

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE TEOREMAS  
DE PUNTO FIJO EN EL PLANO

**BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE TEOREMAS  
DE PUNTO FIJO EN EL PLANO

Roberto A. Molina C.

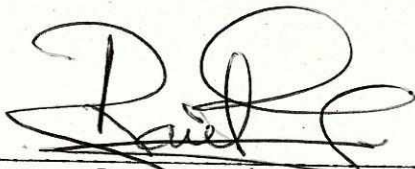
Trabajo de investigación presentado para optar  
al grado académico de:

Licenciado en Matemática

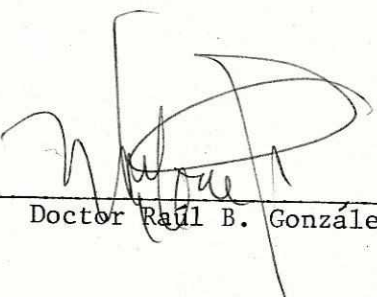
GUATEMALA

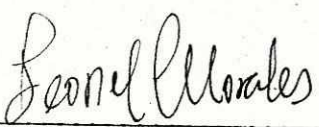
1986

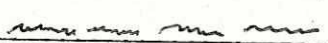
Vo. Bo. :

(f)   
\_\_\_\_\_  
Doctor Raúl B. González

Tribunal:

(f)   
\_\_\_\_\_  
Doctor Raúl B. González

(f)   
\_\_\_\_\_  
Licenciado Leonel Morales

(f)   
\_\_\_\_\_  
Doctor Luis Gerardo Radford

Fecha de aprobación: 25 de julio de 1986.

A Olga Cruz de Molina y Carlos Molina,  
mi amor y agradecimiento a ellos es monótono  
creciente no acotado superiormente.

## PREFACIO

Un espacio topológico  $X$  es llamado espacio de punto fijo si toda función continua  $f: X \rightarrow X$  deja un punto fijo. Es decir, existe algún punto  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

La prueba que  $[-1, 1]$  es un espacio de punto fijo es simple; dada la función continua  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , consideremos  $F(x) = f(x) - x$  definida y continua en  $[-1, 1]$ . Claramente  $F(-1) \geq 0$  y  $F(1) \leq 0$  entonces, por el teorema del valor intermedio debe existir  $x_0 \in [-1, 1]$  tal que  $F(x_0) = 0$ , lo que es igual  $f(x_0) = x_0$ .

El disco unitario  $D$  en el plano también es un espacio de punto fijo. Sin embargo, la prueba no es tan simple como la de  $[-1, 1]$ .

El objetivo de esta monografía es presentar una demostración clara y sencilla de esto último, lo que corresponde a lo expuesto en el último capítulo.

Desde luego, para ello deberemos estudiar los fundamentos de la topología algebraica, que es el material de la introducción y primeros capítulos. La introducción contiene los resultados importantes de topología general, el primer capítulo, los mismos resultados escritos en términos de topología algebraica. A mi parecer es la forma más natural de introducir los nuevos conceptos. Y por último, los capítulos 2 y 3 contienen los resultados que harán posible una prueba clara y elocuente.

Solo me resta advertir al lector la ausencia de algunas demostraciones, que por encontrarse en las referencias he visto innecesario incluirlas.

## CONTENIDO

I.	INTRODUCCION	1
II.	EL GRUPO $H^0(X)$ Y EL CONJUNTO $\mathbb{W}_0(X)$	5
III.	LA RELACION HOMOTOPIA Y EL GRUPO $H^1(X)$	13
IV.	EL TEOREMA DE PUNTOS FIJOS EN EL PLANO	20

## I. INTRODUCCION

A continuación presentamos definiciones y resultados de topología general que son básicos para nuestro estudio de topología algebraica.

Dado  $X$  un espacio topológico se dan las siguientes definiciones:

Definición 1.1.:  $X$  es desconexo si existen  $U, V$  subconjuntos no vacíos, abiertos en  $X$  tal que  $U \cup V = X$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Diremos que  $X$  es conexo si no es desconexo.

Definición 1.2.:  $X$  es conexo por trayectorias si todo par de puntos pueden ser unidos por una trayectoria en  $X$ . Es decir, para todo  $x, y \in X$  existe  $f: [0,1] \rightarrow X$  función continua tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

Definición 1.3.:  $X$  es localmente conexo por trayectorias en  $x$ , si toda vecindad de  $x$  contiene una vecindad conexa por trayectorias. O bien, si todo punto tiene una base de vecindades conexas.

Notemos que  $[0,1]$  es un espacio conexo, y  $\{0,1\}$  dotado de la topología discreta es desconexo. (Ref.4)

Lema 1.4.:  $X$  es desconexo ssi existe una función continua sobreyectiva  $f: X \rightarrow \{0,1\}$ .

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio topológico desconectado por  $U$  y  $V$ . Consideremos  $f: X \rightarrow \{0,1\}$  tal que  $f(U) = 0$  y  $f(V) = 1$ . Claramente  $f$  esta bien definida, es continua y sobreyectiva.

Por otra parte, sea  $f: X \rightarrow \{0,1\}$  una aplicación continua y sobreyectiva.

Tomemos  $U = f^{-1}\{0\}$  y  $V = f^{-1}\{1\}$  que obviamente desconectan a  $X$ .

Lema 1.5.: Dado  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subespacio conexo de  $X$ .

Si  $B$  es un subespacio de  $X$  tal que  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , entonces  $B$  es conexo. En particular  $\bar{A}$  es conexo.

DEMOSTRACION: Sea  $B$  un subespacio de  $X$  tal que  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , y supongamos que  $B$  es desconectado por  $U$  y  $V$ . Entonces  $A$  está contenido en  $U$  o en  $V$ . Asumiendo que  $A \cap V = \emptyset$  se sigue que  $\bar{A} \cap V = \emptyset$  lo cual es una contradicción. Por lo que  $B$  debe ser conexo.

No es difícil demostrar que la imagen continua de un espacio conexo es un espacio conexo (Ref.4). La imagen continua de un espacio conexo por trayectorias es también conexo por trayectorias (Ref.4). Sin embargo, la imagen continua de un espacio localmente conexo por trayectorias, no necesariamente es un espacio localmente conexo por trayectorias. Esto último será demostrado más adelante.

Teorema 1.6.: Todo espacio conexo por trayectorias es un espacio conexo.

Pero no todo espacio conexo es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio conexo por trayectorias y supongamos que  $X$  es desconexo. Es decir, existe  $f: X \rightarrow \{0,1\}$  función continua y sobreyectiva. Tomemos  $x, y$  elementos de  $X$  tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) = 1$ , entonces existe  $g: [0,1] \rightarrow X$  aplicación continua tal que  $g(0) = x$  y  $g(1) = y$ . Es fácil demostrar que  $g \circ f: [0,1] \rightarrow \{0,1\}$  es una función continua y sobreyectiva, lo que nos conduce a una contradicción. Por lo tanto  $X$  debe ser conexo.

Por otro lado, consideremos  $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ y } -1 \leq y \leq 1 \}$ ,  $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \text{ y } y = \text{sen } 1/x \}$  y sea  $Y = U \cup V$ . Claramente,  $V$  es la imagen de  $(0,1]$  bajo la aplicación continua  $F(x) = (x, \text{sen } 1/x)$  y

$Y = \bar{V}$ . Por lo que  $Y$  es un espacio conexo. Ahora bien, no es posible unir por medio de una trayectoria al origen  $(0,0)$  con algún punto de  $V$ , ya que  $B((0,0), 1/4\pi) \cap Y$  es una colección disjunta de segmentos de recta.

