

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

TEORIA ESPECTRAL DE LOS OPERADORES DE
HILBERT SCHMIDT Y SU RELACION CON LA
TEORIA DE OPERADORES DIFERENCIALES

Tesis presentada por Sergio Fernando Martínez para su
Examen General previo a optar el Grado de Licenciado
en Matemáticas

Director de Estudio: Dr. T. W. England

Guatemala, C.A.
Julio 1973

Sergio Fernando Martínez

TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES DE
HILBERT SCHMIDT Y SU RELACION CON
LA TEORIA DE OPERADORES DIFERENCIALES.

CONTENIDO

	<u>Pág.</u>
Dictamen del Director de Estudio	
Introducción.....	i
Capítulo I	
Operadores de Hilbert Schmidt y	
Ecuaciones Integrales.....	1
Capítulo II	
Operadores Diferenciales.....	17
Capítulo III	
Teoría Espectral de Operadores	
Compactos Autoadjuntos.....	44
Aplicaciones.....	54
Bibliografía.....	60

INTRODUCCION

El presente trabajo, es el producto de un estudio dirigido por el Doctor William T. England y tiene como propósito ser una Tesis para sustentar el examen general para la obtención del Grado de Licenciado en Matemáticas, en la Universidad del Valle de Guatemala. A continuación explico los fines y el proceso fundamentales de la Tesis en referencia.

Enmarcados en la teoría de espacios de Hilbert, buscamos un procedimiento que nos permita encontrar operadores diferenciales tales que el conjunto de eigenfunciones asociada al operador sea un conjunto ortonormal completo. Con esto mostramos la existencia de expansiones en series ortonormales de eigenfunciones (convergentes en la métrica del producto escalar).

Sabemos que los operadores diferenciales son no acotados. Un hecho fundamental del trabajo es que éste se desarrolla al margen de la teoría de operadores no acotados. Nosotros deducimos la existencia de series ortonormales de eigenfunciones via el teorema espectral, de las propiedades de la función de Green

asociada a un problema de frontera.

En el trabajo hay dos desarrollos convergentes. Por una parte, el planteamiento exacto del tipo de problema que queremos resolver para operadores diferenciales, definidos utilizando condiciones de frontera (cap. II). Por otra parte, un estudio de operadores integrales (compactos) y la teoría espectral asociada con este tipo de operadores (cap. I y III), que nos da la herramienta necesaria para resolver nuestro problema.

Como sabemos, un operador diferencial está definido en un subconjunto de las funciones continuas, y para operadores no acotados, el escogimiento del dominio es un hecho crucial, desde el punto de vista de la estructura del operador. En el capítulo II tratamos con operadores diferenciales formales; este concepto nos permite encontrar unos tipos de condiciones de frontera que van a determinar dominios de operadores a los cuales podamos aplicar nuestro procedimiento. El procedimiento se basa en lo siguiente: si definimos un operador diferencial sobre un conjunto D de tal manera que el rango del operador sea el conjunto L^2 y si el operador inverso existe, como operador de Hilbert Schmidt, entonces demostramos que esto es suficiente para que el conjunto de eigenfunciones del operador diferencial sea un conjunto completo. En el mismo capítulo II demostramos que las condiciones de frontera del tipo de Sturm-Liouville y las condiciones de periodicidad generalizadas nos

determinan operadores diferenciales a los que el procedimiento es aplicable.

En realidad, nosotros no utilizamos, sino hasta el último momento, la definición explícita de un operador. Nuestra teoría se desarrolla con problemas de frontera y conjuntos soluciones de ecuaciones diferenciales.

En el último capítulo, justificamos la existencia de una expansión de Fourier para cualquier función en L^2 (convergente en la métrica de la integral) con sólo mostrar que en el problema de Frontera que da origen a las funciones de Fourier las condiciones de frontera son del tipo de periodicidad generalizadas.

CAPITULO I

OPERADORES DE HILBERT SCHMIDT Y ECUACIONES INTEGRALES/

1.1 Definición:

Una transformación lineal en un espacio de Hilbert H es llamada compacta (o completamente continua) si para cada sucesión infinita $\{f_n\}$ de elementos de H t.q $\|f_n\| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{Tf_n\}$ contiene una subsucesión que converge en H .

1.2 Teorema: Todo operador compacto A es acotado.

Si no fuera así, existiría una sucesión de elementos de H

$$\{g_k\}_{k=1,2,\dots} \text{ para los que } \|g_k\| = 1 \quad \|Ag_k\| > k$$

que es imposible por la compacticidad del operador A .

1.3 Teorema

La suma y el producto de transformaciones compactas es compacta.

Prueba: Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H .

Si A y B son dos transformaciones compactas en H

existen subsucesiones de $\{Af_n\}$ y $\{Bf_n\}$,

$\{Af_{n_j}\}$ & $\{Bf_{n_j}\}$ respectivamente t.q son conver-

gentes. Si $\{Af_{n_j}\}$ es convergente, $\{B(Af_{n_j})\}$ tiene una subsucesión convergente $\{BAf_{n_{j_k}}\}$.

$\therefore (A+B)(f_{n_{j_k}})$ es convergente.

El producto también es compacto, ya que $\{Bf_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{Bf_{n_i}\}$ (acotada por teorema 1.2) y $\{A(Bf_{n_i})\}$ tiene entonces una subsucesión convergente. \square

1.4 Teorema

Toda transformación lineal que puede ser aproximada arbitrariamente en norma por transformaciones compactas es a su vez una transformación compacta.

Prueba:

Supongamos que $\{T_i\}$ es una sucesión de transformaciones compactas tales que

$$\|T - T_i\| \rightarrow 0$$

Si $\{f_n\}$ es una sucesión acotada de elementos de H , de acuerdo a la compacticidad del operador T_1 existe una subsucesión $f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots$ que es mapeada por T_1 en una subsucesión convergente.

De la subsucesión anterior podemos seleccionar una subsucesión $f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots$ que es mapeada en una sucesión convergente, por el operador T_2 .

La continuación de este proceso nos da la sucesión in finita de sucesiones

$$f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots$$

$$f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots$$

$$f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots$$

...

tal que cada una es una subsucesión de la precedente.

La sucesión diagonal $\{f_{kk}\}_{k=1}^{\infty}$ es mapeada en una sucesión convergente por cada operador T_i . Redefinamos esta sucesión diagonal como $\{g_n\}$.

$\{g_n\}$ tiene la propiedad de que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_i g_n$ existe para $i=1, 2, \dots$ entonces para cualquier i

$$\|T_{g_n} - T_{g_m}\| \leq \|T_{g_n} - T_i g_n\| + \|T_i g_n - T_i g_m\| + \|T_i g_m - T_{g_m}\|$$

por esta razón

$$\begin{aligned} \|T_{g_n} - T_{g_m}\| &\leq \|T - T_i\| \|g_n\| + \|T_i - T\| \|g_m\| + \|T_i g_n - T_i g_m\| \\ &= \|T - T_i\| (\|g_n\| + \|g_m\|) + \|T_i g_n - T_i g_m\| \end{aligned}$$

(utilizando la desigualdad $\|Th\| \leq \|h\| \|T\|$ que es una consecuencia de la definición de norma para operador.)

y por lo tanto $\limsup \|T_{g_n} - T_{g_m}\| = 0$ que implica convergencia de $\{T_{g_n}\}$. \square

No todas las transformaciones continuas son completamente continuas. Un ejemplo sencillo es la transformación identidad I (en un espacio H de dimensión infinita). De hecho si consideramos una sucesión ortonormal $\{f_n\}$ tenemos que $\|f_m - f_n\|^2 = \|f_m\|^2 + \|f_n\|^2 = 2$ con $m \neq n$

y por lo tanto $\{I f_n\} = \{f_n\}$

no contiene una subsucesión convergente.

La condición de compacticidad para un operador A es bastante fuerte; implica que A es "similar" en su

comportamiento a una transformación actuando en un espacio finito dimensional.

La similaridad puede ser establecida diciendo que A puede ser aproximado por transformaciones cuyo rango es de dimensión finita, (como veremos adelante).

2. EL CONCEPTO DE KERNEL

2.1 Si consideramos un espacio de medida (X, σ, μ) (σ -finita) y consideramos una función medible K en el espacio producto $X \times X$. Podemos pensar en K como la generalización de una matriz. Supongamos que A es un operador en $L^2(\mu)$ cuya relación con K es similar a la relación de un operador con su matriz.

Esto significa que si $f \in L^2(\mu)$

entonces $Af(x) = \int k(x, y) f(y) d\mu(y)$ para casi todo x .

A un operador de este tipo lo llamamos un operador integral y a $k(x, y)$ su kernel.

2.2 La pregunta inmediata ahora es: ¿Bajo qué condiciones induce un kernel un operador?

Como vemos a continuación, una condición suficiente es que $k(x, y)$ sea de cuadrado integrable.

