

BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

UN MODELO MATEMATICO DEL CEREBRO

RICARDO ALFREDO CORDON ENGEL

Trabajo de investigación presentado para optar
al grado académico de Licenciado en Matemática

Guatemala

1979

Vo. Bo. :

(f) _____
Doctor Eduardo Suger Cofiño
Asesor

Tribunal:

(f) _____
Doctor Eduardo Suger Cofiño

(f) _____
Doctor Bernardo Morales Figueroa

(f) _____
Doctor Antonio Gillot Labbé

Fecha de aprobación:

Marzo de 1979

A mis padres y
a mis abuelitas

Agradezco sinceramente a todos mis profesores que con su cariño me brindaron sus enseñanzas y amistad durante mis años de estudio universitario, y a todas aquellas personas, que de una forma u otra, contribuyeron a la realización de esta tesis.

CONTENIDO

	Página
Capítulo 1: INTRODUCCION	1
Capítulo 2: ELEMENTOS DE BIOLOGIA	3
2.1 Introducción	3
2.2 Neuronas y sus Propiedades	4
2.2.1 Observaciones Generales	4
2.2.2 Potencial de Membrana	6
2.2.3 Modelo de Huxley y Hodgkin	8
2.2.4 Potencial de Acción	9
2.2.5 Potencial Postsináptico	13
2.2.6 Habituaación y Carácter de las Neuronas	16
Capítulo 3: EL MODELO DE McCULLOCH & PITTS	18
3.1 Neuronas Lógicas	18
3.1.1 Definición e Introducción	18
3.1.2 Ejemplos	21
3.2. Lógica Simbólica y Circuitos Lógicos	25
3.2.1 Lógica Simbólica	25
3.2.2 Ejemplo	28
3.2.3 Conclusión	30
3.3 Otros Aspectos Matemáticos de los Sistemas de Neuronas de McCulloch & Pitts	30

	Página
3.3.1 Formulación Matricial de la Actividad de un Sistema	30
3.3.2 Propiedad Dual de los Siste- mas de Neuronas Lógicas	37
Capítulo 4: SISTEMAS DE NEURONAS CONECTADAS AL AZAR	41
4.1 Sistemas de Neuronas Lógicas con Conexiones Excitadoras	41
4.1.1 Introducción	41
4.1.2 Propiedades de $P(n, \theta, p)$	43
4.2 Sistemas con Conexiones Inhibidoras	57
4.3 Análisis de Series Temporales	59
Capítulo 5: ALGUNOS COMENTARIOS Y CONCLUSIONES	64
Bibliografía	68

INTRODUCCION

Hace unos 2,500 años un eminente científico de aquel entonces escribió a la par que salían a luz los primeros tratados de medicina en la antigua Grecia, las siguientes palabras, tan sorprendentemente actuales: "El hombre debería saber que del cerebro, y no de otro lugar, vienen las alegrías, los placeres, la risa y la broma, y también las tristezas, la aflicción, el abatimiento y los lamentos. Y con el mismo órgano, de una manera especial, adquirimos el juicio del saber, la vista y el oído y sabemos lo que está bien y lo que está mal, lo que es trampa y lo que es justo, lo que es dulce y lo que es insípido, algunas de estas cosas las percibimos por costumbre y otras por su utilidad... Y a través del mismo órgano nos volvemos locos y deliramos, y el miedo y los terrores nos asaltan, algunos de noche y otros de día así como los sueños y los delirios indeseables, las preocupaciones que no tienen razón de ser, la ignorancia de las circunstancias presentes, el desasosiego y la torpeza. Todas estas cosas las sufrimos desde el cerebro." (Hipócrates, "Sobre la Enfermedad Sagrada", traducido por Francis Adams, Enciclopedia Británica Inc.).

Así pues, como se puede deducir del párrafo anterior la comprensión del cerebro ha sido desde hace miles de años una de las mayores ambiciones de la humanidad. En el siglo XX, el avance tecnológico que lo caracteriza ha unido los esfuerzos

de las distintas ramas de la ciencia en un afán por explicar el funcionamiento cerebral.

El lenguaje matemático ha hecho en el último tiempo una notable aportación en el campo de la medicina y la fisiología, pasando para muchos desgraciadamente desapercibida. Su contribución al objetivo anterior es un pequeño pero ilustrativo ejemplo del poder de la matemática.

Es así como hoy pretendo mostrar con sencillas ideas sobre un modelo cerebral lo fácil de la aplicación matemática en el campo de la medicina, cosa que muchos médicos y biólogos de la actualidad, y sobre todo del medio nacional, no han querido aceptar.

Por otro lado, me llenaría de mucha satisfacción si con esta tesis lograra al mismo tiempo enseñar que la comprensión de la matemática no está fuera de lo común, sino que está al alcance de cualquiera que haga un pequeño pero decidido esfuerzo. Bastará aquí con saber lógica proposicional, cálculo diferencial e integral y un poco de álgebra lineal para lograr una buena comprensión.

Antes de finalizar esta introducción, quiero hacer conciencia de que para una mejor evaluación de la efectividad de nuestro modelo, es decir, para medir su aproximado apego con la realidad, debemos echar una pequeña ojeada al conocimiento que sobre este tema tienen la biología, en especial, la química y la física, pues de lo contrario estaríamos caminando sin una meta fija.

CAPITULO 2

ELEMENTOS DE BIOLOGIA

2.1 Introducción

El cerebro es la masa que ocupa la mayor parte de la cabeza y tiene, debido a la gran cantidad de arrugas, un gran área. Este forma, conjuntamente con la espina cordal, lo que se llama el sistema nervioso central y cuyos componentes son:

- 1) Células Nerviosas (Neuronas): Estas son, por supuesto, las componentes más conocidas y objeto principal de estudio en esta tesis. Ellas son las rápidas conductoras de señales por medio de las muchas ramas que poseen. El sistema nervioso central humano contiene probablemente del orden de 10^{10} neuronas. Estas células normalmente no se dividen en la vida adulta, pero sí mueren y como resultado de ello existe un decaimiento gradual de su cantidad a través de la vida, de tal forma que es posible que un hombre adulto tenga aproximadamente la mitad de células nerviosas que cuando nació. El arreglo y orden de ellas en el cerebro es muy complicado, parcialmente específico y genéticamente determinado, aunque pudiese ser al azar. Existe mucha similitud en la estructura de todos los sistemas nerviosos de los animales vertebrados.
- 2) Células Gliales o Neouroglias: Estas juegan un papel estructural al llenar los espacios vacíos que dejan las neuronas. También transportan metabolitos de las fuentes de sangre a las neuronas. Están bastante ramificadas y son capaces de dividirse

en los animales adultos. El cerebro humano contiene aproximadamente 10^{11} neuroglías.

3) Vasos Sanguíneos: Las principales arterias y venas están situadas afuera del sistema nervioso central con pequeñas ramificaciones que lo penetran; son por supuesto, los portadores de sangre que contiene muchos nutrientes y materiales energéticos, incluyendo glucosa y oxígeno.

4) Líquido Cerebroespinal: El cerebro puede ser concebido como un gran saco redondo de gruesas paredes, que son el tejido nervioso. En el interior hay un líquido, el líquido cerebroespinal, que es esencialmente sangre que ha sido filtrada de sus glóbulos blancos y rojos y que contiene muy poca proteína. El interior del cerebro mismo contiene cavidades interconectadas, o ventrículos, que finalmente forman un estrecho hoyo en la espina cordal. El líquido cerebroespinal es secretado en estos ventrículos y desaparece a través del hoyo.

2.2 Neuronas y sus Propiedades

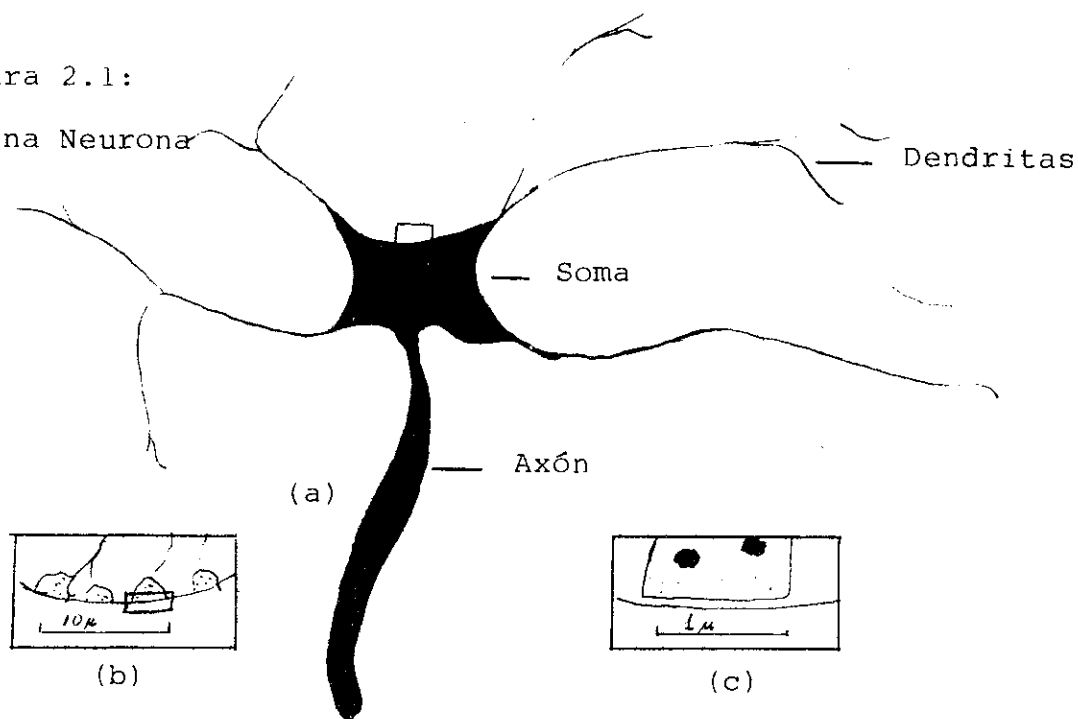
2.2.1 Observaciones Generales

Las neuronas son los bloques sobre los cuales está construido el sistema de señales del cerebro. Comparativamente son al cerebro como los circuitos lógicos, alambres y elementos de la memoria magnética lo son a una computadora digital. Es posible decir algunas cosas acerca de neuronas con la confianza de que sean verdaderas para todas, aunque nuestro conocimiento sobre propiedades generales para este tipo de células no es tan extenso como se quisiera. Esto es especialmente así para aque-

llos parámetros que aparecen en modelos matemáticos. Así pues, no podemos hablar de una típica célula nerviosa, ni siquiera de unas cuantas típicas células nerviosas. Pero, por supuesto, existen un cierto número de propiedades, tal como excitabilidad, desarrollo de un potencial de acción, conexión sináptica, etc., que son generalmente consideradas como características de una neurona y son las que normalmente se idealizan en modelos matemáticos. Además, debemos siempre recordar en lo que sigue de este trabajo y especialmente cuando se considere algún modelo matemático, que la uniformidad de carácter que se da implícitamente a las células es una basta supersimplificación en la mayoría de los casos, y que los valores numéricos que se usan están basados en unas pocas mediciones.

Figura 2.1:

Una Neurona



Las células nerviosas tienen usualmente un núcleo que se llama también Soma o Perikarion dentro del cuerpo de la célula, tal como lo muestra el área negra de la figura 2.1. Las ramificaciones se llaman dendritas y pueden a veces llegar a ser de más de 1 milímetro de largo. Finalmente, la rama gruesa que baja del cuerpo celular se llama Axón, y está recubierto por una sustancia llamada mielina hasta unos 50 μm a 100 μm del Soma, y es la que agiliza la velocidad de las señales. Normalmente, sólo existe un axón que en algunos casos se ramifica en su parte final. En la mayoría de las neuronas este axón termina en otra neurona, pero en el caso de las motoneuronas el axón termina en algún músculo, y de allí su nombre. Las dendritas, juntamente con el soma y la parte inicial del axón dan el área de "input" (área que recibe la señal), mientras que la señal de salida, "output", se conduce a través del axón a una velocidad que varía de 1 a 100 metros/segundo.

2.2.2 Potencial de Membrana

La totalidad de la superficie de la célula está cubierta por una membrana que es aproximadamente 70 Å de grueso. El interior de la célula es negativo con respecto al exterior, en este caso por más o menos -70 mV. Aunque esto no parezca ser una diferencia de potencial muy grande, conduce a un muy alto campo de aproximadamente 10^5 volts/cm. a través de la muy delgada superficie de la membrana.

