar los modelos de uno y dos pasos. Dentro de esta parte, se incluye el teorema de arbitraje, uno de los más importantes en la teoría financiera. Se termina el trabajo presentando un ejemplo la aplicación de una opción real en Guatemala.

I. Introducción

Las matemáticas financieras proporcionan una gran ayuda a la hora de la toma de decisiones. Dentro de las matemáticas financieras, algunas de las áreas que más se estudian y aplican son la estadística y probabilidad. El análisis estocástico provee el marco teórico de herramientas a la matemática financiera para modelar comportamientos de precios de activos y valuar éstos. Los precios de acciones y activos se mueven de forma aleatoria en el tiempo, por lo que puede que se apeguen a una distribución conocida. El modelo binomial puede ser aplicado para describir este fenómeno.

Existen muchas herramientas que le permiten al analista financiero, administrador de una empresa o inversionista determinar cómo va administrar los recursos financieros. Tradicionalmente, el valor presente neto (VPN) y el flujo de efectivo descontado (DCF por sus siglas en inglés) son las herramientas más utilizadas, aunque no sean las únicas. El VPN y el DCF tienen ciertas hipótesis que puede que no beneficien de la mejor forma al inversionista. Por ejemplo, en el análisis de DCF supone que los flujos futuros, los cuales son riesgosos, son el valor esperado en este período, es decir, analizamos un escenario esperado. Estos flujos son descontados al presente utilizando una tasa fija, y el VPN es comparado con el costo actual. Este análisis deja afuera la flexibilidad del analista para adaptarse y revisar las decisiones del futuro en respuesta de cambios inesperados en el proyecto, la empresa y el mercado. Esto quiere decir que en el análisis de VPN debemos tomar una decisión rápida, ya que no se permiten cambios en el futuro ni cambios de la estrategia de operaciones y ventas.

Debido a esto, se debió crear herramientas que se adapten a un mundo, en donde la única constante es el cambio, que permita al analista tomar las mejores decisiones en base a las variaciones entre el valor esperado y el valor real. Cuando la nueva información va llegando al analista, el riesgo sobre los flujos futuros y el mercado va disminuyendo, permitiendo a éste modificar la estrategia y las decisiones. El modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein permite ser flexible bajo ciertas condiciones. Este modelo va a permitir aplicarse en opciones financieras y luego en opciones reales. Al final, se busca distribuir el capital a inversiones que agreguen valor, tomando en cuenta los flujos de efectivo, el tiempo y el riego.

Antes de iniciar con la teoría, se va hará la suposición que el lector tiene conocimiento y manejo de los elementos básicos de la teoría de conjuntos, funciones, estadística y la teoría financiera.

II. Justificación

La Matemática Financiera se ha convertido en una de las áreas más populares y estudiadas en los últimos años debido a las necesidades de las organizaciones privadas y públicas para financiarse y crecer. Además, el entendimiento y manejo de los conceptos financieras da un valor agregado al analista, ya que va a poder tomar mejores decisiones.

El modelo de Cox-Ross-Rubinstein también se ha popularizado ya que no requiere de conocimientos matemáticos muy elevados, pero tiene una gran potencial para aplicaciones de la vida real.

Las opciones reales son herramientas financieras útiles que se utilizan poco en las empresas guatemaltecas. Además, es un tema poco visto en los cursos de finanzas de pregrado. El estudio en éstas puede desarrollar herramientas que van a facilitar el análisis financiero, además de dar un marco más real y aplicable que otras metodologías. A comparación de otras herramientas, tiene ventajas como la flexibilidad de tiempo de toma de decisión.

III. Objetivos

A. Objetivo general

Exponer el marco teórico general de modelos binomiales para presentar procesos aleatorios en términos discretos.

B. Objetivos específicos

- Estudiar las características de las probabilidades.
- Describir el modelo de Cox-Ross-Rubinstein.
- Conocer qué son las opciones financieras y reales.
- Aplicar la metodología de opciones reales a Guatemala.

IV. Alcances

La matemática financiera tiene el potencial de alcanzar muchas áreas y empresas. El trabajo presenta uno de los modelos financieros más impotentes, el cual puede ser aplicado en cualquier empresa o proyecto y dar una visión mas real a lo que se está trabajando. Actualmente, pocas empresas guatemaltecas trabajan con herramientas matemáticas sofisticadas y desarrolladas, por lo que este trabajo pudiera funcionar como una guía y apoyo para empezar a crear estos modelos y darle un valor agregado al análisis financiero. En Guatemala, el modelo binomial y de Cox-Ross-Rubinstein puede ser aplicado en la industria minera, agrícola, textil, de telecomunicaciones, financiera, etc.

V. Marco histórico

El mundo financiero crece más y más cada día debido a la necesidad de financiamiento. Además, este mundo es bastante complejo y presenta una oportunidad de negocio, lo que lo ha convertido en un tema popular de estudio.

Durante los últimos 60 años, las opciones financieras se han convertido una de las áreas mas estudiadas y explotadas de las matemáticas financieras. Todo comenzó en 1900, cuando un estudiante francés de matemáticas llamado Louis Bachelier defendió su tesis de doctorado llamada "La Teoría de la Especulación" (Théorie de la Spéculation), bajo asesoramiento de Henri Poncairé. Conocido como el padre de la matemática financiera, Bachelier trató de modelar el mercado de París, usado ideas del movimiento Browniano, el Teorema de Límite Central, caminatas aleatorias, etc., proponiendo que los precios en el mercado se mueven de forma aleatoria. Esta nueva propuesta no fue muy aceptada por la comunidad matemática y economista de París, por lo que ésta fue olvidada por mucho. Bachelier también propuso el uso de un nuevo instrumento que fuera libre de riesgo: una opción financiera.

Fue hasta mediados de los 1950s que el estadístico Jimmie Savage encontró el trabajo de Bachelier por accidente en la biblioteca de la Universidad de Chicago. Éste alertó al economista Paul Samuelson, quien encontró la tesis en la biblioteca del Instituto Tecnológico de Massachusetts. En 1965, Samuelson publicó dos artículos revolucionarios, en donde argumentó que los precios se deben mover de forma aleatoria y métodos para valuar opciones financieras.

Este redescubrimiento comenzó un período de estudio en valuación de opciones. Algunos de los resultados mas conocidos se dieron con la publicación del trabajo de Fischer Black y Myron Scholes en 1973, con la famosa fórmula de Black-Scholes.

En 1979 John Cox de la Universidad Tecnológica de Massachusetts, Stephen Ross de la Universidad de Yale y Mark Rubinstein de la Universidad de California en Berkeley publicaron un artículo llamado "Valuación de Opciones: Una Aproximación Simplificada" (Option Pricing: A Simplified Approach). Este artículo utiliza un método binomial, suponiendo que el tiempo es discreto. Éste se popularizó ya que es mas sencillo y comprensible que el de Black-Scholes, convirtiéndose en la herramienta clásica para valuar opciones. Además, por su naturaleza, se puede utilizar el método para cualquier activo, lo que lo hace un modelo más atractivo.

VI. Marco metodológico y delimitación

Este trabajo se basa en revisar diferentes fuentes bibliográficas para desarrollar el modelo binomial propuesto por Cox, Ross y Rubinstein y luego estudiar una aplicación a la valuación de un proyecto. El desarrollo del modelo binomial requiere del estudio de ciertas herramientas estadísticas y financieras. Este estudio se hará usando bibliografía especializada en temas de probabilidades, distribuciones, herramientas financieras y opciones.

Luego de desarrollar el modelo binomial, se trasladará a una aplicación: las opciones reales. Las opciones son una buena herramienta para valuar proyectos, y se podrían aplicar a industrias guatemaltecas.

La bibliografía del modelo binomial es muy extensa, por lo que la información no cuenta con limitantes. Por otro lado, aunque el modelo sea sencillo, comparado a otros, tiene ciertas limitaciones, ya que toma en cuenta ciertas suposiciones (como el principio de no arbitraje, tasas de interés fijo, intervalos de tiempo discretos, etc.). Es por esto que es un buen modelo para representar el mundo real y estructurar nuestra mente, pero puede que en algunos casos no sea aplicable.

VII. Marco teórico

Para iniciar el trabajo de investigación, se deben recordar algunos conceptos de la teoría de probabilidades y variables aleatorias.

A. Probabilidades

1. Conceptos básicos de las probabilidades

a. Espacios muestrales, eventos y probabilidades. Antes de comenzar con la teoría de probabilidades, se deben conocer algunas definiciones.

Definición 1. Un *experimento* es el proceso por el cual obtenemos una observación. Los experimentos pueden terminar con uno o más resultados, a los que llamamos *eventos*.

Los eventos pueden ser compuestos por otros eventos, ocurriendo de una o más formas distintas.

Definición 2. Un *evento simple* es un evento que no es compuesto, es decir, no se puede descomponer. Cada evento simple del experimento corresponde con un solo *punto muestral*.

Definición 3. El *espacio muestral* de un experimento es el conjunto formado por todos los posibles resultados o puntos muestrales.

Los eventos también se pueden ver como un subconjunto del espacio muestral.

Definición 4. Suponga que se tiene un espacio muestral S y un evento, o subconjunto, A de S. Entonces, le asignamos un número a A llamado *probabilidad*, P(A), tal que cumpla los siguientes axiomas:

- **Axioma 1:** $P(A) \geq 0$.
- **Axioma 2:** $P(S) = 1$
- **Axioma 3:** Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots$ una sucesión tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

Nótese que el axioma 3 se tiene para una secesión infinita de conjuntos. La propiedad también se cumple para sucesión finita de conjuntos. Es decir, si $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ una sucesión tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)$$

Algunas veces, la probabilidad que algún evento se dé depende de otro evento.

Definición 5. La *probabilidad condicional* de un evento es la probabilidad que éste ocurra dado a que uno o más eventos ya han ocurrido. La *probabilidad condicional del evento* A, dado a que el evento B ha ocurrido es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 6. Los eventos A y B se dicen que son *independientes* si se cumple alguno de los siguientes casos:

- $\boldsymbol{P(A|B) = P(A)}$
- $\boldsymbol{P(B|A) = P(B)}$
- $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

De lo contrario, se dice que A y B son *dependientes.*

b. Propiedades. Las definiciones anteriores nos dan algunas propiedades para manipular las probabilidades de dos o más eventos distintos.

Teorema A. (Ley multiplicativa de probabilidad) Sean A y B dos eventos. Entonces, $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)}$. Si A y B son eventos independientes, entonces $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(\mathrm{B})}$.
Demostración: Esta ley se deduce de la definición de probabilidad condicional y la definición de eventos independientes. ■

Teorema B. (Ley aditiva de probabilidad) Sean A y B dos eventos. Entonces, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}$. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(\mathrm{B})}$.
Demostración: Nótese que $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{(A^{C} \cap B)}$ son eventos mutuamente excluyentes, y además que $\boldsymbol{(A \cup B) = A \cup (A^{C} \cap B)}$. También se tiene que $\boldsymbol{B = (A^{C} \cap B) \cup (A \cap B)}$, en donde $\boldsymbol{(A^{C} \cap B)}$ **y** $\boldsymbol{(A \cap B)}$ son mutuamente excluyentes. Entonces, por el axioma 3, se tiene que $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(A^{C} \cap B)}$ **y** $\boldsymbol{P(B) = P(A^{C} \cap B) + P(A \cap B)}$. Entonces, despejando para la segunda igualdad, se tiene que $\boldsymbol{P(A^{C} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)}$. Sustituyendo la última igualdad en $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(A^{C} \cap B)}$, se tiene el resultado deseado. ■

Nótese que los dos teoremas anteriores se dieron para dos eventos, pero el caso de n eventos es análogo.

Teorema C. Sea A un evento, entonces $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(A^{C})}$.
Demostración: Nótese que $\boldsymbol{S = A \cup A^{C}}$, en donde $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{A^{C}}$ son eventos mutuamente excluyentes. Entonces, por los axiomas 2 y 3 se deduce que $\boldsymbol{P(A) + P(A^{C}) = P(S) = 1}$ y $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(A^{C})}$. ■

2. Variables aleatorios discretas

a. Variables aleatorias discretas. Las variables aleatorias nos van a permitir profundizar más el estudio de las probabilidades. Existen varias distribuciones para las variables aleatorias, pero la binomial va a ser la importante en este trabajo.

Definición 7. Una *variable aleatoria* es una función que va de un espacio muestral hacia los números reales. Un *proceso aleatorio* es la evolución, o una sucesión, de la o las variables aleatorias en el tiempo.

Definición 8. La *población* es la recopilación de datos de interés, una *muestra* es un subconjunto seleccionad de datos. Un *muestreo aleatorio* es aquel en donde cada una de las muestras de la población tienen igual probabilidad de ser seleccionada.

Definición 9. Una variable aleatoria es *discreta* si puede tomar un número finito, o infinito contable, de valores distintos.

Definición 10. La probabilidad que una variable aleatoria Y tome un valor y, escrito como *P(Y=y)* o *p(y)*, es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales a los que se asigna el valor y. La *función de probabilidad* p(y) para Y es la función que asigna probabilidades a cada valor y. La *distribución de probabilidad* de una variable discreta puede ser representada por una fórmula, tabla o gráfica que produzca p(y)=P(Y=y) para toda y. La *función de probabilidad condicional* de dos variables aleatorias discretas Y_1 y Y_2 es:

$$\boldsymbol{p(y_1|y_2) = P(Y_1 = y_1|Y_2 = y_2) = \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)}{P(Y_2 = y_2)} = \frac{p(y_1, y_2)}{\sum_{todos\, y_1} p(y_1, y_2)}}$$

siempre que $\sum_{\boldsymbol{todos\, y_1}} p(y_1, y_2) > 0$. La función de probabilidad condicional es indefinida en el caso que $\sum_{todos\, y_1} p(y_1, y_2) = 0$.

Teorema D. Para cualquiera distribución de probabilidad discreta, se tiene que:

- $\boldsymbol{0 \leq p(y) \leq 1}, \forall\, \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{\sum_y p(y) = 1}$

Demostración: Nótese que cada y representa un subconjunto del espacio muestra, y p(y) es una probabilidad, entonces lo anterior se tiene por los axiomas 1, 2 y 3. ■

b. Valor esperado y varianza

Definición 11. Sea Y una variable aleatoria con función de probabilidad p(y). El *valor esperado, E(Y),* se define como $\boldsymbol{E(Y) = \sum_y y p(y)}$.

Nótese que si p(y) es una buena representación de la población, entonces E(Y)=μ, la media poblacional.

Teorema E. Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad p(y) y g(Y) una función real en Y. Entonces, el valor esperado de g(Y) es $\boldsymbol{E[g(Y)] = \sum_y g(y) p(y)}$.

Demostración: Supóngase que la variable g puede tomar los valores $\boldsymbol{g_1, g_2, g_3}, \cdots$. Entonces, $\boldsymbol{P[g(Y) = g_i] = \sum_{toda\, y_i\, tal\, que\, g(y_i) = g_i} p(y_i) = p'(g_i)}$. Por la definición anterior se tiene que $\boldsymbol{E[g(Y)] = \sum g_i p'(g_i) = \sum g_i [\sum p(y_i)] = \sum_i \sum_j g_i p(y_j) = \sum_i g(y_i) p(y_i)}$. ■

Definición 12. Sea Y una variable aleatoria con media E(Y)=μ, entonces, la *varianza* de una variable aleatoria es $V(Y)=E[(Y-\mu)^2]$. La *desviación estándar* de Y es la raíz cuadrada positiva de la varianza. La *covarianza* entre dos variables aleatorias Y_1 y Y_2 es $Cov(Y_1,Y_2)=E[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)]$.

Nótese que si p(y) es una buena representación de la población, entonces $V(Y)=\sigma^2$, la varianza poblacional y σ es la desviación estándar poblacional.

Teorema F. Sea Y una variable aleatoria discreta, p(y) su función de probabilidad, y c una constante. Entonces,

- E(c)=c
- Sea g(Y) una función sobre Y ⇒ E[cg(Y)]=cE[g(Y)]
- Sean $\boldsymbol{g_1(Y), g_2(Y), \ldots, g_k(Y)}$ funciones de Y ⇒ $\boldsymbol{E[g_1(Y)+g_2(Y)+\cdots+g_k(Y)] = E[g_1(Y)]+E[g_2(Y)]+\cdots+E[g_k(Y)]}$

Demostración: Primero, considere la función g(Y)=c. Entonces, por el Teorema E y D se tiene que $\boldsymbol{E(c)=\sum_y cp(y) = c\sum_y p(y) = c(1) = c}$.

Ahora, sea g(Y) una función de Y. Por el Teorema $\boldsymbol{E[cg(Y)] = \sum_y cg(y)p(y) = c\sum_y g(y)p(y) = cE[g(Y)]}$.

Por último se demostrará para el caso en que k=2 ya que para cada k finita el paso es análogo. Entonces, $\boldsymbol{E[g_1(Y)+g_2(Y)] = \sum_y [g_1(y)+g_2(y)]p(y) = \sum_y g_1(y)p(y) + \sum_y g_2(y)p(y) = E[g_1(Y)] + E[g_2(Y)]}$. ■

Algunas propiedades importantes de la varianza y covarianza son:

Teorema G. Sean Y_1, Y_2 ,…, Y_n variables aleatorias con medias μ_1 y μ_2, y c_1,…, c_n constantes. Entonces,

- $\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2) = E[(Y_1-\mu_1)(Y_2-\mu_2)] = E[Y_1Y_2] - E(Y_1)E(Y_2)}$
- Si $\boldsymbol{Y_1}$ y $\boldsymbol{Y_2}$ son variables independientes, entonces $\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2) = 0}$
- $\boldsymbol{V(c_1Y_1 + c_2Y_2 + \cdots + c_nY_n) = \sum_{i=1}^n c_iV(Y_i) + 2\sum\sum_{1\le i<j\le n} c_ic_jCov(Y_i, Y_j)}$

Teorema H. Sea Y una variable aleatoria discreta, p(y) su función de probabilidad y la media E(y)=μ. Entonces, $\boldsymbol{V(Y) = \sigma^2 = E[(Y-\mu)^2] = E(Y^2) - \mu^2}$.

