

**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

Facultad de Ciencias y Humanidades

**Implicaciones físicas de la constante cosmológica**

Sergio Alejandro Minera Rebullá

Guatemala

2008



## **Implicaciones físicas de la constante cosmológica**



**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

Facultad de Ciencias y Humanidades

**Implicaciones físicas de la constante cosmológica**

Trabajo de graduación presentado  
Por Sergio Alejandro Minera Rebullá  
para optar al grado de  
Licenciado en Física

Guatemala

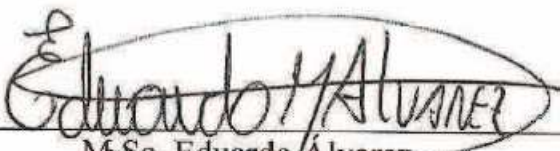
2008




Vo. Bo.:

(f)   
Licenciado Adrián Licht  
Asesor

Tribunal:

(f)   
M.Sc. Eduardo Alvarez

(f)   
M.Sc. Irene Aguilar

(f)   
Lic. Adrian Licht

Fecha de Aprobación: 31 de Julio de 2008



## Prefacio

Este documento es el fruto de 17 años de esfuerzo y dedicación. Es la culminación de cuatro años de estudio de la carrera de Licenciatura en Física en la Universidad del Valle de Guatemala y es uno de los dos últimos requisitos para obtener el grado de Licenciado en Física.

Es necesario mencionar la razón más importante por la cual decidí seguir el estudio de la física. A mi parecer, es una manera de acercarme a Dios, el intentar entender la grandeza de su obra es en parte entenderlo a Él. Así comienza el viaje por el maravilloso mundo abstracto de las matemáticas y por el estudio del orden tan complejo manifestado en la naturaleza.

Pasado un tiempo me interesé en la formulación matemática de la física, razón por la cual fue escogido el tema del trabajo, Implicaciones Físicas de la Constante Cosmológica. Encontré en este tópico la fusión perfecta entre la matemática y la física, ya que es necesario recurrir a herramientas abstractas para entender y estudiar al cosmos, su nacimiento y evolución.

Este pequeño paso que estoy dando es la suma de muchos esfuerzos, y no hablo de esfuerzos solamente de mi persona, sino de las de todas esas personas que estuvieron a mi lado en todo momento que de una u otra forma me transmitieron sus conocimientos.

Quisiera agradecer primero que todo a Dios, quien ha sido mi guía, mi maestro, tutor y amigo inseparable desde aquel 27 de Abril. A mis amados padres Jorge Rafael Minera Castillo y Claudia Lissette Rébulla de Minera a quienes les agradezco infinitamente por haber estado siempre a mi lado apoyándome en cualquier situación, sin ellos esto hubiera sido imposible. A mis dos hermanos David y María Regina que me enseñaron el amor de hermanos. Y por supuesto, a mis abuelos por su sabiduría transmitida.

También quisiera dar las gracias a todos aquellos amigos catedráticos, que con paciencia y voluntad transmitieron sus conocimientos, en especial a Dorval Carias, por sus sabios consejos, Irene Aguilar por siempre ser tan atenta y a Eduardo Álvarez, por ser la persona que me inspiró desde mi primer día de universidad.

A Adrián Licht, mi asesor y amigo, con quien estaré siempre agradecido por su interés y dedicación.

Quisiera mencionar a aquellos que contribuyeron fuera del ámbito académico, todos los amigos que desde siempre han estado para ser un apoyo en los momentos buenos y malos, a ellos, gracias.

Por último agradezco a todas esas personas que Dios ha cruzado en mi camino, que aunque sea por un momento, aunque sea por un breve instante, dejaron huella en mí y gracias a eso soy una mejor persona.

Espero este paso sea el primero de una vida profesional fructífera, para así pues poner en práctica todo lo que yo he aprendido, todo lo que ustedes han enseñado.

A María.

# Índice general

Prefacio .....	v
Índice general .....	vii
Índice de figuras .....	ix
Resumen .....	xi
<b>1. Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Historia .....</b>	<b>5</b>
2.1 Albert Einstein .....	5
2.2 Historia del término .....	6
<b>3. Introducción matemática .....</b>	<b>11</b>
3.1 Geometría diferencial .....	11
3.2 Cálculo de variaciones .....	2
<b>4. Curvatura y teoría de relatividad especial gravitación .....</b>	<b>25</b>
4.1 Transporte paralelo, geodésicas y conexión Levi-Civita .....	25
4.2 Teoría de Relatividad General .....	29
<b>5. Interpretación de la Constante Cosmológica como energía del vacío .....</b>	<b>35</b>
5.1 Tensor de Energía Momentum .....	35
5.2 Energía del Vacío .....	37
<b>6. Efectos cosmológicos: Inflación .....</b>	<b>45</b>
6.1 Parámetros cosmológicos .....	45
<b>7. Métodos de medición de <math>\Lambda</math> .....</b>	<b>57</b>
7.1 Corrimiento al rojo (redshift) .....	57
7.2 Distancia Luminosa .....	59
7.3 Supernovas tipo Ia: candelas estándar .....	61
7.4 Fondo Cósmico de Microondas .....	64
<b>8. Conclusiones .....</b>	<b>69</b>
<b>9. Bibliografía .....</b>	<b>71</b>
<b>10. Apéndices .....</b>	<b>75</b>
A. Principio de incertidumbre de Heisenberg .....	75
B. Tabla de símbolos .....	80



# Índice de figuras

<b>Capítulo 2</b>	
2.1 Albert Einstein .....	6
<b>Capítulo 3</b>	
3.1 Espacios topológicos .....	10
3.2 Composición de funciones .....	11
3.3 Cartas .....	14
3.4 Espacio tangente .....	14
3.5 Vectores .....	17
3.6 Variación de F respecto de curva y(x) .....	22
<b>Capítulo 4</b>	
4.1 Transporte paralelo es espacio euclidiano .....	25
4.2 Traslación de vectores en espacio curvo .....	26
4.3 Aceleración geodésica .....	28
<b>Capítulo 5</b>	
5.1 Aproximación parabólica de potencial arbitrario .....	40
<b>Capítulo 6</b>	
6.1 Cambio de la rejilla $x_1, x_2$ .....	45
6.2 Comportamiento de universos con $\Omega_M \Omega_A$ .....	53
6.3 Comportamiento de universos dominados por materia y $\Lambda$ .....	53
6.4 Relación edad universo-factor de escala .....	55
<b>Capítulo 7</b>	
7.1 Efecto Doppler .....	57
7.2 Efecto Doppler gravitatorio .....	58
7.3 Resultados SCP y HZT .....	62
7.4 Constricciones en $\Omega_M \Omega_A$ HZT .....	63
7.5 Constricciones en $\Omega_M \Omega_A$ . SCP .....	63
7.6 Fondo Cósmico de Microondas .....	65
7.7 Curva $c_l$ predicha .....	66
7.8 Globo del experimento Boomerang .....	66
7.9 Pico acústico .....	67
7.10 Intervalos de confianza experimento Boomerang .....	67
7.11 Combinación de resultados .....	68



## Resumen

Este trabajo se titula *Implicaciones físicas de la Constante Cosmológica*. La finalidad de este documento es de carácter didáctico e informativo; se proporcionan al lector las bases teóricas necesarias para abordar el tema de la constante cosmológica y sus implicaciones físicas.

Para ello se expone, de manera ordenada, una recopilación de las contribuciones que, al tema, han hecho diferentes autores, tanto matemáticos como físicos. Esto permite guiar al lector en el estudio y la comprensión, tanto de la constante cosmológica como de sus consecuencias desde una escala pequeña hasta una escala cosmológica. Además se presentan resultados de dos experimentos recientemente realizados, los cuales tenían como finalidad encontrar los valores numéricos de las densidades de energía en nuestro universo, las cuales están estrechamente relacionadas con la constante cosmológica.



# 1. Introducción

En el año de 1905 la historia de la Física y en general, la de la ciencia entera, cambia para siempre, Albert Einstein da a conocer su hoy famosa teoría de Relatividad Especial en un documento titulado “*Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento*”. En dicha publicación expone la relación que existe entre materia, energía, tiempo y espacio.

Durante los siguientes diez años Einstein desarrolla su teoría de la Relatividad General, la cual describe cómo la energía cambia la geometría del espacio-tiempo y es ésta la causante del fenómeno conocido como *gravedad*. La ecuación que la describe es la siguiente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

El lado derecho de esta expresión representa la geometría del espacio, la curvatura, y el lado izquierdo representa la energía y materia, la causante de la curvatura. Muchas son las predicciones y consecuencias de ésta ecuación, una de ellas es que, debido a la atracción gravitatoria entre todos los objetos existentes del universo, todos tenderían a converger a un punto. Este fenómeno entraba en conflicto con lo conocido en la época, ya que se «sabía» que el universo era estático. Para contrarrestar este efecto, Einstein, en el año de 1917, introduce una constante  $\Lambda$ :

$$\Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

El término  $\Lambda$  se conoce como la Constante Cosmológica.

Esta constante se puede relacionar con una densidad de energía, la cual es la responsable de generar una fuerza de repulsión que mantendría al universo estático, siempre y cuando el valor de  $\Lambda$  sea mayor a cero y que la densidad de la materia sea

relativamente baja comparada con la anterior. Lo peculiar de esta densidad de energía es que está relacionada con la energía de punto cero, o energía del vacío.

Debido al *Principio de Incertidumbre de Heisenberg*, es imposible saber con exactitud el valor de la energía de un sistema cuántico y esto es lo que da origen a la energía del punto cero. Pero, ¿cómo se manifiesta la energía del vacío como una constante cosmológica? Según la Relatividad General de Einstein, la materia y energía son representados por un término que engloba la información de su energía cinética, energía de gradiente y su energía potencial; si el vacío existiera, los primeros dos serían nulos, salvo el último. Y es precisamente el último término el que se puede relacionar con la constante  $\Lambda$ .

Ahora bien, años después de la introducción de la constante  $\Lambda$ , descubrimientos astronómicos establecieron que el universo no era estático, más aún, se expandía, por lo que la constante fue abandonada.

En las últimas décadas, se han realizado estudios más exhaustivos y se ha llegado a la conclusión que es muy probable que sí exista una constante cosmológica positiva y que sea ésta la que cause que el universo se expanda.

Sin embargo, la existencia de una constante cosmológica positiva no asegura que sea ésta la que cause la expansión, sino también la relación de la energía asociada con  $\Lambda$  con las densidades de energía de otras fuentes, por ejemplo, la de la materia.

Dos maneras comunes de encontrar la relación entre las densidades de energía son: la exploración de la luminosidad de supernovas *tipo Ia* y la medición del *fondo cósmico de microondas*. La primera, consiste en encontrar una relación entre la luminosidad aparente y relativa de las supernovas con la distancia de éstas y de aquí extraer información sobre las densidades de energía. La segunda, consiste en medir las anisotropías en el fondo cósmico de microondas y comparar éstas con las predichas por modelos cosmológicos y así encontrar valores aproximados de las densidades de energía.

Medir las densidades de energías representa, solo uno de los retos actuales en el campo, otro muy importante y más problemático, es el conocido como “*El Problema de la Constante Cosmológica*”. Este problema surge debido a que algunas teorías actuales de unificación entre mecánica cuántica y gravitación, predicen valores para la constante cosmológica que difieren de las medidas en hasta unos 120 órdenes de magnitud, situación que es inaceptable. Actualmente, éste es un campo abierto para su estudio.



## 2. Historia

### 2.1 Albert Einstein.

El 14 de marzo de 1879 nace en Ulm, Alemania, el que se convertiría en el físico teórico más importante de la historia, Albert Einstein. Einstein no siempre fue considerado un genio, de hecho cuando asistía a la escuela elemental en Munich, uno de sus profesores comentó al padre de Albert que *«nunca haría nada de provecho»* (Hawking, 2004) debido a su pobre rendimiento. A pesar de esto, Albert desarrolló un temprano interés por la ciencia y la música, ya que a los 6 años comenzó a tocar el violín.

En 1895 intentó evitarse la escuela de enseñanza media realizando el examen de admisión a la Escuela Politécnica Federal de Zurich; en sus propias palabras (Hawking, 2004):

*«Si tuviera la suerte de superar el examen, iría a Zurich. Pasaría allí cuatro años estudiando matemáticas y física. Me imagino como profesor en estas ramas de las ciencias naturales, especialmente de sus aspectos teóricos. He aquí las razones que me inspiraron a este plan. Por encima de todo, está mi disposición al pensamiento abstracto y matemático y mi falta de imaginación y de habilidades prácticas.»*

Lamentablemente reprobó el examen y tuvo que asistir a la Escuela Secundaria de Araav, Suiza. Posteriormente logró entrar a la Escuela Politécnica de Zurich y en 1900 se graduó como profesor de matemáticas y física. Consigue un empleo en la Oficina de Patentes de Suiza, puesto que le daba mucho tiempo para pensar y para darle forma a la teoría, que en 1905 publicó, *“Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento”* hoy conocida como *Teoría de Relatividad Especial*.

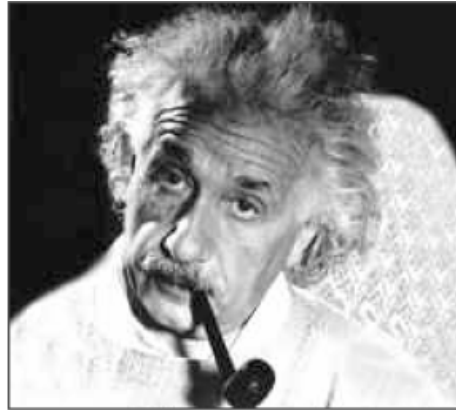
Diez años más tarde, en 1915, publica su hoy famosa *Teoría de Relatividad General*, que explica cómo la materia, energía y el espacio-tiempo están relacionados. En 1919 se presentó la primera evidencia observacional que sugería que la teoría era correcta, lo que de inmediato le dio reconocimiento mundial. Un estudiante le preguntó cómo habría reaccionado si la teoría hubiera sido refutada y él replicó (Hawking, 2004):

«Lo hubiera sentido por Dios, la teoría es correcta.»

En 1921 recibe el Premio Nobel en Física por la explicación del efecto fotoeléctrico. En el año de 1933 se establece permanentemente en los Estados Unidos de América tras huir de la represión nazi y de la inevitable guerra.

Después de una fructífera vida en el ámbito científico y de ser nombrado La Persona del Siglo por el New York Times, muere el 18 de abril de 1955.

Figura 2.1 Albert Einstein (Cuny, 1962)



## 2.2 Historia del término $\Lambda$ .

En 1915 Einstein dio a conocer su teoría de Relatividad General en donde presentaba su ecuación de campo, la cual describe cómo la materia y energía curvan el espacio circundante:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi gT_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

El lado izquierdo de esta igualdad representa la curvatura del espacio, engloba la geometría de éste y el lado derecho representa la masa y/o energía que crea la curvatura.

Dos años más tarde, en 1917, Einstein introduce un término adicional, la llamada *Constante Cosmológica*  $\Lambda$ ; debido a que su ecuación predecía que el universo se

contraería y esto entraba en conflicto con lo que se sabía en la época: que el universo era estático. La ecuación modificada se lee de la manera siguiente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi gT_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

En una carta a Ehrenfest, el 4 de febrero de 1917, Einstein escribe (Hawking, 2004):

*«De nuevo he perpetrado algo relacionado a la teoría de gravitación que me pone en peligro de ser condenado a un manicomio.»*

La ecuación modificada de Einstein tiene dos implicaciones importantes, una es la relación de  $\Lambda$  con la densidad de energía:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.3)$$

y la otra es la ecuación de estado:

$$\rho_{\Lambda} = -p \quad (2.4)$$

donde  $p$  es la presión.

Esta última indica la existencia de  $\Lambda > 0$ , implica una presión negativa la cual está relacionada a una fuerza repulsiva; y, es precisamente esta fuerza, la que compensa la atracción gravitatoria, creando así una solución estática (universo estático) a la ecuación de Einstein.

La idea de un universo en expansión surgió alrededor de 1922 con el trabajo de Friedmann (1922 y 1924, (Straumann, 2002)) y con el de Lemaitre (1927), donde se exponían resultados teóricos de un universo en expansión. Einstein rechazaba esta idea, en sus propias palabras (Straumann, 2002):

*«Matemáticamente correcto pero sin significado físico.»*

A pesar de haber agregado la constante a la ecuación, Einstein comenta a Weyl en una carta mandada en 1923:

*«Si no hay un universo cuasi-estático,  
entonces fuera con el término cosmológico.»*

Años después, con el aparecimiento de evidencia que el universo se expandía, Einstein descartó la constante cosmológica diciendo que era (Straumann, 2002) *«El mayor error de su vida»*.

A pesar de esto, otros cosmólogos, como Eddington, retuvieron la constante cosmológica. Una de las razones es que resolvía el problema de la edad del universo, cuando se pensaba que la escala de tiempo de Hubble era de 2 billones de años (H<sub>0</sub> ~ 500kms<sup>-1</sup>Mpc<sup>-1</sup>). En los años 1950 hubo un tendencia entre los cosmólogos a dejar de usar la constante cosmológica, debido al aparecimiento de nuevas teorías cosmológicas que resolvían el problema de la edad del universo, sin hacer uso de aquella. En la década de los sesenta reaparece la constante cosmológica; ésta vez para explicar los valores del corrimiento al rojo de *quasars* lejanos, pero años más tarde las observaciones a estos astros mostró que la constante era innecesaria de nuevo.

Para concluir, se presentarán algunos aspectos de la relación entre mecánica cuántica y la constante cosmológica.