La membrana tiene una estructura muy complicada y sus

propiedades son bien comprendidas a un nivel fenomenológico, pero no a uno molecular. Es selectivamente permeable a ciertos iones, donde los más importantes son Na^+ , K^+ y Cl^- . Sus aproximadas concentraciones en una motoneurona están mostradas en la tabla No. 1. Nótese que no existe aquí un equilibrio termodinámico, lo que es mostrado por las diferencias de potencial interno-externo, dadas por la última columna, que se necesitan para mantener en equilibrio las relativas concentraciones activas de los iones de acuerdo con la ecuación de Nernst: $V = (RT/zF) \ln C_e/C_i \dots (1)$, donde R es la constante de los gases ideales, z la valencia del ion, F la constante de Faraday, T la temperatura absoluta y C_e y C_i las respectivas concentraciones externa e interna.

TABLA NO. 1

Distribución de los principales iones inorgánicos. Las concentraciones vienen dadas en milimoles por litro (mM/l). Tomado de "El Cerebro", C.U.M. Smith, Editorial Alianza Universidad.

	<u>Externo</u>	<u>Interno</u>	<u>Potencial de Equilibrio (Nernst)</u>
Na^+	460	50	+60 mV
K^+	10	400	-90 mV
Cl^-	540	40	-70 mV

Evidentemente, las concentraciones externa e interna del

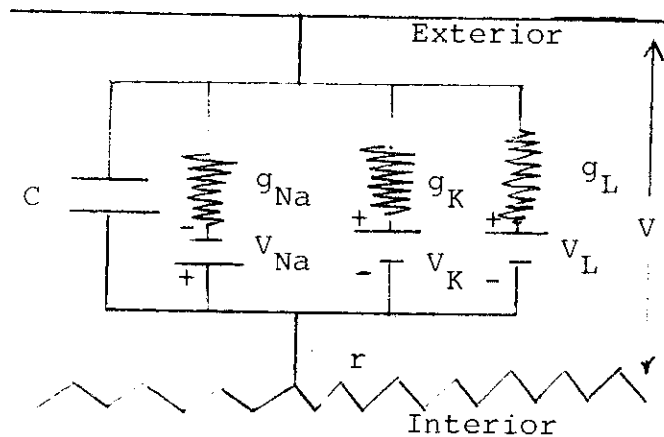
cloro están casi como en el equilibrio, pero existe menos sodio y más potasio adentro para que suceda algo parecido a lo del cloro. Este desequilibrio se mantiene por un proceso libre de energía que es llamado transporte activo de iones de sodio y potasio a través de la membrana. Así pues, no existe un estado de equilibrio, más sí uno estable.

Esta situación de estado estable es llamada estado de descanso o de reposo de la célula nerviosa y, la diferencia de potencial de $V = -70$ mV que existe entre el interior y el exterior de la célula es llamado el potencial de descanso o de reposo de la membrana.

2.2.3 Modelo de Huxley & Hodkin

Un bastante buen entendimiento del potencial de la membrana puede ser obtenido usando un circuito eléctrico equivalente, tal como el de Huxley & Hodkin (1952). Lo bueno de esto es que el desequilibrio inducido por los iones de sodio y potasio puede ser puesto como un par de concentraciones (análogas inversas de resistencia) en paralelo teniendo respectivas fuerzas electromotrices de $V_{Na} = +60$ mV y de $V_K = -90$ mV, tal como se puede obtener por medio de la ecuación de Nernst. El circuito es mostrado en la figura 2.2. con g_{Na} y g_K las respectivas conductividades de Na^+ y K^+ y C la capacitancia de la membrana. Existen otros iones que pueden contribuir a ese desequilibrio, tal como lo muestra la presencia de V_L , pero con efectos tan poco significativos que los vamos a despreciar.

figura 2.2



Usando este circuito podemos deducir que la corriente total de la célula está dada por: $i = C \frac{\partial V}{\partial t} + g_{Na} (V - V_{Na}) + g_K (V - V_K) \dots$ (2). Donde V es el potencial de la membrana y también hemos hecho caso omiso de los efectos de otros iones. En el estado de descanso tenemos que $i = 0$ y $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \implies$

$$V = \frac{g_{Na} V_{Na} + g_K V_K}{g_{Na} + g_K} \dots$$
 (3) para el potencial de reposo de la membrana. Esto demuestra que V es la media de V_{Na} y V_K con pesos de acuerdo a sus respectivas conductividades. Nótese que $V_K > V_{Na}$. Actualmente en el estado de descanso g_K es mayor que g_{Na} de tal forma que V es más cercano a V_K que a V_{Na} .

En las siguientes dos secciones usaremos bastante la ecuación No. 3, pero siempre consciente de que tanto ella como la ecuación No. 2 son explicativas de un fenómeno pero que, teóricamente no podríamos explicarlas a cabalidad, aunque sean parte de la exitosa teoría cuántica de Huxley & Hodgkin.

2.2.4 Potencial de Acción

La discusión en las dos secciones precedentes hacen relación a toda la célula y asumen implícitamente que los contenidos celulares son perfectamente conductores. Este no es el caso, que generalmente debe de ser tomado en cuenta al tratar fenómenos transitorios tales como la conducción de impulsos nerviosos, pero desgraciadamente los objetivos de esta tesis no permiten un tratamiento completo de la conducción nerviosa por lo que nos conformaremos con una corta e introductoria descripción.

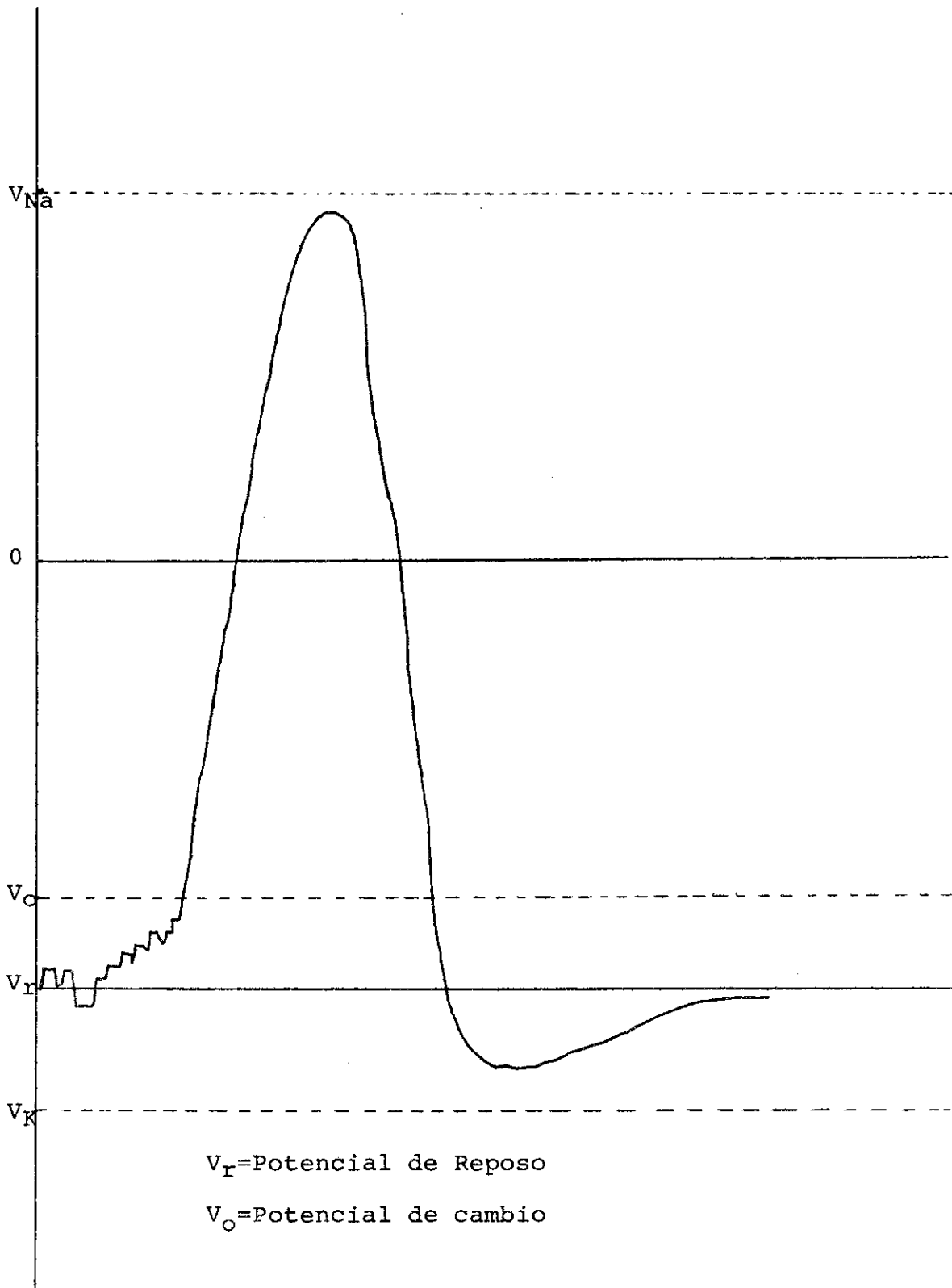
Evidentemente se puede deducir de la ecuación No. 3 que el potencial de la membrana puede ser cambiado por medio de alterar la proporción de g_{Na} a g_K . Como veremos enseguida, esto puede suceder bajo circunstancias naturales, así pues V puede variar de su valor de reposo de $-70mV$. Nos encontramos ahora con los rasgos de la membrana que hacen posible la conducción nerviosa: el hecho que las conductividades de g_{Na} y g_K son dependientes bajo la diferencia de potencial V , es más, no sólo dependen del valor instantáneo de V sino también de valores posteriores.

Como consecuencia de esta dependencia de g_{Na} y g_K de V existe en circunstancias normales un definido valor de cambio, V_0 (aproximadamente entre $-60mV$ y $-50mV$), arriba del cual la interdependencia mutua de g_{Na} y V conduce a un rápido incremento de g_{Na} relativo a g_K con el consecuente cambio de V en el lapso de 1 msec. o menos hasta un valor que se aproxima a V_{Na} . Debido a la peculiar dependencia temporal de las conduc-

tancias de V , mencionada arriba, g_K incrementa también, pero más despacio. Ultimadamente g_K excede de nuevo a g_{Na} , jalando a V de vuelta hacia su valor de reposo. Los cambios de potencial asociados a esta secuencia de eventos son llamados el potencial de acción, ilustrado en la figura 2.3, en la cual la pequeña curva abajo del nivel del potencial de reposo es debido al relativamente lento retorno de g_K de su valor incrementado a su valor de reposo.

Usaremos el ya conocido término depolarizar para indicar un incremento en V e hyperpolarizar para un decrecimiento en V . A la altura del potencial de acción, la membrana está depolarizada hasta aproximadamente 100mV relativo al potencial de reposo. Si un segmento de la membrana de la neurona es depolarizado en esta forma, es fácil ver que induce un flujo de corriente, y así una depolarización en el siguiente segmento. Supongamos un axón arbitrario y partido aproximadamente en una sucesión de segmentos cada uno tal como el mostrado en el circuito de Huxley & Hodgkin y conectados por las resistencias r , que son las resistencias al flujo de corriente a través del interior del axón entre segmentos sucesivos. Entonces, cuando por ejemplo, g_{Na} aumenta en un segmento de tal forma que V a través de él crece desde el valor de reposo, esto causa un flujo de corriente a través del siguiente segmento y lo depolariza. Cuando esta nueva depolarización alcanza el valor de cambio, el g_{Na} tiene su salida de aumento y así el potencial de acción se mueve de segmento en segmento a través del axón.

figura 2.3



Este es el método de propagación del potencial a lo largo de axones y probablemente también a lo largo de dendritas.

2.2.5 Potencial Postsináptico

En cada punto, en el cual el axón se ramifica, el disturbio que es base del potencial de acción, que es frecuentemente llamado impulso, a secas, prosigue a través de las ramificaciones. Finalmente, las ramificaciones axonales terminan en un número de diminutas abultaciones, tal como se puede ver en la figura 2.1b. Estas son llamadas los botones sinápticos. Un aumento de estos botones es mostrado en la figura 2.1c. Allí existe una separación de más o menos doscientos Angstroms entre la membrana del botón y la membrana de la célula sobre la cual se asienta. La separación es llamada la fisura sináptica, y contiene fluído y posiblemente también algunos puentes macromoleculares uniendo el botón con la superficie de la otra célula. La célula a la que pertenece el botón en el lugar de la sinapsis se llama célula presináptica, mientras que la otra se llama célula postsináptica.