Sea (X, σ, μ) un espacio medida y sea $L^2(\mu \times \mu)$ el espacio complejo sobre el espacio de la medida producto $\mu \times \mu$.

Sea $k(x, y) \in L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$, entonces

$$\int \int |k(x, y)|^2 d_{\mathcal{M}}(x) d_{\mathcal{M}}(y) < \infty$$

y por el teorema de Fubini para integraciones sucesivas

$$\int |k(x, y)|^2 d_{\mathcal{M}}(y)$$

existe para casi todo x .

entonces si $f \in L^2(\mathcal{M})$

$$\int k(x, y) f(y) d_{\mathcal{M}}(y)$$

está bien definida (hasta un conjunto de medida cero).

Por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned} \int \left| \int k(x, y) f(y) d_{\mathcal{M}}(y) \right|^2 d_{\mathcal{M}}(x) &\leq \int \left(\int |k(x, y)|^2 d_{\mathcal{M}}(y) \cdot \int |f(y)|^2 d_{\mathcal{M}}(y) \right) d_{\mathcal{M}}(x) \\ &= \|k\| \|f\|^2 \end{aligned}$$

donde $\|k\|$ es la norma de $k(x, y)$ en $L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$.

Por lo tanto k_f define un operador lineal con kernel K , de $L^2(\mathcal{M})$ en $L^2(\mathcal{M})$.

Sólo nos faltaría demostrar que k_f es lineal, pero esto es consecuencia de las propiedades de la integral.

De la desigualdad anterior tenemos que $\|A\| \leq \|k\|$

2.3 Definición

Operadores integrales sobre $L^2(\mathcal{M})$ con kernel de este tipo (i.e. kernels en $L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$) son llamados Operadores de Hilbert-Schmidt.

La definición anterior para un operador de Hilbert-Schmidt ha sido dada sobre un espacio L^2 con respecto a un espacio medida $(\mathcal{X}, \sigma, \mu)$

Ahora vamos a demostrar que esta definición es equivalente a una definición abstracta válida sobre cualquier espacio de Hilbert.

Si H es un espacio de Hilbert separable entonces H contiene un conjunto contable ortonormal completo (por aplicación del procedimiento de Gram-Schmidt a la condición de separabilidad).

Sea $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ un conjunto completo ortonormal en H .

Como $\forall x \in H \quad x = \sum \langle x, \phi_i \rangle \phi_i$

con convergencia en H (expansión de Fourier)

Mapeamos $x \mapsto (\langle x, \phi_i \rangle)$ que es isomorfismo de H en $l^2(\mathbb{N})$ por Parseval.

Puesto que l^2 es un espacio L^2 (con respecto a la medida contadora) podemos decir que cualquier espacio de Hilbert es equivalente a un espacio L^2 separable.

3. OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

Supongamos que H es un espacio de Hilbert (abstracto) y T un operador en H .

Sea $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal completo (c.o.c.)

3.1 Definición:

Decimos que T es de la clase HS con respecto a $\{\phi_n\}$

si
$$\sum \|\tau \phi_n\|^2 < \infty$$

3.2 Lema:

Si $\{\psi_n\}$ es un conjunto completo ortonormal en H y T es de la clase HS con respecto a $\{\phi_n\}$ entonces T es también de la clase HS respecto a $\{\psi_n\}$.

Prueba: Usando la identidad de Parseval para $T\psi_n$ y luego sumando sobre n , tenemos

$$\begin{aligned} \sum \|\tau \psi_n\|^2 &= \sum_n \sum_m |\langle T\psi_n, \phi_m \rangle|^2 \\ &= \sum_m \sum_n |\langle \psi_n, T^* \phi_m \rangle|^2 = \sum_m \|T^* \phi_m\|^2 \end{aligned}$$

Si tomamos $\psi_n = \phi_n$ tenemos que

$$\sum \|\tau \phi_n\|^2 = \sum \|T^* \phi_n\|^2$$

y para ψ_n diferente de ϕ_n

$$\sum \|\tau \psi_n\|^2 = \sum \|T^* \phi_n\|^2 = \sum \|\tau \phi_n\|^2$$



3.3 Ahora fijemos una base ortonormal $\{\phi_n\}$ en H y supongamos que T es de la clase HS. Definimos un mapeo

$$H \xrightarrow{U} l^2(N) \quad \text{como sigue:}$$

Si $x \in H$ entonces $x = \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$ y por la identidad de Parseval

$$\sum |\langle x, \phi_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

por lo tanto, la sucesión $(\langle x, \phi_n \rangle)_{n=1}^\infty \in l^2(N)$

Definimos el mapeo U como sigue:

$$U(x) = (\langle x, \phi_n \rangle) \in l^2(N)$$

Por el teorema de Parseval y por las propiedades de los conjuntos ortonormales, U es un isomorfismo entre espacios de Hilbert. Vamos a mostrar que $U \tau U^{-1}$ es un mapeo en $l^2(N)$ t.g

si $(s_n) \in l^2(N)$

entonces

$$(U \tau U^{-1})[(s_n)] = \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij} s_j \right)_{i=1}^\infty$$

donde (a_{ij}) (como función de $(i, j) \in N \times N$) está en $l^2(N \times N)$.

$$\text{Sea } \tau \phi_k = \sum_i a_{ik} \phi_i, \quad k=1, 2, \dots$$

Por el isomorfismo $U \exists f \in H$

$$\text{tal que } f \longleftrightarrow (s_k)_{k=1}^\infty \quad ; \quad f = \sum_k (\langle f, \phi_k \rangle) \phi_k$$

$$\text{es decir que } s_k = \langle f, \phi_k \rangle \quad f = \sum_k s_k \phi_k$$

por definición de U ,

$$U^{-1}[(s_k)] = f$$

$$\Rightarrow \quad T U^{-1}[(s_k)] = T f = \sum_i \sum_k a_{ik} s_k \phi_i$$

ξ

$$U T U^{-1}[(s_k)] = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k \right)_{i=1}^{\infty}$$

$(a_{ij}) \in \mathcal{L}^2(N \times N)$ ya que por Parseval

$$\|T \phi_k\| = \sum_i |a_{ik}|^2 < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

y puesto que T es de la clase HS

$$\sum_k \|T \phi_k\|^2 = \sum_i \sum_k |a_{ik}|^2 < \infty$$

Inversamente si (X, σ, μ) es un espacio medida

$K(x, y) \in L^2(X \times X)$ y $\{\phi_n\}$ es una sucesión ortonormal completa en $L^2(X)$ y K es el operador integral

$$K_f(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

entonces K es de la clase HS.

Por la correspondencia que existe entre cualquier espacio L^2 y \mathcal{L}^2 (por medio de la fórmula $f = \sum k_k \phi_k$) que a $f \in L^2$ le hace corresponder $\{k_k\} \in \mathcal{L}^2$ podemos razonar como sigue.

Si $K(x, y)$ es un kernel en L^2 (corresponde al operador K) que está asociado al kernel (k_{ij}) en $\mathcal{L}^2(N \times N)$

entonces
$$\sum \sum |k_{ij}|^2 < \infty$$

Puesto que $(K \phi_k, \phi_i) = k_{ik}$

por Fourier $K\phi_k = \sum_i k_{ik} \phi_i$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j |k_{ij}|^2 = \sum_j \|K\phi_j\|^2 < \infty$$

Es decir que los operadores que son de la clase HS corresponden a una definición abstracta de los operadores de Hilbert-Schmidt.

Por lo anterior es claro que si estudiamos operadores integrales sobre espacios L^2 con kernels en $L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ entonces nuestros resultados pueden ser aplicados a operadores de la clase HS.

4. OPERADORES INTEGRALES SOBRE ESPACIOS L^2

Sea (X, σ, μ) un espacio medida (como siempre μ σ -finita) y $L^2(\mu)$ el espacio de las funciones de cuadrado integrable de valor complejo.

Sea $L^2(\mu \times \mu)$ el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre el espacio medida producto $(X \times X, \sigma \times \sigma, \mu \times \mu)$

Sea $\kappa(x, y) \in L^2(\mu \times \mu)$; definimos $\forall f \in L^2(\mu)$

$$K_f(x) = \int \kappa(x, y) f(y) d\mu(y)$$

Como vimos previamente a la definición de operadores de Hilbert-Schmidt K_f es una transformación lineal acotada de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$

Como dijimos antes a la función $\kappa(x, y) \in L^2(\mu \times \mu)$ la llamamos el kernel de la transformación K_f .

4.1 Definición:

El adjunto A^* del operador acotado A es un espacio de Hilbert H lo definimos por medio de la siguiente ecuación

$$(Af, g) = (f, A^*g) \quad f, g \in H$$

en el caso de un operador K de tipo integral tenemos:

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int \int \kappa(x, y) f(y) \overline{g(x)} d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int \int \overline{\kappa(x, y)} g(y) \overline{f(x)} d\mu(y) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$= (f, A^*g)$$

donde A^* es un operador integral con kernel

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$$

4.2 Concepto de Kernel de Goursat (degenerado)

La teoría de los operadores integrales se simplifica bastante cuando el kernel que genera el operador es de un tipo especial conocido con el nombre de kernel de Goursat (o Kernel degenerado).