Como se ha mencionado, la existencia de una constante cosmológica positiva (como lo sugiere resultados de observaciones recientes) implica la existencia de una densidad de energía que se manifiesta como una fuerza repulsiva que acelera la expansión del universo. Pero, ¿quién contribuye a esta densidad de energía? La respuesta es, el vacío. Esto se debe a fluctuaciones cuánticas (*Principio de Heisenberg*)<sup>1</sup>. Durante décadas, la mayoría de los físicos no se preocuparon por las contribuciones cuánticas a la constante cosmológica, una excepción fue Pauli, quien afirmaba (alrededor de los años

---

<sup>1</sup> Para más información sobre este principio consulte el apéndice 1.

1920) que las fluctuaciones cuánticas podían tener consecuencias gravitacionales significativas.

En los últimos años, con la aparición de nuevas teorías de unificación surgió un problema, algunas de estas teorías predicen valores para la constante cosmológica muy distintos a los observados generando discrepancias de hasta 120 órdenes de magnitud. Actualmente, el problema de la constante cosmológica es un problema abierto y uno de los más importantes en la Física.



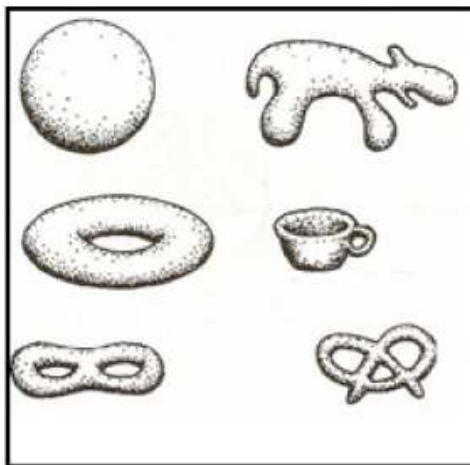
### 3. Introducción matemática

#### 3.1 Geometría diferencial.

El estudio del comportamiento local de espacios topológicamente complejos, es decir, espacios con formas geométricas diferentes a líneas, planos o sus generalizaciones, constituye el punto básico de la geometría diferencial. La idea principal de la geometría diferencial es, utilizar las herramientas del cálculo diferencial e integral para estudiar dichos espacios, pero ¿cómo se logra? Básicamente, lo que se hace es parchar al espacio con copias de  $\mathbb{R}^n$ , creando así un espacio localmente Euclidiano, es decir, localmente igual a  $\mathbb{R}^n$ . La geometría diferencial es una herramienta de suma importancia para el estudio de la física, en especial para la formulación de la Teoría de Relatividad General, ya que la teoría describe el comportamiento de la gravedad a gran escala, afirmando que esta deforma el espacio circundante, por lo que la geometría es la forma más acertada para explicarla.

Se presentan a continuación algunos gráficos de espacios comúnmente estudiados:

Figura 3.1. Espacios topológicos. (nombre, año)



Para formalizar lo anteriormente descrito se presentarán algunas definiciones y teoremas importantes:

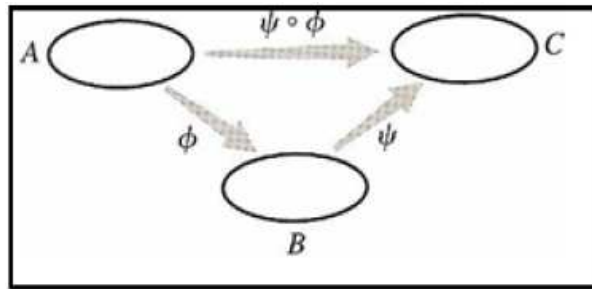
**Definición 3.1** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Un mapeo o función  $\phi: A \rightarrow B$  es una relación que asigna a cada elemento de  $A$  un único elemento de  $B$ .

**Definición 3.2** Un función  $\phi: A \rightarrow B$  es *uno a uno*, si para cualesquiera dos puntos  $a$  y  $b$  elementos de  $A$ ;  $a \neq b$ ; se tiene que  $\phi(a) \neq \phi(b)$ . Se dice que es *sobreyectiva* si, para todo elemento  $b \in B$ , se tiene que  $\phi^{-1}(b) \in A$ .

**Definición 3.3** Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conjuntos y  $\phi$ ,  $\psi$  son funciones tal que  $\phi: A \rightarrow B$  y  $\psi: B \rightarrow C$ , entonces la composición se define como  $\psi \circ \phi: A \rightarrow C$ .

La siguiente figura resume lo anterior:

Figura 3.2 Composición de funciones (nombre, año)



NOTA: en la relación  $\phi: A \rightarrow B$ , el conjunto  $A$  recibe el nombre de *dominio*, y el conjunto  $B$  recibe el nombre de *rango* o *contradominio*.

Sea  $\phi$  un mapeo uno a uno y sobreyectivo, entonces este mapeo es invertible y su inversa se denota como  $\phi^{-1}: B \rightarrow A$ . Para algún subconjunto  $U \subset B$ ; el conjunto de los elementos de  $A$  que pueden ser mapeados a  $U$ ; se le da el nombre de *pre-imagen bajo  $\phi$* , simbólicamente  $\phi^{-1}(U)$ .

Ya que se utilizan las herramientas del cálculo para estudiar espacios topológicamente distintos a  $\mathbb{R}^n$ , hay que mencionar una propiedad importante, la

*continuidad.* La continuidad es una propiedad tanto de la función como de su conjunto dominio, por lo que en la definición de continuidad se especifican características de ambos.

**Definición 3.4** Si  $U \subset A$  y  $V \subset B$  son conjuntos abiertos y  $\phi: A \rightarrow B$  un mapeo, se dice que  $\phi$  es continua en  $u \in U$  si para toda vecindad  $V$  de  $\phi(u) \exists$  vecindad  $U$  de  $u \ni \phi(U) \subset V$ .

En esencia, una función continua dice que puntos cercanos en la imagen provienen de puntos cercanos en el dominio.

Otro concepto muy importante e indispensable es el de diferenciabilidad, recordando que el objetivo es utilizar el cálculo en  $\mathbb{R}^n$  para estudiar a estos espacios extraños; se tratará la diferenciación en  $\mathbb{R}^n$ .

Se presenta un teorema de suma importancia para el estudio de la geometría de estos espacios topológicos:

**Teorema 3.1** La composición de funciones continuas es continua.

**Demostración.** Sea  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  continuas y  $A, B, C$  son abiertos, entonces vemos que si  $U$  es abierto en  $C$  entonces  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $B$ ; entonces  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  es abierto en  $A$  pero  $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$  lo que prueba el teorema. (nombre, año).■

**Definición 3.5** Dados un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , un mapeo  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un punto  $u \in U$ , la función  $\phi$  es diferenciable en  $u$  si existe un mapeo lineal  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \ni$  para todo  $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  la expresión  $\frac{\phi(a+h) - \phi(a) - Bh}{|h|} \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ :

Ahora bien, es válido preguntarse qué sucede con la continuidad de las derivadas de una función en  $\mathbb{R}^n$ , en este caso se tratarán funciones que pertenecen al conjunto  $C^\infty$ ; el

cuál es el conjunto de todas las funciones cuyas derivadas de cualquier orden existen y son continuas.

**Definición 3.6** Sean  $U$  y  $V$  abiertos y  $f: U \rightarrow V$  un mapeo  $C^\infty$ . El mapeo es  $C^\infty$ -difeomorfismo si: (1)  $f$  es biyectiva y (2) si  $f^{-1}$  es  $C^\infty$ .

Ya con las herramientas y definiciones, comienza el proceso de parchar a estos espacios más generales.

**Definición 3.7** Sea  $M$  un conjunto y  $U \subset M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos, una carta es un mapeo  $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  biyectivo.

NOTAS: (1) En la definición anterior, en vez de  $\mathbb{R}^n$  se puede colocar un espacio vectorial  $S$ . (2) Una carta se denota como  $(U, \phi)$ .

Esta carta puede interpretarse de la siguiente manera: el mapeo  $\phi$  copia a una parte de  $\mathbb{R}^n$  (es decir  $V$ ), en una sección de  $M$  (es decir  $U$ ), logrando así que una parte de  $M$  se "mire" como  $\mathbb{R}^n$ .

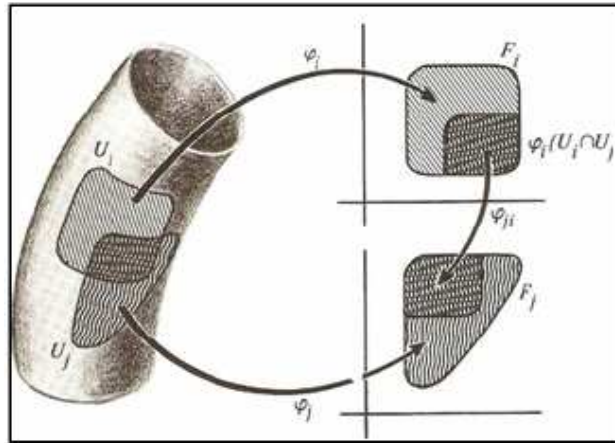
La meta es cubrir a todo el conjunto  $M$ ; se tiene que encontrar un conjunto de cartas tal que éstas cubran a todo el conjunto  $M$ .

**Definición 3.8** Un *Atlas* en  $M$ ; es una familia  $\Omega$  de cartas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  tal que: cualesquiera dos miembros de  $\Omega$  que se traslapen son  $C^\infty$ .

NOTAS: (1)  $M = \bigcup^I U_\alpha$  (2) Para dos cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ; se forma:  $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \mid \phi(U_\alpha \cap U_\beta)$  donde  $\phi_\beta^{-1} \mid \phi(U_\alpha \cap U_\beta)$  significa la restricción de  $\phi_\beta^{-1}$  al conjunto  $\phi(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Se requiere que  $\phi(U_\alpha \cap U_\beta)$  sea abierto en  $\mathbb{R}^n$  y que  $\phi_{\alpha\beta}$  sea  $C^\infty$ -difeomorfismo.

La siguiente figura resume la definición anterior:

Figura 3.3. Cartas. (Abraham, R, y Marsden, J., 1978)

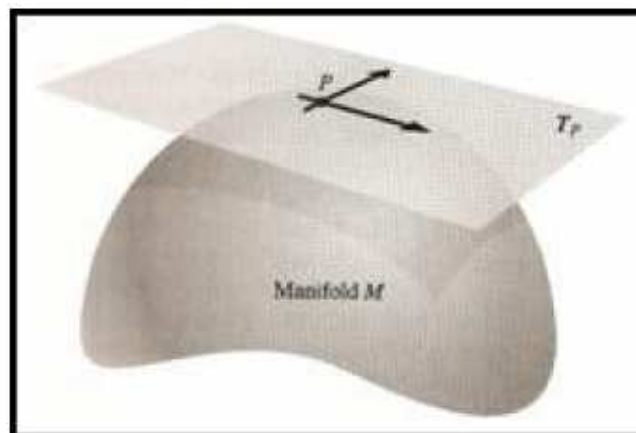


Al par  $(M, \Omega)$  se le llama *Variedad Diferenciable*.

NOTA: (1) se dice que dos espacios son difeomórficos si existe un difeomorfismo entre ellos. (2) Si el Atlas tiene como rango a  $\mathbb{R}^n$  se dice que la variedad  $M$  es de dimensión  $n$ .

**3.1.1 Vectores** Para estudiar más a fondo las propiedades de una variedad diferenciable, hay que describir a los espacios tangentes a un punto  $p \in M$ : En  $\mathbb{R}^n$  la idea de un espacio tangente es intuitiva; es el espacio formado por todos los vectores tangentes a un punto de una curva en  $\mathbb{R}^n$ : Incluso resulta fácilmente visualizarlo:

Figura 3.4. Espacio Tangente. (Carroll, 2004)



El concepto de espacio tangente, en una variedad diferenciable, tiene un significado ligeramente diferente, éste será un espacio vectorial asociado con un punto  $p$  de la variedad. Este espacio tangente a  $p$  elemento de la variedad,  $M$ , denotado  $T_p$ , tendrá ciertas características, las cuales se presentarán en su momento. Para poder especificar las características de este espacio, hay que construir una representación independiente de las coordenadas. Siendo más específico, se necesita una base que cumpla con esto. Definamos a  $\Gamma$  como el espacio de todas las funciones suaves (es decir funciones  $f \in C^\infty$ )  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Cada curva  $f$  en un punto  $p$  define un operador  $f \rightarrow \frac{df}{d\lambda}(p)$  (derivada direccional) donde  $\lambda$  es un parámetro.

**Teorema 3.2** El espacio tangente a un punto  $p \in M$  (con dimensión  $n$ ),  $T_p$  puede ser identificado con el espacio de los operadores de derivadas direccionales a lo largo de curvas que pasan por  $p$ .

**Demostración.** Primero vemos que si  $\frac{d}{d\gamma}$  y  $\frac{d}{d\eta}$  representan derivadas a lo largo de

curvas  $x(\gamma)$  y  $x(\eta)$  a través de  $p$ . Vemos que se puede construir el objeto con  $a\frac{d}{d\gamma} + b\frac{d}{d\eta}$

escalares, y que este cumple con la regla de Leibniz  $(a\frac{d}{d\gamma} + b\frac{d}{d\eta})(fg) = af\frac{dg}{d\gamma} + bg\frac{df}{d\eta} =$

$(a\frac{df}{d\gamma} + b\frac{df}{d\eta})g + (a\frac{dg}{d\gamma} + b\frac{dg}{d\eta})f$  lo que muestra que el espacio es cerrado, lo que verifica

que es un espacio vectorial. ■

La prueba de que el conjunto  $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mid \mu = 1, \dots, n\}$  forma una base del espacio tangente puede encontrarse en Carroll, capítulo 2. (Carroll, 2004)

**Notación 3.1** Convenio de Einstein: en expresiones donde aparezcan índices repetidos, uno arriba y otro abajo, se asume una suma de 1 a  $n$ , dimensión de la variedad. Es decir, la expresión  $A_\gamma$  significa  $A_1^1 + A_2^2 + \dots + A_n^n$ .

**Notación 3.2** El índice superior denota las componentes de un vector. Es decir,  $A^\mu$  denota las componentes del vector  $A$ .

NOTA: de este punto en adelante todo índice griego recorre todos los posibles valores de 1 a  $\dim(M)$  donde  $M$  es la variedad.

Considérese una variedad  $n$ -dimensional  $M$ , y una carta  $\phi = M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  y una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ : Si  $\lambda$  es el parámetro de  $\gamma$  se puede expresar a  $\frac{d}{d\lambda}$  en términos de  $\partial_\mu$ .

Entonces

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma) = \frac{d}{d\lambda}[(f \circ g^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)] = \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f,$$

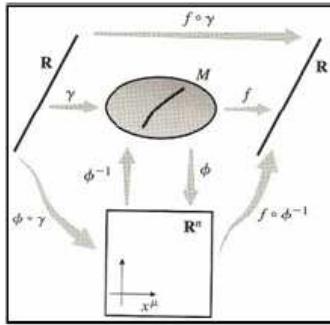
donde  $x^\mu$  son las coordenadas inducidas por  $\phi$ . Por lo que

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu \tag{3.1}$$

Esto confirma el resultado anterior, el conjunto  $\{\partial_\mu\}$ , es una base del espacio  $T_p$ .

La siguiente figura resume lo anteriormente derivado:

Figura 3.5. Vectores. (Carroll, 2004)



De lo anterior, se observa que se puede cambiar de coordenadas  $x^{\mu'}$  de la siguiente manera:  $\partial\mu' = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial\mu$ , siendo  $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$  la matriz de transformación de cambio de base, y en componentes la transformación quedaría

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} V^{\mu} \quad (3.2)$$

**3.1.2 Vectores duales (uno-formas)** Ya con el espacio tangente, se puede construir un espacio que tome elementos de  $T_p$  y los mapee en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 3.9** 13 El espacio dual de  $T_p$ , denotado  $T_p^*$ , es el conjunto  $\{w \in T_p^* / w(v) \in \mathbb{R} \text{ con } v \in T_p\}$ . Este espacio es llamado cotangente.

**Teorema 3.4** El conjunto  $T_p^*$  constituye un espacio vectorial.

**Demostración.** Ver Carroll capítulo 1. (Carroll, 2004) ■

En un procedimiento análogo a lo trabajado con vectores, se encuentra una base para este espacio. Si  $\bar{\epsilon}_{\mu}$  es una base para  $T_p$ , entonces una base  $\{\hat{\theta}^{\nu}\}$  para  $T_p^*$ , debe cumplir con que  $\hat{\theta}^{\nu}(\bar{\epsilon}_{\mu}) = \delta_{\mu}^{\nu}$  donde  $\delta_{\mu}^{\nu}$  es la Delta de Kronecker. Con esta definición se ve que si  $V \in T_p$  y  $w \in T_p^*$  entonces

$$w(V) = w_{\mu} \hat{\theta}^{\mu}(V^{\nu} \bar{\epsilon}_{\nu}) = w_{\mu} V^{\nu} \hat{\theta}^{\mu}(\bar{\epsilon}_{\nu}) = w_{\mu} V^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} = w_{\mu} V^{\mu} \quad (3.3)$$

por lo que la acción de  $w$  en  $V$  puede describirse solamente por sus componentes.

**Notación 3.3** El índice inferior  $A_\mu$  denota las componentes de una uno-forma  $A$ :

Un ejemplo canónico de uno-formas que resulta útil para obtener la forma de la base de  $T_p^*$ , es el gradiente de una función  $f$ . Si  $w: T_p \rightarrow \mathbb{R}$ ; entonces el gradiente, denotado como

$df$ , del vector  $\frac{d}{d\lambda}$  es:  $df\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda}$ , que es la derivada direccional de  $f$ . Si  $x^\mu$  son

coordenadas inducidas por la carta  $\phi$ , entonces la acción de  $dx^\mu$  en la base de  $T_p$ , es decir  $\partial_\nu$ , muestra que:

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (3.4)$$

y en palabras más sencillas,  $dx^\mu$  es una base de  $T_p^*$ .

