

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

EL GRUPO DE LORENTZ, SUS REPRESENTACIONES Y EL SIGNIFICADO  
DE LA INVARIANCIA EN FÍSICA

Trabajo presentado por Oscar Castañeda Taracena para  
su Examen General previo a optar al grado de Licenciado en Física

Director de Estudio: Dr. Eduardo Suger



Guatemala, C. A.

Agosto 1973

## CONTENIDO

Introducción .....	
CAPÍTULO I	
Principios de Invariancia Geométrica .....	pag. 1
CAPÍTULO II	
El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y sus representaciones .....	pag. 20
CAPÍTULO III	
El grupo de Lorentz y sus representaciones .....	pag. 51
CAPÍTULO IV	
La ecuación de Schrödinger .....	pag. 96.

## INTRODUCCION

Este trabajo es, esencialmente, un estudio de los principios de invariancia. Los principios de invariancia se encuentran en la base de toda teoría física y es por esta razón que su estudio es importante y a la vez controvertible.

En el capítulo I, en base al artículo The Conceptual Basis and Use of the Geometric Invariance Principles de R.M.F. Houtappel, H. Van Dam y E.P. Wigner (ver bibliografía), se hace una formulación general de estos principios.

En los capítulos II y III se desarrollan las ideas fundamentales de la teoría de representaciones de los dos grupos de transformaciones de invariancia más importantes: el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  y el grupo de Lorentz. El estudio de las representaciones de estos dos grupos es indispensable para la aplicación de los principios de invariancia y, al mismo tiempo, para una mejor comprensión de los mismos.

Por último, en el capítulo IV, se reúnen algunos de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores en un análisis de la ecuación de Schrödinger.

Espero que el presente trabajo sea útil para todos los estudiantes interesados en este campo de la física.

## CAPÍTULO I

### PRINCIPIOS DE INVARIANCIA GEOMÉTRICA

Los principios de invariancia tienen una doble importancia en física: se utilizan como apoyo en la búsqueda de nuevas leyes y como herramienta poderosa para obtener soluciones de las leyes conocidas de la naturaleza. En vista de esto, es necesario formular el concepto de invariancia en términos de las ideas primitivas de una teoría física: observaciones o mediciones y sus resultados. Las invariancias que pueden formularse de esta manera se llaman "invariancias geométricas". En este capítulo hacemos esta formulación en un sentido general.

#### SECCIÓN I

##### TRES CONSIDERACIONES EN RELACIÓN A LOS PRINCIPIOS DE INVARIANCIA

En 1908, en su libro "Obras", P. Curie hizo la siguiente observación: Si el mundo fuera realmente invariante con respecto a una transformación, este hecho nunca podría descubrirse. Porque ¿de qué manera podríamos distinguir entre dos puntos realmente equivalentes si la situación en uno es exactamente la misma que en el otro?

Un ejemplo ilustrará el significado de esta afirmación; primero algunas aclaraciones: "realmente invariante" significa invariante tanto en condiciones iniciales como en leyes (de estas dos categorías hablaremos más abajo). Es decir que ante la

transformación mencionada en el párrafo anterior, las condiciones iniciales y las leyes naturales no cambian. En este sentido, un desplazamiento en  $L$  a lo largo de cualquiera de los ejes espaciales cambia en general las condiciones iniciales. Por lo tanto podríamos descubrir el hecho de que el mundo no es "realmente invariante" con respecto a traslaciones en el espacio. En el eje temporal la situación es similar, pues las condiciones iniciales incluyen al movimiento (en mecánica clásica, posición y velocidad son las condiciones iniciales usuales). Ahora el ejemplo: Supongamos que en nuestro universo no existe el movimiento, la pregunta es la siguiente: ¿podremos descubrir si "el mundo" es realmente invariante ante una traslación en  $L$  a lo largo del eje temporal? La respuesta es no y la razón es la siguiente: los puntos con coordenadas temporales  $kt$  &  $kt+L$  serían puntos equivalentes; sin embargo, estos puntos serían indiferencia<sup>ab</sup>les (las situaciones observadas son idénticas). ¿Cómo, entonces, podríamos siquiera hablar de invariancia ante una traslación en  $L$  a lo largo de este eje si ni siquiera podemos determinar que los "puntos que difieren en  $L$ " son distintos? Y más aun: ¿Qué podría justificar la existencia de la dimensión temporal, si no tiene consecuencias observables? Podemos apreciar entonces, (siempre dentro de la esfera de la ciencia) el contenido de la observación de Curie.

Se sigue de las consideraciones anteriores que los principios de invariancia, como queremos que tengan consecuencias observables, postulan la equivalencia de sistemas de coordenadas en un sentido más restringido.

Uno de los logros más grandes de la mente humana (siempre dentro del plano científico) ha sido el dividir al mundo en dos categorías: condiciones iniciales y leyes de la naturaleza (estos conceptos se reemplazarán más tarde por conceptos más primitivos). El estado del mundo se describe por las condiciones iniciales. Ninguna regularidad precisa ha sido descubierta en ellas, y son en general complicadas. Actualmente se cree que las condiciones iniciales tienen (o tuvieron) un carácter de azar y que una separación precisa entre condiciones iniciales y leyes es posible.

Los principios de invariancia se refieren solo a la categoría de las leyes naturales. Las situaciones concretas equivalentes son usualmente muy distintas en lo que a condiciones iniciales se refiere. Solo las leyes naturales son las mismas en sistemas de coordenadas equivalentes.<sup>(1)</sup>

¿Cómo podemos verificar experimentalmente si un principio de invariancia se sostiene? Sabemos que una ley natural nos describe el cambio de un sistema con determinadas condiciones iniciales. Por lo tanto, una manera de determinar la validez de un principio de invariancia sería observar el cambio de dos sistemas con las mismas condiciones iniciales en dos sistemas de coordenadas distintos (y equivalentes). Si los sistemas se desarrollan en la misma forma, la invariancia en discusión es válida. Este se llamará el primer método para verificar principios de invariancia.

El primer método para verificar principios de invariancia tiene muchos inconvenientes. Uno de los aspectos negativos de este método es que solo existen pocos sistemas (de extensión limitada) en

(1) Dos sistemas de coordenadas son equivalentes si se obtiene uno del otro por la transformación de invariancia.

los que el estado del mundo exterior a ellos no ejerce una influencia apreciable y solo nos permite distinguirlos. Seamos más explícitos: vimos anteriormente que el mundo no es realmente invariante ante traslaciones en el espacio o el tiempo. Esto significa que, si nos trasladamos en el espacio, por ejemplo, el estado observado del mundo (condiciones iniciales) variará. Este hecho introduce una dificultad para seleccionar sistemas en diferentes sistemas de coordenadas que presenten "aproximadamente" las mismas condiciones iniciales y que puedan distinguirse uno del otro. Además de este aspecto, muchas veces es imposible crear condiciones idénticas en distintos sistemas de coordenadas: la repetición precisa del mismo experimento es la forma más cercana a la que llega un experimentador para verificar principios de invariancia (en este caso, invariancia ante desplazamiento en el tiempo).

Sin embargo, existe un segundo método para verificar los principios de invariancia. Antes de explicar en qué consiste este segundo método de verificación, analizaremos algunos hechos importantes. Las leyes de la naturaleza se escriben en una forma matemática de gran generalidad. Por esta razón, según algunos científicos, "las leyes de la naturaleza obtenidas en un sistema de coordenadas pretenden dar, no solo el comportamiento de sistemas que están actualmente en existencia desde el punto de vista de ese sistema de coordenadas, sino que también el comportamiento de una infinidad de otros sistemas. Por esto, los principios de invariancia pueden verificarse observando si los sistemas existentes en un segundo sistema de coordenadas se comportan de acuerdo con las leyes estable-

cidas en base a experimentos realizados en el primer sistema de coordenadas. Para mencionar un ejemplo insignificante: medimos, en el laboratorio el campo eléctrico solamente alrededor de unos pocos cuerpos cargados que están en reposo. Inferimos, sin embargo, que la ley de Coulomb es válida para todas las cargas en reposo, aun para aquellas que no existen en nuestro propio sistema de coordenadas. Si observamos que, en un sistema de coordenadas en movimiento, el campo alrededor de una carga en reposo en ese sistema de coordenadas no está dado por la ley de Coulomb, declaramos que los dos sistemas de coordenadas no son equivalentes.

Haremos esto aunque no exista una carga de la magnitud en cuestión en nuestro sistema de coordenadas: muestra creencia en la posibilidad de formular las leyes de la naturaleza en un lenguaje matemático sencillo es tan fuerte que, sin meditar mucho, nos apoyamos en ella cuando juzgamos la equivalencia de sistemas de coordenadas".<sup>(1)</sup> La cita anterior me parece algo confusa, la idea fundamental involucrada es la siguiente: analizando el trabajo en el

laboratorio, llegamos a una relación matemática sencilla; luego encontramos transformaciones ante las cuales esta relación queda invariante y suponemos que los sistemas de coordenadas <sup>conectados</sup> de esta manera son físicamente equivalentes. Es decir que de alguna forma la expresión matemática determina ~~la~~ generalidad de la ley.

Pero también sabemos que ciertas transformaciones de invariancia determinan nuevas leyes (por ejemplo, conservación de momentum

(1) The Conceptual Basis and Use of the Geometric invariance principles, Houtappel, Van Dam, and Wigner, Reviews of Modern Physics, Vol. 37, Number 4, Oct. 1965.

angular o lineal). Es decir que la separación entre leyes de la naturaleza y transformaciones de invariancia no es muy precisa. (Aquí hay mucho que discutir. Por ejemplo, podemos pensar que la idea de ley supone ciertas invariancias fundamentales, porque ¿consideraríamos como ley una correlación que solo fuera válida en un sistema de coordenadas? Un análisis más fuerte de estos conceptos amerita un estudio semántico.) En fin, las consideraciones anteriores nos dan un panorama más general de lo que es una ley natural y nos permiten descubrir un segundo método para verificar los principios de invariancia: los principios de invariancia pueden verificarse observando si los sistemas físicos existentes en el sistema de coordenadas  $O'$  se comportan de acuerdo con las leyes establecidas en base a experimentos realizados en el sistema de coordenadas  $O$ . Con este segundo método de verificación ya no es necesario crear las mismas condiciones iniciales en  $O$  y en  $O'$ . Es, por lo tanto, mucho más conveniente.

Otro hecho importante es el origen empírico de los principios de invariancia. Por ejemplo el principio de Fourier, según el cual las propiedades de la materia no cambian, no importa cuanto se subdivida, tuvo que ser abandonado ante la evidencia empírica de su falsedad. El descubrimiento, más reciente, de Lee, Yang & Wu muestra también que las leyes de la naturaleza no son invariantes con respecto a la conjugación de carga. (Es importante notar que el hecho de que los principios de invariancia tengan un origen empírico, no implica que los principios, ya establecidos, no trasciendan la experiencia.)

En resumen, hemos analizado tres aspectos importantes de los principios de invariancia:

- 1) Un principio de invariancia tiene sentido porque el mundo ha sido "dividido" en dos categorías: condiciones iniciales y leyes. El principio de invariancia se refiere únicamente a las leyes.
- 2) La forma matemática de las leyes naturales y su relación con los principios de invariancia.
- 3) El origen empírico de estos principios.

## SECCION II

### LEYES DE LA NATURALEZA Y TRANSFORMACIONES DE INVARIANCIA

Vimos en la sección anterior que al estudiar al mundo lo dividimos en condiciones iniciales y leyes. Vimos también que estas dos categorías se pueden diferenciar en forma precisa. (Sin embargo, esto no significa que no estén estrechamente relacionadas: las leyes de la naturaleza, sin condiciones iniciales, no tienen consecuencias observables.)

Queremos ahora ampliar un poco la noción de ley pues la forma en que hemos venido considerando a las leyes naturales puede dar una impresión muy rígida. Puede considerarse que sirven, como dice Wigner, sólo como sujetos para su propia verificación y para construir máquinas. La verdadera importancia de una ley natural se encuentra en que nos permite entender algo del mundo a nuestro alrededor: no nos da toda la información sobre sistemas cuidadosamente seleccionados si no que un poco de información sobre el total de observaciones. Conforme aumenta el número de observaciones, aumenta también el número y efectividad de las conexiones entre éstas. La Física investiga un mundo que no se conoce totalmente,

y de acuerdo con esta circunstancia, el justo papel de una ley natural es el señalado. Por otra parte, al usar las leyes naturales para entender al mundo, casi nunca conocemos todas las condiciones iniciales: continuamente llega nueva información imprevista. Por esta razón, las conclusiones que podemos obtener de las leyes naturales, relativas al comportamiento del mundo a nuestro alrededor, son verificadas solo parcialmente. La adquisición de nuevo conocimiento en relación a las condiciones iniciales, y la verificación de las leyes de la naturaleza están íntimamente entrelazadas. Esto no niega de ninguna manera que la distinción precisa entre condiciones iniciales y leyes se pueda mantener: Las leyes de la naturaleza son regularidades (correlaciones entre eventos), mientras que las condiciones iniciales son eventos (o resultados de las observaciones).

Los conceptos de la física deben cada vez más acercarse a la realidad de adquisición de información y conocimiento. Por esta razón, sustituimos la idea de condiciones iniciales por el concepto más primitivo de observación (llamado medición en mecánica cuántica). Las leyes naturales vienen a ser entonces correlaciones entre observaciones.<sup>(1)</sup>

Analizemos entonces, en forma más precisa, los conceptos de observación y ley natural.

Una observación es un proceso que consiste en poner al sistema que va a ser observado, en interacción con algo como un instrumento de medición o luz, sobre el estado del cual tenemos

(1) Como se verá más adelante, correlación entre observaciones debe entenderse como correlación entre los actos de observación junto con sus resultados.

algún "conocimiento directo". Esta noción es conceptualmente difícil. La dificultad es tal vez mayor en mecánica cuántica que en mecánica clásica o mecánica relativista. La razón es que en la mecánica clásica o relativista, existen objetos de los que tenemos un "conocimiento directo" y que se comportan de acuerdo con las leyes clásicas o relativistas. En mecánica cuántica la situación es distinta. La razón es la siguiente: un objeto que se comporta de acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica (como un electrón por ejemplo) no tiene una trayectoria definida. Por lo tanto, no tiene, en él mismo, ninguna característica dinámica definida. Es claro entonces que no se puede construir para un sistema de "objetos cuánticos" una mecánica lógicamente independiente. Para poder describir en forma cuantitativa el movimiento de un electrón, necesitamos la presencia de objetos físicos que obedezcan las leyes de la mecánica clásica con cierto grado de precisión. Cuando el electrón interactúa con el "objeto clásico", el estado del último es generalmente alterado. La naturaleza y magnitud de esta alteración depende del estado del electrón y por lo tanto puede servir para caracterizarlo cuantitativamente.<sup>(2)</sup> Otra dificultad inherente a esta noción es la siguiente: el "conocimiento directo" de un objeto tiene que ser el resultado de una serie de observaciones; la definición de observación supone el "conocimiento directo" de un objeto. Nos encontramos entonces ante un círculo vicioso,

(2) Quantum Mechanics, non-relativistic theory, Landau & Lifshitz Pergamon Press, 1965.

cuyas raíces habría que buscarlas en los fundamentos de nuestra experiencia. En fin, supondremos, a pesar de estas dificultades conceptuales, que existen objetos de los cuales tenemos un conocimiento directo.

En mecánica cuántica, el proceso de observación se describe como una colisión entre un instrumento de medición (objeto clásico) y el objeto del cual vamos a medir una característica. El resultado de la observación es información acerca de esta característica.

Toda observación implica una acción de un determinado tipo. Por ejemplo, actuamos en forma distinta si queremos observar el color o la velocidad de un cuerpo. Esta acción, junto con el tiempo en que se realiza, la escribiremos como  $\alpha$ . El resultado de la observación lo escribiremos como  $\gamma_\alpha$ , ó  $\gamma(\alpha)$ . Dijimos antes que una ley natural es una correlación entre observaciones. La palabra observaciones incluye aquí el acto de observación (o tipo de observación) junto con sus resultados (más claramente: las correlaciones son entre resultados de observaciones; pero dependen de la acción que determina la "cantidad" que observamos).

Las "cantidades" que observamos se llaman observables. En mecánica clásica, las observables son posición y velocidad. En mecánica cuántica las observables se representan por operadores hermiteanos que posean un conjunto ortonormal completo de eigenfunciones. (1)

(1) Ver Messiah, Quantum Mechanics, Vol. 1, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968 (pag. 188, Cap. V & X)

La pregunta, ya dentro de este contexto, que deben responder las leyes de la naturaleza es la siguiente: dado el conjunto de mediciones  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$ , junto con sus resultados  $r_\alpha, r_\beta, \dots, r_\epsilon$ , ¿cuál es la probabilidad de que otro conjunto de mediciones  $\omega, \eta, \dots, \nu$  dé los resultados  $r_\omega, r_\eta, \dots, r_\nu$  ?

Simbolizaremos esta probabilidad por:

$$\Pi(\alpha, r_\alpha; \beta, r_\beta; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; \eta, r_\eta; \dots; \nu, r_\nu) \quad (1)$$

Como la expresión es simétrica respecto a intercambios de pares antes de la barra y respecto a intercambio de pares después de la barra, podríamos ordenar las mediciones  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon, \omega, \eta, \dots, \nu$  en orden temporal (recuérdese que  $\alpha$  simboliza no sólo la acción de la observación si no que también el tiempo en que fue hecha). Precisamente los casos en los que las observaciones <sup>(1)</sup> antes de la barra preceden en tiempo a las observaciones después de la barra, son las más importantes. Sin embargo, no se hará absolutamente ninguna suposición en lo que respecta al orden temporal de las observaciones (recuérdese que una ley física se utiliza a veces para hacer "retrodicciones").

Las expresiones  $\Pi$  son entonces correlaciones entre resultados de observaciones. Una teoría física -o las leyes que envuelve esta teoría- están determinadas por las funciones  $\Pi$ , y las funciones  $\Pi$  están determinadas por la teoría.

Es decir, son en cierto sentido equivalentes. Ahora bien,

(1) Observación y medición se toman aquí como sinónimos.

generalmente las leyes de la naturaleza no se enuncian utilizando las funciones  $\Pi$ . La razón es que las expresiones que se obtienen son complicadas (complicadas significa más o menos que es difícil establecer en estas expresiones la validez de las invariancias; esto sugiere nuevamente la estrecha conexión entre principio de invariancia y ley natural que señalamos en la Sección anterior). Sin embargo, las funciones  $\Pi$  tienen la gran ventaja de que, como se verá más adelante, podemos formular las invariancias en términos de observaciones. "Esta formulación es atractiva, pues aún no entendemos completamente las leyes de la naturaleza y también porque las leyes de la naturaleza que entendemos están formuladas, en su forma más sencilla, en términos de nociones que son muchas veces radicalmente distintas para distintas leyes." (1)

El dominio de definición de las funciones  $\Pi$  está determinado por la teoría. Por ejemplo, en teoría gravitacional, las variables  $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{V}$  no se pueden referir a objetos cargados, o en mecánica cuántica no pueden existir variables  $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{V}$  que representen medidas simultáneas de posición y momentum que nieguen el principio de incerteza. Otra restricción que puede introducirse en el dominio de definición de  $\Pi$  es la siguiente: Supongamos que, en mecánica clásica,  $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{E}$  se refieren a medidas de posición y  $\mathcal{W}, \dots, \mathcal{V}$  a medidas simultáneas de velocidad. ¿Cómo podemos calcular  $\Pi$ ? Es evidente que falta información para poder calcular el valor de  $\Pi$ : el conjunto de "posiciones iniciales"  $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{E}$

(1) The Conceptual Basis and Use of the Geometric invariance principles, Houtappel, Van Dam, and Wigner, Reviews of Modern Physics, Vol. 37, Number 4, Oct. 1965.

no "determina" completamente el sistema físico observado. Por lo tanto, a menos que tengamos información estadística adicional, no podemos calcular  $\Pi$ .

Para aclarar un poco, daremos un ejemplo de una función  $\Pi$  para un sistema aislado de "  $\eta$  " partículas que se comportan clásicamente. Las observables son en este caso posición y velocidad. La función  $\Pi$  queda determinada si ponemos antes de la barra  $\theta \eta$  observaciones independientes. Estas  $\theta \eta$  observaciones independientes definen una órbita. Si  $\gamma_\omega$  es efectivamente el valor que la componente  $\omega$  de la posición o la velocidad toma para la órbita (recuérdese que en  $\omega$  está implícito el tiempo en el que se hace la observación),  $\gamma_\eta$  el valor que la componente  $\eta$  toma para la órbita, etc. hasta  $\gamma_\nu$ , el valor de  $\Pi$  es 1. Si la situación no es ésta el valor de  $\Pi$  es cero.

Las funciones  $\Pi$  tienen ciertas propiedades que se desprenden de su definición. Estas son válidas para cualquier teoría.

Propiedad I:

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; \eta, r_\eta) = \\ = \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega) \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | \eta, r_\eta) \end{aligned}$$

(dado que la observación  $\eta$  se haga más tarde que la observación  $\omega$ ).

Esta propiedad no es más que la propiedad de la "probabilidad de eventos condicionados".

Propiedad II:

$$\sum_r \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r) = 1$$

(la sumación sobre  $\Upsilon$  debe hacerse sobre todos los posibles resultados de la observación  $W$  ).

Esta propiedad es obvia: solamente nos dice que la medición  $W$  tiene forzosamente que tener un resultado.

Propiedad III:

$$\sum_{r_w} \sum_{r_n} \dots \sum_{r_v} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; n, r_n; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu) = 1$$

(la sumación sobre  $r_w, r_n, \dots, r_v$  debe hacerse sobre todos los posibles resultados de las observaciones  $W, N, \dots, V$  ; estas observaciones están ordenadas de izquierda a derecha en orden temporal)

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} & \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; n, r_n; \chi, r_\chi; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu) = \\ & = \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega) \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | n, r_n; \chi, r_\chi; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu) \end{aligned}$$

por propiedad I.

$$\text{pero: } \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | n, r_n; \chi, r_\chi; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu) =$$

$$\begin{aligned} & \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \omega, r_\omega | n, r_n) \times \\ & \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \omega, r_\omega; n, r_n | \chi, r_\chi; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu) \end{aligned}$$

Otra vez por propiedad I. Utilizando esta propiedad de nuevo sobre  $\Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; n, r_n | \chi, r_\chi; \dots; \delta, r_\delta; \nu, r_\nu)$  etc. llegamos a que:

$$\begin{aligned} & \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; \dots; \nu, r_\nu) = \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega) \times \\ & \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | n, r_n) \times \dots \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \delta, r_\delta | \nu, r_\nu) \\ & \therefore \sum_{r_w} \sum_{r_n} \dots \sum_{r_v} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; \dots; \nu, r_\nu) = \\ & = \sum_{r_w} \sum_{r_n} \dots \sum_{r_v} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega) \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | n, r_n) \\ & \times \dots \times \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \delta, r_\delta | \nu, r_\nu) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r_w} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega) \sum_{r_n} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon; \omega, r_\omega | n, r_n) \dots$$

$$\dots \sum_{r_p} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \delta, r_\delta | p, r_p) = 1$$

por propiedad II.