4.3 Definición:

Un kernel de Goursat es un kernel que puede ser escrito de la siguiente manera

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^p g_i(x) \overline{h_i(y)}$$

donde $\{g_i\}$ y $\{h_i\}$ son elementos de L^2 .

Siempre podemos asumir que las p funciones g_i son linealmente independientes (l.i.) y la misma suposición podemos hacer con las p funciones h_i .

Supongamos por ejemplo que las p funciones g_i no son linealmente independientes entonces existen $q < p$

funciones g_{i_j} t. q $g_i(x) = \sum_{j=1}^q a_{ij} g_{i_j}(x)$

y por lo tanto podemos escribir el kernel $G(x, y)$ como

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij} g_{i_j}(x) \overline{h_i(y)}$$

cambiando el orden de sumación

$$G(x, \gamma) = \sum_{j=1}^q \left[\sum_{i=1}^p a_{ij} \overline{h_i(\gamma)} \right] g_{ij}(x)$$

si ponemos

$$\left[\sum_{i=1}^p a_{ij} h_i(\gamma) \right] = h_i(\gamma)$$

el kernel $G(x, \gamma)$ queda expresado por q funciones linealmente independientes.

La transformación integral asociada a $G(x, \gamma)$ estará definida por

$$Gf = \sum_{i=1}^p (f, h_i) g_i$$

es decir, cuando el kernel es de Goursat la imagen de $f \in L^2(\mathcal{M})$ bajo el operador integral generado por $G(x, \gamma)$ es una combinación lineal (finita) de las g_i .

Con esto hemos demostrado

Teorema:

Un kernel de Goursat genera un operador de rango finito.

El converso del teorema anterior es cierto pero no vamos a demostrarlo.

4.4 Teorema:

Todo kernel $k(x, y) \in L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ en un intervalo compacto I puede ser aproximado tanto como querramos en el sentido de la métrica del producto escalar en $L^2(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ por kernels de Goursat.

Prueba:

Sea $k_N(x, y) = k(x, y)$ cuando $|k(x, y)| \leq N$ y sea $k_N(x, y) = 0$ cuando $|k(x, y)| > N$

Si N tiende a infinito, la función

$$|k(x, y) - k_N(x, y)|^2 \rightarrow 0 \quad \forall x, y$$

pero permanece mayorizada por la función integrable $2|k(x, y)|^2$.

Por el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, la integral

$$\int \int |k(x, y) - k_N(x, y)|^2 d_{\mathcal{M}}(x) d_{\mathcal{M}}(y)$$

tiende también a cero.

Dado $\epsilon > 0$ podemos escoger N tal que

$$\|k - k_N\| < \epsilon/2$$

La función $k_N(x, y)$ siendo integrable, es el límite de una sucesión $\{\phi_{N,n}(x, y)\}$ de funciones escalonadas que pueden ser escogidas tal que $|\phi_{N,n}(x, y)| \leq N$

(ya que por definición $|k_N| \leq N$)

La sucesión de funciones $|k_N(x, y) - \phi_{N,n}(x, y)|^2$ $n=1, 2, \dots$

está acotada por la función constante $4N^2$

(ya que $\sup |K_N(x, y) - \phi_{N,n}(x, y)| = 2N$)

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} |K_N(x, y) - \phi_{N,n}(x, y)|^2 = 0$$

nuevamente por teorema de Lebesgue la sucesión de integrales tiende a cero. Es decir que para n suficientemente grande $\|K_N - \phi_{N,n}\| < \epsilon/2$

Por la desigualdad triangular tenemos que:

$$\|K - \phi_{N,n}\| \leq \|K - K_N\| + \|K_N - \phi_{N,n}\| < \epsilon$$

y la prueba se completa utilizando el hecho de que toda función escalonada de dos variables x, y puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^r \phi_i(x) \overline{\psi_i(y)} \quad \square$$

4.5 Lema:

Toda transformación de la forma $Hf = (f, g)h$ (con g y h que pertenecen a L^2) es compacta.

Prueba:

Si $\{f_n\}$ es una sucesión en L^2 , por medio del teorema de Bolzano-Weierstrass podemos seleccionar una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}$ para la que (f_{n_k}, g) sea convergente. \square

4.6 Teorema:

Toda transformación de Hilbert-Schmidt es compacta.

Prueba:

Por lema anterior y teorema (1.3) toda transformación de rango finito es compacta.

Por teorema (1.4) el límite uniforme de transformaciones compactas es compacto.

Por lo tanto el teorema (4.4) nos completa la prueba.

□

CAPITULO II

OPERADORES DIFERENCIALES

1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Vamos a considerar sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \end{aligned}$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n son funciones continuas en un intervalo compacto I y las funciones x_1, x_2, \dots, x_n son funciones desconocidas de valor complejo.

Decimos que un conjunto de funciones $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una solución del sistema (1.2) si satisface (1.2) en el intervalo I .

Como es sabido $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ (para cada t) es un elemento del espacio vectorial C^n sobre el campo de los complejos (C).

Sea $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces $\bar{x}(t)$ tiene la derivada

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)$$

Ahora, en términos del sistema (1.2) definamos los vectores

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

con la suposición de que \bar{F} es continua en \bar{x} y t simultaneamente.

Entonces podemos escribir el sistema (1.2) como la ecuación vectorial

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{F}(\bar{x}, t)$$

2. Sistemas de Orden n .

Consideremos la ecuación diferencial de orden n en una incógnita,

$$(2.1) \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} = f(x^{(n-1)}, \dots, x', x, t)$$

esta ecuación puede ser reemplazada por un sistema diferencial de n ecuaciones diferenciales de primer orden con sólo tomar x y sus (n-1) derivadas como nuevas funciones desconocidas x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacen

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_n, \dots, x_2, x_1, t) \end{aligned}$$

vemos que (2.1) y (2.2) son equivalentes, es decir que cualquier solución de (2.1) define una solución de (2.2) y viceversa.

Conclusión de esto es que cualquier sistema diferencial de orden n en varias variables puede ser reducido a un sistema de primer orden siempre y cuando el sistema pueda ser resuelto para la mayor derivada que aparece de cada función incógnita.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es de la forma

$$(3.1) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t)$$

donde a_{ij} y b_i son funciones de valor complejo en $\mathbb{C}(\mathbb{I})$

Si en (3.1) $b_i(t) \equiv 0$

se dice que el sistema es homogéneo. En este caso el sistema (3.1) está completamente determinado por la matriz

$$A(t) = [a_{ij}(t)]$$

(escribimos $A(t)$ para indicar que cada uno de los elementos de la matriz es una función de t).

Ahora podemos definir la transformada de cualquier vector de funciones $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por la matriz $A(t)$ como el vector $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de funciones y_j $j = 1, 2, \dots, n$ cuyas componentes y_i están dadas por

$$(3.2) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i=1, 2, \dots, n$$

Es decir que hemos establecido entre \bar{y} y \bar{x} la siguiente relación

$$\bar{y} = A \bar{x}$$

y por lo tanto el caso homogéneo de (3.1) lo podemos escribir como la ecuación vectorial

$$(3.3) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = A \bar{x}$$

3.4 Teorema

Si t_0 es cualquier número $t_1 < t_0 < t_2$ entonces correspondiendo a cualquier conjunto de números $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ existe una solución única de (3.1)

Satisfaciendo las condiciones iniciales

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

unicamente definido en el intervalo abierto $t_1 < t < t_2$.

Para la prueba nos referimos a Teorema 12 capítulo 2, Hurewicz [1]

3.5 Teorema:

El conjunto de soluciones $\bar{x}(t)$ de (3.5) tiene las siguientes propiedades

(a) $\bar{x}(t) \equiv 0$ siempre es solución

(b) Si $\bar{x}(t_0) = 0$ donde t_0 es algún número en el

intervalo I, entonces $\bar{x}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I$

(c) Cualquier combinación lineal de soluciones es a su vez, solución del sistema.

Prueba:

de (a) por definición de solución

de (b) puesto que $\bar{x}(t) \equiv 0$ es solución y sabemos que la solución con valores iniciales es única. (en el sentido del teorema 3.4)

de (c) puesto que si $\bar{x}(t)$ es solución y c cualquier constante $c \bar{x}(t)$ también es solución.

y si $\bar{x}_1(t)$ y $\bar{x}_2(t)$ son soluciones entonces $\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$ también lo es.

▣

3.6 Teorema:

Sea t_0 cualquier número en el intervalo I.

Sea x_1, x_2, \dots, x_m cualquier conjunto de m soluciones de (3.5)

Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ sea linealmente dependiente en el intervalo I es que los vectores constantes $\bar{x}_1(t_0), \bar{x}_2(t_0), \dots$ sean linealmente dependientes.