La transformación de coordenadas para uno-formas es similar a la de vectores

$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu$ , siendo  $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$  la matriz de transformación, y en componentes la

transformación quedaría:

$$w_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} w_\mu \quad (3.5)$$

**3.1.3. Tensores.** Es conveniente introducir el concepto de tensor, ya que es una generalización de vectores y uno-formas. Un tensor es importante no solamente por el hecho de ser una generalización de objetos útiles para el estudio de variedades. También nos permite trabajar con ecuaciones en las cuales no es necesario definir un sistema de coordenadas, o desde el punto de vista físico, independientemente del observador, y es precisamente esta característica la que es útil, especialmente para el estudio de la relatividad general. Se comienza con una definición:

**Definición 3.10** Un mapeo  $T : T_p^* \times_1 T_p^* \times_2 \cdots \times_k T_p^* \times_1 T_p \times_2 T_p \cdots \times_l T_p$  multilinear, i.e., lineal en cada argumento, es llamado tensor de rango  $(k, l)$ .

El conjunto de todos los tensores de rango  $(k; l)$  forma un espacio vectorial. Por lo que es conveniente encontrar una base para este espacio.

**Definición 3.11** El producto tensorial, denotado por  $\otimes$ ; toma tensores  $T$  de rango  $(k, l)$  y  $S$  de rango  $(m, n)$ ; y generan un tensor  $T \otimes S$  de rango  $(k + m, l + n)$ .

NOTA: en general  $T \otimes S \neq S \otimes T$ .

Con la definición de producto tensorial, se puede escribir una base que consiste en el producto tensorial de bases del espacio dual y del espacio tangente:

$$\hat{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l} \quad (3.6)$$

En secciones pasadas, se a visto que trabajar con componentes es más sencillo, incluso más compacto, por lo que para tensores se hará lo mismo. Un tensor tendrá la forma  $T = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \hat{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}$ . La ley de transformación para tensores es evidente:

$$T_{\nu_1' \dots \nu_l'}^{\mu_1' \dots \mu_k'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \quad (3.7)$$

Los tensores son de suma importancia para la física, ya que permiten escribir ecuaciones de forma que sean invariantes ante el cambio de sistema de coordenadas. El siguiente teorema lo muestra:

**Teorema 3.5** Si  $S_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  entonces  $S_{\nu_1' \dots \nu_l'}^{\mu_1' \dots \mu_k'} = T_{\nu_1' \dots \nu_l'}^{\mu_1' \dots \mu_k'}$

**Demostración.** Sea  $A^{\nu_i} = \frac{\partial x^{\nu_i}}{\partial x^{\nu_i'}}$  y  $(A^{-1})^{\mu_j} = \frac{\partial x^{\mu_j'}}{\partial x^{\mu_j}}$  entonces  $T_{\nu_1' \dots \nu_l'}^{\mu_1' \dots \mu_k'}$  =  $\Pi_{i=1}^l (A^{-1})^{\mu_i} \Pi_{j=1}^k (A)^{\nu_j} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = \Pi_{i=1}^l (A^{-1})^{\mu_i} \Pi_{j=1}^k (A)^{\nu_j} S_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = S_{\nu_1' \dots \nu_l'}^{\mu_1' \dots \mu_k'}$ , lo que prueba el teorema. ■

Este resultado sugiere que todas las leyes de la física deben escribirse en forma tensorial, ya que el principio de relatividad, el cual afirma que las leyes de la física son independientes del observador, lo exige.

NOTA: Un tensor  $T_{\nu_1 \dots \nu_l}$  suele llamarse tensor contravariante y  $T_{\nu_1' \dots \nu_l'}$  un tensor covariante.

**3.1.4 La métrica.** Como se mencionó con anterioridad, se pretende investigar espacios topológicamente complejos, es decir estudiar cómo la forma de estos afecta a objetos inmersos en el espacio. De un punto de vista físico, en particular, desde la perspectiva de la Relatividad General, se busca identificar al espacio-tiempo con una variedad diferenciable, y estudiar cómo la materia curva a ésta variedad. El objeto adecuado para describir la geometría de estos espacios es la métrica.

**Definición 3.12** La métrica  $g_{\mu\nu}$  es un tensor de rango (0; 2), simétrico (i.e.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ); no-degenerado ( i.e.  $g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$ ):

Se pide que la métrica sea no degenerada, para así poder definir a su inversa. Ésta quedará de la forma siguiente:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = g^{\lambda\sigma} g_{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu} \quad (3.8)$$

En secciones próximas se investigará el rol de la métrica en Relatividad General.

**3.1.5 Manipulación de tensores.** Antes de proseguir, es necesario introducir ciertas definiciones y operaciones que ayudarán a la hora de manipular ecuaciones tensoriales.

- (1) Contracción: transforma un tensor de rango  $(k, l)$  es un tensor de rango  $(k-1; l-1)$  sumando sobre un índice superior y uno inferior: Ejemplo:  $T_{\eta\nu}^{\mu\nu\gamma} = S_{\eta}^{\mu\gamma}$ .
- (2) Subir o bajar índices: se utiliza la métrica  $g_{\mu\nu}$  o  $g^{\mu\nu}$  para subir o bajar índices. Si  $T_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$  es un tensor  $\Rightarrow T_{\delta}^{\alpha\beta\mu} = g^{\mu\gamma}T_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$  o  $T_{\mu\gamma\delta}^{\beta} = g_{\mu\alpha}T_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$  y así sucesivamente.
- (3) Cambio de índices: los índices repetidos, uno abajo y una arriba, pueden cambiarse de nombre (índices dummy).
- (4) Simetrizador: si  $T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho}^{\sigma}$  es un tensor entonces este puede hacerse simétrico en los índices  $\mu_1 \dots \mu_n$  de la siguiente manera:

$$T_{(\mu_1 \dots \mu_n) \rho}^{\sigma} = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho}^{\sigma} + \textit{suma sobre permutaciones de } \mu_1 \dots \mu_n) \quad (3.9)$$

análogamente para índices contravariantes.

- (5) Antisimetrizador: un tensor antisimétrico es aquel que al intercambiar cuáles quiera dos índices, éste cambia de signo. El tensor  $T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho}^{\sigma}$  entonces este puede hacerse antisimétrico n los índices  $\mu_1 \dots \mu_n$  de la siguiente manera:

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_n] \rho}^{\sigma} = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho}^{\sigma} + \textit{suma alterna sobre permutaciones de } \mu_1 \dots \mu_n) \quad (3.10)$$

- (6) Traza: es contraer  $T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho}^{\sigma}$  hasta llegar al escalar:  $T = T_{\lambda}^{\lambda}$ .

### 3.2 Cálculo de variaciones.

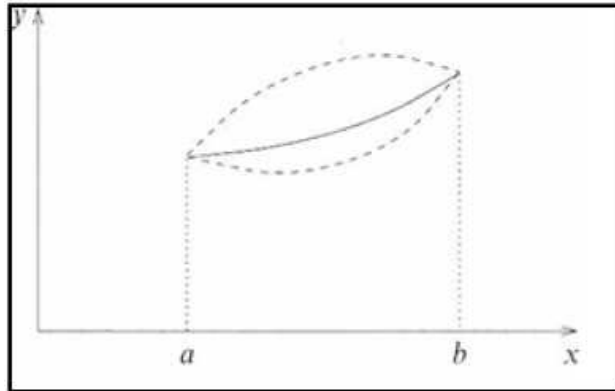
Para encontrar máximos y mínimos de funciones  $y=f(x)$ , se utilizan las técnicas del cálculo diferencial. Ahora bien, abordaremos un tipo de problema diferente, uno en el cual hay que encontrar una función que maximice o minimice un funcional, en otras palabras encontrar la función que haga al funcional estacionario. Un funcional es un mapeo  $J: F \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $F$  es un espacio de funciones. El funcional comúnmente utilizado para este tipo de problemas es la integral definida.

Suponga que se tiene que encontrar una función  $y(x)$ ; tal que el funcional  $J$  sea estacionario:

$$J = \int_a^b F(x, y(x), \frac{dy}{dx}) \quad (3.11)$$

i.e. se busca  $y(x)$  tal que  $J[y(x)]$  sea un máximo o mínimo. Gráficamente tenemos

Figura 3.6. Variación de  $F$  respecto de curva  $y(x)$  (Riley, F, *et.al.*, 2006)



donde la forma de la curva que hace estacionario al funcional viene dada por  $y(x)$ .

NOTA: se asume que los puntos  $(a, y(a))$  y  $(b, y(b))$  son fijos.

Ya que en secciones posteriores se trabajará con funciones de  $n$  variables independientes, se hará la derivación siguiente utilizando una función de varias variables.

**3.2.1 Variación del funcional  $J$ .** Considere la función

$$J = \int_R F(x_i, y(x_i), \partial_i y) dx_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

y donde  $R$  es una región en la cual  $F$ ,  $\partial_i F$  y  $\partial_i \partial_j F$  son continuas. Además  $\partial R$  es fija. Hacemos

$$y^*(x_i) = y(x_i) + \epsilon u(x_i) + \dots \quad (3.13)$$

con  $u$  una función continua en  $R$ . Ahora sustituimos (3.13) en (3.12), y utilizando el teorema de Taylor para funciones de varias variables, calculamos  $\delta J = J(y^*) - J(y)$ :

$$\delta J = J(y^*) - J(y) \quad (3.14)$$

$$= \int_R \{F(x_i, y + \epsilon u, \partial_i y + \epsilon \partial_i u) - F(x_i, y, \partial_i y)\} dx_i \quad (3.15)$$

$$= \int_R \left[ \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} \partial_i u \right] \quad (3.16)$$

Ahora haciendo la sustitución  $\frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} \partial_i u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} u \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} \right] u$  (regla de la derivada de un producto) en la ecuación anterior:

$$\delta J = \epsilon \int_R \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} \right) \right] u dx_i + \epsilon \int_R \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} u \right] dx_i \quad (3.17)$$

Donde el segundo término es cero por el teorema de Green y por el hecho que  $u(x_i) = 0$  para  $x_i$  en  $\partial R$  (ver Fomin capítulo 7). Entonces requerimos que  $\delta J = 0$  y como  $u(x_i)$  es arbitraria en  $IntR$  entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Esta es la famosa *ecuación de Euler* que hace estacionario al funcional  $J^2$ .

---

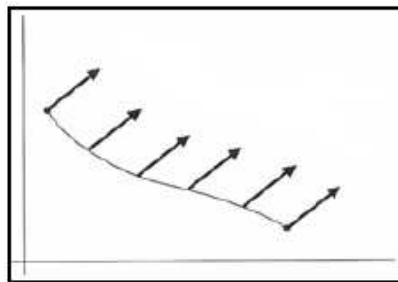
<sup>2</sup> En el caso en que  $F$  toma la forma  $F = T - U$ ; donde  $T$  es la función de energía cinética y  $U$  es la función de energía potencial de un sistema mecánico, la ecuación (3.18) toma el nombre de Euler-Lagrange.

## 4. Curvatura y teoría de relatividad general

Antes de estudiar a detalle la Teoría de Relatividad General de Einstein, se describe brevemente la finalidad de dicho planteamiento. La finalidad de esta teoría es describir como la masa, i.e., la energía, crea el fenómeno de la gravedad. Por lo tanto, según Einstein, la energía curva al espacio-tiempo circundante y es esta curvatura la que se interpreta como gravedad. Lo que busca es, identificar a una variedad diferenciable  $M$  con el espacio-tiempo y estudiar la forma de  $M$  mediante la métrica.

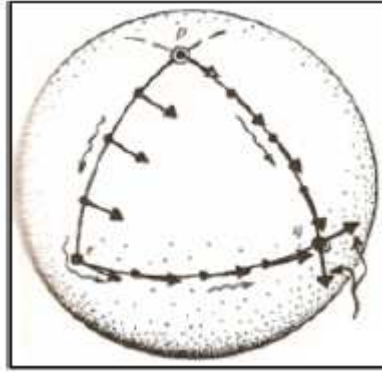
### 4.1 Transporte paralelo, geodésicas y conexión Levi-Civita.

Para una variedad diferenciable  $M$ , es necesario encontrar la forma de medir la razón de cambio de un campo tensorial definido en él. La manera de hacerlo es estudiando bajo qué condiciones este campo tensorial es constante ante traslaciones en la variedad. La noción de constancia del campo tensorial ante traslación puede causar confusión, por lo tanto, haciendo una analogía: en un espacio Euclidiano, un campo vectorial se mantiene constante, i.e., sus vectores se mantienen paralelos y de la misma longitud, ante cualquier traslación. En un espacio curvo, el paralelismo depende de la trayectoria de la traslación tomada. Como se puede observar en la figura siguiente:



En cambio, en un espacio curvo, el paralelismo depende de la trayectoria de la traslación tomada. Como se puede observar en la figura siguiente:

Figura 4.2 Transporte paralelo en espacio Euclideo (Carroll, 2004)



El mecanismo de transportar "paralelamente" un campo vectorial y en general un campo tensorial, es denominado transporte paralelo.

Se necesita definir un objeto que generalice el concepto de diferenciación, denotado por  $\frac{D}{d\lambda}$ , así pues, se podrá plantear una ecuación para la *constancia* del campo tensorial:

$$\left(\frac{D}{d\lambda}\right)_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0 \quad (4.1)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro,  $x$  es una curva y  $T$  es un tensor. Al objeto  $\nabla_\sigma$  se le llama *derivada covariante*; si la variedad tiene definida una métrica,  $\nabla_\sigma$  se define como:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad \text{para un vector } V \quad (4.2)$$

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$$

para una uno-forma  $\omega$ , y en general

$$\nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = \partial_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\lambda \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k} + \dots - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \quad (4.4)$$

en donde  $\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda$  es un objeto que permite que  $\nabla_\sigma T$  sea un tensor.

Sin embargo, si la métrica de la variedad es  $g_{\mu\nu}$ , entonces:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (4.5)$$

A la ecuación (4.5) se le llama Conexión de Levi-Civita o Christoffel-Riemann<sup>3</sup>.

Con esta definición de  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , tenemos dos propiedades importantes:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda} \text{ (Torsion-Free)} \quad (4.6)$$

$$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0 \text{ (métrica-compatible)} \quad (4.7)$$

Estas propiedades son de suma importancia para la Teoría de Relatividad General, ya que se hace uso de ellas en la derivación de la ecuación de Einstein.<sup>4</sup>

La *conexión Levi-Civita* nos permite verificar que el producto interno entre dos vectores es preservado bajo el transporte paralelo (Carroll, 2004). Es decir:

$$\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}) = 0 \quad (4.8)$$

La noción de "paralelo" cambia en un espacio curvo, así también lo hace el concepto de "recta", i.e., la distancia más corta entre dos puntos. A continuación se describe la forma en la que se deduce la ecuación de la curva que minimiza la distancia entre dos puntos.

Sea  $x^{\mu}(\lambda)$  una curva entonces:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = 0 \quad (4.9)$$

esto implica que, por la definición de  $\nabla_{\sigma}$

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (4.10)$$

<sup>3</sup> 1) Este objeto no es un tensor. También recibe el nombre de *símbolo de Christoffel*.

2) Es llamada *conexión*, ya que "conecta" a vectores tangente {4}

<sup>4</sup> En teorías modernas de gravedad, se utilizan conexiones no torsion-free. (Penrose, 2007)

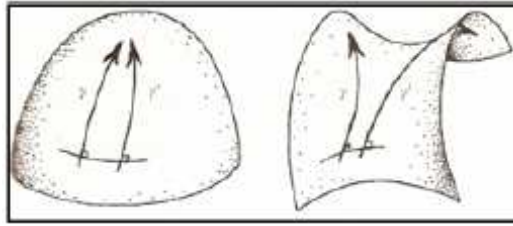
Esta última ecuación diferencial es llamada *Ecuación de la Geodésica* y la curva  $x^\mu(\lambda)$  es la trayectoria buscada.

**4.1.1. Curvatura. Tensor de Riemann.** Un tensor que es parte fundamental en la teoría de Relatividad General, es el tensor de Riemann, el cual es una medición de la curvatura en algún punto de la variedad. El tensor de Riemann se define como:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (4.11)$$

**4.1.2 Desviación geodésica.** Sea  $M$  una variedad y  $\Omega = \{\gamma_s(t)\}$  un conjunto de geodésicas que, en las cercanías de un punto  $p$ , son paralelas. Si  $S^\mu$  es perpendicular a  $\gamma_{s1}$  y a  $\gamma_{s2}$  en el punto  $p$ , este vector puede, y en general sucede, que deja de ser perpendicular a ambas curvas lejos del punto mencionado. Las curvas dejan de ser paralelas a medida que se alejan del punto  $p$ : La siguiente figura esquematiza lo anteriormente descrito:

Figura 4.3. Aceleración geodésica. (Penrose, 2007)



Si éstas se alejan, es válido preguntarse que tan rápido lo hacen, aún más, es posible encontrar una expresión para la aceleración con la que se separan, a saber:

$$\frac{D^2 S^\mu}{dt^2} = R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (4.12)$$

en donde  $T^\mu$  es tangente a  $\gamma_s(t)$ . De aquí que el tensor  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  está directamente relacionado con la curvatura de la variedad.