Propiedad IV:  $0 \leq \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; \dots; p, r_p) \leq 1$

Esta propiedad es inmediata.

La mecánica clásica supone además que:

$$\Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | n, r_n) = \sum_{r_w} \Pi(\alpha, r_\alpha; \dots; \epsilon, r_\epsilon | \omega, r_\omega; n, r_n)$$

(es decir, la medición  $\omega$  no afecta el sistema y por lo tanto,  $\eta$  dará cualquier resultado  $r_\eta$  con la misma probabilidad, sin importar que la medición  $\omega$  se lleve a cabo o no).

Antes de entrar a analizar las transformaciones de invariancia es necesario notar lo siguiente: una misma observación puede hacerse con distintos aparatos de medición. Por lo tanto, los símbolos  $\alpha, \beta, \dots$  se refieren, en realidad, a clases de equivalencia de mediciones.

Investigaremos ahora (después de haber formulado las leyes naturales en términos de observaciones) las transformaciones de invariancia.

Con respecto a la definición de principio de invariancia, hay dos fundamentales tendencias. La primera sostiene que sólo son válidos los principios que postulan la equivalencia de sistemas de referencia que pueden intercambiarse físicamente. Por ejemplo, un sistema de referencia puede ser trasladado, rotado o

gusto en movimiento. La segunda tendencia es menos rígida: sostiene que pueden considerarse como principios de invariancia todas las transformaciones que dejen las leyes de la naturaleza conocidas invariantes y que tengan cierta sencillez que sugiera su verdad. Nosotros seguimos <sup>19E</sup> el punto de vista de la primer tendencia.

Consideremos el conjunto de todas las transformaciones uno a uno  $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}$ ,  $\beta \leftrightarrow \bar{\beta}$ , ... definidas de el conjunto de observaciones  $\alpha, \beta, \dots$  en él mismo. Es claro que este conjunto forma un grupo con respecto a la composición de transformaciones. Este grupo contiene como subgrupo al grupo de las "transformaciones de invariancia". Sin embargo, antes de definir este subgrupo, definiremos otro subgrupo importante  $G$ , que nos servirá como base para definir el subgrupo de transformaciones de invariancia.

$G$  es el grupo de todas las transformaciones  $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}$ ,  $\beta \leftrightarrow \bar{\beta}$ , ... que dejen invariante la función  $\Pi$ , esto es, el grupo de transformaciones tales que:

$$\begin{aligned} \Pi (\alpha, r_\alpha; \beta, r_\beta; \dots; \epsilon, r_\epsilon \mid \omega, r_\omega; \eta, r_\eta; \dots; \nu, r_\nu) = \\ = \Pi (\bar{\alpha}, r_\alpha; \bar{\beta}, r_\beta; \dots; \bar{\epsilon}, r_\epsilon \mid \bar{\omega}, r_\omega; \bar{\eta}, r_\eta; \dots; \bar{\nu}, r_\nu) \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, directamente del significado de  $\Pi$ , el conocimiento del grupo  $G$  es equivalente al conocimiento de la ley natural que  $\Pi$  supone. (Si la teoría es completamente determinista, toda transformación que mapee un "conjunto consistente"

de observaciones en un "conjunto consistente" de observaciones, estará en el grupo  $G$ . Por lo tanto, los elementos de  $G$  permitirían calcular todos los conjuntos de observaciones consistentes (órbitas) a partir de un conjunto de observaciones consistentes. Se desprende<sup>de</sup> estas consideraciones que los principios de invariancia, puesto que tienen más generalidad que las leyes naturales (aunque sea en un sentido puramente metódico), no pueden contener todas las transformaciones de  $G$ . Escogeremos entonces aquellas transformaciones de  $G$  que satisfagan los requerimientos de la primera tendencia expuesta arriba (i.e., sólo son válidos los principios de invariancia que postulan la equivalencia de sistemas de referencia que pueden intercambiarse físicamente). Explicaremos esto último más detalladamente.

Las transformaciones de  $G$  son generalmente "activas". Esto quiere decir que el objeto en el que se realizan las mediciones  $\alpha, \beta, \dots, \nu$  es generalmente distinto al objeto en el que se realizan las mediciones  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots, \bar{\nu}$ . Sin embargo,  $\alpha, \beta, \dots$  y  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  son mediciones hechas por el mismo observador. Las transformaciones "pasivas", por el contrario, describen el mismo objeto desde el punto de vista de observadores distintos.

Para algunas transformaciones activas  $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}, \beta \leftrightarrow \bar{\beta}$  etc. que pertenecen a  $G$ , es posible imaginar a un segundo observador que guarda la misma relación con las mediciones  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  que el primer observador guarda con  $\alpha, \beta, \dots$ .

Por ejemplo, si  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  representan las mismas acciones que  $\alpha, \beta, \dots$ , con la sola diferencia de que las primeras se realizan un período más tarde que las segundas, es posible imaginar un observador (con su reloj retrasado) que guarda la misma relación con  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  que el primer observador guarda con  $\alpha, \beta, \dots$ . Es precisamente este hecho (el que podemos imaginar la existencia, para una transformación  $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}, \beta \leftrightarrow \bar{\beta}$  etc., de un segundo observador) el que determina, de todas las transformaciones de  $G$ , a las transformaciones de invariancia.

Si el segundo observador utiliza los símbolos  $\alpha, \beta, \dots$  para las mediciones que el primer observador llama  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  ( $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  guardan la misma relación con el segundo observador que  $\alpha, \beta, \dots$  guardan con el primero), entonces el objeto para el cual las mediciones  $\alpha, \beta, \dots$  del segundo observador dan los resultados  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \dots$ , es distinto del objeto para el cual las mediciones  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  hechas por el primer observador dan los resultados  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \dots$ . En otras palabras, los objetos son objetivamente distintos pero subjetivamente iguales. Por otro lado, el objeto que da los resultados  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \dots$  para las mediciones  $\alpha, \beta, \dots$  del segundo observador, dará este resultado para las mediciones  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$  del primer observador. En resumen, hemos tratado de establecer una "traducción" entre los lenguajes del primer y segundo observador.

Podemos concluir entonces que, todas las transformaciones de  $G$  que satisfagan las condiciones arriba expuestas, son

transformaciones de invariancia.

Terminamos este capítulo señalando que la teoría aquí expuesta, al aplicarse a la mecánica clásica, determina al grupo de Galilei como el grupo de transformaciones de invariancia para esta mecánica. Se puede aplicar también a la mecánica relativista para obtener el grupo de transformaciones de invariancia llamado grupo de Lorentz. La última aplicación es bastante difícil y está fuera de mi alcance.

## CAPÍTULO II

### EL GRUPO DE ROTACIONES EN $\mathbb{R}^3$ Y SUS REPRESENTACIONES

En el capítulo anterior, mencionamos que es posible obtener el grupo de Galilei aplicando la formulación de los principios de invariancia en términos de observaciones a la mecánica clásica. El grupo de Galilei está formado por las siguientes transformaciones  $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$  :

- 1) Translaciones espaciales:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}; t' = t$
- 2) Translaciones temporales:  $\vec{r}' = \vec{r}; t' = t + b$
- 3) Transformaciones "puras" de Galilei:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t; t' = t$
- 4) Rotaciones en el espacio:  $\vec{r}' = g(\vec{r}); t' = t$

donde  $g$  es una matriz ortogonal.

Un elemento general del grupo de Galilei se representa por la convención:

$$T(\vec{a}, b, \vec{v}, g) = T(\vec{a}, 0, \vec{0}, e) T(\vec{0}, b, \vec{0}, e) T(\vec{0}, 0, \vec{v}, e) T(\vec{0}, 0, \vec{0}, g)$$

y la ley de composición está definida por:

$$T(\vec{a}_1, b_1, \vec{v}_1, g_1) T(\vec{a}_2, b_2, \vec{v}_2, g_2) = T(\vec{a}, b, \vec{v}, g)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \vec{a}_1 + b_2 \vec{v}_1 + g_1(\vec{a}_2) \\ b &= b_1 + b_2 \\ v &= \vec{v}_1 + g_1(\vec{v}_2) \\ g &= g_1 g_2 \end{aligned}$$

Puede mostrarse que esta ley de composición es asociativa, que la transformación  $T(\vec{0}, 0, \vec{0}, e)$  actúa como

la identidad y que el inverso de  $T(\vec{a}, b, \vec{v}, g)$

está dado por:

$$\{T(\vec{a}, b, \vec{v}, g)\}^{-1} = T[\vec{g}^{-1}(b\vec{v} - \vec{a}), -b, -\vec{g}^{-1}(\vec{v}), \vec{g}^{-1}]$$

Dedicaremos este capítulo solamente al estudio de las representaciones de un subgrupo del grupo de Galilei: el grupo de rotaciones en el espacio (tridimensional). La enorme importancia que tiene en física este grupo justifica su estudio detallado y también, debido a la naturaleza de este trabajo, el abandono del estudio del resto de transformaciones que forman el grupo de Galilei. (2)

### SECCION I

#### NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN DEL GRUPO DE ROTACIONES EN $\mathbb{R}^3$

DEFINICION 1: Una representación finito dimensional del grupo  $G$  es una correspondencia entre los elementos  $g$  de  $G$  y las transformaciones lineales  $T_g$  que actúan en un espacio lineal de dimensión finita  $R$ , tal que al producto de elementos del grupo  $G$  le corresponde el producto de las transformaciones asociadas. En otras palabras, tal que  $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$  (donde  $T_{g_1}$  es la transformación lineal asociada a  $g_1$ ,  $T_{g_2}$  la transformación lineal asociada a  $g_2$  y  $T_{g_1 g_2}$  la transformación lineal asociada a  $g_1 g_2$  ).

De la definición anterior se desprende el siguiente

TEOREMA 1: Si  $g \rightarrow T_g$  es una representación, entonces la transformación lineal asociada al elemento "idéntico" del grupo, "e",

(2) Muchos de los resultados obtenidos para el grupo de rotaciones pueden generalizarse a grupos continuos con un número finito de parámetros

es la identidad; i.e.,  $T_e = E$

Demostración: Como  $g \rightarrow T_g$  es una representación, se cumple que  $T_g T_h = T_{gh}$  para todo  $g, h \in G$ ;  $\therefore$  como  $T_e T_g = T_{eg} = T_g$  y  $T_g T_e = T_{ge} = T_g$ ,  $T_e = E$ .

Nota: Toda transformación lineal que actúa sobre un espacio lineal de dimensión finita está dada por una matriz. Por lo tanto podemos pensar en una representación de dimensión finita como una correspondencia entre los elementos  $g$  del grupo y matrices  $T_g$ , siempre que las matrices satisfagan las condiciones señaladas en la Definición 1.

DEFINICION 2: Una representación  $g \rightarrow T_g$  es continua si los elementos de la matriz  $T_g$  son funciones continuas de  $g$ .

"Funciones continuas de  $g$ " significa en la Definición 2 "funciones continuas de los parámetros del grupo". Por ejemplo, si el grupo  $G$  está parametrizado por los ángulos de Euler

$\varphi_1, \theta, \varphi_2$  "funciones continuas de  $g$ " quiere decir "funciones continuas de  $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ ". (1)

Todas las representaciones que analicemos en este capítulo serán continuas.

Como ejemplos de representaciones del grupo de rotaciones tenemos las siguientes:

- i) Si asociamos a cada  $g \in G$  la matriz  $E$ , obtenemos una representación. Esta representación se llama primaria.
- ii) Si asociamos a cada rotación su matriz obtenemos la representación fundamental.

DEFINICIÓN 3: Un subespacio  $R_1$  del espacio  $R$  (en el que actúan las transformaciones  $T_g$ ), invariante respecto a todas las transformaciones  $T_g$ , se llama un subespacio invariante respecto a la representación  $g \rightarrow T_g$

DEFINICIÓN 4: Si en  $R$  no existe un subespacio (no trivial) invariante respecto a la representación  $g \rightarrow T_g$  la representación es irreducible.

Un ejemplo de una representación irreducible es la representación fundamental.

DEFINICIÓN 5: Si todas las transformaciones  $T_g$  son unitarias con respecto a algún producto escalar definido en el espacio complejo  $R$ , la representación es unitaria.

TEOREMA 2: Toda representación del grupo de rotaciones  $G$  es unitaria.

Demostración: SEAN  $\xi, \eta \in R$  y  $(\xi, \eta)$  un producto escalar definido en  $R$ . Supongamos que en general las matrices  $T_g$  de la representación  $g \rightarrow T_g$  no son unitarias respecto a este producto escalar. Sea  $(\xi, \eta)_1$  un nuevo producto escalar en  $R$  definido por:

$$(\xi, \eta)_1 = \int (T_g \xi, T_g \eta) dg \quad (*)$$

y  $T_h$  una transformación lineal arbitraria de la representación.

Si  $T_h \xi = \xi'$  y  $T_h \eta = \eta'$  tenemos:  
 $(T_h \xi, T_h \eta)_1 = (\xi', \eta')_1 = \int (T_g \xi', T_g \eta') dg$   
 $= \int (T_g T_h \xi, T_g T_h \eta) dg = \int (T_{gh} \xi, T_{gh} \eta) dg,$   
(\* ) la integral aquí es una integral invariante.

y como la integración es invariante (i.e.  $\int f(gn)dg = \int f(g)dg$ ).  
tenemos que:

$$\int (T_{gn}\xi, T_{gn}\eta)dg = \int (T_g\xi, T_g\eta)dg = (\xi, \eta)_1.$$

Hemos demostrado entonces que para una transformación arbitraria  $T_n$  de la representación se cumple que:

$$(T_n\xi, T_n\eta)_1 = (\xi, \eta)_1, \text{ o sea que la}$$

representación es unitaria//.

El estudio de las representaciones unitarias se puede fundamentar en el estudio de representaciones unitarias irreducibles. La razón es la siguiente: Si en  $\mathcal{R}$  no existen subespacios invariantes con respecto a una representación, la representación es irreducible. Si en  $\mathcal{R}$  existe por lo menos un subespacio invariante  $\mathcal{R}_1$  respecto a la representación, entonces el complemento ortogonal  $\mathcal{R}_2$  de  $\mathcal{R}_1$  es también invariante. Si la representación es reducible en  $\mathcal{R}_1$  o en  $\mathcal{R}_2$ , la reducimos aún más hasta obtener representaciones irreducibles. Como  $\mathcal{R}$  es finito dimensional, el proceso está justificado.

Hasta aquí hemos trabajado solamente con representaciones finito dimensionales. Más adelante, cuando analicemos las representaciones del grupo de rotaciones en el espacio de las funciones definidas sobre la esfera unitaria, necesitaremos la siguiente.

DEFINICIÓN 6: Si a cada elemento  $g$  del grupo  $G$  le corresponde una transformación unitaria  $T_g$  que actúa sobre un espacio de Hilbert, de manera que

$$T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2} \quad \text{y} \quad T_e = E$$

diremos que tenemos una representación unitaria infinito dimensional del grupo de rotaciones  $G$ .

DEFINICIÓN 7: Una representación infinito dimensional se llama continua si para todo  $\xi, \eta$  que pertenecen al espacio de Hilbert sobre el que actúan las transformaciones  $T_g$

(de la representación) se tiene que  $(T_g \xi, \eta)$  es una función continua de  $g$ .

Daremos el siguiente teorema sobre la reducción de representaciones unitarias infinito dimensionales, sin probarlo:

TEOREMA 3: Si  $g \rightarrow T_g$  es una representación unitaria del grupo de rotaciones en un espacio de Hilbert separable  $H$ , existe un número contable de subespacios finito dimensionales  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  invariantes respecto a la representación. En cada uno de estos subespacios la representación es irreducible. Los subespacios  $H_i$  son mutuamente ortogonales y su suma es  $H$ .

El teorema 3 nos permite expandir un vector arbitrario  $\xi$  de  $H$  como una serie convergente

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \dots$$

donde  $\xi_i \in H_i$ . Este resultado será particularmente importante más tarde.

## SECCIÓN II

### ROTACIONES INFINITESIMALES

Consideremos una representación cualquiera  $g \rightarrow T_g$ . Cada rotación "  $g$  " la podemos definir con 3 parámetros. Consideremos ahora que  $g$  está definida por las coordenadas  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  de un vector paralelo al eje de rotación y cuya magnitud es igual al ángulo de rotación. Podemos considerar entonces que la matriz

$T_g$  es una función de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ; i.e., que  $T_g = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  (1). Es evidente que  $T(0, 0, 0) = E$

(1) Que  $T_g$  sea una función de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  significa que cada elemento de esta matriz es una función de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Si desarrollamos  $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  en series de Taylor<sup>(1)</sup> alrededor del punto  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$  y despreciamos términos de segundo orden obtenemos:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3$$

donde  $E$  es la matriz identidad y  $A_1, A_2, A_3$  son matrices constantes (las derivadas parciales de  $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  con respecto a  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  valuadas en  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ).

¿Qué significado le podemos asociar a las matrices  $A_1, A_2$  y  $A_3$ ? Consideremos una rotación alrededor del eje  $O_x$  en un ángulo  $\xi_1$ . A esta rotación le corresponde la matriz:

$$T(\xi_1, 0, 0) = E + A_1 \xi_1 + \dots$$

Es claro, entonces, que la matriz  $T(\xi_1, 0, 0)$  que corresponde a una rotación infinitesimal alrededor del eje  $O_x$  está completamente determinada por la matriz  $A_1$ . De manera similar podemos interpretar  $A_2$  y  $A_3$ . Las matrices  $A_1, A_2, A_3$  se llaman matrices de rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas.

TEOREMA 1: La función  $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , está completamente determinada por  $A_1, A_2$  y  $A_3$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  un vector arbitrario y SEAN  $g(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$ ,  $g(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3)$  dos rotaciones alrededor de este vector. El producto de estas rotaciones es:

$$g(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3) g(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3) = g((t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3)$$

(1) Puede probarse que  $T$  tiene derivadas de cualquier orden respecto a  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . (Esto es, que cada elemento de  $T_g$  es derivable infinitamente.) Este hecho es una consecuencia directa de la noción de representación y se prueba haciendo uso de las propiedades de la integral invariante.

Por lo tanto el producto de las transformaciones lineales asociadas es: (la representación conserva productos)

$$T[(t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3] = T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3)$$

Derivando ambos lados de la ecuación anterior respecto a  $s$  y poniendo  $s=0$  obtenemos:

$$\frac{d}{dt} T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3) = \frac{d}{ds} T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3) \Big|_{s=0} \cdot T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3) \quad (1)$$

pero como  $T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3) = E + A_1 s\xi_1 + A_2 s\xi_2 + A_3 s\xi_3$ , tenemos que:

$$\frac{d}{ds} T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3) \Big|_{s=0} = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3$$

de donde:

$$\frac{d}{dt} T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3) = (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3) T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$$

Si escribimos  $X(t) = T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la matriz  $X(t)$ :

$$\frac{d}{dt} X(t) = (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3) X(t)$$

Donde la  $X(t)$  debe cumplir la condición

$$X(0) = T(0, 0, 0) = E$$

La solución de la ecuación diferencial anterior, que satisface esta condición es:

$$X(t) = e^{t(A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3)}$$

(1) Al lado izquierdo de esta ecuación aparece una derivación respecto de  $t$ . Esto es así pues:

$$T[(t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3] = E + A_1(t+s)\xi_1 + A_2(t+s)\xi_2 + A_3(t+s)\xi_3,$$

$$\therefore \frac{d}{ds} T[(t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3] \Big|_{s=0} = 0 + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3; \text{ PERO:}$$

$$\frac{d}{dt} T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3) = \frac{d}{dt} (E + A_1 t\xi_1 + A_2 t\xi_2 + A_3 t\xi_3) = 0 + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3$$

$$\therefore \frac{d}{dt} T[(t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3] \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$$

Si ahora hacemos  $t = 1$  obtenemos:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}, \text{ o sea que}$$

la función  $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  está completamente determinada por la matrices  $A_1, A_2, A_3$ .

En otras palabras, hemos demostrado con el teorema anterior que si tenemos una representación  $g \rightarrow T_g$  y  $A_1, A_2, A_3$  corresponden a las matrices de rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas, entonces la matriz  $T_g = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de la representación, está dada por:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3} \quad (1)$$

TEOREMA 2: Sea  $g \rightarrow T_g$  una representación arbitraria del grupo de rotaciones. Las matrices  $A_1, A_2, A_3$  correspondientes a las rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas, satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_3 \\ [A_2, A_3] &= A_1 \\ [A_3, A_1] &= A_2 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $[A, B] = AB - BA$  es el conmutador de las matrices  $A$  y  $B$ . Las llamaremos "relaciones de conmutación".

DEMOSTRACIÓN: Sea  $g_0$  una rotación fija y  $g$  una rotación arbitraria. Consideremos la rotación  $\tilde{g}_0 = g g_0 g^{-1}$ ;  $\tilde{g}_0$  y  $g_0$  representan rotaciones en el mismo ángulo puesto que una se ob-

tiene de la otra por una transformación de semejanza. Si  $n = (n_1, n_2, n_3)$  es el vector que define a la rotación  $g_0$ , entonces

$\tilde{n} = g n$  define a la rotación  $\tilde{g}_0$ ; pues es claro que  $|\tilde{n}| = |n|$  y que  $\tilde{g}_0 \tilde{n} = g g_0 g^{-1} \tilde{n} = \tilde{n}$  (esto es,  $\tilde{n}$  representa una rotación en igual ángulo que la rotación  $n$  y, además, coincide con el eje de rotación de  $\tilde{g}_0$  y  $\therefore \tilde{n}$  representa a la rotación  $\tilde{g}_0$  ).

Si tenemos definida sobre el grupo de rotaciones una representación  $g \rightarrow T_g$ , entonces  $\tilde{g}_0 = g g_0 g^{-1}$  implica que:

$$T_{\tilde{g}_0} = T_g T_{g_0} T_g^{-1}$$

y si asumimos que la rotación  $g_0$  (y por lo tanto  $\tilde{g}_0$ ) es pequeña (esto es,  $|n|$  y  $|\tilde{n}|$  son números pequeños) tenemos que:

$$T_{g_0} = E + A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3$$

$$T_{\tilde{g}_0} = E + A_1 \tilde{n}_1 + A_2 \tilde{n}_2 + A_3 \tilde{n}_3$$

Sustituyendo estas expresiones para  $T_{g_0}$  y  $T_{\tilde{g}_0}$  en

$$T_{\tilde{g}_0} = T_g T_{g_0} T_g^{-1} \text{ tenemos:}$$

$$T_g (E + A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) T_g^{-1} = E + A_1 \tilde{n}_1 + A_2 \tilde{n}_2 + A_3 \tilde{n}_3$$

y cancelando términos comunes a ambos lados de la ecuación anterior

llegamos a:

$$T_g A_n T_g^{-1} = A_{\tilde{n}}, \text{ donde}$$

$$A_n = A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 \quad \text{y} \quad A_{\tilde{n}} = A_1 \tilde{n}_1 + A_2 \tilde{n}_2 + A_3 \tilde{n}_3$$

Para llegar a esta última relación supusimos que  $|\tilde{n}|$  y  $|n|$

son pequeños. Sin embargo, podemos quitar esta restricción, pues si multiplicamos el vector  $n$  por un número,  $\tilde{n}$  queda multiplicado por el mismo número y, por lo tanto, sucede lo mismo con  $A_n$  y  $A_{\tilde{n}}$ .

