UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Educación

Desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel primario

José Adolfo Santos Solares

Guatemala
2008

Desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel primario

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Educación

Desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel primario

Tesis presentada por
José Adolfo Santos Solares
para optar al grado académico de
Maestría en Medición, Evaluación e Investigación Educativa

Guatemala
2008

Vo. Bo.:

(F) ______________________________
Dr. Leonel Morales Aldana
Asesor

Tribunal:

(f) ______________________________
Licda. Jacqueline de De León
Examinador

(f) ______________________________
Lic. Bayardo Mejía
Examinador

(f) ______________________________
Dr. Leonel Morales Aldana
Examinador

Fecha de aprobación: Guatemala 11 de diciembre de 2008

Guatemala, 6 de julio de 2009

A: José Adolfo Santos Solares

De: Lda. Silvia de Buratti

Ref.: Tesis

Por este medio le comunico que luego de cumplir con los requisitos estipulados para la elaboración de su tesis, puede iniciar los trámites para obtener su título.

Lo saluda, atentamente,

S C de Buratti

Lda. Silvia Ciudad-Real de Buratti
Col.7754

DEDICATORIA

Dios y la virgen María
…que me dieron fuerza, salud y entendimiento.

Mis padres: Adán Santos y Catalina Solares
Mis hermanos: Raquel, Eriberto, César, Miguel, Sergio y Ligia
Mis cuñados: Rafael, Nela, Yani y Wendy
Mis sobrinos: María Alejandra, Miguel Adán, Kevin, Katerine,
Celeste, Luis Miguel, Josué, José Pablo y Marcos
…que siempre han estado conmigo apoyándome en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor el Doctor Leonel Morales Aldana
…quien con su ayuda colaboró en gran medida a la realización de la tesis.

A la Agencia para el Desarrollo Internacional de los Estados Unidos (USAID)
…por haberme otorgado la beca para estudiar la maestría.

Al personal del Programa Estándares e Investigación Educativa
…por su apoyo en todo el proceso de la beca.

A las personas que creyeron en la investigación y en el trabajo que realicé, quienes están realmente preocupados por ayudar a mejorar la calidad del aprendizaje y la enseñanza de la matemática en nuestro país.

Aquellos que con su trabajo consciente ayudan a que los profesionales del futuro estén mejor preparados, para las exigencias de desempeño y competitividad que ya son demandadas.

PREFACIO

En mi experiencia con personas que se han acercado para que les ayude en matemática, siempre me he preguntado por dónde comenzar a enseñar. Al verificar si pueden aplicar los conceptos de aritmética, se evidencian los usos mecánicos y vacíos en lo que aprendieron. Buscando por dónde comenzar me he dado cuenta que, aunque han aprendido contenidos aritméticos, tienen dificultad en entender contenidos básicos de álgebra, que aún cuando no son complicados, llevarían un tiempo de práctica para que los comprendan bien o los puedan aplicar, y muestran un bloqueo para asimilarlos cuando ya tienen cierta forma de pensar.

Parece ser que después de haber aprendido la matemática de cierta forma, los estudiantes tratan de analizar todo con la lógica que adquirieron desde el nivel primario. Al llegar a la adolescencia se resisten a analizar de otra forma lo que se les enseña, ya que por los requerimientos de abstracción se les trata de cambiar la mentalidad, que tienen desarrollada.

Este trabajo intenta buscar razones que sirvan para indicar si es factible, comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico en los niños desde el nivel primario en Guatemala, enseñando a los estudiantes a hacer generalizaciones y utilizar símbolos en matemática. Es necesario buscar los antecedentes investigativos previos, revisar los libros de álgebra para conocer cuales son los conceptos básicos, y que pudieran ser candidatos para enseñarse en el nivel primario, desde el primer grado e incluso en pre-primaria.

Por lo anterior, se debían conocer los conceptos de pre-álgebra para comenzar a explorar el tema, encontrándose en primer lugar que habían ciertos desacuerdos, al decir, que se pretendía enseñar álgebra en el nivel primario. Por lo tanto, se comenzó por entrevistar a expertos en matemática y su enseñanza, de manera que se recopilaron sus opiniones sobre el tema.

Antes de comenzar la recolección de información se encontró mucha renuencia a apoyar el tema, ya que no se podía definir con claridad, no se tenía alguna pregunta de investigación ni hipótesis a probar. Entonces, se tuvo que explorar sobre la introducción del estudiante al álgebra, más temprano de lo que comúnmente se acostumbra. Se realizaron entrevistas a personas involucradas en educación, maestros, estudiantes, matemáticos e investigadores.

Al inicio se encontró poco apoyo, pero conforme se hallaba más información, también fue creciendo el nivel de aceptación por el tema, ya que iba aclarando dudas sobre la utilidad de la investigación. Se tenía el **qué** investigar, se definió la forma **cómo** se recolectaría la información, y **cómo** se realizaría el análisis de los datos. Al tener los datos se procedió a buscar la forma **cómo** presentar los hallazgos, y redactar la presente tesis.

Este trabajo no se podía extender tanto como para observar la forma en que los estudiantes pueden aprender los contenidos algebraicos en el nivel primario; pero puede servir para promover estudios futuros, realizando experimentación, estudios longitudinales, y se elaboren hipótesis sobre el tema.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

RESUMEN

En esta tesis se busca determinar si se pueden introducir conceptos algebraicos desde el nivel primario en nuestro medio, si se debe hacer y si ayudaría a los estudiantes a mejorar su rendimiento y la calidad de los aprendizajes de los contenidos de matemática. Con el afán de crear continuidad de la enseñanza matemática del nivel primario al ciclo básico. La investigación es de tipo exploratoria, por no haber encontrado antecedentes locales.

Se realizó una búsqueda de antecedentes de investigación, tanto en el ámbito local como en otros países, para tener conocimiento de los hallazgos que se han obtenido y la forma en que se ha estudiado el tema. Fueron identificados los conceptos algebraicos que pudieran ser enseñados en el nivel primario, buscando en libros de álgebra y en el currículo nacional base de Guatemala.

Los contenidos de matemática fueron llevados a consulta con entrevistas a expertos en matemática, profesores de nivel medio y nivel primario, quienes dieron su opinión sobre la enseñanza de conceptos algebraicos en el nivel primario, indicando que se puede y se debería hacer.

De los contenidos más importantes indicados, se buscaron ítems de las pruebas nacionales de 2006 y 2007. Luego se construyó una prueba de matemática, con problemas en donde se considera que se pueden utilizar procedimientos algebraicos, para una muestra de estudiantes del sexto grado de nivel primario. Se analizaron los procedimientos utilizados, determinando si los procesos algebraicos son utilizados, y detectando los errores más comunes. Se encontró que pocos estudiantes utilizan conceptos algebraicos y que si los utilizarán disminuiría la dificultad y aumentaría su rendimiento.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, álgebra temprana, solución de problemas de matemática, calidad de aprendizaje, continuidad en la matemática.

<<Para organizar e interrelacionar los datos que le aporta la experiencia, el hombre posee una serie de medios que le permiten adquirir, retener y transformar la información proveniente del medio que le circunda. Dichos medios son los denominados Procesos Cognitivos; entre éstos destacan la abstracción y la generalización, los cuales constituyen los elementos esenciales del proceso de conceptualización o adquisición de conceptos>>

González, F. (2005)

I. INTRODUCCIÓN

La investigación se centró en indagar sobre la enseñanza del álgebra en el nivel primario, o la introducción temprana de su aprendizaje. Para ello se encontraron estudios como el de Carraher, D. y Schliemann, A. (2007), que se refieren a la necesidad de introducir al niño desde sus primeros años a una matemática general. Es necesario que se comience con la aritmética, pero a la vez, se enseñen conceptos que ayuden al estudiante a entender mejor el álgebra cuando ésta sea enseñada formalmente, teniendo como propósito eliminar los vacíos en el aprendizaje de la matemática.

Cajas, F. (2007) en su estudio de las prioridades de la educación de Guatemala, indica que se deben motivar las investigaciones educativas para que permitan abordar la complejidad de los nuevos aprendizajes estudiantiles, por medio de los cuales se pretende mejorar la calidad de la educación. Por esta razón la investigación persigue encontrar los principios del álgebra, que pueden enlazar los aprendizajes de la matemática en los primeros años de estudio, antes de llegar al nivel medio.

Se necesita primero hacer una exploración de los temas antes de verificar lo que se enseña, en este caso, sobre algo que no ha tenido mucha discusión en nuestro país, que no se le ha dado gran importancia para determinar si es pertinente, o si es factible proponerlo como tema de discusión para reformar la educación matemática. Se espera que dé pie a investigaciones posteriores, con el afán de proponer mejoras a la educación y para elevar el desempeño de los estudiantes en matemática.

Este estudio propone investigar sobre cómo el estudiante aborda los problemas de matemática, lo qué debería saber para resolverlos y cómo debe saberlo. Al conocer estos aspectos, se espera que desarrolle formas de pensamiento como el necesario para comprender el álgebra, pero desde el nivel primario. Se pretende determinar si es factible el proponerlo como un proceso importante, que ayude mejorar la educación en matemática, y dar la mayor cantidad de información que se pueda.

Los resultados son útiles para mostrar formas de cómo podrían reflexionar los docentes, de manera que aprendan de sus estudiantes y mejoren continuamente, aprovechando más el potencial que tienen. Por lo tanto, desarrollar pensamiento algebraico en los estudiantes desde el nivel primario, crearía continuidad en los aprendizajes y ayudaría a que el estudiante no vea la matemática como algo difícil, proporcionándole más oportunidades de aprendizaje.

A. JUSTIFICACIÓN

Uno de los grandes retos de la educación en Guatemala, según Rubio, F. (2002), es “Mejorar la calidad de los aprendizajes y de los métodos de enseñanza”, siendo esto uno de los objetivos que aún se persiguen en la educación. Basado en proporcionar aportes al mejoramiento de la calidad educativa, y de las metas fijadas para el año 2021 sobre las prioridades de las necesidades de investigación planteadas por Cajas, F. (2007); se considera pertinente realizar un estudio que determine los aspectos necesarios para desarrollar el pensamiento algebraico en el nivel primario.

Para llevarlo a la práctica se necesita el apoyo de expertos en matemática y su enseñanza, para que den su punto de vista, sobre cómo se puede introducir el álgebra desde los primeros años de estudio. Se pretenden establecer las bases que ayuden, a que los estudiantes no vean la aritmética y el álgebra como dos temas aislados, sino que puedan tener una conexión más clara entre ellos, y que sean capaces de visualizar hacia donde evoluciona la enseñanza de la matemática.

Es importante buscar los medios por los cuales el estudiante no sienta un cambio abrupto al pasar del nivel primario al nivel medio, mayormente cuando comience el aprendizaje formal del álgebra. De esta manera tendrá una continuidad en el aprendizaje matemático, y así disminuirá el miedo a esta materia. Encontrará un significado más claro y evitará vacíos en la enseñanza, que podrían convertirse en obstáculos posteriores.

Un objetivo por el que se debe trabajar para el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes de los contenidos de matemática, es mejorar el desempeño de los estudiantes en las evaluaciones nacionales. Los resultados de las evaluaciones de matemática para sexto grado del año 2006, muestran que sólo el 29% de los evaluados alcanzaron el nivel satisfactorio (Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID, 2007). Por tal razón se necesita mejorar los aprendizajes matemáticos, proponiendo cambios en las formas tradicionales de docencia, para crear una base bien cimentada de matemática en el nivel primario, que trascienda en mejorar los niveles posteriores de estudio.

Se tomaron ítems de las pruebas nacionales que ya han sido liberados, porque estos están debidamente validados. Se creó una nueva prueba con doce ítems seleccionados, para determinar si los estudiantes de sexto grado primario utilizan procedimientos algebraicos al resolverlos.

B. PREGUNTA Y OBJETIVOS

El tema de álgebra temprana está comenzando a ser estudiado, por lo que en Guatemala no he encontrado suficiente investigación al respecto, y ha sido necesario explorar el tema tanto en nuestro contexto como en el exterior, para conocer las opiniones de los actores involucrados en la toma de decisiones, consultores y facilitadores de la matemática. Así se determina si es posible comenzar a enseñar álgebra desde el nivel primario, si los estudiantes pueden aprenderla, si los maestros pueden enseñarla y si es pertinente hacerlo. Se debe comenzar por definir el tema que se investiga, y cómo ayudaría a los estudiantes a mejorar la calidad de los aprendizajes matemáticos.

Sé parte del supuesto que al desarrollar el pensamiento algebraico en el nivel primario ayudaría a mejorar el rendimiento en matemática, y de la pregunta inicial que dio origen a la investigación, dando lugar a plantear los objetivos que se persiguen en la misma.

1. PREGUNTA

¿Los estudiantes utilizan conceptos algebraicos para resolver problemas de matemática, antes de ingresar al nivel medio?

2. OBJETIVO GENERAL

Determinar si hay elementos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos, que realizan los estudiantes de sexto grado primario, y cuáles son más utilizados.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Seleccionar los contenidos algebraicos básicos que son necesarios para comenzar a comprender el álgebra.
- Establecer los contenidos del CNB (Currículo Nacional Base) de nivel primario, en los cuales se pueden introducir conceptos algebraicos.
- Identificación de subcomponentes en los estándares que abarquen contenidos algebraicos.
- Consultar a expertos en matemática y su enseñanza, para que indiquen, cuales son los contenidos del nivel primario en los que se pudieran introducir los conceptos algebraicos.

- Revisión de pruebas nacionales de 2006 y 2007, para obtener ítems en los que los estudiantes pudieran aplicar procedimientos algebraicos, y construir una nueva prueba.
- Conocer los procedimientos utilizados por los estudiantes evaluados al resolver los ítems de la nueva prueba, para detectar si utilizan procedimientos algebraicos.
- Conocer los procedimientos utilizados por los maestros evaluados al resolver los ítems de la nueva prueba, para detectar si utilizan procedimientos algebraicos.
- Comparar los resultados de los ítems en la nueva prueba, entre maestros y estudiantes, y con los obtenidos en las pruebas nacionales.

C. MARCO CONTEXTUAL

Al crear los estándares educativos en Guatemala para el nivel primario, se establece un estándar que contempla la enseñanza del álgebra, el cual es un subcomponente que está alineado al CNB de nivel primario, y cuya intencionalidad es la siguiente: “Construcción, identificación e interpretación de patrones presentes en su comunidad, sean geométricos, numéricos o algorítmicos”; y “estimulación de la observación de la naturaleza, los acontecimientos sociales y las situaciones matemáticas, para reconocer, modificar y crear patrones y proponer relaciones entre los hechos y las causas” (Programa estándares e investigación educativa/USAID, 2007). Esto implica que se pueden enseñar conceptos de álgebra tempranamente, la cual debería implementarse cuándo se enseña matemática en el nivel primario, de manera que se comiencen a utilizar estos conceptos para comprender el tema de una forma más general y amplia, creando continuidad con el nivel siguiente.

La enseñanza del álgebra está contemplada en el CNB del nivel primario, y en el CNB para la formación de maestros; pero por la forma en que los contenidos son planteados, no se le ha dado la importancia necesaria para que los conceptos algebraicos puedan ser desarrollados.

El CNB de formación docente dice en sus apuntes metodológicos para el área de Ciencias Naturales qué <<Es importante tener en cuenta que el modelo para interpretar la naturaleza física de las cosas debe ser algebraico, y hace énfasis en la realidad y objetividad de los fenómenos de la naturaleza y en las magnitudes físicas del objeto de estudio>> (CNB de formación docente, 2006: 222). Esto muestra el interés que se ha tenido por relacionar otras materias con el aprendizaje de la matemática, al indicar la relación que existe entre ellas y que se está conciente de la importancia de relacionarlas, en especial el álgebra.

La inclusión temprana de temas algebraicos, puede ayudar a que el estudiante adquiera un mejor nivel de análisis y lógica, de manera que pueda realizar generalizaciones de las posibilidades de operación, utilizar símbolos y relaciones en aritmética. Se espera que en el futuro sea capaz de comprender la utilización del álgebra en su contexto, crear el sentido que debe tener la matemática para él, y qué al llegar al nivel medio no represente dificultad el comprender los nuevos aprendizajes matemáticos.

II. MARCO CONCEPTUAL

A. ÁLGEBRA

La palabra álgebra proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala,* que es el título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe Al Juarismi. El título se ha traducido como la ciencia de la reposición y la reducción, lo que significa trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La traducción fonética de *al-jabr* en el latín popular, condujo al nombre de la rama de las matemáticas que ahora se conoce como álgebra. En esta disciplina se usan símbolos o letras como *a, b, c, d, x ó y* para denotar números arbitrarios. La gran cantidad de fórmulas que se usan en las ciencias y en la industria pone de manifiesto la naturaleza general del álgebra (Swokowski, E. y Cole, J., 2006:1).

El álgebra no es otra cosa más que la continuación lógica de la aritmética y muchos de los métodos de la aritmética se usan en álgebra, aunque en forma modificada, desarrollada, o bien, original. Aunque el álgebra en realidad no es una materia difícil, se requiere tenacidad para aprender el significado de algunos vocablos nuevos. Uno de los aspectos más importantes del álgebra es el lenguaje que emplea (Peter, H., 1978:13 y 17).

La aritmética se relaciona con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números. El álgebra se ocupa del manejo de símbolos que representan números. Existen varias leyes o reglas básicas que rigen las operaciones algebraicas. El estudiante debe manejarse correctamente sin el uso consciente de dichas reglas, pues su cerebro debe ser adiestrado por ellas a través de su aprendizaje matemático previo. Si embargo, necesita conocerlas por dos razones: primeramente debería estar en condiciones para justificar cada una de sus operaciones para asegurarse de su legitimidad; en segundo lugar, necesita saber cuando se esta utilizando una regla determinada;

y también que a menudo los textos se refieren a ellas nombrándolas (Martin, E. Jr., 1972:40).

Es claro que existen definiciones más concretas y formales de álgebra, pero que no se toman en cuenta en este estudio, por la razón que se buscan los planteamientos prácticos y fáciles de comprender, para poder explicarla de forma sencilla, y determinar si es posible llevarla a los niños de nivel primario.

B. ÁLGEBRA TEMPRANA

Existen en el mundo comunidades de investigadores en educación matemática, que han propuesto nuevos estándares de alta calidad para los aprendizajes de los estudiantes, tal es el caso de las propuestas del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Ellos han generado en las últimas décadas, investigación clave para transformar la educación matemática obligatoria en norte América y que ha apoyado y desarrollado investigación educativa de primera línea alrededor de cómo y bajo qué condiciones los y las estudiantes aprenden la matemática propuesta en los estándares (Cajas, F. 2007:28).

El NCTM ha recomendado que el álgebra se convierta en una hebra presente desde Kinder (pre-primaria) hasta el grado 12 (último grado de nivel medio, K-12) y el 2003 RAND *Mathematics Study Panel* (Sistema evaluativo Estadounidense) ha recomendado la inclusión del álgebra como <<…tema inicial para enfocar y coordinar la investigación y el desarrollo desde pre-primaria hasta el grado 12>> (Carraher, D. y Schliemann, A., 2007). Esto es de mucha importancia no sólo porque en Estados Unidos ya se esta trabajando con esta modalidad, sino que el NCTM es un referente muy respetado a nivel mundial en el ramo de la matemática.

Una descripción que es más aceptada ha sido dada por Howe, R. (2005), en el Foro de Investigación del Álgebra Temprana, que tuvo lugar en la 25 Conferencia Internacional para la Psicología y la Educación Matemática, dónde se discutió sobre el razonamiento algebraico en grados de K-12 (prekinder hasta grado 12), en la que expuso las implicaciones algebraicas, de la siguiente forma:

1. Trabajar con variables, en particular aritmética con variables, y así la formación de expresiones polinomiales y racionales. Esto también incluye representación, o modelado de situaciones concretas con expresiones, y obtener ecuaciones. Esto es también frecuentemente extendido para incluir extracción de raíces…. Esto también incluye manipulación de expresiones y ecuaciones, para simplificar, resolver e interpretar.

2. Estructura algebraica, primariamente como capturado en las reglas de aritmética (el campo de axiomas). Las reglas de aritmética encapsulan la legítima manipulación en polinomios o expresiones racionales. Si tomar las potencias racionales es permitido, ellas tienen que ser complementadas por las leyes de exponentes y la multiplicatividad de potencias fraccionarias. Estas reglas, junto con los principios para transformar ecuaciones (las técnicas originales las cuales dieron origen al tema conocido por nosotros como álgebra), resumir las bases para técnica algebraica (la cual trabaja en las expresiones algebraicas descritas en 1) y las ecuaciones entre ellas.

En los documentos presentados en dicho Foro, se observó un buen ejemplo de los múltiples puntos de vista sobre el álgebra temprana. Algunos pocos se oponían diciendo que debería ser introducida después que los estudiantes hayan estudiado 6 años como mínimo (Linchevsky, 2001), y la mayor parte estuvo a favor indicando que la notación algebraica merece un prominente lugar en la instrucción temprana (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000, 2005, 2007; citado por Carraher, D. y Schliemann, A., 2007:672).

Por consiguiente, se tiene un buen precedente y respaldo a nivel mundial, para introducir el álgebra desde los primeros años de estudio. Para complementar en el ámbito local de Guatemala, los expertos matemáticos, profesores de nivel medio y primario (quienes fueron entrevistados para este estudio), coinciden en que es necesario que el estudiante adquiera esos conceptos desde temprana edad, para mejorar la calidad de la educación matemática.

Un proceso de aprendizaje, como ejemplo para un contenido de lo que podría llevarse a cabo en el nivel primario (sin identificar en que grados llevaría esta evolución), es lograr que el niño conozca la propiedad conmutativa de la suma, de forma general y utilizando símbolos. Según Lic. Bayardo Mejía (experto matemático entrevistado), podría realizarse el proceso que se muestra en la tabla 1, para la comprensión de la tal propiedad.

Tabla 1. Proceso para entender la propiedad conmutativa de la suma

3	+	4	=	4	+	3
5	+	8	=	8	+	5
3	+	7	=	7	+	__
__	+	10	=	10	+	4
3	+	__	=	4	+	3
7	+	A	=	A	+	7
5	+	A	=	A	+	__
A	+	4	=	4	+	__
.						
.						
.						
A	+	B	=	__	+	__
A	+	B	=	B	+	A

Fuente: Entrevista con el Lic. Bayardo Mejía

El proceso mostrado en la figura 1 podría comenzarse desde la primera vez que se enseña la suma, cuando se enseña al estudiante la propiedad con números, luego se plantean preguntas de lo que le falta para completar la igualdad (números escondidos). Esto es para introducir paulatinamente el uso de símbolos al representar cualquier cantidad, hasta que pueda comprender la generalización de la propiedad que se quiere enseñar, lo cual es algebraico.

Este proceso puede realizarse durante varios grados de estudio, de manera que el estudiante analice cada parte según su capacidad de comprender el objetivo esperado. Debe darse seguimiento al proceso para que el estudiante vaya entendiendo cada parte y lo que ha venido aprendiendo, para que desde el nivel primario pueda utilizar símbolos, sea capaz de identificar la propiedad conmutativa, y se introduzca al concepto de variable.

C. TÉRMINOS REFERIDOS AL TEMA

Ha habido desacuerdos en los términos utilizados para referirse a la introducción del niño al álgebra desde sus primeros años de estudio, porque algunos expertos matemáticos consideran que no se puede enseñar álgebra a los niños antes que lleguen al nivel medio de estudios, como lo indica Linchevsky, 2001 (citado por Carraher, D. y Schliemann, A. 2007:672). Se apoyan en la teoría de Jean Piaget, de que la capacidad de abstracción del niño está relacionado directamente a su edad, y que hasta después que el niño termine el nivel primario (12 años) es el momento para que comience con la introducción del álgebra, por su nivel limitado de abstracción.

En algunos estudios encontrados, se refieren al álgebra formal que se imparte en secundaria como "*School Algebra*"; al álgebra que se imparte en los dos primeros años de secundaria como "pre-algebra"; al álgebra que se imparte en el nivel pre-primario y primario como "*Early Algebra*" (álgebra temprana), y de forma similar se refieren a ella para el nivel primario como "*Algebraic Thinking*" o pensamiento algebraico (Carraher, D. y Schliemann, A. 2007, pp. 669-676).

Diversos autores han equiparado álgebra con pensamiento algebraico desde hace muchos años (Bednarz y Javier, 1996; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Bloedy-Vinner, 2001; Boyer y Merzbach, 1989; Harper, 1987; Kaput, 1995 y 1998, en prensa; Kieran 1996; Kirshner, 2001; Van Amerom, 2002. Citados por Carraher, D. y Schliemann, A. 2007). Cuando ellos han tratado de categorizar la estructura ocasionalmente exhiben inconsistencias y traslapes. Por ejemplo, una crisis de álgebra en generalización, resolución de problemas, modelado, y el proceso de razonamiento de fracciones mixtas no disjuntas (generalización y resolución de problemas), con un tema de matemática (funciones) y otro (modelado) puede ser entendido también como un tema matemático o un conjunto de procesos de razón.