Teorema 1.7.: Todo espacio conexo y localmente conexo por trayectorias es un espacio conexo por trayectorias.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio conexo, localmente conexo por trayectorias y supongamos que no es conexo por trayectorias. Sean  $x, y$  elementos de  $X$  que no pueden ser unidos por medio de una trayectoria. Llamemos  $U$  a la colección de puntos que pueden ser unidos a  $x$  por medio de una trayectoria y  $V = X - U$ . No es difícil demostrar que  $U$  y  $V$  desconectan a  $X$ .

Proposición 1.8.: La imagen continua de un espacio localmente conexo por trayectorias, no necesariamente es localmente conexo por trayectorias.

DEMOSTRACION: Consideremos la aplicación  $f: \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(n) = 1/n$  y  $f(0) = 0$ . Claramente es localmente conexo por trayectorias, y  $f$  es continua siendo  $\mathbb{Z}$  un espacio discreto. Sin embargo,  $f(\mathbb{Z})$  no es localmente conexo por trayectorias, ya que toda vecindad de  $0$  contiene infinitos  $1/n$  que no pueden ser unidos por una trayectoria en  $f(\mathbb{Z})$ .

Proposición 1.9.: Un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  conexo por trayectorias puede no ser imagen bajo ninguna función continua en  $[0,1]$ .

DEMOSTRACION: Consideremos el disco abierto centrado en el origen con radio uno  $B((0,0),1)$ . Este no es compacto en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que no puede ser imagen continua de  $[0,1]$ .

Notemos que si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo y  $x \in X$ , entonces  $f|_{X - \{x\}}: X - \{x\} \rightarrow Y - \{f(x)\}$  es también un homeomorfismo. (Ref.3)

Proposición 1.10.: Dados los espacios  $\mathbb{R}$ ,  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  y  $\mathbb{R}^2$ , ningún par de ellos son homeomorfos.

DEMOSTRACION:  $\mathbb{R} - \{0\}$  no es conexo, pues es desconectado por  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ . Sin embargo,  $S^1$  y  $\mathbb{R}^2$  permanecen conexos al remover uno cualquiera de sus puntos. Entonces,  $S^1$  y  $\mathbb{R}^2$  no son homeomorfos a  $\mathbb{R}$ .

Por otro lado, al remover cualquier par de puntos distintos,  $S^1$  es desconectado mientras que  $\mathbb{R}^2$  sigue siendo conexo. Por lo tanto,  $S^1$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ .

Proposición 1.11.: Todo subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^2$  es conexo por trayectorias poligonales.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^2$  con  $x$  como elemento. Llamemos  $U$  la colección de puntos en  $X$  que pueden ser unidos a  $x$  por una trayectoria poligonal y  $V = X - U$ .

Dado  $y$  elemento de  $U$ , existe una bola abierta  $B(y,r)$  contenida en  $X$ , claramente todo elemento  $w$  de  $B(y,r)$  puede ser unido a  $y$  por medio de un segmento de recta, ya que  $B(y,r)$  es convexa. Pudiéndose entonces unir  $x$  y  $y$  por una trayectoria poligonal,  $w$  es también elemento de  $U$ . De igual forma obtenemos que  $V$  es abierto en  $X$ , y siendo  $U$  no vacío concluimos que  $V$  es vacío.

## II. EL GRUPO $H^0(X)$ Y EL CONJUNTO $\Pi_0(X)$ .

A continuación traduciremos los resultados obtenidos en la introducción en términos algebraicos. Para ello introducimos el conjunto  $\Pi_0(X)$  y el grupo  $H^0(X)$ .

Definición 2.1.: Dado  $X$  un espacio topológico, llamamos  $H^0(X)$  la colección de funciones continuas  $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$  con la suma usual. Es decir,  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  para todo par de funciones  $f, g$  y todo  $x$  elemento de  $X$ .

Es fácil demostrar que  $H^0(X)$  es un grupo abeliano. Dada  $f: X \rightarrow Y$  función continua, la aplicación  $f^*: H^0(Y) \rightarrow H^0(X)$  definida tal que  $f^*(g) = g \circ f$  es un homomorfismo. Y por último, dada  $g: Y \rightarrow Z$  tenemos que  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ . (Ref.3)

Definición 2.2.: En  $X$  espacio topológico definimos la relación  $\sim$ , de forma que  $x \sim y$  si existe una trayectoria en  $X$  que los une.

Lema 2.3.:  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$ .

Definición 2.4.: Denotamos  $\Pi_0(X)$  la colección de clases de equivalencia inducida por  $\sim$ , en otras palabras  $\Pi_0(X)$  es el conjunto cociente  $X/\sim$ .

Dada  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, no es difícil demostrar que  $f$  lleva clases de equivalencia en clases de equivalencia. Por lo que induce una función  $f_*: \Pi_0(X) \rightarrow \Pi_0(Y)$  tal que  $f_*([x]) = [f(x)]$ , o bien  $f_* \circ p_x = p_y \circ f$ . (Ref.3)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_x \downarrow & & \downarrow p_y \\ \Pi_0(X) & \xrightarrow{f_*} & \Pi_0(Y) \end{array}$$

Lema 2.5.: Si  $f$  es la aplicación identidad en  $X$ , entonces  $f_*$  es la función identidad en  $\Pi_0(X)$ .

DEMOSTRACION: Sea  $f$  la aplicación identidad en  $X$ , es decir que  $f(x) = x$  para todo  $x$  elemento de  $X$ . Entonces  $f_*([x]) = [f(x)] = [x]$  para todo  $x$  elemento de  $X$ .

Lema 2.6.: Dadas las funciones continuas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  tenemos que  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

DEMOSTRACION: Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas. Entonces  $(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)] = [g(f(x))] = g_*[f(x)] = g_* \circ f_*[x]$ .

Lema 2.7.: Un espacio topológico  $X$  es conexo ssi todo elemento de  $H^0(X)$  es una función constante.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio desconexo, entonces existe  $f: X \rightarrow \{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}$  función continua y sobreyectiva. Por supuesto  $f$  es elemento de  $H^0(X)$  y no es constante.

Por otro lado, sea  $f$  un elemento de  $H^0(X)$  no constante. Tomemos  $n \in f(X)$  y definamos  $r: \mathbb{Z} \rightarrow \{0,1\}$  tal que  $r(n) = 0$  y  $r(\mathbb{Z} - \{n\}) = 1$ . Claramente  $r$  es continua,  $r \circ f: X \rightarrow \{0,1\}$  es continua y sobreyectiva. Por lo que  $X$  es desconexo.

Notemos que un espacio  $X$  es conexo por trayectorias si y solo si  $\Pi_0(X)$  tiene un solo elemento. (Ref.3)

Teorema 2.8.: Si  $\Pi_0(X)$  contiene un solo elemento, entonces  $H^0(X)$  contiene solo funciones constantes. Sin embargo,  $H^0(X)$  puede tener solo funciones constantes pero  $\Pi_0(X)$  más de un elemento.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio tal que  $\Pi_0(X)$  tiene un solo elemento. Es decir, para un elemento fijo  $x_0$  de  $X$ , tenemos que  $x \sim x_0$  para todo  $x \in X$ .

Llamemos  $P_x: [0,1] \rightarrow X$  la trayectoria que une  $x$  con  $x_0$ . Dada  $f$  un elemento de  $H^0(X)$ ,  $f \circ P_x: [0,1] \rightarrow \mathbb{Z}$  es una función continua. Por lo que debe ser una función constante,  $(f \circ P_x)(0) = (f \circ P_x)(1)$ , lo que es igual  $f(x) = f(x_0)$  para todo  $x \in X$ .

Por otra parte, recordemos  $Y = \{(0,y): -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \text{sen } 1/x): 0 < x \leq 1\}$ . Siendo  $Y$  un espacio conexo, toda función continua  $f: Y \rightarrow \mathbb{Z}$  debe ser constante. Mientras que  $\pi_0(X) = \{U, V\}$ , siendo  $U = \{(0,y): -1 \leq y \leq 1\}$  y  $V = \{(x, \text{sen } 1/x): 0 < x \leq 1\}$ .