Las sinápsis son las regiones en las cuales las señales pasan de una célula a otra. Las mostradas en la figura 2.1 son entre una célula nerviosa presináptica (o células) y una motoneurona postsináptica. La mayoría de las ramificaciones axonales terminan en sinapsis con fibras nerviosas. Estas últimas sinápsis son llamadas usualmente, uniones neuromusculares. Cuando un potencial de acción ha pasado a lo largo del

axón y alcanzado el botón sináptico normalmente para allí y no salta inmediatamente a la célula postsináptica. Por el contrario, estimula el libre paso de ciertas moléculas a la fisura sináptica. Estas están contenidas en el botón sináptico en pequeños paquetes, usualmente llamados vesículos, tal como se muestran en la figura 2.1c, y generalmente se cree que el potencial de acción causa que algunos de estos vesículos descarguen su contenido en la fisura sináptica.

El material activo contenido en los vesículos es llamado el transmisor químico. Su efecto sobre la membrana postsináptica es el de alterar las conductividades de g_{Na} y g_K en la ecuación No. 3 (probablemente también C1) y por lo tanto alterar V . Claramente, si la proporción $g_{Na}:g_K$ se aumenta, la membrana se depolarizará, mientras que si la proporción se disminuye, la membrana se hyperpolarizará. Así pues en el primer caso, V se mueve hacia al valor de cambio V_0 , y en el segundo caso, se aparta de él; de cualquier forma lo que suceda en una sinapsis depende tanto de la naturaleza química del transmisor como de la célula postsináptica. Una célula dada va a tener usualmente muchos inputs sinápticos y como consecuencia su potencial interno V se moverá continuamente arriba y abajo en respuesta al arribo de impulsos a estos botones sinápticos.

El movimiento es también ilustrado en la figura 2.3. Cada arribo de un impulso a un sinapsis que causa una depolarización postsináptica conduce a dibujar uno de los pequeños escalones ala izquierda de la figura. Estos son llamados potenciales ex-

citadores postsinápticos, usualmente abreviados PEPS, porque corren el potencial interno en dirección V_0 , que es el valor de cambio a partir del cual se desarrolla el potencial de acción (excitación de la neurona). Impulsos que causan hiperpolarización conducen a las pequeñas caídas mostradas en la figura 2.3, y son llamados potenciales inhibidores postsinápticos (PIPS). Debido a las constantes de tiempo asociadas con la capacitancia de la membrana (para el caso de una típica motoneurona la resistencia total de la membrana es de más o menos $R=8 \times 10^5 \Omega$ y la capacitancia $C=3 \times 10^{-9} F$ por lo que la constante de tiempo será $RC=2.4 \text{ msec}$), los PEPS y los PIPS no proporcionan en la figura 2.3 pequeñas subidas (escalones) o pequeñas bajadas (caídas) estrictamente verticales.

El cambio de potencial debido a un impulso que llega a una sinapsis no persiste indefinidamente, pues existen enzimas que destruyen el transmisor, de allí que se observe experimentalmente un pequeño decaimiento exponencial de los PEPS y los PIPS.

Para complementar esta sección hablaremos algo sobre la naturaleza química de los transmisores, que dicho sea de paso no es tan bien conocida como se deseara. El más conocido es Acetylcholina ($\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_2\text{N}^+(\text{CH}_3)_3$) y es normalmente un transmisor excitador en las uniones neuromusculares de los vertebrados. También puede ser inhibidor como en el caso de algunos moluscos. Noradrenalina ($\text{HO} \begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_4 \\ \text{OH} \end{array} \text{CHOH} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{NH}_2$) es otro

transmisor común que puede tener tanto acción inhibitoria como excitadora. GABA ($\text{NH}_3^+\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COO}^-$) es otro transmisor inhibitorio en algunos vertebrados, y posiblemente en cualquier otro.

Así pues, hemos obtenido un panorama general de los mecanismos de movimiento de potencial interno de la célula postsináptica bajo la influencia de los impulsos que arriban a la neurona. Cuando el potencial V alcanza su valor de cambio V_0 , la célula desarrolla su propio potencial de acción (se llama también potencial de "arranque" o se dice que la célula "dispara"), tal como se muestra en la figura 2.3. El efecto de los PEPS y los PIPS sobre V es frecuentemente, pero no siempre, aditivo. La adición de los efectos de varios inputs separados espacialmente se llama comúnmente en la literatura "suma espacial". También es evidente que los impulsos que arriban en intervalos de más o menos 1 msec. de separación añaden sus efectos de alguna forma, esto es lo que se llama "suma temporal". Finalmente se observa experimentalmente y se concluye también de la teoría de Huxley & Hodgkin, que luego de que una neurona dispara no puede disparar de nuevo por un corto período (1 msec.), y es relativamente excitable por varios msec. El primero de estos períodos es llamado "período refractorio absoluto", que luego tendrá alguna importancia, y el segundo se llama "período refractorio relativo", que es usualmente ignorado en modelos matemáticos.

2.2.6 Habitación y Carácter de las Neuronas

Como último, antes de terminar con esta parte biológica, vamos a mencionar dos propiedades de las neuronas y que aparecen en la discusión de modelos matemáticos. La primera de ellas es la "habituaación": la repetición continúa de estímulos a un animal resulta en un gradual decrecimiento de la respuesta. El mecanismo exacto de esto no se conoce bien, pero se cree que en parte se debe a la pérdida gradual de respuesta de la neurona luego de repetidos disparos. Un cambio así quizás se deba a un elevamiento del valor de cambio de la célula.

La segunda propiedad es el llamado "carácter de todo o nada": al proceso de disparar de las neuronas se le dice que es de "todo o nada" puesto que, o se alcanza el valor de cambio, en cuyo caso corre a lo largo del axón un potencial de acción con esencialmente la misma amplitud y otras características cada vez, o no se alcanza, en cuyo caso ninguna señal atraviesa al axón. Esta característica es muy parecida a la de las computadoras digitales.

CAPITULO 3

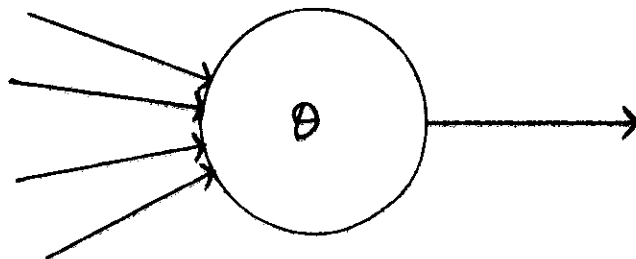
EL MODELO DE McCULLOCH & PITTS

3.1 Neuronas Lógicas

3.1.1 Definición e Introducción

Probablemente, el modelo matemático más conocido para una neurona es el de la neurona lógica, modelo de McCulloch & Pitts, diseñada por ambos autores en 1943. Puede ser representada de la forma siguiente:

Figura 3.1: Representación de Una Neurona Lógica o de McCulloch & Pitts



Observada a simple vista es un objeto que da un output (hacia la derecha) si recibe un input de por lo menos cierto número de otros inputs (de la izquierda). Tiene un valor de cambio θ , que es de nuevo a simple vista, una constante positiva característica de la neurona y que diagramáticamente se representa como en la figura 3.1.

La neurona lógica pretende una idealización de una neurona real y está diseñada de forma tal que pueda ser excitada por medio de inputs (inhibidores se incluirán en un momento) y dar un output cuando se haya excedido el llamado valor de

cambio. Su propiedad más característica es la forma en que su comportamiento depende del tiempo. Se supone que la neurona solamente puede cambiar de estado de acuerdo a una serie discreta de tiempos espaciados igualmente. Así pues, si uno de estos tiempos posibles es t_0 y el siguiente es $t_0 + \tau$, entonces los subsecuentes serán $t_0 + 2\tau$, $t_0 + 3\tau$, ... El output de una neurona dada al tiempo $t = t_0 + p\tau$ arriba como input a todas aquellas neuronas a las cuales esté conectada, al siguiente tiempo de cambio, es decir, en $t = t_0 + (p+1)\tau$. Un sistema de neuronas lógicas se comporta de un modo sincronizado, siendo p_0 y τ el mismo para cada neurona en él.

Para ser más concisos daremos a continuación una definición más formal de una neurona lógica en vez de ir haciendo observaciones:

- 1) Una neurona lógica puede existir en dos estados, que pueden ser llamados activo e inactivo.
- 2) Tienen un output, que está conectado simultáneamente por una o más conexiones a cada una de un cierto número arbitrario de neuronas lógicas o a sí misma. Esto quiere decir que da el mismo output a través de cada conexión.
- 3) Tiene un total de $n_e + n_i$ inputs, n_e excitadores y n_i inhibidores. $n_e, n_i \in \mathbb{N}$.
- 4) Tiene un valor de cambio $\theta \in \mathbb{Z}^+$ (realmente θ pudiese ser

también un real).

- 5) La neurona sólo puede cambiar su estado de acuerdo a una sucesión de tiempos $t=t_0+p\bar{t}$ con $p \in \mathbb{Z}^+$ (frecuentemente se toma $t_0=0$ y $\bar{t}=1$). Cada neurona permanece igual, es decir no cambia de estado en los intervalos $t_0+p\bar{t} \leq t < t_0+(p+1)\bar{t}$, donde t_0 y \bar{t} son constantes iguales para cada una de las neuronas del sistema. Este es el concepto de tiempo cuantizado, que es quizá la propiedad más difícil de aceptar en una neurona lógica.
- 6) Un input particular está activo al tiempo $t_0 + (p+1)\bar{t}$ si la neurona de donde provino estaba activa al tiempo $t_0+p\bar{t}$, es decir que la neurona disparó al tiempo $t_0+p\bar{t}$. Escribiremos N_e para el número activo de inputs excitadores y N_i para el número activo de inputs inhibidores. Evidentemente $N_e \leq n_e$ y $N_i \leq n_i$. N_e y N_i son, por supuesto, función del tiempo.
- 7) Una neurona está activa al tiempo $t_0 + (p+1)\bar{t}$ si sólo si $N_e - \theta N_i \gg \theta$ en ese preciso instante. $\theta \in \mathbb{R}^+$ y es característico de cada neurona. Al igual que θ , n_e y n_i , θ puede variar de una neurona a otra, aunque frecuentemente va a ser interesante de investigar los sistemas en los que se tenga el mismo valor para cada neurona. Realmente, el modelo original pone la condición anterior como $\theta_1 N_e - \theta_2 N_i \gg \theta$, pero podemos dividir entre θ_1 y escribir $\theta = \theta_2 / \theta_1$ y $\theta = \theta / \theta_1$.

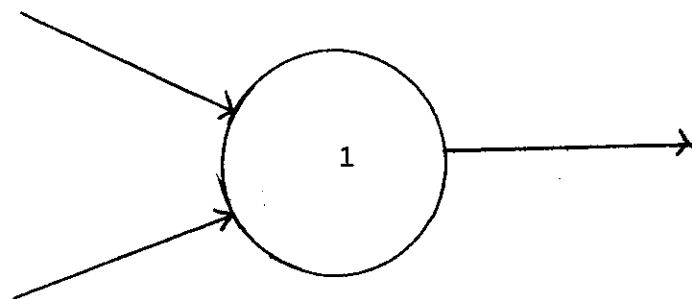
Como podremos deducir de lo anterior una neurona lógica es realmente un aparato binario, pues tiene dos posibles estados. Frecuentemente, es conveniente representar su estado en notación binaria asignando 0 al estado inactivo y 1 al estado

activo. Si, por ejemplo, tuviéramos un sistema con n neuronas podríamos numerarlas de 1 a n y representar el estado del sistema completo por una "eneada" de ceros y unos. Para ser más ilustrativos supongamos que tenemos 3 neuronas de las cuales la 1 y la 2 están activas y la 3 inactiva, entonces el sistema quedará representado por $(1,1,0)$.

3.1.2 Ejemplos

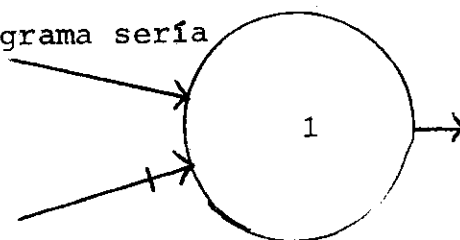
Consideremos ahora unos cuantos simples pero ilustrativos ejemplos usando el símbolo \longrightarrow para un input excitador y \dashrightarrow para un inhibidor.