A continuación se presentan algunas propiedades del tensor de Riemann:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (4.13)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (4.14)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.15)$$

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (4.17)$$

A la contracción de  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (4.18)$$

se le llama tensor de Ricci. Y al escalar:

$$R = R_{\lambda}^{\lambda} \quad (4.19)$$

se le llama *escalar de Ricci* o *escalar de curvatura*<sup>5</sup>. La identidad de Bianchi puede escribirse en términos del tensor y escalar de Ricci:

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R \quad (4.20)$$

Al tensor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (4.21)$$

se le conoce como tensor de Einstein. Y cumple con:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \quad (4.22)$$

## 4.2 Teoría de Relatividad General.

La Teoría de Relatividad General es una generalización de la teoría de gravitación de Newton. Ésta puede resumirse en la ecuación para el potencial gravitatorio de (4.23) continuación:

$$\nabla\Phi = 4\pi G\rho$$

donde:  $\Phi$  es el potencial,  $G$  es la constante de gravitación de Newton ( $6.67259 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}$ ) y  $\rho$  es la densidad de masa en la región.

---

<sup>5</sup>  $R$  es de suma importancia en Relatividad General, ya que por su naturaleza escalar, no depende de las coordenadas utilizadas.

Nota: de este punto en adelante se asume que la velocidad de la luz en el vacío  $c = 1$  y que la constante de Planck  $\hbar = 1$  salvo se indique lo contrario.

Einstein, asumiendo como verdadero el hecho que, en una región pequeña del espacio-tiempo un sistema acelerado es indistinguible de un campo gravitatorio<sup>6</sup>, la constancia de la velocidad de la luz y que la curvatura del espacio tiempo es independiente del observador, propuso una ecuación que describe la gravedad. El modelo realizado por Einstein identifica a una variedad diferenciable  $M$ , dotada de una métrica  $g_{\mu\nu}$ , la cual a su vez, es curvada por la energía (o materia), la cual es descrita por un tensor  $T_{\mu\nu}$ , llamado tensor de energía-momentum. Ya que  $M$  está curvada, dicha ecuación contiene al tensor de Ricci. La ley propuesta por Einstein es la siguiente<sup>7</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (4.24)$$

La ecuación anterior se reduce a la (4.23) cuando el campo gravitatorio es débil, estático y las partículas en él son no-relativistas.

Tal como fue descrito al inicio, la finalidad de este trabajo es estudiar la ecuación de Einstein con la constante cosmológica y sus implicaciones físicas. Sin embargo, la expresión (4.24) no la contiene aún. En la siguiente sección se hará una derivación formal de la ecuación buscada.

### 4.1.3. Derivación Langrangiana de la ecuación de Einstein con la constante cosmológica.

*Principio de mínima acción:* Los principios minimales (o maximales) tienen una historia interesante en la física. El primer principio aparece en Alejandría, con Hero (2 siglos a.C.), quien afirmaba que la longitud de la trayectoria de un rayo de luz entre dos puntos, era un mínimo. En el año de 1657 Pierre Fermat modificó el principio de Hero,

---

<sup>6</sup> Éste es llamado Principio de Equivalencia. Einstein 1907. (Riley, et.al., 2006)

<sup>7</sup> Ya que nuestro universo es de 4 dimensiones, tres espaciales y una temporal, se asume que los índices en la ecuación de Einstein, recorren todos los posibles valores de 1 a 4.

diciendo que el rayo de luz tomaba la trayectoria que requería el menor tiempo. Por su parte, en 1747, Mapertuis fue el primero en aplicar un principio minimal en la mecánica, siendo él quien acuñó el nombre de *Principio de Mínima Acción*. Donde la acción es una cantidad que viene dada en unidades de *metros\*energía\*tiempo*. Otros en utilizar principios minimales fueron Gauss y Hertz (Marion y Thornton, 1995).

No obstante lo anterior, la contribución más importante fue dada por Hamilton, quien aseveró que todo sistema dinámico toma la trayectoria  $y(t)$  que minimiza la expresión<sup>8</sup>:

$$S = \int [T(y, \frac{dy}{dx}) - U(y, \frac{dy}{dx})] dt \quad (4.25)$$

En el cual  $T$  es la energía cinética del sistema y  $U$  su energía potencial. La diferencia entre  $T$  y  $U$ ,  $(T - U)$ , se le llama *Langrangiano* para el sistema mecánico. Con este concepto y el cálculo de variaciones tratado en el capítulo 3, se puede derivar la ecuación de Einstein con la constante cosmológica.

Una densidad langrangiana  $\Lambda$ ; es un objeto tal que  $L = \int \Lambda dx$  sea el langrangiano. Como la ecuación de Einstein busca una expresión en términos de un campo tensorial, las variables apropiadas para la densidad langrangiana son campos  $\Phi^i(x)$  y  $\nabla^\mu \Phi^i$  (Carroll, 2004). La acción toma la forma:

$$S = \int \mathcal{L}[\Phi^i(x), \nabla^\mu \Phi^i] d^n x \quad (4.26)$$

con  $n$  siendo la dimensión de la variedad.

En este caso, la variable dinámica es la métrica  $g^{\mu\nu}$ <sup>9</sup>, por lo que se varía el funcional respecto de ésta. El langrangiano propuesto para la ecuación de Einstein con la constante cosmológica es el siguiente (Carroll, 2004):

$$S = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right] d^4 x \quad (4.27)$$

<sup>8</sup> La acción.

<sup>9</sup> Se utilizará la inversa de la métrica  $g_{mn}$ , por simplicidad.

en donde  $|g_{\mu\nu}|=g^{10}$ ,  $\Lambda$  es una constante<sup>11</sup>,  $\mathcal{L}_m$  la densidad langrangiana para la acción de la materia y  $R$  es el escalar de Ricci.

Se quiere encontrar  $g_{\mu\nu}$ , tal que  $S$  sea estacionario, i.e.,  $\delta S = 0$ : Por lo tanto se hace la sustitución de  $R$  por  $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ :

$$S = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right] d^4x \quad (4.28)$$

$$= \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x - \int \sqrt{-g} \frac{2\Lambda}{16\pi G} d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x \quad (4.29)$$

Se varía el funcional respecto de  $g^{\mu\nu}$ , siguiendo un procedimiento análogo al mostrado en el capítulo 3:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left\{ \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x - \int \sqrt{-g} \frac{2\Lambda}{16\pi G} d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x \right\} \\ &= \int \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x + \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \\ &\quad + \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x - \int \frac{2\Lambda}{16\pi G} \delta \sqrt{-g} d^4x + \delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde se denota  $\delta S_m d^4x = \delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x$  y se hace  $\int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = 0$  (Carroll, 2004).

Sustituyendo  $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  (Carroll, 2004) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &\quad + \int \frac{\Lambda}{16\pi G} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \delta S_m d^4x \end{aligned} \quad (4.31)$$

<sup>10</sup> Se asume que  $g_{\mu\nu}$  tiene signatura *lorentziana*, i.e.,  $g < 0$ .

<sup>11</sup> Constante Cosmológica.

ordenando y tomando factores comunes:

$$\delta S = \int \left\{ \frac{1}{16\pi G} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{1}{16\pi G} R g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{16\pi G} g_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4 x \quad (4.32)$$

La condición para que el funcional sea estacionario es  $\delta S = 0$ ; y como  $\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \neq 0$ , se tiene que:

$$\frac{1}{16\pi G} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{1}{16\pi G} R g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{16\pi G} g_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (4.33)$$

Se nombra  $T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ , con lo que la expresión anterior queda:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}} \quad (4.34)$$

Que es precisamente la **ecuación de Einstein con la Constante Cosmológica**.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Éste es el tensor de rango (0; 2); simétrico, más general que puede construirse con la métrica, su primera y segunda derivada, tal que cumpla con  $\nabla_{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 0$  (Wald, 1984)



## **5. Interpretación da la constante cosmológica como energía del vacío**

Una consecuencia cosmológica de la ecuación (4.24), es que predice que el universo eventualmente colapsa, ya que la materia se atrae mutuamente. Esta afirmación contrastaba con lo que Einstein creía, ya que en la época se tenía la concepción que el universo era estático, razón por la cual, introdujo la constante cosmológica  $\Lambda$ : Esta modificación a la ecuación contrarrestaba el fenómeno de atracción.

El presente capítulo trata una de las implicaciones físicas más importantes de la constante  $\Lambda$ , la energía del vacío.

### **5.1 Tensor de Energía Momentum.**

Debido a la naturaleza de las implicaciones de  $\Lambda$ ; se busca una descripción del universo a gran escala. Con este propósito en mente y por simplicidad, se asume que la distribución de materia en el universo puede modelarse como un fluido perfecto, homogéneamente distribuido en el espacio. La densidad de energía y presión de un fluido de materia no relativista, es descrita por el tensor de energía momentum  $T_{\mu\nu}$ ; de conformidad con las componentes siguientes (Roos, 2003):

1. La componente tiempo-tiempo,  $T_{00}$ ; que es la densidad de energía  $\rho$ : Esta incluye contribuciones de la masa y de la energía cinética interna;
2. Las componentes espacio-espacio,  $T_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ; que son componentes del vector de presión  $p$ ; en la dirección  $i$  o bien las componentes del vector de momentum por unidad de área;
3. Las componentes tiempo-espacio,  $T_{0i}$ ; son el flujo de energía por unidad de área;
4. Las componentes espacio-tiempo,  $T_{i0}$ ; que son las densidades de momentum en la dirección  $i$ ;

5. Las componentes restantes,  $T_{ij}$ , que son términos que describen fuerzas como la viscosidad.

Para un observador con velocidad  $U^\mu$ , el tensor de energía-momentum es (Carroll, 2004):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

con  $g^{\mu\nu}$  la métrica. Contrayendo este tensor se tiene (Bonometto, et.al., 2002):

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \quad (5.2)$$

En analogía con la conservación de la energía en un espacio Euclidiano, se tiene:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.3)$$

Es evidente que la densidad de energía es una fuente de gravedad, pero: ¿se puede afirmar lo mismo de la presión? Considere la ecuación de Einstein escrita de la manera siguiente<sup>13</sup> (Carroll, 2004):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (5.4)$$

Contrayendo esta última, se obtiene la Ecuación de Poisson Modificada (Bonometto, et.al., 2002):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (5.5)$$

con  $\Phi$  como el potencial gravitatorio. De aquí se interpreta que la presión del fluido perfecto contribuye a dicho campo. Para describir como la presión se relaciona con la densidad de energía y por lo tanto al fenómeno de la gravedad, se utiliza la ecuación de estado:

$$\omega = \frac{p}{\rho} \quad (5.6)$$

donde  $\omega$  es un número que depende de las condiciones de energía del modelo cosmológico utilizado<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Esta ecuación es equivalente a la ecuación 4.24. La equivalencia se prueba utilizando que  $R=8\pi GT$ . (Carroll, 2004)

<sup>14</sup> Por ejemplo, modelos donde toda la energía del universo es de naturaleza electromagnética, “polvo”, campos escalares, etc. Ver Carroll (Carroll, 2004), capítulo 4.

## 5.2 Energía del Vacío.

Considere un campo escalar<sup>15</sup>  $\Phi$ ; con energía potencial  $V(\Phi)$  y energía cinética  $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$ . Entonces, la acción asociada a este campo sería:

$$S = \int [\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - V(\Phi)]\sqrt{-g}d^4x \quad (5.7)$$

donde, siguiendo un procedimiento análogo al descrito en la sección 1.2, se obtiene:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi)g_{\mu\nu} - V(\Phi)g_{\mu\nu} \quad (5.8)$$

El estado de menor energía (si existe), sería aquel en el cual la energía cinética y la energía de gradiente (Carroll, 2000) fueran nulas:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi = 0 \quad y \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi)g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.10)$$

Ahora bien, si  $\Phi_0$  es tal que  $V(\Phi_0)$  es mínimo, entonces, el tensor de energía-momentum es:

$$T_{\mu\nu} = -V(\Phi_0)g_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

si se denota a  $V(\Phi_0) = \rho_{\text{vacío}}$ , entonces:

$$T_{\mu\nu} = -\rho_{\text{vacío}}g_{\mu\nu} \quad (5.12)$$

Comparando  $T_{\mu\nu} = \rho_{\text{vacío}}g_{\mu\nu}$  con la ecuación 5.1; se identifica:

$$\rho_{\text{vacío}} = -p \quad (5.13)$$

es decir, que la presión es negativa. Esto puede interpretarse como un efecto de “antigravedad”.

En la ecuación de Einstein, (4.24), es el término  $T_{mn}$  describe la energía que curva el espacio. Como el vacío contribuye con una densidad de energía  $-\rho_{\text{vacío}}$ , entonces, el

---

<sup>15</sup> Se utiliza un campo escalar como ejemplo, ya que en general, se busca un campo tensorial que describa al espacio-tiempo. (5.14)

tensor de energía-momentum puede escribirse como la suma de dos contribuciones, una de la materia y otra del vacío (Carroll, 2004):

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{\text{vacío}} g_{\mu\nu}$$

Con este tensor de energía-momentum, ecuación 4.24 queda:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{\text{vacío}} g_{\mu\nu}) \quad (5.15)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 8\pi G \rho_{\text{vacío}} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(M)} \quad (5.16)$$

Si se compara con la ecuación 3.37, se identifica:

$$\rho_{\text{vacío}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (5.17)$$

por lo que  $\Lambda$  es una medida directa de la densidad de energía del vacío.

¿Quién contribuye a la energía del vacío? Una fuente es el potencial  $V(\Phi)$ ; la otra contribución es dada por las energías de punto-cero asociada con fluctuaciones de campos cuánticos.

Para entender a detalle cómo las energías de punto-cero, asociadas a campos cuánticos, contribuyen a  $\rho_{\text{vacío}}$ , se presenta una breve explicación de un sistema armónico simple y su relación con dichos campos, en un espacio de Minkowski<sup>16</sup>.

**5.2.1. Mecánica cuántica.** La mecánica cuántica es una rama de la física que estudia las leyes de la física a escalas microscópicas. La teoría de la Mecánica cuántica fue formulada y desarrollada por Schrödinger y Heisenberg en la segunda mitad de la década de 1920; sus *postulados* básicos son los siguientes (Butkov, 1968):

1. El estado de movimiento de una partícula es descrito por una función de onda  $\Psi(\bar{x}, t)$ , elemento del espacio de Hilbert<sup>17</sup>. Esta función es la solución a la

<sup>16</sup> Un espacio de Minkowski es un espacio de 3 dimensiones espaciales y una temporal, plano. (5.18)

<sup>17</sup> Un espacio de Hilbert es un espacio normado de dimensión in.finita. (Rudin, 1968)

ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi = i\partial\Psi$$

con  $H$  el Hamiltoniano del sistema<sup>18</sup>,  $i^2 = -1$

2. La cantidad:

$$\Psi^* \Psi dV \quad (5.19)$$

donde  $\Psi^*$  es el conjugado complejo de  $\Psi$ , representa la probabilidad de encontrar la partícula en un volumen  $dV$ <sup>19</sup>.

3. Toda *cantidad observable*, o *medible*, es representada por un operador hermitiano<sup>20</sup>  $\pi$ , que actúa sobre  $\Psi$ . El valor esperado de  $\pi$ ,  $\langle \pi \rangle$ , es dado por:

$$\langle p \rangle = \int_{\text{espacio}} \Psi^* p(\Psi) dV \quad (5.20)$$

4. Los *operadores observables* básicos se listan a continuación:

Observable	Operador
Posición x	x
Posición y	y
Posición z	z
Momentum x	$-i\hbar\partial_x$
Momentum y	$-i\hbar\partial_y$
Momentum z	$-i\hbar\partial_z$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck<sup>21</sup>.

5. Cada medida individual del observable  $\pi$ , da como resultado un *eigenvalor* de  $\pi$ :

$$p\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda \quad (5.21)$$

con  $\lambda$  eigenvalor de  $\pi$ .

<sup>18</sup> El Hamiltoniano es la transformada de Legendre del Lagrangiano, es decir:  $H = px - L$ , donde  $p$  es el momentum del sistema. (Carroll, 2004)

<sup>19</sup> De aquí que  $\int_{\text{espacio}} \Psi^* \Psi dV = 1$

<sup>20</sup> Un operador Hermitiano cumple que  $\pi^* = \pi$

<sup>21</sup> En este trabajo  $\hbar = 1$ : Sin embargo, se dejará el símbolo en las ecuaciones.

**5.2.2. Oscilador Armónico Simple.** Considere un sistema que consiste de una partícula de masa  $m$ ; sujeta a un potencial  $V(x)$ ; unidimensional. Por el Teorema de Taylor (Griffiths, 1995):

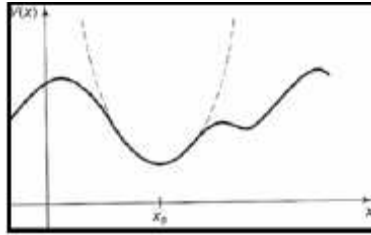
$$V(x) = V(x_o) + V'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}V''(x_o)(x - x_o)^2 + \dots \quad (5.22)$$

con  $x_o$  tal que  $V$  sea mínimo; sea este mínimo  $V(x_o) = 0$ ; además  $V'(x_o) = 0$ ; por lo que:

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_o)(x - x_o)^2 \quad (5.22)$$

Se denota  $\omega^2 = V''(x_o)$ ; como la frecuencia angular. Este potencial describe un oscilador armónico simple, con punto de equilibrio  $x_o$ . De aquí en adelante se selecciona  $x_o = 0$ :

Figura 5.1. Aproximación parabólica (línea punteada) de un potencial arbitrario. (Griffiths, 1995)



Ahora bien, para describir a este sistema desde el punto de vista cuántico, se requiere el Hamiltoniano:

$$H = T - V(x) \quad (5.23)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (5.24)$$

Con el cual, la ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi \quad (5.25)$$

Se definen los operadores siguientes:

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\hbar}{i} + im\omega x\right) \quad (5.26)$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\hbar}{i} - im\omega x\right) \quad (5.27)$$

llamados operador de creación y operador de aniquilación respectivamente. Con estas definiciones se puede escribir el Hamiltoniano como<sup>22</sup> (Carroll, 2004):

$$H = (a_+^\dagger a_- + \frac{1}{2})\omega \quad (5.28)$$

Puede demostrarse que la solución de 4.27 con 4.30, es (Griffiths, 1995):

$$\Psi_n = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} A_n (a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \quad (5.29)$$

con

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!(\omega\hbar)^n}} \quad (5.30)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Con las energías permitidas:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (5.31)$$

Esta última ecuación es importante, porque muestra que existe una energía mínima, o energía de *punto-cero* ( $n = 0$ ):

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (5.32)$$

Existe la energía de *punto-cero* debido al *Principio de Incertidumbre de Heisenberg*, el cual prohíbe que la partícula y posición y momentum nulo<sup>23</sup>.