Definición 2.9.: Llamamos  $\text{Map}(\pi_0(X), \mathbb{Z})$  es un grupo abeliano con la suma usual.

Teorema 2.11.: La aplicación  $C: H^0(X) \rightarrow \text{Map}(\pi_0(X), \mathbb{Z})$  tal que  $C(f)[x] = f(x)$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACION: Sean  $f_1, f_2$  elementos de  $H^0(X)$ , entonces  $C(f_1 + f_2)([x]) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = C(f_1)[x] + C(f_2)[x]$ . Por otro lado, asumamos que  $C(f_1) = C(f_2)$ , entonces  $C(f_1)[x] = C(f_2)[x]$  para toda  $x \in X$ . Lo que es igual,  $f_1(x) = f_2(x)$  para toda  $x \in X$ .

Teorema 2.12.: Dado  $X$  un espacio localmente conexo por trayectorias, entonces  $H^0(X)$  y  $\text{Map}(\pi_0(X), \mathbb{Z})$  son isomorfos.

DEMOSTRACION: Por el teorema anterior sabemos que  $C: H^0(X) \rightarrow \text{Map}(\pi_0(X), \mathbb{Z})$  es un isomorfismo.

Dada la función  $F: \pi_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , consideremos  $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f = F \circ P$ .

Claramente,  $f$  está bien definida y nos falta probar que  $f \in H^0(X)$ , es decir que  $f$  es continua. Para  $[x]$  elemento de  $\pi_0(X)$  y  $y \in [x]$ , siendo  $X$  localmente conexo por trayectorias, y tiene una vecindad conexa por trayectorias  $W$ . Por supuesto  $W \subseteq [x]$ , por lo que  $[x]$  es abierto en  $X$ . Enton-

ces, dado  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^{-1}\{n\} = \bigcup \{x_i\}$  donde  $F(\{x_i\}) = n$ .

Proposición 2.13.: Dado un espacio topológico  $X$  desconectado por  $U$  y  $V$ . Existe una función biyectiva  $f: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(U) \cup \pi_0(V)$  y un isomorfismo  $g$  de  $H^0(X)$  en el producto directo  $H^0(U) \times H^0(V)$ .

DEMOSTRACION: Sea  $[x]$  elemento de  $\pi_0(X)$ , sendo  $[x]$  conexo, entonces  $[x]$  esta en  $\pi_0(U)$  o bien en  $\pi_0(V)$ . Por otro lado, todo  $[x] \in \pi_0(U)$  es también elemento de  $\pi_0(X)$ . Por lo que la aplicación identidad es una biyección.

Consideremos  $g: H^0(X) \rightarrow H^0(U) \times H^0(V)$  tal que  $g(f) = (f|_U, f|_V)$  para todo  $f \in H^0(X)$ . Las restricciones  $f|_U$  y  $f|_V$  son funciones continuas, ya que  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos. Es decir, la función  $g$  esta bien definida.

Ademas  $g(f + h) = ((f + h)|_U, (f + h)|_V) = (f|_U, f|_V) + (h|_U, h|_V) = g(f) + g(h)$ .

Supongamos  $(f|_U, f|_V) = (h|_U, h|_V)$  entonces  $f|_U = h|_U$  y  $f|_V = h|_V$ , por lo que  $f = h$ .

Dado  $(f, h) \in H^0(U) \times H^0(V)$  consideremos  $j: X \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $j|_U = f$  y  $j|_V = h$ . Claramente,  $j$  esta bien definida y es una función continua.

Proposición 2.14.: Dado  $X = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son subconjuntos cerrados con un punto en común, entonces, no necesariamente existe una biyección entre  $\pi_0(X)$  y  $\pi_0(U) \cup \pi_0(V)$ .

DEMOSTRACION: Consideremos  $U = [0, 1]$ ,  $V = [1, 2] \cup [3, 4]$  y  $X = U \cup V$ . Entonces,  $\pi_0(X) = \{[0, 2], [3, 4]\}$  mientras que  $\pi_0(U) \cup \pi_0(V) = \{[0, 1], [1, 2], [3, 4]\}$ . Y por supuesto es imposible una biyección entre ellos.

Proposición 2.15.: Dado  $X = Y_1 \times Y_2$  entonces existe una correspondencia

biyectiva entre  $\pi_0(X)$  y  $\pi_0(Y_1) \times \pi_0(Y_2)$ .

DEMOSTRACION: Sea  $X = Y_1 \times Y_2$  y consideremos  $f: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y_1) \times \pi_0(Y_2)$  tal que  $f([(y_1, y_2)]) = ([y_1], [y_2])$ . La función  $f$  esta bien definida y es sobreyectiva.

Supongamos que  $f([(y_1, y_2)]) = f([(y_1', y_2')])$ , es decir que  $([y_1], [y_2]) = ([y_1'], [y_2'])$ . Entonces  $[y_1] = [y_1']$  y  $[y_2] = [y_2']$  lo que implica  $y_1 \sim y_1'$  y  $y_2 \sim y_2'$ . Sean  $f_1: [0,1] \rightarrow Y_1$  y  $f_2: [0,1] \rightarrow Y_2$  aplicaciones continuas tal que  $f_1(0) = y_1$  y  $f_1(1) = y_1'$ ,  $f_2(0) = y_2$  y  $f_2(1) = y_2'$ . Definamos entonces  $F: [0,1] \rightarrow X$  tal que  $F(t) = \begin{cases} (f_1(2t), y_2) & \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (y_1', f_2(2t-1)) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

obviamente la función  $F$  es continua en  $[0,1]$ , por lo que  $(y_1, y_2) \sim (y_1', y_2')$ .

Proposición 2.16.: Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Entonces las funciones  $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  y  $f^*: H^0(Y) \rightarrow H^0(X)$  tales que  $f_*([x]) = [f(x)]$  y  $f^*(g) = g \circ f$  cumplen con lo siguiente:

- Si  $f$  es una aplicación sobreyectiva, entonces  $f_*$  es sobreyectiva.
- Dada  $f$  una aplicación inyectiva, entonces no necesariamente  $f_*$  es una función inyectiva.
- Si  $f$  es una función sobreyectiva, entonces  $f^*$  es una aplicación inyectiva.
- Dada  $f$  una aplicación inyectiva,  $f^*$  no es necesariamente una función sobreyectiva.

DEMOSTRACION: A) Sea  $f$  una función sobreyectiva y  $[y] \in \pi_0(Y)$ . Entonces existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ , es decir  $[y] = [f(x)] = f_*[x]$ .

B) Consideremos  $i: \mathbb{Z}_2[0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que  $i(x) = x$ . Es fácil demostrar

que  $i$  es una función inyectiva y continua. Sin embargo  $i_*: \pi_0(\mathbb{Z} \times [0,1]) \rightarrow \pi_0([0,1])$  no puede ser inyectiva, ya que  $\pi_0([0,1]) = \{[0,1]\}$  mientras que  $\{0\}$  y  $\{1\}$  son elementos de  $\pi_0(\mathbb{Z} \times [0,1])$ .

c) Asumamos que  $f^*(g) = g \circ f = 0$ . Es decir,  $(g \circ f)(x) = 0$  para todo  $x \in X$ , o bien  $g(f(x)) = 0$  para tdo  $x \in X$ . Dado  $y \in X$ , existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ . Entonces  $g(y) = g(f(x)) = 0$ , por lo que  $g = 0$ .