Asumimos ahora que  $g$  es una rotación en un ángulo pequeño  $d$  alrededor del eje  $O_x$ , y que  $\eta$  es el vector unitario sobre el eje  $O_y$ , i.e.  $\eta = (0, 1, 0)$ .  $\tilde{\eta} = g\eta$  es entonces un vector unitario sobre el plano  $YO_z$  que hace un ángulo  $d$  con el eje  $O_y$ , y cuyas componentes son: (1)

$$\tilde{\eta}_1 = 0, \quad \tilde{\eta}_2 = 1, \quad \tilde{\eta}_3 = d$$

$T_g$  y  $T_g^{-1}$  SON EN ESTE CASO

$$T_g = E + A_1 d ; \quad T_g^{-1} = E - A_1 d .$$

Ade más tenemos que:

$$A_\eta = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 = A_2 \quad \gamma$$

$$A_{\tilde{\eta}} = A_1 \tilde{\eta}_1 + A_2 \tilde{\eta}_2 + A_3 \tilde{\eta}_3 = A_2 + A_3 d$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para

en la ecuación  $T_g A_\eta T_g^{-1} = A_{\tilde{\eta}}$  e igualando términos del primer orden de magnitud en  $d$ , llegamos finalmente a que:

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = [A_1, A_2] = A_3$$

En forma similar se obtienen las relaciones

$$[A_2, A_3] = A_1 \quad \gamma \quad [A_3, A_1] = A_2 \quad //$$

No hemos usado aún el hecho de que  $T_g$  es unitaria.

Derivaremos ahora la consecuencia que este hecho tiene en las

matrices  $A_K$ . Sea  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ . Entonces:  $T(\xi_1, 0, 0) = E + \xi_1 A_1 + \dots$ . Como  $T$  es unitaria tenemos que:

(1) pues, si  $\eta = (0, 1, 0)$ , al rotar en  $d$  obtenemos  $\tilde{\eta} = (0, \cos d, \sin d)$  y si  $d$  es pequeño,  $\cos d \rightarrow 1$  y  $\sin d \rightarrow d$ . Por lo tanto:  $\tilde{\eta} = (0, 1, d)$ .

$$T^*(\xi_1, 0, 0) T(\xi_1, 0, 0) = E \quad (1)$$

o sea:  $(E + \xi_1 A_1^* + \dots)(E + \xi_1 A_1 + \dots) = E$   
 $\therefore E + \xi_1 (A_1^* + A_1) + \dots = E$ ;  
 i.e. (despreciando términos de segundo orden)

$$A_1^* + A_1 = 0 \quad \text{o} \quad A_1^* = -A_1$$

Por lo tanto, el hecho de que  $T_g$  sea unitaria implica que las  $A_k$  son anti-hermiteanas. Si escribimos:  $H_1 = i A_1$ ;  $H_2 = i A_2$  y  $H_3 = i A_3$ , tenemos que:  $H_1 = H_1^*$ ,  $H_2 = H_2^*$ ,  $H_3 = H_3^*$ , i.e. las  $H_k$  son hermiteanas. Es inmediato también, de la ecuación (1), que si las  $H_k$  son hermiteanas,  $T_g$  es unitaria.

De las relaciones de conmutación (2) se siguen las relaciones de conmutación para las  $H_k$ :

$$\left. \begin{aligned} [H_1, H_2] &= i H_3 \\ [H_2, H_3] &= i H_1 \\ [H_3, H_1] &= i H_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(La derivación de estas relaciones es obvia. Obtendremos, por ejemplo, la primera relación de conmutación:  $[H_1, H_2] = H_1 H_2 - H_2 H_1 = i A_1 i A_2 - i A_2 i A_1 = -A_1 A_2 + A_2 A_1 = A_2 A_1 - A_1 A_2 = [A_2, A_1]$  y por las relaciones (2):  $[A_2, A_1] = -A_3 = i H_3$ ).

Daremos el siguiente teorema sin probarlo:

**TEOREMA 3:** Cualquier terna de matrices hermiteanas que satisfagan las relaciones de conmutación (3), definen una representación

$$T_g = e^{i(H_1 \xi_1 + H_2 \xi_2 + H_3 \xi_3)}$$

del grupo de rotaciones.

ciones.

(1) Aquí  $T^*$  denota al adjunto del operador  $T$ . Seguiremos con esta notación en todo el capítulo.

Nota: En el desarrollo anterior al teorema 3, mostramos que si  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  es una representación del grupo de rotaciones, entonces existen matrices  $H_1, H_2$  y  $H_3$  que satisfacen las relaciones de conmutación (3). El teorema (3) nos dice que cualquier terna de matrices hermiteanas  $H_1, H_2$  y  $H_3$  que satisfagan (3), define una representación. Esto significa que toda representación está completamente definida por estas matrices  $H_k$ , por medio de la expresión:

$$T_{\mathfrak{g}} = e^{i(H_1 E_1 + H_2 E_2 + H_3 E_3)}$$

Probar que dadas tres matrices hermiteanas que satisfagan (3) existe una representación  $T_{\mathfrak{g}}$  definida por la expresión anterior, es difícil. (1) Sin embargo, se puede realizar cualquier representación de dimensión finita en un espacio de espinores, y cualquier representación de dimensión impar en un espacio de tensores.

### SECCIÓN III

#### REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

Vimos en la Sección 1 que el estudio de las representaciones del grupo de rotaciones se puede reducir al estudio de las representaciones irreducibles. Antes de analizar la forma de una representación irreducible, daremos dos teoremas que nos serán útiles.

TEOREMA 1: Sea  $A$  un operador hermiteano que mapea un espacio lineal (complejo)  $\mathcal{R}$  en el mismo. Entonces los eigenvalores de  $A$  son reales y dos eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales.

(1) Esto se demostrará en general para cualquier grupo de Lie en el capítulo IV.

DEMOSTRACIÓN: Si  $Ax = \lambda x$ , ( $x \neq 0 \vee x \in \mathcal{R}$ )

entonces:

$$(Ax, x) = \lambda(x, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x).$$

y  $\therefore \lambda = \bar{\lambda}$  lo que significa que  $\lambda$  es real.

Si  $Ax = \lambda x$ ,  $Ay = \mu y$ , ( $\lambda \neq \mu$ )

entonces:

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y),$$

lo que significa que  $(x, y) = 0$ . //

Antes de enunciar al segundo teorema, haremos algunas consideraciones. En lugar de trabajar con las matrices  $H_1, H_2$  y  $H_3$ , trabajaremos con las siguientes combinaciones lineales de estas:

$$\left. \begin{aligned} H_+ &= H_1 + i H_2 \\ H_- &= H_1 - i H_2 \\ H_3 &= H_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

La conveniencia de este cambio se podrá apreciar en el desarrollo del resto de este capítulo.

Las nuevas matrices  $H_+, H_-$  y  $H_3$  satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$\left. \begin{aligned} [H_+, H_3] &= -H_+ \\ [H_-, H_3] &= H_- \\ [H_+, H_-] &= 2H_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y además, la relación

$$H_+^* = H_- \quad (3)$$

(2) y (3) se siguen inmediatamente de la definición (1) y de las relaciones de conmutación (2) de la Sección 2.)

Determinaremos las matrices  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  en términos de los eigenvectores normalizados de  $H_3$ . Para hacer esto, necesitamos el siguiente:

TEOREMA 2: Sea  $f$  un eigenvector de la transformación  $H_3$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda$ :

$$H_3 f = \lambda f$$

Entonces el vector  $f_1 = H_+ f$  es el vector cero o es el eigenvector de  $H_3$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda+1$  y el vector  $f_2 = H_- f$  es el vector cero o es el eigenvector de  $H_3$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda-1$ .

DEMOSTRACIÓN:

$$i) H_3 f_1 = H_3 H_+ f = [H_3, H_+] f + H_+ H_3 f = H_+ f + H_+ \lambda f$$

$$\text{pues } [H_3, H_+] = H_+ \quad \text{por (2).}$$

$$\circ \circ H_3 f_1 = (\lambda+1) H_+ f = (\lambda+1) f_1$$

$$ii) H_3 f_2 = H_3 H_- f = -[H_-, H_3] f + H_- H_3 f$$

$$= -H_- f + H_- \lambda f = (\lambda-1) H_- f = (\lambda-1) f_2 //$$

Utilizaremos ahora el teorema 2 para determinar las matrices  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$ . Sabemos, por el teorema 1, que los eigenvalores de  $H_3$  son reales ( $H_3$  es hermiteano, como se vió en la Sección 2). Sea  $l$  el máximo eigenvalor de  $H_3$  y  $f_l$  el eigenvector normalizado correspondiente:

$$H_3 f_l = l f_l, \quad (f_l, f_l) = 1$$

Si  $H_- f_l \neq 0$ , entonces (por teorema 2)

$$H_- f_l = F_l, \quad \text{DONDE } H_3 F_l = (l-1) F_l$$

$$\text{Escribamos ahora: } F_l = \alpha_l f_{l-1}, \quad \text{donde } \alpha_l$$

es un número positivo y  $(f_{l-1}, f_{l-1}) = 1$ ; (esto es, escribimos

$F_l$  como un escalar positivo multiplicado por un vector unita-

rio en la misma dirección de  $F_e$  ).

Tenemos entonces que:

$$\left. \begin{aligned} H_- f_e &= \alpha_e f_{e-1}; \\ \alpha_e &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ (donde } f_{e-1} \text{ es } \\ \text{eigenvector normalizado}$$

de  $H_3$  , correspondiente al eigenvalor  $e-1$ , por teorema 2).

Si  $H_- f_{e-1} \neq 0$  , introducimos el eigenvector normalizado  $f_{e-2}$  de manera similar, y escribimos:

$$H_- f_{e-1} = \alpha_{e-1} f_{e-2} \quad (\text{DONDE } \alpha_{e-1} > 0 \text{ y } (f_{e-2}, f_{e-2}) = 1)$$

Continuando el proceso, tenemos:

$$H_- f_{e-2} = \alpha_{e-2} f_{e-3} , \text{ ETC.}$$

Los vectores  $f_e, f_{e-1}, f_{e-2}, f_{e-3}, \dots$  construidos de esta manera, son eigenvectores de  $H_3$  . Como  $H_3$  sólo puede tener un número finito de eigenvalores distintos, la secuencia de vectores anterior tiene que terminar. Por lo tanto, para algunos valores de  $k$  , se tiene que  $H_- f_k = 0$  .

Obtenemos entonces un sistema de eigenvectores normalizados y mutuamente ortogonales (ver teorema 1) de  $H_3$  que satisfacen

$$\begin{aligned} \text{Y } H_3 f_m &= m f_m \\ H_- f_m &= \alpha_m f_{m-1} \end{aligned}$$

Como existe un último eigenvector  $f_k$  para el que  $H_- f_k = 0$ , ponemos  $\alpha_k = 0$  .

Si aplicamos ahora la transformación  $H_+$  al eigenvector correspondiente al eigenvalor  $e$  , tenemos forzosamente que:

$$H_+ f_e = 0$$

Si aplicamos  $H_+$  a  $f_{e-1}$  tenemos:

$$H_+ f_{e-1} = \frac{1}{\alpha_e} H_+ H_- f_e = \frac{1}{\alpha_e} [H_+, H_-] f_e + \frac{1}{\alpha_e} H_- H_+ f_e$$

pero:

$$H_+ f_e = 0 \text{ y } [H_+, H_-] = 2H_3, \text{ } \therefore H_+ f_{e-1} = \frac{2}{\alpha_e} H_3 f_e = \frac{2e}{\alpha_e} f_e = \beta_e f_e$$

(donde  $\beta_e = \frac{2e}{\alpha_e}$  ).

Supongamos ahora que  $H_+ \varphi_k = \beta_{k+1} \varphi_{k+1}$  se cumple para  $l \geq k \geq m+1$ . Demostraremos que también se cumple para  $m$  i.e. que  $H_+ \varphi_m = \beta_{m+1} \varphi_{m+1}$

$$\begin{aligned} H_+ \varphi_m &= \frac{1}{\alpha_{m+1}} H_+ H_- \varphi_{m+1} = \frac{1}{\alpha_{m+1}} [H_+, H_-] \varphi_{m+1} + \frac{1}{\alpha_{m+1}} H_- H_+ \varphi_{m+1} \\ &= \frac{2}{\alpha_{m+1}} H_3 \varphi_{m+1} + \frac{\beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}} H_- \varphi_{m+2} \end{aligned}$$

Pero como  $H_3 \varphi_m = m \varphi_m$  y  $H_- \varphi_m = \alpha_m \varphi_{m-1}$ , tenemos que:

$$H_+ \varphi_m = \frac{2(m+1) + \alpha_{m+2} \beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}} \varphi_{m+1}$$

y si hacemos

$$\beta_{m+1} = \frac{2(m+1) + \alpha_{m+2} \beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}}$$

obtenemos:

$$H_+ \varphi_m = \beta_{m+1} \varphi_{m+1}$$

Como  $H_+ \varphi_l = 0$ , es necesario poner  $\beta_{l+1} = 0$ .

Ahora bien: sabemos que  $H_+^* = H_-$ . Por lo tanto:

$$(H_+ \varphi_{m-1}, \varphi_m) = (\varphi_{m-1}, H_- \varphi_m)$$

(por definición del conjugado hermiteano de un operador).

$$\text{Pero } H_+ \varphi_{m-1} = \beta_m \varphi_m \quad \text{y} \quad H_- \varphi_m = \alpha_m \varphi_{m-1}$$

Sustituyendo en el producto escalar anterior estas expresiones,

obtenemos:

$$(\beta_m \varphi_m, \varphi_m) = (\varphi_{m-1}, \alpha_m \varphi_{m-1}) = \beta_m (\varphi_m, \varphi_m)$$

$$= \alpha_m (\varphi_{m-1}, \varphi_{m-1}) = \alpha_m \text{ pues } \alpha_m \text{ es}$$

real positivo. Pero sabemos que  $\varphi_m$  y  $\varphi_{m-1}$  son

eigenvectores normalizados de  $H_3$ . Por lo tanto se sigue

que  $\alpha_m = \beta_m$ .

Sustituyendo  $\alpha$  por  $\beta$  y  $m$  por  $m+1$  en

$$\beta_{m+1} = \frac{2(m+1) + \alpha_{m+2} \beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}} \quad \text{obtenemos:}$$

$\alpha_m^2 - \alpha_{m+1}^2 = 2m$  y sumando estas ecuaciones desde  $m = l$  hasta  $m = m$  :

$$\alpha_m^2 - \alpha_{l+1}^2 = 2l + 2(l-1) + 2(l-2) + \dots + 2m$$

Pero  $\beta_{l+1} = 0 = \alpha_{l+1}$  . Por lo tanto:

$$\alpha_m^2 = (l+m)(l-m+1)$$

Con esta última ecuación podemos averiguar el número de vectores  $f_m$  en la serie  $f_l \dots \dots \dots f_k$  . Como  $\alpha_k = 0$  tenemos que  $(l+k)(l-k+1) = 0$  . Aquí hay dos posibilidades:  $k = -l$  o  $k = l+1$  . Sin embargo, en el proceso supusimos que  $k < l$  .  $k \neq l+1$  . Entonces  $k = -l$  y es inmediato que el número de vectores  $f_m$  en la serie es  $2l+1$  . De aquí, podemos concluir evidentemente que  $l$  es un entero o un racional con denominador 2; (pues el número de vectores  $f_m$  tiene que ser forzosamente un entero positivo).

Introduzcamos ahora una restricción: supongamos que la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  es irreducible. Esto significa que en el espacio  $R$  no existen subespacios invariantes (aparte de las triviales) ante ninguna matriz  $T_{\mathfrak{g}}$  de la representación. Por lo tanto, no existen subespacios invariantes ante  $H_+, H_-$  y  $H_3$  , pues si existieran, por (1) de la sección 2, existirían también subespacios invariantes para  $T_{\mathfrak{g}}$  . Como los operadores  $H_+, H_-$  y  $H_3$  llevan un vector  $f_m$  a un vector de la serie  $f_l, \dots, f_{-l}$  , el subespacio generado por los  $f_m$  , ( $m = -l \dots \dots \dots l$ ) es invariante respecto a estos operadores. Podemos concluir entonces que  $\{f_{-l} \dots \dots \dots f_l\}$  es una base para  $R$  .

En resumen, hemos demostrado que para cualquier representación irreducible las transformaciones  $H_+, H_-$  y  $H_3$  ,

definen una base ortonormal por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} H_+ f_m &= \alpha_{m+1} f_{m+1} \\ H_- f_m &= \alpha_m f_{m-1} \\ H_3 f_m &= m f_m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde los  $f_m$  son eigenvectores de  $H_3$ ,  $m = -l, -l+1, \dots, l$ ,  
( $l$  entero o racional con denominador 2) y  $\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$

DEFINICIÓN 1: La base  $f_l, f_{l-1}, \dots, f_{-l}$  que consiste de los eigenvectores normalizados de  $H_3$ , en el caso de una representación irreducible, se llama la base canónica de la representación.

DEFINICIÓN 2:  $l$  se llama el "peso" de la representación irreducible.

Volviendo ahora a las matrices  $A_1, A_2$  y  $A_3$ , podemos calcular estas matrices en términos de las matrices  $H_+, H_-$  y  $H_3$  dadas en (4):

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad A_1 f_m &= -i H_1 f_m = -\frac{i}{2} (H_+ + H_-) f_m \\ &= -\frac{i}{2} H_+ f_m - \frac{i}{2} H_- f_m = -\frac{i}{2} \alpha_{m+1} f_{m+1} - \\ &\quad - \frac{i}{2} \alpha_m f_{m-1} = -\frac{i}{2} \sqrt{(l+m+1)(l-m)} f_{m+1} - \\ &\quad - \frac{i}{2} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} f_{m-1}. \\ (ii) \quad A_2 f_m &= -i H_2 f_m = \frac{1}{2} (-H_+ + H_-) f_m \\ &= -\frac{1}{2} H_+ f_m + \frac{1}{2} H_- f_m = -\frac{1}{2} \alpha_{m+1} f_{m+1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_m f_{m-1} = -\frac{1}{2} \sqrt{(l+m+1)(l-m)} f_{m+1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} f_{m-1}. \\ (iii) \quad A_3 f_m &= -i H_3 f_m = -i m f_m. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Probaremos ahora el siguiente teorema:

TEOREMA 3: Si existe una representación definida por (1) de la Sección 2, i.e., definida por la ecuación:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}$$

y  $A_1, A_2, A_3$  están dadas por (5), la representación es irreducible.

DEMOSTRACIÓN: El espacio  $R$  en el que actúan las transformaciones  $A_1, A_2, A_3$  dadas por (5) tiene dimensión  $2l+1$  (i.e., el espacio de la representación). Supongamos que existe

un subespacio no trivial  $R_1$  que es invariante respecto a las transformaciones  $H_+, H_-, H_3$ .

Sea  $h = \sum_{m=-l}^l C_m f_m$  el eigenvector correspondiente al máximo eigenvalor de  $H_3$  EN  $R_1$ .

Como  $R_1$  es invariante ante  $H_+$  tenemos que:  $H_+ h = 0$ ; i.e.

$$H_+ h = \sum_{m=-l}^l C_m H_+ f_m = \sum_{m=-l}^l C_m \alpha_{m+1} f_{m+1} = 0$$

Como los  $f_m$  forman una base para  $R$ ,  $C_m \alpha_{m+1} = 0$ .

Pero sabemos que  $\alpha_{m+1} = 0$  si  $m = l$  y que si  $m < l$ ,

$\alpha_{m+1} \neq 0$ . Por lo tanto,  $C_m = 0$  para  $m < l$

y nos queda que  $h = C_l f_l$ . Pero esto quiere decir que  $f_l$

está en  $R_1$ . Como  $R_1$  es invariante respecto a  $H_-$ ,

$H_- f_l, H_-^2 f_l, \dots$ ; i.e.  $f_{l-1}, f_{l-2}, \dots, f_{-l}$

están en  $R_1$ . Por lo tanto,  $R_1$  coincide con  $R$ . Es-

to quiere decir que no puede existir un subespacio no trivial

invariante respecto a las transformaciones  $H_+, H_-$  y  $H_3$ .

Pero este hecho implica que no existe un subespacio no trivial

invariante con respecto a todas las  $T_g$ , pues tal subespacio

tendría que ser invariante respecto a  $A_1, A_2$  y  $A_3$ ,

y por lo tanto, respecto a  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  . Por lo tanto, la representación  $g \rightarrow T_g$  es irreducible. //

Concluiremos esta Sección con un teorema más fuerte que el teorema anterior. La prueba de este teorema es difícil y por lo tanto, solo lo enunciaremos:

TEOREMA 4: Cada representación irreducible del grupo de rotaciones está definida por su peso, y las transformaciones  $A_1, A_2$  y  $A_3$  que corresponden, en la representación, a rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas, están dadas, en términos de la base canónica  $F_m, (-l, -l+1, \dots, l)$  por (5).

#### SECCIÓN IV

#### RESOLUCIÓN DE UNA REPRESENTACIÓN

Antes de entrar de lleno al problema de la resolución de una representación en representaciones irreducibles, conviene que hagamos un resumen de lo que hemos venido haciendo. Vimos en la Sección 2 que toda representación del grupo de rotaciones queda completamente definida por la expresión

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3} ; \text{luego}$$

definimos las matrices  $H_1, H_2$  y  $H_3$  y vimos que cualquier terna de matrices hermiteanas que cumplieran con las relaciones de conmutación (3) de la Sección 2 definirían una representación. Guiados por la idea de que toda representación del grupo de rotaciones se puede estudiar analizando las representaciones irreducibles del grupo, introducimos las matrices  $H_+, H_-$  y  $H_3$  . Estas últimas transformaciones nos permitieron

formular el teorema 4 de la Sección 3 que caracteriza en una forma completa a las representaciones irreducibles. Conociendo entonces las representaciones irreducibles, procedemos en esta Sección a investigar el problema de la resolución de una representación en componentes irreducibles.