Demostración: Nótese que, por la definición de la varianza y el teorema anterior, se tiene que $\boldsymbol{\sigma^2 = E[(Y-\mu)^2] = E[Y^2 - 2\mu Y + \mu^2] = E(Y^2) - E(2\mu Y) + E(\mu^2) = E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2}$ ya que μ es una constante. Además, nótese que $\boldsymbol{\mu = E(Y)} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma^2 = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(Y^2) - \mu^2}$. ■

c. Valor esperado condicional. Anteriormente vimos la definición de la probabilidad condicional, dada dos variables aleatorias discretas. Ahora, vemos lo análogo a valores esperados.

Definición 13. El *valor esperado condicional* de $g(Y_1)$, dadas dos variables aleatorias discretas Y_1 y Y_2, se define como:

$$\boldsymbol{E(g(Y_1)|Y_2=y_2) = \sum_{toda\, y_1} g(y_1)p(y_1|y_2)}$$

Con esta definición, podemos obtener algunos resultados que nos simplifican la obtención de los valores esperados.

Teorema I. Sean X y Y dos variables aleatorios discretas. Entonces $\boldsymbol{E(X) = E[E(X|Y)]}$

Demostración: Nótese que el lado derecho de la igual es equivalente a $\boldsymbol{\sum_y E(X|Y=y)P(Y=y)}$. Entonces, se tiene que $\boldsymbol{E[E(X|Y)] = \sum_y E(X|Y=y)P(Y=}$

$\boldsymbol{y}) = \sum_y \sum_x \boldsymbol{x}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_1}|\boldsymbol{y_2})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \sum_y \sum_x \boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \sum_y \sum_x \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \sum_x \boldsymbol{x} \sum_y \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \sum_x \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$. ■

d. Distribución binomial. La distribución binomial es una de las más comunes, ya debido a que ésta se basa en la idea en que sólo se pueden dar dos resultados. Entonces, un experimento binomial tiene las siguientes características:

- Se tiene un número finito de pruebas idénticas.
- Se tiene sólo dos resultados para cada prueba: éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito en cada prueba es igual a un número p. La de fracaso es $q=1-p$.
- Las pruebas son independientes.
- El número de éxitos observados durante todas las pruebas es la variable aleatoria de interés.

Esta distribución tiene bastantes aplicaciones. En plantas de producción, existe una probabilidad que el producto sea rechazado o no; en finanzas, el precio de una acción financiera sube o baja después de un intervalo de tiempo; en una elección, el voto va a favor o en contra de cierto candidato; al lanzar una moneda, el resultado puede ser o no puede ser cara. Esta descripción nos lleva a la siguiente definición:

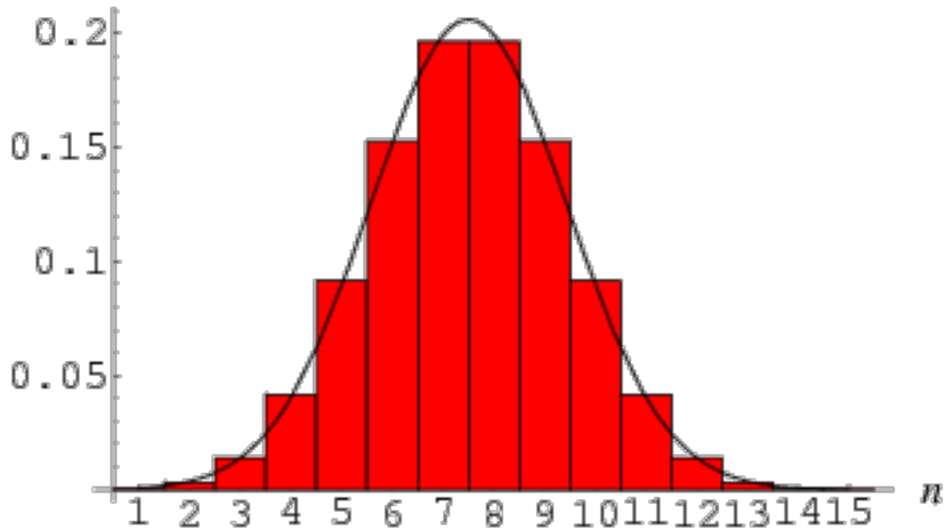
Definición 14. Una variable aleatoria Y tiene la *distribución binomial* con probabilidad *p* de éxito y basada en *n* pruebas si y sólo si

$$p(y) = \frac{n!}{y!\,(n-y)!}p^y q^{n-y} = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$

en donde $y = 0,1, \ldots, n$ y $0 \leq p \leq 1$.

Las siguientes gráficas muestran ejemplos del histograma de probabilidad binomial.

Figura 1. Distribución binomial con p=0.5 y n=15



*Fuente: Wolfram Mathworld, 2011

Los siguientes son resultados importantes de la distribución binomial.

Teorema J. Sea Y una variable aleatoria binomial con n pruebas y con probabilidad p de éxito. Entonces, $\boldsymbol{\mu = E(Y) = np}$ y $\boldsymbol{\sigma^2 = V(Y) = npq}$.

Demostración: Nótese que $\boldsymbol{E(Y) = \sum_y yp(y) = \sum_{y=0}^{n} y \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} = \sum_{y=1}^{n} y \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} = \sum_{y=1}^{n} \frac{n!}{(y-1)!(n-y)!} p^y q^{n-y} = np \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(y-1)!(n-y)!} p^{y-1} q^{n-y}}$. Ahora, haciendo $\boldsymbol{z = y - 1}$, se tiene que $\boldsymbol{np \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(y-1)!(n-y)!} p^{y-1} q^{n-y} = np \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{z!(n-1-z)!} p^z q^{n-1-z}}$.Nótese que $\boldsymbol{p(z) = \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{z!(n-1-z)!} p^z q^{n-1-z}}$ es la función de probabilidad de z para n-1 pruebas. Además, se tiene que $\boldsymbol{\sum_z p(z) = 1 \Rightarrow E(Y) = np \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{z!(n-1-z)!} p^z q^{n-1-z} = np \sum_z p(z) = np}$.

Ahora, recordemos que $\boldsymbol{\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - \mu^2}$, entonces podemos encontrar la varianza al conocer $\boldsymbol{E(Y^2)}$. Además, nótese que $\boldsymbol{E((Y(Y-1)) = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y) \Rightarrow E(Y^2) = E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y) = E\big(Y(Y-1)\big) + \mu}$. Ahora, nótese que $\boldsymbol{E(Y(Y-1)) = \sum_{y=0}^{n} y(y-1) \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} = \sum_{y=2}^{n} \frac{n!}{(y-2)!(n-y)!} p^y q^{n-y}}$ ya que los primeros dos términos son cero. Haciendo la sustitución $\boldsymbol{z = y - 2}$ obtenemos que $\boldsymbol{E\big(Y(Y-1)\big) = \sum_{y=2}^{n} \frac{n!}{(y-2)!(n-y)!} p^y q^{n-y} = n(n-1)p^2 \sum_{y=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(y-2)!(n-y)!} p^{y-2} q^{n-y} = n(n-1)p^2 \sum_{y=2}^{n-2} \frac{(n-2)!}{z!(n-z-2)!} p^z q^{n-z-2} = n(n-1)p^2 \sum_{y=2}^{n} \binom{n-2}{z} p^{y-2} q^{n-y}}$. Nótese que $\boldsymbol{p(z) = \binom{n-2}{z} p^{y-2} q^{n-y}}$ es la función de probabilidad binomial para n-2 pruebas, por lo que su sumatoria es igual a la unidad. Entonces, $\boldsymbol{E\big(Y(Y-1)\big) = n(n-1)p^2}$ y se tiene que $\boldsymbol{E(Y^2) = E\big(Y(Y-1)\big) + \mu = n(n-1)p^2 + np}$ y $\boldsymbol{\sigma^2 = E(Y^2) - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np\big((n-1)p + 1 - np\big) = np(1-p) = npq}$. ■

Ahora, modificando la notación, denotemos a el evento de tener éxito como 1 y a el evento de fracaso como 0. Entonces, podemos reescribir las probabilidades como $p(y = 1) = p$ y $p(y = 0) = 1 - p$. Entonces, haciendo una prueba se tiene el valor esperado $E(Y) = np = 1p = p$, cosa que es análogo a la definición de valor esperado,, $E(Y) = 1p + 0(1 - p) = p$. Además, se tiene una varianza $V(Y) = npq = p(1-p) = p - p^2$ ó con el teorema anterior $V(Y) = E(Y^2) - \mu^2 = p(1) + (1-p)(0) - (p)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq = npq$.

e. Otros resultados importantes de la estadística. Otros resultados importantes de la estadística y la teoría de probabilidades es la famosa ley de números grandes y el teorema de límite central. Ambos tienen conclusiones similares y son muy útiles para aplicaciones en la vida real, y solo serán enunciados ya que en cualquier bibliografía se puede encontrar la prueba. Existen dos enunciados de la ley de números grandes, la débil y la fuerte. Para fines prácticos, es mejor presentar la ley débil.

Teorema K. (Ley de números grandes, enunciado débil) sean $\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}$ n variables aleatorias independientes que tienen la misma función de distribución con media $\boldsymbol{\bar{Y}_\iota = \mu}$ y a varianza $\boldsymbol{V(Y_i) = \sigma^2}$. Entonces, si $\boldsymbol{Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}}$, se tiene que, cuando

$\boldsymbol{n \longrightarrow \infty}$, $\overline{\boldsymbol{Y}} = \overline{\sum_{\iota=1}^{n} \frac{Y_\iota}{n}} = \frac{1}{n}\overline{\sum_{\iota=1}^{n} Y_\iota} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_\iota = \frac{1}{n}(\boldsymbol{n\mu}) = \boldsymbol{\mu}$, la media poblacional; y $\boldsymbol{V(Y)} = \boldsymbol{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{V}\left(\frac{Y_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Definición 15. Se dice que una variable aleatoria continua $\boldsymbol{Y}$ está *normalmente distribuida* o con *distribución normal* si su función de distribución tiene la forma:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

en donde μ es la media y σ^2 la varianza.

Teorema L. (Teorema de Límite Central) sean $\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}$ *n* variables aleatorias independientes que tienen la misma función de distribución con media $\boldsymbol{\mu}$ y varianza $\boldsymbol{\sigma^2}$. Además, sea $\overline{\boldsymbol{Y}} = \sum \frac{Y_i}{n}$. Entonces, cuando $\boldsymbol{n \longrightarrow \infty}$, $\overline{\boldsymbol{Y}}$ tiende a una distribución normal con media $\boldsymbol{\mu}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Además, la variable Z tal que $\boldsymbol{z} = \frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es una variable normal con media 0 y varianza 1.

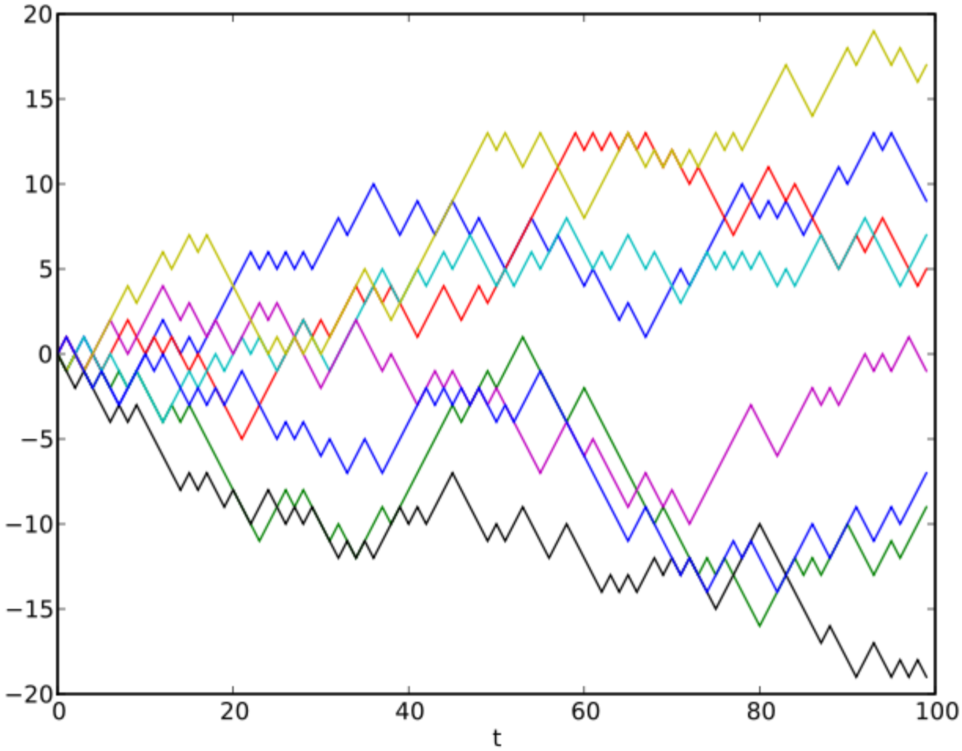
3. Proceso aleatorio discreto: modelo de caminatas aleatorias. Es necesario definir el siguiente modelo para nuestro análisis. Supóngase que se tiene un intervalo de tiempo *T*, y lo dividimos en *n* intervalos de longitud *d* tal que $\boldsymbol{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T}$, en donde $\boldsymbol{t_k = kd}$, con $\boldsymbol{k = 0, 1, .., n}$. Entonces, a cada *k* le asignamos una observación $\boldsymbol{Y_k}$, en donde $\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}$ son variables binomiales e independientes entre sí. Entonces, definimos una suma parcial $\boldsymbol{W_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k}$, con $\boldsymbol{W_0 = 0}$ y $\boldsymbol{W_{k+1} = W_k + Y_{k+1}}$ para $\boldsymbol{k = 0, 1, .., n}$. Nótese que las variables $\boldsymbol{W_1, W_2, \dots, W_n}$ son variables aleatorias, pero no son independientes entre sí, aunque $\boldsymbol{W_{k+1} - W_k}$ si es independiente a $\boldsymbol{W_k}$. Ahora, armamos la sucesión $\{\boldsymbol{W_k, k = 0, 1, .., n}\}$ de variables aleatorias. Esto nos lleva a la definición de nuestro modelo de precios a usar:

Definición 16. El proceso de sumas parciales $\{\boldsymbol{W_k}\}$ con variables aleatorias binomiales $\boldsymbol{Y_k}$ independientes entre sí, como se definió anteriormente, se conoce como *caminata aleatoria*.

Manteniendo la misma notación de las variables binomiales, podemos encontrar las propiedades de la caminata aleatoria. Sea W_k la caminata aleatoria definida anteriormente, entonces $E[W_k] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k] = E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_k] = p + p + \cdots + p = kp$. Además, podemos calcular la varianza como $\boldsymbol{V}(W_k) = V(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k) = V(Y_1) + V(Y_2) + \cdots + V(Y_k) = pq + pq + \cdots + pq = kpq$ debido al teorema visto anteriormente y a que la covarianza entre cualesquiera dos variables es cero ya que son independientes entre sí. Por último, definimos la medida de probabilidad del modelo que, debido a que se deriva de variables binomiales, se tiene que $p(W_k = i) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$ en donde *i* es un número entre cero y *k*.

Las caminatas aleatorias se pueden simular utilizando una computadora y un generador de variables aleatorias e ir sumándolas al caso anterior. La siguiente figura muestra un ejemplo de caminatas aleatorias simuladas:

Figura 2. Ejemplo de modelo de caminatas aleatorias



*Fuente: Wikipedia.org, 2011

4. Movimiento browniano. Una de las ideas más importantes que propuso Bachelier en su tesis fue el concepto de modelar precios con movimiento browniano. El movimiento browniano es un concepto de química, el cual habla del proceso caótico de desplazamiento de partículas suspendidas en un gas o líquido. Este movimiento aleatorio es producido por la colisión entre las partículas. Esta idea daba el concepto que el precio de los activos se mueve de forma aleatoria en el tiempo.

El movimiento browniano también se puede derivar de un modelo de caminata aleatoria. Supóngase que se tiene un caminata aleatoria W_k como se definió anteriormente. Creando una nueva variable normal al normalizar a W_k y haciendo que $n \longrightarrow \infty$ y d$\longrightarrow 0$ tal que la relación $T = nd$ se mantenga, se tiene que, por teorema de límite central, la sucesión de variables aleatorias binomiales discretas converge a una distribución de variable aleatoria continua tipo normal. Esta nueva variable aleatoria normal va a tener una media cero y una varianza *t*.

Ahora, podemos definir una variable más. Sea $\Delta W = W_t - W_s$ cuando $s < t$. Entonces, para viendo el escenario límite, se tiene que para $\Delta W_t = W_{t+d} - W_t$ vamos a tener que la variable ΔW_t tiene una distribución de tipo continua y normal con media cero y varianza d. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 17. Se le conoce como *Movimiento Browniano Estándar* a un proceso aleatorio $(\boldsymbol{W_t})_t$ tal que:

- W_t es una variable aleatoria continua tipo normal en *t,* con media cero y una varianza *t*.
- Para $t = 0$ se tiene que $W_0 = 0$.