D) Consideremos  $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$  tal que  $f(n) = 2n$ . La función  $f$  es continua e inyectiva. Pero la aplicación  $f^*: H^0(2\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\mathbb{Z})$  tal que  $f^*(g) = g \circ f$  no es sobreyectiva. Siendo toda función de  $H^0(\mathbb{Z})$  y  $H^0(2\mathbb{Z})$  constante,  $f^*(g) = g \circ f$  es una aplicación constante para toda  $g \in H^0(2\mathbb{Z})$ . Entonces  $h(n) = 3$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  no es imagen de ninguna función de  $H^0(2\mathbb{Z})$  bajo  $f^*$ . Desde luego  $h \in H^0(\mathbb{Z})$ .

Proposición 2.17.: Dado  $X$  un subconjunto del plano euclidiano, y la función  $i: X \rightarrow \bar{X}$  tal que  $i(x) = x$ . Entonces  $i^*$  es una aplicación inyectiva.

DEMOSTRACION: Asumamos que  $i^*(f) = i^*(g)$  para  $f, g$  elementos de  $H^0(X)$ , entonces  $f \circ i = g \circ i$ . Es decir que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  elemento de  $X$ , por lo tanto  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \bar{X}$ .

Proposición 2.18.: El subconjunto del plano euclidiano  $X = \{(x, x/n, \text{sen } 1/x): x \in (0,1] \text{ y para } n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(0,0,z): z \in [-1,1]\} \cup \{(x,0, \text{sen } 1/x): x \in [0,1]\}$  es cerrado, acotado, conexo y con un número infinito de componentes-tractoria. Lo que es igual,  $\pi_0(X)$  tiene un número infinito de elementos.

Definición 2.19.: Dado  $X$  un espacio topológico con su respectivo conjunto cociente  $\pi_0(X)$ . Definamos  $T = \{S \subset \pi_0(X): p^{-1}(S) \text{ es abierto en } X\}$

entonces  $\pi_0(X) \cong T$ .

con  $p: X \rightarrow \mathcal{T}_0(X)$  tal que  $p(x) = [x]$ .

Proposición 2.20.: La familia  $T$  es una topología para  $\mathcal{T}_0(X)$  que hace continua la función  $p$ .

DEMOSTRACION: Sea  $\{S_i\}$  una colección arbitraria de elementos de  $T$ . Es decir,  $\{p^{-1}(S_i)\}$  es una colección de abiertos en  $X$ . Entonces  $\bigcup p^{-1}(S_i) = p^{-1}(\bigcup S_i)$  es también abierto en  $X$ , por lo que  $\bigcup S_i$  es elemento de  $T$ . Consideremos  $\{S_i\}_{i=1}^n$  una colección finita de elementos de  $T$ , entonces  $\{p^{-1}(S_i)\}_{i=1}^n$  son abiertos en  $X$ , lo que implica  $\bigcap_{i=1}^n p^{-1}(S_i) = p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n S_i)$  es un abierto en  $X$ . Por lo tanto  $\bigcap_{i=1}^n S_i$  es un elemento de  $T$ .

Por último  $p^{-1}(\mathcal{T}_0(X)) = X$  y  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  son ambos abiertos en  $X$ , por lo que  $\mathcal{T}_0(X)$  y  $\emptyset$  son elementos de  $T$ . Es decir,  $T$  es una topología para  $\mathcal{T}_0(X)$ , y es obvio que  $p$  es una función continua respecto a  $T$ .

Proposición 2.21.: Los grupos  $H^0(\mathcal{T}_0(X))$  y  $H^0(X)$  son isomorfos.

DEMOSTRACION: Consideremos  $p^*: H^0(\mathcal{T}_0(X)) \rightarrow H^0(X)$  tal que  $p^*(f) = f \circ p$ . Y sean  $f, g \in H^0(\mathcal{T}_0(X))$  entonces  $p^*(f + g) = (f + g) \circ p = (f \circ p) + (g \circ p) = p^*(f) + p^*(g)$ .

Supongamos que  $p^*(f) = p^*(g)$ , es decir  $f \circ p = g \circ p$ . Lo que es igual  $f([x]) = g([x])$  para todo  $x \in X$ . Por lo tanto  $f = g$ . Para  $f$  elemento de  $H^0(X)$  consideremos  $c(f): \mathcal{T}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $c(f)([x]) = f(x)$ . Entonces  $c(f)$  está bien definida, y por la proposición anterior, pertenece a  $H^0(\mathcal{T}_0(X))$ . Además  $p^*(c(f)) = c(f) \circ p = f$ .

Definición 2.22.: Dado  $X$  un espacio topológico, denotamos  $C_x = \bigcup \{C: \text{Subconjuntos conexos, } x \in C\}$  para cada  $x \in X$ .

Notar que  $x \in C_x$ ,  $C_x$  es conexo.  $C_x$  contiene a la componente por trayectorias de  $x$  y  $C_x$  es cerrado. (Ref.2)

Proposición 2.23.: La relación en  $X$  definida por  $y \sim x$  si  $y \in C_x$  es de equivalencia.

DEMOSTRACION: Supongamos  $y \sim x$ , lo que es igual  $y \in C_x$ . Por lo que  $C_x \subseteq C_y$  entonces  $x \in C_y$  o bien  $x \sim y$ . Por otra parte, sean  $y \sim x$  y  $x \sim z$  que significa  $y \in C_x$  y  $x \in C_z$ , entonces  $C_z \subseteq C_x \subseteq C_y$  que implica  $z \in C_y$  o bien  $z \sim y$ .

Notar que las componentes de  $X$  son precisamente los elementos de  $X/\sim$ .

Proposición 2.24.: Para todo espacio localmente conexo por trayectorias, las componentes y las componentes-trayectoria coinciden.

DEMOSTRACION: Sea  $A$  una componente-trayectoria de  $X$ , entonces  $A \subseteq C_x$  para todo  $x \in A$ , siendo  $C_x$  componente de  $X$ . Por otro lado,  $C_x$  es conexo por trayectorias, entonces  $C_x \subseteq A$ .

$C_x$  es un subconjunto abierto en  $X$  localmente conexo por trayectorias, por lo que  $C_x$  es también localmente conexo por trayectorias. Siendo conexo entonces es conexo por trayectorias.

Proposición 2.25.: Para todo  $X$  espacio compacto y localmente conexo por trayectorias  $\pi_0(X)$  es un conjunto finito.

DEMOSTRACION: Sea  $X$  un espacio compacto y localmente conexo por trayectorias. Asumamos que  $\pi_0(X) = \{A_i\}$  tiene un número infinito de elementos. Siendo cada  $A_i$  un subconjunto abierto de  $X$ ,  $\{A_i\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Sea entonces  $\{A_{ij}\}_{j=1}^n$  una subcubierta finita de  $X$ . Claramente  $\{A_{ij}\}_{j=1}^n$  es una colección finita de subconjuntos conexos por trayectorias cuya unión nos da  $X$ . Esto nos lleva a una contradicción, por lo tanto  $\pi_0(X)$  debe ser un conjunto finito.

### III. LA RELACION HOMOTOPIA Y EL GRUPO $H^1(X)$ .

Introducimos ahora el grupo fundamental asociado a un espacio topológico  $X$ , que lo denotaremos por  $H^1(X)$ . En su oportunidad, notaremos la gran analogía que tiene con el grupo  $H^0(X)$ , definido en el capítulo anterior. Y será de ayuda al lector, pensar en el grupo  $H^1(X)$  como generalización del grupo  $H^0(X)$ .

Definición 3.1.: Dados  $X, Y$  espacios topológicos y  $f, g: Y \rightarrow X$  funciones continuas. Decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicas, si existe una aplicación continua  $H: Y \times [0,1] \rightarrow X$  tal que  $H(y,0) = f(y)$  y  $H(y,1) = g(y)$ . Llamamos a  $H$  una homotopía.