Esto puede reflejar el hecho que el análisis del pensamiento algebraico aún está en su infancia (Carraher, D. y Schliemann, A. 2007). El término "*Algebraic Reazoning*" se utiliza de la misma forma que el pensamiento algebraico. Por ejemplo, es cuando el estudiante describe las reglas para generar un patrón, comprende expresiones y resuelve ecuaciones que involucran variables sencillas (Distrito escolar 1J de Pórtland, 5to.).

Los términos que se utilizarán en este documento son álgebra temprana y desarrollo del pensamiento algebraico, para referirse a la enseñanza de conceptos algebraicos en el nivel primario.

D. PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Algebraico es una forma de pensamiento, más que un conjunto de reglas para manipular símbolos, según Vance (1998) (citado por Kriegler, Shelley 2000:1), quien indica que a veces el álgebra es definida como aritmética generalizada o como un lenguaje para generalizar la aritmética. La tabla 2 muestra los componentes del pensamiento algebraico que propone este autor.

El pensamiento algebraico es organizado en dos grandes componentes (Kriegler, Shelley 2000:2): las herramientas del desarrollo del pensamiento algebraico y el estudio de ideas fundamentales de álgebra. Las herramientas del pensamiento algebraico incluyen hábitos analíticos de la mente, especialmente en destrezas de solución de problemas, y destrezas de representación. Ideas fundamentales de álgebra representan un dominio en el cual las herramientas del pensamiento algebraico pueden desarrollarse (…esto es, ellos son la comida, el contenido, el tema que importa para el estudio).

Tabla 2. Componentes del pensamiento algebraico

Herramientas de pensamiento matemático	**Ideas algebraicas informales**
Destrezas de solución de problemas • Usando estrategias de solución de problemas • Explorando múltiples enfoques/múltiples soluciones Destrezas de representación • Exponiendo relaciones visualmente, simbólicamente, numéricamente, verbalmente • Traduciendo entre diferentes representaciones • Interpretando información en representaciones	Álgebra como aritmética abstracta • Conceptualmente basado en estrategias de cálculo • Razón y proporción Álgebra como el lenguaje de matemática • Significado de variables y expresiones de variables • Significado de soluciones • Entendimiento y uso de propiedades del sistema numérico • Lectura, escritura, manipulación de números y símbolos usando convenciones

Cont. Tabla 2. Componentes…

Herramientas de pensamiento matemático	**Ideas algebraicas informales**
Destrezas de razonamiento • Razonamiento inductivo • Razonamiento deductivo	• Usando representación simbólica equivalente para manipular formulas, expresiones, ecuaciones, inecuaciones Álgebra como herramienta para el estudio de funciones y modelado matemático • Búsqueda, expresión, generalización de patrones y reglas en el contexto del mundo real • Representing mathematical ideas using equations, tables, graphs, or words • Trabajando con patrones de entrada/salida Desarrollando destrezas de gráficas de coordenadas

Fuente: Kriegler, Shelley 2000:2

Para saber qué necesita el maestro al enseñar conceptos algebraicos en el nivel primario, se han tomado las sugerencias de Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006); quienes indican la importancia que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de tareas, para lo cual se necesita que el maestro reúna al menos tres características:

- que motiven a los estudiantes a expresar lo que saben;
- que los alienten a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias; y
- que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución.

Además, es importante que los profesores ayuden a los alumnos a plantear conjeturas y apoyen a quienes lo necesitan, sin eliminar el reto que contiene la tarea. En este contexto se reconoce la importancia que los estudiantes utilicen recursos y estrategias que les permitan pensar matemáticamente; en donde Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006) indican que aprender a pensar matemáticamente significa:

- desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia a aplicarlos, además de
- desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meca de entender y construir estructuras (desarrollar el sentido matemático).

Una restricción importante para la generación de modelos mentales adecuados reside en que tenemos una capacidad de memoria restringida; y por ende, los sistemas notacionales que acompañan a la aritmética y al álgebra, liberan al sistema cognitivo de sostener esas relaciones y constituyen un instrumento muy poderoso al servicio de la modelización (Otero, M. y Banks-Leite, L., 2006).

Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006) se sustenta en la visión de promover el aprendizaje de las matemáticas, mediante el uso de tareas diseñadas bajo ciertos principios:

- que sean atractivas y fáciles de entender para los estudiantes;
- que contengan contenidos fundamentales del currículo; y
- que su desafío permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución.

Lo anterior debería ir ligado a lo que se quiere enseñar, podría basarse en el proceso y la confirmación final que redondea la clasificación de los ítems de TIMSS (2003), para el cuarto y octavo grado; para la cual los expertos definieron tres dominios cognitivos a satisfacer, en el aprendizaje de la matemática:

- factores de conocimiento, procedimientos y conceptos;

- conocimientos de aplicación y entendimiento; y
- razonamiento.

Estos dominios cognitivos son los que se pueden comenzar a reforzar desde el nivel primario, para lo cual no sería necesario esperar a tener conocimientos previos, ni limitarlos, sino que se implementaría desde los primeros contenidos que se enseñen.

Para resumir el proceso, se hace referencia a la descripción algebraica dada por Kaput, 1995 y 2000 (citado por Mullis, I. Martin, M. y Foy, P., 2005), indicando que para aprender el álgebra se requiere combinar las herramientas y el pensamiento, indicando que ello puede ocurrir en cinco niveles:

1. generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético,
2. manipulación de formalismos guiada por sintaxis,
3. estructuras abstraídas de cálculos y relaciones,
4. funciones, relaciones y variación conjunta, y
5. modelado de lenguajes.

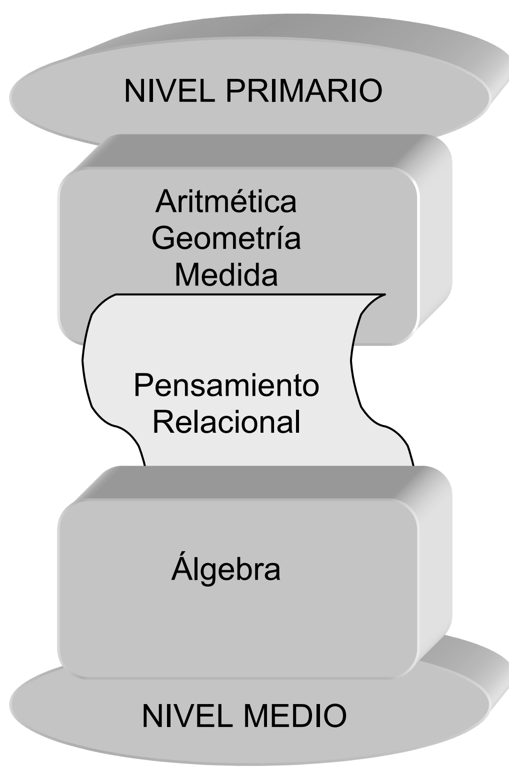
Tales niveles pueden comenzarse a trabajar en el nivel primario, sin darles complejidad, sino para sentar las bases del álgebra, de manera que los estudiantes vayan adquiriendo el tipo de razonamiento y lógica adecuada; el cual les servirá para comprender lo que les será enseñado con más profundidad en los niveles siguientes, y desarrollará un pensamiento algebraico.

E. ÁLGEBRA TEMPRANA COMO ESLABÓN DEL APRENDIZAJE

Para poder comprender correctamente los temas más evolucionados de la matemática, es necesario poder hacer la conexión entre lo básico y lo avanzado, en donde el pensamiento relacional debe ser estimulado (Molina, M. 2004). Esto se da cuando los estudiantes obtienen la respuesta estableciendo relaciones, o comparaciones entre los números o expresiones a ambos lados del signo igual, sin necesidad de realizar explícitamente todas las operaciones expresadas, lo cual está íntimamente ligado a la comprensión.

Molina, M. (2004) en un estudio de desigualdades con alumnos de tercer grado, observó que cuando se les pide a los estudiantes, resolver igualdades con operaciones de suma y resta, esperando que indicaran el valor faltante en el lado derecho, izquierdo, o en ambos lados de la igualdad (representado por un cuadro vacío), algunos dijeron que estaba al revés y cambiaban de lado la igualdad; otros dijeron que de esa manera no podían o que no estaba bien escrita. Esto demuestra la necesidad que existe de mostrarle al estudiante no una operatoria mecánica, sino una forma de razonar, pensar y poder entender la matemática de forma más general. Por tal razón, los maestros deberían cambiar la forma tradicional de enseñar en el nivel primario, y que no mecanicen ni solamente proporcionen los algoritmos, sino que enseñen a pensar.

Figura 1. Enseñanza de la matemática con comprensión, conexión entre el aprendizaje de un nivel y el siguiente



Fuente: Molina, M. (2004)

En la figura 1 se muestra un modelo de cómo el pensamiento relacional es importante, para que el estudiante realice la transición de lo que se enseña en primaria a la secundaria.

Durante el aprendizaje escolar suele ocurrir que los estudiantes se apropian de los conceptos de manera aislada y no de manera estructurada. Esto hace que tengan dificultades cuando abordan situaciones completamente nuevas, cuya resolución no se puede realizar sólo recordando algún procedimiento enseñado por el profesor (Uicab, R. y Oktac, A. (2006)).

Según Martin Kindt, 1980 (citado por Molina, M., 2004) cuando se enseña álgebra, se ha observado que los estudiantes tienen una gran dificultad para entender los conceptos, y destaca tres grandes problemas:

- falta de atención a la generalización y razonamiento,
- un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y
- la falta de claridad en para qué, y para quién, es de utilidad el álgebra.

Estas críticas fueron el desencadenante de un proceso de reforma de la enseñanza del álgebra en los Países Bajos en los años ochenta. En nuestro país son comunes este tipo de críticas, entre quienes reciben a los estudiantes que egresan del nivel primario (entrevista a maestros del nivel medio), por lo que también aquí debería de realizarse una reforma, en cuanto a la forma en que se enseña el álgebra, por lo que puede ser pertinente proponer el desarrollo del pensamiento algebraico desde el nivel primario, para solventar esa situación.

F. NECESIDAD DEL ÁLGEBRA TEMPRANA

La creación de una buena base algebraica del estudiante desde sus primeros años de estudio, hará que sea más competitivo, no sólo a nivel nacional sino a nivel internacional. En países como Estados Unidos ya se han implementado en los estándares educativos nacionales, la enseñanza del álgebra como puntos focales (ver anexo 7), en cada uno de los grados desde pre-primaria hasta el grado 12 (Carraher, D. y Schliemann, A., 2007).

Uno de los aspectos más relevantes en la enseñanza de la matemática, es el cómo enseñar los contenidos para que sean aprendidos por los estudiantes (en nuestro caso los que obliga el CNB). Esto conlleva a una serie de elementos necesarios para tener éxito en dar una buena calidad de educación, siendo esto lo que se pretende alcanzar; tales elementos son conocidos como Oportunidades de Aprendizaje (OdA), que los estudiantes deben tener para poder alcanzar el logro esperado.

La Dra. Zenaida Aguirre-Muñoz (en entrevista cuando daba asesoría sobre los estándares de oportunidad para Guatemala) señaló la necesidad de la profundidad de los contenidos que se enseñan. Al preguntarle sobre la enseñanza del álgebra temprana, indicó que esto podría dar profundidad a los temas matemáticos, como oportunidad de aprendizaje (OdA) que se debe dar a los estudiantes, siempre y cuando los expertos en matemática estuvieran de acuerdo en llevarse a cabo, lo cual ha sido apoyado por ellos.

Cervini, R. (2001) realizó un estudio con 32,152 estudiantes de sexto grado primario y primer grado básico, en escuelas urbanas de Argentina, en donde el comportamiento de los datos mostró que la OdA es una variable intermedia importante, entre el contexto socioeconómico escolar y el logro; además encontró que la OdA es un concepto multidimensional.

Cervini, R. (2001) confirma que en Argentina los rendimientos escolares se relacionan fuertemente con la oportunidad de aprender (OdA ofrecidas al alumno), lo cual da lugar a considerar seriamente lo que comúnmente se afirma en relación a las OdA en Guatemala. Por tal razón, se están creando los estándares de oportunidad, para que pueda establecerse lo que debe dársele a los estudiantes, para que mejore la calidad de su educación y que puedan tener un rendimiento satisfactorio o excelente (Estándares Educativos para Guatemala, 2007).

Los males que aquejan al niño no sólo en el aprendizaje de la matemática, sino también, en un contexto general como la escuela, constituyen los denominados “vicios” o “malos hábitos” (repetición de actos), que son perjudiciales tanto para los hombres que cometen esas acciones, como para la sociedad en que viven por su mala actuación, en palabras de Vizcaya (2002) (citado por Terán, M. y Pachano, L., 2005). Es así, como en la escuela, la generación de vicios suele provenir de una baja formación de los docentes con respecto a la educación de sus alumnos, pues generalmente, estos docentes centran su labor en la enseñanza o instrucción, y no en la educación formadora de virtudes, por lo que no crean ni cultivan disposiciones estables y favorables para la vida.

La falta de un esquema de visión del alumno le impedirá que pueda resolver problemas matemáticos, lo cual es indispensable en álgebra, y cuando se enfrente a problemas más avanzados. Otero, M. y Banks-Leite, L. (2006) en un estudio exploratorio realizado a estudiantes de enseñanza media, con el fin de analizar las estrategias utilizadas y los modelos mentales subyacentes; indican que cuando enfrentan una situación matemática problemática, tienen problemas, en la medida que no disponen de esquemas suficientes.

En un estudio realizado por Álvarez, W. y otros (2007), muestran el análisis de los resultados obtenidos por estudiantes que realizaron las pruebas de evaluación diagnóstica al ingreso en 4 facultades de universidades, pertenecientes al ámbito público o privado; se observó que los alumnos provenientes de orientación científica de Bachillerato en diversificado, muestran un desempeño claramente superior a los de cualquiera de las otras orientaciones.

Esto podría explicarse por la mayor carga horaria de Matemática que tiene esta opción respecto de las otras. Por lo tanto, si se aceptara que esta diferente carga horaria explica, al menos en parte, los diferentes desempeños, debería plantearse como interrogante, si es que el tratamiento de estos temas proporciona ventajas a estos alumnos, al brindarles la posibilidad de construir una cultura matemática más elaborada que la de sus compañeros de otras orientaciones. Es posible que contribuya a favorecer un mayor desarrollo de competencias, por lo que se espera que si hacemos que el estudiante de primaria, practique conceptos durante ese período, tendrán mejores resultados en el futuro.

En síntesis, es necesario que los contenidos en el nivel primario no sólo se den de manera mecánica, sino que se den los temas a profundidad, de tal forma que se les proporcionen a los estudiantes todas las OdA, no limitándolo a continuar en un régimen de enseñanza obsoleto, el cual se ha comprobado que debe mejorar, pues hace que se aborrezca la matemática. El odio a la matemática y su bajo rendimiento, no es conveniente, ya que se ha comprobado que la matemática y en especial el álgebra, se relaciona directamente con el éxito profesional y laboral de las personas (*Foundations for Success*, 2008).

G. APRENDIZAJE

Uno de los problemas del aprendizaje de la matemática en la educación primaria, es que los estudiantes aprenden matemática que aplican sólo en situaciones creadas por el docente y carecen de significado real para ellos. Se requiere que el estudiante no sólo pueda memorizar situaciones, sino también analizarlas y poder aplicar los conocimientos para resolver cualquier problema que se le presente, incluso llegar a un estado de metacognición, según la clasificación creada por Marzano, R. (2000).

El concepto de metacognición es muy complejo y de reciente estudio, que data de los años setenta, y casi nadie pone en duda la importancia de este concepto; pero aun existe debate entre sus alcances, significado e interrelaciones en los diversos tipos de conocimiento. Existen muchas definiciones de diferentes autores y características sobre este concepto; algunas de las cuales se presentan a continuación:

- La metacognición es el conocimiento y regulación de nuestras propias cogniciones y de nuestros procesos mentales: percepción, atención, memorización, lectura, escritura, comprensión, comunicación; preguntándose ¿qué son?, ¿cómo se realizan?, ¿cuándo hay que usar una u otra? y ¿qué factores ayudan o interfieren su operatividad?. Quizás sería mejor llamarla conocimiento autorreflexivo (Burón, 1996, pp. 10−11; citado por Tecnológico de Monterrey 1999:9).
- Metacognición se refiere al conocimiento de uno, concerniente al propio proceso cognitivo, producto o cualquier cosa relacionada con ello (William, D., 2007).
- Metacognición se refiere, entre otras cosas, al activo monitoreo y consecuente regulación y orquestación de estos procesos, en relación a los objetos cognitivos o datos, en el cual ellos nacen, usualmente en el servicio de alguna meta concreta u objetivo (Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007)).

Relativo al concepto de metacognición, se estudia la Auto-eficacia, que es la creencia de poder conducir el progreso por una u otra vereda (William, D. 2007:1084). Es el conocimiento de las posibilidades de logro y saber cómo puede llegar a él; en un momento dado el individuo puede saber si es capaz de hacer algo o no, y cómo lograrlo.

Schoenfeld, A. H. (1992) habla en su investigación sobre cómo se debe enseñar a resolver problemas, llegando al nivel de metacognición y darle sentido a la matemática, de modo que en toda enseñanza de matemática, se debe hacer que el niño razone y piense lo que esta haciendo, cómo lo esta haciendo y si sirve lo que está haciendo. Por lo tanto, se debe enseñar a los estudiantes a ser reflexivos de los procesos que se están llevando a cabo en su aprendizaje.

Muchos han sido los esfuerzos por comprender y dar respuestas al sin número de problemas, tanto prácticos como teóricos, en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática durante los primeros años de escolarización. Al respecto Flórez (1994) (citado por Terán, M. y Pachano, L., 2005), plantea que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, debe ser un proceso iterativo, constructivo, en el que las relaciones maestro-alumno-contenido creen condiciones para el encuentro entre el deseo de enseñar del docente y el deseo de aprender del alumno. Para ello, se requiere de un “docente mediador” que le asigne importancia a la disposición del estudiante para la adquisición de “aprendizajes significativos” y que logre, mediante actividades con significado social y cultural la relación aprendizaje-desarrollo, teniendo en cuenta el nivel alcanzado en etapas anteriores, Vigotsky, 1979 (citado por Terán, M. y Pachano, L., 2005).

H. DESARROLLO COGNITIVO

El desarrollo cognitivo o cognoscitivo se centra en los procesos de pensamiento y en la conducta que refleja estos procesos. Es la base de una de las cinco perspectivas del desarrollo humano aceptadas mayormente (las otras 4 son la perspectiva psicoanalítica, la perspectiva del aprendizaje, la perspectiva evolutiva/sociobiológica y la perspectiva contextual). El desarrollo cognitivo es el producto de los esfuerzos del niño por comprender y actuar en su mundo. Se inicia con una capacidad innata de adaptación al ambiente. Consta de una serie de etapas que representan los patrones universales del desarrollo. En cada etapa la mente del niño desarrolla una nueva forma de operar. Este desarrollo gradual sucede por medio de tres principios interrelacionados: la organización, la adaptación y el equilibrio (http://es.wikipedia.org/wiki/Desarrollo_cognitivo).

Según Jean Piaget, el desarrollo humano parte en función de los reflejos arcaicos, el niño nace con estos esquemas básicos que le sirven para entrar en relación con el medio. El Desarrollo Cognitivo, es el esfuerzo del niño por comprender y actuar en su mundo. Por otra parte, también se centra en los procesos del pensamiento y en la conducta que refleja estos procesos. El desarrollo de las funciones que nos permite conocer, da a lugar a los Procesos Cognitivos. Hay cuatro factores del proceso cognitivo:

- **Maduración y herencia**: la maduración es inherente porque estamos predeterminados genéticamente; el desarrollo es irreversible, nadie puede volver atrás.
- **Experiencia activa**: es la experiencia provocada por la asimilación y la acomodación.
- **Interacción social**: es el intercambio de ideas y conducta entre personas.
- **Equilibrio**: es la regulación y control de los tres puntos anteriores.

Piaget encontró que el proceso cognitivo o pensamiento de los niños jóvenes es inherentemente diferente del de los adultos (al final llegaría a proponer una teoría global de las etapas del desarrollo, afirmando que los individuos exhiben ciertos patrones de cognición comunes y diferenciables en cada período de su desarrollo).

En sus estudios Piaget notó que existen periodos o estados de desarrollo. En algunos prevalece la asimilación, en otros la acomodación. De este modo definió una secuencia de cuatro estados "epistemológicos" (actualmente llamados: cognitivos) muy definidos en el humano (http://es.wikipedia.org/wiki/Jean Piaget):

- **Estado sensorio-motor:** desde el nacimiento hasta aproximadamente un año y medio a dos años. En tal estadio el niño usa sus sentidos (que están en pleno desarrollo) y las habilidades motrices para conocer aquello que le circunda, confiándose inicialmente en sus reflejos y, más adelante, en la combinatoria de sus capacidades sensoriales y motrices.
- **Estado preoperatorio:** el estadio preoperatorio es el segundo de los cuatro estados. Sigue al estado sensoriomotor y tiene lugar aproximadamente entre los 2 y los 7 años de edad. Este estadio se caracteriza por la interiorización de las reacciones de la etapa anterior dando lugar a acciones mentales que aún no son categorizables como operaciones por su vaguedad, inadecuación y/o falta de reversibilidad.
- **Estado de las operaciones concretas:** de 7 a 11 años. Cuando se habla aquí de operaciones se hace referencia a las operaciones lógicas usadas para la resolución de problemas. El niño en esta fase o estadio ya no sólo usa el símbolo, es capaz de usar los símbolos de un modo lógico y, a través de la capacidad de conservar, llegar a generalizaciones atinadas.
- **Estado de las operaciones formales:** es desde los 12 años en adelante cuando el cerebro humano está potencialmente capacitado (desde la expresión de los genes), para formular pensamientos realmente abstractos, o un pensamiento de tipo hipotético deductivo.

Por otra parte, en pedagogía se denomina **constructivismo** a una corriente que afirma que el conocimiento de todas las cosas es un proceso mental del individuo, que se desarrolla de manera interna conforme el individuo interactúa con su entorno (http://es.wikipedia.org/wiki/constructivismo).

Hay muchas corrientes pedagógicas que utilizan la teoría constructivista. La mayoría de los acercamientos que han nacido desde el constructivismo sugieren que el aprendizaje se logra mejor manipulando los objetos. Los que aprenden lo hacen mediante la experimentación y no porque se les explique lo que sucede. Se dejan para hacer sus propias inferencias, descubrimientos y conclusiones.

También acentúa que el aprender no es un proceso de “todo o nada” sino que los estudiantes aprenden la nueva información que se les presenta construyendo sobre el conocimiento que ya poseen. Es por tanto importante que los profesores determinen constantemente el conocimiento que sus estudiantes han ganado para cerciorarse de que las percepciones de los estudiantes del nuevo conocimiento son lo que había pensado el profesor. La Lda. Claudia Lara (experta matemática consultada), propone una metodología para enseñar álgebra, utilizando fichas de colores, en donde dice que ayuda a los estudiantes a ir de lo concreto a lo abstracto.

Vygotski escribió obras en las que se encuentran presentes varios conceptos de especial relevancia que constituyen sus posiciones teóricas, tales como herramientas psicológicas, mediación e internalización, entre otras. Uno de los más importantes conceptos sobre el cual trabajó y al cual dio nombre es el conocido como zona de desarrollo próximo (ZDP), el cual se engloba dentro de su teoría sobre el aprendizaje como camino hacia el desarrollo.

Vygotski señala que la inteligencia se desarrolla gracias a ciertos instrumentos o herramientas psicológicas que el niño encuentra en su medio ambiente (entorno), entre los que el lenguaje se considera como la herramienta fundamental. De esta manera, la actividad práctica en la que se involucra el niño sería interiorizada en actividades mentales cada vez más complejas gracias a las palabras, la fuente de la formación conceptual. Considera que la internalización hace referencia a un proceso de autoconstrucción y reconstrucción psíquica, a una serie de transformaciones progresivas internas, originadas en operaciones o actividades de orden externo, mediadas por signos y herramientas socialmente construidas.