Prueba:

Si existe una relación no trivial

$$\sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_i(t) \equiv 0 \quad t \in I$$

entonces a fortiori se cumple para $t = t_0$.

Si suponemos que existe una relación no trivial

$$\sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_i(t_0) = 0$$

entonces la función. $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^m c_i x_i(t)$

es una solución de (3.5) y puesto que desaparece en $t = t_0$ es idénticamente igual a cero $\forall t \in I$. (teorema 3.4)

Por lo que el sistema $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ es linealmente dependiente. \square

3.7 Teorema:

No existe ningún conjunto de soluciones linealmente independientes de (3.5) que tenga más de n miembros.

Prueba:

Si $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ fueran soluciones de (3.5) linealmente independientes (1.i)

los (n+1) vectores constantes $x_i(t_0)_{i=1, \dots, n+1}$ ($t_0 \in I$) con $t = t_0$ serían linealmente independientes

Por el teorema (3.7), lo cual sabemos es imposible puesto que los $\{x_i(t_0)\}_{i=1, \dots, n+1}$ son vectores en un espacio vectorial n dimensional. \square

3.8 Teorema:

Existe un conjunto de soluciones de (3.5) linealmente independiente con n miembros.

Prueba:

* Definamos el conjunto de soluciones \bar{x}_i por

$$\bar{x}_i(t_0) = e_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{con } e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots) \text{ etc.}$$

entonces estos vectores son linealmente independientes. \square

* El conjunto anterior de soluciones \bar{x}_i puede ser así definido utilizando el teorema (3.5)

Un conjunto de n soluciones de (3.5) linealmente independientes se conoce con el nombre de sistema fundamental de soluciones.

4. Propiedades de un Operador Diferencial Formal.

4.1 En esta sección vamos a hacer un breve estudio de los operadores diferenciales, (particularmente de orden 2).

Un "operador" tiene dominio y rango, y hasta que éstos no están definidos no podemos hablar de un operador.

El estudio de los operadores diferenciales se complica por el hecho de ser no acotados. (con las normas que nos interesan) por lo que escoger el dominio del operador no es una tarea simple.

Por supuesto, hay ciertas propiedades de un operador que podemos estudiarlas independientes de su dominio y rango, y es precisamente estas propiedades las que vamos a estudiar utilizando la siguiente:

4.2 Definición:

Un operador formal diferencial de orden n en un intervalo I es una expresión

$$(4.3) \quad \mathcal{L} = a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

tal que las funciones a_i de valor complejo, llamadas funciones coeficiente, pertenecen a $\tilde{C}(I)$ y tal que la función a_n tiene valor distinto de cero en todos los puntos de I .

La situación es esta; hemos definido un "operador formal", es decir una expresión de la forma (4.3).

Esta expresión puede ser "aplicada" a una función f si por ejemplo $f \in C^n$. Pero también podemos aplicar la expresión anterior a clases de funciones con menos elementos.

La noción de un operador formal va a permitirnos entonces, "tantear" el dominio más adecuado para nuestros propósitos.*

Podemos poner, como clase preliminar de funciones a las cuales aplicamos el operador formal τ , al conjunto C^n .

Consideremos el operador formal diferencial de segundo grado ($n=2$)

$$(4.4) \quad \tau = a_2(t) \frac{d^2}{dt^2} + a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t)$$

en un intervalo I .

Podemos definir el operador formal adjunto al operador formal (que denotamos por τ^*) por la siguiente relación

$$(4.5) \quad \tau^* = \frac{d^2}{dt^2} a_2(t) - \frac{d}{dt} a_1(t) + a_0 \quad t \in I$$

* Mi propósito es utilizar la teoría de operadores integrables en el estudio de los operadores diferenciales y por lo tanto buscamos un dominio para un operador diferencial \mathcal{L} tal que su inverso exista y tenga como dominio (rango de \mathcal{L}) al conjunto \mathcal{L}^2 .

Con esta notación queremos decir que si a un determinado $f \in C^2$ podemos aplicarle τ^* , entonces

$$\tau^* f = \frac{d^2}{dt^2}(a_2 f) - \frac{d}{dt}(a_1 f) + a_0 f$$

Definición:

Un operador formal diferencial es formalmente simétrico si $\tau = \tau^*$

Teorema:

Un operador formal diferencial es formalmente simétrico si tiene la forma

$$\varphi f = (p f')' + q f$$

donde p es diferenciable.

Prueba:

Por expansión de φ aplicado a un elemento f , obtenemos

$$\varphi(f) = p' f' + p f'' + q f$$

y de acuerdo a (1) el operador formal adjunto está dado por

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) &= [p f]'' - [p' f]' + q f \\ &= [p' f]' + [p f']' - p' f' \\ &\quad - p'' f + q f \\ &= p' f' + p'' f + p' f' + p f'' \\ &\quad - p' f' - p'' f + q f \\ &= p f'' + p' f' + q f \end{aligned}$$

es decir que

$$\varphi = \varphi^*$$



si
$$\varphi = a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

y
$$\varphi^* = \frac{d^2}{dt^2} a_2 - \frac{d}{dt} a_1 + a_0$$

son iguales, se sigue luego de las diferenciaciones indicadas que $a_0'(t) = a_1(t) = p'(t) \quad \forall t \in I$ \square

Es claro, por el razonamiento de la sección 2 que la ecuación
$$\varphi(f) = 0 \quad (f \in C^2(I))$$

tiene un conjunto solución (cubierta lineal) de dimensión 2.

Ahora vamos a considerar una restricción del conjunto de funciones $C^2(I)$ al cual aplicamos el operador formal φ .

La restricción la hacemos por medio de condiciones de frontera. Esto es, vamos a aplicar nuestro operador formal a un conjunto K de funciones f que además de pertenecer a $C^2(I)$ cumplen con ciertas condiciones de frontera.

4.9 Definición:

Al anterior conjunto K de funciones vamos a conocerlo con el nombre de "conjunto solución del problema de frontera".

Decimos que en un conjunto de condiciones de frontera

estas son suficientes si el conjunto solución de $\mathcal{P}(f) = 0$ es el subespacio trivial, donde el conjunto de funciones al cual aplicamos el operador, es el conjunto solución del problema de frontera.

4.10 Ejemplo:

Sea $L_x = \frac{d^2}{dx^2}$ (un operador formal) y las condiciones de frontera $\psi(0) = \psi(1) = 0$

Si consideramos la aplicación del operador L_x a funciones en $C^2(I)$ es claro que toda función que pertenece al conjunto solución $L_x(f) = 0$ tiene la forma $C_1x + C_2$ y si las condiciones de frontera son satisfechas

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 = 0$$

que implica que $C_1 = C_2 = 0$

y por lo tanto estas condiciones de frontera son suficientes.

4.11 Ejemplo:

$L_x = \frac{d^2}{dx^2}$ (operador formal) con las condiciones de frontera $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$

En este caso las condiciones de frontera no son suficientes ya que por ejemplo $f(x) = 1$ pertenece al conjunto solución de $L_x(f) = 0$ y satisface las condiciones de frontera.

4.12 Ejemplo:

Sea $L_x = \frac{d}{dx}$ (operador formal)

con las condiciones de frontera $f(0) = f(1) = 0$

Sea $f \in C^2(I)$

En este caso si f pertenece al conjunto solución de $L_x(f) = 0$ entonces $f \equiv C$; C es una constante.

Pero si se satisfacen las condiciones de frontera, debemos tener que $C = 0$ y por lo tanto las condiciones de frontera son suficientes.

5. El Problema de la frontera del tipo de Sturm Liouville

Consideremos el operador formal (aplicado a una función

ψ en $C^2(I)$)

$$(5.1) \quad L(\psi) = (p\psi')' + q\psi$$

y la ecuación siguiente asociada con este operador

$$(5.2) \quad (p\psi')' - q\psi = 0$$

El problema de la frontera del tipo de Sturm Liouville consiste en encontrar soluciones no triviales de la ecuación (5.2) que satisface las condiciones de frontera

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \alpha p(a) \psi'(a) - \beta \psi(a) &= 0 \\ \gamma p(b) \psi'(b) - \theta \psi(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde a, b son los puntos términos del intervalo y $\alpha, \beta, \gamma, \theta$, constantes reales.

5.4 Ejemplo:

El ejemplo de la frontera

$$L\psi = -\psi'' \quad ; \quad \psi(0) = \psi(1) = 0$$

en el intervalo $[0, 1]$

Este problema es del tipo de Sturm-Liouville con

$a=0, b=1, p=1, \alpha=0, \gamma=0, \beta=-1, \theta=-1$.