- $\Delta W_t = W_{t+d} - W_t$ es una variable aleatoria normal con media cero y varianza Δt.
- Para toda pareja de intervalos disjuntos, es decir para $t' < t \leq s' < s$, se tiene que las variables aleatorias $W_t - W_{t'}$ y $W_s - W_{s'}$ son variables aleatorias independientes.

El Movimiento Browniano también es conocido como Proceso de Wiener. Durante el siglo pasado, se desarrollaron dos tipos de Movimiento Browniano: el aritmético y el geométrico. El primero fue propuesto por Bachelier en su trabajo. Bachelier propuso que, sabiendo el precio de un activo en el tiempo t (S_t), se puede determinar el cambio de precio con la siguiente fórmula: $\Delta S_t = S_t - S_{t-1} = \mu d + \sigma \Delta W_t$, en donde μ es la media, σ la desviación estándar y ΔW_t el proceso definido anteriormente. Nótese que ΔW_t tiene media cero y desviación estándar *d*, por lo que existe la posibilidad, aunque poco probable, que ΔS_t sea negativa, lo cual va contra la realidad.

Por otro lado, Black y Scholes propusieron usar otro tipo de movimiento de precios para evitar el problema de los negativos. Supongamos que, sabiendo el precio en el tiempo t, S_t, podemos determinar el precio de un activo en un período después usando la fórmula $S_{t+1} = S_t e^{\mu d + \sigma \Delta W_t}$. Entonces, $\frac{S_{t+1}}{S_t} = e^{\mu d + \sigma \Delta W_t} \Rightarrow \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \mu d + \sigma \Delta W_t$. Nótese que $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ siempre va a ser positivo. Al final, se va a tener que $\Delta S_t = S_t - S_{t-1} = (\mu + \frac{\sigma^2}{2}) S_t + \sigma S_t \Delta W_t$. Este caso el elimina la posibilidad de tener un delta negativo, teniendo una mejor aplicación a la vida real. Más adelante se estudiarán las propiedades de $\ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$.

5. Martingalas. La última definición va a producir un resultado interesante más adelante. Ésta nos va a ayudar a estimar un valor en el futuro.

Definición 18. Sea $\boldsymbol{X_0, X_1, X_2, \ldots}$ una sucesión de variables aleatorias con valor esperado finito. Una *martingala* es un proceso estocástico en donde, para $\boldsymbol{X_0, X_1, \ldots, X_n}$, se tiene que $\boldsymbol{E(X_{n+1} | X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_n}$.

VIII. Aplicación: valuación de opciones financieras

Durante el resto del trabajo, se hará uso del concepto de activos. Se entiende por activo como cualquier objeto, tangible o intangible, que una empresa o individuo posea y pueda controlar y que tenga un valor económico positivo. Los activos se pueden en dinero en efectivo y pueden o no producir una rentabilidad en el futuro. Entonces, por activo podemos considerar a: dinero en efectivo, terrenos, edificios, computadores, acciones de empresas, bonos de empresas y gubernamentales, opciones financieras, etc.

A. Modelos de mercados financieros

Los mercados financieros se basan en diferentes tipos de activos, dependiendo de su liquidez y riesgo. Por ejemplo, se pueden tener activos libre de riesgo y activos riesgosos. Los activos libres de riesgo son aquellos en donde el resultado al futuro se conoce, además que su pago a los inversionistas es asegurado. Algunos ejemplos de estos activos son bonos de gobierno y certificados de depósito en un banco. Por otro lado los activos riesgosos son aquellos en los que no se sabe con certeza cuál es su comportamiento, el precio de estos pude subir o bajar en el tiempo. Algunos ejemplos de activos riesgosos son: acciones comunes, divisas, derivados y mercancías o *commodities*.

Para reducir la incertidumbre, muchas veces es importante crear combinaciones de diferentes tipos de activos. Por ejemplo, si un inversionista posee x_1 acciones del activo uno y x_2 acciones del activo dos, entonces tiene un portafolio (x_1,x_2). A la combinación o conjunto de activos se le conoce como portafolio. Si las acciones uno y dos tienen precios en algún tiempo t de $p_1(t)$ y $p_2(t)$, respectivamente, entonces la riqueza ó el valor del portafolio en este tiempo es $V(t)= x_1p_1(t)+ x_2p_2(t)$

El objetivo de cualquier inversión es maximizar el rendimiento posible, teniendo la mayor certeza posible de lo que va a pasar. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 19. El *rendimiento* de un activo o portafolio se define como $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{precio\ final - precio\ inicial}}{\boldsymbol{precio\ inicial}}$.

También se puede calcular el rendimiento de un portafolio, el cuál seria: $r_{Port} = \frac{\boldsymbol{V(t)-V(0)}}{\boldsymbol{V(0)}} = \frac{x_1(p_1(\mathrm{t})-p_1(0))+ x_2(p_2(t)-p_2(0))}{x_1p_1(0)+ x_2p_2(0)}$. El concepto anterior se puede generalizar de forma análoga para n activos.

Otra metodología para armar portfolios es por medio de la asignación de pesos. Entonces, si se tiene un valor inicial del portafolio, $V(0)$, y n activos $a_1, \dots, a_n$, podemos asignarle un peso w_i a cada $i = 1, \dots, n$ tal que $V(0) = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$, en donde v_i representa el valor inicial de cada a_i. Si a cada a_i le calculamos su rendimiento r_i en un tiempo *t*, entonces el rendimiento del portafolio es $r_{Port} = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$.

Dentro de un portafolio, se pueden tener diferentes activos y diferentes "posiciones" de estos activos. Si uno compra un activo, esperando que éste gane valor para venderlo en el futuro, decimos que tenemos una posición en largo. Aquí, ganamos la diferencia al vender a un precio mayor de lo que se compró. Si uno vende un activo (que puede ser o no propiedad del el inversionista), esperando que baje el precio para luego reponer las unidades, decimos que tenemos una posición en corto. Aquí, ganamos la diferencia al comprar un activo a un menor costo de lo que se vendió. La posición en largo se representa con un signo positivo y en corto negativa, ya que es nuestra obligación comprar los activos de regreso

1. Nociones básicas y suposiciones. La matemática financiera tiene como objetivo estudiar la complejidad del mundo real para crear modelos que se apeguen a éste. Para hacer esto, es necesario hacer algunos supuestos:

- Supuesto 1 (Tiempo): El tiempo es discreto.
- Supuesto 2 (Aleatoriedad): El valor en el futuro de un activo riesgoso es una variable aleatoria con al menos dos valores. El valor en el futuro de un activo libre de riesgo es un número conocido.
- Supuesto 3 (Precios positivos): Todos los precios de los activos son estrictamente positivos para cualquier tiempo t=0,1,2,…
- Supuesto 4 (Divisibilidad, liquidez y venta en corto): supóngase que se tiene un portafolio de n activos, en donde se poseen una cantidad $x_1, x_2, \ldots x_n$ de acciones de cada activo. Entonces, $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$. Si la cantidad es una fracción, entonces esto se refiere a la divisibilidad; la liquidez se refiere a que no existe limitación para la cantidad (este supuesto es para fines matemáticos ya que en el mundo real si existe un número limitado de acciones); si el número es positivo, entonces si tiene una posición en largo y si el número es negativo entonces se tiene una posición en corto.
- Supuesto 5 (Solvencia): La riqueza siempre es no negativa, es decir, $V(t) \geq 0, \forall\, t = 0,1, \ldots$
- Supuesto 6 (Precios discretas): Los valores de los precios en el futuro son una variable aleatoria que sólo puede tomar un número finito de números.

2. Principio de no arbitraje. El principio de no arbitraje es el último y más importante supuesto de la teoría financiera. Éste dice que el mercado no permite generar utilidades libres de riesgo que no tenga inversión inicial. Se dice que para un portafolio que viola este principio, se presenta una oportunidad de arbitraje.

Las oportunidades de arbitraje son raras en el mercado. Si se llegara a producir una, ésta sería con ganancias muy pequeñas, por un período muy corto de tiempo y muy difíciles de detectar. El mercado financiero tiene la capacidad de detectar estas oportunidades y eliminarlas para evitar que muchos inversionistas se aprovechen de ésta. Entonces, se tiene el último supuesto:

- Supuesto 7 (Principio de no arbitraje): No existe un portafolio con valor inicial $V(0) = 0$ tal que $V(t) > 0$ con alguna probabilidad no negativa.

En otras palabras, esto dice que si $V(0) = 0$ entonces $V(t) = 0$ con probabilidad 1 para cualquier tiempo t. El principio de no arbitraje también es un teorema que se presentará más adelante. Para fines de desarrollo, he trabajará como un supuesto.

B. Indicadores financieros tradicionales

1. Interés simple y compuesto. Uno de los conceptos más importantes en la teoría económica y financiera es el del valor del dinero en el tiempo. Este concepto establece que una cantidad fija de dinero no tiene el mismo valor en el presente que en un tiempo determinado del futuro. Entonces, algunas de las preguntas importantes en la teoría financiera son: ¿cuál es el valor futuro de un una inversión hecha con dinero prestado hoy? Y, ¿cuál es valor presente de una cantidad de dinero pagada o recibida en un tiempo determinado del futuro?

Entonces, el valor de dinero en el tiempo va a representar un costo adicional. El costo de colocar nuestro dinero en algún lado por un período de tiempo lo representamos como un porcentaje y le llamamos interés. Existen dos tipos de interés:
Definición 20. Se dice que r es un *interés simple* si el valor V(t) en un tiempo t de un valor en el presente P es $\mathbf{V(t) = (1 + tr)}\boldsymbol{P}$. Se dice que *r* es *interés compuesto* si es $\mathbf{V(t) = (1 + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{nt}}}\boldsymbol{P}$, en donde *n* es la cantidad de veces que el interés es compuesto en el período.

Este interés es la manifestación del dinero en el tiempo, la inflación, el préstamo de un banco, la tasa mínima atractiva de retorno, etc.

Entonces, conforma pasa el tiempo, el interés compuesto va aumentando. Si se supone que el número de veces que se compone el interés tiende al infinito, se tiene que $\mathrm{V(t)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}P = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^{rt}P = e^{rt}P$. Esto se conoce como interés compuesto continuo.

2. Flujos de efectivo. El flujo de efectivo es un concepto que le permite a las empresas e inversionistas ver cómo se va a mover su dinero en el tiempo. Las entradas (ingresos) y salidas (costos y gastos) estimados de dinero se les conoce como flujos de efectivo. La estimación de los flujos de efectivo son probablemente los más difíciles e inexactos de hacer ya que éstos son estimaciones relativas a un futuro incierto.

Los flujos positivos, o entradas de dinero, varía dependiendo de la naturaleza de la empresa o persona analizada, pero pueden ser: ingresos por ventas, reducciones en los costos, valor de salvamento de activos, recepción de un préstamo, ingresos provenientes de la venta de acciones y bonos, ahorros o rendimientos de fondos de capital.

Los flujos negativos, o salidas de dinero, también varían dependiendo de la naturaleza de la actividad de la empresa o persona. Algunos ejemplos de salidas son: costo de adquisición de activos, costo de operación, pagos de interés y de un préstamo, impuestos, gasto de fondos de capital

Después de estimar todas las entradas y salidas de dinero, se calcula el flujo de efectivo neto, el cual es la simple resta algebraica de las entradas menos salidas. Con esto, podemos realizar nuestro diagrama de flujo, el cual nos permite ver gráficamente como se comporta nuestro dinero

3. Valor presente neto. El valor presente (VP) o valor actual es una cantidad futura de dinero convertida a su valor equivalente ahora. El valor presente se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

en donde VP representa el valor futuro, i la tasa de interés o descuento y n el número de ciclos (en años, meses, semanas, etc.) que han pasado.

El valor presente neto (VPN) es la simple suma de todos los valores presente en tiempo cero. El valor presente se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$VPN = \sum_{k=0}^{n} \frac{VF_k}{(1+i)^k}$$

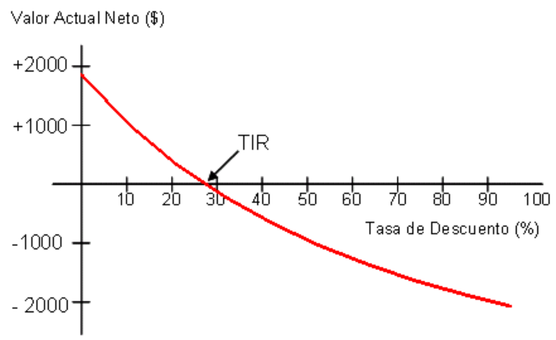
El análisis de VPN es uno de los más comunes y sencillos de hacer. Primero, se necesita identificar el tipo de proyecto que se tiene. Los proyectos se pueden categorizar como mutuamente excluyentes (sólo uno de los proyectos puede ser seleccionado) o independiente (más de un proyecto pueden ser seleccionados). La opción de no hacer se entiende como alternativa en cualquier análisis. Para el análisis de un solo proyecto, se necesita calcular el valor presente a partir de una tasa determinada, y si VP≥0, la alternativa es financieramente viable. Si se tienen más de un proyecto, se calculan los VP de cada alternativa, y se elige la que tenga el valor numérico más grande, es decir, el menos negativo (para proyectos de costos) o el más positivo (para proyectos de entradas netas.

4. Tasa Interna de Retorno. La tasa interna de retorno (TIR), o tasa de rentabilidad, es la tasa que igual el VPN a cero. Esta se calcula a partir de un flujo de efectivo para el período estudiado, y se expresa como un porcentaje. Otra forma de ver la definición es por medio de la fórmula:

$$VPN = 0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{VF_k}{(1+i)^k}$$

en donde se debe despejar la tasa *i*, conociendo el valor futuro del k-ésimo año. El flujo de efectivo no tiene que ser uniforme. Existen diferentes formas de calcular la TIR. El método más fácil es por prueba y error. Aquí, se va sustituyendo el valor de *i* por diferentes tasas, hasta obtener un valor cercano a cero. Otra forma sencilla de obtener la TIR es por el método gráfico. Aquí, se hace una gráfica de VPN contra la tasa de interés o descuento, y localizar el punto en donde la curva intersecta el eje horizontal. La siguiente gráfica muestra un ejemplo de este método:

Figura 3. Determinación del VPN



*Fuente: Enciclopedia Financiera, 2011

El último método sencillo es utilizando una calculadora financiera u hoja electrónica, en donde se ingresa el flujo de efectivo y la computadora utiliza fórmulas y algoritmos predefinidos para calcular la tasa.

C. Opciones financieras

1. Descripción general. Existen diferentes tipos de productos financieros. Uno de los más populares en los últimos años han sido los *forwards*. Un *forward* es un contrato de compra o venta de un activo en un período determinado a un precio fijado. Si el inversionista acepta comprar el contrato entonces se dice que éste esta en una posición larga del contrato *forward*. Si el inversionista acepta vender el contrato entonces se tiene una posición en corto del contrato *forward*.

Para conocer el precio en el futuro de cualquier *forward*, suponiendo que comenzamos en el tiempo cero y con tasa de interés constante, podemos usar la fórmula $F(T)=V(0)e^{rT}$, en donde V(0) es el valor del activo en el tiempo cero.

Uno de los tipos mas populares de contratos *forwards* son las opciones financieras. Una opción financiera da la opción, pero no la obligación, de comprar o vender un activo a un precio determinado en un período determinado de tiempo. Este instrumento nos permite estar en una posición libre de riesgo ya que la opción se va a ejercer dependiendo del valor del activo. Para no violar la suposición de no arbitraje, se debe de cobrar un costo por poder tener este contrato.

2. Tipos de opciones financieras. Las opciones financieras pueden ser de dos tipos: europeas o americanas. Una opción europea es la que se ejerce hasta que se termine el período pactado en el contrato. Una americana es la que se puede ejercer en cualquier tiempo desde que se pacta el contrato hasta la fecha establecida. Las opciones pueden ser contratos sobre diferentes tipos de activos: acciones de empresas, *commodities*, monedas, índices, tasas de interés, inmuebles, etc. Las opciones financieras más comunes se hacen sobre acciones.

a. Opción de compra. Una opción de compra (denominada en el ámbito financiero como opción *call*) es aquella en la que el dueño del contrato tiene la opción, pero no la obligación, de comprar un activo a un precio determinado en un período determinado. La persona que compra el call tiene la opción de ejercerla y la persona que vende el call tiene la obligación de ejecutarla.