**5.2.3. Campo cuánticos en espacio de Minkowski.** El problema de la constante cosmológica. Esta sección pretende hacer una breve descripción de un campo cuántico en un espacio de Minkowski, desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Para detalles sobre la derivación de las ecuaciones y para mayor descripción de estas, se recomienda consultar a Carroll (Carroll, 2004), capítulo 9.

---

<sup>22</sup> La operación  $\dagger$  significa: conjugado hermitiano, es decir, la transpuesta del conjugado compuesto:  $a_+^\dagger = (a_+^*)^T$ .

<sup>23</sup> La energía de punto-cero puede interpretarse como que el sistema no deja de "moverse" nunca.

En analogía con un sistema armónico simple, el campo puede ser interpretado como un conjunto infinito de osciladores simples. En virtud de esto, también puede afirmarse que hay un conjunto infinito de energías de punto-cero que tienen que considerarse.

El ejemplo más simple que puede tratarse, es un campo escalar en un espacio plano, sea este  $\Phi$ . Entonces la densidad Langrangiana será (Carroll, 2004):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi \quad (5.33)$$

con  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica en el espacio de Minkowski<sup>24</sup>. Con ésta densidad Langrangiana, puede definirse una densidad Hamiltoniana  $\hat{H}$ , tal que el Hamiltoniano  $H = \int \hat{H}dx$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\Theta^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \quad (5.34)$$

con

$$\Theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi)} \quad (5.35)$$

De aquí que la ecuación de movimiento sea la Ecuación de Klein-Gordon (Carroll, 2004):

$$\square\Phi - m^2\Phi = 0 \quad (5.36)$$

donde  $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ , con solución:

$$\Phi(x^\mu) = \Phi(0)e^{-i\omega t + i\vec{K}\cdot\vec{x}} \quad (5.37)$$

con

$$\vec{K} = (\omega, \vec{k}) \quad (5.38)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector de onda y  $\omega$  la frecuencia angular.

El Hamiltoniano  $H$  puede escribirse como la siguiente integral (Carroll, 2004):

---

<sup>24</sup>  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} a_{+k}^\dagger a_{-k} + \frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(\mathbf{0}) \right\} \omega d^n k \quad (5.39)$$

en el cual  $a_{+k}$  y  $a_{-k}$  son operadores análogos a  $a_+$  y  $a_-$ ,  $k$  es una variable continua y  $\delta^{(n-1)}(\mathbf{0})$  es la delta de Kronecker en  $n-1$  dimensiones y se anula salvo  $k = 0$ .

En la expresión 5.39 el término  $\frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(\mathbf{0}) \omega$  es análogo a la energía de punto-cero,  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ . La integral:

$$\int \frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(\mathbf{0}) \omega d^n k \quad (5.40)$$

diverge salvo se hagan algunas restricciones adicionales sobre el valor máximo de  $k$ ,  $k_{max}$ . Establecido éste  $k_{max}$ , puede demostrarse que la densidad de energía del vacío predicha por esta teoría es (Carroll, 2000):

$$\rho_{vacío}^{(CC)} \sim 10^{112} \frac{erg}{cm^3} \quad (5.41)$$

el cual difiere del valor medido mediante observaciones,  $\rho_{vacío}^{(obs)} \approx 10^{112} \frac{ergs}{cm^3}$ , en unos 120 ordenes de magnitud. A esta discrepancia entre el valor predicho y valor observado, se le conoce como *El Problema de la Constante Cosmológica*.

El caso anterior fue trabajado con un campo escalar simple; otras teorías que consideran campos más complejos predicen de igual manera densidades diferentes a la observada, se presentan algunas de las predicciones (Straumann, 2002):

$$\rho_{vacío}^{(QCD)} \sim 10^{36} \frac{erg}{cm^3} \quad (5.42)$$

$$\rho_{vacío}^{(EW)} \sim 10^{47} \frac{erg}{cm^3} \quad (5.43)$$

$$\rho_{vacío}^{(Pl)} \sim 10^{110} \frac{erg}{cm^3} \quad (5.44)$$



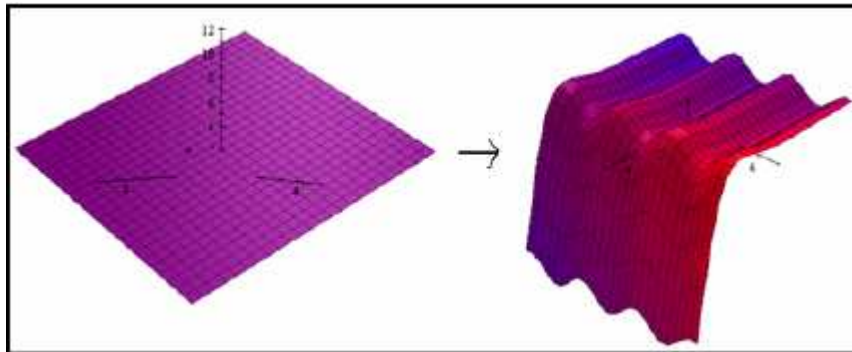
## 6. Efectos cosmológicos: Inflación

En Relatividad General, la cantidad fundamental es la métrica, la cual describe la geometría del espacio tiempo. Pero, ¿qué exactamente sucede con la métrica si el espacio que describe cambia de forma? Para responder esta pregunta, considérese una sección rectangular del espacio plano  $\mathbb{R}^2$ . La distancia  $\Delta s$  entre cualesquiera dos puntos está dada por el teorema de Pitágoras:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 \quad (6.1)$$

donde  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  son diferencias entre coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  de los puntos en cuestión. Si esta sección plana se dobla y expande (o contrae), la rejilla  $x_1 x_2$  original también se dobla y expande con ésta. Esto puede visualizarse en la figura siguiente:

Figura 6.1. Aproximación parabólica (línea punteada) de un potencial arbitrario. (Griffiths, 1995)



Ahora bien, si el espacio se expande con el tiempo, entonces la distancia entre puntos crece con el tiempo y si la expansión es uniforme, la distancia entre dos puntos es:

$$(\Delta s)^2 = a^2(t) [ (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 ] \quad (6.2)$$

donde  $a(t)$  mide el factor de expansión, en un tiempo  $t$ , de las coordenadas. A  $x_1$  y  $x_2$  se les llama *coordenadas comoving*. Sin embargo, en Relatividad General se busca la "distancia" entre dos puntos en el espacio tiempo, es decir, en una variedad de 4 dimensiones, la cual puede expandirse o contraerse.

Si el universo es *isotrópico* y *homogéneo*<sup>25</sup> y además se expande con el tiempo, en analogía con lo anterior, la métrica de éste está dada por<sup>26</sup>:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad \text{con} \quad (6.3)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.4)$$

en donde  $k = -1$  para curvatura negativa,  $k = 1$  para curvatura positiva y  $k = 0$  para espacio plano. A (5.3) se le conoce como Métrica de Robertson-Walker. Al término  $a(t)$  se le llama factor de escala del universo (Liddle, 2003). El escalar de Ricci según esta métrica es:

$$R = 6 \left[ \frac{a''}{a} + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] \quad (6.5)$$

donde las primas indican derivadas temporales.

## 6.1 Parámetros cosmológicos.

Existen ciertos parámetros que se utilizan comúnmente para describir la evolución y comportamiento del universo. Esta sección trata algunos de estos. El factor de escala  $a(t)$  provee una descripción de cómo el universo se expande en el tiempo. Para encontrar la forma correcta del factor de escala, para que la ecuación (5.3) sea solución de la Ecuación de Einstein, hay que considerar el tensor de energía momentum de un fluido perfecto:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \\ T &= -\rho + 3p \end{aligned} \quad (6.7)$$

Utilizando el hecho que  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  se llega a que  $a(t)$  cumple con (Carroll, 2004):

$$-\partial_t \rho - 3 \frac{a''}{a} (\rho + p) = 0 \quad (6.8)$$

y recordando la ecuación de estado  $p = \omega\rho$ , sustituyendo en la ecuación anterior se llega a (Carroll, 2004):

<sup>25</sup> *Isotrópico* significa que el universo es invariante ante rotaciones y *homogéneo* que es invariante ante rotaciones.

<sup>26</sup> Esta métrica es solución de la ecuación de Einstein si el factor  $a(t)$  cumple con ciertas condiciones, las cuales se especificarán en su momento.

$$\frac{\rho'}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{a'}{a} \quad (6.9)$$

Esta ecuación diferencial relaciona a la densidad de energía con la expansión del universo. Ahora bien, si  $\omega$  es constante, (6.9) puede integrarse (Carroll, 2004):

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (6.10)$$

$$\rho \propto a^{-n} \quad (6.11)$$

$$n = 3\omega - 3 \quad (6.12)$$

La ecuación anterior sugiere que la densidad de energía decrece a medida que el universo se expande, siempre y cuando  $\omega > 0$ .

**6.1.1. Ecuaciones de Friedmann.** Para especificar de qué se compone el fluido descrito en (6.9), hay que conocer la ecuación de estado, i.e., conocer a  $\omega$ . Los posibles valores para  $\omega$  dependen de las condiciones de energía del universo, las cuales varían de modelo en modelo<sup>27</sup>. Las condiciones de energía describen qué tipo de contribuciones son posibles, así como relaciones entre éstas.

Si  $\rho_i$  denota la densidad de energía de la fuente  $i$ , la tabla siguiente resume los valores de  $\omega_i$  así como el factor de escala (Carroll, 2000):

Tabla 6.1. Densidades de energía.

$i$	fFuente	$\omega_i$	$n_i$	f.c.
1	materia	0	3	$\rho_m \propto a^{-3}$
2	radiación	$\frac{1}{3}$	4	$\rho_r \propto a^{-4}$
3	curvatura	$-\frac{1}{3}$	2	$\rho_k \propto a^{-2}$
4	vacío	-1	0	$\rho_\Lambda \propto a^0$

<sup>27</sup> Para mayor detalle consultar Carroll capítulo 1 o Hawking and Ellis, capítulo 4.

A medida que  $a(t)$  crece, la densidad de energía de la radiación decrece más rápido que la de la materia. Por lo tanto, si  $a(t) \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow 0$  y  $a(t)$  es siempre creciente, entonces la densidad de energía de la radiación domina en tiempos tempranos, pero a medida que el universo se expande, la energía de la materia domina. Si  $t \rightarrow 1$  entonces la densidad de energía de la materia eventualmente se hace imperceptible y la densidad del vacío ( $\Lambda$ ) domina, ya que ésta es constante:

$$\rho_{\Lambda} \propto a^0 = 1 \quad (6.13)$$

Solamente hace falta encontrar quién es  $a(t)$ : La ecuación de Einstein puede escribirse como:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (6.14)$$

sustituyendo (5.6) en la ecuación anterior y encontrando la componente temporal de la misma, se obtiene:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \text{ y} \quad (6.15)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (6.16)$$

Estas ecuaciones diferenciales son llamadas Ecuaciones de Friedman, cuya solución es el factor de escala  $a(t)$ ; en términos de la densidad de energía. A las métricas que obedecen ésta relación se les conoce como *Métricas Friedmann-Robertson-Walker*.

Cabe mencionar que si  $\rho$  es la densidad de energía total, entonces:

$$\rho = \sum_i(\text{todas las fuentes})\rho_i \quad (6.17)$$

en particular  $\rho_{\Lambda}$  (vacío), entonces las ecuaciones de Friedmann toman en cuenta los efectos físicos relacionados con  $L$ .

El parámetro de Hubble se define como:

$$H \equiv \frac{a'}{a} \quad (6.18)$$

Si se colocan dos partículas a una distancia determinada, el parámetro de Hubble mide cuán separadas estarán luego de un tiempo  $t$  (Carroll, 2004).

Con esta definición la ecuación de Friedmann queda:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (6.19)$$

Einstein buscaba soluciones del tipo  $H = 0$  ( $\dot{a} = 0$ ); es decir, un universo estático. Vemos que ésta condición se obtiene sí en (5.15),  $\rho > 0$  y  $\kappa$  toma valores apropiados, pero en (5.16) esto no es posible para  $\rho > 0$ , por lo que Einstein introdujo la constante  $\Lambda$  para así obtener una densidad negativa y lograr que el factor de escala se anulara.

De manera explícita, las ecuaciones de Friedmann con la constante cosmológica son:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda - \frac{\kappa}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \quad y \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (6.21)$$

a las soluciones de estas ecuaciones se les conoce como *Universo Estático de Einstein*.

Regresando a la ecuación (5.15), existe un valor de densidad que, para cualquier valor de  $H$ , la curvatura  $\kappa$  es cero. Este valor es:

$$\rho_{critica} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (6.22)$$

con esta definición se construye un parámetro útil, el cual es el parámetro de densidad:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{critica}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (6.23)$$

Este parámetro permite escribir la primera ecuación de Friedmann de una manera más compacta:

$$\Omega_{\kappa} \equiv 1 - \Omega = \frac{\kappa}{H^2 a^2} \quad (6.24)$$

Lo importante del parámetro de densidad es que puede obtenerse mediante observaciones, y de esta forma, encontrar una aproximación del valor de la curvatura en este universo. Los posibles resultados son resumidos a continuación (Carroll, 2004):

$$\begin{aligned} \Omega < 1 &\Rightarrow \rho < \rho_{critica} \Rightarrow \kappa < 0 \\ \Omega = 1 &\Rightarrow \rho = \rho_{critica} \Rightarrow \kappa = 0 \\ \Omega > 1 &\Rightarrow \rho > \rho_{critica} \Rightarrow \kappa > 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Mediciones actuales (Carroll, 2004) muestran que  $\Omega \approx 1$ ; lo que sugiere que este universo es plano ( $\kappa = 0$ ). Debido a (5.17), se tiene que:

$$\Omega_{\kappa} = 1 - \sum_{i(\text{todas las fuentes})} \Omega_i \quad (6.26)$$

Como fue discutido con anterioridad, se espera que la densidad de energía de la radiación sea muy pequeña hoy en día, comparada con la densidad de energía de la materia. El parámetro de densidad de la radiación se estima que es del orden de  $\Omega_{radiacion} 5 \times 10^{-5}$  (Carroll, 2000), por lo que se puede escribir el parámetro de densidad de la curvatura de la manera siguiente<sup>28</sup> (Carroll, 2000):

$$\Omega_{\kappa} = 1 - \Omega_M - \Omega_{\Lambda} \quad (6.27)$$

donde  $\Omega_M$  y  $\Omega_{\Lambda}$  son el parámetro de densidad de la materia y del vacío respectivamente.

En la práctica, encontrar directamente los valores de las densidades puede ser complicado, por lo que es conveniente encontrar una manera de extraer la información del factor de escala.

Con este fin, se define el parámetro de *desaceleración*  $q$  (Carroll, 2000):

---

<sup>28</sup> Otras fuentes pueden contribuir; se asume que son valores muy pequeños y que el universo está dominado por la materia. (Carroll, 2000)

$$\begin{aligned}
q &\equiv -\frac{a''a}{a} \\
&= \sum_{i(\text{fuentes})} \frac{n_i - 2}{2} \Omega_i \\
&= \frac{1}{2} \Omega_M - \Omega_\Lambda
\end{aligned} \tag{6.28}$$

**6.1.2. Evolución del factor de escala en presencia de  $\Lambda$ .** Una vez que han sido definidos los parámetros en la sección anterior, es posible describir la evolución del factor de escala, así también, cómo detallar bajo qué condiciones el universo se expande eternamente o bien colapsa. Se asumirá que el parámetro de densidad de la curvatura es:

$$\Omega_\kappa = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda \tag{6.29}$$

y el parámetro de desaceleración:

$$q = \frac{1}{2} \Omega_M - \Omega_\Lambda \tag{6.30}$$

es evidente que si  $\Omega_M > 0$  y la densidad de energía del vacío es no negativa ( $\Lambda > 0$ ); la expansión del universo es acelerada; mientras que una densidad del vacío negativa ( $\Lambda < 0$ ), desacelera la expansión.

Ahora, es preciso saber cómo cambian las contribuciones de las densidades a medida que pasa el tiempo. Esto se consigue de la manera siguiente:

$$\text{Si } \Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i \Rightarrow \frac{\Omega_i}{\Omega_j} \propto a^{-(n_i - n_j)} \tag{6.31}$$

de donde al sustituir valores de la tabla 6.1 se obtiene:

$$\Omega_\Lambda \propto a^2 \Omega_\kappa \propto a^3 \Omega_M \tag{6.32}$$

De esta última ecuación se observa que si  $a \rightarrow 0$ , la densidad de energía del vacío y de curvatura tienden a cero y la de la materia dominaría. Si  $a \rightarrow \infty$ , la densidad de energía de la curvatura y de la materia tienden a cero y la energía del vacío ( $\Lambda$ ) dominaría.