Lema 3.2.: La relacion homotopía es de equivalencia en la colección de funciones continuas  $f: Y \rightarrow X$ .

DEMOSTRACION: Sean  $f, g, h: Y \rightarrow X$  funciones continuas, y consideremos a  $F: Y \times [0,1] \rightarrow X$  definida por  $F(y,t) = f(y)$ , que claramente es una homotopía entre  $f$  y  $f$  misma. Por otro lado, asumamos que  $G: Y \times [0,1] \rightarrow X$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Es decir,  $G(y,0) = f(y)$  y  $G(y,1) = g(y)$ . Definamos  $G': Y \times [0,1] \rightarrow X$  tal que  $G'(y,t) = G(y,1-t)$ . Es fácil demostrar que  $G'$  es una homotopía entre  $g$  y  $f$ . Por último, supongamos que  $F, G: Y \times [0,1] \rightarrow X$  son homotopías  $F: f \sim g$  y  $G: g \sim h$ . Entonces  $H: Y \times [0,1] \rightarrow X$  tal que  $H(y,t) = \begin{cases} F(y,2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(y,2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$  es una homotopía entre  $f$  y  $h$ .

Definición 3.3.: La relación homotopía induce una partición en la colección de funciones continuas  $f: Y \rightarrow X$ . Denotaremos  $[Y, X]$  al conjunto cociente.

Lema 3.4.: Dadas las funciones continuas  $h: Z \rightarrow Y$ ;  $g_0, g_1: Y \rightarrow X$ ; y  $f: X \rightarrow W$ . Y la homotopía  $G: g_0 \sim g_1$ , entonces  $g_0 \circ h \sim g_1 \circ h$  y  $f \circ g_0 \sim f \circ g_1$ .

DEMOSTRACION:  $f \circ G: Y \times [0, 1] \rightarrow X$  es una homotopía entre  $f \circ g_0$  y  $f \circ g_1$ . Por otro lado, definamos  $h \times 1: Z \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$  tal que  $h \times 1(Z, t) = (h(z), t)$ . Desde luego  $h \times 1$  es una aplicación continua. Entonces  $G \circ (h \times 1): Z \times [0, 1] \rightarrow X$  es una homotopía entre  $g_0 \circ h$  y  $g_1 \circ h$ .

Definición 3.5.: Llamaremos composición de clases de equivalencia, a la aplicación  $\circ: [X, W] \times [Y, X] \rightarrow [Y, W]$  tal que  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ . Dados  $g_0 \sim g_1: Y \rightarrow X$  y  $f_0 \sim f_1: X \rightarrow W$ , por el lema anterior  $f_0 \circ g_0 \sim f_0 \circ g_1 \sim f_1 \circ g_1$ . Por lo que la aplicación composición queda bien definida.

Lema 3.6.: Dadas las funciones continuas  $h: Z \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  y  $f: X \rightarrow W$  tenemos que: a)  $[g] \circ [1_Y] = [g] = [1_X] \circ [g]$

$$b) ([f] \circ [g]) \circ [h] = [f] \circ ([g] \circ [h])$$

Donde  $1_X: X \rightarrow X$  y  $1_Y: Y \rightarrow Y$  son las aplicaciones identidad.

Definición 3.7.: La función  $f: Y \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica, si existe  $e: X \rightarrow Y$  tal que  $f \circ e \sim 1_X$  y  $e \circ f \sim 1_Y$ . O lo que es igual  $[f] \circ [e] = [1_X]$ . Llamamos a  $e$  la inversa homotópica de  $f$ .

Lema 3.8.: Dada  $f: Y \rightarrow X$  equivalencia homotópica con inversa  $e$ ,  $Z$  y  $W$  espacios topológicos cualesquiera. Entonces  $[Z, Y]$  y  $[Z, X]$  son equipotentes, de igual forma lo son  $[X, W]$  y  $[Y, W]$ .

DEMOSTRACION: Consideremos las aplicaciones  $F: [Z, Y] \rightarrow [Z, X]$  tal que  $[h] \mapsto [f] \circ [h]$  y  $G: [Y, W] \rightarrow [X, W]$  tal que  $[k] \mapsto [e] \circ [k]$ , claramente bien

definidos.

Asumamos  $[f] \circ [h] = [f] \circ [h']$  entonces  $[e] \circ [f] \circ [h] = [[e] \circ [f] \circ [h']]$  lo que es igual  $[1x] \circ [h] = [1x] \circ [h']$  por lo que  $[h] = [h']$ . Por otra parte, sea  $h$  elemento de  $[Z, X]$ . Tomemos  $[e] \circ [h]$  perteneciente a  $[Z, Y]$  que por supuesto  $F([e] \circ [h]) = [f] \circ [e] \circ [h] = [h]$ . Supongamos  $G(k) = G(k')$  es decir  $[e] \circ [k] = [e] \circ [k']$ , entonces  $[f] \circ [e] \circ [k] = [f] \circ [e] \circ [k']$  por lo que  $[k] = [k']$ . Por último, sea  $k \in [X, W]$  y consideremos  $[f] \circ [k] \in [Y, W]$ , desde luego  $[e] \circ [f] \circ [k] = [k]$ .  $\square$

Definición 3.9.: Los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son homotópicamente equivalentes, si existe una equivalencia homotópica  $f: Y \rightarrow X$ . En particular si  $X$  consta de un solo elemento, decimos que  $Y$  es equivalente homotópicamente a un punto. Y lo llamamos un espacio contractible.

Debe ser claro al lector que  $[\{x\}, Z] = \pi_0(Z)$ , mientras que  $[Z, \{x\}]$  consta de un solo elemento, para cualquier espacio topológico  $Z$ . (Ref.3)

Proposición 3.10.: Para cualquier espacio contractible  $Y$  y cualquier espacio  $Z$ ,  $[Z, Y]$  tiene un solo elemento y  $[Y, Z]$  es equipotente a  $\pi_0(Z)$ .

DEMOSTRACION: Sea  $Y$  un espacio contractible, es decir que  $Y$  es homotópicamente equivalente a un punto. Llamemos  $f: Y \rightarrow \{x\}$  a la equivalencia homotópica. Entonces, para cualquier espacio  $Z$ ,  $[Z, Y]$  y  $[Z, \{x\}]$  son equipotentes. Teneiendo  $[Z, \{x\}]$  un solo elemento,  $[Z, Y]$  debe ser unimembre. Por otra parte,  $[Y, Z]$  y  $[\{x\}, Z]$  son también equipotentes. Las funciones  $\alpha: \{x\} \rightarrow Z$  son básicamente los puntos de  $Z$ , por lo que  $\pi_0(Z)$  debe ser equipotente a  $[\{x\}, Z]$ .

Aquí debe notarse la introducción del conjunto  $[X, Y]$  como generalización del conjunto  $\pi_0(X)$ . Siendo equipotentes cuando  $X$  es un conjun-

to de un solo miembro. Además,  $\tilde{\pi}_0(Y)$  nos indica qué tan desconexo por trayectorias es el espacio  $Y$ .

Definición 3.11.: En el plano complejo llamamos  $S^1$  al círculo unitario, es decir  $S^1 = \{ Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1 \}$ . Y  $D^2 = \{ Z \in \mathbb{C} : |Z| \leq 1 \}$  es el disco unitario.

Debe ser conocido el hecho que  $S^1$  con el producto complejo es un grupo, además tanto el producto como la inversión son aplicaciones continuas. Entonces,  $S^1$  es un grupo topológico. (Ref.4)

Lema 3.12.: La colección de funciones continuas  $F: X \rightarrow S^1$  junto con el producto  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  es un grupo abeliano.