1) Neurona con $n_e=2$, $n_i=0$, $\theta=1$. Como $n_i=0$ no necesitamos saber el valor de ϕ . El diagrama sería



Como la neurona dispara si $N_e - \phi N_i \geq \theta$ es decir, que para este caso si $N_e \geq 1$ por lo que basta que un input esté activo para que la neurona dispare. Si $\theta=0$ dispararía espontáneamente sin necesidad de actividad de los inputs.

2) Neurona con $n_e=n_i=1$, $\theta=\phi=1$. El diagrama sería

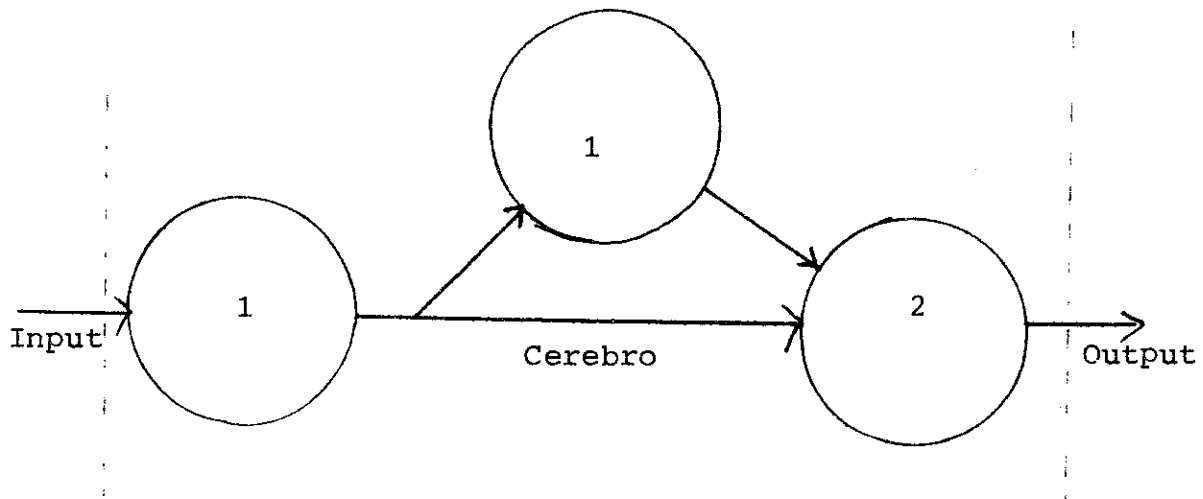


Aquí existen 4 posibilidades dependiendo de la actividad de los inputs:

N_e	N_i	$N_e - \phi N_i$
1	1	0
1	0	1
0	1	-1
0	0	0

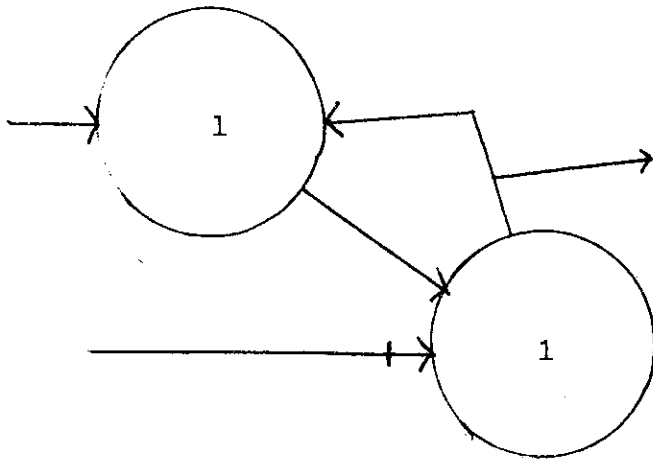
Nótese que aquí la llamada condición de cambio $N_e - \phi N_i$ es sólo satisfecha en el segundo caso. Aquí si hubiésemos puesto $\phi = 0$, la neurona dispararía espontáneamente y pudiera ser apagada solamente si $N_e = 0$ y $N_i = 1$.

3) 3 neuronas todas con conexiones excitadoras, es decir $n_i = 0$.



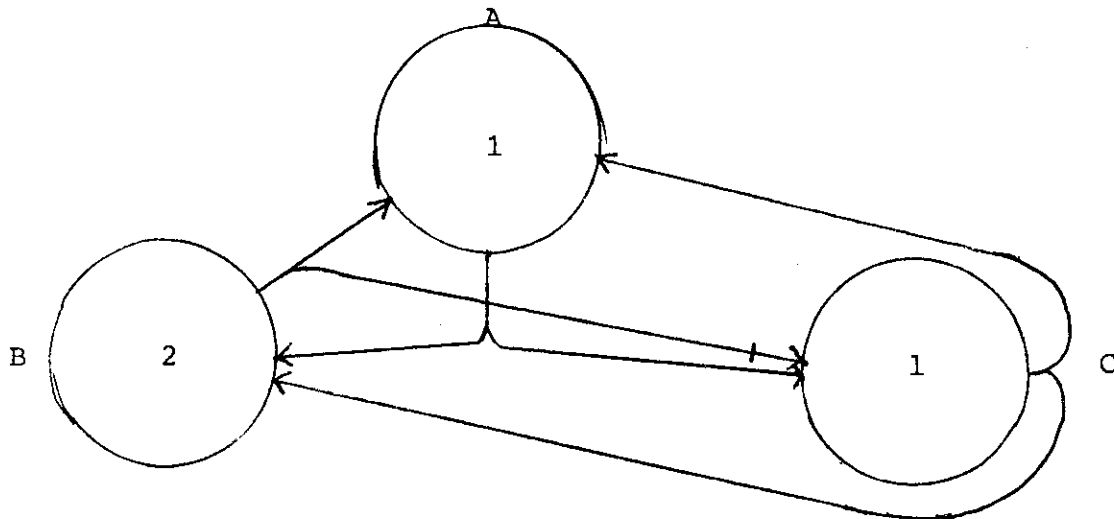
Es fácil ver que obtendremos un input solo en el caso que hayamos tenido 2 sucesivos inputs de la izquierda (cerebro primitivo).

4) Presentamos aquí un sistema re - excitador



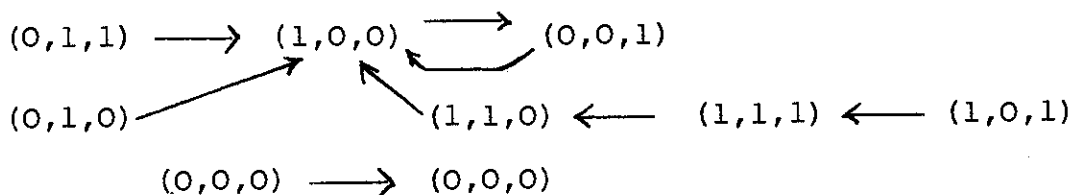
Obsérvese aquí que un simple input a la neurona de arriba mantiene activo el sistema hasta que entre en acción el input inhibitorio de abajo. Este es un típico ejemplo de un proceso de memoria a corto plazo.

5) Sistema cerrado de 3 neuronas



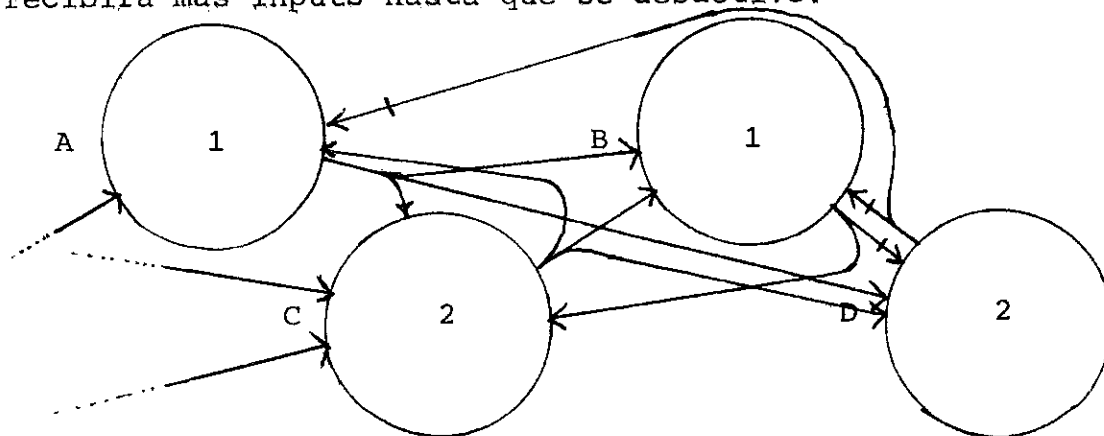
La pregunta aquí es, ¿qué pasa con los subsecuentes estados, una vez dado el estado inicial?, que bien pudo ser obtenido por casual excitación externa, es decir, a una o más de sus neuronas, aunque desde el punto de vista puramente matemático no importa como fué obtenido ese estado inicial.

Para denotar los estados de este sistema usaremos la notación binaria de la que ya hablamos, así: (estado de A, estado de B, estado de C). Notemos que existirán $8 (=2^3)$ estados posibles. Así pues analicemos qué pasa si empezamos en cada uno de ellos:



Obsérvese que en cualquier estado que empecemos con lo menos una neurona activa, el sistema finalmente llegará a oscilar entre la actividad de la neurona A y la neurona C, manteniéndose B inactiva.

6) El siguiente es un ejemplo de un pequeño sistema de 4 neuronas. Se muestra el desarrollo de la actividad del sistema en respuesta a los inputs que proceden de la izquierda. Se supone que el sistema siempre está en total inactividad $((0,0,0,0))$ al recibir los inputs exteriores. Una vez que está activado no recibirá más inputs hasta que se desactive.



- 1) $(0,0,0,0) \longrightarrow (0,0,0,0)$
 2) $(1,0,0,0) \longrightarrow (0,1,0,0) \longrightarrow (0,0,0,0)$
 3) $(0,0,1,0) \longrightarrow (1,1,0,0) \xrightarrow{\quad} (0,1,1,0)$
 4) $(1,0,1,0) \longrightarrow (1,1,0,1) \longrightarrow (0,0,1,0) \longrightarrow 3)$

Este ejemplo concluye nuestra intención de clarificación de la naturaleza de las neuronas lógicas. Es de hacer énfasis que en la realidad tendríamos que tratar con unas 10^{10} neuronas, cada una con aproximadamente 10^4 conexiones, por lo que su tratamiento no se puede realizar en la detallada forma de los ejemplos 5 y 6. La forma de acercamiento para esa cantidad de neuronas se tratará más adelante.

3.2 Lógica simbólica y circuitos lógicos

3.2.1 Lógica simbólica

Se puede deducir un interesante isomorfismo entre las relaciones de input-output de estas neuronas lógicas y las funciones de verdad de la lógica simbólica. Esto atrae mucho la atención y parece que pudiera dar bastante luz sobre el funcionamiento del cerebro humano. Personalmente participo solo parcialmente de lo anterior, puesto que las expresiones lógicas requeridas para describir una neurona son más difíciles que las usuales, especialmente cuando tratamos con sistemas complicados de neuronas. Para una mejor comprensión de lo anterior será mejor que demos un vistazo a este tratamiento.