Por lo que si  $\Lambda < 0$  el universo colapsa, ya que  $\Omega_M$  dominaría eventualmente. Por otro lado, si  $\Lambda > 0$  el universo podría seguir expandiéndose, siempre y cuando  $\Omega_M$  no fuese demasiado grande para contrarrestar la expansión, antes que  $\Omega_\Lambda$  sea dinámicamente

importante. Si  $\Lambda = 0$  entonces  $\Omega_M \leq 1$  y el universo se expande eternamente o bien  $\Omega_M > 1$  y el universo colapsa (Carroll, 2000).

Para determinar la "línea entre la expansión eterna y el eventual colapso, se tiene que investigar donde el parámetro de Hubble es nulo y que a su vez cambie de signo (Carroll, 2004):

$$\begin{aligned} 0 &= H^2 \\ &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_M a^{-3} + \rho_\nu + \rho_\kappa a^{-2}) \end{aligned} \quad (6.33)$$

En términos de  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_\kappa$  y  $\Omega_M$  se tiene que la condición para la cual el universo se expande eternamente es:

$$\Omega_\Lambda \geq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \Omega_M \leq 1 \\ 4\Omega_M \cos^{-1}\left(\frac{1-\Omega_M}{\Omega_M}\right) + \frac{4\pi}{3} & \text{si } \Omega_M > 1 \end{cases} \quad (6.34)$$

Por el otro lado, si  $\Omega_\Lambda \gg \Omega_M$  sucede algo muy diferente, la expansión del universo siempre ha sido acelerada y en vez de un Big Bang (singularidad<sup>29</sup>) en el pasado, éste se contrae hasta un radio mínimo y se vuelve a expandir. Las condiciones exactas para que esto suceda son (Carroll, 2000):

$$\Omega_\Lambda \geq 4\Omega_M \cos s^3 \left[ \frac{1}{3} \cos s^{-1} \left( \frac{1-\Omega_M}{\Omega_M} \right) \right] \quad (6.35)$$

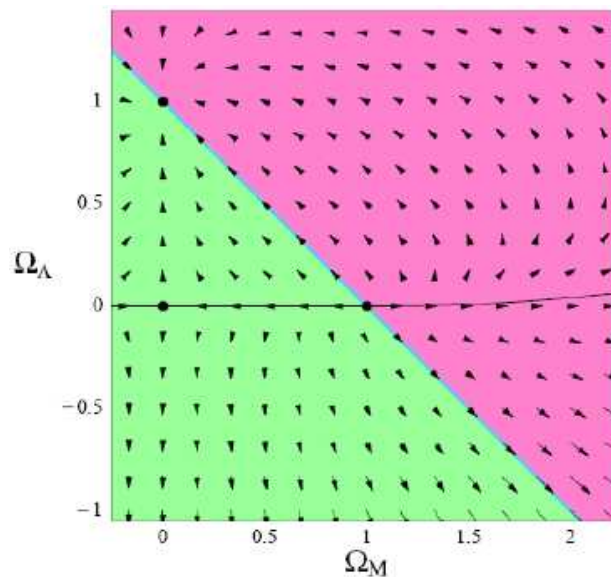
donde  $\cos(sx) = \cosh(x)$  cuando  $\Omega_M < 1/2$  y  $\cos(sx) = \cos(x)$  cuando  $\Omega_M > 1/2$ . Si la relación entre  $\Omega_M = 1/2$  se obtiene un universo estático (Carroll, 2004).

El comportamiento de universos con  $\Omega_\kappa = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M$  se resume en los gráficos siguientes:

---

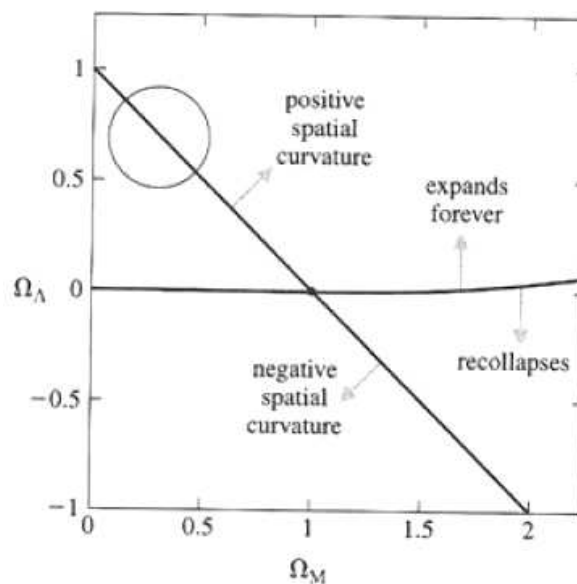
<sup>29</sup> Una singularidad es un punto en donde  $R$ , escalar de Ricci, es indefinido. Ver Carroll, capítulo 5

Figura 6.2. Aproximación parabólica (línea punteada) de un potencial arbitrario. (Griffiths, 1995)



En esta figura las flechas indican la evolución de los parámetros. Se presentan tres puntos fijos  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ , un universo dominado completamente por materia,  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 1)$ , un universo sin materia y dominado por  $\Lambda$  y  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0, 0)$ , un universo vacío, así como la línea  $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$  entre universo con curvatura positiva y negativa (Carroll, 2000).

Figura 6.3. Aproximación parabólica (línea punteada) de un potencial arbitrario. (Griffiths, 1995)



En esta figura se presenta un círculo que encierra el área donde se encuentran los valores medidos mediante observaciones: aproximadamente  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3; 0.7)$ ; así también como la dinámica de este tipo de universo.

Para entender de mejor manera la evolución del factor de escala, es conveniente investigar cómo las contribuciones de las densidades cambian a medida que pasa el tiempo. Con esto en mente, considérese un fotón, con un desplazamiento al rojo  $z_*$ <sup>30</sup>, emitido hace un tiempo  $t_*$ , si el tiempo hoy en día se denota como  $t_o$ ; entonces la edad del universo se puede obtener haciendo tender  $z_* \rightarrow \infty$  (o  $t_* \rightarrow \infty$ ) en la expresión siguiente:

$$t_o - t_* = \int_{\frac{1}{1+z_*}}^1 \frac{da}{aH(a)} \quad (6.36)$$

con

$$H^2(a) = H_o \sum_i \Omega_i a^{-n_i} \quad (6.37)$$

$$H_o = H(t_o) \quad (6.38)$$

e  $i$  incluye al índice  $\kappa$  (Carroll, 2000). En un universo dominado solamente por materia ( $\Omega_M = 1$ ) la edad de éste es (Carroll, 2000):

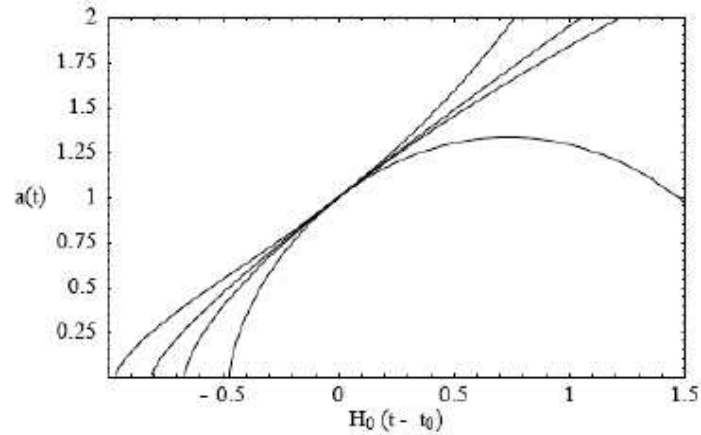
$$t_o = \frac{2}{3} H_o \quad (6.39)$$

La edad del universo crece si  $\Omega_\Lambda$  crece u  $\Omega_M$  decrece; de aquí que existe una relación entre la edad del universo y las contribuciones de  $\Omega_\Lambda$  y  $\Omega_M$ , i.e., la expansión o contracción del universo. En la figura 6.4 se ejemplifica, tomando en cuenta de arriba hacia abajo  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3; 0.7); (0.3; 0); (1; 0)$  y  $(0.4; 0)$ . Además, se observa que la expansión causada por  $\Lambda$ , asumiendo que  $\Lambda > 0$  y  $\Omega_M \rightarrow 0$ , lleva a un universo más antiguo.

---

<sup>30</sup> El desplazamiento al rojo de fotones emitidos a grandes distancias respecto de un observador, son causadas por el efecto de  $a(t)$ : Ver Carroll, capítulo 8. (Carroll, 2004)

Figura 6.4. Relación edad universo factor de escala



Como se a visto ha lo largo de este capítulo, nuestro universo se expande y un candidato a ser la causa física de ésta expansión es la constante cosmológica (positiva); sin embargo, teorías actuales sugieren que esta puede no ser la única razón. Actualmente hay varias hipótesis que afirman que la expansión se puede deber a dimensiones espaciales extras<sup>31</sup>, un potencial escalar que permite que el campo varíe ligeramente<sup>32</sup> o a una quinta fuerza<sup>33</sup> aún por descubrir, la llamada *quinta esencia* (Straumann, 2002).

<sup>31</sup> Ver Ziebach, *A first course in string theory*, para más información sobre dimensiones extra.

<sup>32</sup> El llamado *Potencial de Deslizamiento Lento*.

<sup>33</sup> Las cuatro fuerzas fundamentales son: Fuerte, débil, electromagnética y gravedad. (Griffiths, 1999)



## 7. Métodos de medición de $\Lambda$

A lo largo de los capítulos anteriores se ha estudiado las consecuencias cosmológicas relacionadas con la existencia de una constante cosmológica. Se mencionó que observaciones y estudios recientes muestran que  $\Lambda$  es no negativa y que la densidad de energía relacionada con ésta es del orden de  $10^{-8} \text{erg/cm}^3$ : En el presente capítulo se explicarán dos de los métodos más comunes para medir  $\Lambda$ .

Uno de ellos consiste en obtener mediciones indirectas del parámetro  $\Omega$ , utilizando el corrimiento al rojo de la luz emitida por cierto tipo de supernovas, las llamadas *Ia*. El segundo, consiste en medir las anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de microondas para obtener el parámetro  $\Omega$ .

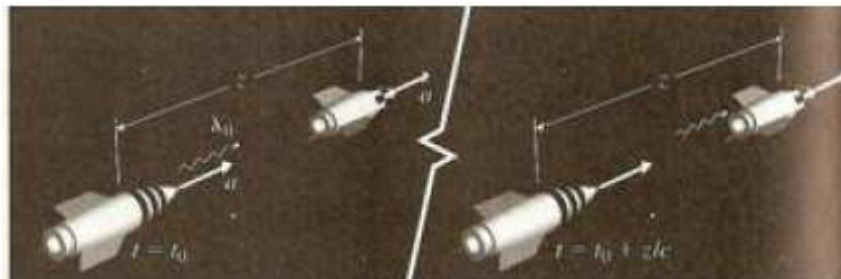
### 7.1. Corrimiento al rojo (red-shift).

Suponga que se tiene una fuente que emite una onda electromagnética y que ha una distancia  $z$  se encuentra un receptor, el cual está en reposo relativo respecto de la fuente, pero ambos (la fuente y receptor) se mueven con una aceleración  $a$  relativa a un observador. Si la longitud de onda emitida es  $\lambda_0$ , el receptor recibe la señal con un corrimiento al rojo igual a<sup>34</sup> (Carroll, 2004):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{az}{c^2} \quad (7.1)$$

Este es el conocido *Efecto Doppler*.

Figura 7.1 Relación entre edad del universo y factor de escala.



<sup>34</sup> Se asume que están lejos de cualquier campo gravitatorio fuerte.

Ahora bien, suponga que la fuente y receptor se encuentran en un campo gravitatorio uniforme, con  $g$  como la magnitud del campo. Por el Principio de Equivalencia, es imposible distinguir entre la aceleración debida al movimiento y la aceleración debida a un campo gravitatorio. Por lo que si la distancia entre fuente y receptor es  $z$ , el corrimiento al rojo percibido por el último es (Carroll, 2004):

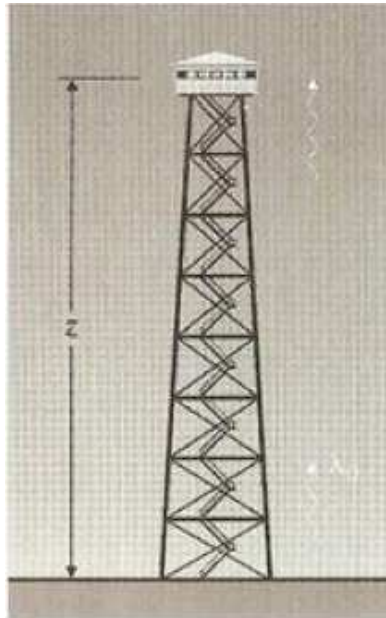
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{gz}{c^2} \quad (7.2)$$

Si  $g = -\nabla\Phi$ ; con  $\Phi$  el potencial gravitatorio (newtoniano), entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} &= \frac{1}{c} \int \nabla\Phi dt \\ &= \frac{1}{c^2} \Delta\Phi \end{aligned} \quad (7.3)$$

a este fenómeno se le conoce como *Efecto Doppler Gravitatorio*. El efecto se esquematiza en la figura siguiente:

Figura 7.2 Efecto Doppler Gravitatorio (Carroll, 2004)



Existe un último efecto por investigar, que es precisamente el utilizado en el método de observación de supernovas Ia, el llamado *Corrimiento al Rojo Cosmológico*. Para encontrar la relación entre frecuencia (o bien longitud de onda) y el factor de escala  $a(t)$ , se utiliza el hecho que las trayectorias de ondas electromagnéticas son geodésicas en el espacio-tiempo, i.e.,  $ds=0$ . La relación entre las frecuencias de una onda emitida en un

tiempo  $t_1$  y la frecuencia de la onda observada en un tiempo  $t_2$ , con el factor de escala es (Carroll, 2004),(Carroll, 2000):

$$z \equiv \frac{\omega_E - \omega_o}{\omega_o} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} - 1 \quad (7.4)$$

a  $z$  se le conoce como *Corrimiento al Rojo*<sup>35</sup>.

La ecuación (6.5) dice que si el universo se expande entonces la razón entre  $\Delta\omega$  y  $\omega$  se hace cada vez más pequeña, es decir, el corrimiento al rojo es cada vez mayor. Esto convierte a  $z$  en un parámetro atractivo para medir la expansión del universo.

## 7.2. Distancia luminosa.

En un espacio curvo, la noción de *distancia* es distinta a la de un espacio euclidiano. Es posible definir varios tipos de distancias en un espacio curvo, una de ellas es la llamada *Distancia Luminosa*, que relaciona a  $z$ ,  $H_o$  y  $\Omega$  con la distancia entre objetos. La ecuación (6.5) puede escribirse como (Carroll, 2004):

$$z_E = \frac{\lambda_o - \lambda_E}{\lambda_E} \quad (7.5)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda; si la medición se hace en tiempo real, entonces  $a_o=1$  y se tiene:

$$a_E = \frac{1}{1 + z_E} \quad (7.6)$$

Ahora, recordando que si  $L$  es la *luminosidad absoluta*<sup>36</sup> y  $F$  es el *flujo de radiación*<sup>37</sup> medido, entonces la razón  $L / F$  es, en un espacio euclidiano, el área de una esfera de radio  $d$  centrada en la fuente, es decir:

<sup>35</sup> (1) Para detalles sobre la deducción de ésta ecuación, consultar Carroll, capítulo 3, (Carroll, 2004).

(2) Se le llama corrimiento al rojo ya que si  $a$  crece entonces la frecuencia de la onda observada es cada vez más grande, i.e. se observa más “roja”.

<sup>36</sup> Medida de radiación emitida por un cuerpo luminoso.

<sup>37</sup> Energía por unidad de área.

$$\frac{L}{F} = 4\pi d^2 \quad (7.7)$$

en otras palabras:

$$d^2 = \frac{L}{F4\pi} \quad (7.8)$$

por lo que si se conoce  $L$  y  $F$  se conoce la distancia entre la fuente y el punto donde se mide  $F$ . En analogía con esto se define la distancia luminosa como:

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{F4\pi} \quad (7.9)$$

En un espacio que se expande, los fotones emitidos por la fuente sufren un corrimiento al rojo  $z$ , por lo que la razón  $L/F$  es (Carroll, 2004):

$$\frac{L}{F} = (1+z)^2 A \quad (7.10)$$

donde  $A$  es el área de la esfera centrada en la fuente<sup>38</sup>. Encontrando explícitamente  $A$  y utilizando la definición de  $H$ ; puede demostrarse que la distancia luminosa es<sup>39</sup>:

$$d_L(z) = (1+z)^2 \frac{H_o^{-1}}{\sqrt{|\Omega_{\kappa o}|}} S_k[\sqrt{|\Omega_{\kappa o}|} \int \frac{dz'}{E(z')}] \quad (7.11)$$

donde

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } k = 1 \\ x & \text{si } k = 0 \\ \sinh x & \text{si } k = -1 \end{cases} \quad y \quad (7.12)$$

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_o} \quad (7.13)$$

el subíndice "o" denota que es una medición en el tiempo presente.