DEMOSTRACION: Sean  $f, g: X \rightarrow S^1$  funciones continuas. Definamos  $(f, g): X \rightarrow S^1 \times S^1$  tal que  $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$  y  $m: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  el producto complejo. Obviamente  $(f, g)$  es una aplicación continua. Además,  $f \cdot g = m \circ (f, g)$  siendo composición de funciones continuas,  $f \cdot g$  es una función continua. Por lo que el producto está bien definido. Las aplicaciones  $1, f^{-1}: X \rightarrow S^1$  tal que  $1(x) = 1$  y  $f^{-1}(x) = \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}$  son respectivamente el neutro e inverso.

Por supuesto ambas funciones son continuas, y es fácil demostrar la asociatividad y conmutatividad.

Lema 3.13.: Dado  $X$  espacio topológico,  $[X, S^1]$  es un grupo abeliano con el producto definido por  $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ .

DEMOSTRACION: Sean las homotopías  $F: f \sim f'$  y  $G: g \sim g'$ . Consideremos la aplicación  $(F, G): X \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$  obviamente continua. Y definamos el producto de homotopías  $F \cdot G(x, t) = F(x, t) \cdot G(x, t)$ . Similarmente al lema anterior  $F \cdot G = m \circ (F, G)$ , por lo que  $F \cdot G$  es una función continua.

Además,  $F \cdot G(x,0) = F(x,0) \cdot G(x,0) = f(x)g(x)$  y  $F \cdot G(x,1) = F(x,1)G(x,1) = f'(x)g'(x)$ . Entonces  $F \cdot G : f \cdot g \sim f' \cdot g'$ . Por lo tanto el producto en  $[X, S']$  está bien definido.

Dados  $[f]$ ,  $[g]$  y  $[h]$  elementos de  $[X, S']$ ,  $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f \cdot g] \cdot h = [(f \cdot g) \cdot h] = [f \cdot (g \cdot h)] = [f] \cdot [g \cdot h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ .  $[f] \cdot [g] = [f \cdot g] = [g \cdot f] = [g] \cdot [f]$ .  $[f] \cdot [1] = [f \cdot 1] = [f]$ . Y por último  $[f^{-1}][f] = [f^{-1}f] = [1]$ .  $\square$

Lema 3.14.: Para toda función continua  $f: Y \rightarrow X$ , la aplicación  $f^*: [X, S'] \rightarrow [Y, S']$  definido por  $f^*[g] = [g] \cdot [f]$  es un homomorfismo.

DEMOSTRACION: Por el lema 3.13  $f^*$  está bien definida. Sean  $[h]$ ,  $[g]$  elementos de  $[X, S']$ , y evaluemos  $(f^*[g] \cdot f^*[h])(y) = ((g \circ f) \cdot (h \circ f))(y) = (g \circ f)(y) \cdot (h \circ f)(y) = g(f(y)) \cdot h(f(y)) = (g \cdot h)(f(y)) = ((g \cdot h) \circ f)(y) = (f^*[g \cdot h])(y)$ .  $\square$

Definición 3.15.: Para  $X$  un espacio topológico, el grupo  $[X, S']$  es llamado simplemente  $H^1(X)$ . Y por el lema 3.14 debe ser clara su analogía con  $H^0(X)$ .

Proposición 3.16.: La equivalencia homotópica de espacios topológicos es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACION: Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  espacios topológicos. La aplicación identidad  $i: X \rightarrow X$  tal que  $i(x) = x$ , es una equivalencia homotópica con el mismo como inverso homotópico.

Asumamos que  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica con  $e: Y \rightarrow X$  como su inversa homotópica. Por supuesto,  $e^{-1}$  es también equivalencia homotópica con  $f$  como su inverso homotópico. Supongamos  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  equivalencias homotópicas con  $e_f$  y  $e_g$  sus inversos homotópicos. Desde luego,  $g \circ f: X \rightarrow Z$  y  $e_f \circ e_g: Z \rightarrow X$  son funciones continuas. Además  $(g \circ f) \circ (e_f \circ e_g) =$

$g \circ (f \circ e_f) \circ e_g = g \circ 1_Y \circ e_g = g \circ e_g = 1_Z$ , y  $(e_f \circ e_g) \circ (g \circ f) = e_f \circ (e_g \circ g) \circ f = e_f \circ 1_Y \circ f = e_f \circ f = 1_X$ . Es decir,  $g \circ f$  es una equivalencia homotópica con inverso  $e_f \circ e_g$ .  $\square$

Proposición 3.17.: Todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  es contractible.

DEMOSTRACION: Sea  $A$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  con  $x_0 \in A$ . Consideremos  $f: A \rightarrow \{x_0\}$  para todo  $x \in A$ , y  $e: \{x_0\} \rightarrow A$  tal que  $e(x_0) = x_0$ . Definamos  $H: A \times [0,1] \rightarrow A$  de forma que  $H(x,t) = x_0 + t(x-x_0)$ . Claramente  $H$  es una aplicación bien definida y continua,  $H(x,0) = x_0 = (e \circ f)(x)$  y  $H(x,1) = x = 1_X(x)$ . Por lo que  $H: (e \circ f) \sim 1_X$ . Además  $f \circ e = 1_{\{x_0\}}$ , por lo tanto también homotópicas. Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica y  $A$  contractible.  $\square$

Proposición 3.18.: El conjunto  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  es homotópicamente equivalente a  $S^1$ .

DEMOSTRACION: Sean  $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow S^1$  tal que  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  y  $e: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , definida por  $e(x) = x$ .

Entonces  $(f \circ e)(x) = x = 1_{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}(x)$  para todo  $x \in S^1$ . Consideremos  $H: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  de forma que  $H(x,t) = \frac{x}{|x|} + t(x - \frac{x}{|x|})$ . La aplicación  $H$  está bien definida y es continua, además  $H(x,0) = \frac{x}{|x|} = (e \circ f)(x)$  y  $H(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .

Proposición 3.19.: Dados los espacios  $W$ ,  $X$  y  $Y$ , existe una biyección  $F: [W, X \times Y] \rightarrow [W, X] \times [W, Y]$ .

DEMOSTRACION: Sean  $W$ ,  $X$  y  $Y$  espacios topológicos  $p_1: X \times Y \rightarrow X$  y  $p_2: X \times Y \rightarrow Y$  las aplicaciones proyección. Y definamos  $F: [W, X \times Y] \rightarrow [W, X] \times [W, Y]$  tal que  $F([f]) = ([p_1 \circ f], [p_2 \circ f])$ .

Sean  $H: f \sim g$  entonces  $p_1 \circ f \sim p_1 \circ g$  y  $p_2 \circ f \sim p_2 \circ g$ , por lo que  $F$  está bien

definida. Por otra parte, asumamos que  $H_1: p_1 \circ f \sim p_1 \circ g$  y  $H_2: p_2 \circ f \sim p_2 \circ g$ , consideremos  $H: W \times [0,1] \rightarrow X \times Y$  tal que  $H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t))$ .  $H$  es una aplicación continua.  $H(x,0) = ((p_1 \circ f)(x), (p_2 \circ g)(x)) = f(x)$ . Por lo tanto  $H: f \sim g$ , es decir que  $F$  es inyectiva.

Por último, sea  $([f_1], [f_2])$  elemento de  $[W, X] \times [W, Y]$ , tomemos  $f: W \rightarrow X \times Y$  tal que  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ . Supongamos que  $f_1 \sim f'_1$  y  $f_2 \sim f'_2$ , entonces  $([f_1], [f_2]) = ([f'_1], [f'_2])$ , lo que significa  $f$  esta bien definida. Para cualquier par de elementos de  $[f_1]$  y  $[f_2]$ . Desde luego  $F([f]) = F([f_1, f_2]) = ([p_1 \circ (f_1, f_2)], [p_2 \circ (f_1, f_2)]) = ([f_1], [f_2])$ .