En síntesis, en el marco de la teoría Vygotskiana los procesos de interiorización son creadores de la personalidad, de la conciencia individual y social. Son procesos fundamentales para el desarrollo de los procesos psicológicos superiores en el que participan los instrumentos de mediación, especialmente el lenguaje

La zona de desarrollo próximo a la que se refiere Vygotski, se refiere al espacio, brecha o diferencia entre las habilidades que ya posee el/la niño/a y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más competente. El concepto de la ZDP se basa en la relación entre habilidades actuales del niño y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del niño es cuando puede trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro. Sería este nivel basal lo que comúnmente es evaluado en las escuelas.

El nivel de desarrollo potencial es el nivel de competencia que un niño puede alcanzar cuando se lo es guiado y apoyado por otra persona. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP. La idea de que un adulto significativo (o un par, como un compañero de clase) medie entre la tarea y el niño es lo que se llama andamiaje. Vygotski reconoce la explícita y profunda interconexión entre el lenguaje oral y el desarrollo de los conceptos mentales (http://es.wikipedia.org/wiki/Lev Vygotski).

I. PRUEBAS

El método de observación y recolección de datos más utilizado en las ciencias del comportamiento es el de las pruebas (Kerlinger, F. y Lee, H., 2002:643). Una prueba es un procedimiento sistemático en el que se les presenta a los individuos, un conjunto de estímulos construidos a los cuales responden (Kerlinger, F. y Lee, H., 2002:645). Las pruebas deben ser validadas adecuadamente y con un buen nivel de confiabilidad, dependiendo de para qué, se quiere efectuar la medición. También, son llamados ítems a los estímulos o problemas que se presentan en una prueba. Para este estudio se tomaron ítems que han sido validados en las pruebas del MINEDUC del 2006, y del estudio Centinela del Programa Estándares e Investigación Educativa /USAID del 2007, ambas son muestras a nivel nacional.

Según Kerlinger, la validez se da cuando se está midiendo lo que se dice que se está midiendo, explicando parte del concepto de validez, además define la confiabilidad (*Alpha de Chronbach*) definiéndola como el acuerdo entre observadores, pero que también depende los estadísticos que suponen la independencia de los valores medidos, para lo cual se debe definir lo que se va a observar, con precisión y sin ambigüedades.

El *Alpha de Chronbach* nos da el coeficiente de confiabilidad, para el cual se tienen algunos criterios, por ejemplo: para tomar decisiones de alto impacto este debe ser mayor al 95%, para que tenga una alta confiabilidad, puede bajar a media confiabilidad 80% y baja confiabilidad 70%, si los resultados van a servir en situaciones que no implique tomar decisiones que afecten a personas (según expertos en medición).

La realización de evaluaciones ha sido un tema polémico, hay quienes argumentan que un valor arrojado por estas, por si sólo, no significa que alguien sabe lo evaluado, y mucho menos si se usará para promoción o tomar decisiones de alto impacto en las personas. A raíz de esto se han creado métodos de validación de pruebas, que cumplan con especificaciones mínimas para que puedan reflejar en buena medida, el conocimiento del contenido que se desea medir.

Las pruebas nacionales son realizadas a una muestra de escuelas a nivel nacional, de estas se tomaron 12 ítems para evaluar a estudiantes de sexto grado primario. Como la nueva prueba es corta no se obtendrá el coeficiente de confiabilidad, porque no es suficiente el número de ítems para determinar su consistencia interna.

III. MARCO METODOLÓGICO

Se realizó una investigación de tipo exploratoria, por lo poco que ha sido estudiado el tema, y para conocer las opiniones de los expertos en matemática y su enseñanza. Se busca describir el tema, y recoger la mayor cantidad de información que se pueda, para conocer los procesos que los estudiantes de este estudio utilizaron para resolver algunos problemas matemáticos, identificando procedimientos algebraicos, indicando sus deficiencias y lo que se necesita para que mejoren su aprendizaje. El estudio es mixto, porque los datos recolectados y su análisis son una parte de tipo cuantitativo y otra cualitativa, de manera que se complementen y se proporcione la mayor información posible.

En el enfoque cuantitativo se dan porcentajes de las formas de solución de los problemas por los estudiantes evaluados, obteniendo los datos con una prueba a los estudiantes, e indicando su rendimiento. En la parte cualitativa la recolección de datos se realizó por medio de entrevistas, a los expertos en matemática, maestros de nivel medio y primario, y sobre la forma de resolver los problemas de los estudiantes. Para ello se procuró ser lo menos obstrusivo posible, como sugiere Sampieri, R.; Fernandez-Collado, C. y Lucio, P., 2006, de manera que los hallazgos sean descritos dando la mayor información posible.

A. REVISIÓN DE CONTENIDOS EN TEXTOS

Como primera acción se procedió a revisar en los libros de texto, el campo de la matemática que está relacionado con el álgebra, para identificar los conceptos básicos que pudieran ser enseñados desde el nivel primario. Los textos utilizados, muestran como se desarrollan los contenidos algebraicos en su enseñanza formal, por lo que fueron la guía para conocer las habilidades necesarias, al utilizarlos y aprender de mejor forma los conceptos de álgebra.

Los contenidos seleccionados como básicos, obtenidos de los libros de álgebra se muestran en el Anexo 1. Estos contenidos fueron cotejados con los contenidos del CNB de nivel primario, en todos los grados, para determinar en cuales de los contenidos del CNB se pudieran enseñar conceptos algebraicos. Con estos contenidos se formó un instrumento que se llevó para consulta, a los expertos en matemática y profesores de nivel primario y medio (ver anexo 2).

B. INVESTIGACIONES SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA

Para saber si es posible desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros años de estudio, se procedió a consultar investigaciones, reportes y estudios previos que mostraran hallazgos importantes en este tema, de tal forma que se hizo una recopilación bibliográfica, tomando gran cantidad de material escrito sobre el álgebra temprana, junto con desarrollo del pensamiento algebraico y álgebra en primaria.

La investigación es de tipo exploratoria, ya que no se encontraron algunos antecedentes de investigación sobre este tema en Guatemala. Se encontró buena cantidad de estudios sobre el tema en países como Estados Unidos, México, España y Argentina; en donde se le ha dado un lugar importante no sólo a la investigación del álgebra temprana, sino a la implementación de políticas educativas orientadas a desarrollar el pensamiento algebraico en el niño, desde los primeros años de estudio.

C. CONSULTA A EXPERTOS

Para contextualizar el estudio fue necesario consultar a los diferentes grupos de expertos, los cuales son profesionales expertos en matemática (también son maestros universitarios), maestros de nivel medio y maestros de nivel primario.

De forma que se conozcan las percepciones, opiniones e impresiones que ellos tienen sobre este tema, de manera que proporcionen información para delimitar el campo del álgebra en el nivel primario.

Se realizaron entrevistas abiertas con tres grupos de expertos (Expertos en matemática, maestros de nivel primario y maestros de nivel medio), quienes dieron información del tema, puntos de vista, opiniones, y lo que consideran se debiera hacer para desarrollar el pensamiento algebraico en primaria. El grupo de expertos en matemática fueron 12 que en su totalidad son de la ciudad capital. El grupo de maestros de educación media son 5 en total, 2 del sector privado y 3 del sector oficial, todos de la ciudad capital. El grupo de maestros de nivel primario fueron 22, de primero a sexto del nivel primario, tomados del municipio de Santa Cruz Naranjo, del departamento de Santa Rosa; tomando del sector oficial y privado, área rural y urbana.

Junto con los textos de álgebra se revisó minuciosamente el CNB, seleccionando los contenidos más importantes para enseñar conceptos algebraicos (criterio del investigador). Se construyó un instrumento de consulta que se les proporcionó a los expertos y maestros. El instrumento contenía la mayor parte de contenidos del CNB de primaria, para determinar cuáles son los contenidos en los que se puede comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico (a juicio de ellos), y en qué grado es posible comenzarlo a hacer. El instrumento utilizado se muestra en el Anexo 2.

La muestra de los expertos profesionales en matemática es tomada de la mayor parte de profesionales de Guatemala, que tienen postgrados en matemática, trabajan y han trabajado en educación y tienen una trayectoria respetable. En este caso la muestra es de 12, siendo una muestra grande, ya que no son muchas las personas que han tenido una participación activa en la educación matemática y tienen especialización en la materia.

La muestra de profesores de nivel medio y primario, son muestras dirigidas, para explorar el tema han sido elegidos por conveniencia; tomando algunos del área rural y otros del área urbana, además se tomaron del sector oficial y del privado.

E. REVISIÓN DE PRUEBAS NACIONALES

Al haber realizado las consultas y entrevistas, se tabularon los datos del instrumento de contenidos, se obtuvieron las frecuencias de coincidencias de los expertos y maestros de primaria y secundaria. De estos contenidos, se tomaron los contenidos con mayor cantidad de acuerdos (coincidencias del contenido muy importante, y que se puede enseñar álgebra). El listado de contenidos que tuvieron mayor frecuencia (según expertos en matemática), se muestra en la tabla 3.

Se procedió a buscar en las pruebas nacionales liberadas del 2007 y 2006, que se realizaron a sexto grado primario, los ítems que corresponden a los contenidos señalados por los expertos, como los más importantes para este fin, y se seleccionó un grupo de 12 ítems. Los ítems originales son de selección múltiple, con cuatro opciones de respuesta. Las opciones de repuesta fueron eliminadas, y solamente se dejó el enunciado del problema, con un espacio de media página para que los estudiantes dejaran escrito el procedimiento utilizado.

Los ítems se seleccionaron según los contenidos de la tabla 3, eligiendo los considerados como más representativos, y en los que se pueden utilizar procedimientos algebraicos para resolverlos. Este proceso de selección se muestra en el Anexo 3. Con los ítems seleccionados se construyó una nueva prueba con 12 ítems, la cual se muestra en el Anexo 4. Al aplicar la prueba se solicitó a los estudiantes que dejaran escrito el procedimiento que utilicen.

Tabla 3. Contenidos con mayor nivel de coincidencia en los cuales se puede comenzar a enseñar conceptos básicos de álgebra, según expertos

TEMA	CONTENIDO
Geometría	Área
	Perímetro
Patrones	Reconoce patrones
	Patrones numéricos
Series	Reconoce series
	Series aritméticas
Suma	Comparación con el proceso de la resta
	Conmutatividad (a+b=b+a)
	Asociatividad (a+b)+c = a+(b+c)
	Identidad (a+0=0+a=a), neutro aditivo
Resta	Comparación con el proceso de la suma
Multiplicación	Conmutatividad (ab=ba)
	Identidad (a·1=1·a=a), Neutro multiplicativo
	Comparación con el proceso de división
Regla de tres	Proporciones
Jerarquía de operaciones	Con signos de agrupación
Relaciones	Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)
	Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)
	Mayor y menor

Fuente: Elaboración propia[1]

En el Anexo 5 se muestran los protocolos de observación preliminares utilizados para obtener los procesos involucrados en cada uno de los ítems de la prueba que contenía los 12 ítems seleccionados. Al tener los procesos involucrados, se identificaron los que fueran algebraicos y se presentaron los resultados en el siguiente capítulo.

[1] Todas las tablas y gráficos siguientes son elaboración propia, por lo que no se especificará la fuente.

F. PRUEBA DE MATEMÁTICA

Se aplicó a una muestra de 264 estudiantes distribuidos en 6 escuelas oficiales del municipio de Santa Cruz Naranjo, y en 3 colegios privados del municipio de Barberena, ambos del departamento de Santa Rosa. Además se aplicó la misma prueba al grupo de 22 maestros de nivel primario, de Santa Cruz Naranjo, que imparten diferentes grados en el nivel primario, para comparar los resultados de los estudiantes con los de los maestros.

La muestra de los estudiantes de sexto primaria fue tomada por conveniencia, eligiendo a 6 de las escuelas oficiales, una del área urbana y 5 del área rural; se tomaron 3 establecimientos privados que pueden ser clasificados como del área urbana. Se trató de abarcar la totalidad del municipio mencionado, por lo que se tomaron los colegios privados que tienen servicio de bus en esa área conformando el 75%, y las escuelas oficiales tomadas también conforman el 75% del municipio; se enfocó en esa área especifica que representa a un conglomerado, en el cual se encuentran las características urbanas, rurales, públicas y privadas.

IV. RESULTADOS

A. EXPERTOS EN MATEMÁTICA

En las entrevistas realizadas a los expertos en matemática (se les llamará sólo expertos), quienes son respetados profesionales en este campo, y con una gran influencia en el desarrollo de la educación matemática en Guatemala, se estableció que en su mayoría están de acuerdo en que se puede desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes desde el nivel primario; y no solamente están de acuerdo en que se puede, sino que consideran importante que se lleve a cabo.

Las preguntas realizadas en la entrevista fueron: ¿cuáles son los contenidos matemáticos del nivel primario, en los cuales se puede comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico?, ¿en qué grado pueden comenzarse a introducir?, y ¿cuáles son los más importantes? De estas se tiene una mayor coincidencia en los contenidos mostrados en la tabla 4.

De los 12 expertos entrevistados, 11 están de acuerdo en que se puede enseñar álgebra en primaria, de los 11 acuerdos 8 coinciden aclarando que no se trata de enseñar álgebra como tal, sino enseñar conceptos básicos como base. Indican que se debe comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes, de manera que se utilice el razonamiento y el análisis en los procesos de aprendizaje, y así crear la conexión de lo concreto con lo abstracto (sin abusar de éste), creando avances matemáticos dirigidos.

Tabla 4. Contenidos matemáticos de nivel primario con mayor acuerdo de expertos, para desarrollar el pensamiento algebraico

TEMA	CONTENIDO	GRADO INICIO	ACUERDOS
Geometría	Área	3-5	6
	Perímetro	4	6
Patrones	Reconoce patrones	1	6
	Patrones numéricos	1	7
Series	Reconoce series	3	6
	Series aritméticas	1-6	7
Suma	Comparación con el proceso de la resta	1	6
	Conmutatividad (a+b=b+a)	1	6
	Asociatividad (a+b)+c = a+(b+c)	1	6
	Identidad (a+0=0+a=a), neutro aditivo	1	6
Resta	Comparación con el proceso de la suma	2	6
Multiplicación	Conmutatividad (ab=ba)	1	6
	Identidad (a·1=1·a=a), Neutro multiplicativo	1-6	6
Regla de tres	Proporciones	6	6
Jerarquía de operaciones	Con signos de agrupación	3-6	6
Relaciones	Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)	3	6
	Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)	3-4	6
	Mayor y menor	1	7

Las consultas sobre los contenidos más importantes muestran frecuencias de hasta siete acuerdos. De la consulta se obtuvo una lista de los contenidos de 6 y 7 acuerdos, los cuales se muestran en la tabla 4. Sobre los contenidos de primaria que fueron consultados a expertos, respecto de sí se pueden enseñar conceptos algebraicos en ese nivel; ellos están de acuerdo en que la mayoría de estos pueden comenzarse a enseñar desde el primer grado, mientras que otra parte indica que es mejor introducirlos hasta sexto grado.

Tabla 5. Definiciones de álgebra dadas por los expertos en matemática

¿QUÉ ES ÁLGEBRA?
Área de la matemática que concibe a la cantidad de la forma más general posible.
Rama de la matemática que orienta la generalización de situaciones que tienen algún componente o relación con contenidos de dicha área.
Implementación de signos y símbolos para la resolución de problemas.
Estudio de las estructuras y las propiedades de un conjunto de elementos y operaciones binarias y/o escalares sobre un campo.
Es la generalización de un proceso.
La aplicación de numerales en problemas (matematización)
Es el estudio de las propiedades de un conjunto, y una o más operaciones definidas en él.
Rama de la matemática cuyo objeto de estudio es el pensamiento variacional expresado en variables, sus relaciones, propiedades, operaciones y aplicaciones por medio de método deductivo abstracto.
Rama de la matemática dedicada al estudio generalizado de operaciones, relaciones y propiedades de los números reales. Se caracteriza por su alto nivel de abstracción y representación simbólica.

Adicionalmente se les pidió a los expertos que dieran su definición de álgebra, con el fin de conocer sus percepciones sobre el tema en general, y si esto de alguna forma está ligado a lo que se pretende, lo cual es introducir al estudiante desde el nivel primario al pensamiento algebraico. La tabla 5 muestra las definiciones obtenidas.

En las definiciones se puede observar como se expresan a favor de la generalización, utilización de símbolos y el enfoque en las propiedades. Al tener la entrevista abierta ellos indican que el estudiante necesita aprender de esta forma, porque es una manera de razonar y analizar lo que hace. Elimina la mecanización y eleva el nivel de cognición que adquiere, ayudándole a tener varios niveles de aprendizaje, como los que propone Marzano, R. (2000).

Entre los comentarios dados por la mayoría de expertos hacen notar que existe un problema con los maestros del nivel primario, y es, que en su mayoría no saben bien la matemática (comentarios literales), o no tienen interés en esta materia. Indican que muchos maestros tratan de no dar matemática si les es posible, y si lo hacen, en ocasiones no conocen bien el contenido que enseñan. Los maestros que se interesan por prepararse mejor, o les gusta la matemática pueden y han hecho un buen trabajo, enseñando a los estudiantes a tener un buen nivel de abstracción.

Para mejorar esta situación, el Ministerio de Educación debería dar a los maestros preparación continua, y las herramientas necesarias para que un maestro pueda enseñar matemática, con objetivos, y conciente del proceso que está realizando con los estudiantes (respuestas de expertos).

Es necesario crear una continuidad entre lo que se enseña en el nivel primario y lo que se verá en el nivel medio, de manera que se creen constructos en los estudiantes, que estos no sientan un cambio abrupto, y no adquieran conocimientos aislados, sino que la matemática es una sola. Se les debe acostumbrar a no esperar algoritmos paso a paso, para la solución de problemas, sino que ejerciten su lógica, para que puedan razonar, analizar y aplicar lo que aprendan.

B. MAESTROS DE NIVEL MEDIO

Se realizó el mismo proceso de entrevista con los maestros de nivel medio que con los expertos matemáticos, de manera que se les preguntó cuales son los contenidos en los cuales se pueden enseñar conceptos algebraicos en el nivel primario, en que grado se puede comenzar a enseñar y cuales son los más importantes. La tabla 6 muestra las frecuencias de acuerdo entre los maestros, para los temas que los expertos dijeron ser los más importantes, y el grado en que se podría iniciar a utilizar conceptos algebraicos.

Los maestros de nivel medio no muestran gran similitud con los acuerdos obtenidos que tuvieron los expertos, al igual que los maestros de primaria, que tuvieron una mayor dispersión en la elección y las frecuencias no fueron altas. Se observó que no le dieron importancia a dos de los contenidos consultados, los cuales son la comparación del proceso de la suma con la resta, que aparecen tanto en el tema de la suma como el de la resta.

También indican que hay gran necesidad de mejorar la matemática desde el nivel primario, porque cuando los estudiantes llegan al nivel básico, llevan una base pobre en esta materia. Indican que en algún momento han pensado, que se deberían enseñar los conceptos básicos de álgebra desde el nivel primario.

Tabla 6. Contenidos matemáticos de nivel primario con mayor acuerdo de maestros de nivel medio, para desarrollar el pensamiento algebraico

TEMA	CONTENIDO	GRADO INICIO	ACUERDOS
Geometría	Área	3	2
	Perímetro	4	2
Patrones	Reconoce patrones	1	1
	Patrones numéricos	1	2
Series	Reconoce series	3	1
	Series aritméticas	1	1
Suma	Comparación con el proceso de la resta	1	1
	Conmutatividad (a+b=b+a)	1	2
	Asociatividad (a+b)+c = a+(b+c)	1	2
	Identidad (a+0=0+a=a), neutro aditivo	1	2
Resta	Comparación con el proceso de la suma	2	2
Multiplicación	Conmutatividad (ab=ba)	1	2
	Identidad (a·1=1·a=a), Neutro multiplicativo	1	1
Regla de tres	Proporciones	6	0
Jerarquía de operaciones	Con signos de agrupación	3	1
Relaciones	Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)	3	1
	Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)	3	1
	Mayor y menor	1	1

Los maestros entrevistados fueron 5 en total, quienes en su mayoría son estudiantes universitarios en carreras que no son de educación, indicando que han impartido clases porque les gusta, o porque al ser de medio tiempo les da la oportunidad de continuar con sus estudios. Algunos son profesores de enseñanza media, pero son pocos los que tienen especialidad en matemática; aún los profesores de enseñanza media en matemática, indican que les falta saber cómo enseñar mejor la matemática.

En sus comentarios indican que la mayoría de estudiantes dicen que no les gusta la matemática, y que han elegido ciertas carreras porque no llevan esa materia, pero luego descubren que también deben aprender matemática, por lo que aseguran que es la clase más difícil de entender. Se les pidió que dieran sus definiciones sobre álgebra, las cuales se muestran en la tabla 7.

Tabla 7. Definiciones de álgebra dadas por los maestros de nivel medio

¿QUÉ ES ÁLGEBRA?
Es la unión de la aritmética con una parte literal.
Es la utilización de variables, en el desarrollo de la matemática.
Es la rama de la matemática que propone operaciones utilizando variables, y crea un pensamiento lógico y dinámico.
Es una serie de pasos matemáticos, donde se involucra la aritmética como base y se usan símbolos para determinar la solución de un problema dado.
Es una parte de las ciencias matemáticas que o mediante la cual las cantidades pueden representarse en forma general empleando cantidades y letras.

Las definiciones tienen similitud con las dadas por los expertos, y en la entrevista fueron claros al decir lo que piensan del tema, e indican que siempre debe existir una conexión entre la aritmética con el álgebra, apoyando la propuesta de desarrollar pensamiento algebraico en el nivel primario.

C. MAESTROS DE NIVEL PRIMARIO

Se realizaron dos grupos de 9 cada uno, y 4 entrevista individuales, para consultar a los maestros de nivel primario, lo cual fue diferente al proceso de recolección de datos con los expertos matemáticos y los maestros de nivel medio. Se les preguntó cuáles son los contenidos en los que se pueden enseñar conceptos algebraicos desde el nivel primario, en qué grado se puede comenzar a enseñar y cuáles son los más importantes.

Se entrevistaron 22 maestros, quienes coincidieron en un máximo de 10 acuerdos en los temas con mayor frecuencia; se tomaron los contenidos que tuvieron el nivel más alto con los expertos, para compararlos, ya que estas coincidencias de acuerdo son mucho más dispersas. La tabla 8 muestra las frecuencias de acuerdo entre los maestros de nivel primario, con los temas elegidos como más importantes por los expertos.

La mayor parte de acuerdos entre maestros de nivel primario, se dan en los contenidos que los expertos en matemática tuvieron bajas frecuencias de elección, en los cuales indicaron poca importancia, de manera que se ve una diferencia grande entre lo que piensan los expertos y los maestros de primaria.

Los maestros de primaria dicen estar consientes que les falta mucho por aprender de matemática, e indican que en ocasiones tratan de elegir los grados bajos como primero, porque según ellos, allí no enseñan mucha matemática. Realmente los maestros se mostraron interesados al discutir el tema de enseñanza de conceptos de álgebra en primaria, manifestaron su interés en aprender más sobre el tema, tanto que pidieron que se hiciera un taller solamente para enseñarles ese proceso.

Tabla 8. Contenidos matemáticos de nivel primario con mayor acuerdo de maestros de nivel primario, para desarrollar el pensamiento algebraico

TEMA	CONTENIDO	GRADO INICIO	ACUERDOS
Geometría	Área	3	8
	Perímetro	4	10
Patrones	Reconoce patrones	1	7
	Patrones numéricos	1	5
Series	Reconoce series	3	3
	Series aritméticas	1	6
Suma	Comparación con el proceso de la resta	1	7
	Conmutatividad (a+b=b+a)	1	8
	Asociatividad (a+b)+c = a+(b+c)	1	8
	Identidad (a+0=0+a=a), neutro aditivo	1	7
Resta	Comparación con el proceso de la suma	2	9
Multiplicación	Conmutatividad (ab=ba)	1	7
	Identidad (a·1=1·a=a), Neutro multiplicativo	1	6
Regla de tres	Proporciones	6	6
Jerarquía de operaciones	Con signos de agrupación	3	6
Relaciones	Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)	3	4
	Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)	3	3
	Mayor y menor	1	8

En su totalidad los maestros indican que sí se puede enseñar álgebra en primaria, y que se debería hacer, porque no quisieran que sus alumnos tuvieran la deficiencia que ellos tienen en matemática, porque se sienten con un bajo nivel (palabras de los propios maestros en los grupos).