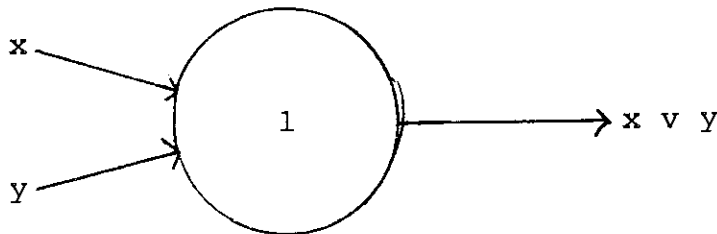
Lo relevante de la lógica simbólica se concierne a la

pregunta, ¿será verdadera una proposición compuesta, dados los valores de verdad (verdadero o falso) de las proposiciones simples? En lógica solo existen 2 alternativas: cualquier cosa es verdadera o falsa. Las proposiciones compuestas están formadas de simples conectadas por medio de símbolos lógicos. A continuación introducimos algunos de estos símbolos y damos su análogo correspondiente en una neurona lógica.

a) "O", la disyunción, denotada por el conectivo lógico "v" tiene los siguientes valores, dadas las proposiciones simples x y y. Se lee x o y.

x	y	x v y	
1	1	1	
1	0	1	1 = verdadero
0	1	1	0 = falso
0	0	0	

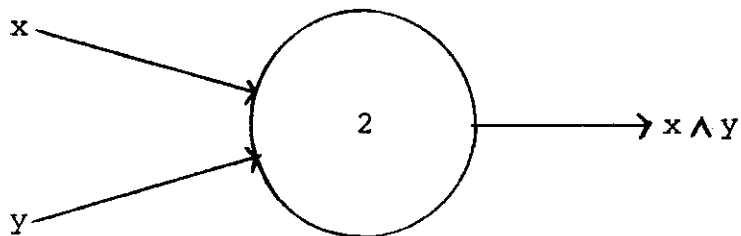
Su análogo en el modelo de McCulloch & Pitts sería:



Nótese que en toda esta sección usaremos la convención de que 1 corresponde a disparar y 0 a no disparar.

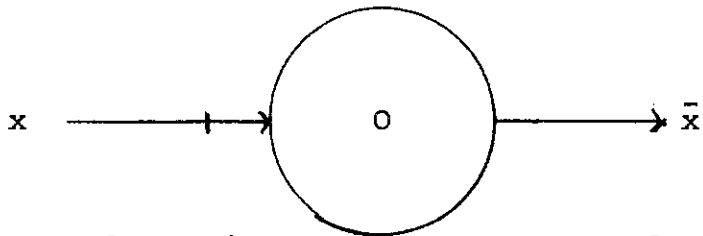
b) "Y", la conjunción, se denota por " \wedge " y se lee x y y, donde tanto x como y son proposiciones simples. La tabla de verdad y su análogo lógico neuronal son:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



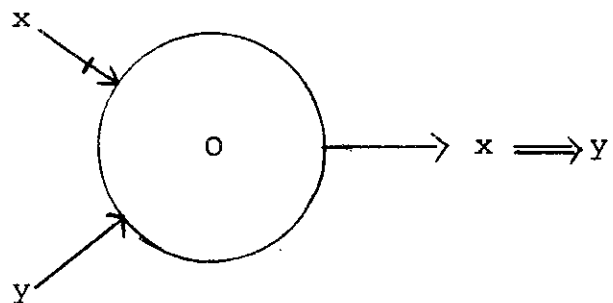
c) "No", la negación, se denota por \bar{x} , donde x es una proposición simple. Su tabla de verdad y su análogo son:

x	\bar{x}
1	0
0	1

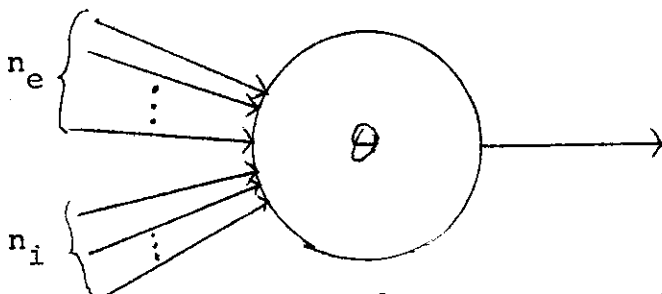


d) "Si...entonces", la implicación, se denota $x \implies y$ donde x , y son proposiciones simples y se lee: si x entonces y . Su tabla de verdad y su análogo son:

x	y	$x \implies y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



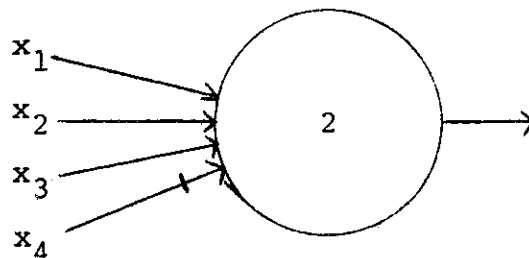
Igualmente cualquier neurona puede ser representada por una función de verdad. Supongamos que tenemos la neurona



que tiene n_e inputs excitadores, representados por x_1, \dots, x_{n_e} y n_i inhibidores dados por $x_{n_e+1}, \dots, x_{n_e+n_i}$. Cualquier especificación de inputs está dada de forma única por medio de dar los valores de verdad de cada x_j (0 o 1) donde $j \in \{1, \dots, n_e+n_i\}$. Van a existir de esa forma $2^{n_e+n_i}$ posibles y diferentes tipos de input total que podremos numerar por $\alpha = 1, 2, \dots, 2^{n_e+n_i}$. Por ejemplo pudiera ser que el input total en el que cada input individual está activo sea el $\alpha = h$. Esto ocurrirá si y solo si el valor de verdad de $X_h = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n_e+n_i}$ es 1. Para cada α habrá un correspondiente X_α . Para algunos α la neurona disparará (pues $N_e - \phi N_i \gg \theta$). Llamemos S al conjunto de ese tipo de α , entonces la expresión $X = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n = \vee_{\alpha \in S} X_\alpha$, donde $n = \text{Card } S$, representa la neurona como una función de verdad.

3.2.2 Ejemplo:

Consideremos la siguiente neurona con $\theta = 1$.



Evidentemente la neurona disparará si cualquiera 2 de sus in-

puts entre x_1, x_2 y x_3 está activo y x_4 inactivo o si x_1, x_2 y x_3 activos independientemente de que x_4 lo esté o no. Esto da un total de 5 inputs que causarían que la neurona dispare. Los numeraremos del 1 al 5, con correspondiente X_i :

$$X_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$X_2 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$$

$$X_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4$$

$$X_4 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$$

$$X_5 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$$

$$\implies X = X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee X_5$$

$$= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \dots \dots \dots (a)$$

representa la función de verdad de la neurona anterior, y es equivalente a escribirla de la forma más simple

$$X = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee [(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)] \wedge \bar{x}_4 \dots \dots \dots (b)$$

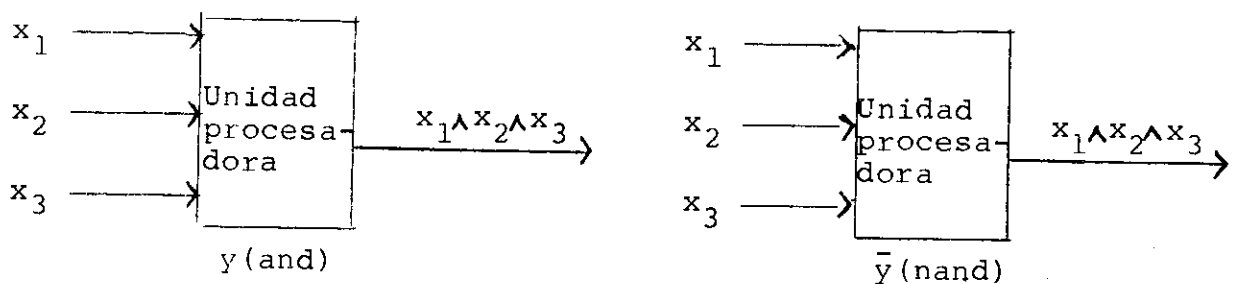
Nota: para demostrar que ambas expresiones son equivalentes basta con realizar la tabla de verdad para la proposición $(a) \iff (b)$ y notar que obtendremos una tautología, es decir que dados cualesquiera valores para x_1, x_2, x_3 y x_4 siempre vamos a obtener verdadero (1). Recordemos que la tabla de verdad para la doble implicación es:

x	y	$x \iff y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

3.2.3 Conclusión

Así pues, hemos establecido el isomorfismo para neuronas simples, pero de una forma parecida sería posible extenderlo para sistemas de neuronas utilizando complicadas expresiones lógicas.

De igual forma pudiésemos trabajar el comportamiento de una neurona, o de un sistema de ellas con la ayuda de una computadora digital, que en muchos casos tienen estandarizado ciertas funciones lógicas. Un ejemplo de ello son las siguientes gráficas:



Ahora bien, si estamos trabajando un sistema es natural que el output de todas las neuronas del sistema este sincronizado. Para ello debemos utilizar un reloj maestro multivibrador conectado a la computadora.

3.3 Otros aspectos matemáticos de los sistemas de neuronas de McCulloch & Pitts

3.3.1 Formulación matricial de la actividad de un sistema

Hemos visto en los ejemplos 5 y 6 de la sección 3.1.2 que el estado actual de un sistema puede ser convenientemente

representado como vector, teniendo ceros y unos en cada una de sus columnas. La condición de cambio para una neurona lógica contiene a la expresión $N_e - \theta N_i$ que está relacionada linealmente a este vector y además, debido a la actividad de los efectos de los inputs que llegan a una neurona particular, el desarrollo de la actividad en un sistema puede ser escrito en forma matricial. Daremos ahora una simplificada formulación matricial aplicable a un sistema de n neuronas lógicas con inputs exteriores de m neuronas. Si asumimos que $t=0$ entonces tendremos:

1) Un vector n -dimensional $x(0)$ con todos sus elementos ceros o unos, llamado el vector inicial. Por conveniencia, tomaremos este tanto como cualquier otro vector que mencionemos, como un vector columna. Van a existir entonces 2^n posibles vectores iniciales.

2) Un vector fijo n -dimensional θ , llamado el vector de cambio, con coordenadas $\theta_i \in \mathbb{Z}^+$, $\forall i=1,2,\dots,n$

3) Un operador $ca: \mathbb{R}^n \longrightarrow (\{0,1\})^n$

$$v \longmapsto ca(v) \quad \} \\ ca(v)_i = 1 \text{ si } v_i \gg \theta_i, = 0 \text{ si } v_i \leq \theta_i$$

4) Una sucesión de vectores m -dimensionales $s(t)$ con $t=0,1,2,\dots$, llamados los vectores de entrada externa. Nótese, que sin perder generalidad, podemos tomar $t_0=0$ y $T=1$ (Ver sección 3.1.1)

5) Una matriz $n \times n$ fija, C , con elementos c_{ij} , llamada la matriz de conexión.

6) Una matriz $n \times m$ fija, Q , con elementos q_{ij} , llamada la

matriz de entrada externa ($m \gg 0$).

7) Una regla de asignación, que al tiempo t le hace corresponder $x(t) = ca \left[Qs(t-1) + Cx(t-1) \right]$, para generar una sucesión de vectores n -dimensional a partir del vector inicial $x(0)$, pues estamos interesados en la relación entre $x(t)$ y $x(0)$. Si el sistema no tiene inputs de entrada externa, es decir si $m=0$ o si $\forall t \ s(t)=0$, entonces $x(t) = (ca(C))^t x(0)$.

Observaciones: Note que $x_i(t)=1$ si y solo si

$$\sum_{j=1}^m q_{ij} s_j(t-1) + \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k(t-1) \gg \theta_i$$

Este es exactamente el tipo de condición de cambio de McCulloch & Pitts para la neurona i si recibe inputs de la neurona k en

la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} c_{ik} > 0 & \implies \exists c_{ik} \text{ inputs excitadores} \\ c_{ik} = 0 & \implies \nexists \text{ inputs} \\ c_{ik} < 0 & \implies \exists -\phi^{-1} c_{ik} \text{ inputs inhibidores} \end{array}$$

El $-\phi^{-1}$ se debe a que los inputs inhibidores activos (N_i) están multiplicados por el factor $-\phi$ al realizar la suma de la condición de cambio ($N_e + (-\phi)N_i \gg \theta$).

Los elementos q_{ij} de la matriz Q deben de ser intrepretados igualmente, en términos de inputs a la neurona i , provenientes de la neurona de entrada externa j . Es de notar que ϕ no apareció para nada en toda la formulación matricial y puede ser tomado como $\phi=1$ o algún otro valor, si existe, y es el que divide todos los coeficientes negativos en las matrices C y Q . Así pues, los incisos 1)7) descritos anteriormente

dan una definición propia de un sistema de neuronas lógicas, y pudiésemos tomarlo como base para nuestra teoría, en vez de la ya dada en la sección 3.1.