Proposición 3.20.: Dado  $X$  un espacio topológico y  $f: S' \rightarrow X$ .  $f$  es homotópica a una función constante si y solo si existe una aplicación continua  $g: D^2 \rightarrow X$  tal que  $g|_{S'} = f$ .

DEMOSTRACION: Sea la función  $f: S' \rightarrow X$ , y asumamos que  $H: S' \times [0,1] \rightarrow X$  con  $H(x,1) = f(x)$  y  $H(x,0) = c(x) = x_0$  es una homotopía. Consideremos  $g: D^2 \rightarrow X$  definida por  $g(t, x) = H(x,t)$  para  $x \in S'$  y  $t \in [0,1]$ , claramente una función continua y  $g|_{S'} = H(x,1) = f(x)$ .

Por otro lado, asumamos que  $g: D^2 \rightarrow X$  es una aplicación continua tal que  $g|_{S'} = f$ . Definamos  $H: S' \times [0,1] \rightarrow X$  de forma que  $H(x,t) = g(t, x)$ . Desde luego,  $H$  es una función continua,  $H(x,0) = g(0) = \text{constante}$  y  $H(x,1) = g(x)$ .



#### IV. EL TEOREMA DE PUNTOS FIJOS EN EL PLANO

En este capítulo, definiremos lo que es el grado de una función definida del plano euclidiano en el mismo. Par luego demostrar el teorema de existencia de puntos fijos, conocido como el teorema de Brouwer.

Definición 4.1.: Sea la función  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida tal que  $e(t) = \exp(2\pi i t)$ .

Del análisis en variable compleja, sabemos que la función  $e$  es continua y sobreyectiva. Además,  $e$  es un homomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{R}, +)$  y  $(S^1, \cdot)$ , cuyo núcleo es precisamente el subgrupo  $\mathbb{Z}$ . (Ref.3)

Lema 4.2.: La función  $e$  restringida  $e|_{(0,1)}: (0,1) \rightarrow S^1 - \{(1,0)\}$  es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: Por lo antes expuesto,  $e|_{(0,1)}$  es una función continua y biyectiva. Nos falta probar que  $e|_{(0,1)}^{-1}: S^1 - \{(1,0)\} \rightarrow (0,1)$  es una aplicación continua. Sea  $x$  un elemento de  $S^1 - \{(1,0)\}$  y  $(x_n)$  una sucesión contenida en  $S^1 - \{(1,0)\}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Siendo todos elementos de  $S^1 - \{(1,0)\}$ , tenemos que  $x = \exp(\theta_i) = \exp(2\pi i \theta) = e|_{(0,1)} \frac{\theta}{2\pi}$  y  $x_n = e(\frac{\theta_n}{2\pi})$ , donde  $\theta_n \rightarrow \theta$ . Entonces  $e|_{(0,1)}^{-1}(x) = \frac{\theta}{2\pi}$  y  $e|_{(0,1)}^{-1}(x_n) = \frac{\theta_n}{2\pi}$ , por lo que  $e|_{(0,1)}^{-1}(x_n) \rightarrow e|_{(0,1)}^{-1}(x)$ .  $\square$

Lema 4.3.: Dado  $B$  cualquier subconjunto de  $S^1 - \{(1,0)\}$  y  $A = (0,1) \cap e^{-1}(B)$ , entonces  $e^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A + n$  donde  $A + n$  es un conjunto abierto en  $e^{-1}(B)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACION: Sea  $B_0 = S^1 - \{(1,0)\}$  entonces  $e^{-1}(B_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (0,1) + n$ . Dado cualquier  $B$  subconjunto de  $B_0$ ,  $e^{-1}(B) = e^{-1}(B \cap B_0) = e^{-1}(B) \cap e^{-1}(B_0)$

THE HISTORY OF THE UNITED STATES

The history of the United States is a story of growth and change. From the first settlers to the present day, the nation has evolved through various stages of development. The early years were marked by exploration and the establishment of colonies. The American Revolution led to the birth of a new nation, and the subsequent years saw the expansion of territory and the growth of industry. The Civil War was a pivotal moment in the nation's history, leading to the abolition of slavery and the strengthening of the federal government. The late 19th and early 20th centuries were characterized by rapid industrialization and the rise of a new middle class. The Great Depression of the 1930s led to significant government intervention in the economy. The mid-20th century saw the United States emerge as a global superpower, leading the world in the Cold War. The latter half of the 20th century was marked by social movements for civil rights and environmental protection. The 21st century has brought new challenges, including technological advances and global issues like climate change. The history of the United States is a testament to the resilience and adaptability of the American people.

$= e^{-1}(B) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (0,1) + n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} e^{-1}(B) \cap (0,1) + n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A + n$ . Por otro lado, los abiertos en  $e^{-1}(B)$  son precisamente las intersecciones de  $e^{-1}(B)$  con abiertos de  $\mathbb{R}$ , por lo que  $A+n$  es un subconjunto abierto en  $e^{-1}(B)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Corolario 4.4.: Dado cualquier subconjunto  $B$  de  $S'$ , la función  $e|_{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A+n} : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A+n \rightarrow B$  es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: Se sigue directamente de los lemas 4.2 y 4.3.  $\square$

Teorema 4.5.: Para toda función continua  $f: [0,1] \rightarrow S'$ , existe una aplicación  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y única módulo un entero tal que  $f = e \circ g$ .

DEMOSTRACION: Por la continuidad de  $f$  en  $[0,1]$ , para cada  $t \in [0,1]$  existe  $\delta_t$  tal que  $f(t-\delta_t, t+\delta_t)$  es un subconjunto propio de  $S'$ . La colección  $\{(t-\delta_t, t+\delta_t) : t \in [0,1]\}$  es una cubierta abierta de  $[0,1]$ , por lo que existe una subcubierta finita  $\{(t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}) : i=1, \dots, m\}$  tal que  $f(t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}) = S_i$  es un subconjunto propio de  $S'$ . Por el corolario 4.4, la función  $e|_{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_i + n}$  con  $A_i = (t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i})$  es un homeomorfismo para todo  $i = 1, \dots, m$ . Definamos entonces la aplicación  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g|_{A_i} = e|_{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_i + n}^{-1} \circ f$ . Es fácil demostrar que  $g$  está bien definida y es continua, además  $e \circ g = f$ .  $\square$

Lema 4.6.: Para toda función continua  $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow S'$ , existe una aplicación  $g: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = e \circ g$ .

DEMOSTRACION: Se produce igual que en la demostración del teorema 4.5.  $\square$

Dada  $f: S' \rightarrow S'$  una función continua, por el teorema 4.5, existe una aplicación  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \circ e|_{[0,1]} = e \circ g$ . Entonces  $e \circ g(1) = f \circ e|_{[0,1]}(1) = f(e|_{[0,1]}(1)) = f(e|_{[0,1]}(0)) = f \circ e|_{[0,1]}(0) = e \circ g(0)$ , ya que  $e|_{[0,1]}(1) = e|_{[0,1]}(1) = e|_{[0,1]}(0)$ . Por lo que  $e(g(1) - g(0)) = 0$ , es decir que  $g(1) - g(0) \in \mathbb{Z}$ .

Por otra parte, si  $g'$  es otra función tal que  $e \circ g' = f \circ e|_{[0,1]}$ , entonces  $g'(1) - g'(0) = g(1) + k - (g(0) + k) = g(1) - g(0)$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . (ref.3)

Definición 4.7.: Dada una función continua  $f: S' \rightarrow S'$ , con una aplicación continua tal que  $e \circ g = f \circ e|_{[0,1]}$ , definimos el grado de  $f$  como  $\text{grad } f = g(1) - g(0)$ .