Tabla 9. Definiciones de álgebra dadas por los maestros de nivel primario

¿QUÉ ES ÁLGEBRA?
Es un proceso matemático aplicable mentalmente, operaciones racionales.
Es una rama de la matemática que permite el uso de la razón humana.
Es el conjunto de operaciones que nos ayudan a realizar un pensamiento lógico y ordenado.
Son ecuaciones que nos sirven para resolver cualquier operación de tipo lógico.
Es una rama de la matemática y nos enseña a hacer cálculos mentales.
Conjunto de operaciones que nos lleva a realizar un pensamiento lógico y ordenado.
Es una rama o extensión de las matemáticas que desarrolla el pensamiento lógico en los niños y niñas.
Forma lógica de trabajar por medio de signos.
Disciplina matemática que desarrolla el pensamiento lógico en el educando y permite la utilización ordenada de signos, números y letras.
Parte de la matemática aplicada a operaciones, expuesta por medio de letras.
Es el conjunto de operaciones que nos ayudan a realizar un pensamiento lógico y ordenado.
Es desarrollar el pensamiento lógico por medio de la simbología.
Es un sistema de numeración y de signos del área (sistema) matemático que nos ayuda a resolver los problemas que se dan en el diario vivir y en nuestra vida estudiantil.
Es que nos ayuda a desarrollar el pensamiento lógico.
Son formas que se dan para poner en práctica nuestro coeficiente.

Cont. Tabla 9. Definiciones…

¿QUÉ ES ÁLGEBRA?
Es un tema parecido a la matemática pero un poco más complicado, que se les debe impartir a los niños de 4°, 5° y 6°, para que después cuando entren a la secundaria no sientan un cambio muy drástico.
Ciencia de la matemática que se encarga de estudiar el pensamiento lógico, en el área de la matemática.
Es una rama de la matemática que ayuda a desarrollar el pensamiento lógico y ordenado.
Es una rama de la matemática que estudia el pensamiento lógico y ordenado de los números.
Ciencia de la matemática que se encarga del pensamiento lógico matemático.
Es un proceso matemático superior, cuya función es el análisis de criterio lógico matemático que interviene el uso de fórmulas complejas.
Relación de números con letras para encontrar resultados utilizando fórmulas.
Es una clase de matemática más avanzada, ya que se presentan las operaciones por medio de signos que ayuda a pensar y a analizar más los problemas que se presentan. Es algo muy importante y bonito.
Es una forma de resolver problemas matemáticos relacionados con potencias y ecuaciones.
Es una forma de aplicar en forma concisa la matemática. Forma en que se puede trabajar un número con exactitud. Es forma de aplicar un número.
Parte de la matemática que nos ayuda a resolver problemas con algunas variables usando razonamientos lógicos.
Proceso de resolver ecuaciones.

En los grupos manifestaron la necesidad que el ministerio de educación les dé capacitación, pero que sea consistente. Indican que quieren que se les envíen capacitadores que dominen el tema, porque han recibido capacitaciones que no les ayuda mucho. Las definiciones sobre álgebra dadas por los profesores de nivel primario entrevistados, se muestran en la tabla 9, escritas en forma textual.

Los maestros de nivel primario en su totalidad indican estar de acuerdo en introducir al estudiante de nivel primario al estudio del álgebra. Las definiciones dadas por los maestros parecen poco concretas, pero dicen que es el conocimiento que tienen del tema, porque lo manifestaron después de escribirlas y discutir sobre lo que habían escrito, indicando que cuando hablan de complejidad ellos dicen no saber cómo enseñar contenidos algebraicos, y que por eso son temas complejos.

Se les realizó la misma prueba que a los estudiantes de sexto grado primario (para quienes fueron diseñados los ítems), y así poder comparar los resultados obtenidos por los maestros y los estudiantes.

D. PRUEBA DE MATEMÁTICA A ESTUDIANTES Y MAESTROS

Se les dio la prueba a los maestros de grado de los estudiantes evaluados, para que indicaran el grado de dificultad que sería para sus estudiantes cada problema; se pidió que le dieran un número, en una escala de 1 a 5, en donde 1 es más fácil y 5 más difícil. Según el criterio, respondieron como se muestra en la tabla 10; en la última fila se tienen los porcentajes de dificultad para cada problema.

No todos los maestros dieron su opinión, porque algunas veces no estaban presentes en el salón de clase. Según el criterio de los maestros sobre la dificultad del ítem para sus estudiantes, se ve con mayor dificultad el ítem 10 y el 12, con más de 90% de dificultad; y el ítem 4 que nadie llegó a la respuesta correcta, tuvo 63% de dificultad.

Tabla 10. Criterio de los maestros de sexto grado, sobre la dificultad que representa para sus estudiantes los problemas de la prueba

DIFICULTAD: 1=Fácil, 2=No tan fácil, 3=Intermedio, 4=No tan difícil y 5=Difícil												
Maestro de:	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**
OR4	1	2	4	3	3	2	2	4	2	5	4	5
OR3	1	1	2	3	3	2	3	2	1	5	4	5
OR2	1	1	1	3	4	2	2	2	1	5	4	5
PR1	1	1	2	3	3	1	3	2	1	4	3	5
PU1	1	4	4	5	4	2	3	3	1	5	4	5
OR5	1	1	1	2	2	1	2	2	1	3	1	4
TOTAL	6	10	14	19	19	10	15	15	7	27	20	29
Promedio	1.0	1.7	2.3	3.2	3.2	1.7	2.5	2.5	1.2	4.5	3.3	4.8
Porcentaje	**20%**	**33%**	**47%**	**63%**	**63%**	**33%**	**50%**	**50%**	**23%**	**90%**	**67%**	**97%**

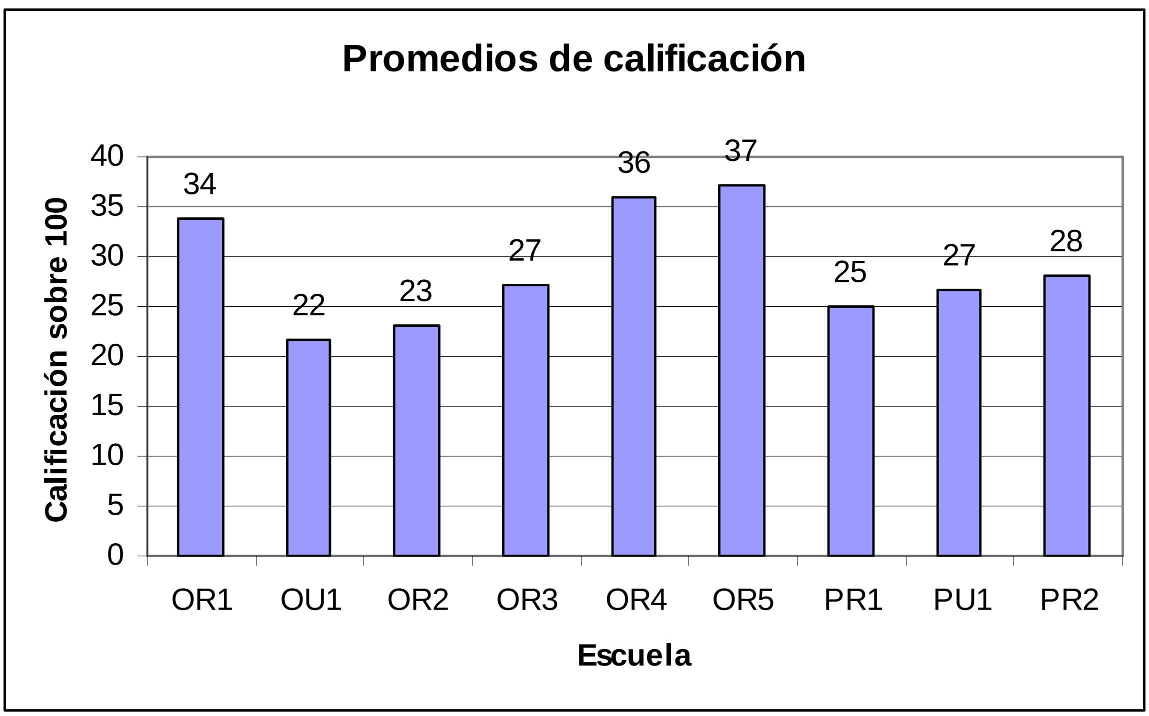
Tabla 11. Coeficientes de dificultad para cada ítem de la prueba

PRUEBA DE MATEMÁTICA				
Ítem de la prueba en este estudio	No. Ítem obtenido de la prueba nacional indicada, forma y año	Coeficiente de dificultad en la prueba realizada a estudiantes	Coeficiente de dificultad en la prueba realizada a maestros	Coeficiente de dificultad en las pruebas nacionales
1	1 → 2007 A	0.99	1.00	0.11
2	10 → 2006 A	0.01	0.59	0.14
3	13 → 2006 A	0.34	0.32	0.17
4	38 → 2006 A	0.01	0.00	0.13
5	10 → 2007 B	0.19	0.44	0.19
6	27 → 2007 B	0.66	0.95	0.09
7	29 → 2007 B	0.26	0.45	0.26
8	33 → 2007 B	0.35	0.77	0.13
9	36 → 2007 B	0.23	0.85	0.22
10	7 → 2006 B	0.00	0.36	0.12
11	9 → 2006 B	0.48	0.50	0.22
12	10 → 2006 B	0.00	0.13	0.04

En la tabla 11 se presenta el índice de dificultad que obtuvo cada ítem en las pruebas nacionales, y en la prueba realizada para esta investigación; en donde se puede ver diferencias notorias en la mayoría de los ítems, pero en 4 de ellos se tienen resultados similares: ítems 5, 7, 9 y 12. Esto, como suposición, podría explicarse porque la muestra utilizada es de un sector en donde predomina el área rural, no es una muestra representativa del país, o porque los estudiantes no se prepararon de alguna forma para tomar la prueba. La tabla 11 muestra también la procedencia de los ítems de las pruebas nacionales.

En la figura 2 se muestran los promedios de calificaciones por escuela, en donde se comparan todas las escuelas evaluadas, con la siguiente descripción: OR significa escuela oficial rural, OU significa escuela oficial urbana, PR significa colegio privado rural y PU significa colegio privado urbano. En la figura 2 se ve que la mayor calificación la tienen las escuelas oficiales rurales, quedando los colegios privados en nivel intermedio, curiosamente una escuela oficial urbana fue la que obtuvo menor promedio.

Figura 2. Calificaciones obtenidas en promedio, por escuela evaluada



La figura 3 muestra la distribución de los resultados de los maestros comparado con los estudiantes, en donde se ven las diferentes calificaciones con la frecuencia de obtención. Se puede ver que los maestros obtuvieron mejores notas que los estudiantes, pero no mucho mayor, pues la nota más alta fue de 67 puntos de 100 para ambos.

Las calificaciones de los estudiantes fueron más bajas que la de los maestros cuya moda fue de 25 para los estudiantes y en 58 para los maestros. El promedio de calificación sobre 100 puntos de los estudiantes fue de 28 y el de los maestros de 49, como se observa en la tabla 12. La dispersión de los resultados fue similar para ambos grupos.

Figura 3. Calificaciones de maestros y estudiantes

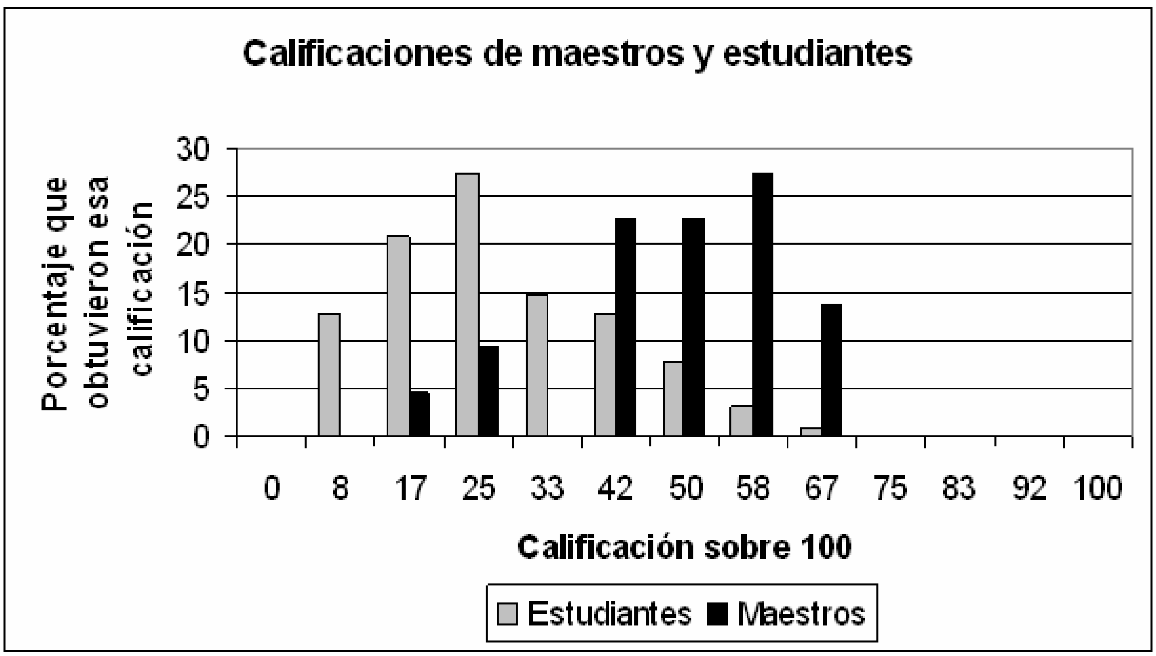


Tabla 12. Promedio de calificación de los maestros y estudiantes

	Estudiantes		Maestros	
	Sobre 12	Sobre 100	Sobre 12	Sobre 100
Media	3.33	27.74	5.8636	48.86
Desv. Estándar	1.625	13.538	1.64159	13.680

A continuación se describen las formas de solución que utilizaron los estudiantes para cada ítem (también se le llamará problema), los cuales comparándolos con las soluciones de los maestros, son similares y no se ven grandes diferencias; excepto en ocasiones especiales en donde los estudiantes mostraron algunas formas más creativas de intentar resolver el problema.

E. DESCRIPCIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LOS ÍTEMS, REALIZADAS POR LOS ESTUDIANTES

Se escribirá primero el enunciado del ítem con el número correlativo en la prueba, luego se mostrarán los algoritmos de solución que se esperaba que los estudiantes utilizaran para resolver cada ítem, explicando cómo se resuelven, y se indican las formas que utilizaron para resolver cada uno. Se describirá como se distribuyen los porcentajes de intentos de solución, y luego se detallarán algunos procedimientos con porcentajes solo de la parte que se especifica.

ÍTEM 1

1. ¿Qué número obtenemos al sumar: **900 + 50 + 2?**

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 13, estos están divididos por columnas. En la columna 1 suman verticalmente los tres números en un solo paso. En la columna 2 suman horizontalmente los tres números en un solo paso. En la columna 3 suman verticalmente, primero dos valores y el otro inmediatamente después bajo el resultado de la primera parte de la suma. En la columna 4 suman verticalmente, primero dos valores y luego el resultado de la primera parte de la suma con el número que falta, separadamente. Las operaciones por partes las pudieron haber realizado horizontalmente.

Tabla 13. Algoritmos de solución esperados para el ítem 1

1	2	3	4
Suma vertical	Suma horizontal	Suma por partes	Suma por partes separadas
900 50 2 + 952	900 + 50 + 2 = 952	900 50 + 950 2 + 952	900 50 + 950 950 2 + 952

El estudiante podría sumar de forma vertical los tres números en un sólo paso, de forma horizontal en un paso, o por partes aplicando la ley asociativa de la suma, en donde suma primero dos números y luego el restante.

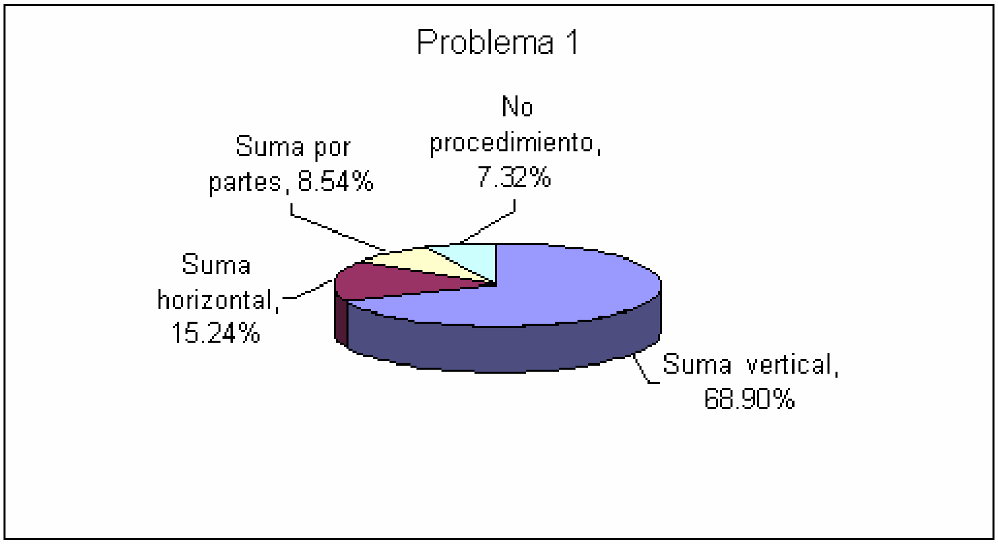
La aplicación de solución algebraica sería si utiliza alguna propiedad de la suma para realizar lo indicado, por ejemplo sumando por partes, asociando los valores que considere más fáciles de sumar en un primer paso. Esto lo realizan en la suma por partes, y lo hacen sólo el 8.54% de los estudiantes.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 100% de los estudiantes intentó resolver el problema, 98.8% de los estudiantes que tomaron la prueba resolvió bien el problema, e indicaron la respuesta correcta; 1.2% indicaron una respuesta incorrecta. De ellos el 68.9% suma los números de forma vertical, el 15.24% suma los números de forma horizontal, el 8.54% suma los números por partes (de dos en dos) ya sea vertical u horizontalmente, y el 7.32% no dejó procedimiento pero indicó una respuesta correcta. En la figura 4 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 1.2% indica una respuesta incorrecta, fueron 2 estudiantes de diferentes establecimientos, uno indica como resultado 9052, el otro estudiante escribe los números a sumar pero no indica respuesta. En este problema no se detectó que realizaran la suma llevando, lo que no era necesario hacerlo.

Figura 4. Porcentajes de las formas de solución del ítem 1



ÍTEM 2

2. ¿Cuál es el valor de **(13.5 X 0.4) + (3.95 ÷ 0.25)?**

SOLUCIÓNES ESPERADAS

El algoritmo de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 14. Como primer paso el estudiante debe realizar las operaciones que están entre los paréntesis, sin importar cual realice primero y luego sumar los resultados obtenidos en los dos paréntesis. Podría tomar el camino de la columna 1, realizando primero la multiplicación y luego la división, para realizar por último la suma; o tomar el camino de la columna 2, realizando primero la división y luego la multiplicación, para realizar por último la suma.

El estudiante deberá realizar primero las operaciones entre los paréntesis, podrá elegir entre cualquiera de los dos para operar primero, y luego deberá sumar los resultados de las operaciones que realizó en los paréntesis.

Tabla 14. Algoritmos de solución esperados para el ítem 2

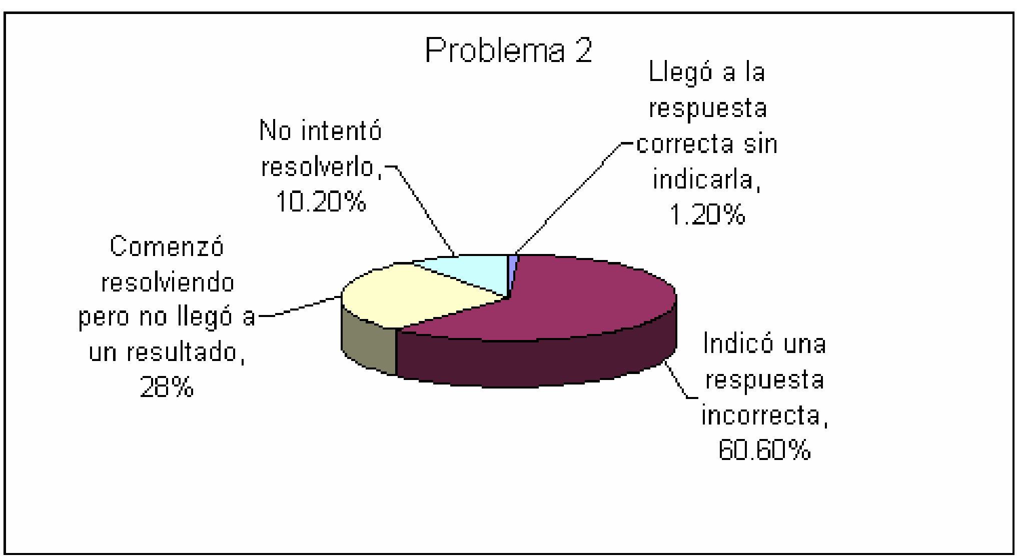
1	2
Primer paréntesis 13.5 * 0.4 = 5.4	Segundo Paréntesis 9.35 / 0.25 = 15.8
Segundo Paréntesis 9.35 / 0.25 = 15.8	Primer paréntesis 13.5 * 0.4 = 5.4
Suma los resultados de los dos paréntesis 5.4 + 15.8 = 21.2	

La aplicación de álgebra se realizaría cuando el estudiante respeta la jerarquía de operaciones, o en este caso de los signos de operación, al haber hecho primero las operaciones dentro de los paréntesis y luego la operación entre los dos paréntesis.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 89.8% intentó resolver el problema, de ese porcentaje 1.2% llegó a la respuesta correcta pero sin indicar que esa era su respuesta, 60.6% indicó una respuesta incorrecta, y el 28% comenzó a resolverlo pero no llegó a algún resultado. Entonces 10.2% dejaron en blanco el problema. En la figura 5 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

Figura 5. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 2



El 84.8% intentaron realizar la multiplicación del primer paréntesis, de ese porcentaje 11% realizó bien la operación y 73.8% lo hizo mal. El 72% intentaron realizar la división del paréntesis, de ese porcentaje 3% realizó bien la operación y 69% lo hizo mal. El 42.8% intentó realizar la suma después de haber operado los paréntesis, en donde 23.8% realizó bien la operación y 19% lo hizo mal.

Dos estudiantes multiplican 13 por 5 asumiendo que el punto decimal indicaba multiplicación, uno multiplicó bien y el otro no, pero ambos son procedimientos incorrectos. El 20.1% después de haber intentado operar el paréntesis de la multiplicación, intenta sumar el valor que está después del signo de la suma (3.95), no respetando la jerarquía de operaciones. Un estudiante intenta multiplicar 13.4 por 0.4 como los valores del primer paréntesis, cambiando el 13.5 por 13.4. Un estudiante intentó sumar 13.5 + 0.25, como si solamente estuvieran los números a los extremos de la ecuación con el signo del medio.

ÍTEM 3

3. La tabla muestra sumas de números impares consecutivos. ¿Cuál será la suma de los primeros 9 números impares?

Números impares	**Suma**
1+3	4
1+3+5	9
1+3+5+7	16
1+3+5+7+9	25

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 15. Los estudiantes deben saber cuáles son los primeros 9 números impares, esto es de los números naturales, y luego sumarlos de alguna forma. Podrían tomar la opción de la columna 1, en donde se suman todos los números de forma vertical (difícilmente lo harán por partes); el camino de la columna 2, que es sumar todos los números de forma horizontal; o identificar la serie que se crea en la columna de la suma en la tabla del problema, y reconocer que cada suma es la cantidad de números impares elevada al cuadrado, por lo que la respuesta la obtendría con 9^2, como se muestra en la columna 3.

La aplicación de álgebra sería si pueden reconocer la serie numérica que se da en la columna de la suma en la tabla del problema, identificando que la cantidad de números impares en cada fila es elevada al cuadrado.