La opción call se va a ejercer si el precio del activo en el mercado es mayor que el precio establecido en el contrato. Entonces, el retorno del call, teniendo un precio pactado X un costo C y el precio del activo en el tiempo t, V(t), se tiene que para el que compra el call es:

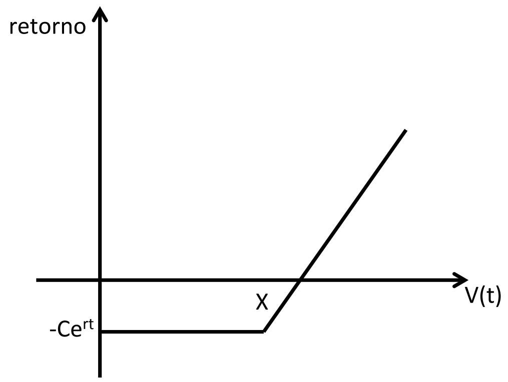
$$r = \begin{cases} V(t) - X - Ce^{rt}, si\ V(t) \geq X \\ -Ce^{rt}, de\ lo\ contrario \end{cases}$$

y el que lo vende:

$$r = \begin{cases} Ce^{rt} - (V(t) - X), si\ V(t) \geq X \\ Ce^{rt}, de\ lo\ contrario \end{cases}$$

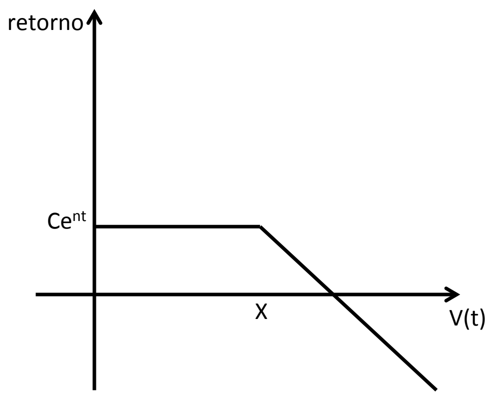
también se puede ver gráficamente:

Figura 4. Retorno de una compra de opción call



*Fuente: elaboración propia

Figura 5. Retorno de una venta de opción call



*Fuente: elaboración propia

Se puede suponer que se tiene un retorno, ya que si se ejerce el call se cree que el inversionista va a vender el activo inmediatamente, teniendo un retorno dado a que hay una diferencia entre el precio X con el del mercado.

b. Opción de venta. Para la opción de venta (denominada en el ámbito financiero como opción *put*), se tiene el caso contrario. El dueño de la opción put tiene la opción, pero no la obligación, de vender un activo a un precio determinado en un período determinado. La persona que compra el put tiene la opción de vender y el que vende tiene la obligación de vender.

La opción put se ejerce si el precio del activo en el mercado es menor que el precio establecido en el contrato. Entonces, el retorno del put, teniendo un precio pactado X, un costo P y el precio del activo en el tiempo t, V(t), se tiene que para el que compra el put es:

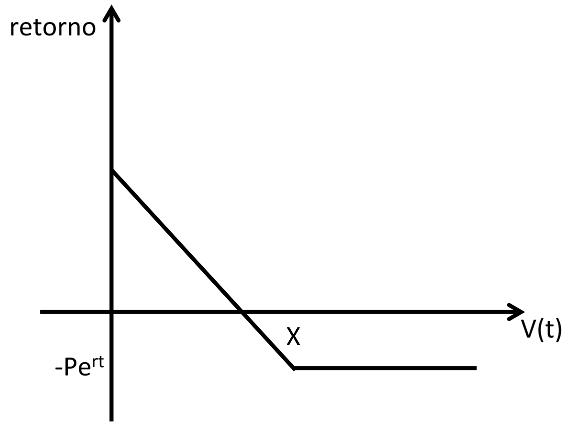
$$r = \begin{cases} X - V(t) - Pe^{rt}, si\ V(t) \leq X \\ -Pe^{rt}, de\ lo\ contrario \end{cases}$$

y el que lo vende:

$$r = \begin{cases} Pe^{rt} - (X - V(t)), si\ V(t) \leq X \\ Pe^{rt}, de\ lo\ contrario \end{cases}$$

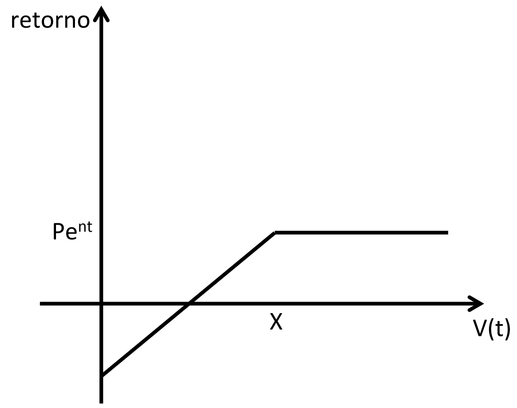
también se puede ver gráficamente:

Figura 6. Retorno de una compra de opción put



*Fuente: elaboración propia

Figura 7. Retorno de una compra de opción put



*Fuente: elaboración propia

Se puede suponer que se tiene un retorno, ya que si se ejerce el put se cree que el inversionista compró el activo anteriormente y lo vende a un precio de mercado mayor, teniendo un retorno dado al diferencial.

c. Paridad put-call

Teorema M. (Paridad put-call europea) Considérese una opción call con costo C y una put con costo P, ambas tipo europea para la misma acción con precio de ejecución X y tiempo de expiración T. Entonces, se tiene que se cumple la igualdad:

$$\boldsymbol{C - P = V(0) - Xe^{-rt}}$$

Demostración: supóngase que $\boldsymbol{C - P > V(0) - Xe^{-rt}}$. Entonces, podemos crear una posición de arbitraje en el tiempo cero de la siguiente forma:

- comprar una acción por V(0)
- comprar una opción put por P
- vender una opción call por C
- invertir C-P-V(0) (prestar en caso que sea negativo) en un instrumento libre de riesgo a una tasa de interés r.

Nótese que el saldo en este tiempo es de 0. Entonces, al tiempo T se tiene que:

- terminar con la posición libre de riesgo y recolectar (pagar si se prestó el dinero) la cantidad de $(\mathbf{C - P - V(0)})\boldsymbol{e^{rT}}$

- vender la acción en X al ejercer el put si $\boldsymbol{V(T) \leq X}$ o pagando el call si $\boldsymbol{V(T) > X}$.

El saldo en el tiempo T es $\boldsymbol{\left(\mathbf{C}-\mathbf{P}-\mathbf{V}(\mathbf{0})\right)e^{rT}+X}$, el cual es positivo debido al supuesto que se hizo y violando el principio de no arbitraje.

Ahora, supóngase que $\boldsymbol{C-P<V(0)-Xe^{-rt}}$. Entonces, construimos la posición de arbitraje en el inicio de la siguiente forma:

- vender en corto una acción por S(0)
- vender una opción put por P
- comprar una opción call por C
- invertir V(0)-C+P (prestar si es negativo) en un instrumento libre de riesgo a una tasa de interés r.

Nótese que el saldo en este instante es de cero. En el tiempo T se tiene que:

- terminar con la posición libre de riesgo y recolectar (pagar si se prestó el dinero) la cantidad de $\boldsymbol{(\mathbf{V}(\mathbf{0})-\mathbf{C}+\mathbf{P})e^{rT}}$
- comprar la acción por X al ejercer el call si $\boldsymbol{V(T) > X}$ o pagando el put si $\boldsymbol{V(T) \leq X}$ y terminar con la posición en corto de la acción.

El saldo en el tiempo T es $\boldsymbol{(\mathbf{V}(\mathbf{0})-\mathbf{C}+\mathbf{P})e^{rT}-X}$, el cual es positivo debido al supuesto que se hizo y violando el principio de no arbitraje.

Entonces, debido a que no se cumplen las dos desigualdades anteriores, se tiene el resultado deseado. ■

Teorema N. (Estimación de paridad put-call americana) Los precios de las opciones put y call americanas, con costos P y C respectivamente, con precio de ejecución X y tiempo de expiración T sobre una acción satisfacen a:

$$\boldsymbol{V(0)-Xe^{-rT} \geq C-P \geq V(0)-X}$$

Demostración: supóngase que la primera igualdad no se cumple, es decir,

$$\boldsymbol{C-P-V(0)+Xe^{-rT} > 0}$$

entonces podemos vender un call, comprar un put y una acción, y financiar instrumentos libres de riesgo. Si el poseedor del call americano desea ejercer la opción en un tiempo $\boldsymbol{t \leq T}$, entonces recibimos X por la acción y terminamos la posición libre de riesgo, terminando con el put y se tiene que

$$\boldsymbol{X+\left(C-P-V(0)\right)e^{rt} = \left(Xe^{-rt}+C-P-V(0)\right)e^{rt}}$$
$$\boldsymbol{\geq \left(Xe^{-rT}+C-P-V(0)\right)e^{rt} > 0}$$

debido al supuesto que se tenía. Si no se ejerce la opción, se puede vender la acción a X al ejercer el put en el tiempo T, terminar la posición libre de riesgo, y terminando con el valor positivo

$$\boldsymbol{X+(C-P-V(0))e^{rT} > 0}$$

Ahora, supóngase que $\boldsymbol{C-P-V(0)+X<0}$. Entonces podemos vender un put, comprar un call, vender en corto una acción e invertir el saldo en un instrumento libre de riesgo. Si el put americano es ejecutado en un tiempo $\boldsymbol{t \leq T}$, entonces podemos sacar X del libre de riesgo para comprar acciones y cerrar la posición en corto. El resultado es un saldo positivo y una opción call:

$$\boldsymbol{\left(-C+P+V(0)\right)e^{rt}-X > Xe^{rt}-X \geq 0}$$

debido al supuesto. Si el put no es ejecutado, podemos comprar una acción por Z al ejecutar el call en el tiempo T y terminar la posición en corto con la acción. Al cerrar la posición libre de riesgo, también podemos terminar con un valor positivo

$$\boldsymbol{\left(-C+P+V(0)\right)e^{rt}-X > Xe^{rt}-X > 0}$$

también debido al supuesto. Entonces, tenemos situaciones donde no se cumple el supuesto de no arbitraje, teniendo el resultado deseado. ■

3. Ejemplo

a. Retorno de una call. Supóngase que se tiene una acción con precio en el presente de \$100 y en el futuro (digamos, tres meses) puede tomar dos valores: \$120 y \$90. Podemos armar una opción europea call con un precio pactado de \$105 para ejercerse en tres meses. Entonces, el retorno de nuestra call es:

$$r = \begin{cases} \$15\,, si\ el\ precio\ sube\ a\ \$120 \\ 0, si\ el\ precio\ baja\ a\ \$90 \end{cases}$$

b. Paridad put-call. Supóngase que una acción que no paga dividendos tiene un valor de \$15.60. Con un precio pactado a \$15.00 con vencimiento en tres meses tienen un call europea con valor \$2.83. La tasa de interés es 6.72% anual compuesta continuamente. Con esta información, podemos calcular el valor de un put europeo con el mismo precio al mismo vencimiento usando la fórmula de paridad put-call. Entonces,

$$C - P = V(0) - Xe^{-rt} \Leftrightarrow P = C - V(0) + Xe^{-rt} = 2.83 - 15.60 + (15)e^{-0.672*3/12}$$
$$= 2.83 - 15.60 + 15.25 = 2.48$$

D. Valuación de opciones financieros en régimen de incertidumbre

1. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein. Existen varios modelos de valuación de opciones financieras. Uno de los más usados es el modelo binomial, el cual supone que el tiempo esta distribuido discretamente y se tiene un precio inicial.

El modelo de Cox-Ross-Rubinstein tiene como objetivo ponerle valor a una opción, es decir, ponerle valor a un contrato que le va a dar una flexibilidad de decisión a un inversionista en el futuro. Para conocer este valor, se deben conocer ciertos valores, como el precio del activo en el futuro.

Es importante mencionar que estos modelos no toman en cuenta impuestos, costos de transacciones, costos de terceros, requerimientos de inversión, etc. Además, en todos los casos se supone que se puede prestar o comprar cualquier cantidad, sin tener limitaciones.

a. Modelo para un paso. Supóngase que se tiene un activo con valor inicial V(0). Después de un período de tiempo, el valor del activo, V(1), sólo puede tomar dos valores. Entonces, definimos el espacio $\Omega = \{u, d\}$ (usando las letras de u para arriba y d para abajo por sus palabras en inglés), en donde $P(u) = p$ y $P(d) = 1 - p$ con $0 \leq p \leq 1$. Nótese que tenemos un espacio con distribución binomial. Entonces, hacemos que

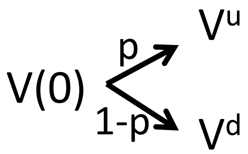
$$V(1): \Omega \longrightarrow (0, \infty) \text{ tal que } V(1) = V(0)(1 + K)$$

en donde $K^{\omega} = \begin{cases} U \text{ si } \omega = u, \text{con probabilidad } p \\ D \text{ si } \omega = d \text{ con probabilidad } 1 - p \end{cases}$ y $-1 < D < U$. Entonces

$$V^{\omega}(1) = \begin{cases} V^u = V(0)(1 + U) \quad \text{si } \omega = \text{u, con probabilidad p} \\ V^d = V(0)(1 + D) \quad \text{si } \omega = \text{d, con probabilidad } 1 - \text{p} \end{cases}$$

Lo podemos ver gráficamente de la manera siguiente:

Figura 8. Modelo binomial de un paso



*Fuente: elaboración propia

Podemos obtener un resultado interesante con esto.

Teorema O. Sean V(0), V^u, V^d los valores de un activo definidos de la misma forma que se hizo anteriormente y A(0), A(1)=A(0)(1+r), con r la tasa libre de riesgo, los valores de un activo libre de riesgo en los tiempos cero y uno respectivamente. Entonces, para que no se tenga una oportunidad de arbitraje se tiene que

$$\frac{\boldsymbol{V^d}}{\boldsymbol{V(0)}} < \frac{\boldsymbol{A(1)}}{\boldsymbol{A(0)}} < \frac{\boldsymbol{V^u}}{\boldsymbol{V(0)}}$$

Demostración: la idea en esta demostración es crear oportunidades en donde se compran activos baratos y se venden (o venden en corto) a un precio mayor, ganando la diferencia.

Ahora, supóngase que $\frac{\boldsymbol{V^d}}{\boldsymbol{V(0)}} \geq \frac{\boldsymbol{A(1)}}{\boldsymbol{A(0)}}$. Entonces, en el tiempo cero podemos:

- Prestar la cantidad de V(0) libre de riesgo.
- Comprar un activo por V(0).

Entonces, al principio tenemos un portafolio con una activo y $-\frac{\boldsymbol{V(0)}}{\boldsymbol{A(0)}}$ libres de riesgo con un valor inicial del portafolio $\boldsymbol{Port(0) = 1(V(0)) - \frac{V(0)}{A(0)}A(0) = V(0) - V(0) = 0}$. Al tiempo 1, vamos a tener que el portafolio tiene un valor:

$$\boldsymbol{Port(1)} = \begin{cases} \boldsymbol{V^u - \frac{V(0)}{A(0)}A(1),} & \boldsymbol{si\ el\ precio\ sube} \\ \boldsymbol{V^d - \frac{V(0)}{A(0)}A(1),} & \boldsymbol{si\ el\ precio\ baja} \end{cases}$$

La primera de las posibilidades es estrictamente positiva y la segunda, por el supuesto hecho, es no negativa. Entonces, tenemos un portafolio sin riesgo con valor no negativo en el futuro, contradiciendo el principio de no arbitraje.

Por otro lado, supóngase que $\frac{\boldsymbol{A(1)}}{\boldsymbol{A(0)}} \geq \frac{\boldsymbol{V^u}}{\boldsymbol{V(0)}}$. Para el tiempo cero podemos:

- Vender en corto un activo por V(0)
- Invertir la cantidad de V(0) en un instrumento libre de riesgo.

Entonces, se va a tener un portafolio con -1 activo y $\frac{\boldsymbol{V(0)}}{\boldsymbol{A(0)}}$ libres de riesgo con un valor inicial del portafolio $\boldsymbol{Port(0) = -1(V(0)) + \frac{V(0)}{A(0)}A(0) = -V(0) + V(0) = 0}$. Al tiempo 1, vamos a tener un portafolio con valor:

$$\boldsymbol{Port(1)} = \begin{cases} \boldsymbol{-V^u + \frac{V(0)}{A(0)}A(1),} & \boldsymbol{si\ el\ precio\ sube} \\ \boldsymbol{-V^d + \frac{V(0)}{A(0)}A(1),} & \boldsymbol{si\ el\ precio\ baja} \end{cases}$$

El primer resultado es no negativo debido al supuesto y el segundo es estrictamente positivo debido a lo probado anteriormente. Entonces, tenemos un portafolio que puede ser positivo en un tiempo 1 y sin riesgo, contradiciendo el principio de no arbitraje. ■

Corolario. Considérese las mismas variables que el teorema anterior, entonces

$$D < r < U$$

Demostración: Nótese que $\frac{V^d}{V(0)} < \frac{A(1)}{A(0)} < \frac{V^u}{V(0)} \Leftrightarrow \frac{V(0)(1+D)}{V(0)} < \frac{A(0)(1+r)}{A(0)} < \frac{V(0)(1+U}{V(0)} \Leftrightarrow$ $(1+D) < (1+r) < (1+U) \Leftrightarrow D < r < U.$ ■

El teorema anterior nos da la relación $V^d < V^u$, la cual era de esperar.

Conociendo cómo se mueven los precios en un paso, podemos asignarle un costo a una opción financiera tipo europea. Supongamos que tenemos un activo libre de riesgo con precio inicial de A(0) y su precio en el tiempo es determinado por una tasa de interés r. Recordemos que su precio en el tiempo puede ser calculado con la fórmula $A(t)=A(0)(1+r)^t$. Además, supóngase que tenemos un activo, sea una acción, con un valor inicial V(0) y un valor en el tiempo t de V(t). Con esto, podemos armar un portafolio con *y* unidades libres de riesgo y *x* acciones, tal que el valor de éste en un tiempo determinado *t* es de P(t)=xV(t)+yA(t).