La irreducibilidad de la representación solo se utilizó cuando se demostró que los vectores  $f_m$  forman una base para el espacio  $R$  en el que la representación irreducible actúa. Si la representación analizada en esos párrafos fuera reducible, entonces los vectores  $f_m$ , ( $m = -l, \dots, l$ ) formarían una base para un subespacio invariante  $R_0$ . Esto se desprende del hecho de que los vectores  $f_m$  se transforman entre ellos mismos ante  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$ , o ante  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ . Si tomamos el complemento ortogonal  $R'$  de  $R_0$ , como las transformaciones  $H_K$  son hermiteanas,  $R'$  es también invariante ante las  $H_K$ . Este hecho está fundamentado en el siguiente

TEOREMA 1: Sea  $R_0$  un subespacio de un espacio <sup>LINEAL  $R$</sup>  que es invariante ante un operador hermiteano  $H$ . Entonces el complemento ortogonal  $R'$  de  $R_0$  es también un subespacio invariante ante  $H$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $x$  un vector cualquiera del subespacio  $R_0$ , y sea  $z$  cualquier vector del subespacio  $R'$ . Tenemos por hipótesis que  $(Hx, z) = 0$  (pues  $R_0$  es invariante ante  $H$  y es ortogonal a  $R'$ ). Como el operador es hermiteano, este hecho implica que  $(x, Hz) = 0$ , i.e.  $H z$  es ortogonal a cualquier vector  $x$  de  $R_0$ .



$$A_2^{(j)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{-l_j+1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -\alpha_{-l_j+1} & 0 & \alpha_{-l_j+2} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{-l_j+2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{-l_j+3} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{l_j} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -\alpha_{l_j} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{(j)} = \begin{pmatrix} i l_j & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & i(l_j-1) & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(l_j-2) & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -i(l_j-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -i l_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde  $\alpha_m = \sqrt{(l_j+m)(l_j-m+1)}$

Por ejemplo, para obtener la matriz  $A_1^{(j)}$  procedemos así:  $f_{-l_j}$  será el primer vector de la base,  $f_{-l_j+1}$  el segundo etc. Por (5) de la Sección 3 sabemos que  $A_1 f_m = -\frac{i}{2} \alpha_{m+1} f_{m+1} - \frac{i}{2} \alpha_m f_{m-1}$  para una representación irreducible. El peso de la representación irreducible es en este caso  $l_j$ .

Aplicando  $A_1^{(j)}$  a los vectores de la base, tenemos:

$$\begin{aligned}
A_1^{(j)} \varphi_{-l_j} &= 0 \cdot \varphi_{-l_j} + \left(-\frac{i}{2}\right) \alpha_{-l_j+1} \varphi_{-l_j+1} + 0 \cdot \varphi_{-l_j+2} + \dots + 0 \cdot \varphi_{l_j} \\
A_1^{(j)} \varphi_{-l_j+1} &= \left(\frac{i}{2}\right) \alpha_{-l_j+1} \varphi_{-l_j} + 0 \cdot \varphi_{-l_j+1} + \left(-\frac{i}{2}\right) \alpha_{-l_j+2} \varphi_{-l_j+2} + 0 \cdot \varphi_{-l_j+3} + \\
&\quad + \dots + 0 \cdot \varphi_{l_j} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$A_1^{(j)} \varphi_{l_j} = 0 \cdot \varphi_{-l_j} + 0 \cdot \varphi_{-l_j+1} + \dots + \left(-\frac{i}{2}\right) \alpha_{l_j} \varphi_{l_j-1} + 0 \cdot \varphi_{l_j}$$

donde hemos tomado, como ya estaba demostrado,  $\alpha_{-l_j} = 0$  y  $\alpha_{l_j+1} = 0$ .

Poniendo los coeficiente de la expansión de cada vector de la base como columnas de una matriz, obtenemos  $A_1^{(j)}$ . En forma similar obtenemos las matrices  $A_2^{(j)}$  y  $A_3^{(j)}$ .

Daremos ahora dos métodos para resolver representaciones del grupo de rotaciones.

Primer método de resolución:

Consideremos los vectores  $\varphi$  de la forma:

$$\varphi = \alpha^0 \varphi_{l_0} + \alpha^1 \varphi_{l_1} + \alpha^2 \varphi_{l_2} + \dots$$

donde las  $\varphi_{l_i}$  satisfacen las ecuaciones

$$H_+ \varphi_{l_i} = 0 \quad \text{y} \quad H_3 \varphi_{l_i} = l_i \varphi_{l_i}$$

Es evidente que  $H_+ \varphi = 0$

Esto sugiere ya el primer método de resolución de una representación: buscamos todas las soluciones de la ecuación  $H_+ \varphi = 0$ .

Estas soluciones forman un subespacio invariante con respecto a la transformación  $H_3$ . Encontramos un conjunto ortonormal completo

$\{\varphi_{l_i}\}$  de eigenvectores de  $H_3$  en este subespacio. Aplicamos

la transformación  $H_-$  sucesivamente a cada  $f_{\ell_i}$ , i.e., calculemos los vectores  $H_- f_{\ell_i}, H_-^2 f_{\ell_i}, \dots, H_-^{2\ell_i} f_{\ell_i}$ . Estos nuevos vectores, junto con  $f_{\ell_i}$ , forman una base para un subespacio invariante en el que opera la representación irreducible de peso  $\ell_i$ . En resumen, si tenemos una representación arbitraria del grupo de rotaciones, las representaciones irreducibles en las que la representación puede resolverse, están dadas por los valores de  $\ell$  para los que existen soluciones a las ecuaciones simultáneas.

$$H_+ f = 0 \quad \text{y} \quad H_3 f = \ell f \quad (3)$$

Si dado un  $\ell$ , hay varias soluciones linealmente independientes para (3), la representación irreducible de peso  $\ell$  aparecerá en la resolución tantas veces como soluciones independientes haya. Este último hecho significa que, si en la resolución de una representación aparece más de una representación irreducible de peso  $\ell$ , la resolución no es única (la representación puede resolverse de varias maneras). La última afirmación se fundamenta en el siguiente

TEOREMA 2: Si  $f$  y  $g$  son eigenvectores de un operador LINEAL  $H$ , correspondientes a un mismo eigenvalor  $\lambda$ , entonces  $\alpha f + \beta g$  es también un eigenvector de  $H$  correspondiente al eigenvalor  $\lambda$ .

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis sabemos que:

$$H f = \lambda f \quad \text{y} \quad H g = \lambda g$$

Como  $H$  es lineal tenemos que:

$$H(\alpha f + \beta g) = \alpha H f + \beta H g = \alpha \lambda f + \beta \lambda g = \lambda(\alpha f + \beta g).$$

El teorema 2 nos permite entonces, escoger muchas funciones que satisfagan las ecuaciones  $H_+ f = 0$  y  $H_3 f = \ell f$ ; basta entonces con encontrar un sistema linealmente independiente para poder hacer una resolución. Por lo tanto, si el eigenvalor  $\ell$  es degenerado, la resolución no es única.

Segundo método de resolución:

Con este segundo método de resolución encontraremos subespacios invariantes en los que la representación es irreducible o isotópica. Una representación isotópica es aquella que puede "romperse" en representaciones irreducibles con el mismo peso.

Supongamos que tenemos una representación irreducible de peso  $\ell$  y consideremos la transformación

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$$

que actúa sobre el espacio  $R^1$  en el que esta representación está definida. Podemos escribir también:

$$H^2 = H_+ H_- - H_3 + H_3^2$$

ya que:

$$\begin{aligned} H_+ H_- &= (H_1 + i H_2)(H_1 - i H_2) \\ &= H_1^2 + H_2^2 + i(H_2 H_1 - H_1 H_2) = H_1^2 + H_2^2 + H_3. \end{aligned}$$

Como estamos considerando una representación irreducible,

$H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  están determinadas por las

fórmulas (4) de la Sección anterior. Esto significa que:

$$H_+ H_- f_m = H_+ \alpha_m f_{m-1} = \alpha_m^2 f_m$$

$$H_3 f_m = m f_m$$

$$H_3^2 f_m = m^2 f_m$$

y como:

$$\begin{aligned} \alpha_m^2 - m + m^2 &= (l+m)(l-m+1) - m + m^2 \\ &= l^2 - m'l + l + m'l - m^2 + m - m + m^2 \\ &= l^2 + l = l(l+1). \end{aligned}$$

podemos escribir:

$$H^2 f_m = l(l+1) f_m$$

Pero sabemos que si la representación es irreducible, las  $f_m$  forman una base para  $R^1$ ; por lo tanto, si  $f$  es un elemento cualquiera de  $R^1$ ,  $H^2 f = H^2 \sum_{m=-l}^l \beta_m f_m$

$$= \sum_{m=-l}^l \beta_m l(l+1) f_m = l(l+1) \sum_{m=-l}^l \beta_m f_m = l(l+1) f;$$

$$\text{i.e. } H^2 f = l(l+1) f \quad (4)$$

La ecuación (4) tiene entonces  $2l+1$  (la dimensión de  $R^1$ ) soluciones linealmente independientes.

Consideremos ahora una representación reducible que actúa sobre un espacio  $R$ . Por lo anterior, sabemos que la ecuación (4) se satisface en todos los subespacios invariantes en los que tenemos una representación irreducible de peso  $l$ . Por lo tanto, el número de soluciones linealmente independientes de (4) es ahora un múltiplo entero de  $2l+1$ . Esto significa que podemos escoger

una base en  $\mathcal{R}$  consistente en grupos de vectores, tal que cada grupo genera un subespacio invariante ante la representación y la representación en este subespacio es irreducible o isotópica (dependiendo de el número de subespacios invariantes de dimensión  $2\ell+1$ ). En otras palabras, el operador  $H^2$  no "distingue" entre subespacios invariantes en los que la representación es irreducible, si no que los subespacios invariantes que "distingue" son "más grandes", pero para cada  $\ell$  pueden "romperse" en " $\mathcal{S}$ " subespacios de dimensión  $2\ell+1$  en cada uno de los cuales la representación es irreducible.

En resumen: para hacer una resolución en representaciones isotópicas, buscamos para cada  $\ell$  un conjunto completo de soluciones linealmente independientes de la ecuación (4); tales conjuntos darán una base en la que la representación queda resuelta en representaciones isotópicas.

Con estas últimas consideraciones, terminamos de analizar las representaciones del grupo de rotaciones. Finalizaremos el capítulo haciendo una realización de los resultados "abstractos" obtenidos anteriormente.

## SECCIÓN V

### FUNCIONES ESFÉRICAS

Estudiaremos ahora la realización de las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones en el espacio de las funciones de cuadrado integrable definidas sobre la esfera unitaria. Uno de los resultados de esta Sección será la prueba de la existencia de representaciones irreducibles de peso  $\ell$  para cualquier

valor entero de  $l$ .

Consideremos la función  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$  y la rotación  $x' = g x$ ,  $x'_i = \sum g_{ik} x_k$ . Si sustituimos en  $f(x_1, x_2, x_3)$  los valores de  $x_k$  dados en términos de los  $x'_k$ , obtenemos una nueva función  $f_1(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Podemos pensar entonces que la función  $f$  se transforma en la función  $f_1$  por medio de la rotación  $g$ . Así, podemos asociar a cada rotación  $g$  una transformación  $T_g$  que transforma una función  $f$  en una función  $f_1$  que se obtiene de  $f$  por la sustitución de  $x'$  por  $x = g^{-1} x'$ ; esto es:

$$T_g f(x) = f_1(x), \text{ donde}$$

$$f_1(x) = f(g^{-1} x) \quad (1)$$

Es claro que  $T_g$  es lineal y se desprende inmediatamente de (1) que:

$$T_{g_2} g_1 = T_{g_2} T_{g_1} \quad (2)$$

donde  $T_{g_1}, T_{g_2}$  y  $T_{g_1 g_2}$  son las transformaciones asociadas a las rotaciones  $g_1, g_2$  y  $g_1 g_2$ . La ecuación (2) significa que el conjunto de transformaciones  $T_g$  es efectivamente una representación del grupo de rotaciones.

Nos limitaremos ahora al conjunto de funciones  $f(x_1, x_2, x_3)$  definidas sobre la esfera unitaria y cuyo cuadrado es integrable. Será conveniente muchas veces escribir el vector  $x = (x_1, x_2, x_3)$  en coordenadas esféricas  $\Theta, \varphi$  donde

$$x_1 = \text{SEN } \Theta \text{ COS } \varphi$$

$$x_2 = \text{SEN } \Theta \text{ SEN } \varphi$$

$$x_3 = \text{COS } \Theta$$

(recuérdese que los puntos del dominio de las funciones  $f$  están sobre la superficie de la esfera unitaria y por lo tanto  $r=1$  siempre).

El producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  se define en la forma usual:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \overline{g(\theta, \varphi)} \text{SENO} \theta d\theta d\varphi$$

Es inmediato, del hecho de que una rotación no altera el elemento de superficie  $\text{SENO} \theta d\theta d\varphi$ , que en la métrica definida por este producto escalar las transformaciones  $T_g$  son unitarias.

Como vimos anteriormente, para obtener las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones, necesitamos encontrar los operadores correspondientes a las rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas. Supondremos que las funciones  $f$ , en las que actúan las transformaciones  $T_g$ , son diferenciables.

Determinaremos primero la forma del operador  $A_3$ , correspondiente a una rotación infinitesimal alrededor del eje  $O_x$ .

Sea  $g$  una rotación alrededor del eje  $O_x$ . Como vimos anteriormente, podemos desarrollar  $T_g$  en serie de Taylor:

$$T_g = E + \alpha A_3 + \dots \quad (3)$$

Pero tenemos que  $T_g f(x) = f(\bar{g}^{-1}x)$ . Por lo tanto, si  $g$  es una rotación alrededor del eje  $O_x$ ,

$$T_g f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi - \alpha)$$

Desarrollando  $f(\theta, \varphi - \alpha)$  en serie respecto a  $\alpha$ , tenemos:

$$f(\theta, \varphi - \alpha) = f(\theta, \varphi) - \alpha \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} + \dots \quad (4)$$

Comparando términos de primer orden en  $\alpha$ , en las expresiones (3) & (4), llegamos a:

$$A_3 = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (5)$$

Para obtener los operadores  $A_1$  y  $A_2$ , consideremos una rotación  $g$ , alrededor de un eje cualquiera, en un ángulo pequeño  $\alpha$ . Tenemos entonces que:

$$T_g f(\theta, \varphi) = f(\theta', \varphi'),$$

donde  $\theta'$  y  $\varphi'$  dependen del ángulo de rotación  $\alpha$  y coinciden con  $\theta$  y  $\varphi$  para  $\alpha = 0$ . Desarrollando  $f(\theta', \varphi')$  en series

$$f(\theta', \varphi') = f(\theta, \varphi) + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{d\theta'}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{d\varphi'}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \alpha + \dots$$

podemos concluir, comparando términos de primer orden en  $\alpha$ , que el operador  $A$  correspondiente a una rotación infinitesimal alrededor del eje considerado tiene la forma:

$$A = a(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + b(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6)$$

donde:

$$a(\theta, \varphi) = \frac{d\theta}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad b(\theta, \varphi) = \frac{d\varphi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Si el eje alrededor del cual efectuamos la rotación es el eje  $O_x$ , entonces las componentes de  $X' = gX$  son,

(en coordenadas cartesianas):

$$X_1' = X_1$$

$$X_2' = X_2 \cos \alpha + X_3 \operatorname{SEN} \alpha$$

$$X_3' = -X_2 \operatorname{SEN} \alpha + X_3 \cos \alpha$$

Las funciones  $\left. \frac{dX_k}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$  están dadas

por:

$$\left. \frac{dX_1}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{dX_2}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = X_3, \quad \left. \frac{dX_3}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = -X_2 \quad (7)$$

Diferenciando las ecuaciones  $X_1 = \operatorname{SEN} \theta \cos \varphi$ ,  $X_2 = \operatorname{SEN} \theta \operatorname{SEN} \varphi$ ,  $X_3 = \cos \theta$ , y utilizando (7) tenemos para  $\alpha = 0$ :

$$\cos \theta \cos \varphi \frac{d\theta}{d\alpha} - \operatorname{SEN} \theta \operatorname{SEN} \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$$

$$\cos \theta \operatorname{SEN} \varphi \frac{d\theta}{d\alpha} + \operatorname{SEN} \theta \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$$

$$- \operatorname{SEN} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = - \operatorname{SEN} \theta \operatorname{SEN} \varphi.$$

de donde podemos concluir que:

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \operatorname{SEN} \varphi \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \operatorname{Cot} \theta \cos \varphi$$

y sustituyendo estas ecuaciones en (6) llegamos a que:

$$A_1 = \operatorname{SEN} \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{Cot} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (8)$$

es el operador correspondiente a una rotación infinitesimal alrededor del eje  $O_X$ .

De igual forma podemos obtener  $A_z$ , el operador correspondiente a una rotación infinitesimal alrededor del eje  $O_Y$ :

$$A_z = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (9)$$

Podemos determinar ahora los operadores  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  (introducidos anteriormente):

$$\left. \begin{aligned} H_+ &= H_1 + i H_2 = i A_1 - A_2 \\ &= e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ H_- &= H_1 - i H_2 = i A_1 + A_2 \\ &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ H_3 &= i A_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Utilizaremos ahora los operadores  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  así definidos para investigar las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones (representaciones definidas sobre el espacio de funciones que estamos considerando). Las funciones que pertenecen al subespacio de la representación irreducible de peso  $\ell$  se llaman "funciones esféricas de orden  $\ell$ ". Las funciones  $P_m(x)$  que forman la base canónica en el espacio de la representación irreducible se llaman las "funciones esféricas básicas de orden  $\ell$ ". Denotaremos estas últimas funciones por el símbolo  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  donde  $m$  es el eigenvalor de esta función respecto a  $H_3$  ( $-\ell \leq m \leq \ell$ ). Es claro entonces que toda función esférica de orden  $\ell$  es una combinación lineal de  $2\ell + 1$  funciones  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ .

A continuación obtendremos la ecuación diferencial de las funciones esféricas  $f$ .

Vimos al final de la Sección anterior que los vectores que se transforman ante una representación irreducible de peso  $l$ , satisfacen la ecuación  $H^2 f = l(l+1) f$

donde  $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ . Encontraremos

la forma de esta ecuación para el caso que estamos considerando. Es CLARO QUE :

$$H_1^2 + H_2^2 = \frac{1}{2} (H_+ H_- + H_- H_+).$$

Si sustituimos las expresiones (10) para  $H_+$  y  $H_-$  en la ecuación anterior, tenemos:

$$H_1^2 + H_2^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

y como  $H_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  tenemos que:

$$-H^2 = \frac{1}{\text{SEN } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{SEN } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{SEN}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Por lo tanto, la ecuación  $[-H^2 + l(l+1)E] f = 0$  tiene la forma:

$$\frac{1}{\text{SEN } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{SEN } \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{SEN}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + l(l+1) f = 0 \quad (11)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación diferencial para las funciones esféricas de orden  $l$ .

Mostraremos más tarde que el número de soluciones linealmente independientes de (11) es exactamente  $2l+1$ .

Haremos ahora algunas consideraciones sobre la forma de las funciones esféricas básicas  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

Como  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  es una eigenfunción de  $H_3$  correspondiente al eigenvalor  $m$ :

$$H_3 Y_l^m(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} F_l^m(\theta) \quad (12)$$

donde  $F_l^m(\theta)$  es alguna función de  $\theta$ .

Como las  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  son eigenfunciones normalizadas de  $H_3$  tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \text{SEN } \theta \, d\theta \, d\varphi = 1 \quad (13)$$

y como:

$$\int_0^{2\pi} |e^{im\varphi}|^2 \, d\varphi = 2\pi$$

reemplazamos (12) por:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_l^m(\theta) e^{im\varphi} \quad (14)$$

La condición (13) queda entonces:

$$\int_0^\pi |F_l^m(\theta)|^2 \text{SEN } \theta \, d\theta = 1 \quad (15)$$

Volviendo ahora a la ecuación (11) y sustituyendo  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  por  $F$ , obtenemos la ecuación diferencial para la función  $F_l^m(\theta)$ :

$$\frac{1}{\text{SEN } \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{SEN } \theta \frac{dF_l^m}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\text{SEN}^2 \theta} \right] F_l^m = 0 \quad (16)$$

Si hacemos el cambio de variables:

$$u = \cos \theta$$

y ponemos  $P_l^m(u)$  para  $F_l^m(\theta)$  tenemos que:

$$\frac{d}{du} \left[ (1-u^2) \frac{dP_l^m}{du} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] P_l^m(u) = 0 \quad (17)$$

y las funciones esféricas básicas  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  tienen la forma:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \quad (18)$$

Utilizaremos ahora el primer método de resolución de una representación, discutido en la Sección anterior, para obtener las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones en el espacio de las funciones de cuadrado integrable definidas sobre la esfera unitaria. Más exactamente, construiremos para cada  $l$  un subespacio invariante de funciones en el que hay una realización de una representación de peso  $l$ .

Para encontrar la base canónica para la representación irreducible de peso  $l$ , comenzamos buscando la solución de las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} H_3 f &= l f \\ H_+ f &= 0 \end{aligned}$$

i.e., comenzamos buscando las funciones  $Y_l^l(\theta, \varphi)$ .

Como habíamos visto antes, la ecuación  $H_3 f = l f$  implica que  $Y_l^l(\theta, \varphi)$  tiene la forma

$$Y_l^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} F_l^l(\theta)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación  $H_+ f = 0$ , obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d F_l^l(\theta)}{d\theta} - l \cot\theta F_l^l(\theta) = 0 \quad (19)$$

cuya solución es:

$$F_{\ell}^{\ell}(\theta) = C \text{SEN}^{\ell} \theta \quad (20)$$

Podemos inferir de (20) que existe una  $\gamma$  solo una representación irreducible de peso  $\ell$  (pues si no fuera así, la ecuación  $H_{+} Y_{\ell}^{\ell} = 0$  tendría para algún  $\ell$  por lo menos dos soluciones linealmente independientes de la forma  $e^{i\ell\varphi} W(\theta)$  .