Tabla 15. Algoritmos de solución esperados para el ítem 3

1	2	3
Vertical	**Horizontal**	**Reconoce patrón**
1 3 5 7 9 11 13 15 17 + 81	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81	$9^2 = 81$

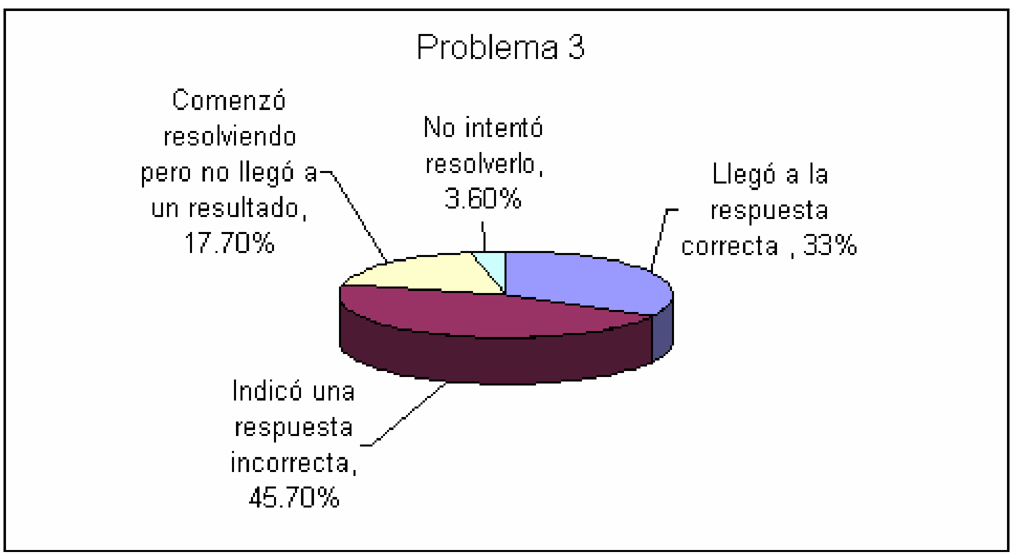
SOLUCIONES REALIZADAS

El 96.4% de los evaluados intentaron resolver el problema, de ese porcentaje, 33% llegó a la respuesta correcta, 45.7% indicó una respuesta incorrecta y 17.7% comenzó a resolverlo, pero no llegó a alguna respuesta. Entonces el 3.6% no intentaron resolver el problema. En la figura 6 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 20.8% escribió primero los nueve números impares que debía sumar, de los que 11% escribió los correctos y el 9.8% los escribió incorrectos. El 44% de las veces al realizar la suma, solamente lo hace bien en el 34.8% y lo hace mal el 9.2%. En 9.8% de veces los estudiantes realizaron filas de sumas como en la tabla, y al hacer cada nueva fila le iban agregando un número impar, hasta hacer nueve filas y algunos diez filas, de estos 6.1% realizó bien el proceso de las sumas y 3.7% no, siendo algunos casos que indicaron la respuesta correcta.

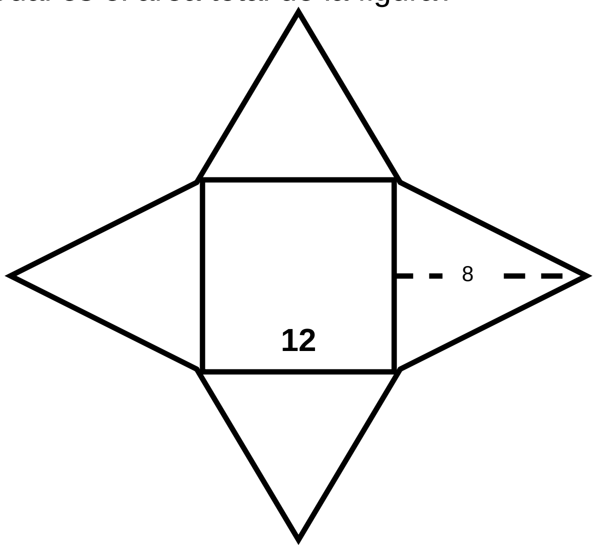
El 5.5% de los estudiantes suman los totales de las sumas de las primeras tres filas (4+9+16), realizó bien la suma, pero es un procedimiento erróneo. El 4.9% suma los totales de las sumas de las cuatro filas que se muestran en la tabla (4+9+16+25). Un estudiante indica que la respuesta es el valor de la suma al noveno número en la tabla, o sea la suma de la tercera fila. El 12.8% suma los números impares que se aparecen en las primeras 3 filas. Un estudiante suma los dígitos de los números impares de las primeras tres filas, poniendo una fila sobre otra. El 3% suma los números impares que hay del 1 al 9. El 2.4% intenta sumar los primeros 9 números impares, pero le falta o le sobra uno. Un estudiante solamente suma los primeros tres números impares.

Figura 6. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 3



ÍTEM 4

4. Con este molde puedes armar una pirámide (las medidas están en centímetros). ¿Cuál es el área total de la figura?



SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 16. Los estudiantes deben reconocer las figuras geométricas que se encuentran en la figura, entender que los triángulos son iguales por ser el molde de una pirámide, poder obtener el área de un cuadrado y un triángulo, y saber que la suma de las áreas obtenidas por separado es el área total de la figura. Podría tomar el camino de la columna 1 ó 2 indistintamente, obteniendo primero el área del cuadrado, después obtener el área de un triángulo y luego multiplicarlo por 4 ó sumarlo cuatro veces, para finalizar sumando las áreas de los triángulos con la del cuadrado.

Tabla 16. Algoritmos de solución esperados para el ítem 4

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Área del cuadrado
$12^2 = 144$</td><td>Área de un triángulo
(8 *12) / 2 = 48</td></tr>
<tr><td>Área de los cuatro triángulos
48 * 4 = 192</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área total del molde
144 + 192 = 336</td></tr>
</table>

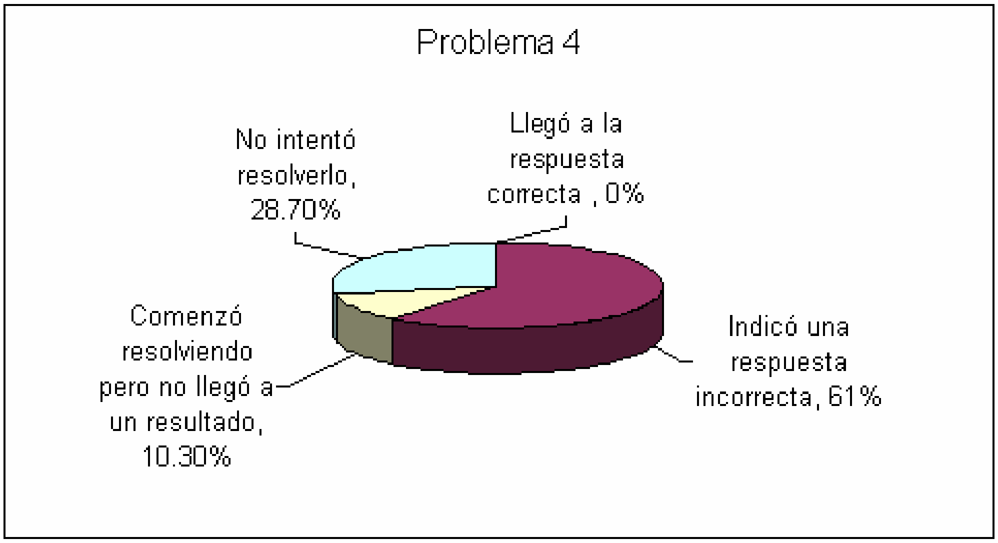
La aplicación de álgebra se realizaría cuando el estudiante entiende que puede hacer en cualquier orden el cálculo de las áreas, utilizar multiplicación en lugar de sumar cuatro veces el área de un triángulo, elevar al cuadrado un lado del cuadrado en lugar de multiplicar un lado por otro, y saber que el área de un triángulo se obtiene igual que un cuadrilátero pero dividiendo entre 2.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 71.3% intenta resolver el problema, de este porcentaje, ninguno llega a la respuesta correcta, 61% indica una respuesta incorrecta y 10.3% comienza a resolver pero no llega a una respuesta. Entonces el 28.7% no intentó resolver el problema. En la figura 7 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 13.4% multiplica 12 por 8, el 3% multiplica 32 por 12, el 1.2% suma 2.6 cuatro veces, el 3% suma 12 más 8, solamente una persona indica que va a obtener el área del cuadrado, el 1.2% cree que dos de los triángulos son más pequeños poniéndoles la altura de 6 y suma todas las alturas más la base del cuadrado, el 1.2% opera 12*4+8*3, el 1.2% opera 12*4/8, el 12.2% suma las alturas de los cuatro triángulos y la base del cuadrado, el 13.6% multiplica 4 por la altura del triángulo y el 9.8% lo suma con el resultado de multiplicar 4 por la base del cuadrado, el 5% suma 32 más 12, el 7.3% suma cuatro veces 12, el 6.8% suma cuatro veces 8 y el 1.8% lo multiplica por 12, un estudiante suma dos veces 88, un estudiante multiplica 8 por 3, y un estudiante suma 32 más 48.

Figura 7. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 4



ÍTEM 5

5. Si el valor de d = 4.25 y el valor de g = 10.05. ¿Cuál será el valor de 5d – g?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 17. Los estudiantes deben reconocer que se les da una ecuación en la cual deben sustituir los valores de las variables dadas, para luego realizar las operaciones indicadas. Primero debe reconocer que 5 es factor del valor de “d”, entonces realiza la multiplicación de 5*d, y luego restar el valor de “g” al resultado anterior.

La aplicación de algebra sería cuando el estudiante entiende que los valores indicados para “d” y “g”, debe sustituirlos en la ecuación dada, o realizar las operaciones que allí se indican; también el saber que 5 es factor de “d” y que representa una multiplicación; y saber realizar las operaciones de acuerdo a su jerarquía.

Tabla 17. Algoritmos de solución esperados para el ítem 5

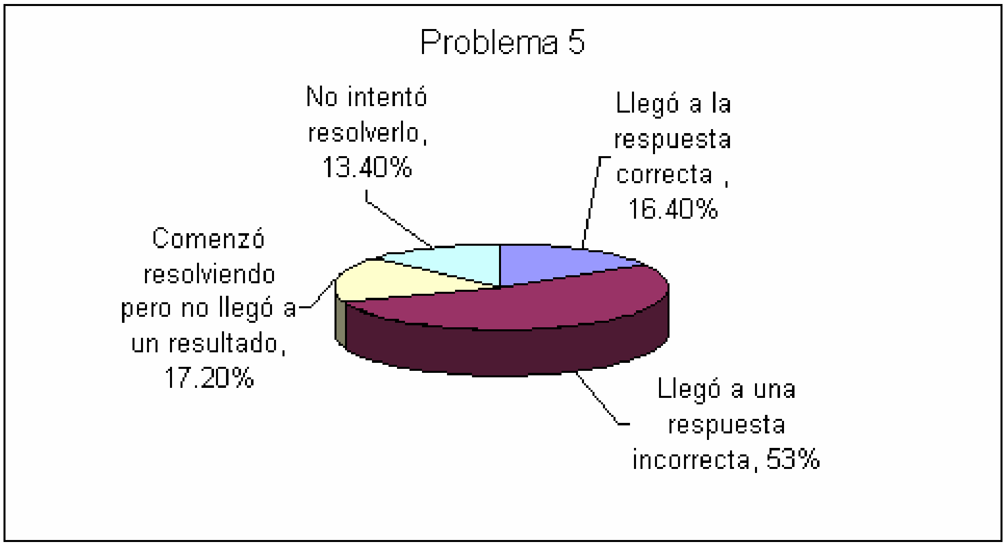
1
Multiplica factor por valor de “d”
5 * 4.25 = 21.25
Resta lo anterior con el valor de “g”
21.25 – 10.05 = 11.2

SOLUCIONES REALIZADAS

El 86.6% de los estudiantes intentaron resolver el problema, de ese porcentaje el 16.4% llegó a la respuesta correcta, el 53% llega a una respuesta incorrecta y el 17.2% comenzó resolviéndolo pero no llegó a una respuesta. Entonces el 13.4% no intentó resolver el problema. En la figura 8 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 2.4% escribe los datos para visualizar lo que tiene del problema, el 22% suma el valor de “d” más el valor de “g” pero sólo el 14.6% suma bien, el 27.4% multiplica el factor 5 por el valor de “d” multiplicando bien sólo el 20.1%, el 25% llega a restar lo multiplicado con el valor de “g” pero sólo el 16.4% llega a la respuesta correcta, el 4.9% multiplica 5 por el valor de “g”, el 6.7% suma cuatro veces 4.25, el 1.2% suma 5 con el valor de “d”, el 1.8% multiplica el valor de “d” por el valor de “g”, el 3% coloca el 5 como un dígito que antecede a 4.25 (utilizando 54.25), el 4.9% suma los valores que se ven en el enunciado pero utiliza el 5 como 0.05, el 1.2% divide lo que multiplicó antes sobre el valor de “g”, el 12.2% resta el valor de “d” menos “g” indicando a veces una resta pero lo suman e intercambian el orden, el 4.9% suma lo multiplicado anteriormente con el valor de “g”, el 1.2% resta el valor de “g” menos 5, el 1.8% indica una respuesta pero no realiza procedimiento.

Figura 8. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 5



ÍTEM 6

6. En una escuela nacional hay en total 155 estudiantes; 75 están en el Comité de orden y Limpieza, 55 en el Comité de Actividades Culturales y 20 en el Comité de Arte. Ninguno está en dos Comités. ¿Cuántos alumnos de la escuela no participan en ningún Comité?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 18. Los estudiantes deben entender que del total de estudiantes en una escuela, se reparten en tres comités, pero que pueden haber algunos que no participan en algún comité. Podría sumar todos los integrantes de los comités, ya que se indica que nadie está en dos comités; de esta manera ve cuantos participan en comités, luego resta el resultado con la cantidad total de estudiantes en la escuela, para ver cuantos no se integran a un comité.

La aplicación algebraica es cuando reconoce que se dan valores a las variables que representan comités y el total de estudiantes en la escuela;

aunque no escriba una ecuación con variables, lo hace con los valores a operar, respetando la ley de signos.

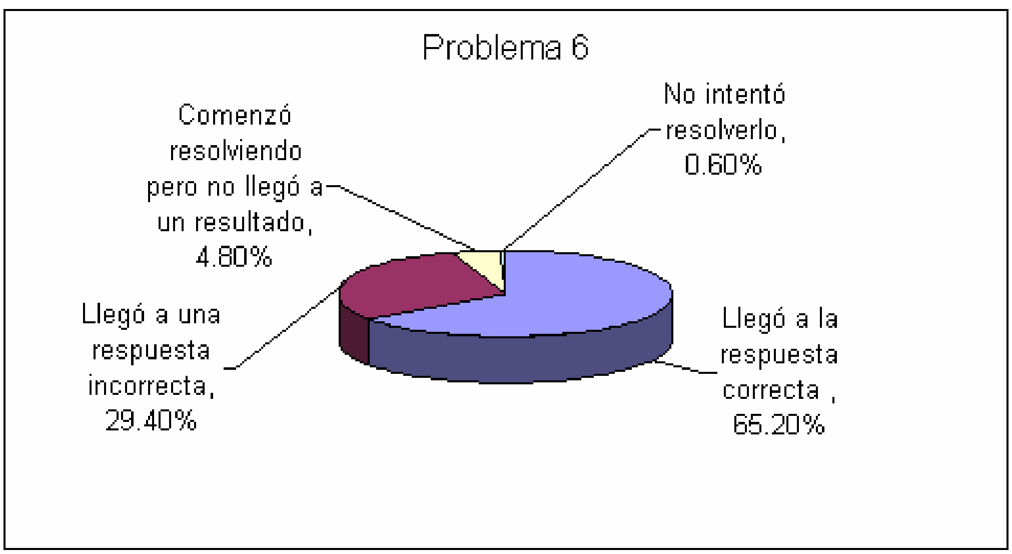
Tabla 18. Algoritmos de solución esperados para el ítem 6

1
Suma los integrantes de los comités
75 + 55 + 20 = 150
Resta el total de estudiantes con los que están en comités
155 – 150 = 5

SOLUCIONES REALIZADAS

El 99.4% de los estudiantes intentó resolver el problema, de este porcentaje, 65.2% llegó a la respuesta correcta, 29.4% llega a una respuesta incorrecta y 4.8% comienza a resolver el problema pero no llega a algún resultado. Entonces solamente un estudiante no intentó resolver el problema. En la figura 9 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

Figura 9. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 6



El 53.6% sumaron las cantidades de estudiantes en los tres comités pero sólo 51.2% lo hizo bien, el 19.5% resta el total de estudiantes que hay en la escuela menos el total de estudiantes en los tres comités, un estudiante divide 155/150 y

escribe como respuesta el residuo de la división (5), el 11.6% suma todos los valores que se muestran en el enunciado aunque dé mas que el total, el 1.2% suma 150 más 5, dos estudiantes indicaron como respuesta que todos participan, dos estudiantes indican como respuesta el total de estudiantes en los comités, un estudiante suma 155+55+20, el 25% restan las cantidades de estudiantes de cada comité al total de estudiantes en la escuela pero sólo el 17% lo hizo bien, dos estudiantes realizan algunas multiplicaciones y divisiones sin llegar a resolverlo, el 8.5% indica respuesta correcta pero no deja procedimiento, solo un estudiante comprobó su respuesta y lo hizo bien.

ÍTEM 7

7. Juan colecciona estampitas de fútbol. Juan tiene 5 estampitas y cada día adquiere 1 más. Alicia tiene 2 estampitas y cada día adquiere 2 más. ¿Cuántos días pasarán antes que Alicia tenga más estampitas que Juan?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 19. Los estudiantes deben identificar las cantidades iniciales de estampitas que tienen Alicia y Juan, pensar como aumentan esas cantidades con los días que pasan, ya que pide especificar la cantidad de días necesarios para que Alicia tenga más estampitas que Juan. Podría hacer una función horizontal en donde se escriba en cada fila las cantidades de estampitas que va teniendo Juan y Alicia, conforme pasan los días (una fila para cada uno), y así visualizar cuantos días se necesitan.

Tabla 19. Algoritmos de solución esperados para el ítem 7

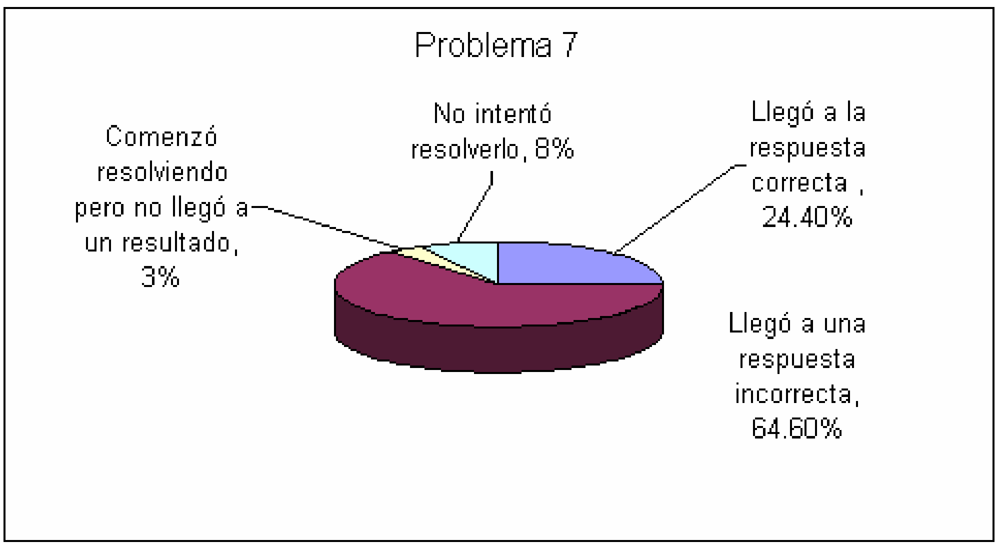
	Cantidad inicial	1er. día	2do. Día	3er. Día	4to. Día
Juan	5	6	7	8	9
Alicia	2	4	6	8	10
		4 días tendrán que pasar			

La aplicación de álgebra se lleva a cabo al poder construir una función, que muestre las cantidades obtenidas día a día. Aunque podría haber otras aplicaciones algebraicas, esta es la que se espera de un niño de esa edad.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 92% de los estudiantes intentó resolver el problema, de ese porcentaje, el 24.4% llegó a la respuesta correcta, el 64.6% llega a una respuesta incorrecta y el 3% comienza a resolver el problema pero no llega a alguna respuesta. Entonces el 8% no intentó resolver el problema, dejándolo en blanco. En la figura 10 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

Figura 10. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 7



El 9.1% solamente multiplica 2*2 llegando al resultado de 4 y algunas veces indicando que esa es su respuesta, el 4.9% de las veces realizaron un procedimiento que no se pudo descifrar, el 2.4% realiza aumentos por ensayo y error de lo que tendrá cada día Juan y Alicia pero sólo el 1.8% de las veces llega a la respuesta correcta, el 7.9% realiza una función vertical en donde aumenta día a día lo que tendrán ambos hasta que gana Alicia y observando en cuantos días lo hace pero sólo el 5.5% llega a la respuesta correcta, el 7.3% realiza una función horizontal en donde aumenta día a día lo que tendrán ambos hasta que

gana Alicia y observando en cuantos días lo hace pero sólo el 5.5% llega a la respuesta correcta, dos estudiantes restan 5 menos 2, el 4.3% solamente escribe cinco veces dos, dos estudiantes solamente multiplican dos por uno, el 6.1% multiplica 5 por 2, dos estudiantes suman todos los valores que se ve en el enunciado, el 4.3% realizan una función vertical pero toma los valores iniciales como un día e indica que pasan 5 días, el 5.5% solamente multiplica 5 por 1 y 5 por 2, el 3% multiplica por ensayo y error lo que adquieren cada día y suma los valores iniciales pero sólo el 1.8% lo hace bien, el 13.4% indica una respuesta pero no deja procedimiento, el 1.8% solamente suma 6+5 y 6+2, el 12.8% solamente suma una vez lo de un día, el 9.1% suma 5+1, 2+2 y suma o resta esos valores, el 3.7% suma tres veces 2, un estudiante divide 365/2, el 2.4% realiza varias multiplicaciones y sumas sin llegar a respuesta, el 4.9% realiza varias sumas sin llegar a respuesta.

Figura 11. Forma de pensar de dos estudiantes en el ítem 7

Juan	Alicia	
4	**4**	→ fila utilizada para operar por ensayo y error
x 1	x 2	
4	8	
+ 5	+ 2	
9	10	

Al menos dos estudiantes realizaron dos columnas (ver figura 11), una para Juan y otra para Alicia, de manera que crearon una estructura en donde dejaron fijos los valores conocidos para cada persona, y hasta arriba escribieron los números que multiplicaron como días, realizando las operaciones fijadas para cada valor del intento.

ÍTEM 8

8. Daniel trabaja 5 horas los lunes, miércoles y viernes y gana Q10.00 por hora. Desea comprarse un traje que vale Q1,050.00. ¿Cuántas semanas deberá trabajar?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Tabla 20. Algoritmos de solución esperados para el ítem 8

1	2	3	4
Cantidad de horas que trabaja al día por los días que trabaja a la semana 5 * 3 =15	Cantidad de horas que trabaja al día por lo que gana en cada hora 5 * 10 = 50	Días que trabaja a la semana por lo que gana en cada hora 3 * 10 = 30	Cantidad de horas que trabaja al día por los días que trabaja a la semana por lo que gana en cada hora 5 * 3 * 10 = 150
Cantidad de horas que trabaja a la semana por lo que gana en cada hora 15 * 10 =150	Dinero que gana en un día por los días que trabaja a la semana 50 * 3 = 150	Dinero que gana si trabaja 1 hora al día por cantidad de horas que trabaja al día 30 * 5 = 150	
Dinero que desea ahorrar dividido Dinero que gana en una semana 1050 / 150 = 7	Dinero que desea ahorrar dividido Dinero que gana en una semana 1050 / 150 = 7	Dinero que desea ahorrar dividido Dinero que gana en una semana 1050 / 150 = 7	Dinero que desea ahorrar dividido Dinero que gana en una semana 1050 / 150 = 7
En vez de dividir lo que gana a la semana entre lo que desea ahorrar, pondría multiplicar lo que gana a la semana por cualquier valor, por ensayo y error hasta que encuentre la cantidad de semanas necesarias.			

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 20. Los estudiantes deben obtener el monto de lo que gana Daniel en una semana, para dividir el valor entre lo que se desea ahorrar, y así saber con el cociente la cantidad de semanas necesarias para acumular esa cantidad de dinero. Podría tomar el camino de la columna 1, multiplicando la cantidad de horas que trabaja al día por la cantidad de días que trabaja a la semana, luego multiplicar esto por lo que gana en una hora, entonces ya tiene lo que gana a la semana, y esto lo divide entre lo que desea ahorrar; también puede usar los procedimientos de las columnas 2, 3 y 4, cuya diferencia es el orden en que opera los valores. En el último paso puede ser que al saber lo que gana a la semana, intente por ensayo y error multiplicar números hasta que encuentre uno que obtenga la cantidad que se quiere ahorrar.