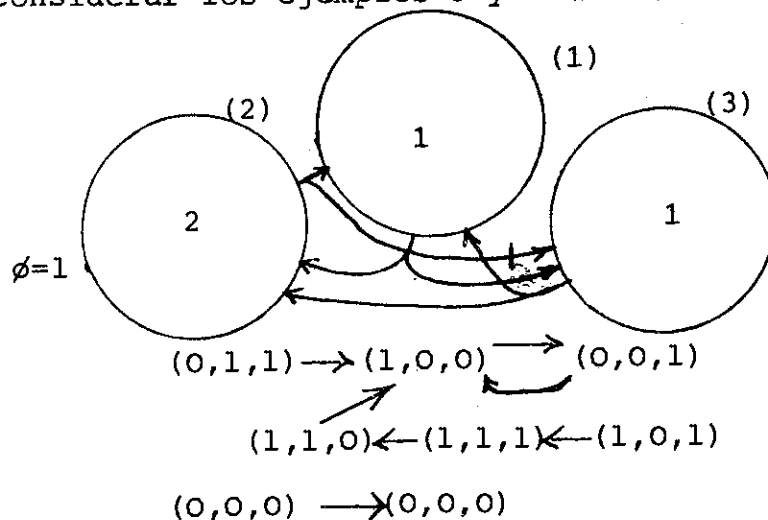
También debemos de observar el carácter Markoviana de los sistemas de neuronas de McCulloch & Pitts, pues $x(t)$ depende directamente de $x(t-1)$. Toda la memoria de estados previos es de importancia nada más hasta el punto en que han afectado el estado inmediatamente anterior.

Finalmente volvamos a considerar los ejemplos 5 y 6 de la sección 3.1.2.

Ejemplo 5: Recordemos

Nótese que

$$\theta_1 = \theta_3 = 1 \text{ y } \theta_2 = 2$$



$$\begin{aligned} \implies & C_{11}=0 & C_{12}=1 & C_{13}=1 \\ & C_{21}=1 & C_{22}=0 & C_{23}=1 \\ & C_{31}=1 & C_{32}=1 & C_{33}=0 \end{aligned}$$

$$\implies C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

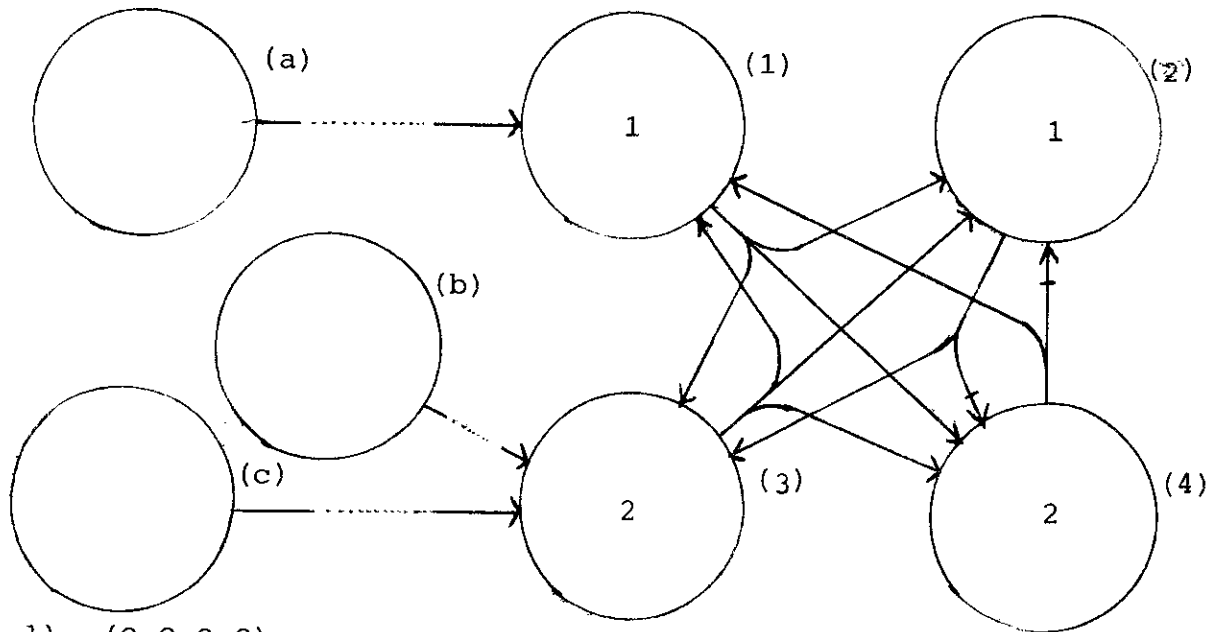
Ahora supongamos que $x(0) = (0, 1, 1) \implies$

$$x(1) = ca \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = ca \begin{bmatrix} 0 & +1 & +1 \\ 0 & +0 & +1 \\ 0 & -1 & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca(2) \\ ca(1) \\ ca(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = ca \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = ca \begin{bmatrix} 0 & +0 & +0 \\ 1 & +0 & +0 \\ 1 & +1 & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca(0) \\ ca(1) \\ ca(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con los resultados ya obtenidos.

Ejemplo 6: Recordemos



- 1) $(0,0,0,0) \longrightarrow (0,0,0,0)$
 2) $(1,0,0,0) \longrightarrow (0,1,0,0) \longrightarrow (0,0,0,0)$
 3) $(0,0,1,0) \longrightarrow (1,1,0,0) \longrightarrow (0,1,1,0)$
 4) $(1,0,1,0) \longrightarrow (1,1,0,1) \longrightarrow (0,0,1,0) \longrightarrow 3)$

Formulación matricial: Siguiendo la notación de las reglas tenemos que $m=3$ y $n=4$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} q_{1a} & q_{1b} & q_{1c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{4a} & q_{4b} & q_{4c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{41} & \dots & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1) $s(0) = (0, 0, 0)$ $x(0) = (0, 0, 0, 0)$
- 2) $s(0) = (1, 0, 0)$ $s(1) = s(2) = (0, 0, 0)$ $x(0) = (0, 0, 0, 0)$
- 3) $s(0) = (0, 1, 1)$ $s(1) = s(2) = s(3) = \dots = (0, 0, 0)$ $x(0) = (0, 0, 0, 0)$
- 4) $s(0) = (1, 1, 1)$ $s(1) = s(2) = s(3) = \dots = (0, 0, 0)$ $x(0) = (0, 0, 0, 0)$

Para una mejor clarificación operemos el caso 3)

$$x(1) = ca [s(0) + C x(0)] = ca \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= ca \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} ca(0) \\ ca(0) \\ ca(2) \\ ca(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = ca \left[Qs(1) + Cx(1) \right] = ca \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= ca \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} ca(1) \\ ca(1) \\ ca(0) \\ ca(1) \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$x(3) = ca \left[Qs(2) + Cx(2) \right] = ca \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= ca \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} ca(0) \\ ca(1) \\ ca(2) \\ ca(0) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$x(4) = ca \left[Qs(3) + Cx(3) \right] = ca \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$$=ca \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} ca(1) \\ ca(1) \\ ca(1) \\ ca(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x(2)$$

Nótese que los resultados de aquí están de acuerdo con los obtenidos por medio de las reglas originales en el ejemplo 6 de la sección 3.1.2.

3.3.2 Propiedad dual de los sistemas de neuronas lógicas

En cualquier tiempo el estado de un sistema está dado por medio de especificar cuales neuronas disparan a ese tiempo. Equivalentemente, por supuesto, pudiera ser dado si especificamos cuales neuronas no están disparando. Nosotros sabemos que la actividad de disparar se desarrolla de acuerdo a las reglas de cada determinado sistema lógico neuronal. ¿Se puede analizar la actividad de no disparar de acuerdo al sistema lógico neuronal también? La respuesta a ésto es afirmativa, pero debemos tener en cuenta que el sistema tendrá distintos valores de cambio. Al sistema analizado de esta forma le llamaremos sistema dual. Ahora determinaremos este sistema dual asumiendo que θ y ϕ son números enteros. Denotemos $N'_e = n_e - N_e$ y $N'_i = n_i - N_i$ para la cantidad de inputs inactivos a una neurona y analicemos cuando la neurona no dispara, en términos de estos valores N'_e y N'_i .

Sabemos que una neurona disparará si $N_e - \phi N_i \geq \theta$
 es decir que no lo hará si $N_e - \phi N_i < \theta$
 que puesto de otra forma sería $N_e - \phi N_i \leq \theta - 1$

y es lo mismo que poner $(n_e - N'_e) - \phi(n_i - N'_i) \leq \theta - 1 \implies$
 $n_e - N'_e - \phi n_i + \phi N'_i \leq \theta - 1 \implies -N'_e + \phi N'_i \leq \theta - 1 + \phi n_i - n_e$

o de otro modo $N'_e - \phi N'_i \geq n_e - \phi n_i - \theta + 1$

Así que el sistema dual se obtiene por medio de cambiar los valores de cambio θ por $n_e - \phi n_i - \theta + 1$. Un sistema dual propio ocurre cuando ambos valores son iguales, es decir, cuando $\theta = \frac{1}{2} (n_e - \phi n_i + 1)$ para todas las neuronas del sistema.

3.4 Simulación computacional

Luego de haber visto la simple formulación matricial para un sistema de neuronas de McCulloch & Pitts y sus dificultades de trabajo al analizar sistemas de muchas neuronas, es obvio que nos hagamos la siguiente pregunta: ¿Es posible simular el cerebro por medio de una computadora digital?

Muchos investigadores han simulado sistemas de neuronas en computadoras digitales. Nosotros aquí no vamos a discutir detallados problemas de programación, sino que vamos a dirigir nuestra atención a unos cuantos datos numéricos respecto al espacio y al tiempo requerido para tales simulaciones.

Para un sistema de n neuronas tendremos los siguientes requerimientos espaciales:

- 1) Valores de θ y ϕ para cada neurona: Para un sistema en general necesitaríamos guardar $2n$ números, pero si asumimos que todas tienen los mismos valores bastarán 2 espacios.
- 2) Conexiones en el sistema: Para cada neurona debemos decir cuantas conexiones tiene y si son excitadoras o inhibitoras (por medio de poner un "+" o un "-" adelante del número).

ro). Esto requiere hasta un total de n^2 números. Alternativamente pudieramos dar una regla que determine cuando una neurona x está conectada a una y no. Por ejemplo, pudieramos decir que si al dividir xy entre n el valor del resultado está entre 1 y 10, entonces se tiene solamente una conexión excitadora de x a y y de lo contrario no habrán conexiones. Esas reglas son fáciles de programar.

3) Estados del sistema: El estado presente se calcula siempre en base al estado precedente, y este último debe de ser guardado hasta que el presente haya sido completado. Esto es, hay que guardar $2n$ números, cada uno de los cuales es 1 o 0.

Así pués, en lo que a espacio de memoria se refiere, creo que no habrá problemas siempre y cuando podamos conseguir una computadora de capacidad suficiente, lo que creo será bastante improbable para el caso de un cerebro humano puesto que $n=10^{10}$, con lo que la matriz de conexión, C , será $10^{10} \times 10^{10}$, es decir, tendrá 10^{20} elementos.

El tiempo es quizá el factor de mayor problema aquí. El fundamental será el tiempo T requerido para calcular el nuevo estado del sistema a partir del anterior. Supongamos que cada neurona está conectada a q otras entonces $T=n(qt_1+t_2)$, donde t_1 es el tiempo requerido para calcular la contribución de una conexión dada, a la suma $N_e - \phi N_i$ y t_2 , el necesario para ver si la suma es $\geq \theta$. Como consecuencia, los requerimientos temporales imponen mucho más restricciones sobre el tamaño del sistema, que los requerimientos del espacio. Supongamos,

lo que es una muy buena aproximación, que $qt_1+t_2=100 \times 10^{-6}$ sec.

Si ahora $n=10^4, 10^6, 10^{10} \implies T=1$ sec, 1 min 40 sec o 11.5 días respectivamente.

Tal como se deduce de lo anterior, poner una versión McCulloch & Pitts del cerebro en una computadora es, aparte del

problema de la memoria, un problema de velocidad, lo que en vista de las grandes velocidades de las computadoras modernas parece paradójico, pero la realidad es que esto se debe a que la unidad central aritmética de una computadora trabaja en serie (a un tiempo solo realiza una operación), mientras que el cerebro es capaz de hacerlo en paralelo. Por lo que si pudiéramos juntar las ventajas de ambos cerebros, ello nos permitiría procesar un pensamiento que ocuparía horas en apenas unos cuantos segundos.

procesar un pensamiento que ocuparía horas en apenas unos

cuantos segundos.