Si se conoce  $d_L$ ,  $H_o$  y la forma explícita de  $H(z)$ <sup>40</sup>, puede resolverse para  $\Omega_{\kappa o}$  y de ésta encontrar el valor de  $\Omega_{\Lambda o}$ , i.e.,  $\Lambda$ :

<sup>38</sup> El área de la esfera no es  $4\pi d^2$  ya que en un espacio curvo ésta debe obtenerse integrando el término  $d^2$  en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

<sup>39</sup> Para detalles de la deducción ver Carroll, capítulo 8, (Carroll, 2004) o bien consultar (Straumann, 2002).

<sup>40</sup> Que se asume como una función potencia.

### 7.3 Supernova tipo Ia: Candelas Estándar.

Las supernovas tipo Ia es un evento en el cual una enana blanca<sup>41</sup> gradualmente absorbe materia de alguna otra fuente, e.g. una estrella, y excede el límite de Chandrasekhar<sup>42</sup> y explota. Ya que este límite es casi una constante universal, de igual manera es la luminosidad emitida por este tipo de supernovas. Las supernovas tipo Ia se caracterizan por la ausencia de líneas espectrales de hidrógeno y una alta presencia de líneas espectrales de silicio. Una vez colapsa la estrella ésta se transforma en hierro y níquel en unos pocos segundos, causando una explosión masiva (Straumann, 2002).

Debido a la su alta luminosidad, las supernovas Ia son ideales para ser utilizadas como candelas<sup>43</sup> y si éstas se encuentran a distancias relativamente cercanas es posible relacionar esta luminosidad con la distancia de luminosidad  $d_L$ , para así encontrar valores de la constante de Hubble, el parámetro de desaceleración o el parámetro de la densidad, entre otras. Estos se consiguen relacionando la *luminosidad* o *magnitud aparente* y *absoluta*<sup>44</sup>.

Si se denota la magnitud aparente  $M$  y la magnitud absoluta como  $m$ ; entonces se tiene<sup>45</sup> (Straumann, 2002):

$$m - M = 5 \log[d_L] + 25 \quad (7.14)$$

El valor de  $m$  puede ser medido mediante observaciones, mientras el valor de  $M$  tiene que ser estimado utilizando mediciones de supernovas relativamente cercanos a de nuestra galaxia, con estos valores puede calcularse  $d_L$  y en consecuencia  $\Omega_{\Lambda_0}$  (si se tiene el valor de  $H_0$ ).

**7.3.1. Resultados de observaciones de supernovas tipo Ia.** En esta sección se mostrará el resumen de resultados obtenidos por dos equipos de investigación: *Supernova Cosmology Project (SCP)* y *High Z Supernova Search Team (HZT)*, para más

---

<sup>41</sup> Una enana blanca es una estrella masiva que colapsa en sí misma hasta un radio determinado y lo único que evita que siga colapsando es la presión de degenerancia. Para más información sobre la presión de degenerancia ver anexo 1.

<sup>42</sup> El límite de Chandrasekhar es aproximadamente 1.4 masas solares. Ver (Griffiths, 1995)

<sup>43</sup> Unidad de intensidad luminosa en alguna dirección determinada.

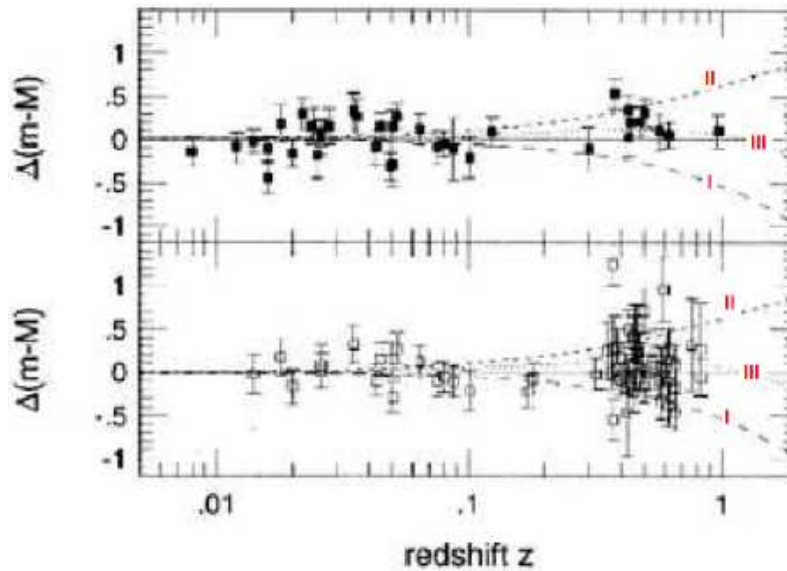
<sup>44</sup> La *luminosidad aparente* es la luminosidad medida en la tierra y la *luminosidad absoluta* es la luminosidad real de la fuente.

<sup>45</sup> 1) para más detalles sobre la deducción de esta ecuación consultar (Straumann, 2002)

2) La distancia luminosa tiene unidades de Mega-parsecs. Un pársec es aproximadamente  $3.086 \times 10^{16}$  mts o bien 3.262 años luz.

información consultar (sitio del proyecto Supernova Cosmology) y (sitio del Proyecto High-z SN). Ambos equipos utilizaron mediciones de la luminosidad de supernovas tipo Ia para encontrar una aproximación numérica para  $d_L$ .

Figura 7.3 Resultados obtenidos por SCP y HZT.



En el gráfico, la abscisa representa valores del corrimiento al rojo, que es equivalente a una medición del intervalo de tiempo entre el suceso de la supernova y la observación, mientras que la ordenada representa la diferencia entre la razón de expansión contra la razón de expansión que tendría en un universo vacío (sitio del proyecto Supernova Cosmology).

La parte superior de la figura muestra los resultados obtenidos por HZT y la parte inferior los de SCP. De estos se observa que ambos obtuvieron resultados similares, el universo tiende a expandirse (ya que  $\Delta(m-M)$  tiende a crecer a medida que  $z$  crece). El gráfico también presenta las predicciones de tres modelos cosmológicos distintos: líneas largas (I) para  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1; 0)$ ; líneas cortas (II) para  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0; 1)$ ; y, líneas punteadas (III) para  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3; 0.7)$ . Esto sugiere que es muy probable que  $\Lambda$  tenga un valor no negativo, que  $M$  sea relativamente pequeña y por lo tanto que el universo sea plano y se expanda.

Ahora bien, con los resultados de las tablas anteriores y suponiendo que, como se ha hecho a lo largo de capítulos,  $\Omega = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$ ; ambos equipos construyeron un diagrama que relaciona a  $\Omega_M$  y  $\Omega_\Lambda$ . Estos diagramas presentan regiones donde es más probable encontrar la combinación  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  para éste universo. Los diagramas son:

Figura 7.4 Constricciones en el plano  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  para los resultados de HZT (Carroll, 2000).

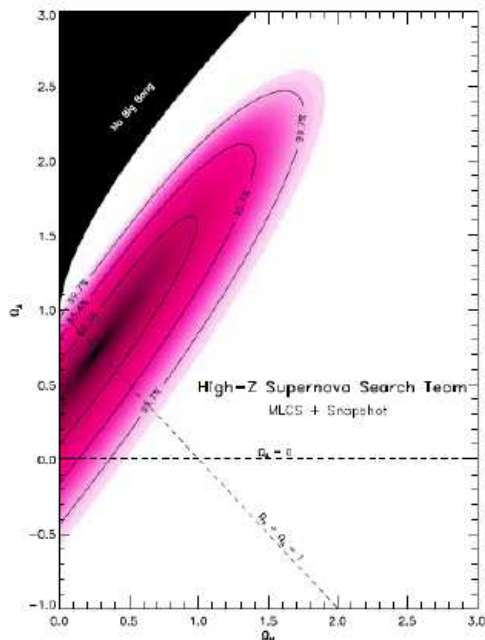
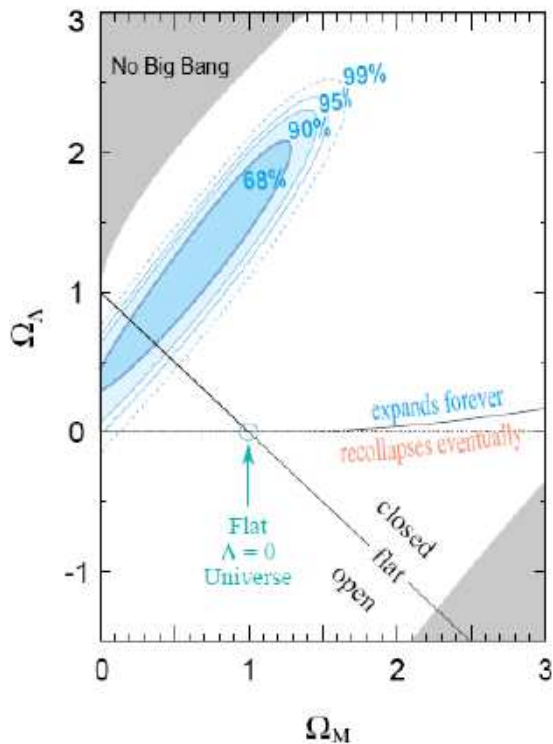


Figura 7.5 Constricciones en el plano  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$  para los resultados de SCP (Carroll, 2000).



De aquí se observa que tanto SCP como HZT llegaron a conclusiones similares<sup>46</sup>. A pesar de la similitud entre resultados entre ambos equipos, existe la posibilidad que varios factores afecten las observaciones y que los resultados no reflejen los verdaderos valores de los parámetros. Algunos de estos factores son el polvo intergaláctico, lentes gravitacionales<sup>47</sup> o los valores de la magnitud de luminosidad absoluta de las supernovas Ia, entre otras. Para mejorar las observaciones y llevar a un mínimo las posibles discrepancias en los valores medidos, se ha propuesto un proyecto llamado SNAR (Supernovae Acceleration Project) que es un satélite que está destinado a observar aproximadamente 2000 SNIa por año. Para más información sobre el proyecto consultar (Straumann, 2002).

#### 7.4. Fondo cósmico de microondas.

El fondo cósmico de microondas es el remanente de radiación emitida por la materia cuando el universo era joven<sup>48</sup>, algunos cientos de años de antigüedad. Mediciones recientes del fondo cósmico de microondas han demostrado que la temperatura de éste tiene pequeñas fluctuaciones del orden de  $10^{-5}$  kelvin. Estas fluctuaciones se pueden modelar utilizando la ecuación siguiente (Carroll, 2000):

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (7.15)$$

donde  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  son *Armónicos Esféricos*<sup>49</sup>.

<sup>46</sup> Hay que recordar que si  $\Omega_M = 1$  entonces el universo es plano y si  $\Omega_M > 0$  el universo acelera su expansión (siempre y cuando  $\Omega_M$  no sea demasiado grande).

<sup>47</sup> Los lentes gravitacionales causan que la luz defleccione su trayectoria original, esto es debido a la curvatura del espacio-tiempo cerca de objetos masivos. Para más información consultar Carroll, capítulo 8, (Carroll, 2004).

<sup>48</sup> El fondo cósmico de microondas es indicio de que el universo nació de un Big Bang.

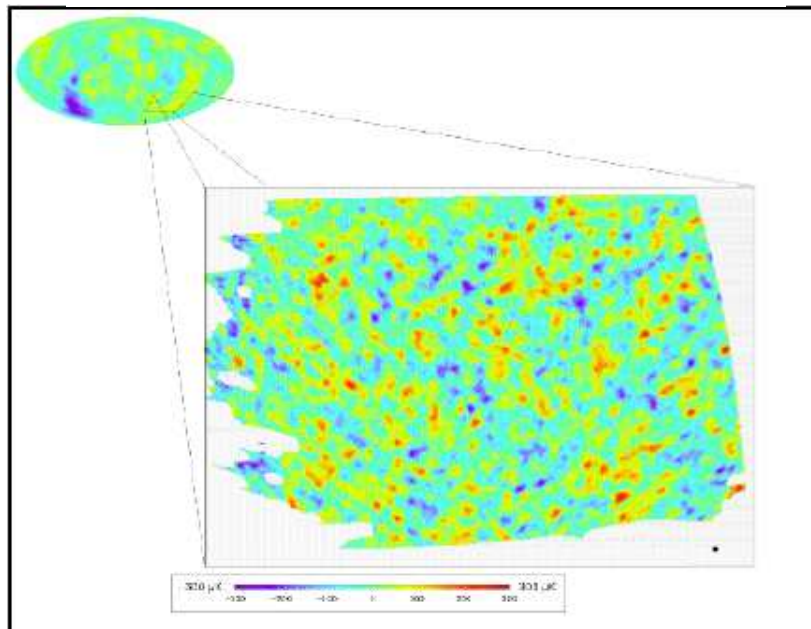
<sup>49</sup>  $Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_m(\cos(\theta)) \exp(im\phi)$  donde  $P_m$  son los polinomios asociados de Legendre

La anisotropía de la temperatura, en un  $l$  determinado (momento multipolo<sup>50</sup>), es expresado por (Carroll, 2000):

$$c_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle \quad (7.16)$$

La figura siguiente muestra una imagen de las anisotropías de la temperatura del fondo cósmico de microondas tomada por el satélite Cobe:

Figura 7.6 Anisotropías en el fondo cósmico de microondas (sitio del proyecto High-z)



Los multipolos pueden relacionarse con la separación angular entre anisotropías de temperatura en la bóveda celeste mediante:

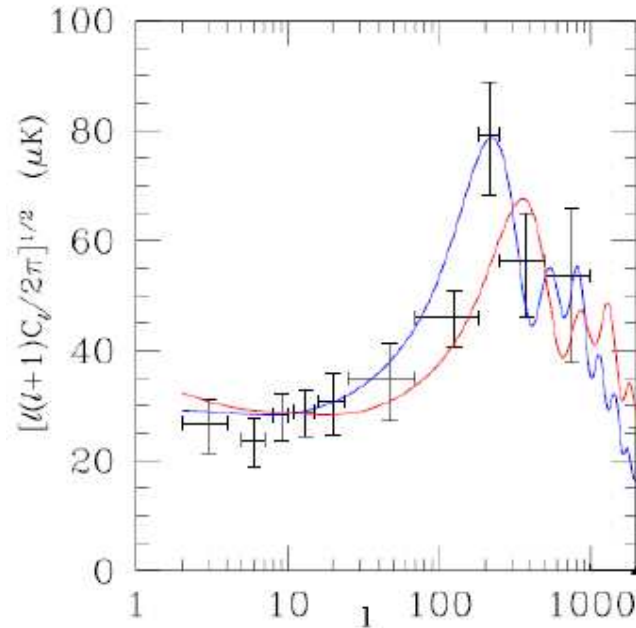
$$\theta_{temp} = \frac{180^\circ}{l}$$

Los coeficientes  $c_l$  dependen de algunos parámetros cosmológicos, por lo que es posible derivar la forma de  $c_l$  si se conocen o se asumen estos parámetros. La figura 7.7 muestra dos funciones  $c_l$ , derivadas utilizando dos modelos cosmológicos distintos. La curva azul, es la predicha por un universo plano y dominado por materia; tiene un máximo alrededor de  $l = 200$ . La curva roja, por su parte, es la predicha por un universo

<sup>50</sup> Los momentos multipolo son los coeficientes de una expansión en series de un potencial generado por fuentes discretas o continuas.

dominado por materia pero con una curvatura negativa; tiene un máximo alrededor de  $l = 400$  (Carroll, 2000).

Figura 7.7 Curvas  $c_l$  predichas por dos modelos cosmológicos diferentes.



Mediante observaciones del fondo cósmico de microondas puede obtenerse el llamado Pico Acústico (Carroll, 2000) que es el momento multipolo en el cual ocurre un máximo en la curva  $c_l$  y esto pues permite compararlo con el predicho por algún modelo cosmológico y así encontrar una aproximación de la geometría del universo. En los años de 1998 y 2003, se lanzó el Experimento Boomerang, en el cual se utilizó un globo aeroestático que sobrevoló la Antártida y el norte de América, para medir las anisotropías de temperatura en el fondo cósmico de microondas.

Figura 7.8 Globo utilizado en el experimento Boomerang (sitio del proyecto High-z Search)



Las dos figuras siguientes muestran los resultados obtenidos por el experimento Boomerang. La primera de éstas es la medición del pico acústico y la segunda muestra las posibles combinaciones de los parámetros  $\Omega_M$  y  $\Omega_\Lambda$ , las áreas más oscuras son regiones con mayor probabilidad.

Figura 7.9 Pico acústico obtenido por el experimento Boomerang.