Normalizamos ahora la función  $F_{\ell}^{\ell}(\theta) = C \text{SEN}^{\ell} \theta$  :

$$\int_0^{\pi} |F_{\ell}^{\ell}(\theta)|^2 \text{SEN} \theta \, d\theta = 1$$

esto es:

$$C^2 \int_0^{\pi} \text{SEN}^{2\ell+1} \theta \, d\theta = C^2 Z^{2\ell+1} \frac{[\ell!]^2}{(2\ell+1)!} = 1$$

y por lo tanto:

$$C = \pm \frac{1}{Z^{\ell} \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \sqrt{(2\ell)!}$$

Tomaremos

$$C = (-1)^{\ell} \frac{1}{Z^{\ell} \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \sqrt{(2\ell)!}$$

Podemos escribir entonces la función esférica básica correspondiente al máximo eigenvalor  $\ell$  de  $H_3$  en la forma:

$$\begin{aligned} Y_{\ell}^{\ell}(\theta, \varphi) &= \frac{(-1)^{\ell}}{\sqrt{2\pi} Z^{\ell} \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \sqrt{(2\ell)!} e^{i\ell\varphi} \text{SEN}^{\ell} \theta \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{i\ell\varphi} \text{SEN}^{\ell} \theta. \end{aligned}$$

Calcularemos ahora las otras funciones  $f_m = Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  de la base canónica. Sabemos que  $H_- f_m = \alpha_m f_{m-1}$ . Como  $H_-$  tiene, en este caso, la forma (10), tenemos que:

$$e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \varphi} \right) = \alpha_m Y_\ell^{m-1}$$

Si sustituimos:  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} F_\ell^m(\theta)$ , en la ecuación anterior, obtenemos:

$$-\frac{dF_\ell^m(\theta)}{d\theta} - m \cot \theta F_\ell^m(\theta) = \alpha_m F_\ell^{m-1}(\theta)$$

y haciendo nuevamente la sustitución  $u = \cos \theta$  y denotando  $F_\ell^m(\theta)$  por  $P_\ell^m(u)$  llegamos a:

$$\sqrt{1-u^2} \left( \frac{dP_\ell^m}{du} - m \frac{u}{1-u^2} P_\ell^m \right) = \alpha_m P_\ell^{m-1}(u) \quad (21)$$

Si hacemos la sustitución

$$P_\ell^m(u) = (1-u^2)^{-\frac{m}{2}} U_m(u) \quad (22)$$

obtenemos de (21) la ecuación:

$$U_{m-1}(u) = \frac{1}{\alpha_m} \frac{dU_m}{du} \quad (23)$$

De la ecuación (20) es inmediato que:

$$P_\ell^\ell(u) = C (1-u^2)^{\ell/2} \quad (24)$$

Utilizando (24) & (22) es claro que:

$$U_\ell(u) = C (1-u^2)^\ell \quad (25)$$

Con la ayuda de (25) y (22) podemos concluir entonces que:

$$U_{l-1}(u) = \frac{c}{d_l} \frac{d(1-u^2)^l}{du}$$

$$U_{l-2}(u) = \frac{c}{d_l d_{l-1}} \frac{d^2(1-u^2)^l}{du^2}$$

•  
•  
•

$$U_m(u) = \frac{c}{d_l d_{l-1} d_{l-2} \dots d_{m+1}} \frac{d^{l-m}(1-u^2)^l}{du^{l-m}}$$

•  
•  
•  
•

Sustituyendo la  $U_m$  obtenida anteriormente en (22)

obtenemos:

$$P_l^m(u) = \frac{c}{d_l d_{l-1} \dots d_{m+1}} (1-u^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}(1-u^2)^l}{du^{l-m}}$$

donde  $m = l, l-1, l-2, \dots, -l$ , pues es evidente que  $P_l^m(u) = 0$  para  $m \leq -l-1$ . Poniendo

ahora los valores de  $c$  y  $d_m$  ( $d_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$ )

e introduciendo  $(-1)^{\ell}$  en la derivada, llegamos a la expresión:

$$P_{\ell}^m(u) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \frac{1}{2^{\ell} \ell!} (1-u^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell-m} (u^2-1)^{\ell}}{du^{\ell-m}} \quad (26)$$

Es claro entonces que:

$$P_{\ell}(u) = P_{\ell}^0(u) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell} (u^2-1)^{\ell}}{du^{\ell}} \quad (27)$$

$P_{\ell}(u)$  se llama el polinomio de Legendre normalizado de orden  $\ell$  y las funciones  $P_{\ell}^m(u)$  se llaman "funciones asociadas de Legendre normalizadas".

En conclusión, hemos mostrado que las funciones esféricas básicas de orden  $\ell$  tienen la forma:

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{\ell}^m(\cos\theta)$$

donde  $P_{\ell}^m(u)$  está dada por (26). Estas funciones forman una base para un espacio de dimensión  $2\ell+1$  que es invariante respecto al grupo de rotaciones y en el que opera una realización de una representación irreducible de peso  $\ell$ .

## CAPÍTULO III

### EL GRUPO DE LORENTZ Y SUS REPRESENTACIONES

Estudiaremos en este capítulo otro grupo importante de transformaciones de invariancia: el grupo de Lorentz. Empezaremos el estudio de este grupo haciendo un análisis de las superficies cuadráticas en un espacio "  $\mathcal{N}$  " dimensional, necesario para entender algunas características geométricas "del grupo". Luego estudiaremos la estructura del grupo de Lorentz y, finalmente, sus representaciones.

#### SECCIÓN I

#### SUPERFICIES CUADRÁTICAS

DEFINICIÓN 1: Una superficies cuadrática en un espacio  $\mathcal{N}$  - dimensional  $\mathcal{R}_1$ , es el lugar geométrico de todos los puntos  $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  <sup>(1)</sup> que satisfacen una ecuación de la forma:

$$A(X, X) + 2l(X) + C = 0$$

donde  $A(X, X)$  es una forma cuadrática,  $l(X)$  una forma lineal y  $C$  una constante.

Es sabido que, si  $A(X, X)$  es una forma cuadrática definida en  $\mathcal{R}_1$ , existe una base en  $\mathcal{R}_1$  con respecto a la cual  $A(X, X)$  toma su forma canónica. En otras palabras, dada  $A(X, X)$  (donde  $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ) podemos hacer una transformación de coordenadas

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Las componentes del vector están dadas en una base ortonormal.

en  $R$ , en forma tal que:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i n_i^2$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación que define a una superficie cuadrática en la forma:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i n_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n l_i n_i + C = 0$$

donde las  $l_i$  son los coeficientes de la forma lineal  $l(x)$ .

Si suponemos que sólo los coeficientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de la forma cuadrática son distintos de cero, podemos escribir:

$$\lambda_j n_j^2 + 2 l_j n_j = \lambda_j \left( n_j + \frac{l_j}{\lambda_j} \right)^2 - \frac{l_j^2}{\lambda_j}, \quad (j=1, \dots, r)$$

y haciendo la sustitución

$$n'_j = n_j + \frac{l_j}{\lambda_j}$$

la ecuación de la superficie cuadrática queda:

$$\lambda_1 (n'_1)^2 + \lambda_2 (n'_2)^2 + \dots + \lambda_r (n'_r)^2 + 2 l_{r+1} n_{r+1} + \dots + 2 l_n n_n + K =$$

donde ya no aparecen los términos cuadráticos correspondientes

a  $n_j^2$  (con  $j = r+1, \dots, n$ ) pues supusimos que las  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  eran cero;  $K$  es una constante.

Si las  $l_{r+1}, \dots, l_n$  son iguales a cero, obtenemos la llamada "ecuación canónica de una superficie central"<sup>(1)</sup>

$$\lambda_1 (n'_1)^2 + \lambda_2 (n'_2)^2 + \dots + \lambda_r (n'_r)^2 + K = 0$$

o notando las primas,

$$\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \dots + \lambda_r n_r^2 + K = 0 \quad (1)!$$

Si  $K \neq 0$  &  $r = n$ , la superficie se llama no-degenerada. Estudiaremos a continuación este tipo de superficies.

(1) El centro de una superficie de este tipo es el punto cuyas coordenadas son  $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$  y se puede demostrar que es único.

La ecuación (1) para una superficie central no-degenerada toma la forma:

$$\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \dots + \lambda_n n_n^2 + K = 0 \quad (2)$$

o la forma:

$$\pm \frac{n_1^2}{a_1^2} \pm \frac{n_2^2}{a_2^2} \pm \dots \pm \frac{n_n^2}{a_n^2} = 1$$

donde hicimos la sustitución

$$a_i = +\sqrt{\frac{K}{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Las  $a_i$  se llaman los semi ejes de la superficie.

Si renumeramos las coordenadas de manera que los términos positivos aparezcan primero, tenemos:

$$\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{n_k^2}{a_k^2} - \frac{n_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{n_n^2}{a_n^2} = 1 \quad (3)$$

Por lo tanto, existen "  $n$  " tipos de superficies centrales no degeneradas, correspondientes a los valores  $K = 1, 2, \dots, n$  .

Analizaremos ahora los casos en que  $n=2$  y  $n=3$  para obtener las características de las superficies correspondientes a distintos valores de  $K$  . Luego generalizaremos al caso de  $n$  dimensiones.

CASO 1: Si  $n=2$  , obtenemos las siguientes "superficies":

$$(K=1), \quad \frac{n_1^2}{a_1^2} - \frac{n_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (\text{una hipérbola})$$
$$(K=2), \quad \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (\text{una elipse})$$

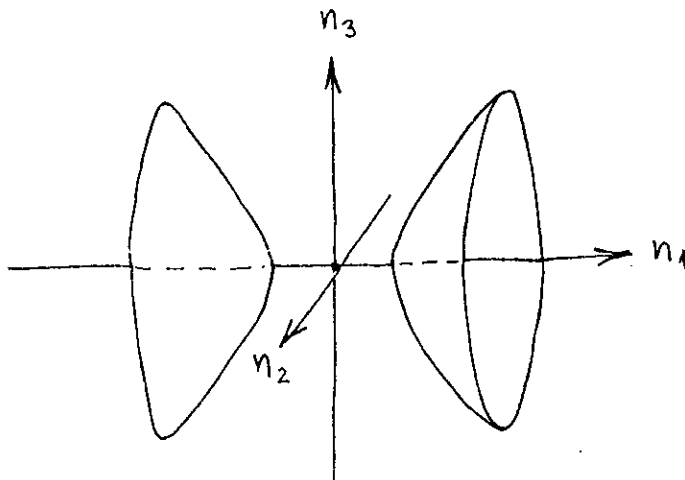
CASO 2: Si  $n=3$  , obtenemos las superficies:

$$(K=1) , \quad \frac{n_1^2}{a_1^2} - \frac{n_2^2}{a_2^2} - \frac{n_3^2}{a_3^2} = 1$$

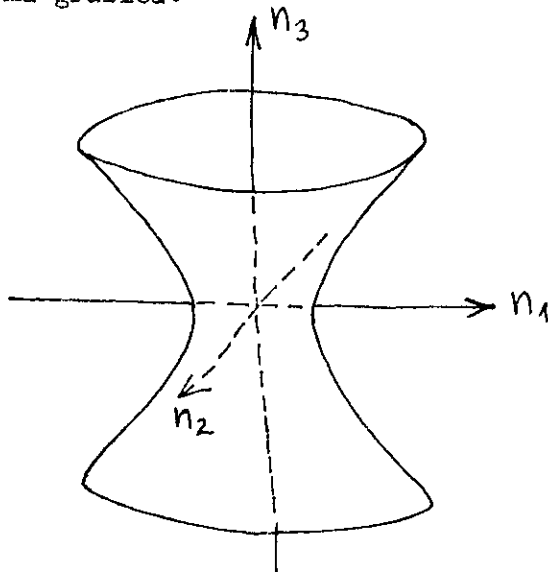
$$(K=2) , \quad \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} - \frac{n_3^2}{a_3^2} = 1$$

$$(K=3) , \quad \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} = 1$$

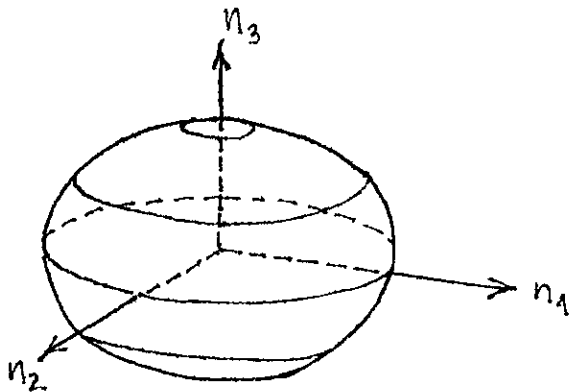
La superficie para  $K=1$  es un hiperboloide de dos hojas. En forma gráfica:



La superficie para  $K=2$  es un hiperboloide de una hoja. En forma gráfica:



La superficie para  $K=3$  es un elipsoide. En forma gráfica:



Notamos que en el hiperboloide de dos hojas ( $K=1$ ) existe un par de puntos que no se pueden conectar entre sí por una curva continua sobre la superficie (un punto en una de las hojas y el otro en la otra). En el hiperboloide de una hoja ( $K=2$ ), dos puntos cualesquiera se pueden hacer coincidir haciendo un desplazamiento continuo sobre la superficie; sin embargo, existe una curva cerrada (por ejemplo la curva alrededor del "cuello" del hiperboloide), que no se puede deformar en forma continua en un punto. En el elipsoide ( $K=3$ ), dos puntos cualesquiera pueden hacerse coincidir por medio de un desplazamiento continuo y toda curva cerrada sobre la superficie del elipsoide puede deformarse en forma continua en un punto.

Para generalizar las observaciones anteriores al caso

de  $n$  dimensiones, es necesario dar las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2: Una figura geométrica  $A$  es homeomórfica a una figura  $B$  si existe un mapeo bicontinuo de los puntos de  $A$  en los puntos de  $B$ .

DEFINICIÓN 3: Una figura  $A$  sobre la superficie  $S$  es homotópica a una figura  $B$  sobre la misma superficie, si la figura  $A$  puede mapearse en la figura  $B$  por medio de una deformación continua, durante la cual la figura  $A$  siempre permanece en la superficie.

CASO 3: Si el espacio  $R_n$  en el que está definida la superficie central no degenerada tiene dimensión  $n$ , las superficies correspondientes a los valores  $k = 1, 2, \dots, n$ , tienen la siguiente propiedad distintiva:

Propiedad 1: En la superficie central correspondiente a  $k$ , cada parte de la superficie que es homeomórfica a una esfera ( $k-1$ )-dimensional es homotópica a un punto; pero siempre existe una parte de la superficie que es homeomórfica a una esfera  $k$ -dimensional y que no es homotópica a un punto.

El significado de la propiedad 1 puede entenderse mejor si se aplica de nuevo al caso  $n=3$ . Lo que nos interesa aquí es lograr una comprensión "intuitiva" de esta propiedad. Con esto terminamos el estudio de las superficies centrales no degeneradas.

Si en la ecuación (1),  $K=0$  &  $r=n$  tenemos:

$$\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \dots + \lambda_r n_r^2 = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación representa a una superficie central degenerada. Este tipo de superficies se llaman cónicas. La razón es la siguiente: si el punto  $(n_1, n_2, \dots, n_n)$  satisface la ecuación (4), el punto  $(tn_1, tn_2, \dots, tn_n)$  también LA satisface para todo  $t$  (i.e., la ecuación es homogénea); esto significa que la superficie está formada por líneas rectas que pasan por el origen (en 3 dimensiones es un cono).

## SECCIÓN II

### EL GRUPO DE LORENTZ

DEFINICIÓN 1: Sea  $R^4$  un espacio de 4 dimensiones,

$X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$  un vector general de  $R^4$  y

$$S^2(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \quad (1)$$

una forma cuadrática definida en este espacio. Cualquier transformación lineal  $X' = gX$  que deje esta forma invariante (i.e. tal que  $S^2(X') = S^2(X)$ ) se llama una transformación general de Lorentz.

La matriz correspondiente a la forma cuadrática  $S^2(X)$  ES :

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Bajo cualquier transformación lineal  $g$ , la matriz se transforma en la matriz  $g^* I g$ .<sup>(1)</sup> Si  $g$  es una transformación general de Lorentz tenemos entonces que:

(1)  $g^*$  es la matriz transpuesta de  $g$ .

$$g^* I g = I \quad (2)$$

Es evidente que el conjunto de todas las transformaciones generales de Lorentz forma un grupo con la operación producto de transformaciones, ya que, de la fórmula (2), podemos concluir que  $\text{DET. } g = \pm 1$ , esto es, existe el inverso de  $g (g^{-1})$  que es obviamente una transformación general de Lorentz, y además el producto de dos transformaciones generales de Lorentz es una transformación general de Lorentz. Este grupo se llama el grupo general de Lorentz.

Volvamos ahora a la forma cuadrática  $S^2(x)$ . La ecuación:

$$S^2(x) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 \quad (3)$$

define un cono<sup>(1)</sup> en  $R^4$ , que tiene como eje el eje  $X_0$ .

Llamaremos a este cono el "cono de luz" y al eje  $X_0$  el eje temporal.

El cono de luz divide a  $R^4$  en tres regiones: la región externa donde  $S^2(x) > 0$ , y dos regiones internas  $S^2(x) < 0; X_0 > 0$  y  $S^2(x) < 0, X_0 < 0$ . Toda transformación general de Lorentz deja invariante al cono de luz y su región interna (y externa). Sin embargo, en general no deja invariante cada región interna, esto es, puede mapear puntos de la región interna  $S^2(x) < 0, X_0 > 0$  en la región  $S^2(x) > 0, X_0 > 0$

$X_0 < 0$  y viceversa. Una transformación general de Lorentz que deje invariantes las tres regiones señaladas se llama una

(1) ver Sección anterior

$$g^* I g = I \quad (2)$$

Es evidente que el conjunto de todas las transformaciones generales de Lorentz forma un grupo con la operación producto de transformaciones, ya que, de la fórmula (2), podemos concluir que  $\text{DET. } g = \pm 1$ , esto es, existe el inverso de  $g$  ( $g^{-1}$ ) que es obviamente una transformación general de Lorentz, y además el producto de dos transformaciones generales de Lorentz es una transformación general de Lorentz. Este grupo se llama el grupo general de Lorentz.

Volvamos ahora a la forma cuadrática  $S^2(x)$ . La ecuación:

$$S^2(x) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 \quad (3)$$

define un cono<sup>(1)</sup> en  $\mathbb{R}^4$ , que tiene como eje el eje  $X_0$ .

Llamaremos a este cono el "cono de luz" y al eje  $X_0$  el eje temporal.

El cono de luz divide a  $\mathbb{R}^4$  en tres regiones: la región externa donde  $S^2(x) > 0$ , y dos regiones internas  $S^2(x) < 0; X_0 > 0$  y  $S^2(x) < 0, X_0 < 0$ . Toda transformación general de Lorentz deja invariante al cono de luz y su región interna (y externa). Sin embargo, en general no deja invariante cada región interna, esto es, puede mapear puntos de la región interna  $S^2(x) < 0, X_0 > 0$  en la región  $S^2(x) > 0, X_0 > 0$

$X_0 < 0$  y viceversa. Una transformación general de Lorentz que deje invariantes las tres regiones señaladas se llama una

(1) ver Sección anterior

transformación de Lorentz.<sup>(1)</sup> Es claro que las transformaciones de Lorentz forman también un grupo; este grupo se llama el grupo completo de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz que tienen determinante igual a uno se llaman transformaciones de Lorentz propias y también forman un grupo, el grupo propio de Lorentz.<sup>(2)</sup>

Si al grupo propio de Lorentz le añadimos la "reflexión espacial"  $S$  con matriz

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y todas las transformaciones de la forma  $Sq$  donde  $q$  es una transformación de Lorentz propia, obtenemos el grupo completo de Lorentz. Esto es así pues si  $\eta$  pertenece al grupo completo de Lorentz y  $\text{DET.}\eta = -1$ ,  $S\eta$  pertenece al grupo propio de Lorentz pues  $\text{DET.}(S\eta) = 1$ ; como  $\eta = S(S\eta)$  tenemos entonces que toda transformación de Lorentz con determinante  $-1$ , es igual al producto de una reflexión espacial y una transformación de Lorentz propia. En forma similar, si al grupo completo de Lorentz le añadimos la "reflexión temporal"  $t$  con matriz

- (1) De la definición de la transformación de Lorentz es evidente que esta conserva la dirección positiva del eje  $X_0$ .
- (2) o simplemente grupo de Lorentz.

$$\mathfrak{t} = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

y todas las transformaciones de la forma  $\mathfrak{t} \mathfrak{g}$  donde  $\mathfrak{g}$  pertenece al grupo completo de Lorentz, obtenemos el grupo general de Lorentz.

Por otra parte, a cada rotación  $\mathfrak{g} = |g_{ik}|$  en  $\mathbb{R}^3$  le podemos asociar en forma natural la siguiente transformación de Lorentz propia en  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned} X_1 &= g_{11} X_1 + g_{12} X_2 + g_{13} X_3 \\ X_2 &= g_{21} X_1 + g_{22} X_2 + g_{23} X_3 \\ X_3 &= g_{31} X_1 + g_{32} X_2 + g_{33} X_3 \\ X_0 &= X_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Podemos decir entonces que el grupo de rotaciones en 3 dimensiones es un subgrupo del grupo propio de Lorentz.

En el resto del capítulo trabajaremos solamente con sistemas de coordenadas ortogonales. Un sistema de coordenadas ortogonal se define como aquel sistema en el que la matriz de la forma cuadrática  $\mathfrak{S}^2(X)$  tiene la forma  $\mathbf{I}$ . Es claro enton-

ces que toda transformación lineal que transforme un sistema ortogonal en otro es una transformación general de Lorentz y que toda transformación general de Lorentz lleva un sistema ortogonal a un sistema ortogonal.

Para terminar la sección estudiaremos las superficies en  $R^4$  que son transitivas con respecto a los grupos de Lorentz.

DEFINICIÓN 2: Si un grupo  $G$  de transformaciones actúa en un espacio  $R$ , una superficie es una superficie transitiva para  $G$  si toda transformación del grupo la deja invariante y si cualquier punto de la superficie puede llevarse a cualquier otro punto de la superficie por una transformación de  $G$ .

Para el caso del grupo de rotaciones en tres dimensiones, estudiado en el capítulo anterior, las superficies transitivas son esferas con centro en el sistema de coordenadas.

Investigaremos ahora las superficies en  $R^4$ , transitivas (o superficies de transitividad) para el grupo propio de Lorentz, el grupo completo de Lorentz y el grupo general de Lorentz.

Como toda transformación de Lorentz deja invariante la forma cuadrática  $S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$ , las superficies definidas por la ecuación

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \text{CONSTANTE.} \quad (5)$$

se transforman en ellas mismas ante una transformación de Lorentz. Estas superficies pueden ser de los siguientes tipos: <sup>(1)</sup>

1.  $S^2(x) = C < 0$ ,  $x_0 > 0$  (la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas).

(1) Ver Sección I.

2.  $S^2(X) = C < 0$ ,  $X_0 < 0$  (la hoja inferior de este hiperboloide).
3.  $S^2(X) = 0$ ,  $X_0 > 0$  (parte superior del cono de luz).
4.  $S^2(X) = 0$ ,  $X_0 < 0$  (la parte inferior del cono de luz).
5.  $S^2(X) = C > 0$  (un hiperboloide de una hoja).
6.  $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$  (el origen de coordenadas).