Ahora, denotemos el valor, o pago, de la opción en un tiempo *t* como H(t). La opción puede ser valuada conociendo dos valores de $H^u(1)$ y $H^d(1)$, y viendo que pasa en el tiempo cero. Para esto, debemos resolver el sistema de ecuaciones para H(1):

$$\begin{cases} xV^u(1) + yA(1) = H^u(1) \\ xV^d(1) + yA(1) = H^d(1) \end{cases}$$

Entonces, de esto podemos resolver el sistema de ecuaciones para *x* y *y* obtenemos que

$$xV^u(1) - xV^d(1) = H^u(1) - H^d(1) \Rightarrow x = \frac{H^u(1) - H^d(1)}{V^u(1) - V^d(1)}$$
$$= \frac{H^u(1) - H^d(1)}{V(0)(1+U) - V(0)(1+D)} = \frac{H^u(1) - H^d(1)}{V(0)(U-D)}$$

y

$$yA(1) = H^u(1) - xV^u(1) \Rightarrow y = \frac{1}{A(1)}[H^u(1) - xV^u(1)]$$
$$= \frac{1}{A(1)}\left[H^u(1) - \frac{H^u(1) - H^d(1)}{V^u(1) - V^d(1)}V^u(1)\right]$$
$$= \frac{1}{A(1)}\left[\frac{H^u(1)V^u(1) - H^u(1)V^d(1) - H^u(1)V^u(1) + H^d(1)V^u(1)}{V^u(1) - V^d(1)}\right]$$
$$= \frac{1}{A(1)}\left[\frac{-H^u(1)V^d(1) + H^d(1)V^u(1)}{V^u(1) - V^d(1)}\right]$$
$$= \frac{1}{A(0)(1+r)}\left[\frac{-H^u(1)V(0)(1+D) + H^d(1)V(0)(1+U)}{V(0)(1+U) - V(0)(1+D)}\right]$$
$$= \frac{1}{A(0)(1+r)}\left[\frac{-H^u(1)(1+D) + H^d(1)(1+U)}{U-D}\right]$$

Ahora, para encontrar la expresión de H(0) necesitamos el siguiente resultado:

Teorema P. Sea *(x,y)* un portafolio de *x* activos (digamos acciones) con valor inicial V(0) y *y* activos libres de riesgo (digamos bonos) con valor inicial A(0) tal que en cualquier tiempo t se tiene que $\boldsymbol{H(t) = xV(t) + yA(t)}$. Entonces, para evitar una oportunidad de arbitraje, se tiene que $\boldsymbol{H(0) = xV(0) + yA(0)}$.

Demostración: Supóngase que $\boldsymbol{H(0) > xV(0) + yA(0)}$. Entonces, en el tiempo cero podemos vender una opción por una cantidad $\boldsymbol{H(0)}$ y comprar un portafolio *(x,y)*, el cual cuesta $\boldsymbol{xV(0) + yA(0)}$. Si se debe, prestar el dinero. Nótese que el saldo de ésta estrategia es positiva ya que $\boldsymbol{H(0) - xV(0) - yA(0) > 0}$, entonces invertimos la diferencia en un activo libre de riesgo. El valor inicial del portafolio es de cero. Entonces, al tiempo t vamos a tener que:

- Si se vendió una opción call y la acción sube, pagar la diferencia entre $\boldsymbol{V^u(t)}$ y el precio pactado. Si se vendió una opción put y la acción baja, pagar la diferencia entre $\boldsymbol{V^d(t)}$ y el precio pactado. De lo contrario no se paga algo. Los costos de cualquiera de las operaciones es $\boldsymbol{H(t)}$, el pago de la opción.
- Terminar con la posición de las acciones y bonos, recibiendo la cantidad de $\boldsymbol{xV(t) + yA(t)}$.

Después de estos pasos, el balance será de $\boldsymbol{-H(t) + xV(t) + yA(t) = 0}$, independientemente del comportamiento de la acción. Nótese que también se tenía una inversión libre de riesgo, entonces se tiene un valor positivo en el tiempo, obteniendo una posición de arbitraje ya que se obtuvo un rendimiento sin riesgo.

Por otro lado, supóngase que $\boldsymbol{H(0) < xV(0) + yA(0)}$. Entonces, al tiempo cero podemos comprar una opción a un precio de $\boldsymbol{H(0)}$ y vender en corto un portafolio *(x,y)*. Nótese que se tiene un saldo positivo ya que $\boldsymbol{-H(0) + xV(0) + yA(0) > 0}$, entonces la diferencia la invertimos libre de riesgo y obtenemos un portafolio con valor inicial de cero. Entonces, en el tiempo t tenemos que:

- Si se compró una opción call y la acción sube, cobrar la diferencia entre $\boldsymbol{V^u(t)}$ y el precio pactado. Si se compró una opción put y la acción baja, cobrar la diferencia entre $\boldsymbol{V^d(t)}$ y el precio pactado. De lo contrario no se paga algo. La utilidad de cualquiera de las operaciones es $\boldsymbol{H(t)}$, el pago de la opción.
- Terminar con la posición en largo de las acciones y bonos, pagando la cantidad de $\boldsymbol{xV(t) + yA(t)}$.

El balance da un valor cero ya que $\boldsymbol{H(t) - xV(t) - yA(t) = 0}$, independientemente del comportamiento de la acción. Nótese que también se tenía una inversión libre de riesgo, entonces se tiene un valor positivo en el tiempo, obteniendo una posición de arbitraje ya que se obtuvo un rendimiento sin riesgo. Entonces, no se cumplen las dos desigualdades por lo que se debe tener la igualdad. ■

Sabiendo que $H(0) = xV(0) + yA(0)$, sustituimos a x y y entonces tenemos que

$$H(0) = xV(0) + yA(0)$$

$$= \frac{H^u(1) - H^d(1)}{V(0)(U-D)} V(0) + \frac{1}{A(0)(1+r)} \left[\frac{-H^u(1)(1+D) + H^d(1)(1+U)}{U-D} \right] A(0)$$

$$= \frac{H^u(1) - H^d(1)}{(U-D)} + \frac{1}{(1+r)} \left[\frac{-H^u(1)(1+D) + H^d(1)(1+U)}{U-D} \right]$$

$$= \frac{1}{(1+r)} \left[\frac{(H^u(1) - H^d(1))(1+r) - H^u(1)(1+D) + H^d(1)(1+U)}{U-D} \right]$$

$$= \frac{1}{(1+r)} \left[\frac{H^u(1)(r-D) + H^d(1)(U-r)}{U-D} \right]$$

$$= \frac{1}{(1+r)} \left[\frac{H^u(1)(r-D) + H^d(1)(U-r)}{U-D} \right] = \frac{1}{(1+r)} \left[H^u(1) \frac{r-D}{U-D} + H^d(1) \frac{U-r}{U-D} \right]$$

Nótese que el H(0) no depende del valor del activo en el futuro, solo de cómo cambia. Además, por el corolario al teorema anterior, se tiene que $0 < \frac{U-r}{U-D}, \frac{r-D}{U-D} < 1$ y también $\frac{U-r}{U-D} + \frac{r-D}{U-D} = \frac{U-r+r-D}{U-D} = \frac{U-D}{U-D} = 1$. Entonces, estos coeficientes los podemos tratar como probabilidades, y definimos a

$$p' = \frac{r-D}{U-D} \quad \& \quad 1-p' = \frac{U-r}{U-D}$$

Ahora, teniendo este resultado, reescribimos la expresión para el pago o valor de una opción financiera como

$$H(0) = \frac{1}{(1+r)}[H^u(1)p' + H^d(1)(1-p')] = \frac{1}{(1+r)}E'[H(1)]$$

Usamos la notación *E'* para denotar que utilizamos la probabilidad *p'* como fue definida anteriormente.

Teorema Q. $\boldsymbol{E'[K(1)] = r}$, en donde r es la tasa libre de riesgo y K(1) es el retorno en el tiempo 1.

Demostración: Nótese que $\boldsymbol{E'[K(1)] = Up' + D(1-p') = U\frac{r-D}{U-D} + D\frac{U-r}{U-D} = \frac{Ur-UD+DU-Dr}{U-D} = \frac{r(U-D)}{U-D} = r}$. ■

Este resultado nos lleva a una definición importante:

Definición 21. Se dice que una probabilidad $\boldsymbol{(p', 1-p')}$ **tal que** $\boldsymbol{p', 1-p' \in (0,1)}$ es *neutral al riesgo* si $\boldsymbol{E'[K(1)] = r}$, la tasa libre de riesgo.

Sean V(1), P(1) y H(1) los precios o pagos de un activo, portafolio y opción, respectivamente, en el tiempo 1. Recordemos que, para encontrar el valor presente de éstos, usamos las fórmulas:

$$VP_{V(1)} = \frac{V(1)}{1+i}, VP_{Port(1)} = \frac{Port(1)}{1+i}, VP_{H(1)} = \frac{H(1)}{1+i}$$

donde *i* es la tasa de descuento. Para nuestro análisis es conveniente usar a *r*, la tasa libre de descuento, como la tasa de descuento.

Teorema R. Usando la tasa libre de riesgo y una probabilidad neutral al riesgo, se tiene que:

$$\boldsymbol{E'\left(VP_{V(1)}\right) = \mathrm{V}(0), E'\left(VP_{Port(1)}\right) = Port(0), E'(VP_{H(1)}) = \mathrm{H}(0)}$$

Demostración: Del teorema anterior y la definición de neutral al riesgo tenemos que $\boldsymbol{E'[K(1)] = r}$, entonces $\boldsymbol{E'\left(VP_{V(1)}\right) = E'\left(\frac{V(1)}{1+r}\right) = \frac{1}{1+r}E'^{(V(1))} = \frac{1}{1+r}E'\left[V(0)\left(1 + K(1)\right)\right] = \frac{V(0)}{1+r}E'\left(1+K(1)\right) = \frac{V(0)}{1+r}(1 + E'[K(1)]) = \frac{V(0)}{1+r}(1+r) = V(0)}$.

Por otro lado, nótese que los pesos de un portafolio *(x,y)* son definidos en el tiempo cero, por lo que se tiene que $\boldsymbol{E'\left(VP_{Port(1)}\right) = E'\left[xVP_{V(1)} + yA(0)\right] = E'\left(xVP_{V(1)}\right) + E'\left(yA(0)\right) = xE'\left(VP_{V(1)}\right) + yA(0) = xV(0) + yA(0) = Port(0)}$.

Por último, se tiene que $\boldsymbol{E'\left(VP_{H(1)}\right) = E'\left(\frac{O(1)}{1+r}\right) = \frac{1}{1+r}E'[H(1)] = H(0)}$ por la definición de *E'* que vimos anteriormente. ■

Notemos algo interesante de los resultados y la fórmulas de valorizar una opción. Primero, ésta no depende de la probabilidad *p* que el valor de una activo suba o baje.

Este hecho permite que se tengan diferentes opiniones sobre la probabilidad que se mueva un precio, pero si tiene que haber un acuerdo sobre los valores U, D y r. Otra observación importante es que tampoco hay dependencia de la tolerancia del inversionista hacia el riesgo. El único supuesto necesario es que un inversionista prefiere mayor utilidad a menor utilidad, tratando de buscar, y aprovechar, una oportunidad de arbitraje. Por último, el valor de la opción solo depende de una variable aleatoria: el precio del activo.

b. Modelo para dos pasos. El modelo de dos pasos es similar al de uno, es decir, teniendo sólo dos resultados después de cada paso. Cada paso es independiente a los resultados de los otros. Entonces, usamos dos espacios $\Omega_1 = \Omega_2 = \{u, d\}$ y definimos a $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{uu, ud, du, dd\}$. Aquí usamos la notación "ud" para denotar que el precio subió en el primer paso y después bajo en el segundo. Los subconjuntos de Ω tienen las siguientes probabilidades: $P(uu) = p^2$, $P(ud) = P(du) = P(1-p)$ y $P(dd) = (1-p)^2$, con $0 \leq p \leq 1$. Entonces, hacemos que

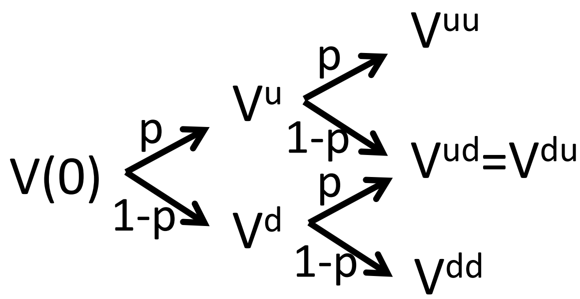
$$V(2): \Omega \longrightarrow (0, \infty) \text{ tal que } V(1) = V(0)\big(1 + K(1)\big) \text{ y}$$
$$V(2) = V(1)(1 + K(2)) = V(0)\big(1 + K(1)\big)(1 + K(2))$$

en donde $K(1)^\omega = \begin{cases} U \text{ si } \omega = ud \text{ o } \omega = uu \\ D \text{ si } \omega = du \text{ o } \omega = dd \end{cases}$ y $K(1)^\omega = \begin{cases} U \text{ si } \omega = du \text{ o } \omega = uu \\ D \text{ si } \omega = ud \text{ o } \omega = dd \end{cases}$, los cuales son independientes. Entonces,

$$V^\omega(2) = \begin{cases} V^{uu} = V(0)(1+U)^2 \quad \text{si } \omega = uu, \text{con probabilidad } p^2 \\ V^{ud} = V^{du} = V(0)(1+U)(1+D) \text{si } \omega = ud \text{ o } \omega = du, \text{con } P = p(1-p) \\ V^{dd} = V(0)(1+D)^2 \quad \text{si } \omega = dd, \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Lo podemos ver gráficamente de la manera siguiente:

Figura 9. Modelo binomial de dos pasos



*Fuente: elaboración propia

Es importante recordar cuándo se va a ejercer la opción. Supóngase que se pacto un precio X a un período t. Si tenemos una opción call, la ejercemos si $V^\omega(t) > X$. Entonces, tenemos un pago o retorno de $max[0, V^\omega(t) - X]$. Por otro lado, si tenemos una opción put, la ejercemos si $V^\omega(t) < X$. Entonces, tenemos un pago o retorno de $max[0, X - V^\omega(t)]$. Por lo tanto, definimos la función de pago o retorno $f(x)$ como $f\big(V^\omega(t)\big) = max[0, V^\omega(t) - X]$ si es una call o $f\big(V^\omega(t)\big) = max[0, X - V^\omega(t)]$ si es una put.

Recordemos del modelo de un paso que para valuar una opción necesitamos la fórmula $H(0) = \frac{1}{(1+r)}[H^u(1)p' + H^d(1)(1-p')]$. Ahora, nótese que debemos usar esa fórmula para dos escenarios, cuando nos encontramos en el estado V^u y V^d. Entonces, de forma análoga llegamos a la nueva fórmula que depende del pago de las opciones

$$H(1) = \begin{cases} \frac{1}{(1+r)}\left[f\left(V^{\omega}(2)\right)p' + f\left(V^{\omega}(2)\right)(1-p')\right] \\ \frac{1}{(1+r)}\left[f\left(V^{\omega}(2)\right)p' + f\left(V^{\omega}(2)\right)(1-p')\right] \end{cases}$$

Aplicando el modelo de un paso para los nodos intermedios tenemos que $H(1) = \frac{1}{(1+r)}[f(V(1)(1+U))p' + f(V(1)(1+D))(1-p')] = g[V(1)]$, en donde $g(x)$ es una nueva función definida para simplificar la notación. Nótese que podemos ver a esta fórmula como una opción expirando en el tiempo 1 con función de pago *g*. Entonces, aplicamos otra vez la metodología de un pago y tenemos la nueva fórmula:

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{1}{(1+r)}[p'g(V(0)(1+U)) + (1-p')g(V(0)(1+D))] \\ &= \frac{1}{(1+r)}\left[p'g\left(V^u(1)\right) + (1-p')g\left(V^d(1)\right)\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)}\left[p'\left(\frac{1}{(1+r)}\left[p'f\left(V^{uu}(2)\right) + (1-p')f\left(V^{du}(2)\right)\right]\right) + (1 \right. \\ &\quad \left. - p')\left(\frac{1}{(1+r)}\left[p'f\left(V^{ud}(2)\right) + (1-p')f\left(V^{dd}(2)\right)\right]\right)\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[\left(p'^2 f\left(V^{uu}(2)\right) + (1-p')p'f\left(V^{du}(2)\right)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(p'(1-p')f\left(V^{ud}(2)\right) + (1-p')^2 f\left(V^{dd}(2)\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[p'^2 f\left(V^{uu}(2)\right) + 2(1-p')p'f\left(V^{du}(2)\right) + (1-p')^2 f\left(V^{dd}(2)\right)\right] \end{aligned}$$

La última expresión en corchetes enuncia el pago de la opción en el período dos, i.e., $f\big(V(2)\big)$. Entonces, de forma análoga definimos la probabilidad neutral al riesgo cómo $P'(uu) = p'^2, P'(ud) = P'(du) = p'(1-p')$ y $P'(dd) = (1-p')^2$. De esto, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema S. Con la probabilidad neutral al riesgo, se tiene que $\boldsymbol{H(0) = E\left[\frac{1}{(1+r)^2}f\big(V(2)\big)\right]}$.