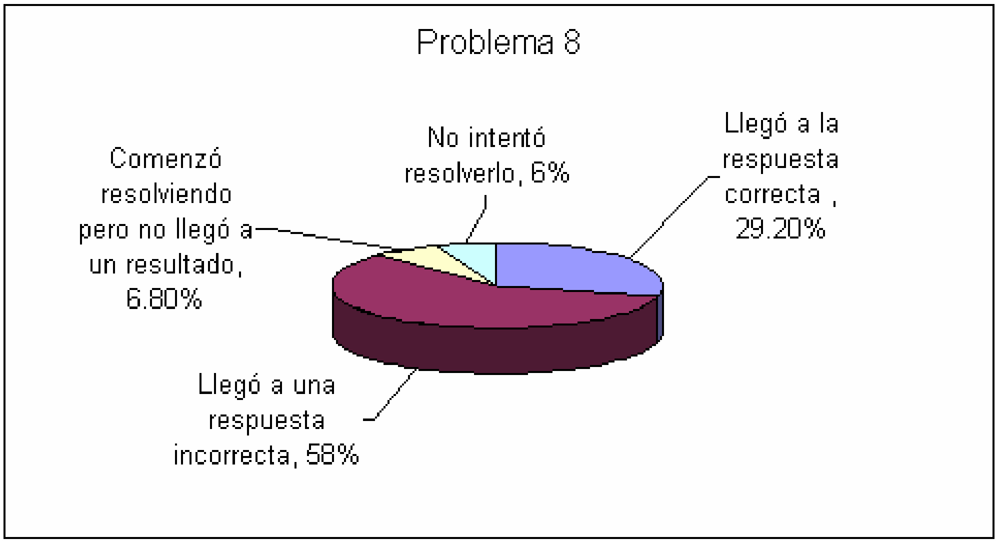
La aplicación algebraica se da cuando al saber lo que gana a la semana, se divide este valor entre lo que se desea acumular de dinero, y así obtendrá la cantidad de semanas que necesita trabajar para acumular el valor esperado. También podría ser que reconozca que el orden de las multiplicaciones no altera el producto, y que puede comenzar por el camino que desee.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 94% intentó resolver el problema, de ese porcentaje, el 29.2% llegó a la respuesta correcta, el 58% llega a una respuesta incorrecta y el 6.8% comienza a resolver el problema pero no llega a alguna respuesta. Entonces el 6% no intentó resolver el problema, o sea que lo dejó en blanco. En la figura 12 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 9.1% multiplicó 3*5, el 14% multiplicó 15*10, el 2.4% multiplicó 10*3, el 1.8% multiplica 30*5, el 22.5% realizó multiplicaciones por ensayo y error pero sólo el 16.4% llegó a multiplicar 150*7, el 22% multiplicó 10*5, el 6.1% multiplicó 50*3, el 2.4% multiplicó 150*10, el 5.5% multiplica 21*50, el 4.9% multiplica 10*105, el 1.2% multiplica 7*5, el 8.5% no deja indicios de procedimiento aunque indica una respuesta, el 1.2% resta 1050-100, el 3% suma 1050+10, el 5.5% divide 1050/150, un estudiante divide 1050/15, el 7.3% divide 1050/10, un estudiante divide 1500/1050 pero lo hace mal, un estudiante suma 50+50+50, el 2.4% suma 5+5+5, el 11% va sumando semana a semana 150 hasta obtener los 1050 pero sólo el 9.1% lo hace bien, el 5.5% divide 1050/50, el 1.2% divide 1050/30, un estudiante multiplica 1050*10, el 5.5% realiza sumas y divisiones con los datos que ven y los vuelve a operar, un estudiante multiplica 24*5, un estudiante multiplica 1050*15, y un estudiante multiplica 10*50.

Figura 12. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 8



ÍTEM 9

9. En una colecta se reunió la siguiente cantidad de monedas; 33 monedas de quetzal, 45 monedas de 50 centavos, 22 monedas de 25 centavos y 1 moneda de 5 centavos. ¿Cuánto dinero se reunió en total?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 21. Los estudiantes deben obtener el monto de la colecta por denominación de moneda, multiplicando la cantidad de monedas por el valor correspondiente de la moneda, para luego sumar las cantidades obtenidas, teniendo cuidado de representar los números decimales apropiadamente.

La aplicación algebraica se encuentra en que el estudiante comprenda que el orden de los factores no altera el producto, lo mismo para la suma. Otra aplicación sería si el estudiante escribe todas las operaciones como una ecuación, y si respeta la jerarquía de las operaciones.

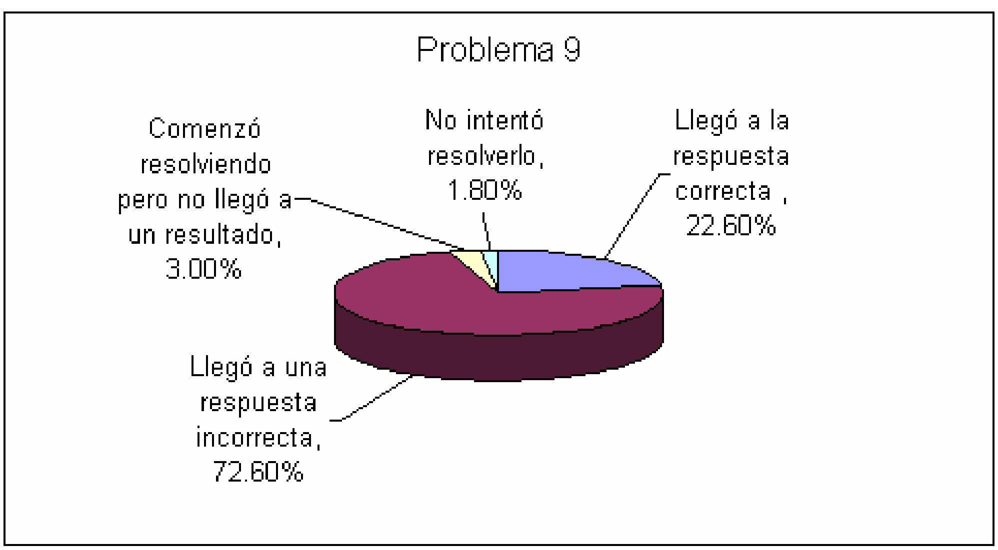
Tabla 21. Algoritmos de solución esperados para el ítem 9

1	
33 monedas de un quetzal 33 * 1.00 = 33.00	Suma la cantidad de dinero de las diferentes denominaciones
45 monedas de 50 centavos 45 * 0.50 = 22.50	33.00
22 monedas de 25 centavos 22 * 0.25 = 5.50	22.50 5.50
1 moneda de 5 centavos 1 * 0.05	0.05 + 61.05

SOLUCIONES REALIZADAS

El 98.2% de los estudiantes intenta resolver el problema, de ese porcentaje, el 22.6% llega a la respuesta correcta, el 72.6% llega a una respuesta incorrecta y el 3% comienza a resolver el problema pero no llega a alguna respuesta. Entonces el 1.8% no intenta resolver el problema, o sea que lo deja en blanco. En la figura 13 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

Figura 13. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 9



El 54.3% multiplica la cantidad de monedas de 1 quetzal por su valor Q1.00 pero sólo el 52.4% lo hace bien, el 51.8% multiplica la cantidad de monedas de cincuenta centavos por su valor Q0.50 pero sólo el 43.3% lo hizo bien, el 51.8% multiplica la cantidad de monedas de veinticinco centavos por su valor Q0.25 pero sólo el 39.6% lo hizo bien, el 39% multiplica la cantidad de monedas de cinco centavos por su valor Q0.05 pero sólo el 29.3% lo hizo bien, el 1.8% obtiene Q20.00, el 1.2% obtiene Q6.00, un estudiante obtuvo Q75.00, el 52.4% suma los valores verticalmente pero sólo el 39% lo hizo bien, el 18.9% suma todos los valores que se ven en el enunciado del problema pero sólo el 10.4% lo hizo bien, el 19.5% suma solo las cantidades de monedas que se indican en el problema pero sólo el 11% lo hizo bien, el 2.4% suma los valores de las monedas tantas veces como la cantidad indicada para luego sumar todo pero sólo un estudiante lo hizo bien.

ÍTEM 10

10. La fórmula **t = 100 - 0.003a** se emplea para calcular la temperatura (t) en grados centígrados a la que hierve el agua, cuando se conoce la altura (a) del lugar. Si la altura a = 1500 m, ¿a qué temperatura hierve al agua?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 22. Se espera que los estudiantes reconozcan lo que es una fórmula, qué puedan sustituir el valor de la variable “a” en la ecuación, qué puedan realizar las operaciones indicadas en la ecuación y qué respeten la jerarquía de operaciones. Podría tomar el camino de la columna 1, en el que sustituye el valor de “a” en la ecuación, luego multiplica el valor de “a” por el factor 0.003 y este resultado lo resta a 100. Si toma la columna 2, primero realiza la multiplicación, luego resta el resultado a 100, sin sustituir el valor en la ecuación; y puede tomar la columna 3, en donde convierte el valor decimal a entero multiplicando por 1000, obtiene un valor y lo divide con 1000, y luego resta este resultado a 100.

Tabla 22. Algoritmos de solución esperados para el ítem 10

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td colspan="3">Identificar datos
t = 100 – 0.003a
a = 1500
t = ?</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Sustituye valor de “a” en la ecuación
t = 100 – 0.003a
t = 100 – 0.003 * 1500
t = 100 – 4.5
t = 95.5</td><td rowspan="3">Primero multiplica el factor por el valor de “a”
0.003 * 1500 = 4.5</td><td>Elimina los decimales multiplicando por 1000
0.003 * 1000 = 3</td></tr>
<tr><td>Multiplica el factor por el valor de “a”
3 * 1500 = 4500</td></tr>
<tr><td>Divide el resultado de multiplicación entre 1000
4500/1000 = 4.5</td></tr>
<tr><td>Luego resta a 100 lo obtenido en la multiplicación
100 - 4.5 = 95.5</td><td>Resta a 100 el valor obtenido
100 – 4.5 = 95.5</td></tr>
</table>

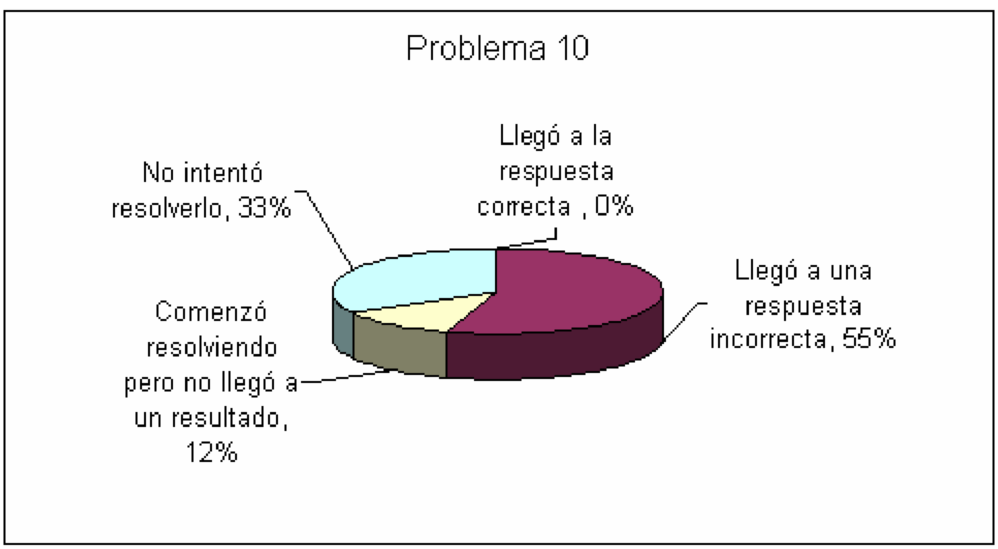
La aplicación algebraica sería cuando el estudiante sustituye el valor de la variable en la ecuación, que identifique el factor de la variable “a”, que realice la multiplicación de 0.003 por el valor de “a”, que respete el orden adecuado de las operaciones, que identifique cual es la incógnita.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 67% de los estudiantes intentó resolver el problema, el 0% llegó a la respuesta correcta, el 55% llegó a una respuesta incorrecta y el 12% comienza a resolver el problema, pero no llega a alguna respuesta. Entonces el 33% no intenta resolver el problema dejándolo en blanco. En la figura 14 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 18.9% resta 100-0.003 pero sólo un estudiante lo hizo bien, el 4.3% multiplica 1500*100 pero sólo el 3% lo hizo bien, el 13.4% suma 100+0.003 pero sólo el 3% lo hizo bien, el 6.7% suma 1500+103 pero sólo el 6.7% lo hizo bien, 1.8% divide 1500/103 pero todos lo hicieron mal, el 4.3% divide 1500/100 y todos lo hicieron bien, el 9.1% multiplica lo operado anteriormente por 1500 pero sólo el 2.4% lo hizo bien, un estudiante suma lo que restó a 0.003 haciéndolo mal, el 1.8% resta todos los valores que se ven el enunciado del problema, el 6.1% suma 100+1500 pero un estudiante lo hizo mal, el 3% realiza la resta 100-1500 pero un estudiante lo hizo mal, un estudiante intenta operar 100-0.003 y el resultado multiplicado con 1500 pero lo hace mal, dos estudiantes indican que el agua hierve a 1500m, el 3.7% multiplica 100*3 pero sólo el 2.4% lo hace bien, el 3% multiplica 1500*3 pero sólo el 1.8% lo hace bien, el 3.7% dividen la operación anterior entre 1500 y todos lo hacen mal, un estudiante suma 100+31500, un estudiante multiplica 100*15, dos estudiantes multiplican 1500*0.003 pero no lo hacen bien.

Figura 14. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del ítem 10



ÍTEM 11

11. Para que la diferencia **110 - 78** sea igual a 480 habrá que multiplicar por:

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 23. Los estudiantes deben obtener la diferencia de la resta indicada, luego dividir 480 sobre el resultado anterior.

Tabla 23. Algoritmos de solución esperados para el ítem 11

1
Obtiene la diferencia al restar 110 menos 78 110 – 78 = 32
Divide la diferencia entre 480 480 / 32 = 15

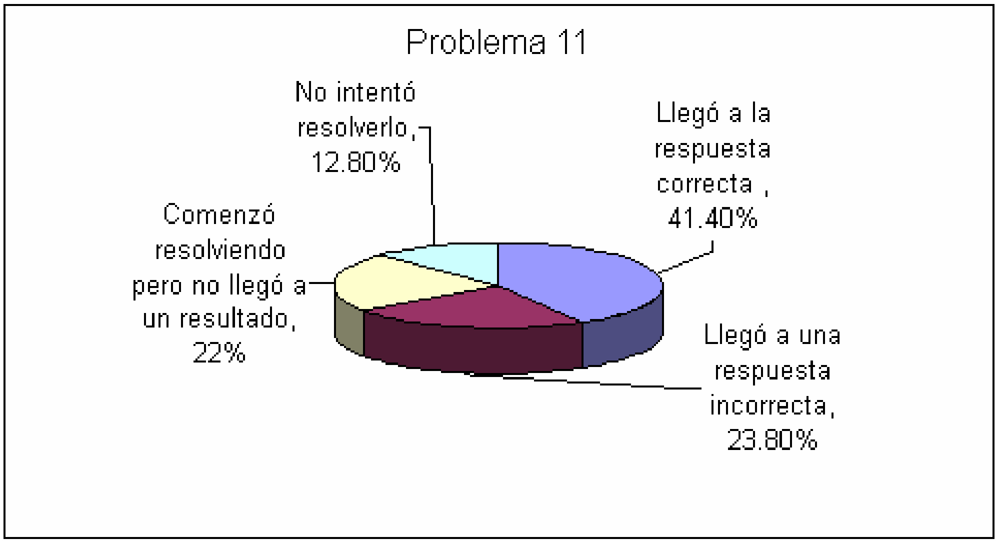
La aplicación algebraica se lleva a cabo cuando el estudiante divide 480 sobre la diferencia de 110-78, porque sabe que la división es el proceso inverso de la multiplicación.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 87.2% de los estudiantes intentó resolver el problema, de ese porcentaje el 41.4% llegó a la respuesta correcta, el 23.8% llegó a una respuesta incorrecta y el 22% comienza a resolver el problema pero no llegan a alguna respuesta. Entonces el 12.8% no intenta resolver el problema, o sea que lo deja en blanco. En la figura 15 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 64.6% restan 110-78 pero sólo el 57.9% lo hace bien, el 53.1% multiplica la diferencia buscando un número por ensayo y error llegando a multiplicar 32*15 en el 52.5% de las veces, dos estudiantes restan 110-48 siendo de la misma escuela, dos estudiantes multiplican 160*3 siendo de la misma escuela, el 3.7% muestran un procedimiento incoherente, el 4.9% divide 480/32 el cual es un procedimiento adecuado, un estudiante multiplica 110*5 y 78*8, dos estudiantes multiplican 480*78, dos estudiantes suman 448+32, el 1.8% multiplican 480*32, el 4.9% multiplica 110*78, un estudiante multiplica 110*8 y suma 48, dos estudiantes suman 110+78, dos estudiantes multiplican 110*4, un estudiante suma 440+40, y el 2.4% suma 240+240.

Figura 15. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del problema 11



ÍTEM 12

12. Si **p = 1.0**; **q = 0.01** y **r = 0.01,** ¿Cuál es el valor de $\frac{p}{q(r)}$?

SOLUCIÓNES ESPERADAS

Los algoritmos de solución que se espera que los estudiantes utilicen, se muestran en la tabla 24. Los estudiantes deben reconocer la ecuación que se pide operar, saber que se les dan los valores de las variables que aparecen en la ecuación, sustituir los valores de las variables en la ecuación, reconocer las operaciones implícitas en la ecuación, realizar las operaciones indicadas y realizar el orden adecuado de las operaciones. Podría indicar los valores a sustituir, sustituir los valores en la ecuación, luego multiplicar denominadores y por último obtener el inverso de la multiplicación, como en la columna 1; si toma el camino de la columna 2, multiplicaría separadamente el valor de “r” por el valor de “q”, y luego divide 1 sobre el resultado de la multiplicación.

Tabla 24. Algoritmos de solución esperados para el ítem 12

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Identifica datos
p = 1
q = 0.01
r = 0.01</td></tr>
<tr><td>Sustituye valores de variables en ecuación
1/(0.01 * 0.01)</td><td rowspan="2">Multiplica
0.01 * 0.01 = 0.0001</td></tr>
<tr><td>Multiplica los valores del denominador
1/0.0001</td></tr>
<tr><td>Divide los valores
10000</td><td>Divide
1 / 0.0001 = 10000</td></tr>
</table>

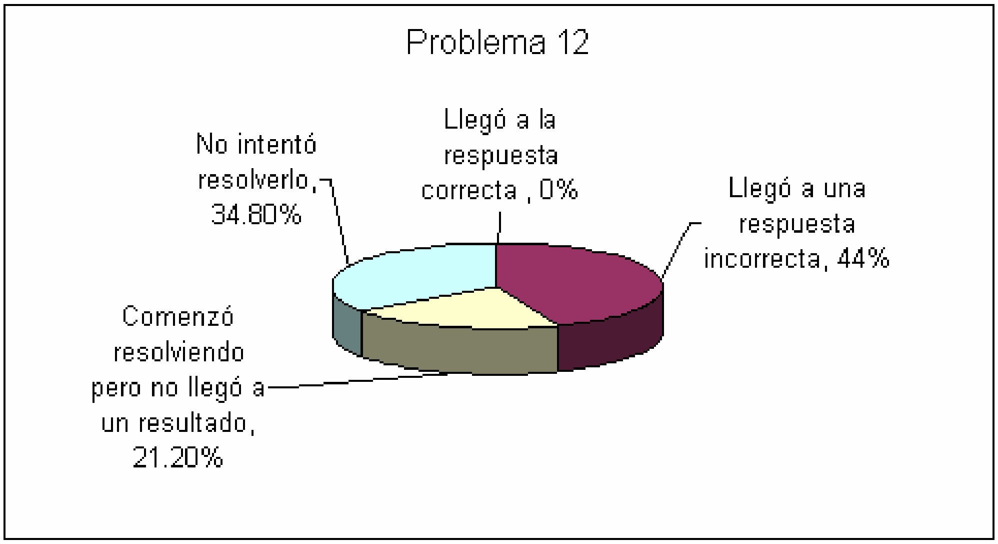
La aplicación de álgebra se encuentra en reconocer la ecuación, la sustitución de los valores en la ecuación, saber que se les dan los valores de las variables que aparecen en la ecuación, reconocer las operaciones implícitas en la ecuación, realizar las operaciones indicadas y realizar el orden adecuado de las operaciones.

SOLUCIONES REALIZADAS

El 65.2% de los estudiantes evaluados intentó resolver el problema, de ese porcentaje, el 0% llega a una respuesta correcta, el 44% llega a una respuesta incorrecta y el 21.2% comienza a resolver el problema pero no llega a algún resultado. Entonces el 34.8% no intenta resolver el problema, o sea que lo dejó en blanco. En la figura 16 se pueden ver los resultados de forma gráfica.

El 5.5% identifica los datos que se le dan y los escribe, el 18.3% sustituye los valores en la ecuación pero sólo el 14% lo hizo bien, el 29.2% suma los tres valores que se ven en el enunciado de forma vertical pero sólo el 14.6% lo hizo bien, el 3.6% multiplica los denominadores pero sólo un estudiante lo hizo bien, el 1.8% divide 0.01/1.0 sin hacerlo bien, el 1.8% multiplica 1.0*0.01 sin hacerlo bien, el 6.7% suma 0.01+0.01 pero sólo el 5.5% lo hizo bien, un estudiante indica una respuesta sin dejar procedimiento, y el 4.9 % multiplica el valor de “p” por el valor de “q” pero sólo uno lo hace bien.

Figura 16. Porcentajes distribuidos en los intentos de solución del problema 12



En general los estudiantes utilizan pocos procedimientos algebraicos para resolver los problemas, tratan con procedimientos aritméticos, intentando con las operaciones básicas, y muy poco utilizando un pensamiento algebraico. Aún así, los resultados muestran la creatividad que tienen los estudiantes, tratando de resolverlos, y algunos sí llegan a utilizar conceptos de álgebra.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Al revisar los libros de texto de álgebra se encontraron gran cantidad de contenidos básicos, que son conceptos iniciales para comenzar el aprendizaje del álgebra, y que en los libros de texto no dedican mucho espacio para su explicación, pasando rápidamente al estudio formal del álgebra.

En el CNB de nivel primario se encuentran contenidos en los cuales se indica su relación con el álgebra, se aconseja en las guías de aprendizaje de los profesores, en la que se dan formas de enseñar. En éstas se motiva desarrollar el pensamiento lógico y el razonamiento, que como ya se discutió, es la base para el pensamiento algebraico.

En las entrevistas realizadas a expertos en matemática, se constató que creen necesario llevar el álgebra a los niveles iniciales de escolaridad, pero se debe tener cuidado de no exigir al niño un nivel de abstracción demasiado alto, ya que puede ser contraproducente.

Los expertos en matemática dicen haber observado que el maestro de nivel primario tiene mucha deficiencia en matemática, ya que según sus experiencias, ven el poco interés que tienen algunos. Esto está aunado a una mala formación inicial, y la falta de capacitación de parte de las instituciones donde trabajan. Explican que existe el fenómeno, en el cual hay maestros que estudiaron magisterio porque querían huir de la matemática, o porque es una carrera fácil, en la cual se trabaja sólo medio tiempo.

Los maestros de nivel medio dicen estar de acuerdo en que se enseñen conceptos de álgebra desde el nivel primario. Indican que es necesario porque cuando los estudiantes llegan al nivel medio se le debe dedicar mucho tiempo a enseñarles los conceptos básicos y preliminares del álgebra, pero que no se detienen mucho tiempo en ellos por la exigencia que tienen de cubrir los contenidos planificados.

Los maestros de nivel primario dicen estar de acuerdo en que se enseñen conceptos algebraicos en el nivel primario, pero indican que se les debe capacitar para ello, pues es necesario que se les fortalezca en matemática. Están concientes que a veces arrastran deficiencias desde su formación inicial, y que trasladan a los estudiantes. Indican que han recibido capacitación, pero que no ha sido buena, y que en realidad no se les ha ayudado en esta área.

El Dr. Porfirio Loeza comenta que cuando impartía clases en una escuela de California (que es uno de los estados en donde se está trabajando con el proyecto Álgebra Temprana), ellos tenían que hacer escenas en las clases, para garantizar que se reprodujera el proceso requerido para enseñar los conceptos. Comenta que eran supervisados por los directores de las escuelas, para verificar que se llevaran a cabo tales escenas. Esto se hace para garantizar que se realice el proceso de generalizar un concepto, ya que siguiendo un guión preestablecido por expertos en la didáctica de la matemática, se logra el objetivo que se persigue. Esta práctica puede eliminar la dependencia de que el maestro debe conocer bien el método, y ayudar a alcanzar el objetivo de introducir el álgebra en primaria.