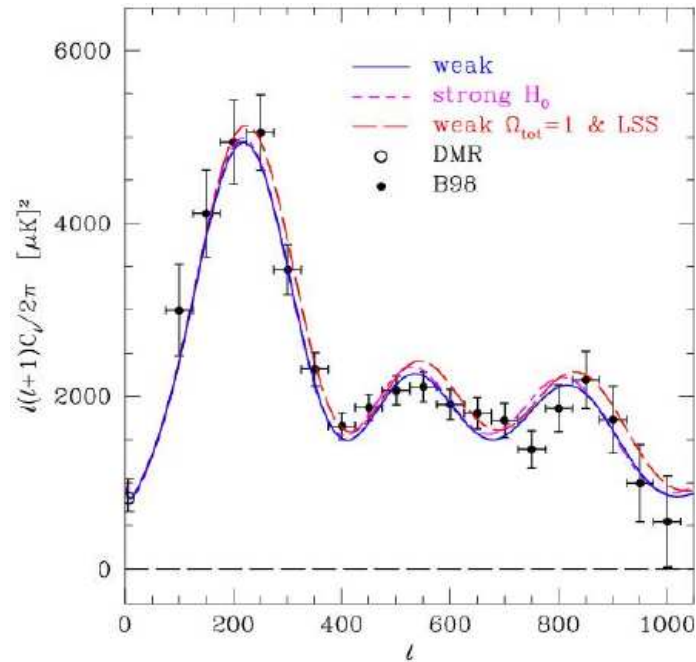
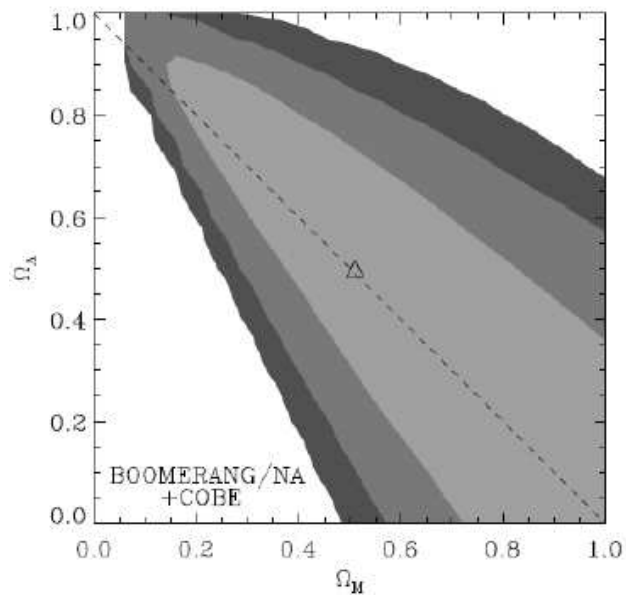
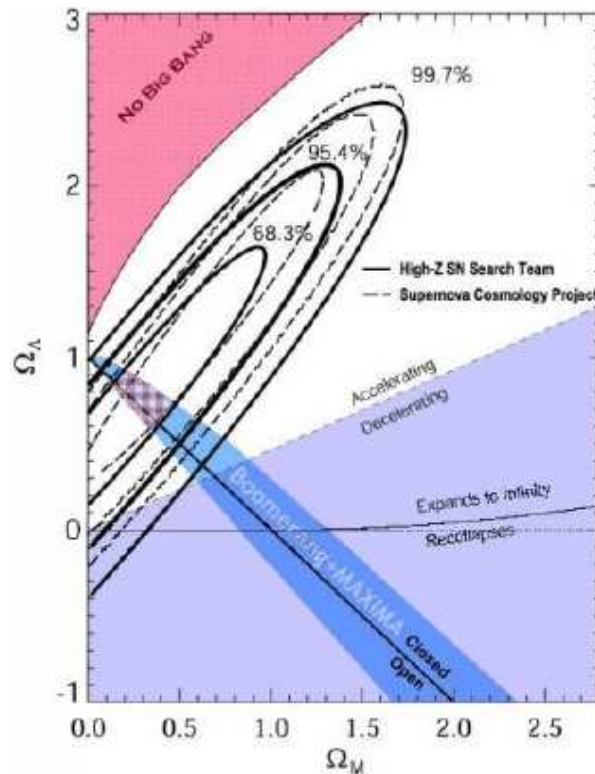


Figura 7.10 Intervalos de confianza para el experimento Boomerang.



Es posible combinar los resultados obtenidos mediante observaciones de supernovas tipo *Ia* con los del fondo cósmico de microondas y así obtener una región en el plano  $\Omega_M - \Omega_\Lambda$  con alta probabilidad de englobar los parámetros de densidad de nuestro universo. El gráfico siguiente muestra la combinación buscada y el intervalo en el cual ambos experimentos coinciden:

Figura 7.11 Combinación resultados de experimentos de observaciones de supernovas y fondo cósmico de microondas (sitio del proyecto Supernova Cosmology)



de donde se observa que  $\Omega_M \approx 0.2$  y  $\Omega_\Lambda \approx 0.8$ , i.e., una constante positiva y una densidad de materia relativamente baja, lo que implica que el universo es plano y se expande.

## 8. Conclusiones

En este trabajo se trató el tema de la constante cosmológica, su primera aparición, consecuencias y su rol en la física.

El tema de la constante cosmológica ha tenido una historia interesante, nace de la necesidad de modificar un modelo que describe la naturaleza, ya que las evidencias observacionales en la época lo requerían. Alrededor de 1917, Albert Einstein introduce un término extra a su ecuación de campo ya que en la época se creía que el universo era estático. Después la constante fue retirada, el solo hecho de haber aparecido fue afortunado, ya que años después reaparece para brindar una explicación de porqué el universo se expande.

Al estudiar los efectos cosmológicos de la constante  $\Lambda$ , se observa que está relacionada con una densidad de energía del vacío, ecuación (4.18), y es precisamente esto lo que inspira a abordar el tema de la constante cosmológica desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos.

Como se mencionó en el trabajo, este enfoque causa problemas ya que dicha teoría predice valores para la constante  $\Lambda$  que difieren en hasta unos 120 órdenes de magnitud. Esto sugiere dos posibilidades, una es que la propia teoría cuántica de campos esté incompleta o la otra es que los métodos utilizados para medir  $\Lambda$  tengan algún tipo de error, como por ejemplo el utilizar ciertos valores de algunos de los parámetros cosmológicos o bien que los modelos cosmológicos que se utilizan para comparar los resultados estén incompletos o sean los incorrectos.

Aunque las mediciones y predicciones realizadas sobre el valor de  $\Lambda$ , o más específicamente, el valor de la densidad de energía (relativa) asociada con  $\Lambda$ ,  $\Omega_\Lambda$ , difieren en magnitud, el signo de ésta sí es de gran importancia. Un valor positivo de  $\Lambda$  implica la existencia de una presión geodésica negativa (una ecuación de estado  $\omega=-1$ ), lo que se manifiesta como una fuerza repulsiva que posiblemente sea la causante de la expansión.

La expansión también depende de la relación entre la densidad de energía  $\Omega_\Lambda$  con  $\Omega_M$ , si la última es mucho más grande que la primera, el universo no se expandiría. Los valores de  $\Omega_M$  y  $\Omega_\Lambda$  obtenidos mediante observaciones de supernovas tipo Ia y del fondo cósmico de microondas, muestran que estos son aproximadamente  $\Omega_M = 0.2$  y  $\Omega_\Lambda = 0.8$ ; es decir, que la densidad de energía del vacío es relativamente más grande que la de la materia, por lo tanto, el universo se expande. Estos resultados también reflejan otra característica importante del universo, que tiene una curvatura aproximadamente de cero, es decir es plano.

Los problemas relacionados con la constante cosmológica son de gran importancia para la física, en especial para aquellas teorías que buscan la unificación de la Relatividad General con la Mecánica Cuántica.

## 9. Bibliografía

Abraham, R. y Marsden, J. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin-Cummings Publishing Company. Segunda edición. 1978.

Bernardus, Stafanus. *The cosmological constant problem, an inspiration for new physics*. Utrecht University. 2006.

Berry, Michael. *Principles of cosmology and gravitation..* Cambridge University Press. 1976.

Bonometro, S., Gorini, V. y Mochella, U. *Modern Cosmology*. Institute of Physics Publishings. 2002.

*Boomerang Experiment*. <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/>

Butkov, E. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publications. Primera edición. 1968.

Carroll, Sean. *The cosmological constant*. Enrico Fermi Institute and Department of Physics. University of Chicago. arXiv:astro-ph/0004075v2.

Carroll, Sean. *An introduction to spacetime and geometry*. Addison Wesley. Primera edición. 2004.

Cuny, Hilaire. *Albert Einstein: The man and his theories*. Souvenir Publishings. 1962

French, A. y Taylor, P. *An Introduction to Quantum Mechanics*. Norton and Company. 1978.

Gelfand, M. y Fomin, S.V. *Calculus of variations*. Prentice Hall. Primera edición. 1963.

Griffiths, David. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice may. 1995.

Griffiths, David. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice may. Tercera edición. 1999.

Hawking, S. y Ellis, G. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press. 1973.

Hawking, Stephen. *A hombros de gigantes, las grandes obras de la física y la astronomía*. Editorial Crítica. Tercera Edición. 2004.

High Redshift Supernova Search. *Supernova Cosmology Project*. Berkeley.  
<http://www.supernova.lbl.gov>

*The High-z SN Search*. <http://cfa-www.harvard.edu/supernova/Highz.html>

Liddle, A. *An introduction to Modern Cosmology*. Wiley. Segunda Edición. 2003.

Nering, Evar. *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Editorial Limusa. Segunda Edición. 1977.

Marion, J y Thornton, S. *Classical Dynamics of particles and systems*. Harcourt College Publishers. Cuarta edición. 1995

Milman, Vitali. *An introduction to functional analysis*. World Eds. 1999.

Munkres, James. *Topology*. Prentice may. Segunda Edición. 2000.

Penrose, Roger. *The road to reality: A complete guide to the laws of the universe*. Vintage Books. Primera edición. 2007.

Riley, F., Hobson, P. y Bence, J. *Mathematical Methods for physics and engineering*. Cambridge University Press. Tercera edición. 1992.

Rindler, Wolfgang. *Essential relativity. Special, General, Cosmological*. Springer-Verlag. Segunda edición. 1977.

Roos, M. *Introduction to cosmology*. Wiley and Sons. Tercera Edición. 2003.

Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill. Segunda edición. 1964

Straumann, Norbert. *On the cosmological constant problems and astronomical evidence for a homogeneous energy density with negative pressure*. Institute of theoretical physics. University of Zurich. Suiza. arXiv:astro-ph/0203330v1.

Wald, Robert. *General Relativity*. University of Chicago Press. 1984

Wasserman, Robert. *Tensors and Manifolds: with applications to mechanics and relativity*. Oxford university Press. Primera edición. 1992.

Zombeck, Martin. *Handbook of space astronomy and astrophysics*. Segunda edición 2003.



# 10. Apéndice

## A. PRINCIPIO DE INCERIDUMBRE DE HEISENBERG

### Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto  $V$  no vacío de elementos llamados vectores, con dos leyes de operación llamadas *adición vectorial* (+) y *multiplicación escalar* ( $\cdot$ ), que satisfacen las siguientes condiciones (Nering, 1977):

- 1) Para dos vectores  $|u\rangle$  y  $|v\rangle$  en  $V$  existe un vector único asociado a la suma  $|u\rangle + |v\rangle$ .
- 2) La adición de vectores es asociativa, si  $|u\rangle, |v\rangle$  y  $|w\rangle \in V$  se tiene  $(|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle)$ .
- 3) Existe un vector neutro, denotado como  $|0\rangle$ ; tal que  $|v\rangle + |0\rangle = |v\rangle$ .
- 4) Para cada  $|v\rangle \in V$  existe un vector único  $-|v\rangle$  tal que  $|v\rangle - |v\rangle = |0\rangle$ : A éste vector se le llama neutro.
- 5) La adición vectorial es conmutativa.
- 6) Para un escalar  $a$  y para todo vector  $|v\rangle$  existe un único vector  $a|v\rangle \in V$ .
- 7) Si  $a$  y  $b$  son escalares, entonces el producto escalar es asociativo  $(ab)|v\rangle = a(b|v\rangle)$ .
- 8) La multiplicación escalar es distributiva respecto de la suma vectorial  $a(|v\rangle + |u\rangle) = a|v\rangle + b|u\rangle$ .
- 9) La multiplicación escalar es distributiva respecto de la suma escalar  $(a + b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$ .
- 10) Existe un escalar denotado como  $|1\rangle$  tal que  $1|v\rangle = |v\rangle$ .

Un espacio vectorial  $V$  se denota como  $(V, +, \cdot, F)$  donde  $F$  es un campo<sup>51</sup>.

### Espacio de Funciones $\Lambda^2$

Ahora se aplicará la maquinaria del álgebra lineal al espacio de funciones, en el cual los vectores serán funciones  $|f(x)\rangle$  con  $x$  complejo, integrales como producto punto y derivadas como transformaciones lineales (Griffiths, 1995).

Considere el conjunto  $\Lambda^2$ , el cual consta de todas las funciones  $|f(x)\rangle$  que cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (\text{A.1})$$

converja.

Éste es un ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita (Milman, 1999), y se define el producto punto de  $f$  y  $g \in \Lambda^2$  como:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx \quad (\text{A.2})$$

con el asterisco denotando conjugado complejo.

En este tipo de espacios las transformaciones lineales son descritas por combinaciones lineales de operadores lineales:

$$\rho = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 \quad (\text{A.3})$$

esto es posible porque un operador lleva una función en  $\Lambda^2$  a otra en el mismo espacio.

Ahora bien, se define que un operador es *Hermitiano* si:

$$\langle \rho f | g \rangle = \langle f | \rho g \rangle \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>51</sup> Generalmente se utiliza a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$

Además a los eigenvectores de  $\mathcal{p}$  se les llama *eigenfunciones* de  $\mathcal{p}$ :

$$\mathcal{p} |f(x)\rangle = \lambda |f(x)\rangle \quad (\text{A.4})$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

### Mecánica Cuántica.

La mecánica cuántica es una rama de la física que estudia las leyes de la física a escalas microscópicas. La teoría de la Mecánica Cuántica fue formulada y desarrollada por Schrödinger y Heisenberg en la segunda mitad de la década de 1920. Sus *postulados* básicos son los siguientes (Butkov, 1968):

- 1) El *estado de movimiento* de una partícula es descrito por una función de onda  $\Psi(\bar{x}, t)$ , elemento del espacio de Hilbert<sup>52</sup>. Esta función es la solución a la ecuación de Schrödinger:

$$H |\Psi\rangle = i\partial_t |\Psi\rangle \quad (\text{A.5})$$

con H el Hamiltoniano del sistema<sup>53</sup>,  $i^2 = -1$ .

- 2) La cantidad:

$$|\Psi\rangle^* |\Psi\rangle dV \quad (\text{A.6})$$

donde  $\Psi^*$  es el conjugado complejo de  $\Psi$  representa la probabilidad de encontrar la partícula en un volumen  $dV$ <sup>54</sup>.

- 3) Toda *cantidad observable* (o medible), es representada por un operador hermitiano  $\mathcal{p}$  que actúa sobre  $\Psi$ . El valor esperado de  $\mathcal{p}$ ,  $\langle \mathcal{p} \rangle$  es dado por:

$$\langle \mathcal{p} \rangle = \int_{\text{espacio}} |\Psi\rangle^* \mathcal{p} |\Psi\rangle dV \quad (\text{A.7})$$

- 4) Los *operadores de observables* básicos se listan a continuación:

donde  $\hbar$  es la constante de Planck.

<sup>52</sup> Un espacio de Hilbert es un espacio normado de dimensión infinita (Rudin, 1968)

<sup>53</sup> El Hamiltoniano es la transformada de Legendre del Lagrangiano, es decir  $H = px - L$ ,  $p$  el momentum del sistema (Carroll, 2004)

<sup>54</sup> De aquí que  $\int \Psi^* \Psi dV = 1$

5) Cada medida individual del observable  $\mathcal{p}$  da como resultado un *eigenvalor* de  $\mathcal{p}$ :

$$\mathcal{p} |\Psi_\lambda\rangle = \lambda |\Psi_\lambda\rangle$$

con  $\lambda$  eigenvalor de  $\mathcal{p}$ .

### Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Considere un observable  $A$  y denótese como  $\langle A \rangle \equiv \int \Psi^* A \Psi dx$ , donde  $\Psi \in \Lambda^2$ . Si la varianza de la distribución asociada a  $A$  es  $\sigma_A^2$  entonces (Griffiths, 1995):

$$\sigma_A^2 = \langle [A - \langle A \rangle] \Psi | [A - \langle A \rangle] \Psi \rangle \equiv \langle f | f \rangle$$

de manera análoga para un observable  $B$ :

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle$$

$$|g\rangle \equiv [B - \langle B \rangle] |\Psi\rangle$$

Por lo tanto, invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Griffiths, 1995):

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

y para un número complejo  $z$ :

$$|z|^2 = \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z) \geq \text{Im}^2(z) = \left[ \frac{1}{2i}(z - z^*) \right]^2$$

entonces si hacemos  $z = \langle f | g \rangle$ ,

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} [\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle] \right)^2$$

Pero

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle [A - \langle A \rangle] \Psi | [B - \langle B \rangle] \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | [A - \langle A \rangle][B - \langle B \rangle] \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | [AB - A \langle B \rangle - B \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle] \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | AB \Psi \rangle - \langle B \rangle \langle \Psi | A \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | B \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle AB \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\langle g | f \rangle = \langle BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

entonces:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle &= \langle AB \rangle - \langle BA \rangle \\ &= \langle [A, B] \rangle \end{aligned}$$

en donde

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

es el conmutador de dos operadores. En conclusión:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2$$

Éste es el famoso *Principio de Incertidumbre de Heisenberg*, el cual se reduce a su forma más conocida:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_p &\geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{ó} \\ \sigma_t \sigma_E &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

donde  $x$ ,  $p$ ,  $t$  y  $E$  son la posición, momentum, tiempo y energía respectivamente.

**B. Tabla de símbolos**

$\partial_\mu$	Derivada respecto de $\mu$
$\mu, \nu, \rho$	Índices griegos denotan componentes 0, 1, 2 y 3
$g_{\mu\nu}$	Métrica de la variedad
$\partial J$	Variación del funcional J
$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	Símbolo de Christoffel-Riemann
$R_{\sigma\mu\nu}^\rho$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu\rho\sigma}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$\nabla$	Laplaciano
$\nabla_\mu$	Derivada Covariante respecto de $\mu$
$T_{\mu\nu}$	Tensor de Energía Momentum
$\square$	D'Alambertiano
$\Lambda$	Constante Cosmológica
$\Omega_\Lambda$	Densidad relativa asociada a $\Lambda$
$\Omega_m$	Densidad relativa asociada a materia
$H$	Parámetro de Hubble