Demostración: Nótese que $\boldsymbol{E\left[\frac{1}{(1+r)^2}f\big(V(2)\big)\right] = \frac{1}{(1+r)^2}E\left[f\big(V(2)\big)\right]}$ $\boldsymbol{=\frac{1}{(1+r)^2}\left[p'^2 f\big(V^{uu}(2)\big) + 2(1-p')p'f\left(V^{du}(2)\right) + (1-p')^2 f\left(V^{dd}(2)\right)\right] = H(0)}$ ■

c. Modelo para n pasos. En el caso general, aplicamos la misma idea y metodología que se usó al extrapolar el caso de un paso al de dos. Si tenemos n pasos, definimos a $\Omega = \{u, d\}^n$ de forma análoga al caso anterior. Para cada ω, subconjunto de Ω, se tiene una probabilidad

$$P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$$

en donde *k* denota el número de símbolos *u* (*n-k* para el símbolo *d*) en la sucesión $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ con $\omega_1, \dots, \omega_n \in \{u, d\}$. Ahora, conociendo la *i*-ésima posición en la sucesión ω, definimos a *K(i)* como:

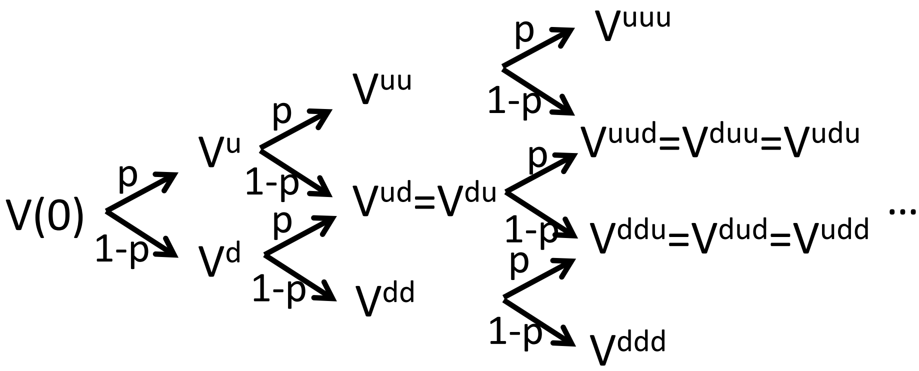
$$K^{\omega}(i) = \begin{cases} U \text{ si } \omega_n = u \\ D \text{ si } \omega_n = d \end{cases}$$

y, de forma inductiva, extendemos el caso anterior para hacer:

$$V(i+1) = V(i)(1 + K(i+1))$$

Análogo a las figuras anteriores, podemos mostrar el modelo binomial para tres o más pasos.

Figura 10. Modelo binomial para n pasos



*Fuente: elaboración propia

Nótese que, en un modelo de n pasos, podemos ver que el movimiento del V como un modelo de caminata aleatoria, en donde si se tiene que cada Y_i representa a u o d y el precio depende de $W_k = Y_1 Y_2 \dots Y_k$.

Teorema T. Sea $\boldsymbol{W_k = Y_1 Y_2 \dots Y_k}$ una camina como se definió anteriormente. Entonces, para cada $\boldsymbol{n = 0, \dots, k-1}$ se tiene que $\boldsymbol{VP_{V(n)}}$ es una martingala con la probabilidad $\boldsymbol{p'}$, i.e., $\boldsymbol{E'\left(VP_{V(n+1)} \middle| W_n\right) = VP_{V(n)}}$.

Demostración: Para $W \subset W_k$ se tiene que

$$E'\left(VP_{V(n+1)} \middle| W\right) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} E'(V(n)|W) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} V(n) E'\big(1 + K(n+1)\big) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} V(n)\big(1 + Up' + D(1-p')\big) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} V(n)(1+r) = \frac{1}{(1+r)^{n}} V(n) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} V(n) = VP_{V(n)} \ \blacksquare$$

Esta propiedad es válida para cualquier variables (valor de portafolio, opción, etc.) para cualquier caminata.

En un modelo de n pasos también podemos determinar el pago, o valor de una opción. Conociendo la metodología para alcanzar la fórmula de dos pasos, se replica ésta a los n pasos y se tiene:

$$H(0) = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p'^k (1-p')^{n-k} f\left(V(0)(1+U)^k (1+D)^{n-k}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p'^k (1-p')^{n-k} f\left(V(0)(1+U)^k (1+D)^{n-k}\right)$$

en donde n denota el número de pasos, p' es la probabilidad de neutral al riesgo y k denota la cantidad de veces que el precio sube en un escenario determinado, por lo tanto *n-k* denota la cantidad de veces que el precio baja en ese mismo escenario. Entonces, con n pasos, tenemos que la probabilidad de neutral al riesgo es $P(\omega) = p'^k (1 - p')^{n-k}$, en donde, otra vez, k denota el número de veces que el precio sube. Con esto desarrollado, podemos obtener el siguiente resultado análogo a los dos anteriores.

Teorema U. Con la probabilidad neutral al riesgo, se tiene que $\boldsymbol{H(0) = E\left[\frac{1}{(1+r)^n} f(V(n))\right]}$.

Demostración: Análogo a los casos anteriores. ■

Nótese que, para n pasos, también podemos obtener el valor esperado del V(n) usando el modelo de la caminata aleatoria. Recordemos que, para una caminata aleatoria definida en la sección siete, se tiene que $E[W_n] = np$ y $\boldsymbol{V}(W_n) = npq$. Entonces, en el paso n, el precio del activo es $V(n) = u^k d^{n-k} V(0)$ en donde k es el número de veces que sube el valor y definimos a $u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ y a $d = e^{-\sigma\sqrt{t}}$. Entonces, tenemos que

$$V(n) = u^{W_n} d^{n-W_n} V(0) \Leftrightarrow \frac{V(n)}{V(0)} = u^{W_n} d^{n-W_n} \Rightarrow \log\frac{V(n)}{V(0)} = \log(u^{W_n} d^{n-W_n})$$
$$= \log\left(\frac{u^{W_n}}{d^{W_n}} d^n\right) = \log\left(\left(\frac{u}{d}\right)^{W_n} d^n\right) = W_n \log\left(\frac{u}{d}\right) + n\log(d)$$
$$= W_n \log\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{t}}}{e^{-\sigma\sqrt{t}}}\right) + n\log\left(e^{-\sigma\sqrt{t}}\right) = W_n 2\sigma\sqrt{t} - n\sigma\sqrt{t} \Rightarrow E\left[\log\frac{V(n)}{V(0)}\right]$$
$$= E\left[W_n 2\sigma\sqrt{t} - n\sigma\sqrt{t}\right] = E\left[W_n 2\sigma\sqrt{t}\right] - E\left[n\sigma\sqrt{t}\right]$$
$$= 2\sigma\sqrt{t}E[W_n] - n\sigma\sqrt{t} = 2\sigma\sqrt{t}np - n\sigma\sqrt{t} = (2p-1)n\sigma\sqrt{t}$$

También podemos encontrar la varianza de forma análoga,

$$V\left(\log\frac{V(n)}{V(0)}\right) = V\left(W_n 2\sigma\sqrt{t} - n\sigma\sqrt{t}\right) = \left(2\sigma\sqrt{t}\right)^2 V(W_n) + \left(n\sigma\sqrt{t}\right)^2 V(1)$$
$$= \left(2\sigma\sqrt{t}\right)^2 V(W_n) + \left(n\sigma\sqrt{t}\right)^2 0 = \left(2\sigma\sqrt{t}\right)^2 V(W_n) = \left(2\sigma\sqrt{t}\right)^2 npq$$
$$= 4\sigma^2 tnpq$$

d. Teorema de no existencia de arbitraje. Primeramente, antes de presentar la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein, se demostrará el teorema de no arbitraje. Este concepto es muy importante para el desarrollo de la teoría de la matemática financiera. Dependiendo de la bibliografía, se puede estudiar como un supuesto o un teorema, y debido a su gran importancia lo veremos con un enunciado equivalente. En el Corolario al Teorema O vimos que $D < r < U$, que luego se utilizó para la definición de la probabilidad neutral al riesgo p', se utilizó el concepto de la falta de arbitraje para la prueba. El siguiente resultado va a generalizar ambos conceptos. La prueba del teorema incluye algunos temas que no se desarrollaron en esta tesis, por lo que los anexos incluyen las definiciones y lemas necesarios para complementarla.

Antes de pasar al teorema es necesario definir algunos conceptos. Sean $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ n elementos en un espacio de probabilidad Ω, en donde cada elemento tiene una probabilidad asociada p_i para cada $i = 1, \dots, n$ tal que $1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Esta idea nos da la generalización de la definición de la probabilidad neutral al riesgo:

Definición 22. Se dice que la probabilidad $(\boldsymbol{p'_1, \dots, p'_n})$ es *neutral al riesgo* si $\boldsymbol{0 < p_i < 1}$ para cada $\boldsymbol{i = 1, \dots, n}$, y $\boldsymbol{E'[V_i(1)] = V_i(0)(1+r)}$ para todo *i* y *E'* denota el valor esperado bajo la probabilidad $(\boldsymbol{p'_1, \dots, p'_n})$.

Teorema V. El arbitraje no existe si, y sólo si, existe una probabilidad neutral al riesgo $(\boldsymbol{p'_1, \dots, p'_n})$.

Demostración: ($\Leftarrow$) Supóngase que existe una probabilidad neutral al riesgo $(p'_1, \dots, p'_n)$, y considere un portafolio tal que $Port(0) = 0$ y $Port(1) \geq 0$. Denotando a x_i como el número de activos (número de acciones, bonos, etc.) que se posee del activo V_i (número de acciones, bonos, etc.), entonces,

$$E'(Port(1)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i^{\omega_j}(1)\right)p'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{i=1}^{n} V_i^{\omega_j}(1)\, p'_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i E'(V_i(1))$$

$$= (1+r)\sum_{i=1}^{n} x_i V_i(0) = (1+r)Port(0) = 0$$

lo que implica que $Port(1) = 0$ para todo ω ya que, para que el valor esperado sea igual a cero, la variable aleatoria tiene que ser cero. Esto da como resultado que es imposible encontrar una oportunidad de arbitraje.

($\Rightarrow$) Por otro lado, suponga que no existe oportunidad de arbitraje. Entonces, el conjunto $Port$ que contiene a todas las ganancias en valor presente de cada activo, $G = \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{V_i(1)}{1+r} - V_i(0))$ con $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial (ver anexos), el cual puede ser identificado como un subespacio de $\mathbb{R}^n$ al corresponder a cada G con un vector $(G^{\omega_1}, \dots, G^{\omega_n}) \in \mathbb{R}^n$.

A probar: para cada elemento $G \in Port$ tal que $G^{\omega} \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces $G^{\omega} = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces, supóngase que $G^{\omega} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{V_i^{\omega}(1)}{1+r} - V_i(0)) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, $Port(0) = 0$ para un portafolio con $x_1, \dots, x_n$ posiciones en n activos riesgosos y una posición y en un activo libre de riesgo. Entonces, el valor presente de portafolio es igual a

$$VP_{Port(1)} = \frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} x_i V_i(1) + y = \frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} x_i V_i(1) + y - Port(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{V_i(1)}{1+r} - V_i(0)\right) = G \geq 0$$

Entonces, para evitar una posición de arbitraje, $Port(1)$ debe ser igual a cero, y lo mismo se debe tener para G, lo que prueba lo que queríamos demostrar.

Ahora, considérese el conjunto $A = \{(q_1, \dots, q_n) | \sum_{i=1}^{n} q_i = 1, q_i \geq 0\}$ de todas las probabilidades sobre Ω. Entonces, se encontrará el vector $(p'_1, \dots, p'_n)$ en A tal que cada coordenada sea estrictamente positiva y ortogonal a $Port$ para obtener las probabilidades neutrales al riesgo. La condición de ortogonalidad se requiere para tener que el producto interno de $(p'_1, \dots, p'_n)$ y $(G^{\omega_1}, \dots, G^{\omega_n})$ sea cero, es decir, $E'(G) = \sum_{i=1}^{n} p'_i G^{\omega_i} = 0$ para todo G. En particular, si $x_i = 1$ y $x_k = 0$ para $i \neq k$, entonces se tiene que $G = \frac{V_i(1)}{1+r} - V_i(0)$, y por lo tanto $E'(V_i(1)) = V_i(0)(1+r)$ dado a que $E'(G) = 0$. Por el lema en los anexos, existe el vector $(p'_1, \dots, p'_n)$. Nótese que A es un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$ y $A \cap Port = \emptyset$. El lema establece la existencia de un $z \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a $Port$ tal que $\sum_{i=1}^{n} z_i q_i > 0$ para todo $q \in A$. Para cualquier $j = 1, \dots, n$ se tiene que $z_j > 0$ al tomar $q \in A$ tal que $q_j = 1$ y $q_k = 0$ para todo $j \neq k$. Entonces, definimos a p'_j como $p'_j = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{n} z_i}$. Nótese que los p'_j denotan la probabilidad neutral la riesgo ya que son positivas y son tales que se cumple la condición del valor esperado, lo que completa la prueba. ■

e. Fórmula de Cox-Ross-Rubinstein. Todo el desarrollo previo concluye con la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein. Este modelo es válido para opciones europeas. Antes de presentar la fórmula del modelo, debemos simplificar un poco la expresión anterior.

Nótese que, si tenemos una opción call, $f(V(0)(1+U)^k(1+D)^{n-k})>0$ cuando $V(0)(1+U)^k(1+D)^{n-k}>X$, en donde $f(x)$ es la función de pago de la opción y X es el precio que se pactó. Debido a que se pueden tener varios escenarios en donde la función de pago es cero, por el principio del buen orden, elegimos al entero *m* tal que $V(0)(1+U)^m(1+D)^{n-m}>X$. Otra forma de expresar este entero es: el entero más pequeño tal que:

$$\begin{aligned}
V(0)(1+U)^m(1+D)^{n-m}>X &\Leftrightarrow \ln(V(0)(1+U)^m(1+D)^{n-m})>\ln X\\
&\Leftrightarrow \ln\big(V(0)\big)+m\ln(1+U)+(n-m)\ln(1+D)>\ln X\\
&\Leftrightarrow m\ln(1+U)+n\ln(1+D)-m\ln(1+D)>\ln\frac{X}{V(0)}\\
&\Leftrightarrow m(\ln(1+U)-\ln(1+D))>\ln\frac{X}{V(0)}-n\ln(1+D)\\
&\Leftrightarrow m\ln\left(\frac{1+U}{1+D}\right)>\ln\frac{X}{V(0)}-\ln(1+D)^n \Leftrightarrow m\ln\left(\frac{1+U}{1+D}\right)\\
&>\ln\frac{X}{V(0)(1+D)^n}\Leftrightarrow m>\frac{\ln\frac{X}{V(0)(1+D)^n}}{\ln\left(\frac{1+U}{1+D}\right)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para la call, podemos reescribir la ecuación anterior con el ajuste de *m*

$$\begin{aligned}
H(0)&=\frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}p'^k(1-p')^{n-k}(V(0)(1+U)^k(1+D)^{n-k}-X)\\
&=V(0)\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}p'^k(1-p')^{n-k}\frac{(1+U)^k(1+D)^{n-k}}{(1+r)^n}\\
&-\frac{X}{(1+r)^n}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}p'^k(1-p')^{n-k}
\end{aligned}$$

Nótese que la expresión dentro de la segunda sumatoria es la función acumulativa complementaria de distribución binomial entre *m* y *n* con probabilidad *p'*. Denotamos a la función acumulativa binomial como $\Phi(m,n,p')=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}p'^k(1-p')^{n-k}$. La primera sumatoria se puede ver de la misma forma para $\Phi(m,n,p^*)$, en donde $p^*=p'\frac{1+U}{1+r}$ y $(1-p^*)=(1-p')\frac{1+D}{1+r}$ ya que $p'^k(1-p')^{n-k}\frac{(1+U)^k(1+D)^{n-k}}{(1+r)^n}=(\frac{1+U}{1+r}p')^k\left[\frac{1+D}{1+r}(1-p')\right]^{n-k}=p^{*k}(p^*)^{n-k}$.