TEOREMA 1: Las superficies 1 a 6 son superficies transitivas con respecto al grupo propio de Lorentz.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el plano  $(X_0 X_3)$ . Por medio de una rotación (una transformación de Lorentz propia que deja invariante el eje  $X_0$ ) podemos llevar todo punto en el semiplano  $(X_0 X_3)$ ;  $X_3 < 0$  a un punto en el semiplano  $(X_0 X_3)$

. Intersectemos ahora las superficies 1 a 6 con el semiplano  $X_3 > 0$ ; obtenemos las siguientes curvas:

1. La rama superior de la hipérbola:

$$X_0^2 - X_3^2 = C > 0, X_0 > 0$$

2. La rama inferior de la hipérbola:

$$X_0^2 - X_3^2 = C > 0$$

3. La asíntota superior:

$$X_0 = X_3; X_0 > 0$$

4. La asíntota inferior:

$$X_0 = -X_3; X_0 < 0$$

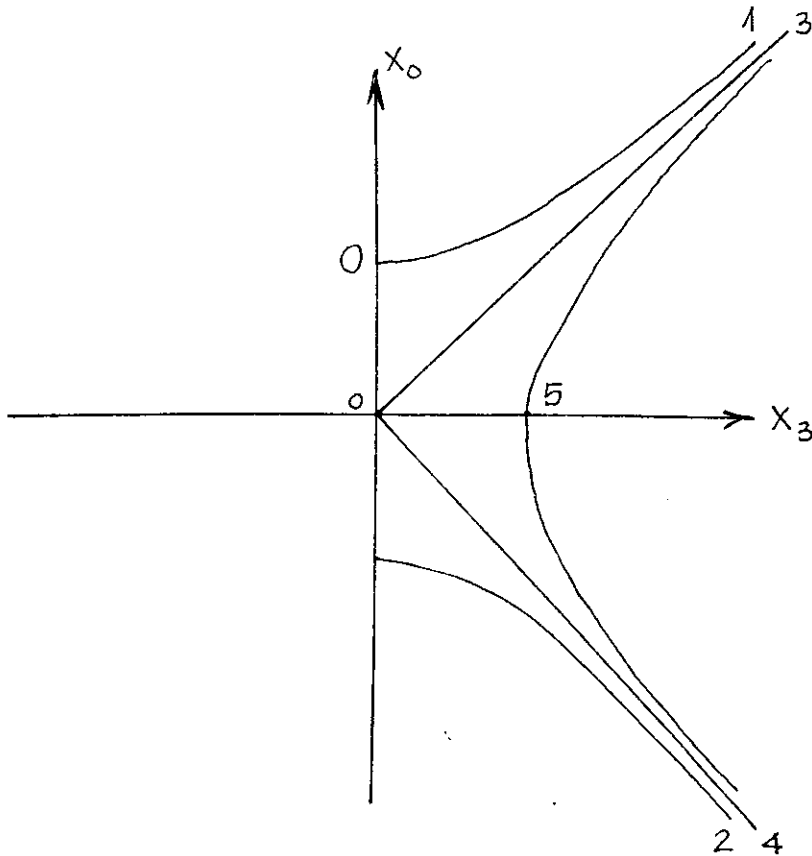
5. La rama derecha de la hipérbola:

$$X_0^2 - X_3^2 = C < 0; X_3 > 0$$

6. El origen de coordenadas:

$$X_0 = X_3 = 0$$

En la siguiente figura se pueden ver estas curvas en formas más clara:



Toda transformación de Lorentz propia que actúe solamente en el plano (  $X_0 X_3$  ) deja cada una de las curvas 1 a 6 invariantes (pues deja invariante la forma cuadrática). Cualquier punto en una de las curvas puede ser llevado a otro punto en la misma curva por una transformación de este tipo. Por lo tanto, las curvas 1 a 6 son curvas transitivas respecto a las transfor-

maciones de Lorentz propias que actúan en el plano  $(X_0 X_3)$ . Estas transformaciones se llaman "tornillos" hiperbólicos en el plano  $(X_0 X_3)$ , y se simbolizan por  $g_{03}$ .

Cualquier plano  $S$  que contiene al eje  $X_0$  corta a las superficies 1 a 6 en curvas del tipo 1 a 6. Los tornillos hiperbólicos en el plano  $S$  actúan transitivamente en tales curvas (estos tornillos hiperbólicos son transformaciones de Lorentz propias que dejan invariante al plano  $S$ ).

Consideremos ahora dos puntos  $A_1$  &  $A_2$  sobre una de las superficies 1 a 6 en  $R^4$ . Rotamos estos dos puntos para que coincidan con los puntos  $B_1 = U_1 A_1$  y  $B_2 = U_2 A_2$  que están en el semiplano  $(X_0 X_3)$ ,  $X_3 > 0$  ( $U_1$  &  $U_2$  son rotaciones). Como  $U_1$  &  $U_2$  son rotaciones (i.e. transformaciones de Lorentz propias) dejan invariantes a las superficies 1 a 6. Por lo tanto,  $B_1$  &  $B_2$  están en una de las curvas 1 a 6. Esto significa que puede llevarse uno al otro por la aplicación del tornillo hiperbólico  $g_{03}$ .

$$B_2 = g_{03} B_1$$

Podemos concluir entonces que la transformación de Lorentz propia  $g = U_2^{-1} g_{03} U_1$  lleva  $A_1$  a  $A_2$  y por lo tanto que las superficies 1 a 6 son superficies transitivas con respecto al grupo propio de Lorentz.

La reflexión espacial  $S$  transforma  $X_1$  a  $-X_1$ ,  $X_2$  a  $-X_2$  &  $X_3$  a  $-X_3$  y deja  $X_0$  invariante. Es claro entonces que  $S$  deja invariante la forma cuadrática  $S^2(X)$  y consecuentemente las superficies

1 a 6. Podemos concluir entonces que las superficies 1 a 6 son también superficies transitivas respecto al grupo completo de Lorentz. Como la reflexión temporal  $t$  intercambia las dos hojas del hiperboloide de dos hojas y la parte superior e inferior del cono de luz, las superficies transitivas respecto al grupo general de Lorentz se reducen a las cuatro siguientes:

1. Hiperboloide de dos hojas:

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = c > 0$$

2. El cono de luz:

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$$

3. Hiperboloide de una hoja:

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = c < 0$$

4. El origen de coordenadas:

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

Como ha sido demostrado ya anteriormente, dado un punto cualquiera  $A$  en la rama superior del hiperboloide de dos hojas

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 1, \quad X_0 > 0 \quad (6)$$

siempre existe una transformación de Lorentz propia que lo mapea en cualquier otro punto en la rama superior de este hiperboloide, en particular en el punto  $O(1, 0, 0, 0)$ .

Una de estas transformaciones es el tornillo hiperbólico  $\mathcal{J}_{OA}$  que actúa en el plano  $(X_0, A)$ . Sin embargo, es claro que existen muchas otras transformaciones de Lorentz propias que mapean  $A$  en  $O$ . Dos transformaciones que satisfagan la condición anterior difieren entre sí por una rotación  $U$ .

Por lo tanto, podemos escribir toda transformación de Lorentz propia "g" que mapee el punto A en el punto O como:

$$g = U g_{OA}^{-1}$$

donde U es una rotación y  $g_{OA}^{-1}$  el tornillo hiperbólico en el plano  $(X_0, A)$ . Es claro entonces que una transformación de Lorentz propia queda determinada por un punto A en la rama superior del hiperboloide (6) (precisamente el punto que dicha transformación lleva al punto O), el tornillo hiperbólico  $g_{OA}^{-1}$  que lleva A a O y finalmente la rotación U. Es decir que toda transformación de Lorentz propia queda definida completamente por el par  $(U, A)$  donde U es una rotación y A un punto en la rama superior del hiperboloide de dos hojas (6) (pues el tornillo hiperbólico  $g_{OA}^{-1}$  está completamente determinado por el punto A). Podemos escribir entonces:

$$g \sim (U, A)$$

Se sigue inmediatamente que el grupo propio de Lorentz se puede parametrizar con 6 variables: tres variables que determinan a la rotación U (ejemplo: ángulos de euler) y tres variables independientes que determinan al punto A (ejemplo: las coordenadas  $X_1, X_2$  y  $X_3$  DE A ).

Podemos concluir también que el grupo propio de Lorentz es conexo, i.e. que cualesquiera dos elementos del grupo pueden unirse por una curva continua. Este hecho se desprende inmediatamente de la conexidad del grupo de rotaciones y la conexidad

de la rama superior del hiperboloide de dos hojas (6).

Terminaremos esta Sección investigando las componentes conexas del grupo completo de Lorentz y el grupo general de Lorentz.

DEFINICIÓN 3: Una componente conexa de un grupo continuo es un subconjunto conexo que no está contenido en otro subconjunto conexo distinto de él mismo.

TEOREMA 2: El grupo propio es una componente conexa del grupo general de Lorentz.

DEMOSTRACIÓN: Ningún subconjunto del grupo general de Lorentz que contenga al grupo propio de Lorentz puede ser conexo, pues tal subconjunto contendría transformaciones  $g$  que alteran el sentido del eje  $X_0$  o que tienen determinante igual a  $-1$ ; como toda transformación de Lorentz propia conserva el sentido del eje  $X_0$  y tiene determinante igual a  $1$ , es evidente que no puede existir una curva continua que conecte una transformación de Lorentz propia con una que invierta el sentido de  $X_0$  o que tenga determinante igual a  $-1$ .

TEOREMA 3: El conjunto de todas las transformaciones de la forma  $Sg$  donde  $S$  es la reflexión espacial y  $g$  es una transformación de Lorentz propia forma una componente conexa.

DEMOSTRACIÓN: El conjunto de todas las transformaciones de la forma  $Sg$  es el conjunto de las transformaciones de Lorentz con determinante igual a  $-1$ . Es claro que este conjunto es conexo, pues dos elementos cualesquiera  $Sg_1$  &  $Sg_2$  pueden

conectarse por una curva continua, ya que  $g_1$  &  $g_2$  pueden conectarse de esta manera. La demostración de que este conjunto es una componente conexa es idéntica a la demostración para el grupo propio de Lorentz.

Podemos concluir entonces que el grupo completo de Lorentz está compuesto por dos componentes conexas:

La reflexión temporal  $t$  produce de manera similar otras dos componentes conexas del grupo general de Lorentz; una componente que consiste de todos los elementos de la forma  $tg$  y otra componente que consiste de todos los elementos de la forma  $tSg = \mathcal{J}g$ , donde  $\mathcal{J}$  es una reflexión completa en  $R^4$ .

En resumen, el grupo general de Lorentz consiste de cuatro componentes conexas:

1. El grupo propio (  $G_0$  )
2. La componente  $S G_0$  que consiste de todos los elementos de la forma  $Sg$  donde  $g \in G_0$
3. La componente  $t G_0$  (de elementos  $tg$  )
4. La componente  $t S G_0$  (de elementos  $tSg$  )

Con este análisis terminamos esta Sección. En la próxima Sección estudiaremos las representaciones del grupo de Lorentz.

### SECCIÓN III

#### LAS REPRESENTACIONES DEL GRUPO DE LORENTZ

En el capítulo II dimos algunas ideas de la teoría de representación. La consideración de representaciones de dimensión finita fue suficiente pues todas las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones son de dimensión finita y cualquier otra

representación puede resolverse en una suma de componentes irreducibles.

En el grupo de Lorentz existen representaciones irreducibles de dimensión infinita. Por esta razón, daremos algunas nuevas definiciones de las ideas generales de la teoría de representación de grupos. Esto es, generalizaremos las ideas presentadas en el capítulo II para poder estudiar las representaciones de dimensión infinita.

DEFINICIÓN 1: Sea  $\mathcal{R}$  un espacio normado. Una correspondencia entre los elementos  $g$  del grupo  $G$  y operadores acotados  $T_g$  que actúan en  $\mathcal{R}$  que satisfaga las siguientes condiciones:

1.  $T_e = E$  (donde  $e$  es el elemento idéntico del grupo  $G$  y  $E$  es la identidad)
2.  $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$
3. Si  $F(f)$  es un funcional lineal acotado en  $\mathcal{R}$ , entonces para  $f$  fija,  $F(T_g f)$  depende en forma continua de  $g$ .

se llama una representación lineal del grupo  $G$  en  $\mathcal{R}$ .

Si  $\mathcal{R}$  tiene dimensión finita, la representación se llama finita.

DEFINICIÓN 2: Una representación es unitaria si actúa en un espacio de Hilbert y si los operadores de la representación son unitarios.

DEFINICIÓN 3: Una representación  $g \rightarrow T_g$  que actúa en un espacio  $\mathcal{R}$  es irreducible si  $\mathcal{R}$  no tiene subespacios cerrados

invariantes ante los operadores  $T_g$  de la representación y si cualquier operador acotado  $A$  que conmuta con todos los operadores  $T_g$  es un múltiplo de la identidad:  $A = \lambda E$  .

TEOREMA 1: Todo operador lineal  $A$  que actúa en un espacio de dimensión finita  $R$  y que conmuta con un conjunto de operadores, es un múltiplo del operador identidad si y solo si este conjunto es irreducible (i.e. si no existen subespacios no triviales invariantes ante todos los operadores del conjunto).

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $A$  (como lo hemos venido considerando, el espacio  $R$  en el que actúan los operadores es complejo), y sea  $R_\lambda$  el subespacio de los eigenvectores del operador  $A$  correspondientes al eigenvalor  $\lambda$  . Tenemos por lo tanto que:

$$Ax = \lambda x \quad \text{si } x \in R_\lambda$$

Es claro que  $R_\lambda$  no es vacío.

Sea  $x$  un vector arbitrario en  $R_\lambda$  y  $T_g$  uno de los operadores del conjunto irreducible. Como  $A$  conmuta con  $T_g$ , tenemos que:

$$AT_g x = T_g Ax = T_g \lambda x = \lambda T_g x$$

lo que implica que  $T_g x$  pertenece a  $R_\lambda$  . Por lo tanto,  $R_\lambda$  es invariante ante los operadores  $T_g$  . Como el conjunto de operadores  $T_g$  es irreducible, tenemos que  $R_\lambda$  tiene que ser un subespacio no trivial. Sin embargo, vimos que  $R_\lambda$  no es vacío. Por lo tanto,  $R_\lambda = R$  y tenemos que :

$$Ax = \lambda x \quad \text{PARA TODO } x \in R$$

lo que significa que  $A = \lambda E$  .

La demostración en el otro sentido es clara. Solamente tenemos que construir un operador lineal que commute con un conjunto reducible y que no tenga la forma  $\lambda E$ . No haremos esta construcción.

El teorema 1 nos muestra un hecho muy importante: las dos condiciones dadas en la Definición 3 para una representación irreducible son equivalentes.

Si la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  que actúa en el espacio  $R$  es reducible entonces, generalmente,  $R$  se puede descomponer en una suma de subespacios invariantes  $R_{\kappa}$  en cada uno de los cuales la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  induce una representación irreducible. Denotaremos la representación inducida en  $R_{\kappa}$  por  $T_{\mathfrak{g}}^{(\kappa)}$ . Las representaciones  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}^{(\kappa)}$  se llaman las componentes irreducibles de la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ .

Procedemos ahora, después de haber hecho las modificaciones necesarias a las ideas presentadas en el capítulo II, al estudio de las representaciones del grupo de Lorentz. No utilizaremos todas las definiciones dadas anteriormente; algunas aparecen sólo por razones de completitud. También es necesario anotar que el análisis que haremos de las representaciones del grupo propio es más limitado que el hecho para el grupo de rotaciones.

En el capítulo II introdujimos para cada representación del grupo de rotaciones, las matrices  $A_1, A_2, A_3$  de las rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas  $X_1, X_2$  y  $X_3$ . Probamos también que estas matrices determinan en forma única a la representación.

La demostración en el otro sentido es clara. Solamente tenemos que construir un operador lineal que conmute con un conjunto reducible y que no tenga la forma  $\lambda E$ . No haremos esta construcción.

El teorema 1 nos muestra un hecho muy importante: las dos condiciones dadas en la Definición 3 para una representación irreducible son equivalentes.

Si la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  que actúa en el espacio  $R$  es reducible entonces, generalmente,  $R$  se puede descomponer en una suma de subespacios invariantes  $R_{\kappa}$  en cada uno de los cuales la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  induce una representación irreducible. Denotaremos la representación inducida en  $R_{\kappa}$  por  $T_{\mathfrak{g}}^{(\kappa)}$ . Las representaciones  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}^{(\kappa)}$  se llaman las componentes irreducibles de la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ .

Procedemos ahora, después de haber hecho las modificaciones necesarias a las ideas presentadas en el capítulo II, al estudio de las representaciones del grupo de Lorentz. No utilizaremos todas las definiciones dadas anteriormente; algunas aparecen sólo por razones de completitud. También es necesario anotar que el análisis que haremos de las representaciones del grupo propio es más limitado que el hecho para el grupo de rotaciones.

En el capítulo II introdujimos para cada representación del grupo de rotaciones, las matrices  $A_1, A_2, A_3$  de las rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes de coordenadas  $X_1, X_2$  y  $X_3$ . Probamos también que estas matrices determinan en forma única a la representación.

A continuación construiremos los operadores emólogos para el grupo propio de Lorentz.

Sabemos que toda rotación en el espacio de tres dimensiones la podemos expresar como el producto de tres rotaciones: una alrededor del eje  $X_3$  (en el plano  $(X_1 X_2)$  ), otra alrededor del eje  $X_2$  (en el plano  $(X_1 X_3)$  ) y finalmente otra alrededor del eje  $X_3$  (en el plano  $(X_1 X_2)$  ).

En forma similar podemos expresar toda transformación del grupo de Lorentz como el producto de seis transformaciones especiales: una transformación en el plano  $(X_1 X_2)$  que no altera las coordenadas  $X_3$  y  $X_4$  y cinco transformaciones similares en los planos  $(X_1 X_3)$ ,  $(X_2 X_3)$ ,  $(X_1 X_0)$ ,  $(X_2 X_0)$   $(X_3 X_0)$  . A continuación daremos la forma de tales transformaciones y demostraremos adelante que cada transformación de Lorentz propia se puede escribir como un producto de éstas.

La transformación en el plano  $(X_1 X_2)$  debe tener la forma:

$$\begin{aligned}
X'_1 &= g_{11} X_1 + g_{12} X_2 \\
X'_2 &= g_{21} X_1 + g_{22} X_2 \\
X'_3 &= X_3 \\
X'_0 &= X_0
\end{aligned}$$

Esta transformación (por pertenecer al grupo de Lorentz)

no altera la forma cuadrática  $X_1^2 + X_2^2$ . Por lo tanto es una rotación en el plano  $(X_1 X_2)$  en algún ángulo  $\varphi$ . Podemos escribir entonces la matriz de la transformación así:

$$g_{12}(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \text{SEN } \varphi & 0 & 0 \\ -\text{SEN } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En forma similar obtenemos las matrices para las transformaciones especiales en los planos  $(X_1 X_3)$  y  $(X_2 X_3)$ :

$$g_{13} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{SEN } \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{SEN } \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{SEN } \varphi & 0 \\ 0 & -\text{SEN } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La transformación en el plano  $(X_3, X_0)$  no cambia las coordenadas  $X_1, X_2$  y deja invariante la forma cuadrática  $X_3^2 - X_0^2$ . La matriz correspondiente tiene una forma análoga a las anteriores, con la diferencia de que está expresada en términos de funciones hiperbólicas: <sup>(1)</sup>

$$g_{03} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ 0 & 0 & \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{vmatrix}$$

Las matrices de  $g_{01}$  y  $g_{02}$  son similares.

Las matrices  $g_{ik}(\varphi)$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ) forman un subgrupo monoparamétrico del grupo de Lorentz, con la ley de composición definida por:

$$g_{ik}(\varphi_1) g_{ik}(\varphi_2) = g_{ik}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Como sabemos, si  $g$  es una rotación en el espacio tridimensional, podemos escribir:

$$g = g_{\theta_1} g_{\varphi} g_{\theta_2}$$

donde  $g_{\theta_1}, g_{\varphi}$  &  $g_{\theta_2}$  son las rotaciones correspondientes a los ángulos de Euler  $\theta_1, \varphi$  y  $\theta_2$ .

Demostraremos ahora que todo elemento  $g$  del grupo propio de Lorentz lo podemos escribir en la forma:

$$g = U_1 g_{03} U_2$$

donde  $U_1$  &  $U_2$  son rotaciones y  $g_{03}$  es el tornillo

(1) es el tornillo hiperbólico  $g_{03}$ .

hiperbólico en el plano  $(X_0 X_3)$  .

Habíamos demostrado anteriormente que toda transformación de Lorentz propia tiene la forma

$$g = U g_{0A}$$

donde  $U$  es una rotación y  $g_{0A}$  el tornillo hiperbólico en el plano  $(X_0 A)$  . Podemos expresar  $g_{0A}$  en la forma:

$$g_{0A} = U_{0A}^{-1} g_{03} U_{0A}$$

donde  $U_{0A}$  es la rotación que lleva el plano  $(X_0 A)$  al plano  $(X_0 X_3)$  . Esto es claro pues el plano  $(X_0 A)$  contiene al eje  $X_0$  (lo que significa que podemos efectivamente hacer una rotación que lleve  $(X_0 A)$  a  $(X_0 X_3)$  ). En otras palabras: mediante la rotación  $U_{0A}$  llevamos el plano  $(X_0 A)$  al plano  $(X_0 X_3)$  ; luego mediante el tornillo hiperbólico

llevamos el punto imagen de  $A$  ante la rotación anterior al vértice del hiperboloide  $S^2(X) = -1$  , y finalmente, mediante la rotación inversa  $U_{0A}^{-1}$  regresamos al plano  $(X_0 A)$  . Por lo tanto podemos escribir:

$$g = U U_{0A}^{-1} g_{03} U_{0A} = U_1 g_{03} U_2$$

donde  $U_1 = U U_{0A}^{-1}$  y  $U_2 = U_{0A}$

Podemos escribir las rotaciones  $U_1$  y  $U_2$  en la forma:

$$U_1 = g_{12}(\theta_1') g_{13}(\psi') g_{12}(\theta_2')$$

$$U_2 = g_{12}(\theta_1'') g_{13}(\psi'') g_{12}(\theta_2'')$$

y finalmente, podemos representar toda transformación de Lorentz

propia,  $g$ , en la forma:

$$g = g_{12}(\theta'_1) g_{13}(\varphi') g_{12}(\theta'_2) g_{03}(t) g_{12}(\theta''_1) g_{13}(\varphi'') g_{12}(\theta''_2) \quad (1)$$

donde  $g_{12}$ ,  $g_{13}$  y  $g_{03}$  pertenecen al subgrupo monoparamétrico definido anteriormente. Las transformaciones  $g_{ik}$ , ( $i, k \neq 0$ ) se llaman, simplemente, "tornillos".

Construiremos ahora los operadores infinitesimales para las representaciones del grupo propio de Lorentz.