Lema 4.8.: A funciones homotópicas les corresponde el mismo grado.

DEMOSTRACION: Sean  $f, f': S' \rightarrow S'$  funciones homotópicas con  $H: S' \times [0, 1] \rightarrow S'$  como homotopía. Por el lema 4.6 existe una aplicación  $G: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $e \circ G = H \circ (e|_{[0,1]} \times 1)$ . Entonces  $e \circ G(t,0) = A \circ (e|_{[0,1]} \times 1)(t,0) = H(e|_{[0,1]}(t),0) = f \circ e|_{[0,1]}(t)$ . Por otro lado,  $e \circ G(t,1) = H \circ (e|_{[0,1]} \times 1)(t,1) = H(e|_{[0,1]}(t),1) = f' \circ e|_{[0,1]}(t)$ . Entonces  $\text{grad } f = G(1,0) - G(0,0)$  y  $\text{grad } f' = G(1,1) - G(0,1)$ .

Consideremos la aplicación  $d: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(u) = G(1,u) - G(0,u)$ . Dado que  $e \circ G(1,u) = H \circ (e|_{[0,1]} \times 1)(1,u) = H(e|_{[0,1]}(1),u) = H(e|_{[0,1]}(0),u) = H \circ (e|_{[0,1]} \times 1)(0,u) = e \circ G(0,u)$ , entonces  $e(G(1,u) - G(0,u)) = e(d(u)) = 0$ , por lo que  $d(u)$  toma solo valores enteros. Además,  $d$  es una función continua, por lo tanto  $d$  debe ser constante.  $\square$

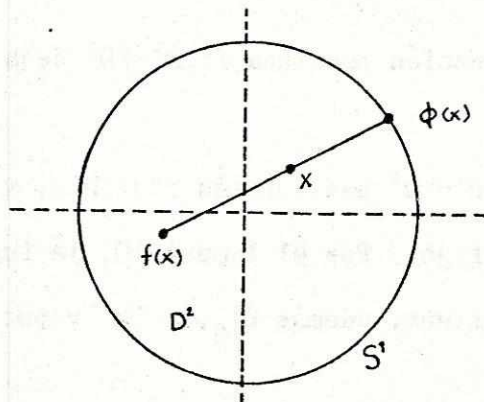
Lema 4.9.: Toda función constante tiene grado 0 y la aplicación identidad tiene grado 1.

DEMOSTRACION: Sea la función  $f: S' \rightarrow S'$  tal que  $f(x) = x_0 = e|_{[0,1]}(t_0)$  para todo  $x \in S'$ . Tomemos  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $g(t) = t_0$ . Entonces  $f \circ e|_{[0,1]} = x_0 = e|_{[0,1]}(t_0) = e \circ g$ . Por lo que  $\text{grad } f = g(1) - g(0) = t_0 - t_0 = 0$ .

Por otro lado, sea la aplicación  $f: S' \rightarrow S'$  tal que  $f(x) = x$ . Considere-

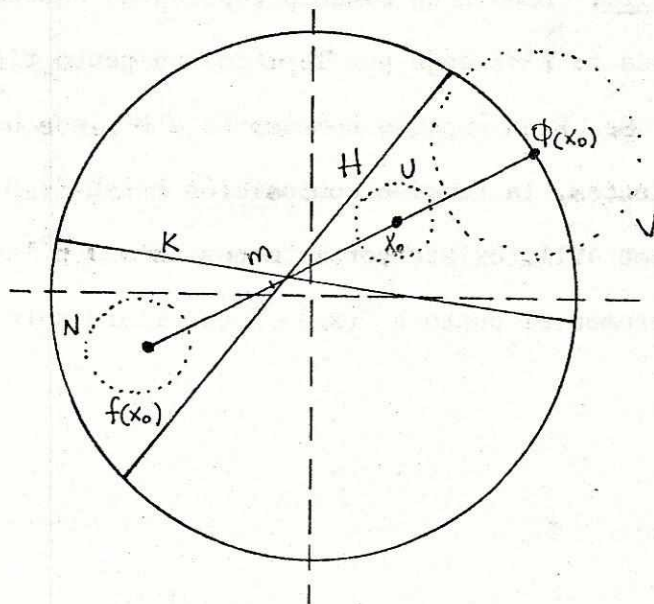
mos la función  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = x$ . Entonces  $f \circ e|_{[0,1]} = e|_{[0,1]} \circ g$ . Por lo que  $\text{grad } f = g(1) - g(0) = 1 - 0 = 1$ .  $\square$

Lema 4.10.: Dada la función continua  $f: D^2 \rightarrow D^2$ , definamos  $\phi: D^2 \rightarrow S^1$  por la siguiente gráfica:



Siempre que  $\phi$  este bien definida,  $\phi$  es una aplicación continua.

DEMOSTRACION: Sea  $x_0 \in D^2$  y  $V$  una vecindad de  $\phi(x_0)$ , llamamos  $m$  al punto medio del segmento de recta  $\overline{x_0 \phi(x_0)}$ , y tracemos las rectas  $H$  y  $K$  como se muestra en la gráfica.



Tomemos  $N$  una vecindad de  $f(x_0)$  que no contenga puntos de  $H$  y  $K$ , por continuidad existe una vecindad  $U$  de  $x_0$  tal que  $f(u) \in N$  y  $U$  no contiene pun-  
tos de  $H$  y  $K$ . Claramente, para todo  $x \in U$  el punto  $\emptyset(x)$  debe quedar den-  
tro de  $V$ .  $\square$

Teorema 4.11.: Toda función continua  $f: D^2 \rightarrow D^2$  deja por lo menos un pun-  
to fijo.

DEMOSTRACION: Sea  $f: D^2 \rightarrow D^2$  una función continua, y asumamos que no de-  
ja ningún punto de  $D^2$  fijo. Por el lema 4.10, la función  $\emptyset: D^2 \rightarrow S^1$  esta  
bien definida y es continua, además  $\emptyset|_{S^1} = 1_{S^1}$  y por el lema 4.9 grad  
 $\emptyset|_{S^1} = 1$ .

Por otro lado,  $\emptyset$  satisface la hipótesis de la proposición 3.20. Por lo  
que  $\emptyset|_{S^1}$  es homotópica a una función constante, y por los lemas 4.8 y 4.9  
grad  $\emptyset|_{S^1} = 0$ . Lo que es una contradicción y por lo tanto no puede exis-  
tir tal función  $\emptyset$ . Entonces  $f$  debe dejar por lo menos un punto fijo.

Proposición 4.12.: Dado  $E$  un espacio topológico homeomorfo a  $D^2$ , toda  
función continua  $f: E \rightarrow E$  deja por lo menos un punto fijo.

DEMOSTRACION: Sea  $E$  un espacio homeomorfo a  $D^2$ , con  $h: E \rightarrow D^2$  un homeo-  
morfismo. Entonces, la función composición  $h \circ f \circ h^{-1}: D^2 \rightarrow D^2$  es continua,  
y por el teorema 4.11. existe por lo menos un  $x_0 \in D^2$  tal que  $h \circ f \circ h^{-1}(x_0)$   
 $= x_0$ . Consideremos el punto  $h^{-1}(x_0) \in E$  que claramente  $f(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}($   
 $x_0)$ .  $\square$

REFERENCIAS

1. Chinn, W. y N. Steenrod. First Concepts of Topology.  
1966 New York, Randon House. 160 pp.
2. Jocking, F.C. y C. Joung. Topology. New York, Adison  
1968 Wesley.
3. Wall, C.T. A Geometric Introduction to Topology. New  
1972 York, Adison - Wesley. 168 pp.
4. Willard, S. General Topology. New York, Adison-Wesley  
1970 369 pp.

1. [Faint text]

2. [Faint text]

3. [Faint text]

4. [Faint text]