Consideremos nuevamente el operador formal

$$L_x(y) = (p(t)y')' - qy$$

para $y, z \in C^2[a, b]$

$$L_x(y) = (py')' - qy$$

$$L_x(z) = (pz')' - qz$$

entonces

$$\begin{aligned} (5.5) \quad yL_x(z) - zL_x(y) &= y \frac{d}{dx} (pz' - yqz) \\ &\quad - z (py' + yqz)' \\ &= [yz' - zy'] p' \\ &\quad + p[yz'' - zy''] \\ &= p[yz' - zy']' \\ &\quad + [yz' - zy'] p' \\ &= (p[yz' - zy'])' \end{aligned}$$

conocida como la identidad de Lagrange.

Como consecuencia de la identidad (5.5) tenemos

$$\begin{aligned} (5.6) \quad p(x) (y(x)z'(x) - y'(x)z(x)) \Big|_{a'}^{b'} \\ = \int_{a'}^{b'} \{ y(x)L_x(z) - z(x)L_x(y) \} dx ; \quad a \leq a' < b' \leq b \end{aligned}$$

que es conocida como la fórmula de Green.

5.7 Ahora bien, si dos funciones γ, z satisfacen las condiciones de frontera (5.3) entonces el lado izquierdo de (5.6) es cero. (Despejando $\gamma'(a), z'(a)$ $\gamma'(b)$ y $z'(b)$ de (5.3) y sustituyendo en (5.6)).

6. Función de Green

6.1 Lo que vamos a hacer en este párrafo es encontrar un método para resolver la ecuación lineal no homogénea $L_x(\psi) = \phi$ a través de una función asociada con el problema de frontera de Sturm-Liouville y conocida como la función de Green.

Supongamos que dos funciones $\psi_1 \neq 0$ y $\psi_2 \neq 0$ son linealmente independientes y satisfacen

$$(6.2) \quad \begin{aligned} L_x(\psi_1) &= 0 \\ \alpha p(a) \psi_1'(a) - \beta \psi_1(a) &= 0 \end{aligned}$$

$$(6.3) \quad \begin{aligned} L_x(\psi_2) &= 0 \\ \gamma p(b) \psi_2'(b) - \theta \psi_2(b) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } C = p(t) [\psi_1(t) \psi_2'(t) - \psi_1'(t) \psi_2(t)]$$

vemos que C es una constante no cero (diferenciando C respecto a t y haciendo uso de (5.5) y luego de (6.2) & (6.3), que C es distinto de cero es consecuencia de la independencia lineal de ψ_1 y ψ_2 .

Definamos la función de dos variables x & t por

$$(6.4) \quad G(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{C} \overline{\psi_1(t)} \psi_2(x) \\ -\frac{1}{C} \psi_1(x) \overline{\psi_2(t)} \end{cases}$$

La función G es llamada la función de Green para el problema de frontera de Sturm-Liouville.

6.5 Teorema:

La función de Green tiene las siguientes propiedades:

a) G satisface

$$L_x(G) = 0 \text{ como función de } x \quad \forall x \neq t$$

b) G es continua en $[a, b] \times [a, b]$

c) satisface las condiciones de frontera (escribimos

$$G_t(x) = G(x, t) \text{) además, } G_t \text{ es diferenciable y } G_t \text{ es acotada.}$$

d) si $a < x_0 < b$ conforme $x \rightarrow x_0, t \rightarrow t_0$

$$G'_t(x) \text{ tiende a } G'_{x_0}(x_0) \text{ si mantenemos } x > t$$
$$\text{y conforme } x \rightarrow x_0, t \rightarrow t_0, G'_t \text{ tiende a}$$
$$G'_{x_0}(x_0-0) \text{ si mantenemos } x < t$$
$$\text{Además } G'_{x_0}(x_0+0) - G'_{x_0}(x_0-0) = \frac{-1}{\rho(x_0)}$$

e) $G(x, t) = \overline{G(t, x)}$

Prueba:

La demostración de los incisos a-c y e es inmediata de la definición.

La demostración del inciso (d) es consecuencia de

$$G'_{x_0}(x_0+0) = -\frac{1}{c} \gamma_1(x_0) \gamma_2'(x_0)$$

$$G'_{x_0}(x_0-0) = -\frac{1}{c} \gamma_1'(x_0) \gamma_2(x_0) \quad \square$$

6.6 Teorema:

Sea ϕ una función de cuadrado integrable ($\phi \in L^2(\mathcal{M})$) definida en $[a, b]$. (\mathcal{M} es medida de Lebesgue en $I = [a, b]$)

6.7 Si ψ es solución de la ecuación $L_x(\psi) = -\phi$

que satisface las condiciones de frontera (5.3) entonces $\gamma(x)$ podemos escribirlo en la forma

$$(6.8) \quad \gamma(x) = \int G(x, t) \phi(t) dt \quad \text{a.e.}$$

inversamente, $\gamma(x)$ dada por (6.8) satisface la ecuación (6.7) y las condiciones de frontera (5.3).

Previo a la demostración del teorema hacemos ver lo siguiente, ya que G es continua en $[a, b] \times [a, b]$

G^2 es continua y por lo tanto $G \in L^2(M \times M)$.

Por el teorema de Fubini $G_x \in L(M)$.

Prueba:

Aplicamos la fórmula de Green a las funciones γ ξ $z = G_t$ y obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_a^{t-0} \left\{ \gamma(x) L_x(G(x, t)) - G(x, t) L_x(\gamma) \right\} dx \\ + & \int_{t+0}^b \left\{ \gamma(x) L_x(G(x, t)) - G(x, t) L_x(\gamma) \right\} dx \\ = & \left[p(x) \left(\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) - \gamma'(x) G(x, t) \right) \right]_a^{t-0} \\ + & \left[p(x) \left(\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) - \gamma'(x) G(x, t) \right) \right]_{t+0}^b \\ \forall t, & \quad a < t < b \end{aligned}$$

la ecuación (6.7) junto con la propiedad (a) del teorema (6.5) implica que el lado izquierdo es igual a

$$\int_a^b G(x, t) \phi(x) dx$$

...por otra parte (b) & (d) del teorema (6.5) implican que el lado derecho es igual a $\psi(t)$

(tomando en cuenta que

$$G'_t(a) = G'_t(b) = 0$$

por lo tanto

$$\psi(t) = \int_a^b G(x, t) \phi(x) dx \quad a < t < b$$

y por (e) del teorema (6.5) se sigue la primera parte.

Inversamente, por (6.4)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{c} \psi_2(x) \int_a^x \psi_1(t) \phi(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{c} \psi_1(x) \int_x^b \psi_2(t) \phi(t) dt \end{aligned}$$

De lo que obtenemos * (teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue)

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= -\frac{1}{c} \psi_2'(x) \int_a^x \psi_1(t) \phi(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{c} \psi_2(x) \psi_1(x) \phi(x) \\ &\quad - \frac{1}{c} \psi_1'(x) \int_x^b \psi_2(t) \phi(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{c} \psi_1(x) \psi_2(x) \phi(x) \\ &= -\frac{1}{c} \psi_2'(x) \int_a^x \psi_1(t) \phi(t) dt - \frac{1}{c} \psi_1'(x) \int_x^b \psi_2(t) \phi(t) dt \text{ a.e.} \\ &= \int_a^{x-0} \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \phi(t) dt + \int_{x+0}^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \phi(t) dt \text{ a.e.} \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \phi(t) dt \text{ a.e.} \end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$(p(x) \psi'(x))' = \int_a^b \left\{ p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \right\} \phi(t) dt + p(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \phi(t) \right]_{t=x-0}^{t=x+0} \text{ a.e.}$$

utilizando (d) del teorema (6.5) el segundo término

del lado derecho es igual a $-\phi(x)$ a.e.

* Teorema 9 cap. 5 Royden [1].

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L_x(y) &= (p y')' - q y \\ &= \int_a^b \left\{ p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) \right\} \phi(t) dt - \phi(x) - q(x) \int_a^b G(x,t) \phi(t) dt \\ &= \int_a^b \left\{ p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) \right\} - q(x) G(x,t) \Big\} \phi(t) dt \\ &= \int_a^b L_x(G(x,t)) \phi(t) dt - \phi(x) = -\phi(x) \end{aligned}$$

utilizando (a) teorema (6.5).



El teorema (6.6) es crucial. Con este resultado podemos unificar el contenido de esta sección utilizando la teoría de operadores.

Sea un conjunto de condiciones de frontera B , que con un operador formal es un problema de frontera de Sturm-Liouville. Sea \mathcal{D} el conjunto solución del problema de frontera y \mathcal{L} el operador L restringido a \mathcal{D} . Entonces

$$\mathcal{L}(f) \in L^2 \text{ puesto que } f \in \mathcal{D}$$

esto es, el rango de \mathcal{L} está contenido en L^2 . Por el teorema (6.6) $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = L^2$

Considerando \mathcal{D} como un subconjunto de L^2 podemos referirnos a (5.70) para mostrar que \mathcal{L} es simétrico. Es más, el inverso de \mathcal{L} existe (condiciones de frontera suficientes) y es un operador de Hilbert-Schmidt.