Sea  $g \rightarrow Tg$  una representación del grupo de Lorentz.

Es claro de lo anterior que podemos considerar a los operadores

$$Tg_{ik}(\varphi) = T_{ik}(\varphi) \text{ como funciones del parámetro } \varphi.$$

Sea  $f$  un vector cualquiera en  $R$  (el espacio de la representación). El tornillo  $g_{ik}(\varphi)$  "lleva a  $f$ " al vector  $T_{ik}(\varphi)f$ .

Podemos escribir entonces:

$$T_{ik}(\varphi)f - f = [T_{ik}(\varphi) - E]f$$

Supondremos que los límites

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(T_{ik}(\varphi) - E)f}{\varphi} = n_{ik}$$

existen para todo  $i, k = 0, 1, 2, 3$ ;  $i < k$ .

Definimos los operadores:

$$A_{ik}f = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(T_{ik}(\varphi) - E)f}{\varphi} = n_{ik}$$

y

$$B_i f = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(T_{0i}(\varphi) - E)f}{\varphi} = n_{0i}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Los operadores  $A_{ik}$  y  $B_{ik}$  se llaman los operadores infinitesimales de la representación  $g \rightarrow Tg$ .  $A_{ik}$  y  $B_{ik}$  describen tornillos infinitesimales en los planos  $(X_i X_k)$  (tornillos ordinarios) y  $(X_i X_0)$  (tornillos hiperbólicos) respectivamente.

Los operadores  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$  corresponden a las rotaciones tridimensionales. En efecto:

$$A_1 = A_{23}$$

$$A_2 = A_{13}$$

$$A_3 = A_{12}$$

donde  $A_1, A_2, A_3$  fueron dadas (para el caso de tres dimensiones) en el capítulo II.

Sus relaciones de conmutación son:

$$[A_{12}, A_{13}] = -A_{23}$$

$$[A_{12}, A_{23}] = A_{13}$$

$$[A_{13}, A_{23}] = -A_{12}$$

Las relaciones de conmutación para los otros operadores infinitesimales son:

$$[A_{12}, B_1] = B_2$$

$$[A_{12}, B_2] = -B_1$$

$$[A_{12}, B_3] = 0$$

$$[A_{13}, B_1] = -B_3$$

$$[A_{13}, B_2] = 0$$

$$[A_{13}, B_3] = B_1$$

$$[A_{23}, B_1] = 0$$

$$[A_{23}, B_2] = B_3$$

$$[A_{23}, B_3] = -B_2$$

$$[B_1, B_2] = -A_{12}$$

$$[B_1, B_3] = A_{13}$$

$$[B_2, B_3] = -A_{23}$$

y se obtienen de manera similar a las relaciones (2).

Al igual que para el caso de rotaciones en tres dimensiones, es conveniente definir las siguientes combinaciones de los  $A_{ik}$  y los  $B_i$  :

$$\left. \begin{aligned} H_+ &= i A_{23} - A_{13} \\ H_- &= i A_{23} + A_{13} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} H_3 &= i A_{12} \\ F_+ &= i B_1 - B_2 \\ F_- &= i B_1 + B_2 \\ F_3 &= i B_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

y utilizando las relaciones (2) y (3) se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} [H_+, H_3] &= -H_+ \\ [H_-, H_3] &= H_- \\ [H_+, H_-] &= 2H_3 \\ [F_+, H_+] &= 0 \\ [H_-, F_-] &= 0 \\ [H_3, F_3] &= 0 \\ [H_+, F_3] &= -F_+ \\ [H_-, F_3] &= F_- \\ [H_+, F_-] &= 2F_3 \\ [H_-, F_+] &= -2F_3 \\ [F_+, H_3] &= -F_+ \\ [F_-, H_3] &= F_- \\ [F_+, F_3] &= H_+ \\ [F_-, F_3] &= -H_- \\ [F_+, F_-] &= -2H_3 \end{aligned}$$

De la definición de los operadores  $H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3$  se sigue que todo subespacio  $R'$  de  $R$  que es invariante ante la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ , es invariante ante estos operadores y que todo subespacio  $R'$  invariante respecto a estos operadores es invariante ante la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ . Por lo tanto, la representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$  es irreducible si y sólo si el espacio  $R$  en el que actúa es irreducible ante los operadores  $H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3$ .

Antes de dar la forma que tienen los operadores (4) para las representaciones irreducibles del grupo propio de Lorentz, haremos algunas consideraciones importantes. Es evidente que cualquier representación  $\mathfrak{g} \rightarrow T$  del grupo propio de Lorentz, que actúa en el espacio  $R$ , determina en forma inmediata una representación del subgrupo de todas las rotaciones. Esta representación la obtenemos al seleccionar los operadores  $T_{\mathfrak{g}'}$  correspondientes a las rotaciones  $\mathfrak{g}'$ . La representación

$\mathfrak{g}' \rightarrow T_{\mathfrak{g}'}$  es en general reducible (esta es la situación

normal en las representaciones del grupo de rotaciones). Sin embargo, podemos descomponer el espacio  $R$  en el que actúa, en una suma de subespacios invariantes  $R_l$  en cada uno de los cuales tenemos una representación irreducible de peso  $l$  del grupo de rotaciones. Asumiremos que si la representación  $g \rightarrow T_g$  del grupo propio de Lorentz es irreducible, entonces no existen dos subespacios  $R_l$  con el mismo peso en la descomposición arriba señalada. Esta última consideración nos permite numerar los  $R_l$  por el índice  $l$ .

Seleccionemos ahora una base canónica  $\xi_{lm}$  en cada uno de los subespacios  $R_l$ . (Como en  $R_l$  tenemos una representación irreducible del grupo de rotaciones, los  $\xi_{lm}$  son los eigenvectores del operador  $H_3$ , como en el capítulo II.) Es claro entonces que el conjunto de todos los vectores  $\{\xi_{lm}\}$  forma una base para todo  $R$ , pues vimos en el párrafo anterior que la suma de los  $R_l$  es  $R$ . Esta base se llama la base canónica en  $R$ .

Haciendo uso de los resultados definidos en el capítulo II para los operadores  $H_+, H_-, H_3$  (el caso aquí es completamente equivalente por la correspondencia establecida entre las rotaciones en tres dimensiones y ciertas transformaciones de Lorentz), tenemos que, para una representación irreducible, estos están dados en términos de la base canónica  $\xi_{lm}$  por:

$$H_3 \xi_{lm} = m \xi_{lm}$$

$$H_- \xi_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \xi_{l, m-1}$$

$$H_+ \xi_{lm} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \xi_{l, m+1}$$

con  $M$ , como siempre, variando entre  $l$  y  $-l$ .

Las expresiones para  $F_+$ ,  $F_-$  y  $F_3$  en términos de la base  $\{\xi_{lm}\}$  son:

$$\begin{aligned}
 F_3 \xi_{lm} &= C_l \sqrt{l^2 - m^2} \xi_{l-1, m} - A_l m \xi_{lm} - \\
 &\quad - C_{l+1} \sqrt{(l+1)^2 - m^2} \xi_{l+1, m} \\
 F_+ \xi_{lm} &= C_l \sqrt{(l-m)(l-m-1)} \xi_{l-1, m+1} - \\
 &\quad - A_l \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \xi_{l, m+1} + \\
 &\quad + C_{l+1} \sqrt{(l+m+1)(l+m+2)} \xi_{l+1, m+1} \\
 F_- \xi_{lm} &= -C_l \sqrt{(l+m)(l+m-1)} \xi_{l-1, m-1} - \\
 &\quad - A_l \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \xi_{l, m-1} - \\
 &\quad - C_{l+1} \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)} \xi_{l+1, m-1}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

donde:

$$A_l = \frac{i l_0 l_1}{l(l+1)}$$

$$C_l = \frac{i}{l} \sqrt{\frac{(l^2 - l_0^2)(l^2 - l_1^2)}{4l^2 - 1}}$$

$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$   
 $l = l_0, l_0+1, \dots$

Aquí  $l_1$ , es un número complejo. (5) & (6) dan la forma de los operadores infinitesimales<sup>(1)</sup> para una representación irreducible del grupo propio de Lorentz. No haremos la deducción de las ecuaciones (6), pues es muy complicada para las aspiraciones de este trabajo. Nos contentaremos con hacer algunas consideraciones que se derivan de las formas presentadas.

Primero, es claro de las ecuaciones (6) que toda representación irreducible del grupo propio de Lorentz queda completamente definida por el par de números  $l_0$  y  $l_1$  es el menor peso que participa<sup>(2)</sup> en la representación irreducible y por lo tanto, puede tomar solamente valores enteros o racionales con denominador igual a 2. Este último hecho está justificado en el capítulo II. El número  $l_1$ , es arbitrario.

El segundo hecho que comentaremos es muy importante. De las fórmulas (5) es claro que los operadores  $H_+$ ,  $H_-$  y  $H_3$  actúan en  $R_l$  en una forma completamente equivalente a sus análogos en tres dimensiones. Transforman, estos operadores, vectores en  $R_l$  en vectores en  $R_l$ . Analizando las fórmulas (6) notamos lo siguiente: los vectores pertenecientes al

- (1) Es costumbre llamar "operadores infinitesimales" a los operadores  $A_{ik}$ ,  $B_i$  o a cualquier combinación lineal de esta.
- (2) Se dice que el peso  $l$  participa en una representación del grupo propio de Lorentz si la representación inducida en el grupo de rotaciones contiene una componente irreducible de peso  $l$ .

subespacio  $R_\ell$  se transforman ante  $F_+, F_-$  y  $F_3$  en combinaciones lineales de vectores en  $R_{\ell-1}$ ,  $R_\ell$  y  $R_{\ell+1}$

(Nótese la función parecida de los operadores  $F$ , a nivel de subespacios, con la de los operadores  $H$  a nivel de vectores). Es claro también de (6) que si  $C_\ell = 0$ , los vectores en  $R_\ell$  se transforman ante  $F_+, F_-$  y  $F_3$  en combinaciones lineales de vectores en  $R_\ell$  y  $R_{\ell+1}$  y que si  $C_{\ell+1} = 0$ , se transforman en combinaciones lineales de vectores en  $R_{\ell-1}$  y  $R_\ell$

. De la expresión dada en (6) para  $C_\ell$ , es claro que  $C_{\ell_0} = 0$ , donde  $\ell_0$  es el menor peso que participa en la representación. Por lo tanto, los elementos de  $R_{\ell_0}$  se transforman en combinaciones lineales de vectores en  $R_{\ell_0}$  y  $R_{\ell_0+1}$ . Los vectores que pertenecen a la suma de  $R_{\ell_0}$  y  $R_{\ell_0+1}$  se transforman ante  $F_+, F_-$  &  $F_3$  en combinaciones lineales de vectores en la suma de los subespacios  $R_{\ell_0}$ ,  $R_{\ell_0+1}$  y  $R_{\ell_0+2}$ . Continuando este proceso podemos formar la siguiente cadena (finita e infinita) de subespacios:

$$R_{\ell_0} R_{\ell_0+1} R_{\ell_0+2} R_{\ell_0+3} \dots \quad (7)$$

Es claro que la suma de todos los subespacios en la cadena (7) es invariante ante  $F_+, F_-, F_3, H_+, H_-$  &  $H_3$ . Como estamos considerando una representación irreducible, el hecho anterior significa que la suma de los  $R_\ell$  en la cadena (7) es todo  $R$ .

Si la cadena (7) es infinita, es claro que la representación es infinita; si, por otra parte, termina en un peso máximo

$\tilde{l}$  , la representación es finita.

Si la cadena (7) termina en el peso máximo  $\tilde{l}$  , tenemos que  $C_{\tilde{l}+1} = 0$  . O utilizando la expresión para  $C_l$  dada en (6) tenemos:

$$C_{\tilde{l}+1} = \frac{i}{l+1} \sqrt{\frac{((\tilde{l}+1)^2 - l_0^2) ((\tilde{l}+1)^2 - l_1^2)}{4(\tilde{l}+1)^2 - 1}} = 0$$

y por lo tanto:

$$((\tilde{l}+1)^2 - l_0^2) ((\tilde{l}+1)^2 - l_1^2) = 0$$

pero:  $\tilde{l} \geq 0$  .°.  $(\tilde{l}+1)^2 - l_1^2 = 0$

lo que significa que:

$$\tilde{l} = |l_1| - 1 , \text{ .°. } |l_1| > l_0$$

Como  $\tilde{l}$  es entero o racional con denominador 2, dependiendo de  $l_0$  , las últimas relaciones significan que, en una representación irreducible finita del grupo propio de Lorentz,  $l_1$  es entero o racional con denominador 2, dependiendo de  $l_0$  .

Con esto terminamos el estudio de las representaciones del grupo propio de Lorentz (o grupo de Lorentz simplemente).

## CAPÍTULO IV

### LA ECUACIÓN DE SCHRÖEDINGER

En este capítulo estudiaremos el grupo de la ecuación de Schrödinger. Antes de entrar de lleno en el tema, haremos algunas consideraciones generales sobre la teoría de grupos de Lie, pues esta nos dará algunos resultados necesarios para el estudio del grupo de la ecuación de Schrödinger. (1)

#### SECCIÓN I

#### CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA TEORÍA DE GRUPOS DE LIE

Sea  $G$  un grupo con un número infinito no denumerable de elementos que pueden caracterizarse por un conjunto de  $m$  parámetros reales que varían en forma continua,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Supongamos que los parámetros del elemento identidad  $e$  son todos cero y que los  $m$  parámetros son esenciales (i.e. no podemos caracterizar cualquier elemento de  $G$  con un número menor de parámetros). Llamamos a esta parametrización de los elementos de  $G$  un sistema de coordenadas en  $G$ . Si  $g \in G$ , llamamos a las  $\alpha_k$  las coordenadas de  $g$  en el sistema de coordenadas dado.

Un grupo  $G$  es un grupo de Lie<sup>(2)</sup> de dimensión  $m$  si podemos introducir un sistema de coordenadas en  $G$  tal que

1.  $\alpha_k = 0$  si  $g = e$  ( $e$  el elemento identidad)

2. Si  $h, k, g \in G$  y  $h = kg$ , entonces:

$$h_r = f_r(k_1, \dots, k_m; g_1, \dots, g_m) \text{ donde las } f_r$$

(1) Este grupo se definirá más adelante.

(2) Estrictamente es un grupo local de Lie.

son funciones continuas y diferenciables en una vecindad suficientemente pequeña de la identidad y  $h_r, k_r, g_r$  son los parámetros de  $h, k$  y  $g$  respectivamente.

Como ejemplos de grupos de Lie tenemos al grupo de rotaciones tratado en el capítulo II y al grupo de Lorentz tratado en el capítulo III. El grupo de rotaciones es un grupo de dimensión 3 y el grupo de Lorentz un grupo de dimensión 6.

Consideremos ahora una representación  $g \rightarrow T_g$  del grupo de Lie  $G$ . Como un elemento de  $G$  queda definido completamente por sus parámetros, podemos considerar a la transformación  $T_g$  como una función de estos parámetros:

$$T_g = T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv T(\alpha) \quad (1)$$

i.e. cada elemento  $T_{ik}(g)$  de la matriz  $T_g$ , es una función de las  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

DEFINICIÓN 1: Una representación  $g \rightarrow T_g$  es diferenciable si todos los elementos  $T_{ik}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  de las matrices  $T_g$  son funciones diferenciables de los parámetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

El operador representado por la matriz cuyos elementos están dados por

$$\frac{\partial T_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha_j}$$

se llama la derivada del operador  $T(\alpha)$  respecto a  $\alpha_j$  y

se escribe

$$\frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha_j}$$

DEFINICIÓN 2: Sea  $g \rightarrow T_g$  una representación diferenciable.

La derivada

$$\left. \frac{\delta T(\alpha)}{\delta \alpha_j} \right|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0} \quad (2)$$

se llama el operador infinitesimal correspondiente al parámetro  $\alpha_j$ . Denotaremos este operador por el símbolo  $I_j$ .

Es claro entonces que el número de operadores infinitesimales de una representación diferenciable es igual a la dimensión del grupo.

TEOREMA 1: Sean  $g \rightarrow T$  &  $g \rightarrow T_1$  dos representaciones del grupo de Lie  $G$  que actúan en el mismo espacio  $R$ . Si estas representaciones tienen los mismos operadores infinitesimales, entonces son iguales.

DEMOSTRACION: Consideremos la función

$$Y(g) = T_g(x) \quad (3)$$

Como  $T_g$  es diferenciable con respecto a los parámetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , es claro que  $Y(g)$  es también diferenciable con respecto a estos parámetros.

Si sustituimos  $g^{-1}$  por  $g$  en (3) y multiplicamos por la izquierda por  $T(h)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} T(h) Y(g^{-1}) &= T(h) T(g^{-1}) x = T(hg^{-1}) x \\ &= Y(hg^{-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

pues  $g \rightarrow T$  es una representación.

Si ponemos  $hg^{-1} = f$  en (4) tenemos:

$$T(f) Y(g^{-1}) = Y(f) \quad (5)$$

Sean  $\alpha_i(f)$ ,  $\alpha_i(g)$  &  $\alpha_i(fg)$  los

La derivada

$$\left. \frac{\delta T(\alpha)}{\delta \alpha_j} \right|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0} \quad (2)$$

se llama el operador infinitesimal correspondiente al parámetro  $\alpha_j$ . Denotaremos este operador por el símbolo  $I_j$ .

Es claro entonces que el número de operadores infinitesimales de una representación diferenciable es igual a la dimensión del grupo.

TEOREMA 1: Sean  $g \rightarrow T$  &  $g \rightarrow T_1$  dos representaciones del grupo de Lie  $G$  que actúan en el mismo espacio  $B$ . Si estas representaciones tienen los mismos operadores infinitesimales, entonces son iguales.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función

$$Y(g) = T_g(x) \quad (3)$$

Como  $T_g$  es diferenciable con respecto a los parámetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , es claro que  $Y(g)$  es también diferenciable con respecto a estos parámetros.

Si sustituimos  $g^{-1}$  por  $g$  en (3) y multiplicamos por la izquierda por  $T(h)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} T(h) Y(g^{-1}) &= T(h) T(g^{-1}) x = T(hg^{-1}) x \\ &= Y(hg^{-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

pues  $g \rightarrow T$  es una representación.

Si ponemos  $hg^{-1} = f$  en (4) tenemos:

$$T(fg) Y(g^{-1}) = Y(f) \quad (5)$$

Sean  $\alpha_i(f)$ ,  $\alpha_i(g)$  &  $\alpha_i(fg)$  los

parámetros que caracterizan a los elementos  $f, g$  &  $fg$  del grupo  $G$ . Como  $G$  es un grupo de Lie, podemos escribir:

$$\alpha_i(fg) = \varphi_i(\alpha_1(f), \alpha_2(f), \dots, \alpha_m(f); \alpha_1(g), \dots, \alpha_m(g)) \quad (6)$$

donde  $\varphi_i$  es una función continua y diferenciable. Es claro que

$\varphi_i$  no depende de la representación. Diferenciando la ecuación

(5) con respecto a  $\alpha_j(f)$  tenemos:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial T(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \cdot \frac{\partial \varphi_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} \cdot y(g^{-1}) = \frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_j(f)} \quad (7)$$

Si ponemos  $g = f^{-1}$  en la ecuación (7) tenemos que:

$$\frac{\partial T(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} = I_i$$

y por lo tanto podemos escribir:

$$\frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^m S_{ij}(f) I_i y(f) ; (j=1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

donde:

$$S_{ij}(f) = \left. \frac{\partial \varphi_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} \right|_{g=f^{-1}} \quad (9)$$

(8) es un sistema de ecuaciones diferenciable, sujetas a la

condición inicial  $y(e) = X$ . Esta condición inicial

viene de (3), pues por ser  $T$  una representación tenemos que

$$T(e) = E \quad (\text{la identidad}) \text{ y por lo tanto } y(e) = Ex = X.$$

Si reemplazamos  $e$  por los parámetros que lo representan

tenemos que:

$$y(0, 0, \dots, 0) = X \quad (10)$$

Consideremos ahora la ecuación (8) para  $j = 1$  con

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0 \quad . \quad \text{Obtenemos:}$$

$$\frac{\partial y(\alpha_1, 0, \dots, 0)}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^m S_{i1}(\alpha_1, 0, \dots, 0) I_i y(\alpha_1, 0, \dots, 0)$$

Esta ecuación diferencial junto con la condición inicial (10) determina en forma única la función:

$$y(\alpha_1, 0, \dots, 0) = F_1(\alpha_1) \quad (11)$$

Enseguida, consideremos la ecuación (8) para  $j = 2$

con  $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_m = 0$  . Obtenemos:

$$\frac{\partial y(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0)}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^m S_{i2}(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0) I_i y(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0)$$

Esta ecuación diferencial, junto con la condición (11)

determina en forma única la función:

$$y(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0) = F_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

Si continuamos este razonamiento, podemos concluir que el sistema de ecuaciones (8) con la condición inicial (10) determina en forma única a la función  $y(q)$  ; esto significa que los operadores infinitesimales  $I_j$  , ( $j = 1, \dots, m$ ) determinan en forma única a la representación  $\mathbb{T}$  (es claro de la expresión (8)).

En la prueba del teorema anterior hemos mostrado, en forma implícita, como construir una representación  $\mathbb{T}$  a partir de los operadores infinitesimales. Podemos pensar entonces que el problema de encontrar la representación  $\mathbb{T}$  se reduce al problema de encontrar los operadores infinitesimales correspondientes.

**TEOREMA 2:** Los operadores infinitesimales  $I_j$ , ( $j=1, \dots, m$ ) que corresponden a una representación  $T$  del grupo de Lie  $G$ , satisfacen las relaciones de conmutación:

$$I_j I_k - I_k I_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} I_i \quad (12)$$

donde las constantes  $C_{ijk}$  no dependen de la representación  $T$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Sabemos que toda representación  $T^{(1)}$  satisface una ecuación diferencial de la forma (8) y que la solución de tal ecuación es la representación  $T$  (i.e., dada una representación, la ecuación (8) correspondiente siempre tiene solución). La condición necesaria para que (8) tenga solución es que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \quad (13)$$

Demostraremos entonces que (13) implica (12).

Sabemos que:

$$\frac{\partial y(\varphi)}{\partial \alpha_j(\varphi)} = \sum_{i=1}^m S_{ij}(\varphi) I_i y(\varphi)$$

Escribiremos la ecuación anterior en la forma:

$$\frac{\partial y(\varphi)}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m S_{ij}(\varphi) I_i y(\varphi) \quad (14)$$

(i.e. no escribiremos el argumento  $\varphi$  de los parámetros  $\alpha_j$ ).