Para una opción put, se hace un trabajo análogo, intercambiando la función $f(x)$ para el caso de la put. Lo anterior demuestra el siguiente teorema:

Teorema W. (Fórmula de Cox-Ross-Rubinstein) Para el modelo binomial, el precio de las opciones put y call europeas con precio pactado *X* y *n* pasos es:

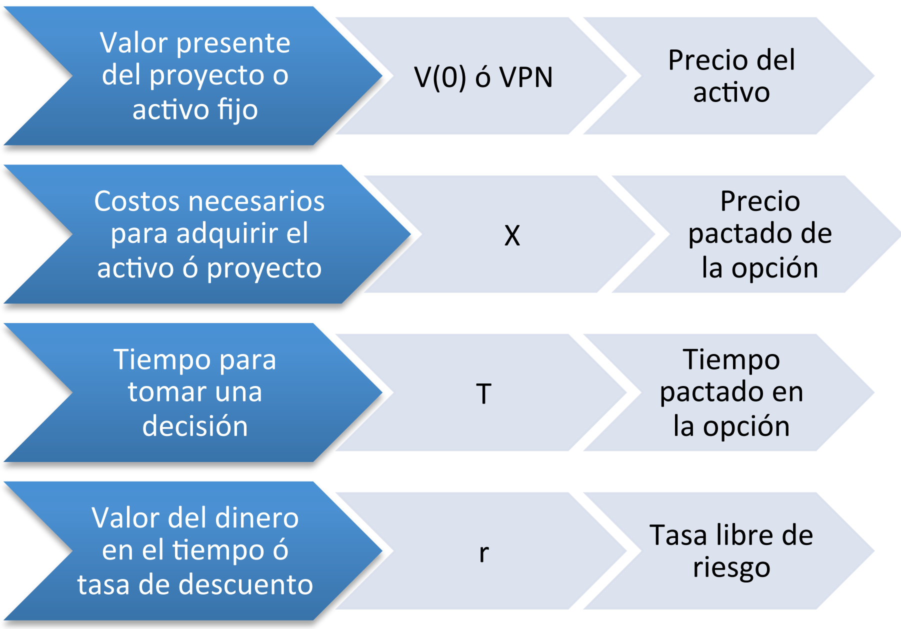
$$\boldsymbol{C(0)=V(0)[1-\Phi(m-1,n,p^*)]-\frac{1}{(1+r)^n}X[1-\Phi(m-1,n,p')]}$$

$$P(0) = -V(0)\Phi(m-1,n,p^{*}) + \frac{1}{(1+r)^{n}} X\Phi(m-1,n,p')$$

2. Aplicación: Opciones reales

a. Descripción general. El modelo de opciones financieras, así como la valuación de éstas con el modelo binomial y la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein, se puede replicar a un escenario en donde se tengan proyectos o activos tangibles, como un terreno, edificio, maquinaria, inventario, contrato de ventas, etc. Al igual que una opción financiera, una empresa o un inversionista tiene el derecho, pero no la obligación, de adquirir algo. Entonces, podemos hacer una analogía entre los factores que determinan con los términos con los que ya nos hemos familiarizado usando la siguiente figura:

Figura 11. Comparativo



*Fuente: elaboración propia

Existen varios tipos de opciones reales que podemos crear con base en las necesidades y o expectativas en el futuro. Algunos ejemplos son:

- Opción de crecimiento: nos da la posibilidad de decidir según el crecimiento o las ventas de un proyecto. Útil en escenarios de investigación y desarrollo, negocios de varios pasos, empresas riesgosas, etc.
- Opción de expansión: nos da la posibilidad de expandir (mercado, área de producción, inventarios, etc.).
- Opción de esperar: nos da la posibilidad de "esperar" para tomar una decisión a un tiempo en el futuro, manteniendo las condiciones establecidas.
- Opción de cambio: nos da la opción de cambiar insumos, resultados o procesos.
- Opción de contracción: nos da la opción de reducir (mercado, área de producción, inventarios, etc.).
- Opción de abandono: nos da la opción de abandonar un negocio, mercado, producto, etc. Útil para escenarios con alta incertidumbre, bajos márgenes

b. Contexto de la aplicación: alternativa a los métodos tradicionales. Existe varias ventajas al usa opciones reales. Por un lado, las opciones nos dan la flexibilidad de esperar a que ocurran ciertos hecho que van a ayudar a tomar una mejor decisión. Por ejemplo, podemos usar una opción real para comprar una máquina en el futuro, dependiendo si se alcanza un nivel de ventas determinado. Además, en ambientes donde el dinero pierde el valor en el tiempo, siempre preferimos hacer desembolsos después que hacerlo ahora.

Recordemos que el método del VPN hace proyecciones de los resultados en el futuro de acuerdo al promedios y se descuentan a una tasa fija. Las opciones no dependen de un precio estimado, ya que la opciones dependen de las probabilidades de subir y bajar, no del valor esperado de las proyecciones.

c. Ejemplo

1) Antecedentes de la empresa e industria. Una de las industrias en donde se pudiera aplicar la metodología de opciones reales en Guatemala es en la minera, en particular, de oro. En esta última sección del trabajo de investigación, se desarrollará un problema en una empresa minera que opera en Guatemala, la cual es pública y facilita el acceso a la información. Debido a que esta industria provoca un poco de controversia en nuestro país, no se mencionará el nombre de la empresa ni la de la mina a trabajar.

La mina se localiza en el occidente del país, siendo adquirida por una empresa canadiense a finales de noviembre de 2006, teniendo una reserva de oro de más de 2.5 millones de onzas, una inversión inicial de más de US$160 millones, y empleando a más de 2 mil personas. La extracción de oro se de forma tradicional, al atravesar un proceso de extracción, molido y fresado. El proyecto fue diseñado para durar diez años, pero dependiendo de nuevos descubrimientos de reservas se pudiera alargar.

2) Descripción del problema. El oro es un producto no perecedero y que se puede suponer que nunca va perder valor. Entonces, dependiendo del precio de venta en el mercado, la empresa puede decidir si se produce y se vende el oro, o sólo se va a guardar para explotarlo y venderlo en un período que favorezca mejor a la empresa.

El poder de las opciones reales está en que le da la flexibilidad al administrador de tomar decisiones en el futuro según a la situación en su momento. Entonces, se puede hacer un modelo de valuación de la mina, el cual depende del precio del oro en el futuro. Esta opción tiene la forma de una put, en donde la mina tiene la opción, pero no la obligación, de producir en un año determinado, dependiendo de cuál se prevean que sean los precios del oro y los costos de extraerlo. El modelo de valuación nos va a decir cuánta dinero va a generar esta mina en el futuro. Debido a que el precio del oro en el futuro es aleatorio, podemos usar el modelo binomial para demostrar cuánto puede generar la mina en el futuro.

3) Metodología y supuestos necesarios. Para el análisis comparativo, es necesario correr dos modelos, el modelo binomial de opciones y el

tradicional utilizando VPN. Para hacer todo el análisis, es necesario buscar los datos de producción, costos y precios de venta de la mina. Debido a que la empresa dueña de la mina es pública, los reportes trimestrales y anuales están publicados en la página oficial de ésta.

En ambos modelos, se hace el supuesto que la empresa empezó a producir oro el 1 de enero de 2007 y tiene una vida de 15 años, es decir, hasta el 31 de diciembre de 2021. Inicialmente, la mina fue planeada con una vida de 10 años, pero se ha encontrado un mayor potencial para ésta, por lo que podemos suponer que la vida se puede extender a los 15 años. Los dos modelos se hacen suponiendo que se quiere analizar el período del 1 de enero de 2013 hasta la fecha en que termina el proyecto. Todos los valores de precios, costos y venta se trabajan en dólares de Estados Unidos.

Para correr el modelo binomial, se recolectó, calculó y obtuvo la siguiente información:

- Se tomó el precio de venta mensual del oro de los últimos 20 años que se cotiza en bolsa. Se hace el supuesto que 20 años provee una buena muestra debido a que si tomamos más años atrás, el precio del oro pudiera estar afectado por políticas de gobierno. Se inicia el modelo con el precio al cierre de 2012.
- Con los precios históricos, se calculó la desviación estándar mensual y anual, para luego calcular nuestras variables u y d por medio de las fórmulas $u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{t}}$, en donde σ es la desviación estándar y t=12 meses.
- La tasa libre de riesgo, r, es la de los Bonos de Tesoro de EEUU a 10 años.
- Con r, u y d se calculó p'.
- Se supone que la producción anual es la misma cada año.
- El costo de producción por onza de oro aumenta con la inflación de Estados Unidos, la cual en el 2012 fue de 2.1%.
- La empresa tiene la opción de producir o no, dependiendo si el precio del oro es mayor a los costos relacionados a extraerlo. Esta decisión se toma a principio de año sobre lo que se cree que va a pasar éste, es decir, descantando los valores a principio de año. Entonces, nuestro precio pactado de la opción es variable en el tiempo, y cambia dependiendo en que escenario se encuentre uno.
- Sólo se estudia la utilidad neta en el tiempo, es decir, ventas-costos y no hay otros gastos relacionados.
- No se toman en cuenta posibles inversiones en el transcurso del tiempo ni valores de venta o rescate de los activos al final del tiempo estudiado.

Para correr el modelo de VPN, se recolectó, calculó y obtuvo la siguiente información:

- El precio del oro se inicia con el que reporta la empresa en el último trimestre del 2012. Con base en esto, se hace el supuesto que el precio varía en el tiempo con diferentes escenarios.
- El costo de producción por onza de oro aumenta con la inflación de Estados Unidos, la cual en el 2012 fue de 2.1%.
- La producción de oro es contante cada año.
- La tasa de descuento es de 5.4%, la cual toma en cuenta la tasa libre de riesgo y un costo de oportunidad (ver anexos).
- Sólo se estudia la utilidad neta en el tiempo, es decir, ventas-costos y no hay otros gastos relacionados. No se toman en cuenta posibles inversiones en el

transcurso del tiempo ni valores de venta o rescate de los activos al final del tiempo estudiado.

4) Resultados. Primero, se logró recolectar información de la mina por los reportes trimestrales de la empresa (ver anexo). Para el modelo de binomial, se inició con los precios históricos (ver anexo) y luego se obtuvo la siguiente tabla de datos:

Tabla #1: Datos para modelo binomial

r	1.0186
u	1.17
d	0.85
p'	0.52
1-p'	0.48
Producción anual (oz)	264,884.21

*Fuente: elaboración propia

Los siguientes árboles se hicieron para mostrar el modelo binomial. Los precios del oro van variando nodo con nodo, dependiendo de las variables u y d. Luego, las ventas del año solo se tiene si el precio del oro al final del año va a ser mayor que el costo unitario al final del mismo período. Esta producción es descontada a principios de año, haciendo posible que la empresa pueda tomar la decisión de trabajar o no. Por último, se tiene el árbol de la opción put. Cada nodo se debe analizar como un modelo de un paso, ya que cada nodo depende de la producción de ese año y lo que pueda ocurrir en los dos escenarios que le siguen.

Figura 12. Precios y costos del oro (en US$)

Precios (al 31 de diciembre)

2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
									7,029.36
								5,986.85	
							5,098.94		5,098.94
						4,342.72		4,342.72	
					3,698.66		3,698.66		3,698.66
				3,150.11		3,150.11		3,150.11	
			2,682.92		2,682.92		2,682.92		2,682.92
		2,285.02		2,285.02		2,285.02		2,285.02	
	1,946.13		1,946.13		1,946.13		1,946.13		1,946.13
1,657.50		1,657.50		1,657.50		1,657.50		1,657.50	
	1,411.68		1,411.68		1,411.68		1,411.68		1,411.68
		1,202.31		1,202.31		1,202.31		1,202.31	
			1,024.00		1,024.00		1,024.00		1,024.00
				872.13		872.13		872.13	
					742.79		742.79		742.79
						632.62		632.62	
							538.8		538.8
								458.89	
									390.83

Costos (al 31 de diciembre)

539	548.28	559.79	571.55	583.55	595.8	608.32	621.09	634.13	647.45

*Fuente: elaboración propia

Figura 13. Resultados de la opción de producir

Venta del año (descontada al 1 de enero)

2012 (al 31 de dic.)	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
									1,659,600,051
								1,391,958,572	
							1,164,453,163		1,157,598,400
						971,122,176		964,408,402	
					806,888,316		800,312,631		793,457,868
				667,427,483		660,987,048		654,273,273	
			549,057,060		542,749,091		536,173,406		529,318,643
		448,640,771		442,462,545		436,022,109		429,308,334	
	363,507,651		357,456,499		351,148,531		344,572,846		337,718,082
296,272,989		285,456,342		279,278,117		272,837,681		266,123,906	
	224,524,980		218,473,829		212,165,860		205,590,175		198,735,411
		167,086,085		160,907,859		154,467,424		147,753,649	
			117,658,974		111,351,005		104,775,320		97,920,556
				75,044,779		68,604,343		61,890,568	
					38,222,212		31,646,527		24,791,763
						6,321,225		0	
							0		0
								0	
									0

*Fuente: elaboración propia

Figura 14. Resultados de la opción de producir (continuado)

Opción PUT 2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
									1,659,600,051
								2,783,528,600	
							3,492,216,936		1,157,598,400
						3,882,248,838		1,928,428,259	
					4,030,782,381		2,399,795,340		793,457,868
				3,999,184,766		2,641,708,324		1,308,158,002	
			3,836,016,351		2,710,086,256		1,607,377,665		529,318,643
		3,579,476,960		2,649,395,134		1,741,848,570		858,228,125	
	3,259,481,894		2,494,812,426		1,752,083,452		1,032,575,983		337,718,082
2,904,465,371		2,274,156,855		1,670,288,565		1,089,110,857		531,859,268	
	2,009,846,996		1,522,261,722		1,057,170,100		615,627,971		198,735,411
		1,329,581,441		960,759,636		615,629,828		295,118,754	
			821,245,610		554,558,410		313,183,407		97,920,556
				454,737,217		275,266,030		123,392,593	
					206,679,671		100,319,032		24,791,763
						60,333,813		12,598,806	
							6,402,526		0
								0	
									0

*Fuente: elaboración propia

Según el método binomial, la mina tiene un valor de $2.9 mil millones, suponiendo que tiene una vida útil hasta finales de 2021. Nótese que este modelo nos da un marco más real y favorable para la empresa, ya que encontramos cuatro escenarios en donde no se va a producir debido al precio en ese punto del oro, lo cual le ahorraría mucho dinero.

Por otro lado, podemos analizar el problema por el método tradicional del VPN.

Tabla #2: Precios con variaciones

		2013	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Precio con cambio/oz	-15%	1,445.85	1,228.97	1,044.63	887.93	754.74
Precio con cambio/oz	-10%	1,530.90	1,377.81	1,240.03	1,116.03	1,004.42
Precio con cambio/oz	-5%	1,615.95	1,535.15	1,458.39	1,385.48	1,316.20
Precio sin cambio/oz	0%	1,701.00	1,701.00	1,701.00	1,701.00	1,701.00
Precio con cambio/oz	5%	1,786.05	1,875.35	1,969.12	2,067.58	2,170.95
Precio con cambio/oz	10%	1,871.10	2,058.21	2,264.03	2,490.43	2,739.48
Precio con cambio/oz	15%	1,956.15	2,249.57	2,587.01	2,975.06	3,421.32
Costos/oz		548.28	559.79	571.55	583.55	595.80

		2018	**2019**	**2020**	**2021**
Precio con cambio/oz	-15%	641.53	545.30	463.51	393.98
Precio con cambio/oz	-10%	903.98	813.58	732.22	659.00
Precio con cambio/oz	-5%	1,250.39	1,187.87	1,128.48	1,072.05
Precio sin cambio/oz	0%	1,701.00	1,701.00	1,701.00	1,701.00
Precio con cambio/oz	5%	2,279.50	2,393.48	2,513.15	2,638.81
Precio con cambio/oz	10%	3,013.43	3,314.77	3,646.24	4,010.87
Precio con cambio/oz	15%	3,934.52	4,524.69	5,203.40	5,983.91
Costos/oz		608.32	621.09	634.13	647.45

*Fuente: elaboración propia

Tabla #3: Utilidad bruta con variaciones

Utilidad bruta=(Precio de venta-costo)*Producción

		2013	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Utilidad Bruta	-15%	237,752,915	177,255,662	125,311,476	80,626,445	42,100,514
Utilidad Bruta	-10%	260,281,318	216,680,365	177,070,479	141,044,803	108,237,003
Utilidad Bruta	-5%	282,809,720	258,357,909	234,912,152	212,417,597	190,822,042
Utilidad Bruta	0%	305,338,122	302,288,293	299,174,419	295,995,153	292,749,122
Utilidad. Bruta	5%	327,866,524	348,471,518	370,195,206	393,095,382	417,232,765
Utilidad Bruta	10%	350,394,926	396,907,582	448,312,441	505,103,781	567,825,417
Utilidad Bruta	15%	372,923,328	447,596,487	533,864,048	633,473,432	748,434,350

Continuación Tabla #3

		2018	2019	2020	2021
Utilidad Bruta	-15%	8,798,401	(20,075,122)	(45,196,246)	(67,139,981)
Utilidad Bruta	-10%	78,317,213	50,988,385	25,983,000	3,060,116
Utilidad Bruta	-5%	170,075,796	150,131,555	130,944,277	112,471,067
Utilidad Bruta	0%	289,434,925	286,051,129	282,596,274	279,068,867
Utilidad Bruta	5%	442,671,152	469,477,570	497,722,439	527,479,742
Utilidad Bruta	10%	637,075,654	713,512,735	797,860,845	890,916,699
Utilidad Bruta	15%	881,058,143	1,034,003,037	1,210,326,174	1,413,543,458

*Fuente: elaboración propia

Tabla #4: Resultados del VPN

Escenario	VPN
-15%	511,110,108
-10%	903,121,252
-5%	1,406,420,857
0%	2,054,232,016
5%	2,888,869,178
10%	3,963,847,646
15%	5,346,382,124

*Fuente: elaboración propia

Dependiendo del escenario que creamos, el resto del proyecto puede llegar a ser muy rentable.

5) Comparativo contra análisis financiero tradicional. Estas dos metodologías muestran resultados muy distintos. Por un lado, el modelo binomial considera más escenarios posibles en el futuro, y al final nos devuelve una respuesta sobre el valor de tener la opción de producir o no en el futuro, dependiendo del precio del oro. Por otro lado, el modelo de VPN nos da varios escenarios, en donde el inversionista debe analizar cuál es el más probable a ocurrir, dando espacio para la subjetividad. Además, el VPN hace ciertos supuestos que se replican cada período, haciendo poco flexible el modelo.

IX. Conclusiones y recomendaciones

- El modelo de la caminata aleatoria (en el caso discreto) y el movimiento browniano (en el caso continuo) son útiles para modelar precios en el tiempo.

- Las opciones son instrumentos libres de riesgo que nos ayudan a tomar mejores decisiones, dependiendo de los eventos que ocurran en el futuro.

- El modelo de Cox-Ross-Rubinstein es una buena herramienta basada en el modelo binomial y de caminatas aleatorias para valuar opciones financieras, reales, o cualquier otro proyecto.

- Las opciones reales tienen aplicaciones en situaciones donde hay incertidumbre, en particular, para la industria minera y de oro, permitiendo ponerle valor a un proyecto.

- El modelo binomial devuelve un valor que determina el valor del activo, a diferencia del método de VPN, en donde la persona que hace el análisis determina el escenario que él considera más probable.