En la siguiente sección estudiaremos otro tipo de problemas de frontera que generan operadores con inversos de Hilbert-Schmidt.

6.9 Ejemplos de Funciones de Green.

1. $L_x = \psi''$; $\psi(0) = \psi(1) = 0$

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-t)x & x \leq t \\ (1-x)t & x > t \end{cases}$$

2. $L_x = \psi''$; $\psi(0) = \psi'(0) = 0$

$$G(x,t) = \begin{cases} x & x \leq t \\ t & x > t \end{cases}$$

Para calcular estas funciones hacemos lo siguiente.

- a) vemos que significan las condiciones de frontera de acuerdo a (5.3)
- b) suponemos una ψ_1 y una ψ_2 linealmente independientes y comprobamos que cumple (6.2) & (6.3).
- c) construimos $G(x,t)$ por (6.4)

Podemos definir la función de Green para un determinado problema de frontera como aquella función que cumple condiciones del teorema (6.5).

Cuando la función de Green existe y se cumple el teorema (6.6) afirmamos la existencia del operador inverso como un operador de Hilbert-Schmidt.

7. Condiciones de Periodicidad Generalizadas.

7.1 Las siguientes condiciones de frontera

$$\gamma(a) = \gamma(b) \quad ; \quad \gamma'(a) = \gamma'(b)$$

son conocidas con el nombre de condiciones de periodicidad; ya que si los coeficientes p, q (ver (5.2)) son funciones periódicas con períodos $b-a$ esto es

$$p(x + b - a) = p(x)$$

$$q(x + b - a) = q(x)$$

entonces las condiciones (7.1) nos dicen que la solución de la ecuación (5.5) es periódica, con el mismo período $b-a$

esto es

$$\gamma(x + b - a) = \gamma(x)$$

En esta sección vamos a tratar condiciones más generales (que incluyen condiciones (7.1), de la forma

$$(7.2) \quad \psi(a) = r \psi(b) \quad , \quad p(a) \psi'(a) = \frac{p(b)}{r} \psi'(b)$$

donde r es una constante distinta de cero.

Como en el caso de las condiciones de frontera (5.3), podemos ver que si ψ y z satisfacen (7.2) entonces

$$p(x) (\psi(x) z'(x) - \psi'(x) z(x)) \Big|_a^b = 0$$

Nos interesa demostrar que para estas condiciones de frontera se cumple el teorema (6.6).

La primera parte es enteramente similar que para las condiciones (5.3).

Para probar la segunda parte (el inverso) principiamos con

$$\psi(x) = \int_a^b G(x,t) \phi(t) dt$$

diferenciando a ambos lados tenemos

$$\frac{d}{dx} \psi = \int_a^{x-\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} G(x,t) \right) \phi(t) dt + \int_{x+\delta}^b \left(\frac{\partial}{\partial x} G(x,t) \right) \phi(t) dt \quad \text{a.c.}$$

para $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{p(x+\delta) \psi'(x+\delta) - p(x) \psi'(x)}{\delta} \\ &= \int_a^x \frac{1}{\delta} \left\{ p(x+\delta) G'_t(x+\delta) - p(x) G'_t(x) \right\} \phi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} p(x+\delta) G'_t(x+\delta) \phi(t) dt \\
 & - \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} p(x) G'_t(x) \phi(t) dt \\
 & + \int_{x+\delta}^b \frac{1}{\delta} \left\{ p(x+\delta) G'_t(x+\delta) - p(x) G'_t(x) \right\} \phi(t) dt \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{a.e.}
 \end{aligned}$$

cuando $\delta \searrow 0$ esto converge a

$$\begin{aligned}
 & \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) G'_t(x) \right\} \phi(t) dt + p(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} G(x+\delta, t) \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial x} G(x, t+\delta) \right\} \phi(x) + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \right\} \phi(t) dt
 \end{aligned}$$

similarmente podemos probar que cuando $\delta \nearrow 0$

$$\frac{p(x+\delta) y'(x+\delta) - p(x) y'(x)}{\delta}$$

converge al mismo limite.

Por lo tanto la primera derivada de $p(x) y'(x)$ existe y

$$(p(x) y'(x))' = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \right\} \phi(t) dt - \phi(x)$$

nuevamente por (a) del teorema (6.5) $y(x)$ es solución

de la ecuación $L_x(y) = -\phi(x)$ a.e.

puesto que G_t satisface las condiciones (7.2)

$\forall t, a < t < b$ (inciso (b) del teorema (6.5)) $y(x)$ también

satisface las condiciones de frontera.

Construcción de la Función de Green.

Supongamos que la función de Green existe para un determinado problema de frontera (asociado a un operador formal L_x) Puesto que (ver teor. 6.5) $G_t \in \{ \text{conjunto solución de } L_x(f) = 0 \}$ podemos representarlo como combinación lineal de un conjunto fundamental de soluciones

$$(7.4) \quad G(x, t) = \begin{cases} C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) & a \leq x < t \\ C_3 \psi_1(x) + C_4 \psi_2(x) & t < x \leq b \end{cases}$$

donde C_i es una función de t . ($\forall i = 1, 2, 3, 4$)

Ahora determinamos las relaciones entre los C_i para que G satisfaga las propiedades requeridas para una función de Green (teor. 6.5) y tal que se cumple teorema (6.6).

Puesto que G_t es continua en $x = t$

$$(7.5) \quad C_1 \psi_1(t) + C_2 \psi_2(t) = C_3 \psi_1(t) + C_4 \psi_2(t)$$

además debe cumplir propiedad d-teorema (6.5)

$$(7.6) \quad C_1 \psi_1'(t) + C_2 \psi_2'(t) - C_3 \psi_1'(t) - C_4 \psi_2'(t) = \frac{1}{p(t)}$$

y finalmente debe satisfacer las condiciones de frontera para obtener un sistema de dos ecuaciones l.i. que podemos llamar (7.7). Si existe un conjunto de funciones C_1, C_2, C_3, C_4 que satisfacen (7.5)-(7.7) entonces la función dada por (7.4) es la función requerida que cumple el teorema (6.6).

Si este conjunto de funciones no es único existe al menos dos funciones que satisfacen (7.5)-(7.7). La diferencia de ambas debe pertenecer al conjunto solución del problema de frontera.

El razonamiento anterior nos lleva al muy importante

7.8 Teorema

La función de Green para un problema de frontera si existe, está únicamente determinada si las condiciones de frontera son suficientes.

Ejemplo 1

El problema de la frontera

$$L_x(\psi) = \psi''$$

$$\psi(0) = -\psi(1)$$

$$\psi'(0) = -\psi'(1)$$

puesto que las condiciones de frontera son suficientes (ya que la solución de $\psi'' = 0$ es de la forma $C_1 x + C_2$ y las condiciones de frontera implican que $C_1 = C_2 = 0$ (ver ej. (4.10)

podemos aplicar el procedimiento anterior para este problema. Como un sistema fundamental de soluciones

de $\psi'' = 0$ podemos tomar $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = 1$
 $\forall x \in [0, 1]$

con lo que obtenemos las siguientes relaciones correspondientes a (7.5)-(7.7)

$$C_1 t + C_2 = C_3 t + C_4$$

$$C_1 - C_3 = 1$$

$$C_2 = - (C_3 + C_4)$$

$$C_1 = - C_3$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$C_1 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{4} - \frac{t}{2}$$

$$C_3 = -\frac{1}{2}$$

$$C_4 = \frac{1}{4} + \frac{t}{2}$$

y por lo tanto

$$G(x, t) = -\frac{1}{2} |x - t| + \frac{1}{4}$$

Si consideramos nuevamente el ejemplo (4.12) vemos que en este caso el operador \mathcal{L} está bien definido y existe el operador inverso. Pero el rango de \mathcal{L} no es todo L^2 , sino un subconjunto de las funciones continuas

En este capítulo hemos mostrado que para una gran cantidad de problemas de frontera, podemos construir un operador inverso que tiene la forma de un operador de Hilbert Schmidt.

En el siguiente capítulo analizamos la descomposición de tales operadores.

CAPITULO III

TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES COMPACTOS AUTOADJUNTOS

1. Eigenvalores y Eigenfunciones de un Operador Lineal.

En el primer capítulo definimos un operador compacto como aquel que para cada sucesión de elementos $\{f_n\}$ cumple con que la sucesión $\{T f_n\}$ contiene una subsucesión convergente en H . Definimos también para un operador acotado T sobre H el operador adjunto T^* por la relación $(T f, g) = (f, T^* g) \quad \forall f, g \in H$. Dijimos que T es autoadjunto cuando $T^* = T$.

Sea T una transformación de un espacio de Hilbert.