En el caso de Guatemala podría implementarse algo similar, pero debe estudiarse a fondo el tema y madurar la idea, además las instituciones que hacen política tendrían que apoyar la idea, esto es en el sector oficial en donde las decisiones están centralizadas por el MINEDUC.

En el caso de los colegios privados, ellos eligen las metodologías a utilizar, y en algunos que cuentan con coordinación en matemática y que han querido mejorar el rendimiento de sus estudiantes, desarrollando el pensamiento algebraico en primaria, lo han logrado, según comentarios de algunos expertos.

Estos colegios podrían ser la prueba de que en nuestro contexto, también se puede crear una política de mejoramiento de la enseñanza de la matemática, desarrollando el pensamiento algebraico en el nivel primario.

Este tipo de investigaciones podría contribuir a mejorar la enseñanza de la matemática, identificando los errores que los estudiantes cometen al resolver problemas de este tipo, o cualquier otro, recomendando que el docente enseñe el significado de lo que se hace en el aula.

En general se quiere que el estudiante sea capaz de formarse un mapa mental, de lo que significan los datos en un problema, que pueda utilizar más de un método de resolución, y que razone sus respuestas haciendo una comprobación de ellas. En el mejor de los casos que llegue al estado de metacognición, y vaya adquiriendo un conocimiento profundo de la matemática, que le servirá en el futuro.

El único experto en matemática que estuvo en desacuerdo, argumenta que al maestro no se le debe dar más carga de contenidos, aunque se le explicó que es una forma de enseñar, insistió en que, lo que debe saber el maestro es como usar los libros de texto, y que allí se encuentra todo. Esto es lo que se plantea cambiar, las formas tradicionales de enseñanza y eliminar la mecanización.

En cuatro ocasiones coincidieron los expertos en que la mayoría de maestros de primaria utilizan el texto pero no entienden lo que están mostrando al estudiante, de manera que solamente utilizan los ejemplos del libro y dejan como tarea los ejercicios de la sección.

En consecuencia hay un buen nivel de acuerdo entre las personas entrevistadas, en cuando a desarrollar el pensamiento algebraico en los niños desde los primeros años de estudio. Esto podría ayudar a mejorar los rendimientos en el nivel primario, que el estudiante no sienta un cambio abrupto cuando llega al nivel medio, y eliminar factores que influyen negativamente en los desempeños de nivel medio incluyendo la falta de didáctica del catedrático o si ha tenido una preparación académica diferente a la de maestro, ya que irían mejor preparados.

Los resultados del la prueba realizada a los maestros de nivel primario en este estudio fueron bajos, con un máximo de 67 puntos de 100, un mínimo de 17 y con un promedio de 49 puntos. El promedio de los maestros es mayor al de los estudiantes, quienes obtuvieron un máximo de 58 y un mínimo de 8, con un promedio de 28 puntos de 100. Aunque las formas de solución de los maestros son casi las mismas que utilizan los estudiantes, en los estudiantes se encontraron algunas formas más creativas, en donde tuvieron éxito algunas veces, en otras lo hicieron por ensayo y error, pero que mostraban un razonamiento de lo que realizaban.

Los estudiantes cometen muchos errores de concepto al resolver los problemas, por lo que deduce que no los tienen claros, aún en las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Al realizar estas operaciones no obtienen resultados correctos, a veces indican una operación y realizan otra, o no conocen sus propiedades. Otro problema de los estudiantes que se observó es que, a veces pueden realizar las operaciones, pero no pueden operar con números decimales, no sabiendo cómo llevar el punto decimal en las operaciones, ni aplicando alguna estrategia para ayudarse.

Son muy pocas las aplicaciones de álgebra que utilizan los estudiantes, y cuando aplicaron algunas, no se ve un uso racional de estas, sino que las usan una vez, pero en los siguientes ítems no las vuelven a usar. A la luz de los resultados de quienes utilizaron procedimientos algebraicos, se puede decir que, si los estudiantes conocieran conceptos de álgebra o desarrollaran un pensamiento algebraico, podrían resolver estos problemas más fácilmente, comprobar si su resultado es correcto y mejoraría su rendimiento en matemática.

VI. CONCLUSIONES

Los expertos en matemática, los maestros de nivel medio y los maestros de nivel primario entrevistados, en su mayoría, coinciden en que se puede desarrollar pensamiento algebraico en el nivel primario, y que es necesario.

De doce expertos en matemática entrevistados, once estuvieron de acuerdo en que se debe en enseñar conceptos algebraicos desde el nivel primario, pero estos deben ser adecuados al grado que cursa el estudiante, para que pueda entenderlos bien.

El experto en matemática que no estuvo de acuerdo en que se enseñaran conceptos algebraicos desde el nivel primario, indicó que no estaba de acuerdo, porque al maestro no se le debe recargar los contenidos de clase.

La mayoría de personas consultadas de los diferentes grupos, indican que el maestro de primaria necesita capacitación consistente, que les ayude a superar sus deficiencias, y que los fortalezca en la enseñanza de matemática.

Los maestros de nivel primario evaluados en este estudio, en su mayoría no aplican procedimientos algebraicos para resolver problemas de matemática, y obtienen un bajo rendimiento en la prueba.

Los estudiantes de sexto grado de nivel primario evaluados en este estudio, en su mayoría no aplican procedimientos algebraicos para resolver problemas de matemática, y obtienen un bajo rendimiento en la prueba.

En las soluciones realizadas por los estudiantes, se ve que la mayoría no razona sus respuestas, indicando cualquier respuesta obtenida de operaciones que realizaron sin éxito, y sin comprobar el resultado.

Hay bajo nivel de entendimiento de los problemas por parte de algunos estudiantes, y que desde un principio los impacta, tomándolos como difíciles.

Se encontraron formas de razonamiento efectivas que fueron realizadas con la creatividad de los estudiantes, las cuales no se esperaban como procedimientos de solución.

Los maestros de nivel primario evaluados, muestran menos formas de solucionar problemas que los estudiantes, por lo que se ve más creatividad en los estudiantes.

En general los estudiantes utilizan pocos procedimientos algebraicos para resolver los problemas, tratan con procedimientos aritméticos, intentando con las operaciones básicas, y muy poco utilizando un pensamiento algebraico

Enseñar para desarrollar pensamiento algebraico en el nivel primario, podría ser una oportunidad de aprendizaje para los estudiantes, de manera que tengan más herramientas y estrategias para solucionar problemas en matemática.

El pensamiento algebraico es organizado en dos grandes componentes: las herramientas del desarrollo del pensamiento algebraico que son hábitos analíticos de la mente, especialmente en destrezas de solución de problemas, y destrezas de representación; y las ideas fundamentales de álgebra que representan un dominio en el cual las herramientas del pensamiento algebraico pueden desarrollarse.

Para lógralo se necesita que el maestro sea motivador, investigador, reflexivo y que promueva en análisis en los estudiantes. Realizar tareas atractivas y fáciles de entender, con contenidos fundamentales y que el desafío permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por el estudiante.

VII. RECOMENDACIONES

Crear políticas de mejoramiento de la calidad del aprendizaje de la matemática, implementando la enseñanza de conceptos básicos de álgebra desde el nivel primario, acorde a la edad del estudiante.

Se debe verificar el nivel cognitivo de los estudiantes en cada grado primario, antes de asignarle conceptos algebraicos que deben ser aprendidos, para que los puedan asimilar con facilidad, y que no se sientan presionados.

Al crear las políticas de enseñar conceptos algebraicos en el nivel primario, se debe tener claro que no se trata de agregar contenidos al CNB, sino de mejorar la forma en que se enseñan los contenidos actualmente, siendo esta una metodología de aplicación, y desarrollo de pensamiento algebraico.

La capacitación que se le debe dar al maestro debe ser acorde para que reflexione sobre sus métodos de enseñanza, que no sienta tener deficiencia en lo que va a enseñar, sino que le ayude a entender los conceptos.

El maestro debe ser capacitado para que aplique los conceptos algebraicos, que le enseñe al estudiante a pensar, que conozca variadas formas y estrategias de abordar y resolver los problemas matemáticos.

En las entrevistas realizadas fue recomendado que el maestro tenga cuidado al momento de enseñar y que reflexione sobre como esta enseñando. Además, que se le den las herramientas necesarias para cumplir los objetivos que le sean solicitados tanto al maestro como al estudiante.

Los estudiantes de nivel primario deben ir conociendo aplicaciones algebraicas de los conceptos aritméticos que adquieren, como las propiedades de las operaciones que se les enseña, para que tengan herramientas de solución de problemas matemáticos y puedan generar estrategias.

Se le debe enseñar al estudiante a razonar y analizar lo que hace, de manera que pueda saber si su respuesta es correcta o no, y replantear los problemas si es necesario.

Debe enseñársele al estudiante a entender problemas y el lenguaje apropiado de matemática, además de los conceptos, debe saber la sintaxis apropiada y entender las expresiones utilizadas.

Este tipo de análisis de problemas puede ser utilizado para conocer las debilidades de los estudiantes, para que el maestro pueda entender cómo piensan y corregir problemas que presenten para entender los conceptos.

Se debe propiciar la creatividad de los estudiantes, para que encuentren por ellos mismos los caminos que los lleven a la solución de los problemas matemáticos, ya que ellos tienen mayor creatividad que los adultos.

Los desacuerdos de introducir el álgebra en el nivel primario, se han dado por la falta de aclaración de cómo se realizará, por lo que se debe tener cuidado de lo que se va a enseñar, pues no se puede elevar demasiado el nivel de abstracción, porque de lo contrario sería contraproducente.

Se debe trabajar para el mejoramiento de la calidad educativa de matemática, elevar el rendimiento de los estudiantes, bajar la tasa de deserción y elevar la matricula de los estudiantes en niveles superiores. El desarrollo de pensamiento algebraico en el nivel primario ayudaría a mejorar la calidad de la educación en esta materia, y podría asegurar un mejor futuro profesional.

En investigaciones posteriores se recomienda hacer estudios de tipo longitudinal, para poder observar la forma en que los niños aprenden, y determinar el nivel de abstracción que tienen en cada grado del nivel primario.

Observar la forma en que el maestro interactúa y cómo enseña los contenidos, de manera que se determine la forma más adecuada para enseñar los conceptos algebraicos en los grados primarios.

Crear propuesta de introducción de los temas algebraicos en el nivel primario, adaptándolo a nuestro contexto y conociendo ideas de modelos que estén en funcionamiento, de manera que se tenga la justificación para que el tema sea tomado en serio por las autoridades, y se comiencen a buscar mecanismos de ejecución.

Con base a la experiencia obtenida al realizar pruebas con los estudiantes y los maestros, se dejan algunas sugerencias de observación, para medir lo que se ha aprendido:

- Procurar que a los estudiantes se les haya enseñado el contenido, para que puedan resolver los problemas, y se vea claramente la forma en que los estudiantes resuelven los problemas.
- Verificar que cada estudiante conteste cada una de las preguntas, antes de que comiencen a resolver los problemas.
- Planificar con anticipación la prueba y pedir suficiente tiempo para entrevistar a los estudiantes.
- Hacer preguntas a los estudiantes que cometieron errores, para saber por qué los cometen.
- Hacer preguntas a los estudiantes y procurar que escriban todo el procedimiento de solución, y conocer con más detalle la forma en que resuelven los problemas.

- Utilizar los resultados de la investigación para comprender mejor, la forma en que se debe enseñar la matemática, y evitar que los estudiantes caigan en los errores más comunes identificados.

Realizar estudios longitudinales, para comprender más sobre las metodologías y actividades que se pueden aplicar, para dar capacitación a maestros, sobre como introducir conceptos de álgebra en cada grado de nivel primario.

Los protocolos de observación en la solución de problemas, son una herramienta útil para que los maestros puedan realizar análisis de cómo los estudiantes resuelven los problemas de matemática.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, W.; Lacués, E.; Pagano, M.; Czerwonogora, A.; Isolabella, G. y Leymonié, J. (2007). *La matemática al ingreso en la universidad; Un estudio comparativo de cuatro Facultades en el Uruguay*. Revista Iberoamericana de Educación, 2007, Vol. 4, Núm. 42, pp. 1-9.

Baldor, A. (1972). *Álgebra Elemental*. Madrid: EDIME Organización Gráfica.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría.* Revista Educación Matemática, Mexico, Vol. 16, Núm. 1, abril de 2004. pp. 113-148.

Cajas, F. (2007). *Elementos para un plan estratégico de evaluación e investigación educativa: 2008-2021.* Programa estándares e investigación educativa/USAID.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). *Early Algebra and Algebraic Reasoning.* En Lester, F. Jr. (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 669-705). Estados Unidos de América: Information Age Publishing.

Cervini, R. (2001). *Efecto de la "Oportunidad de aprender" sobre el logro en matemáticas en la educación básica argentina.* Argentina. Revista Electrónica de Investigación Educativa, septiembre 2001, Vol. 3, Núm. 2, pp. 1-22. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

Charles, R. *et. al.* (2004). *Mathematics*. Course 1, Teacher's edition, Vol. 1, chaptrers 1-6. Pearson, Prentice Hall.

DICADE (2007). *Currículo Nacional Base, Sexto Grado, Nivel Primario*. Primera Edición. MINEDUC. Guatemala.

DICADE (2006). *Currículum Nacional Base para la formación inicial de docentes de nivel primario.* Primera edición. MINEDUC. Guatemala.

CNB de formación docente (2006). *Currículum Nacional Base para la formación inicial de docentes del nivel primario.* DICADE/MINEDUC. Guatemala.

Distrito escolar 1J de Pórtland (5to.). Distrito escolar 1J de Pórtland, Portland Oregon, *Boleta de calificaciones de Primaria*. Consultado en 02/05/08 en http://cms7.pps.k12.or.us/.docs/pg/400/rid/10441/f/SpanishGrade05.pdf.

Estándares Educativos para Guatemala (2007), MINEDUC, Programa Estándares e Investigación Educativa-USAID.

Foundations for Success (2008). *The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* U.S. Department of Education. Consultado en www.ed.gov/pubs/edpubs.html

González, F. (2005). *Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos.* Universidad Nacional de San Luis, Venezuela, noviembre 2005, Vol. 6, Núm 1, pp. 37-80. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

Howe R. (2005). *Comments on NAEP algebra problems* [Electronic version]. Algebraic reasoning: Developmental, cognitive, and Disciplinary Foundations for Instruction. Retrieved Feb. 1, 2006 from http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.html, (tomado de Carraher, D. y Schliemann, A., 2007, pág. 669).

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del Comportamiento*, Métodos de investigación en ciencias sociales, McGraw Hill, México.

Kriegler, Shelley (2000). *Just WHAT IS ALGEBRAIC THINKING?* Departamento de matemáticas, UCLA. Tomado de: http://www.math.ucla.edu/~kriegler/index.html

Lara, Claudia (2004). *Álgebra con fichas de colores. De lo concreto a lo abstracto.* Universidad del Istmo, Guatemala. pp. 44

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). *Problem Solving and Modeling.* National Council of Teachers of Mathematics. United States.

Martin, E. Jr. (1972). Álgebra básica. Argentina: El Ateneo.

Marzano, R. (2000). *Designing a new taxonomy of educational objectives.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo del pensamiento relacional.* Trabajo de investigación tutelada por Dra. Encarnación Castro Martínez, septiembre 2004. Departamento de didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

Mullis, I. Martin, M. y Foy, P. (2005). *IEA's TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains.* ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA VOL. 12, NUM. 2: 259-275. Consultado en JULIO-DICIEMBRE, 2007

NCTM Tomado de: http://www.researchmethodsarena.com/books/Algebra-in-the-Early-Grades-isbn9780805854732

Otero, M. y Banks-Leite, L. (2006). *Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.* Argentina. Relime Vol. 9, Núm. 1, marzo, 2006, pp. 151-178.

Peter, H. (1978). *Álgebra elemental.* México D. F.: Limusa S. A.

Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID (2007). *Logros en temas de eficiencia, equidad y calidad educativa*

Rubio, F. (2002). *Situación de la educación en América Latina y Guatemala.* Guatemala: Proyecto MEDIR/USAID. Conferencia Pública.

Sampieri, R.; Fernandez-Collado, C. y Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* Cuarta Edición. México: McGraw Hill Interamericana.

Santa Barbara School Districts, Office of Special Projects and Comunication. *Estándares de Contenido de Matemáticas.* Consultado el 27/02/2008 en http://sbsdk12.org/spanish/programas/estandares/cont_stds_712_matematicas.pdf

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2007). *Method. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* En Lester, F. Jr. (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 763-804). Estados Unidos de América: Information Age Publishing.

Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006). *Desarrollo de episodios de comprensión matemática, estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas.* México. Revista Mexicana de Investigación Educativa, octubre-diciembre 2006. Vol. 11. Núm. 31 , pp. 1389-1422.

Sistema Nacional de Indicadores Educativos (2006). USAID/AED Proyecto Diálogo para la Inversión Social en Guatemala.

Swokowski, E. y Cole, J. (2006). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica,* 11a. edición. México: International Thomson.

Tecnológico de Monterrey (1999). *La Metacognición como un proceso de autorregulación del aprendizaje regulativo, en matemáticas de sexto grado de educación primaria.* Tesis del Instituto Tecnológico y de estudios superiores de Monterrey, Universidad Virtual. Tomado de la página: http://www.didacticahistoria.com/psic/psic12.htm

Terán, M. y Pachano, L. (2005). *La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la Matemática en sexto grado.* EDUCERE, Artículos arbitrados, abril-junio 2005, Año 9, Núm. 29, pp. 171-179. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

Uicab, R. y Oktac, A. (2006). *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.* Relime, noviembre 2006, Vol. 9, Núm. 3, pp. 459-490. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+ investigacion+matematica&i=101

William, D. (2007). *Keeping Learning on Track: Classroom Assessment and the Regulation of Learning.* En Lester, F. Jr. (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. (pp. 1051-1098). Estados Unidos de América: Information Age Publishing.

Zazkis, R. (2001). *Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes.* Relime, marzo 2001, Vol. 4, Núm. 1, pp. 63-92. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

http://merg.umassd.edu/outreach/ea.html

http://www.glencoe.com/sec/math/studytools/prealgchaprev.shtml

http://es.wikipedia.org/wiki/Desarrollo_cognitivo

http://es.wikipedia.org/wiki/Jean Piaget

http://es.wikipedia.org/wiki/constructivismo

http://es.wikipedia.org/wiki/Lev Vygotski

EXPERTOS EN MATEMÁTICA CONSULTADOS

Lic. Cesar Santos. Coordinación de Laboratorios y profesor, en la Universidad Galileo. 8 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Daniel Caciá. Proyecto Guatemática, JICA. 8 de abril de 2008. Comunicación personal.

Dr. Bernardo Morales. Decano de la Facultad de Educación, Universidad Galileo. 9 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Mauricio Morales. Consultor Matemático, Programa Estándares e Investigación Educativa. 10 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Dante Ávalos. Redacción de pruebas, Programa Estándares e Investigación Educativa. 11 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Domingo Xitumul. DIGECADE, Proyectos educativos, Ministerio de Educación. 15 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Saúl Duarte Beza. Coordinación Matemática, EFPEM, USAC. 16 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lda. Claudia Lara. Dirección Facultad de Educación, Universidad del Istmo y consultora. 18 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Jorge Mario García. Coordinador Matemática, Liceo Javier. 21 de abril de 2008. Comunicación personal.

Dra. Mayra Castillo. Dirección de Licenciatura en Matemática, Facultad de Ingeniería USAC. 24 de abril de 2008. Comunicación personal.

Lic. Bayardo Mejía. Dirección de docencia, Universidad de San Carlos de Guatemala, y profesor Universidad del Valle de Guatemala. 17 de mayo de 2008. Comunicación personal.

Dr. Porfirio Loeza. Parte de la Facultad de la Universidad Estatal de California U.S.A., Profesor asociado en el Departamento de Formación de maestros. 23 de abril de 2008. Comunicación personal.

Dra. Zenaida Aguirre-Muñoz. Catedrática asociada a Texas Tech University, U.S.A, y consultora para la Oficina de Educación del Condado de Los Angeles California. 15 de mayo de 2008. Comunicación Personal.

IX. ANEXOS

A. ANEXO 1. CONTENIDOS UTILIZADOS PARA CONSULTA A EXPERTOS EN MATEMÁTICA, MAESTROS DE NIVEL MEDIO Y PRIMARIO

Fuente: extraídos de Baldor, A. (1972); y Swokowski, E. y Cole, J. (2006)

Suma

- Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva
- Suma de llevar
- Comprobación lógica de la suma
- Hacia arriba y hacia abajo
- Número neutral
- Inversa de la resta
- Como multiplicación
- Ley o axioma
    - Uniformidad (si a=b y c=d, entonces a+c=b+d)
    - Conmutatividad (a+b=b+a)
    - Asociatividad ((a+b)+c=a+(b+c))
    - Identidad (a+0=0+a=a)
- Ley de signos

Resta

- Número neutral
- Inversa de la suma
- Ley o axioma
    - Uniformidad (si a=b y c=d, entonces a-c=b-d)
    - Asociatividad ((a-b)-c=a-(b-c))
    - Identidad (a-0=a)
- Igualdad de propiedades que la suma
- Ley de signos

Multiplicación

- Coeficiente
    - Numérico
    - Literal
    - Ausencia de coeficiente
- Número neutral
- Sumas sucesivas

- Inversa de la división
- Representación de multiplicación (signos)
- Ley o axioma
  - Uniformidad (si a=b y c=d, entonces ac=bd)
  - Conmutatividad (ab=ba)
  - Asociatividad ((ab)c= a(bc))
  - Distributividad (a(b+c)=ab+ac), (a(b+c)=ab+ac)
  - Identidad (a·1=1·a=a)
  - Existencia del inverso (ax=1, donde x=1/a, siendo a≠0)
- Ley de signos

División
- Número neutral
- Inversa de la multiplicación
- Ley de signos
- Como fracciones

Geometría
- Figuras básicas
- Líneas (trazos, clases)
- Ángulos
- Fórmula
  - Área
  - Perímetro
  - Volumen
- Plano cartesiano
- Representación gráfica

Fracciones
- Como división
- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potenciación

Sistemas de numeración
- Arábigo
- Maya
- Romano

- Ordinal
- Base numérica

Números

- Naturales (No necesarios pues están en los reales, pero como los únicos dígitos)
- Reales (Generalización de números) (números racionales e irracionales)
- Enteros (división exacta)
- Fraccionarios (división inexacta)
- Racionales (conjunto de números fraccionarios y enteros)
- Irracionales (cantidades radicales que no pueden expresarse exactamente con números enteros ni fraccionarios)

Resolución de problemas

- Método aritmético
- Método algebraico

Valores

- Positivos (anteponer signo si e hace operación)
- Negativos (anteponer siempre signo)
- Recta numérica
- Cero (carencia de elementos) (inicio de relativo) (separación entre negativos y positivos) (elemento idéntico o modulo de la suma)
- Valor absoluto
- Valor relativo (con signo positivo y negativo) (suma, resta, multiplicación, división y potencia)
- Sentido
- Definir suma o resta según signos
- Ley de signos

Cantidades

- Aritméticas
- Algebraicas (magnitud y sentido)
- Variables
- Constantes

Conjuntos

- Operaciones
- Clases de conjuntos

- Representación (tres formas: enumerativa, estrativa y gráfica)
- Equivalencias
- Subconjuntos

Monedas
- Clases de moneda
- Valor

Medidas
- Longitud
- Tiempo (reloj, calendario)
- Peso, etc.

Recta numérica
- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potencia

Radicación
- Inversa de la potencia
- Propiedades
- Exacta
- Número complejo

Igualdad
- Ley o axioma
  - Identidad (a=a)
  - Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)
  - Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)

Jerarquía de operaciones
- Combinaciones de operaciones
- Con signos e agrupación
- Sin signos de agrupación

Regla de tres
- Porcentaje
- Proporciones

- Conversiones

Potencias

- Propiedades
    - Suma
    - Resta
    - Multiplicación
    - División
    - Potencia
- De 10
- Inversa de logaritmos
- Inversa de radicación
- Notación científica
- Prefijos

Símbolos

- Números
- Letras
- Cantidades conocidas
- Cantidades desconocidas
- Primas
- Subíndices

Signos

- Signos de operación
    - Suma
    - Resta (operación inversa de suma)
    - Multiplicación
    - División
    - Elevación o potencia
    - De raíz
- Relación
    - Igual
    - Mayor
    - Menor
    - Ley o axioma
        - Tricotomía (si tenemos dos números reales a y b, sólo puede haber una relación, y sólo una entre ambos, que a>b, a=b ó a<b)
        - Monotonía de la suma (si a>b, entonces a+c=b+c)

        - Monotonía de la multiplicación (si a>b y c>0, entonces ac>bc)
- Agrupación
    - Paréntesis
    - Corchetes
    - Barras
    - Llaves

Fórmulas

- Generalización de representar regla o principio
- Áreas, perímetros y volúmenes de figuras geométricas
- Como ecuaciones
- Como funciones
- Graficación en plano cartesiano

Variable

- Valor fijo
- Valor asignado
- Generalización de espacio designado

B. ANEXO 2. CONTENIDOS DEL CNB CONSULTADOS

Contenidos consultados a expertos en matemática y profesores de secundaria y primaria, para determinar en cuáles de ellos se pueden introducir el álgebra desde el nivel primario.