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} I_i y(\varphi) + S_{ij}(\varphi) I_i \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} I_i y(\varphi) + \sum_{i,i'=1}^m S_{ij}(\varphi) I_i S_{i'k}(\varphi) I_{i'} y(\varphi). \end{aligned}$$

(1) por supuesto, diferenciable.

y también: 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_\kappa \partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{i\kappa}(\varphi)}{\partial \alpha_j} I_i y(\varphi) + \sum_{i,i'=1}^m S_{i'\kappa}(\varphi) S_{ij}(\varphi) I_{i'} I_i y(\varphi)$$

igualando las dos expresiones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i,i'=1}^m S_{i'\kappa}(\varphi) S_{ij}(\varphi) [I_i I_{i'} - I_{i'} I_i] y(\varphi) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) I_i y(\varphi). \end{aligned}$$

y poniendo  $\varphi = e$ ,  $S_{ij}(e) = \delta_{ij}$  (como es evidente)

y la condición inicial (10) en la ecuación anterior, llegamos a que:

$$(I_j I_\kappa - I_\kappa I_j) X = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) \Big|_{\varphi=e} I_i X.$$

Como  $X$  es un vector arbitrario tenemos que:

$$I_j I_\kappa - I_\kappa I_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} I_i$$

donde los coeficientes:

$$C_{ijk} = \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) \Big|_{\varphi=e} \quad (15)$$

son independientes de la representación.

TEOREMA 3: Si cualquier conjunto de operadores lineales

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

y también: 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_\kappa \partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{i\kappa}(\varphi)}{\partial \alpha_j} I_i y(\varphi) + \sum_{i,i'=1}^m S_{i'\kappa}(\varphi) S_{ij}(\varphi) I_{i'} I_i y(\varphi)$$

igualando las dos expresiones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i,i'=1}^m S_{i'\kappa}(\varphi) S_{ij}(\varphi) [I_i I_{i'} - I_{i'} I_i] y(\varphi) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) I_i y(\varphi). \end{aligned}$$

y poniendo  $\varphi = e$ ,  $S_{ij}(e) = \delta_{ij}$  (como es evidente)  
y la condición inicial (10) en la ecuación anterior, llegamos  
a que:

$$(I_j I_\kappa - I_\kappa I_j) X = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) \Big|_{\varphi=e} I_i X.$$

Como  $X$  es un vector arbitrario tenemos que:

$$I_j I_\kappa - I_\kappa I_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} I_i$$

donde los coeficientes:

$$C_{ijk} = \left( \frac{\partial S_{i\kappa}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_\kappa} \right) \Big|_{\varphi=e} \quad (15)$$

son independientes de la representación.

TEOREMA 3: Si cualquier conjunto de operadores lineales

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

definidos en un espacio  $R$ , satisfacen las mismas relaciones de conmutación:

$$A_j A_k - A_k A_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} A_i \quad (16)$$

que los operadores infinitesimales entonces los operadores son los operadores infinitesimales de una representación del grupo en el espacio

DEMOSTRACIÓN: La condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial y_j(g)}{\partial \alpha_i} = \sum_{i=1}^m S_{ij} A_i y_j(g)$$

tenga solución es que:

$$\frac{\partial^2 y_j(g)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \frac{\partial^2 y_j(g)}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}$$

Sin embargo, la condición anterior es equivalente a la condición:

$$A_j A_k - A_k A_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} A_i$$

Por lo tanto es evidente que el sistema de ecuaciones tiene solución. Esta solución satisface la condición inicial  $y_j(e) = x$ .

Como el sistema de ecuaciones diferenciales es lineal, es claro que el operador  $T_A(g)$  que pone al vector  $x$  en correspondencia con el vector  $y_j(g)$ :

$$T_A(g) x = y_j(g)$$

es lineal.

Mostraremos ahora que

$$y(gh) = T_A(g) y(h)$$

es también una solución del sistema de ecuaciones diferenciales en cuestión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(gh)}{\partial \alpha_i(g)} &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial y(gh)}{\partial \alpha_s(g)} \cdot \frac{\partial \varphi_s(gh)}{\partial \alpha_i(g)} = \\ &= \sum_{j,s=1}^m \frac{\partial \varphi_s(gh)}{\partial \alpha_i(g)} S_{js}(gh) A_j y(gh) \end{aligned}$$

Pero se puede demostrar que:

$$\sum_j S_{ij}(fg) \frac{\partial \varphi_j(fg)}{\partial \alpha_k(f)} = S_{ik}(f)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial y(gh)}{\partial \alpha_i(g)} = \sum_j S_{ji}(g) A_j y(gh)$$

lo que significa que efectivamente  $y(gh)$  satisface las ecuaciones diferenciales. Es claro que  $y(gh)$  satisface la condición

$$y(gh)_{g=e} = y(h)$$

Como  $y(g) = T(g)x$ , es claro que:

$$T_A(gh)x = y(gh) = T_A(g)y(h) = T_A(g)T_A(h)x$$

lo que significa que:

$$T_A(gh) = T_A(g)T_A(h)$$

y por lo tanto la correspondencia  $g \rightarrow T_A(g)$  es efectivamente una representación.

Los operadores infinitesimales asociados a esta representación son:

$$\left. \frac{\partial T_A(g)}{\partial \alpha_j(g)} \right|_{g=e} \cdot x = \left. \frac{\partial y(g)}{\partial \alpha_j(g)} \right|_{g=e} =$$

$$= \sum_{i=1}^n S_{ij}(g) A_i y(g) \Big|_{g=e} = A_j x$$

lo que quiere decir que los operadores infinitesimales generados por la representación  $T_A$  son los operadores  $A$  .

Con esto queda demostrado el teorema 3.

## SECCIÓN II

### LA ECUACIÓN DE SCHRÖEDINGER

En esta Sección, última parte de este trabajo, haremos una aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos I & II y en la Sección anterior.

En mecánica cuántica, un sistema de  $n$  partículas se describe por la función de onda :

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \quad (1)$$

que satisface la ecuación de Schrödinger

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2)$$

donde  $H$  es el operador de Hamilton ( $H$  no contiene derivadas temporales). No nos importará aquí la forma de  $H$  ; sólo apuntaremos que un cambio en las condiciones externas produce un cambio en  $H$  .

Como el operador  $H$  no contiene derivadas temporales, la ecuación (2) es una ecuación diferencial de primer orden en  $t$  . Por lo tanto, la función  $\psi$  en el instante  $t_0$  .

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t_0) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$$
 define a  $\psi$  para todo tiempo  $t$  .

Las imágenes de la función  $\psi$  pueden ser números o elementos de un espacio lineal  $n$ -dimensional  $R$  . En el segundo caso, si escogemos una base ortonormal en  $R$  , podemos escribir la función vectorial  $\psi$  como un conjunto con  $n$  componentes

$$\psi_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t), \quad (j=1, \dots, n) \quad (3)$$

y la ecuación de Schrödinger como:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^n H_{jk} \Psi_k \quad (4)$$

El producto escalar en  $R$  se define en la forma usual como:

$$(\varphi, \psi) = \int \sum_{j=1}^n \varphi_j \bar{\psi}_j dr \quad (5)$$

donde  $\varphi$  &  $\psi$  son dos funciones de onda.

En mecánica cuántica, toda cantidad física  $\alpha$  se representa por un operador lineal  $A$  la expresión

$$\frac{(A\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} \quad (6)$$

Se interpreta como el valor promedio de  $\alpha$  en el estado  $\psi$ . El valor promedio toda cantidad física tiene que ser un número real. Esto implica que el operador  $A$  tiene que ser hermiteano. En particular, el operador de Hamilton representa la energía del sistema y por lo tanto,  $H$  es hermiteano.

Si se cumple que

$$A\psi = \lambda\psi$$

esto es, que  $\psi$  es una eigenfunción para el operador  $A$  que representa a la cantidad física  $\alpha$ , el valor promedio de  $\alpha$  es el eigenvalor  $\lambda$ .

DEFINICIÓN 1: Diremos que la ecuación de Schrödinger es invariante con respecto a un operador  $g$ , si  $g$  aplicado a toda solución  $\psi$  de la ecuación (i.e.  $g\psi$ ) es también una solución.

El conjunto de todos los operadores que dejan invariante

a la ecuación (2) forma un grupo evidentemente. Este grupo (o cualquiera de sus subgrupos) se llama un grupo de la ecuación de Schrödinger.

De aquí en adelante supondremos que los operadores  $g$  son lineales y que conmutan con  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

TEOREMA 1: Los operadores  $g$  conmutan con  $H$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\psi' = g\psi$ . Como  $g$  pertenece al grupo de la ecuación de Schrödinger tenemos que:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi'}{\partial t} = H\psi', \text{ i.e. } \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} g\psi = Hg\psi.$$

Pero sabemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} g\psi = g \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Por lo tanto, utilizando (2), tenemos que:

$$Hg\psi = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} g\psi = g \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = gH\psi$$

o sea que:

$$Hg\psi = gH\psi // \quad (7)$$

se sigue de (7) que

$$Hg^*\psi = g^*H\psi$$

pues  $H$  es hermiteano ( $g^*$  es el conjugado de  $g$ ).

Esto significa que los operadores hermiteanos:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} (g + g^*) \\ g_2 &= \frac{1}{2i} (g - g^*) \end{aligned} \quad (8)$$

también conmutan con  $H$ .

DEFINICIÓN 2: Se dice que una cantidad física representada por un operador hermiteano  $A$  se conserva si

1. si en un tiempo  $t = t_0$  el valor promedio de  $A$  es:

$$q = (A\psi(t_0), \psi(t_0)) ; (\psi, \psi) = 1$$

entonces en cualquier otro instante  $t$  el valor promedio de  $A$  es  $q$ .

2. si en el instante  $t = t_0$  la función de onda  $\psi$  es una eigenfunción para  $A$ , entonces lo será también en cualquier tiempo  $t$ .

TEOREMA 2:  $g_1$  &  $g_2$  representan cantidades físicas que se conservan.

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g_1 \psi, \psi) &= (g_1 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi) + (g_1 \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) \\ &= (i g_1 H \psi, \psi) + (g_1 \psi, i H \psi) \\ &= (g_1 H \psi, \psi) - i (g_1 \psi, H \psi) \\ &= i (g_1 H \psi, \psi) - i (H g_1 \psi, \psi) = 0 \end{aligned}$$

Esto prueba que  $q = (g_1 \psi, \psi)$  (el valor promedio de la cantidad física representada por el operador  $g_1$ ) no cambia en el tiempo.

Consideremos ahora la función

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = g_1 \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) - \lambda \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$$

donde  $g_1 \psi_0 = \lambda \psi_0$

Es claro que la función definida anteriormente satisface la ecuación de Schrödinger y que es igual a cero en  $t = t_0$ . Por lo tanto la función  $\psi$  es cero para todo  $t$  y tenemos que:

$$g_1 \psi = \lambda \psi \quad \text{PARA TODO } t.$$

El hecho de que exista una cantidad física que se conserva se llama la ley de conservación para esta cantidad. A cada elemento del grupo de la ecuación de Schrödinger le corresponde una ley de conservación. No todas las leyes de conservación son independientes. Así, la ley de conservación del operador  $f = gh$  se sigue de las leyes de conservación de los operadores  $g$  &  $h$ . Es natural entonces, especialmente para el caso de grupos continuos (que dan un continuo de leyes de conservación), plantearse el problema de encontrar un conjunto de leyes de conservación "fundamentales", de las cuales puedan derivarse todas las otras.

Demostraremos el siguiente teorema solamente para grupos de Lie:

TEOREMA 3: Sea el grupo de operadores  $G$  de la ecuación de Schrödinger un grupo de Lie de dimensión  $m$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  los parámetros del grupo  $G$ , y  $I_1, I_2, \dots, I_m$  los operadores infinitesimales correspondientes. Entonces:

1. todo operador infinitesimal corresponde a una cantidad física que se conserva

y

2. todas las leyes de conservación relacionadas con los

elementos del grupo  $G$  se siguen de las  $m$  LEYES de conservación relacionadas con los  $m$  operadores infinitesimales.

DEMOSTRACIÓN: Si  $g \in G$ , entonces:

$$g H \Psi = H g \Psi$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al parámetro  $\alpha_j$ , ( $j=1, 2, \dots, m$ ) del elemento  $g$  y poniendo  $g = e$  tenemos:

$$I_j H \Psi = H I_j \Psi \quad (9)$$

Esto prueba la primera parte del teorema.

Demostraremos ahora que si  $I_j H \Psi = H I_j \Psi$ , entonces  $g H \Psi = H g \Psi$  para todo  $g \in G$ . En otras palabras, que la ley de conservación para  $g$  se sigue de las leyes de conservación relacionadas con los operadores  $I_j$ .

En la Sección anterior obtuvimos la expresión (8):

$$\frac{\partial y(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^m S_{ij}(f) I_i y(f) \quad (10)$$

donde  $y(f) = T_f(x)$ .

Para el caso que nos interesa podemos escribir esta expresión así:

$$(\text{SIENDO } g \in G), \frac{\partial}{\partial \alpha_j} g \Psi = \sum_{i=1}^m S_{ij}(g) I_i g \Psi \quad (11)$$

(donde  $\Psi$  es una función arbitraria).

Si reemplazamos  $\Psi$  en la ecuación anterior por  $H \Psi$ , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} g H \Psi = \sum_{i=1}^m S_{ij}(g) I_i g H \Psi \quad (12)$$

Operando con  $H$  a ambos lados de la ecuación (11) y utilizando (9) tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} H g \psi = \sum_{i=1}^m S_{ij}(\alpha) I_i H g \psi$$

Restando esta expresión de la ecuación (12) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (gH - Hg) \psi = \sum_{i=1}^m S_{ij}(\alpha) I_i (gH - Hg) \psi$$

y haciendo la sustitución:

$$\chi(\alpha) = (gH - Hg) \psi$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \chi(\alpha)}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m S_{ij}(\alpha) I_i \chi(\alpha)$$

sujetas a la condición inicial evidente:

$$\chi(e) = (eH - He) \psi = 0.$$

Es evidente entonces, por argumentos similares a los utilizados en la Sección anterior, que  $\chi(\alpha)$  es siempre cero. Por lo tanto:

$$(gH - Hg) \psi = 0$$

y entonces

$$gH \psi = Hg \psi$$

Con esto queda demostrado el teorema.

Aplicaremos ahora los resultados obtenidos hasta ahora a

varios casos de interés.

Si tenemos un sistema sujeto a condiciones externas constantes, todos los instantes de tiempo serán equivalentes. Esto es claro pues el sistema no se modificará (como un todo) en el transcurso del tiempo (en otras palabras para este sistema el tiempo es homogéneo). Por lo tanto, si  $\Psi(t)$  es una solución de la ecuación de Schrödinger para este sistema, todas las funciones  $\Psi(t + \alpha)$ ,  $(-\infty < \alpha < \infty)$ , serán también soluciones de la ecuación. Definamos los operadores

$$T(\alpha) \Psi(t) = \Psi(t + \alpha)$$

Estos operadores forman un grupo de la ecuación de Schrödinger. El grupo es un grupo de Lie monoparamétrico con un solo operador infinitesimal  $\mathbb{I}$  que está dado por:

$$\mathbb{I} \Psi(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} T(\alpha) \Psi(t) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi(t + \alpha) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t)$$

Como demostramos en el teorema 3, cada operador infinitesimal de una representación del grupo de la ecuación de Schrödinger tiene asociada una ley de conservación. En este caso, la ley de conservación conectada con la homogeneidad del tiempo es la ley de conservación de la energía. El operador

$$\frac{\hbar}{i} \mathbb{I} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

se llama el operador de energía.

Consideremos, en seguida, un sistema sujeto a condiciones espaciales externas homogéneas. En otras palabras, si trasladamos el sistema como un todo en el espacio, la energía potencial no cambia.

Si  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)$  es una función de onda para el sistema, entonces  $\Psi(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}, t)$  es también una función de onda para el sistema. Por lo tanto, los operadores  $T(\vec{a})$  definidos por:

$$T(\vec{a}) \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = \Psi(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}, t)$$

forman un grupo de la ecuación de Schrödinger (el grupo de traslaciones). Este es un grupo de Lie con 3 parámetros (por ejemplo: las componentes  $a_1, a_2$  y  $a_3$  del vector  $\vec{a}$ ), con tres operadores infinitesimales  $I_1, I_2$  &  $I_3$  dados por:

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n}$$

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n}$$

Obtendremos, como ejemplo, el operador infinitesimal  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) &= \frac{\partial}{\partial a_1} T(\vec{a}) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \Big|_{\vec{a}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial a_1} \Psi(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}, t) \Big|_{\vec{a}=0} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \Psi. \end{aligned}$$

Con estos tres operadores  $I_1, I_2$  &  $I_3$  están asociadas tres leyes de conservación: las Leyes de conservación de momentum lineal en cada eje. Los operadores:

$$P_1 = \frac{\hbar}{i} I_1 ; P_2 = \frac{\hbar}{i} I_2 ; P_3 = \frac{\hbar}{i} I_3$$

se llaman las componentes del operador de momentum.

Finalmente estudiaremos un sistema situado en un campo con simetría central. Supondremos primero que el sistema consiste de una sola partícula y generalizaremos después al caso de partículas.

Esta partícula queda descrita por su función de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Si las imágenes de  $\Psi$  son números, podemos aplicar a  $\Psi$ , en virtud de la simetría esférica del campo, la teoría desarrollada en la Sección V del capítulo II. Allí obtuvimos la expresión:

$$T_g \Psi(x) = \Psi_1(x), \text{ DONDE } \Psi_1(x) = \Psi(\vec{g}^{-1}x)$$

Podemos escribir entonces para este caso:

$$T(g) \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{g}^{-1} \vec{r}, t)$$

Si las imágenes de  $\Psi$  son vectores, tenemos que escribir la expresión anterior en la forma:

$$T(g) \Psi(\vec{r}, t) = g \Psi(\vec{g}^{-1} \vec{r}, t) \quad (13)$$

Para el caso de un sistema de  $n$  partículas tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} T(g) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) &= \\ &= g \Psi(\vec{g}^{-1} \vec{r}_1, \dots, \vec{g}^{-1} \vec{r}_n, t). \end{aligned}$$

Si las imágenes de  $\Psi$  son elementos de un espacio lineal cualquiera  $R$  que se transforma con la representación  $S$  del grupo de rotaciones, la expresión anterior toma la forma:

$$T(g) \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = S(g) \Psi(g^{-1} \vec{r}_1, \dots, g^{-1} \vec{r}_n, t). \quad (14)$$

Se puede probar en forma inmediata que los operadores  $T(g)$  forman una representación del grupo de rotaciones en  $R$ . Como el grupo de rotaciones es un grupo de Lie de dimensión 3, la representación  $T$  está completamente definida por 3 operadores infinitesimales  $I_x, I_y$  &  $I_z$ . Calcularemos ahora estos operadores.

Si  $g$  es una rotación en un ángulo  $\alpha_z$  alrededor del eje  $O_z$  i.e.  $g = g(0, 0, \alpha_z)$  y escribimos  $\varphi$  en las coordenadas cilíndricas  $\rho_k, z_k, \varphi_k$ ; ( $k = 1, \dots, n$ ) podemos escribir (14) en la forma:

$$\begin{aligned} T(0, 0, \alpha_z) \Psi(\rho_1, z_1, \varphi_1; \dots; \rho_n, z_n, \varphi_n; t) \\ = S(0, 0, \alpha_z) \Psi(\rho_1, z_1, \varphi_1 - \alpha_z; \dots; \rho_n, z_n, \varphi_n - \alpha_z; t) \end{aligned}$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a  $\alpha_z$  y poniendo  $\alpha_z = 0$ , obtenemos:

$$I_z \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = I_z^S \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_k}$$

donde  $I_z^S$  es el operador infinitesimal correspondiente al parámetro  $\alpha_z$  en la representación  $S$ .

Si introducimos los operadores hermiteanos

$$\left. \begin{aligned} J_z &= i\hbar I_z ; & S_z &= i\hbar I_z^S ; \\ M_z &= -i\hbar \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

podemos escribir la última expresión en la forma:

$$J_z \Psi = (S_z + M_z) \Psi \quad (16)$$

La cantidad física representada por el operador  $J_z$  (que sólo difiere del operador infinitesimal  $I_z$  por un factor constante) se llama la componente  $z$  del momentum angular total; la cantidad representada por  $S_z$  es la componente del spin y la cantidad representada por  $M_z$  es la componente  $z$  del momentum angular orbital.

Nótese que  $S_z$  depende de la representación  $S$  y que  $M_z$  no depende de esta representación. Si las imágenes de  $\varphi$  son escalares,  $S$  es la representación unidad y  $S_z$  es cero, mientras que  $M_z$  es igual a  $J_z$ . Podemos pensar en  $M_z$  como el operador infinitesimal  $A_3$  de la Sección V del capítulo II, correspondiente a la representación del grupo de rotaciones en el espacio de funciones de valor numérico definidas sobre la esfera unitaria.

Podemos escribir  $M_z$  en coordenadas cartesianas como:

$$M_z = -i\hbar \sum_{k=1}^m \left( x_k \frac{\partial}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad (17)$$

De la misma manera en que derivamos  $J_z$  podemos obtener:

$$J_x = S_x + M_x \quad ; \quad J_y = S_y + M_y$$

donde:

$$\begin{aligned} S_x &= i\hbar I_x^S \quad ; \quad S_y = i\hbar I_y^S \\ M_x &= -i\hbar \sum_{k=1}^n \left( y_k \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \\ M_y &= -i\hbar \sum_{k=1}^n \left( z_k \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \end{aligned}$$

Relacionadas con  $J_z, J_y \& J_x$  tenemos  
las tres leyes de conservación que son consecuencia de la isotropía del espacio.

BIBLIOGRAFIA

1. BORN Max . Natural Philosophy of Cause and Chance  
Dover Publications Inc. New York 1964
2. Hagedorn E. Relativistic Kinematics W.A. Benjamin  
Inc. New York 1964
3. Houtappel  
Van Dam  
Wigner The Conceptual Basis and Use of the Geo-  
metric Invariance Principles Reviews of  
modern Physics, Vol. 37 , number 4 , Oct. 1965
4. Kahan Theo Theory of Groups in Classical and Quantum  
Physics , New York , 1966, American Elsevier  
Publishing Company Inc.
5. Kolmogorov A.N.  
Fomin S.V. Introductory Real Analysis, Prentice Hall Inc.  
1970/
6. Landau L.D.  
Lifshitz E.M. Quantum Mechanics -non relativistic Theory  
Pergamon Press Ltd. 1965.
7. Lyubarskii G.Ya. The Application of Group Theory in Physics  
Pergamon Press, New York, 1960.
8. Messiah Albert Quantum Mechanics Vol. 1 John Wiley & Sons Inc.  
New York, 1966.

9. Shilov G.E.                    Linear Spaces (an introduction to the theory of) Prentice Hall Inc. , 1961.
  
10. Wigner E.P.                   Invariance in Physical Theory , Proceedings of the American Philosophical Society, Vol 93, No.7 December 1949.
  
- 11.