Un número complejo μ es un eigenvalor de un operador lineal T si existe $f \in H, f \neq 0$ t. q

$$(1.1) \quad T f = \mu f$$

cada una de las soluciones no cero de (1.1) es llamada un eigenvector del operador T , (más precisamente f es un eigenvector correspondiente a μ)

Para cada eigenvalor fijo μ de T el conjunto de todos los vectores que satisfacen (1.1) es una cubierta lineal que contiene por lo menos un vector no cero. En el caso en que T es continuo este conjunto es siempre cerrado (ya que es la imagen inversa bajo $(T - \mu)$ del conjunto cerrado $\{0\}$) y por lo tanto un subespacio. (también llamado subespacio característico).

Decimos que un subespacio $H_1 \subset H$ es un subespacio invariante del operador T si cada elemento de H_1 es mapeado por T en un elemento también de H_1 . Es claro que los subespacios característicos son subespacios invariantes.

La multiplicidad de un eigenvalor está definida como la dimensión (finita o infinita) del correspondiente subespacio característico.

Vamos a restringirnos a trabajar con operadores autoadjuntos acotados. Esto es transformaciones A para las cuales $(Af, g) = (f, Ag)$

- 1.2 Sea A una transformación lineal autoadjunta y acotada (en H) entonces, el producto escalar (Af, f) siempre es un número real

$$\text{puesto que } (Af, f) = (f, A^*f) = \overline{(Af, f)}$$

Esto implica que los eigenvalores de este tipo de transformaciones son números reales puesto que si μ es

un eigenvalor, tenemos que $\mu = \frac{(Af, f)}{(f, f)}$

1.3 Teorema

Dos eigenvectores (de A) correspondientes a diferentes eigenvalores μ_1 y μ_2 son ortogonales

Prueba

Sea $Af_1 = \mu_1 f_1$, $Af_2 = \mu_2 f_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\begin{aligned} \text{entonces } \mu_1 (f_1, f_2) &= (\mu_1 f_1, f_2) = (Af_1, f_2) \\ &= (f_1, Af_2) = (f_1, \mu_2 f_2) = \mu_2 (f_1, f_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2)(f_1, f_2) = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2 \quad \square$$

1.4 Consideremos nuevamente la forma cuadrática (Af, f)

obviamente tenemos

$$|(Af, f)| \leq \|Af\| \|f\| \leq \|A\| \|f\|^2$$

definamos una constante N_A tal que N_A es la menor constante para la cual la igualdad

$$|(Af, f)| \leq N_A \|f\|^2 \text{ es cierta } \forall f \in H$$

es claro que

$$N_A \leq \|A\|$$

1.5 Teorema

Si A es una transformación autoadjunta entonces

$$N_A = \|A\|$$

Prueba:

ya que $(A^2 f, f) = (Af, Af)$

para $\lambda > 0$ y arbitrario

$$\begin{aligned}\|Af\|^2 &= \frac{1}{4} \left[(A(\lambda f + \frac{1}{\lambda} Af), \lambda f + \frac{1}{\lambda} Af) \right. \\ &\quad \left. - (A(\lambda f - \frac{1}{\lambda} Af), \lambda f - \frac{1}{\lambda} Af) \right] \\ &\leq \frac{1}{4} \left[N_A \|\lambda f + \frac{1}{\lambda} Af\|^2 + N_A \|\lambda f - \frac{1}{\lambda} Af\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} N_A \left[\lambda^2 \|f\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|Af\|^2 \right]\end{aligned}$$

cuando $\|Af\| \neq 0$ el mínimo del último miembro corresponde a

$$\lambda^2 = \frac{\|Af\|}{\|f\|}$$

que da

$$\|Af\|^2 = N_A \|Af\| \|f\| \quad \text{i.e.} \quad \|Af\| \leq N_A \|f\|$$

la igualdad es válida por supuesto si $\|Af\| = 0$ que prueba que

$$\|A\| \leq N_A$$

comparando esta igualdad con la anterior ($N_A \leq \|A\|$) tenemos que

$$N_A = \|A\| \quad \square$$

De acuerdo al resultado del teorema (1.5) se sigue que para elementos $f \in H$ tal que $\|f\| = 1$ y un operador compacto A se cumple que

$$(1.6) \quad \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| = \|A\| > 0$$

Este hecho lo vamos a utilizar en la demostración del siguiente

1.7 Teorema

Si A es un operador compacto autoadjunto no cero en un espacio de Hilbert H , A tiene por lo menos un eigenvalor distinto de cero.

Prueba:

utilizando ecuación (1.6) y por la definición del supremo, se sigue que existe una sucesión $\{f_n\}$ de elementos $\|f_n\| = 1$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A f_n, f_n)$$

existe y es igual a $\|A\|$ o $-\|A\|$ llamemos a este límite distinto de cero por μ_1 .

Puesto que A es compacto, la sucesión $\{f_n\}_1^\infty$ tiene una subsucesión $\{g_i\}_1^\infty$ tal que

$$(1.8) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A g_i = h \text{ existe.}$$

De la ecuación

$$\|A g_i - \mu_1 g_i\|^2 = \|A g_i\|^2 - 2\mu_1 (A g_i, g_i) + \mu_1^2$$

se sigue que

$$(1.9) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|A g_i - \mu_1 g_i\|^2 = \|h\|^2 - 2\mu_1^2 + \mu_1^2 = \|h\|^2 - \mu_1^2$$

puesto que

$$\|A g_i\| \leq \|A\| \|g_i\| = \|A\| = |\mu_1|$$

ecuación (1.11) nos dice que $\|h\| \leq |\mu_1|$ y puesto que en (1.12) el lado izquierdo es no negativo, entonces

la ecuación (1.12) se transforma en

$$(1.10) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \| A g_i - \mu_i g_i \| = 0$$

se sigue de (1.8) y (1.10) que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_i$$

existe y es igual a $\frac{h}{\mu_1}$

Definamos el vector $e = \frac{h}{\mu_1}$

de (1.6) y (1.9) tenemos

$$Ae - \mu_1 e = 0$$

y por lo tanto hemos demostrado el teorema.

Con el resultado anterior podemos razonar de la siguiente manera: correspondiente al eigenvalor μ_1 existe por lo menos un eigenvector ϕ_1 .

Consideremos el subespacio H_1 de H que consiste de todos los elementos que son ortogonales a ϕ_1 .

puesto que

$$\begin{aligned} (A f, \phi_1) &= (f, A \phi_1) = (f, \mu_1 \phi_1) \\ &= \mu_1 (f, \phi_1) = 0 \quad (f \in H_1) \end{aligned}$$

$$A f \in H_1 \text{ con } f \in H_1$$

i.e. H_1 es un subespacio invariante del operador A .

Considerando A como una transformación en H_1 vemos que es autoadjunta y compacta.

Aplicando nuevamente el teorema 1.7 al operador $A: H_1 \rightarrow H_1$

sabemos que existe un eigenvalor μ_2 correspondiente a un eigenvector $\phi_2 \in H_1$ t. q $\|\phi_2\| = 1$

$$\mu_2 = \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)| ; f \in H_1$$

repetiendo este procedimiento para un subespacio H_2 de elementos simultaneamente ortogonales a ϕ_1 y ϕ_2 obtenemos un nuevo eigenvector $\phi_3 \in H_3$ y un eigenvalor asociado μ_3 .

En general, conocidos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ eigenvectores ortogonales, el elemento ϕ_n es obtenido por la solución del problema

$$\sup_{\|f\|=1} |(Af, f)| = |\mu_n| ; (f, \phi_i) = 0 \quad i=1, \dots, (n-1)$$

Este procedimiento nos proporciona ($\dim H = \infty$) una sucesión ortonormal de eigenvectores.

Evidentemente para los eigenvalores μ_n tenemos

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$$

Es más

$$\mu_n \rightarrow 0$$

si esto no fuera así, la sucesión $\left\{ \frac{1}{\mu_n} \phi_n \right\}$ seria acotada.

La imagen de esta sucesión bajo A es la sucesión

$\{ \phi_n \}$ que debería tener una subsucesión convergente, y esto es imposible ya que $\|\phi_i - \phi_k\|^2 = 2 \quad i \neq k$

Sea $f \in H$ y sea

$$g_n = f - \sum_{i=1}^n (f, \phi_i) \phi_i$$

puesto que si $j \leq n$

$$\begin{aligned}
(g_n, \phi_j) &= (f, \phi_j) - \sum_{i=1}^n (f, \phi_i) (\phi_i, \phi_j) \\
&= (f, \phi_j) - (f, \phi_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

g_n es ortogonal a los elementos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ i.e.

$g_n \in H_n$ y por lo tanto tenemos

$$\|A g_n\| \leq |\mu_{n+1}| \|g_n\|$$

puesto que además

$$\|g_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_i |(f, \phi_i)|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\text{y } \mu_{n+1} \rightarrow 0$$

se sigue que $(\|A g_n\| \rightarrow 0)$

$$A g_n = A f - \sum_{i=0}^n (f, \phi_i) A \phi_i \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$

que podemos escribirlo

$$(1.11) \quad A f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \phi_i) \phi_i = \sum_i (A f, \phi_i) \phi_i$$

Supongamos que por el método anterior no hemos encontrado todos los eigenvalores de A .

sea ξ uno de esos eigenvalores y Θ un eigenvector correspondiente a ξ . ($\Theta \neq 0$)

utilizando la fórmula (1.11) para $f = \Theta$ llegamos a una contradicción.