- A las empresas guatemaltecas, se recomienda replicar la metodología de las opciones reales para proyectos debido a que da un valor agregado al considerar más escenarios.

- A los estudiantes de matemática, estudiar temas de la matemática financiera, debido a su aplicación a la vida real.

X. Bibliografía

- Capinski, Marek y Zastawniak, Tomacz. 2003. *Mathematics for Finance*. 1era edición. Springer-Verlag, EEUU. 310 págs.
- Cox, John; Ross, Stephen y Rubinstein, Mark. 1979. *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, North-Holland Publishing Company.
- Edleson, Michael. 1994. *Real Options: Valuing Managerial Flexibility*. Harvard Business School.
- Goldcorp. 2011. *Fact Sheet*. http://www.goldcorp.com/Theme/GoldCorp/files/factsheets_media/Goldcorp_Fact Sheet_Marlin.pdf
- Goldcorp. 2011. *Reports & Filings.* http://www.goldcorp.com/English/Investor-Resources/Reports-and-Filings/Annual-Reports/default.aspx
- González de Paz, Raúl. 2013. *Modelos de valuación neutral al riesgo*. Notas de curso: Teoría de Inversiones.
- González de Paz, Raúl. 2013. *Proceso aleatorios aplicados a modelación de precios de activos financieros.* Notas de curso: Teoría de Inversiones.
- Gujarati, Damodar. Porter, Dawn. 2010. *Econometría*. 5ta edición. McGraw Hill. México
- Jarrow, Robert y Protter, Philip. 2003. *A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance The early years, 1880 – 1970.*
- Kijima, Masaaki. 2003. *Stochastic processes with aplications to finance*. Chapman & Hall/CRC. Estados Unidos. 274 págs.
- Luehrman, Timothy. 1998. *Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers*. Harvard Business Review.
- Schulmerich, Marcus. 2005. *Real Option Valuation*. Springer-Verlag, Alemania. 357 págs.
- Simmons, George F. 1963. *Topology and Modern Analysis*. 1era edición. McGraw-Hill Book Company, Inc. EEUU. 372 págs.
- Wacherly, Dennis; Mendenhall, William y Scheaffer, Richard. 2010. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. 7ma edición. Cengage Learning. México. 911 págs.
- Weisstein, Eric. *Binomial Distribution*. http://mathworld.wolfram.com/BinomialDistribution.html
- Weisstein, Eric. 2012. *Martingale*. http://mathworld.wolfram.com/Martingale.html
- Wikipedia. 2013. *Random Walk*. http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk
- World Gold Council. 2013. *Gold price in a range of currencies since December 1978*. http://www.gold.org/download/value/stats/statistics/xls/gold_prices.xls

XI. Anexos

A. Información complementaria al teorema de no existencia de arbitraje

El teorema de arbitraje hace uso de algunos conceptos fuera del alcance de este trabajo de investigación, por lo que se darán las definiciones de éstos. Para tener mayor referencia a los conceptos y sus propiedades, se puede consultar el libro "Introduction to Topology and Modern Analysis" de George F. Simmons, o cualquier otro libro de álgebra lineal o topología general.

Definición 23. Sea $\boldsymbol{V}$ un conjunto no vacío y supóngase que para cualesquiera dos elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ existe una operación binaria + tal que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$. Entonces, se dice que $\boldsymbol{V}$ es un *espacio vectorial* y sus elementos son vectores si:

- $x + y = y + x$ (conmutatividad de la operación)
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociatividad de la operación)
- Existe un único elemento en V, denotado como 0 y llamado el neutro, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in V$.
- Para cada elemento $x \in V$ existe un elemento $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$ (inverso del elemento)
- Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributividad respecto a la operación)
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributividad respecto a la suma de los reales)
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (asociatividad del producto de los reales)
- 1x=x (neutro de los reales)

Un *subespacio* de un espacio vectorial es un conjunto no vacío $S \subseteq V$ tal que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in S$ entonces $\alpha x + \beta y \in S$.

Definición 24. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ vectores. Se dice que $\boldsymbol{x}$ es *ortogonal* a $\boldsymbol{y}$ si $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{0}$. Sea $\boldsymbol{V'}$ un subconjunto de $\boldsymbol{V}$, entonces se dice que $\boldsymbol{x}$ es ortogonal a $\boldsymbol{V'}$ si $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V'}$.

Definición 25. Sea $\boldsymbol{X}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ no vacío. Se dice que $\boldsymbol{X}$ es *compacto* si cada sucesión acotada en $\boldsymbol{X}$ tiene una subsucesión que converge a un elemento en $\boldsymbol{X}$.

Definición 26. Sea $\boldsymbol{X}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ no vacío. Se dice que $\boldsymbol{X}$ es *convexo* si para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ se tiene que $\boldsymbol{tx} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ para todo número real $\boldsymbol{t}$ tal que $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{1}$.

El lema a continuación es necesario para completar el teorema de arbitraje. La prueba utiliza conceptos del álgebra lineal y topología general, por lo que la prueba se puede encontrar en el libro de matemática financiera de Capinski y Zastawniak.

Lema: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ convexo y compacto, y V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Entonces, existe un $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle z, a\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i a_i > 0$ para todo $a \in A$ y $\langle z, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i v_i = 0$ para todo $v \in V$.

B. **Ejemplo de la mina**

La siguiente tabla muestra la información reportada por la mina

Tabla #5: Información de la mina

Año	Trimestre	Onzas producidas	Onzas vendidas	Precio por onza (en US$)	Costo por onza (en US$)
2007	Q1	46,800	51,100	653	246
2007	Q2	53,700	52,700	664	246
2007	Q3	58,700	57,000	679	268
2008	Q1	70,300	67,400	934	241
2008	Q2	51,300	56,400	901	326
2008	Q3	51,000	51,000	833	400
2009	Q1	64,500	67,700	907	327
2009	Q2	63,000	62,000	927	359
2009	Q3	68,800	69,000	965	347
2010	Q1	68,900	70,500	1,113	332
2010	Q2	71,500	72,300	1,206	319
2011	Q1	77,800	77,900	1,392	324
2011	Q2	78,900	79,600	1,509	368
2011	Q3	95,000	88,600	1,719	347
2011	Q4	130,700	135,000	1,689	337
2012	Q1	53,200	54,000	1,684	501
2012	Q2	56,700	58,300	1,594	511
2012	Q3	47,900	49,500	1,665	597
2012	Q4	49,500	47,300	1,701	539
Promedio (trimestral)		66,221	66,700	1,197	365
Promedio (anual)		264,884	266,800	1,197	365

*Fuente: elaboración propia

La siguiente tabla muestra los precios históricos

Tabla #6: Precio histórico del oro

Fecha	Precio en US$	% Cambio	Fecha	Precio en US$	% Cambio
2/26/93	327.6		12/31/93	391.8	5.62%
3/31/93	337.8	3.11%	1/31/94	377.9	-3.54%
4/30/93	354.3	4.88%	2/28/94	381.6	0.97%
5/31/93	377.5	6.53%	3/31/94	389.2	2.00%
6/30/93	378.5	0.26%	4/29/94	376.5	-3.28%
7/30/93	401.8	6.16%	5/31/94	387.6	2.96%
8/31/93	371.6	-7.52%	6/30/94	388.3	0.17%
9/30/93	355.5	-4.32%	7/29/94	384	-1.09%
10/29/93	369.6	3.97%	8/31/94	385.8	0.46%
11/30/93	370.9	0.35%	9/30/94	394.9	2.36%

Continuación Tabla ·6

Fecha	Precio en US$	% Cambio	Fecha	Precio en US$	% Cambio
10/31/94	383.9	-2.79%	5/29/98	293.6	-5.50%
11/30/94	383.1	-0.20%	6/30/98	296.3	0.92%
12/30/94	383.3	0.04%	7/31/98	288.9	-2.51%
1/31/95	374.9	-2.18%	8/31/98	273.4	-5.35%
2/28/95	376.4	0.40%	9/30/98	293.9	7.48%
3/31/95	392	4.14%	10/30/98	292.3	-0.53%
4/28/95	389.8	-0.57%	11/30/98	294.7	0.82%
5/31/95	384.3	-1.40%	12/31/98	287.8	-2.34%
6/30/95	387.1	0.72%	1/29/99	285.4	-0.83%
7/31/95	383.4	-0.96%	2/26/99	287.1	0.58%
8/31/95	382.4	-0.26%	3/31/99	279.5	-2.65%
9/29/95	384	0.43%	4/30/99	286.6	2.56%
10/31/95	382.7	-0.35%	5/31/99	268.6	-6.28%
11/30/95	387.8	1.35%	6/30/99	261	-2.83%
12/29/95	387	-0.21%	7/30/99	255.6	-2.07%
1/31/96	405.6	4.79%	8/31/99	254.8	-0.31%
2/29/96	400.7	-1.21%	9/30/99	299	17.35%
3/29/96	396.4	-1.07%	10/29/99	299.1	0.03%
4/30/96	391.3	-1.27%	11/30/99	291.4	-2.59%
5/31/96	390.6	-0.19%	12/31/99	290.3	-0.38%
6/28/96	382	-2.19%	1/31/00	283.3	-2.39%
7/31/96	385.3	0.86%	2/29/00	293.7	3.65%
8/30/96	386.5	0.30%	3/31/00	276.8	-5.76%
9/30/96	379	-1.93%	4/28/00	275.1	-0.61%
10/31/96	379.5	0.13%	5/31/00	272.3	-1.02%
11/29/96	371.3	-2.16%	6/30/00	288.2	5.84%
12/31/96	369.3	-0.55%	7/31/00	276.8	-3.96%
1/31/97	345.5	-6.43%	8/31/00	277	0.09%
2/28/97	358.6	3.79%	9/29/00	273.7	-1.21%
3/31/97	348.2	-2.91%	10/31/00	264.5	-3.34%
4/30/97	340.2	-2.30%	11/30/00	269.1	1.74%
5/30/97	345.6	1.60%	12/29/00	274.5	1.99%
6/30/97	334.6	-3.20%	1/31/01	264.5	-3.63%
7/31/97	326.4	-2.45%	2/28/01	266.7	0.83%
8/29/97	325.4	-0.31%	3/30/01	257.7	-3.37%
9/30/97	332.1	2.07%	4/30/01	263.2	2.11%
10/31/97	311.4	-6.23%	5/31/01	267.5	1.65%
11/28/97	296.8	-4.69%	6/29/01	270.6	1.16%
12/31/97	290.2	-2.22%	7/31/01	265.9	-1.74%
1/30/98	304.9	5.05%	8/31/01	273	2.67%
2/27/98	297.4	-2.44%	9/28/01	293.1	7.36%
3/31/98	301	1.21%	10/31/01	278.8	-4.90%
4/30/98	310.7	3.22%	11/30/01	275.5	-1.17%

Continuación Tabla ·6

Fecha	Precio en US$	% Cambio	Fecha	Precio en US$	% Cambio
12/31/01	276.5	0.36%	7/29/05	429	-1.85%
1/31/02	282.3	2.10%	8/31/05	433.3	0.99%
2/28/02	296.9	5.15%	9/30/05	473.3	9.23%
3/29/02	301.4	1.53%	10/31/05	470.8	-0.53%
4/30/02	308.2	2.26%	11/30/05	495.7	5.29%
5/31/02	326.6	5.97%	12/30/05	513	3.50%
6/28/02	318.5	-2.48%	1/31/06	568.8	10.87%
7/31/02	304.7	-4.35%	2/28/06	556	-2.24%
8/30/02	312.8	2.68%	3/31/06	582	4.68%
9/30/02	323.7	3.48%	4/28/06	644	10.65%
10/31/02	316.9	-2.10%	5/31/06	653	1.40%
11/29/02	319.1	0.68%	6/30/06	613.5	-6.05%
12/31/02	347.2	8.82%	7/31/06	632.5	3.10%
1/31/03	367.5	5.85%	8/31/06	623.5	-1.42%
2/28/03	347.5	-5.46%	9/29/06	599.3	-3.89%
3/31/03	334.9	-3.63%	10/31/06	603.8	0.75%
4/30/03	336.8	0.57%	11/30/06	646.7	7.11%
5/30/03	361.4	7.32%	12/29/06	632	-2.27%
6/30/03	346	-4.26%	1/31/07	650.5	2.93%
7/31/03	354.8	2.53%	2/28/07	664.2	2.11%
8/29/03	375.6	5.88%	3/30/07	661.8	-0.37%
9/30/03	388	3.30%	4/30/07	677	2.30%
10/31/03	386.3	-0.45%	5/31/07	659.1	-2.64%
11/28/03	398.4	3.13%	6/29/07	650.5	-1.30%
12/31/03	416.3	4.49%	7/31/07	665.5	2.31%
1/30/04	399.8	-3.96%	8/31/07	672	0.98%
2/27/04	395.9	-0.98%	9/28/07	743	10.57%
3/31/04	423.7	7.04%	10/31/07	789.5	6.26%
4/30/04	388.5	-8.31%	11/30/07	783.5	-0.76%
5/31/04	393.3	1.22%	12/31/07	833.8	6.41%
6/30/04	395.8	0.65%	1/31/08	923.3	10.73%
7/30/04	391.4	-1.11%	2/29/08	971.5	5.23%
8/31/04	407.3	4.05%	3/31/08	933.5	-3.91%
9/30/04	415.7	2.06%	4/30/08	871	-6.70%
10/29/04	425.6	2.38%	5/30/08	885.8	1.69%
11/30/04	453.4	6.54%	6/30/08	930.3	5.02%
12/31/04	435.6	-3.93%	7/31/08	918	-1.32%
1/31/05	422.2	-3.09%	8/29/08	833	-9.26%
2/28/05	435.5	3.15%	9/30/08	884.5	6.18%
3/31/05	427.5	-1.83%	10/31/08	730.8	-17.38%
4/29/05	435.7	1.92%	11/28/08	814.5	11.46%
5/31/05	414.5	-4.88%	12/31/08	869.8	6.78%
6/30/05	437.1	5.47%	1/30/09	919.5	5.72%

Continuación Tabla #6

Fecha	Precio en US$	% Cambio	Fecha	Precio en US$	% Cambio
2/27/09	952	3.53%	7/29/11	1,628.50	8.17%
3/31/09	916.5	-3.73%	8/31/11	1,813.50	11.36%
4/30/09	883.3	-3.63%	9/30/11	1,620.00	-10.67%
5/29/09	975.5	10.44%	10/31/11	1,722.00	6.30%
6/30/09	934.5	-4.20%	11/30/11	1,746.00	1.39%
7/31/09	939	0.48%	12/30/11	1,531.00	-12.31%
8/31/09	955.5	1.76%	1/31/12	1,744.00	13.91%
9/30/09	995.8	4.21%	2/29/12	1,770.00	1.49%
10/30/09	1,040.00	4.44%	3/30/12	1,662.50	-6.07%
11/30/09	1,175.80	13.05%	4/30/12	1,651.30	-0.68%
12/31/09	1,087.50	-7.51%	5/31/12	1,558.00	-5.65%
1/29/10	1,078.50	-0.83%	6/29/12	1,598.50	2.60%
2/26/10	1,108.30	2.76%	7/31/12	1,622.00	1.47%
3/31/10	1,115.50	0.65%	8/31/12	1,648.50	1.63%
4/30/10	1,179.30	5.71%	9/28/12	1,776.00	7.73%
5/31/10	1,207.50	2.40%	10/31/12	1,719.00	-3.21%
6/30/10	1,244.00	3.02%	11/30/12	1,726.00	0.41%
7/30/10	1,169.00	-6.03%	12/31/12	1,657.50	-3.97%
8/31/10	1,246.00	6.59%	1/31/13	1,664.80	0.44%
9/30/10	1,307.00	4.90%	2/28/13	1,588.50	-4.58%
10/29/10	1,346.80	3.04%		Media	0.77%
11/30/10	1,383.50	2.73%		Desv. Mens	4.63%
12/31/10	1,405.50	1.59%			
1/31/11	1,327.00	-5.59%		Desv. Anual	16.05%
2/28/11	1,411.00	6.33%			
3/31/11	1,439.00	1.98%		u	1.174135074
4/29/11	1,535.50	6.71%			
5/31/11	1,536.50	0.07%		d	0.851690765
6/30/11	1,505.50	-2.02%			

*Fuente: elaboración propia

Para determinar la tasa de descuento se utilizó el modelo de valoración de activos financieros (CAPM por sus siglas en ingles), el cual es un modelo lineal que se basa en el costo de oportunidad de entrar a cualquier inversión a comparación del mercado. Este modelo es sumamente útil ya que toma en cuenta las variables que considera cualquier inversionista, y fácil de replicar, ya que se basa en un modelo de regresión lineal simple. La fórmula de este modelo es:

$$r = r_f + \beta(\overline{r_m} - r_f)$$

en donde r_f es la tasa libre de riesgo, $\overline{r_m}$ es la tasa de retorno esperada del mercado y β es el coeficiente que indica la sensibilidad del retorno de la inversión respecto del retorno del mercado. En nuestro ejemplo, utilizamos a los bonos de tesoro a 10 años para la tasa libre de riesgo, el retorno de mercado de Estados Unidos y el coeficiente de tener una inversión en una empresa canadiense.

Tabla #7: Determinación de tasa de descuento

CAPM	
$\overline{r_m}$	1.86%
rm	8%
Beta	0.57
r	**5.36%**

*Fuente: elaboración propia

Debido a que no se cuenta con información interna de la empresa minera (como preferencias y expectativas de retorno de los inversionistas) podemos utilizar el CAPM como modelo para determinar la tasa de descuento.