CAPITULO 4

SISTEMAS DE NEURONAS CONECTADAS AL AZAR

4.1. Sistemas de neuronas lógicas con conexiones excitadoras

4.1.1 Introducción

Existe una situación en la que podemos dar un franco, aunque no definitivo y no riguroso tratamiento teórico a los sistemas conteniendo arbitrariamente muchas neuronas. Este es cuando tenemos M neuronas idénticas conectadas al azar, sin inputs externos, pero con una actividad inicial dada. Aunque no se supone que algún cerebro esté puesto de esa forma, es bastante posible de que puedan existir partes autónomas relativamente funcionales del cerebro, que consisten de uno o más conjuntos de neuronas conectadas más o menos de la forma anterior.

Nosotros trataremos nada más el caso en el cuál todas las M neuronas son idénticas, es decir cada una tiene el mismo n_e , n_i , θ y ϕ . Seguramente podríamos dar un tratamiento igual si permitimos que estos parámetros varíen, pero los objetivos de esta tesis no llegan hasta allí. Más aún, el hecho de que las neuronas estén conectadas al azar, puede ser definido de varias maneras distintas, y no por ello deben de esperarse resultados que varíen mucho. Nosotros asumiremos que para cada uno de los n_e+n_i inputs a cualquier neurona, el número $(1,2,\dots,M)$ de la neurona, de la cual proviene, está escogido independientemente, con igual probabilidad para cada una de las M neuronas. Así pues, al simular un tal sistema en una

computadora digital debemos escoger $M(n_e+n_i)$ números del conjunto de enteros $\{1,2,\dots,M\}$ independientemente y al azar cada vez. Esto quiere decir que una neurona puede estar conectada a si misma o a alguna otra neurona más de una vez, aunque si bien es cierto que a cada neurona le llega el mismo número, n_e+n_i , de inputs, ésta tiene un número variable de outputs. Esto da una teoría un poco más simple, que si asumimos que se asigna un número fijo de outputs a cada neurona, pero aún así no parece que el comportamiento general del sistema varíe mucho si se toma esta última posibilidad. Actualmente, con la primera posibilidad, el número esperado de outputs por neurona, x , sigue la distribución binomial $P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, donde $p=M^{-1}$, $n=M(n_e+n_i)$ y $q=1-p$.

Debemos recordar por supuesto, que aunque las conexiones en el sistema estan puestas al azar, éstas permanecerán inmutables. En otras palabras, en cada ocasión estaremos investigando las propiedades de un sistema definido en donde cada neurona tiene inputs de ciertas otras neuronas que no varían.

Consideremos primeramente un sistema de neuronas lógicas con sólo conexiones excitadoras y pondremos $n_e=n, n_i=0$ y los parámetros $t_0=0$ y $\tau=1$ (ver sec. 3.1.1). Ahora actuaremos en una forma no rigurosa. Digamos que al tiempo $t=0$ un número x de neuronas están activas. Sea $p=x/M$, la probabilidad de que una de ellas, elegida al azar, esté activa en $t=0$. Consideremos cualquier neurona. Cada uno de sus n inputs tiene la probabilidad de estar activo al tiempo $t=1$. Si éstas n probabilidades

fuesen independientes mutuamente, diríamos que la probabilidad de que exactamente N inputs estén activos al tiempo $t=1$ estará dada por la expresión binomial

$$\binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N}$$

y por lo tanto la probabilidad que la neurona dispare (es decir $N \geq \theta$) al tiempo $t=1$ está dada por

$$P = P(n, \theta, p) = \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} \dots \dots \dots (1)$$

Nuestra suposición es que esta expresión es una razonable aproximación a la probabilidad de que una neurona dispare al tiempo $t=1$ y por lo tanto también a la fracción de neuronas que disparan a ese tiempo. Así pues, nosotros empezamos con una fracción p activa al tiempo $t=0$ y tendremos una fracción P , de acuerdo a la ecuación (1), activa en $t=1$. De esa misma forma podremos deducir que la fracción $P(n, \theta, P)$ estará activa al tiempo $t=2$, y así sucesivamente. De esta forma tendremos un procedimiento de analizar aproximadamente los estados futuros promedios del sistema.

Es claro, que si nosotros estamos justificando al argumentar de esta forma, el comportamiento del sistema depende crucialmente de las propiedades de la función $P(n, \theta, p)$. Primero nótese que si la proporción $R=P/p > 1$ entonces el sistema está más activo en $t=1$ y si $R < 1$ estará menos activo.

4.1.2 Propiedades de $P(n, \theta, p)$

La función $P(n, \theta, p)$ es bastante usada en situaciones que se tengan neuronas de McCulloch & Pitts y se crea que su

input total pueda ser proximado por corrientes independientes de impulsos, cada uno de probabilidad p . Esto es bastante valioso también cuando se incluya la inhibición tal como veremos más adelante. Como consecuencia es importante investigar las propiedades de $P(n, \theta, p)$ con detalle. A continuación trataremos de probar lo que hemos graficado en la figura 4.1.

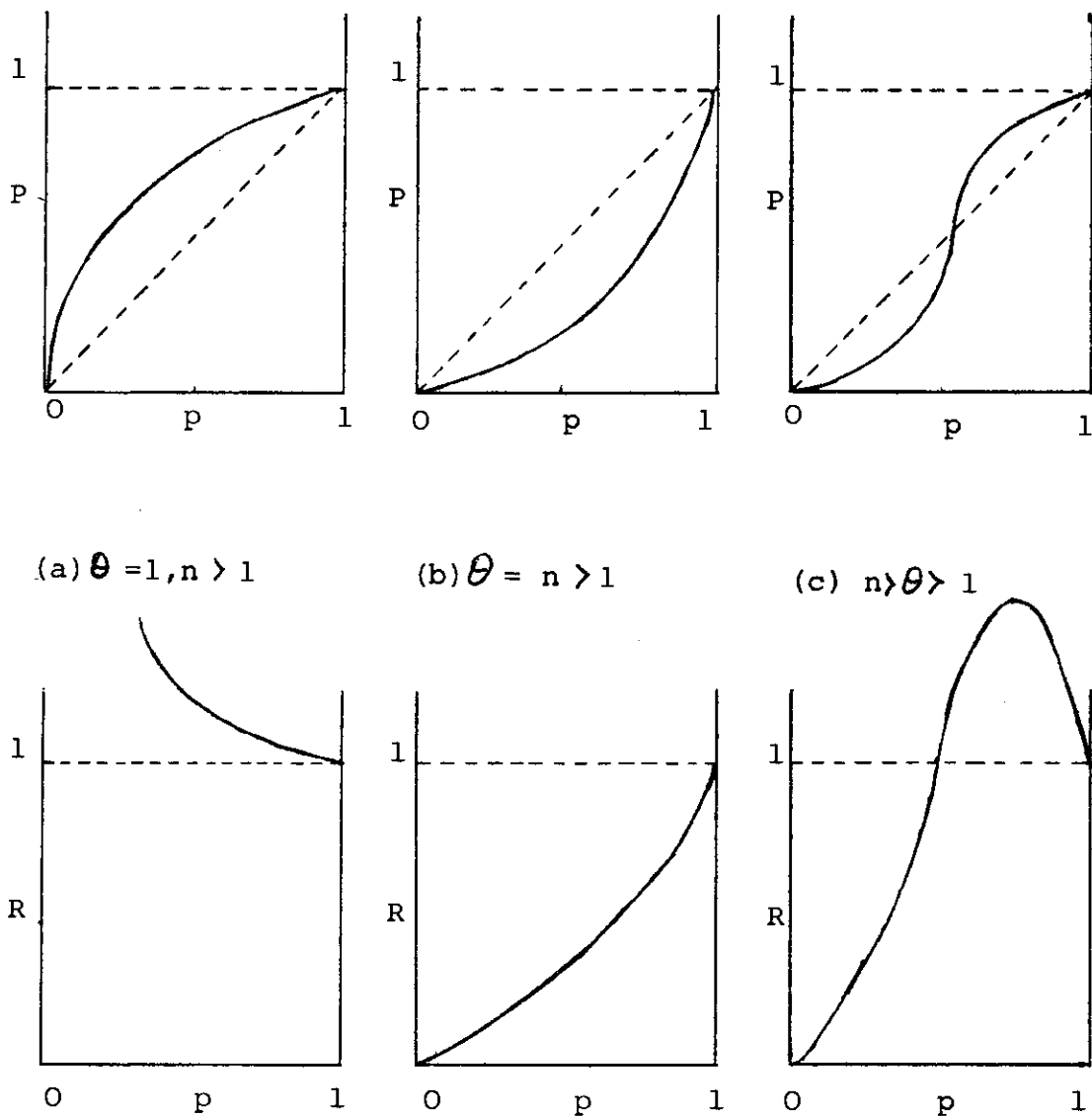


Figura 4.1

Si $\theta > n$, entonces claramente $P(n, \theta, p) = 0$, mientras que si $\theta = 0 \neq n, p$, $P(n, \theta, p) = \sum_{N=0}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$

De igual forma P es relativamente simple de calcular en los siguientes 3 casos:

$$1) P(1, 1, p) = \sum_{N=1}^1 \binom{1}{N} p^N (1-p)^{1-N} = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} p^1 (1-p)^0 = p$$

$$2) P(n, 1, p) = \sum_{N=1}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \left[\sum_{N=0}^n p^N (1-p)^{n-N} \right] - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - \frac{n!}{0!(n-0)!} (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

$$3) P(n, n, p) = \sum_{N=n}^n p^N (1-p)^{n-N} = \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} p^n (1-p)^0 = p^n$$

El caso 2) justifica la gráfica a) de la fig. 4.1, ya que como $p > 0 \implies (1-p)^n < (1-p)$ si $n > 2 \implies -(1-p)^n > -(1-p) \implies 1 - (1-p)^n > 1 - (1-p) \implies 1 - (1-p)^n > p$. Por lo tanto para este caso tendremos $P > p$, de igual forma $P(n, \theta, P) > P$ y así sucesivamente. En otras palabras, la actividad se incrementa progresivamente, siempre que empecemos con un valor de $p > 0$, y tiende al estado de total actividad ($P=1$).

En el caso 3) justifica la gráfica b) de la fig. 4.1 ya que como $p < 1$ y $n > 1 \implies p^n < p$. Por lo tanto $P < p$, $P(n, \theta, P) < P$, etc., y de manera análoga al anterior, aquí el sistema tenderá al estado de total inactividad.

Finalmente, tal como lo muestra la intuitiva gráfica 4.1c), en la mayoría de los casos tendremos que $n > \theta > 1$ (el caso $\theta > n$ no tiene interés puesto que obviamente $P=0$). Con los siguientes teoremas trataremos de dar algo de luz a la veracidad de esa gráfica de $P(n, \theta, p)$, para el rango de valores de n y θ ya mencionados.

Teorema 1: $n \succ n \implies P(n, \theta, p) \succ P(n, \theta, p)$

Demostración: Mostraremos aquí nada más el peor de los casos, es decir cuando $n \neq n+1$.