Fuente: DICADE (2006)

INVESTIGACIÓN: Álgebra temprana en la escuela primaria
REALIZADA POR: José Adolfo Santos Solares
MAESTRÍA: Medición, Evaluación e Investigación Educativa

DATOS DEL MAESTRO

Título que posee: ____

Grado (s) que imparte actualmente: ______________________________

Grados que ha impartido: _____________________________________

Años de dar clases: ____

Años de impartir matemática: __________________________________

¿Le gusta la matemática? SÍ ☐ NO ☐

Escuela: ______________________ Área: __________ Sector: __________

DETERMINAR LOS CONTENIDOS DE ÁLGEBRA QUE PUEDEN SER ENSEÑADOS EN MATEMÁTICA DEL NIVEL PRIMARIO

INSTRUCCIONES:
En las siguientes páginas encontrará una serie de contenidos en los que se considera que puede desarrollarse el pensamiento algebraico en el nivel primario, se le pide por favor que en el espacio debajo del contenido matemático, indique con un número el grado en que puede ser enseñado ese contenido, si considera que puede ser enseñado en el nivel primario y si es algebraico.

También se le pide que con un marcador resaltador, marque los contenidos más importantes.

Al final de los contenidos se le pide por favor definir el concepto de álgebra, agregar comentarios y observaciones.

¡GRACIAS POR SU VALIOSO TIEMPO Y AYUDA!

CONTENIDOS DE ÁLGEBRA EN PRIMARIA

COMPONENTE: Matemáticas, Ciencia y Tecnología

Cantidades	Aritméticas	Algebraicas (magnitud y sentido)	Variable	Constante		
Conjuntos	Operaciones	Clases de conjuntos	Representación	Equivalencias	Subconjuntos	
Monedas	Clases de moneda	Valor	Equivalencias entre monedas			
Medidas	Longitud	Tiempo (Reloj, calendario)	Peso	Equivalencias		
Representación de valores	Números	Letras	Cantidades conocidas	Cantidades desconocidas	Primas	Subíndices

COMPONENENTE: Sistema Numéricos y operaciones

Números	Naturales	Enteros	Fraccionarios	Racionales	Irracionales	Reales	Redondeo	
Valores	Positivos y negativos (ausencia del signo)	Recta numérica	Cero y uno	Valor absoluto	Valor relativo	Sentido	Definir suma o resta según signos (ley de signos)	Valor posicional
Sistemas de numeración	Arábigo	Maya	Romano	Ordinal	Bases numéricas			
Recta numérica	Suma	Resta	Multiplicación	División	Potencia			

Series	Reconoce series	Cantidades	Series aritméticas	Series geometricas	Completar series			
					Propiedades			
Suma	Comprobación mental	En diferentes direcciones	Comparación con el proceso de la resta	Ley de signos (iguales)	Uniformidad (si a=b y c=d, entonces a+c=b+d)	Conmutatividad (a+b=b+a)	Asociatividad ((a+b)+c = a+(b+c))	Identidad (a+0=0+a=a), neutro aditivo
		Propiedades						
Resta	Comparación con el proceso de la suma	Uniformidad (si a=b y c=d, entonces a-c=b-d)	Conmutatividad (a-b=-b+a)	Asociatividad ((a-b)-c = a+(-b-c))	Ley de signos (signos distintos)			
						Propiedades		
Multiplicación	Coeficiente numérico y ausencia del mismo	Coeficiente literal	Multiplicación como sumas sucesivas	Comparación con el proceso de la división	Representación de multiplicación (signos)	Uniformidad (si a=b y c=d, entonces ac=bd)	Conmutatividad (ab=ba)	Asociatividad ((ab)c= a(bc))
	Distributividad a(b+c)=ab+ac	Identidad (a·1=1·a=a), Neutro multiplicativo	Existencia del inverso (ax=1, donde x=1/a, siendo a≠0)	Ley de signos (al multiplicarse)				
División	Comparación con el proceso de multiplicación	Representar divisiones como fracciones	División entre uno	División entre cero	Ley de signos (al dividirse)			
Fracciones	Representación de fracción como división	Suma	Resta	Multiplicación	División	Potenciación	Propiedades (de operaciones)	Razones

Regla de tres	Porcentajes	Proporciones	Conversiones						
Jerarquía de operaciones	Combinaciones de operaciones	Con signos de agrupación	Sin signos de agrupación						
Signos	Signos de operación	Relación	Agrupación						
Potencias	Propiedades	Bases	Exponentes	Operaciones con potencias	Potencia	De base 10	Inversa de radicación	Notación científica	Prefijos

		Propiedades				Propiedades		
Relaciones	Igualdad	Identidad (a=a)	Reciprocidad (si a=b, entonces b=a)	Transitividad (si a=b y b=c, entonces a=c)	Mayor y menor	Tricotomía (sólo una relación entre ambos, que a>b, a=b ó a<b)	Monotonía de la suma (si a>b, entonces a+c>b+c)	Monotonía de la multiplicación (si a>b y c>0, entonces ac>bc)
Radicación	Radical como inverso de una potencia	Propiedades	Exacta	Inexacta	Operaciones con raíces	Número imaginario		

COMPONENTE: Incertidumbre, Comunicación e Investigación Matemática

Resolución de problemas	Método aritmético	Método algebraico	Solución mental	Aproximación	Modelado
Variable	Valor fijo	Valor asignado	Generalización de espacio designado		

COMPONENTE: Formas, Patrones y Relaciones

Geometría	Figuras básicas	Líneas (trazos y tipos)	Angulos	Creación de Fórmulas	Area	Perímetro	Volumen	Plano cartesiano	Escalas
	Graficación	Traslación	Simetría						
Patrones	Reconoce patrones	Realiza patrones	Patrones geométricos	Patrones numéricos	Completar patrones	Mosaicos			
Fórmulas	Generalización de representar regla o principio	Areas, perímetros y volúmenes	Como ecuaciones	Como funciones					

¿Qué es álgebra? ____

Observaciones: ____

Agregar algún contenido: ____

C. ANEXO 3. SELECCIÓN DE ÍTEMS DE PRUEBAS NACIONALES

Ítems seleccionados de las pruebas liberadas de 2006 y 2007 (primera selección), de acuerdo a los contenidos más importantes y elegidos con más frecuencia por los expertos matemáticos.

Las pruebas de 2006 son la forma A y B, de las pruebas nacionales realizadas por el Ministerio de Educación; y las pruebas de 2007 son la forma A y B, del proyecto Centinela del Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID. Ambas pruebas fueron realizadas a una muestra de estudiantes de sexto grado de nivel primario, a nivel nacional.

Año	**2006**		**2007**	
Forma	**A**	**B**	**A**	**B**
No. Ítem	10, 13, 22, 25, 30, 32, 36, 37, 38 y 40	6, 7, 9, 10, 14, 20, 22, 23, 24, 25, 38 y 40	1, 2, 6 y 11	10, 14, 15, 16, 18, 19, 24, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 y 39

Ítems obtenidos de una segunda selección del conjunto anterior, tomando como criterio la aplicabilidad de procesos que se desean detectar (algebraicos) en los estudiantes, al resolver los problemas.

Año	**2006**		**2007**	
Forma	**A**	**B**	**A**	**B**
No. de ítem	2, 3, 4	10, 11, 12	1	5, 6, 7, 8, 9

La siguiente tabla muestra el número de ítem en la prueba armada para este estudio, indicando la forma, el año y el número de ítem de donde fue obtenido. La prueba de 2006 es de la prueba nacional del NINEDUC, y la prueba 2007 es del proyecto Centinela del Programa Estándares e Investigación Educativa.

No. ÍTEM EN LA PRUEBA DE ÉSTE ESTUDIO	FORMA	AÑO	No. DE ÍTEM
1	A	2007	1
2	A	2006	10
3	A	2006	13
4	A	2006	38
5	B	2007	10
6	B	2007	27
7	B	2007	29
8	B	2007	33
9	B	2007	36
10	B	2006	7
11	B	2006	9
12	B	2006	10

D. ANEXO 4. PRUEBA UTILIZADA

Prueba con los ítems de matemática seleccionados, pasada a maestros de primaria, y que servirá para que la resuelvan los alumnos de sexto grado.

Fuente: Estándares Educativos para Guatemala (2007), MINEDUC, Programa Estándares e Investigación Educativa-USAID.

MATEMÁTICA 6° PRIMARIA

Nombre del alumno (a): ____________________________________

Sexo: ______________________ Edad: _____________________

Sección: ____________________ Etnia: _____________________

Repite (cuántas veces): ____________________________________

Nombre de la escuela: _____________________________________

Aldea: ____

Municipio: ____

Los datos recopilados en esta prueba serán utilizados única y exclusivamente para la realización del trabajo de tesis “Desarrollo del pensamiento algebraico desde el nivel primario”, de la Maestría en Medición, Evaluación e Investigación Educativa. En ningún momento se darán a conocer los nombres de los estudiantes, los profesores o del establecimiento.

Instrucciones: lea cada ejercicio y en el espacio en blanco bajo cada problema escriba el procedimiento que utilice para resolverlo.

Pase a la siguiente hoja.

1. ¿Qué número obtenemos al sumar: **900 + 50 + 2**?

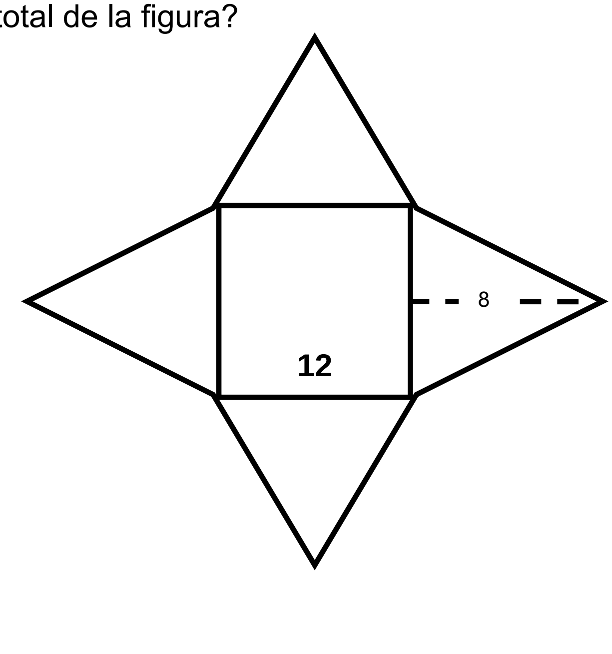
2. ¿Cuál es el valor de **(13.5 X 0.4) + (3.95 ÷ 0.25)?**

Continúa en la siguiente hoja

3. La tabla muestra sumas de números impares consecutivos. ¿Cuál será la suma de los primeros 9 números impares?

Números impares	**Suma**
1+3	4
1+3+5	9
1+3+5+7	16
1+3+5+7+9	25

4. Con este molde puedes armar una pirámide (las medidas están en centímetros). ¿Cuál es el área total de la figura?



Continúa en la siguiente hoja

5. Si el valor de d = 4.25 y el valor de g = 10.05. ¿Cuál será el valor de 5d – g?

6. En una escuela nacional hay en total 155 estudiantes; 75 están en el Comité de orden y Limpieza, 55 en el Comité de Actividades Culturales y 20 en el Comité de Arte. Ninguno está en dos Comités. ¿Cuántos alumnos de la escuela no participan en ningún Comité?

Continúa en la siguiente hoja

7. Juan colecciona estampitas de fútbol. Juan tiene 5 estampitas y cada día adquiere 1 más. Alicia tiene 2 estampitas y cada día adquiere 2 más. ¿Cuántos días pasarán antes que Alicia tenga más estampitas que Juan?

8. Daniel trabaja 5 horas los lunes, miércoles y viernes y gana Q10.00 por hora. Desea comprarse un traje que vale Q1,050.00. ¿Cuántas semanas deberá trabajar?

Continúa en la siguiente hoja

9. En una colecta se reunió la siguiente cantidad de monedas; 33 monedas de quetzal, 45 monedas de 50 centavos, 22 monedas de 25 centavos y 1 moneda de 5 centavos.
¿Cuánto dinero se reunió en total?

10. La fórmula **t = 100 - 0.003a** se emplea para calcular la temperatura (t) en grados centígrados a la que hierve el agua, cuando se conoce la altura (a) del lugar. Si la altura a = 1500 m, ¿a qué temperatura hierve al agua?

Continúa en la siguiente hoja

11. Para que la diferencia **110 - 78** sea igual a 480 habrá que multiplicar por:

12. Si **p = 1.0** ; **q = 0.01** y **r = 0.01 ,** ¿Cuál es el valor de $\frac{p}{q(r)}$?

Entregar la prueba por favor.

E. ANEXO 5. PROTOCOLOS DE OBSERVACIÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Propuesta de protocolos de observación, para identificar los procesos de la resolución de los problemas de la prueba que contiene los ítems seleccionados, por los contenidos más importantes. Se codifica con 0 para indicar que estuvo mal y 1 para indicar que tuvo bien la respuesta, tanto en el intento de resolver el problema (Realiza), como en el resultado obtenido (Resultado).

ÍTEM 1		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Ordena datos		
Coloca incógnita		
Suma horizontal		
Suma vertical		
Suma de dos en dos		
Suma todos a la vez		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 2		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Ordena datos		
Coloca incógnita		
Multiplica		
Divide		
Suma		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 3		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Ordena datos		
Coloca incógnita		
Suma horizontal		
Suma vertical		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 4		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Dibuja triángulo		
Multiplica base por altura		
Divide entre dos		
Dibuja cuadrado		
Multiplica lados		
Ordena datos		
Suma horizontal		
Suma vertical		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 5		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Ordena datos		
Coloca incógnita		
Reescribe ecuación		
Sustituye valores en incógnitas		
Multiplica		
Resta		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 6		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Suma horizontal		
Suma vertical		
Resta total con suma		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 7		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Hace tabla		
Suma una estampa a Juan por día		
Suma dos estampas a Alicia por día		
Se detiene al cuarto día		
Continua sumando después del cuarto día		
Hace comparaciones		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 8		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Hace tabla		
Multiplica por cinco		
Multiplica por tres		
Divide a Q1050		
Suma varias semanas		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 9		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Hace tabla		
Multiplica 33 por 1		
Multiplica 45 por 0.5		
Multiplica 22 por 0.25		
Multiplica 1 por 0.05		
Suma horizontal		
Suma vertical		
Escribe monto		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 10		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Reescribe ecuación		
Sustituye valores		
Multiplica separado		
Multiplica en ecuación		
Resta horizontal		
Resta vertical		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 11		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Resta horizontal		
Resta vertical		
Escribe ecuación		
Despeja incógnita		
Hace tabla		
Ensayo y error		
Respuesta		
Comprobar		

ÍTEM 12		
ASPECTO OBSERVADO	REALIZA	RESULTADO
Escribe datos		
Coloca incógnita		
Reescribe ecuación		
Sustituye valores		
Multiplica		
Multiplica vertical		
Divide		
Respuesta		
Comprobar		

F. ANEXO 6. SUBCOMPONENTE DE ÁLGEBRA DEL ESTÁNDAR 1

Subcomponente de álgebra del estándar 1 del nivel primario para Guatemala.

Fuente: Estándares Educativos para Guatemala (2007), MINEDUC, Programa Estándares e Investigación Educativa-USAID.

COMPONENTE:*FORMAS, PATRONES Y RELACIONES*		
Subcomponente	**Intencionalidad del estándar**	**Número de estándar**
Algebra	**Construcción, identificación e interpretación de patrones presentes en su comunidad; sean geo-métricos, numéricos o algorítmicos.** Estimulación de la observación la naturaleza, los aconteci-mientos sociales y las situaciones matemáticas, para reco-nocer, modificar y crear patrones y proponer relaciones entre los hechos y las causas.	•

Pre-primaria (6 años)	**Primer grado**	**Segundo grado**	**Tercer grado**
Estándar • Se ubica y orienta en su medio familiar y escolar.	*Estándar* • Identifica orden, posición y tiempo entre personas y objetos.	*Estándar* • Reproduce y crea figuras utilizando patrones de: tamaño, forma, posición y tiempo.	*Estándar* • Representa el movimiento de objetos y personas utilizando diferentes sistemas.

Cuarto grado	**Quinto grado**	**Sexto grado**
Estándar • Reproduce patrones y figuras con patrones, relacionados con su entorno natural y cultural.	*Estándar* • Construye y crea patrones y figuras con patrones, relacionados con su entorno natural y cultural.	*Estándar* • Rota, traslada y aplica simetría a patrones, y modifica y crea series numéricas.

G. ANEXO 7. PUNTOS FOCALES DE LOS ESTÁNDARES DE MATEMÁTICA DE E. U.

Puntos focales de los estándares de pre-primaria y del nivel primario de los estándares de los Estados Unidos de América.

Fuente: www.nctm.edu.

PRE-KINDER

Algebra: Children recognize and duplicate simple sequential patterns (e.g., square, circle, square, circle, square, circle,…).

El niño reconoce y duplica los patrones secuenciales simples (por ejemplo: cuadrado, círculo, cuadrado, círculo, cuadrado, círculo, …)

KINDERGARTEN

Algebra: Children identify, duplicate, and extend simple number patterns and sequential and growing patterns (e.g., patterns made with shapes) as preparation for creating rules that describe relationships.

El niño identifica, duplica, y extiende patrones de número simple, secuencial patrones crecientes (por ejemplo, patrones hechos con figuras) como preparación para crear reglas que describen relaciones.

PRIMERO

Algebra: Through identifying, describing, and applying number patterns and properties in developing strategies for basic facts, children learn about other properties of numbers and operations, such as odd and even (e.g., "Even numbers of objects can be paired, with none left over"), and 0 as the identity element for addition.

A través de identificar, describir y aplicar patrones numéricos y propiedades en el desarrollo de estrategias para los hechos básicos, los niños aprenden acerca de otras propiedades de números y operaciones, tal como impares y pares (por ejemplo, "números pares de objetos pueden ser pareados, con ninguno a la izquierda"), y 0 como el elemento identidad de la suma.

SEGUNDO

Algebra: Children use number patterns to extend their knowledge of properties of numbers and operations. For example, when skip counting, they build foundations for understanding multiples and factors.

Los niños usan patrones numéricos para extender su conocimiento de propiedades de los números y operaciones. Por ejemplo, cuando cuenta salteado, ellos construyen fundamentos para entendimientos múltiples y factores.

TERCERO

Algebra: Understanding properties of multiplication and the relationship between multiplication and division is a part of algebra readiness that develops at grade 3. The creation and analysis of patterns and relationships involving multiplication and division should occur at this grade level. Students build a foundation for later understanding of functional relationships by describing relationships in context with such statements as, "The number of legs is 4 times the number of chairs."

Entender propiedades de multiplicación y la relación entre multiplicación y división es una parte de buena álgebra que se desarrolla en tercer grado. La creación y análisis de patrones y relaciones envuelve multiplicación y división debería ocurrir en este nivel de grado. Los estudiantes construyen una base para un entendimiento futuro de relaciones funcionales para describir relaciones en el contexto con el cual afirmaciones como, “El número de piernas es 4 veces el número de sillas.”

CUARTO

Algebra: Students continue identifying, describing, and extending numeric patterns involving all operations and nonnumeric growing or repeating patterns. Through these experiences, they develop an understanding of the use of a rule to describe a sequence of numbers or objects.

Los estudiantes continúan identificando, y extendiendo patrones numéricos envolviendo todas las operaciones y crecimiento no numérico o repitiendo patrones. A través de estas experiencias, ellos desarrollan un entendimiento del uso de regla para describir una secuencia de números u objetos.

QUINTO

Algebra: Students use patterns, models, and relationships as contexts for writing and solving simple equations and inequalities. They create graphs of simple equations. They explore prime and composite numbers and discover concepts related to the addition and subtraction of fractions as they use factors and multiples, including applications of common factors and common multiples. They develop an understanding of the order of operations and use it for all operations.

Los estudiantes usan patrones, modelos, y relaciones como contextos para escribir y resolver ecuaciones simples. Ellos exploran preparan y componen números y descubren conceptos relacionados a la suma y resta de fracciones como ellos usan factores y múltiplos, incluyendo aplicaciones de factores comunes y múltiplos comunes. Ellos desarrollan un entendimiento de el orden de operaciones y lo usa para todas las operaciones.

SEXTO

Algebra: Students use the commutative, associative, and distributive properties to show that two expressions are equivalent. They also illustrate properties of operations by showing that two expressions are equivalent in a given context (e.g., determining the area in two different ways for a rectangle whose dimensions are $x + 3$ by 5). Sequences, including those that arise in the context of finding possible rules for patterns of figures or stacks of objects, provide opportunities for students to develop formulas.

Los estudiantes usan la propiedad conmutativa, asociativa, y distributiva para mostrar que las expresiones son equivalentes. Ellos también ilustran propiedades de operaciones para mostrar que dos expresiones son equivalentes en un contexto dado (por ejemplo, determinar el área en dos diferentes formas para un rectángulo para quien las dimensiones son x+3 por 5). Secuencias, incluyendo esos que ascienden en el contexto de las reglas posibles de encontrar para patrones de figuras o pilas de objetos, provee oportunidades para estudiantes para desarrollar fórmulas.

H. ANEXO 8. GLOSARIO

Axioma	Proposición tan clara y evidente que se admite sin necesidad de demostración.
Cognición	Conocimiento, acción y efecto de conocer.
Correlación	Relación entre variables, específicamente entre la variable que deseamos verificar el efecto en el resultado.
Cotejar	Confrontar una cosa con otra u otras.
Criterio	Norma para conocer la verdad, juicio o discernimiento.
Didáctica	Perteneciente o relativo a la enseñanza. Propio, adecuado para enseñar o instruir. Método, género didáctico. Obra didáctica. Arte de enseñar.
Epistemología	Doctrina de los fundamentos y métodos del conocimiento científico.
Estándares educativos	Enunciados que establecen criterios claros, sencillos y medibles que el docente debe considerar, como meta del aprendizaje de sus estudiantes, que se traducen en lo que deben saber y saber hacer.
Frecuencia	Número de elementos comprendidos dentro de un intervalo en una distribución determinada.
Holismo	Doctrina que propugna la concepción de cada realidad como un todo distinto de la suma de las partes que lo componen.
Holístico	Perteneciente o relativo al holismo.
Ítem	Cada uno de los apartados o problemas que componen un cuestionario o una prueba.

Jerga	Lenguaje especial y familiar que usan entre sí los individuos de ciertas profesiones y oficios, como toreros, estudiantes.
Metacognición	Es la reflexión de nuestros propios procesos del pensamiento. Revisión de los conocimientos a través de conceptos adquiridos con el tiempo.
Modelización	Realización de modelos.
Meca	Lugar que atrae por ser centro de mayor apogeo de una actividad determinada. A donde se quiere llegar
Paidocéntrico	Significa que es centrado en el niño.
Prueba nacional	Prueba de matemática de sexto grado de educación primaria a una muestra a nivel nacional en Guatemala.
Psicopedagogía	Rama de la psicología que se ocupa de los fenómenos de orden psicológico para llegar a una formulación más adecuada de los métodos didácticos y pedagógicos.
Semiótica	Estudio de los signos en la vida social. Teoría general de los signos.
Significancia	Valor que indica si hay o no diferencias significativas entre las variables.
Sociocultural	Perteneciente o relativo al estado cultural de una sociedad o grupo social.
Taxonomía	Ciencia que trata de los principios, métodos y fines de la clasificación.
Validar	Hacer válido, verificar que un ítem mide lo que se desea que mida.

I. ANEXO 9. ACRÓNIMOS

CNB Currículum Nacional Base.

DIGECADE Dirección General de Calidad y Desarrollo Educativo, antes DICADE.

EFPEM Escuela de formación de profesores de enseñanza media de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

E. U. Estados Unidos de América.

K-12 Grados desde Kinder hasta el doceavo grado.

MINEDUC Ministerio de educación de Guatemala.

NCTM Consejo nacional de maestros de matemática de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics).

OCDE Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

OdA Oportunidades de Aprendizaje.

PISA Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos, denominado Proyecto (Programme for Indicators of Student Achievement).

TIMSS Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencia.

USAID Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional, de Guatemala.

ZDP Zona de Desarrollo Próximo