Es más, los eigenvalores tienen multiplicidad finita.

Si por ejemplo μ_ν tuviera multiplicidad no finita

existiría una sucesión de eigenvectores que contradeciría la compacticidad de A (ya que si $\{\phi_i\}$ es una sucesión de eigenvectores asociada a μ_i , $\{T\phi_i\} = \{\mu_i \phi_i\}$ no converge necesariamente).

Aún más, puesto que H es completo

$$\sum_{i=1}^{\infty} (g, \phi_i) \phi_i \text{ es convergente } \forall g \in H.$$

Sea

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (g, \phi_i) \phi_i$$

apliquemos la transformación A a ambos lados de la igualdad y tenemos

$$(1.12) \quad Af = \sum_i \mu_i (g, \phi_i) \phi_i$$

y de acuerdo al hecho demostrado antes

$$Ag = \sum_i \mu_i (g, \phi_i) \phi_i$$

si A es inyectivo (i.e. si $\text{Ker } A = \{0\}$)

Esta condición es equivalente al hecho de que 0 no sea un eigenvalor de A .

Dicho de otra manera, si $g \in (\text{ker } A)^\perp$ entonces el límite de la serie f es g .

Sea $h \in \text{ker } A$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (Ah, \phi_i) = (h, A\phi_i) \\ &= \mu_i (h, \phi_i) \end{aligned}$$

\Rightarrow h es ortogonal a todos los $\phi_i \neq 0$

CAPITULO IV
APLICACIONES

Vamos a establecer a través de un teorema final una relación muy útil entre operadores diferenciales y operadores integrales.

Previo al teorema veamos lo siguiente.

El teorema 7.8 cap. II hicimos ver que si la función de Green existe para un determinado problema de frontera, ésta es única si las condiciones de frontera son suficientes.

Cuando las condiciones no son suficientes $\text{Ker } \mathcal{L} \neq \{0\}$
entonces $\mathcal{L}(f) = 0$ con $f \neq 0$
i.e. 0 es un eigenvalor de \mathcal{L} .

Consideremos un problema de frontera para el que la función de Green existe. Sea D el conjunto solución del problema de frontera, \mathcal{L} un operador diferencial definido sobre D y \mathcal{K} el operador integral definido por la función de Green. El dominio de \mathcal{K}

es L^2 . Los eigenvectores (ϕ_n) de K son un conjunto completo en $(\ker K)^\perp$ pero no necesariamente en todo L^2 ; de acuerdo al teorema 6.6 el inverso de K es \mathcal{L} (esto dice que cero no es un eigenvalor de K) consecuentemente, cuando aplicamos el teorema espectral a operadores integrales determinados por funciones de Green asociados con problemas de frontera, el conjunto de eigenvectores es completo en L^2 .

Consideremos un problema de frontera en un intervalo compacto I , dado por un operador diferencial formalmente simétrico L y un conjunto de condiciones de frontera que definen un conjunto solución del problema de frontera D . Suponemos que las condiciones de frontera son tales que la función de Green existe y es única.

Como hemos visto, esto implica que $\mathcal{L}(D) = L^2$ y el operador integral K definido por la función de Green es el inverso del operador $\mathcal{L}: D \rightarrow L^2$

Vimos también que estas hipótesis son satisfechas para la clase de problemas de Sturm-Liouville y de periodicidad.

Consideremos el operador $K = \mathcal{L}^{-1}$ que es de Hilbert-Schmidt y por lo tanto compacto.

El teorema espectral para operadores compactos nos dice que el conjunto (ϕ_n) de eigenfunciones es un c.o.c.

Consideremos $\phi \in L^2$ y $u \in L^2$

entonces

$$u = \sum_n a_n \phi_n$$

$$\phi = \sum_n c_n \phi_n$$

puesto que

$$K = \mathcal{L}^{-1}; \quad K\phi = u$$

y por lo tanto $K(\sum c_n \phi_n) = \sum a_n \phi_n$

puesto que K es continuo

$$K(\sum c_n \phi_n) = \sum_n K c_n \phi_n$$

$$= \sum a_n \phi_n$$

$$\Rightarrow \sum_n \lambda_n c_n \phi_n = \sum_n a_n \phi_n$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{a_n}{\lambda_n}$$

$$(1.4) \quad \phi = \sum_n \frac{a_n}{\lambda_n} \phi_n$$

Es decir que el hecho tan importante de saber cuando un conjunto de eigenfunciones normalizadas es un c.o.c. para un operador diferencial \mathcal{L} lo podemos contestar afirmativamente si encontramos que existe el operador inverso y éste es un operador de Hilbert-Schmidt.

Es más, la imagen de u bajo \mathcal{L} está dada por (1.4)

1.5 Teorema

El conjunto de eigenfunciones del operador diferencial

\mathcal{L} determinado por las condiciones de frontera (5.3)

es un c.o.c.

Prueba:

es consecuencia de (5.7) y (6.6) cap. II, y de que las eigenfunciones de K y \mathcal{L} son las mismas.

El mismo teorema es válido para las condiciones de frontera (7.2) cap. II (demostramos que 5.7 y 6.6 son válidas para esas condiciones de frontera también)

Aplicaciones del Teorema

$$\begin{aligned} 1.6 \quad & \mathcal{L} y = -y'' \\ & y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}$$

Por un cálculo elemental vemos que los eigenvalores del operador \mathcal{L} determinado por el problema de frontera (1.6) corresponden a $\lambda = \pi^2 k^2$, $k = 1, 2, \dots$ las eigenfunciones normalizadas que corresponden, serían

$$\chi_k(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Las condiciones de frontera de este ejemplo son del tipo de Sturm-Liouville (5.3) y por lo tanto el teorema nos dice que el conjunto $\{\chi_k\}$ es c.o.c.

Ejemplo

$$\begin{aligned} 1.7 \quad & \mathcal{L}(y) = iy' \\ & y(0) = y(1) \end{aligned}$$

en este caso los eigenvalores* son $\lambda = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots$
y las eigenfunciones son $\psi_k(x) = e^{-2\pi i k x}$

las condiciones de frontera son del tipo (7.2) y por lo tanto el teorema nos dice que también en este caso

$$\{\psi_k\}_{k=1,2,\dots} \text{ es un c.o.c.}$$

El desarrollo en términos de las funciones $\{\psi_k\}$ es conocido como el desarrollo de Fourier para una función.

Conviene notar lo siguiente:

para una función $f \in H$ (H un espacio de Hilbert) el desarrollo de Fourier asociado a la función f es convergente en H (es decir convergente en la métrica del producto escalar). Este desarrollo no siempre es puntualmente convergente.

Hemos encontrado un desarrollo de Fourier para funciones que cumplen ciertas condiciones de frontera en un conjunto de medida cero. Pero L^2 en realidad no es un conjunto de funciones sino de clases de equivalencia de funciones, iguales a.e. Por lo tanto para cualquier "f" en L^2 va a existir un desarrollo de Fourier.

$$\begin{aligned} * \quad i \frac{dx}{x} = \lambda dt &\Rightarrow e^{i\lambda t} = x \\ x(0) - x(1) = 0 &\Rightarrow e^{i\lambda} = e^0 \\ \Rightarrow \lambda = 2\pi k & ; k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Para el problema de frontera de Legendre es posible encontrar una función de Green, y por lo tanto, toda nuestra teoría se aplica para mostrar que los polinomios de Legendre son un c.o.c. en L^2 .

Hemos mostrado entonces, que en muchos casos, la existencia de expansiones convergentes en H de series ortonormales de eigenfunciones asociadas con problemas de frontera, puede ser deducida via el teorema espectral, de las propiedades de la función de Green asociada con el problema de frontera.

BIBLIOGRAFIA

Akhiezer N.I. (y Glazman)

- 1 Theory of Linear Operators in Hilbert Space.
Volume 1. Ungar, 1961.

Coddington E.A. (y Levinson)

- 1 Theory of Ordinary Differential Equations.
Mac Graw-Hill, 1955.

Courant R. (y Hilbert)

- 1 Methods of Mathematical Physics.
Interscience 1937

Greenberg M.D.

- 1 Application of Green's functions in Science and
Engineering.
Prentice Hall, 1971.

Halmos P.

- 1 A Hilbert Space Problem Book.
Van Nostrand, 1967.
- 2 Introduction to Hilbert Space.
Chelsea, 1957.

Plesner A.

- 1 Spectral Theory of Linear Operators.
Ungar, 1969.

Sagan

- 1 Boundary and Eigenvalue Problems in
Mathematical Physics.
Wiley.

Tricomi

- 1 Integral Equations.
Interscience, 1970.

Yosida

- 1 Lectures on Differential and Integral Equations.
Interscience, 1960.