Antes que nada notemos que $\binom{n+1}{N} = \binom{n}{N} + \binom{n}{N-1}$ ya que

$$\begin{aligned} \binom{n}{N} + \binom{n}{N-1} &= \frac{n!}{N!(n-N)!} + \frac{n!}{(N-1)!(n-(N-1))!} = \frac{n!(N-1)!(n-N+1) + n!N!(n-N)!}{N!(n-N)!(N-1)!(n-N+1)!} \\ &= \frac{n! [(N-1)!(n-N+1)! + N!(n-N)!]}{N!(n-N)!(N-1)!(n-N+1)!} = \frac{n! [(N-1)!(n-N)!(n-N+1) + (N-1)!N(n-N)!]}{N(n-N)!(n-N+1)!(N-1)!} \\ &= \frac{n!(N-1)!(n-N)! [(n-N+1)+N]}{N!(n-N)!(N-1)!(n-N+1)!} = \frac{n! [(n-N+1)+N]}{n!(n-N+1)!} = \frac{n!(n+1)}{N!(n+1-N)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{N!((n+1)-N)!} = \binom{n+1}{N} \implies (\text{note utilización de } \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n+1, \theta, p) &= \sum_{N=\theta}^{n+1} \binom{n+1}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} = \left[\sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} + \binom{n}{N-1} \right] p^N (1-p)^{n+1-N} + \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} \\ &= \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} + \left[\sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N-1} p^N (1-p)^{n+1-N} \right] + \binom{n}{n} p^{n+1} \\ &= \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} + \sum_{N=\theta}^{n+1} \binom{n}{N-1} p^N (1-p)^{n+1-N} \\ &= \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} + \sum_{N=\theta-1}^n \binom{n}{N} p^{N+1} (1-p)^{n-N} \\ &= \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} + \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^{N+1} (1-p)^{n-N} + a \quad (a = \binom{n}{\theta-1} p^\theta (1-p)^{n-\theta+1}) \\ &= \sum_{N=\theta}^n \left[\binom{n}{N} p^N (1-p)^{n+1-N} + \binom{n}{N} p^{N+1} (1-p)^{n-N} \right] + a \\ &= \left[\sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} ((1-p)+p) \right] + \binom{n}{\theta-1} p^\theta (1-p)^{n-\theta+1} \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} \right] + a$$

$$= P(n, \theta, p) + a \gg P(n, \theta, p) \quad \text{ya que } a \gg 0$$

La igualdad está para los casos en que $p=0,1$ ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n, \theta, 0)=0$ y $P(n, \theta, 1)=1$

Teorema 2: $\theta' \leq \theta \implies P(n, \theta', p) \leq P(n, \theta, p)$

Demostración: $P(n, \theta, p) = \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N}$

$$\gg \sum_{N=\theta'}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = P(n, \theta', p)$$

Teorema 3: $P(n, \theta, p) + P(n, n-\theta+1, 1-p) = 1$

Demostración: $1 = (p+(1-p))^n = (p+(1-p))^n = \sum_{N=0}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} =$

$$\sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} + \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} =$$

$$= \sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} + P(n, \theta, p). \quad \text{Ahora solo resta demostrar que}$$

$$\sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \sum_{N=n-\theta+1}^n \binom{n}{N} p^{n-N} (1-p)^N = P(n, n-\theta+1, 1-p).$$

$$\sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \sum_{n-N=0}^{n-(\theta-1)} \binom{n}{n-N} p^{n-N} (1-p)^N = \sum_{N=n}^{n-\theta+1} \binom{n}{n-N} p^{n-N} (1-p)^N$$

$$= \sum_{N=n-\theta+1}^n \binom{n}{n-N} p^{n-N} (1-p)^N = \sum_{N=n-\theta+1}^n \binom{n}{N} p^{n-N} (1-p)^N \quad \text{ya que } \binom{n}{N} = \binom{n}{n-N}$$

puesto que $\binom{n}{N} = \frac{n!}{N!(n-N)!}$ y $\binom{n}{n-N} = \frac{n!}{(n-N)!(n-(n-N))!} = \frac{n!}{(n-N)!N!}$

Por otra parte notemos que
$$\sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \binom{n}{0} (1-p)^n + \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \dots + \binom{n}{\theta-3} p^{\theta-3} (1-p)^{n-\theta+3} + \binom{n}{\theta-2} p^{\theta-2} (1-p)^{n-\theta+2} + \binom{n}{\theta-1} p^{\theta-1} (1-p)^{n-\theta+1} ; y$$

$$\sum_{N=n-\theta+1}^n \binom{n}{n-N} p^{n-N} (1-p)^N = \binom{n}{\theta-1} p^{\theta-1} (1-p)^{n-\theta+1} + \binom{n}{\theta-2} p^{\theta-2} (1-p)^{n-\theta+2} + \binom{n}{\theta-3} p^{\theta-3} (1-p)^{n-\theta+3} + \dots + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} + \binom{n}{0} (1-p)^n$$

con lo que confirmamos que
$$\sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \sum_{N=n-\theta+1}^n \binom{n}{N} p^{n-N} (1-p)^N$$

Regresando al principio de la demostración tendremos

$$1 = \sum_{N=0}^{\theta-1} \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} + P(n, \theta, p) = P(n, n-\theta+1, 1-p) + P(n, \theta, p)$$

lo que demuestra el teorema.

Observación: Nótese que este resultado pudo haber sido obtenido de forma intuitiva, en vista de la dualidad discutida en la sección 3.2.2, pues si una neurona tiene valor de cambio θ y probabilidad p de disparar, entonces la neurona dual tendrá probabilidad $(1-p)$ de no disparar y valor de cambio dual $n-\theta+1$, ya que $n_i=0$, de donde se deduce que $P(n, n-\theta+1, 1-p)$ y $P(n, \theta, p)$ deben de ser probabilidades complementarias.

Corolario: $P(2\theta-1, \theta, 1/2) = 1/2$

Demostración: Como $P(n, \theta, p) + P(n, n-\theta+1, 1-p) = 1 \implies$
 que si $n=2\theta-1$ entonces $P(2\theta-1, \theta, p) + P(2\theta-1, \theta, 1-p) = 1$. Por lo
 tanto si $p=1/2 \implies$
 $P(2\theta-1, \theta, 1/2) + P(2\theta-1, \theta, 1/2) = 2P(2\theta-1, \theta, 1/2) = 1 \implies P(2\theta-1, \theta, 1/2) =$
 $1/2$

(nótese que $R(2\theta-1, \theta, 1/2) = 1$)

Teorema 4: Dado n fijo y θ , $0 < \theta \leq n \implies P(N, \theta, p) = \theta \binom{n}{\theta} \int_0^p x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx$

Demostración: En vista de que se trata de un número finito y conocido de valores de θ , demostraremos que la fórmula es válida para el valor máximo, es decir para $\theta=n$ y luego que si es válida para $\theta+1$ también lo será para θ , con lo que quedará demostrado que vale $\forall \theta$)

$0 < \theta \leq n$ ($\theta \in \mathbb{N}$)

Según la hipótesis $P(n, n, p) = n \binom{n}{n} \int_0^p x^{n-1} (1-x)^{n-n} dx = n \cdot 1 \int_0^p x^{n-1} (1-x)^0 dx =$

$$n \cdot \frac{1}{n} x^n \Big|_0^p = x^n \Big|_0^p = p^n,$$

lo que concuerda con nuestro resultado obtenido para $P(n, n, p)$ a partir de la definición original para P , al principio de esta sección.

Antes de continuar la demostración recordemos el método de integración por partes: dadas $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en el intervalo $[0, p]$ entonces

$$\int_0^p u dv = u v \Big|_0^p - \int_0^p v du$$

Ahora asumiendo que la fórmula es válida para $\theta+1$ procedamos:

$$\theta \binom{n}{\theta} \int_0^p x^\theta (1-x)^{n-\theta} dx$$

aquí, siguiendo la notación que se usa unas líneas arriba tenemos

$$u = (1-x)^{n-\theta} \implies du = (-)(n-\theta)(1-x)^{n-\theta-1} dx$$

$$dv = x^{\theta-1} dx \implies v = \frac{1}{\theta} x^\theta$$

$$\theta \binom{n}{\theta} \int_0^p x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx = \theta \binom{n}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} x^\theta (1-x)^{n-\theta} \Big|_0^p - \int_0^p \frac{1}{\theta} x^\theta (-)(n-\theta) \right.$$

$$\left. (1-x)^{n-\theta-1} dx \right]$$

$$= \binom{n}{\theta} x^\theta (1-x)^{n-\theta} \Big|_0^p + (n-\theta) \binom{n}{\theta} \int_0^p x^\theta (1-x)^{n-\theta-1} dx \quad \text{y como}$$

$$(n-\theta) \binom{n}{\theta} = (\theta+1) \binom{n}{\theta+1} \text{ puesto que } (n-\theta) \binom{n}{\theta} = \frac{(n-\theta) \cdot n!}{\theta! (n-\theta)!} = \frac{n!}{\theta! (n-\theta-1)!}$$

$$= \frac{n!}{\theta! (n-(\theta+1))!} = \frac{(\theta+1)n!}{(\theta+1)! (n-(\theta+1))!} = (\theta+1) \binom{n}{\theta+1} \implies \text{(valuando el primer término)}$$

$$\theta \binom{n}{\theta} \int_0^p x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx = \binom{n}{\theta} p^\theta (1-p)^{n-\theta} + (\theta+1) \binom{n}{\theta+1} \int_0^p x^\theta (1-x)^{n-\theta-1} dx$$

$$= \binom{n}{\theta} p^\theta (1-p)^{n-\theta} + p \binom{n}{\theta+1} = \binom{n}{\theta} p^\theta (1-p)^{n-\theta} + \sum_{N=\theta+1}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N}$$

$$= \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p^N (1-p)^{n-N} = \underline{\underline{P(n, \theta, p)}} \quad \text{lo que prueba el teorema.}$$

Antes de pasar a demostrar 2 fáciles corolarios recordemos el teorema fundamental del cálculo, pues nos va ser de utilidad para el primer corolario, y que dice así:

Dada una función integrable $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $y \longmapsto f(y)$ entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x) \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}. \quad \text{Pasemos ahora al}$$

Corolario 1: $P'(p) = \frac{\partial P}{\partial p} = \theta \binom{n}{\theta} p^{\theta-1} (1-p)^{n-\theta}$

Demostración: $\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\theta \binom{n}{\theta} \int_0^p x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx \right]$
 $= \theta \binom{n}{\theta} \frac{\partial}{\partial p} \int_0^p x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx = \theta \binom{n}{\theta} p^{\theta-1} \cdot (1-p)^{n-\theta}$

Observación: Nótese que siempre $P'(p) \geq 0$ lográndose la igualdad únicamente para el caso en que $p=0$ o $p=1$.

Corolario 2: $P''(p) = \frac{\partial^2 P}{\partial p^2} = \theta \binom{n}{\theta} p^{\theta-2} (1-p)^{n-\theta-1} [(\theta-1)(1-p) - (n-\theta)p]$

Demostración: Recordemos que $\frac{\partial^2 P}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} (P'(p))$

y que dadas $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables; y $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x)$ $x \longmapsto g(x)$ $x \longmapsto h(x) = f(x)g(x)$

entonces $h(x) = f(x)g(x) + f(x)g'(x)$; y si $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto l(x) = f(g(x))$

entonces $l'(x) = f'(g(x))g'(x)$ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial p^2} &= \theta \binom{n}{\theta} \left[\frac{\partial}{\partial p} (p^{\theta-1}) \cdot (1-p)^{n-\theta} + p^{\theta-1} \frac{\partial}{\partial p} (1-p)^{n-\theta} \right] \\ &= \theta \binom{n}{\theta} \left[(\theta-1)p^{\theta-2} (1-p)^{n-\theta} + p^{\theta-1} (n-\theta) (1-p)^{n-\theta-1} (-1) \right] \\ &= \theta \binom{n}{\theta} p^{\theta-2} (1-p)^{n-\theta-1} \left[(\theta-1)(1-p) - (n-\theta)p \right] \end{aligned}$$

Observación: Nótese que $P''(p) = 0 \iff$ a) $p=0$ siempre que $\theta > 2$;
 b) $p=1$ siempre que $\theta < n-1$; y c) $p = (\theta-1)/(n-1)$

Teorema 5: $P(n, \theta, p) = p$ es verdadero siempre que $p=0$ o 1 . Si
 a) $\theta=1, n > 1$ o b) $\theta=n > 1$ la igualdad es válida solo para los
 anteriores valores de p , pero si c) $\theta=n=1$, será válida $\forall p$, y
 si d) $n > \theta > 1$ entonces existe p_0 con $0 < p_0 < 1$ tal que
 $P(n, \theta, p_0) = p_0$

Demostración: $P(n, \theta, 0) = 0$ y $P(n, \theta, 1) = 1$ son casos ya obvios
 $\forall n, \theta$. En adelante note que para demostrar los primeros 3
 casos se utilizarán los resultados del principio de esta sec-
 ción.

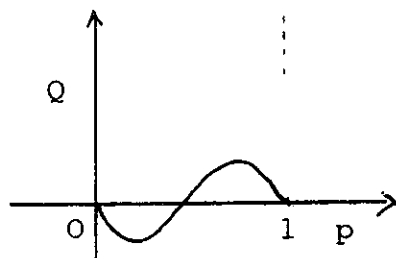
Caso a) $\theta=1, n > 1$. Tenemos que $P(n, 1, p) = 1 - (1-p)^n = p \iff$
 $-(1-p)^n = -1 + p \iff (1-p)^n = 1 - p \iff 1 - p = 0 \text{ o } 1 \iff \underline{\underline{p=1 \text{ o } 0}}$

Caso b) $\theta=n > 1$. Tenemos que $P(n, n, p) = p^n = p \iff \underline{\underline{p=1 \text{ o } 0}}$

Caso c) $\theta = n = 1$. Tenemos que $P(1,1,p) = p$ con lo que la igualdad del teorema en este caso vale $\forall p \in [0,1]$

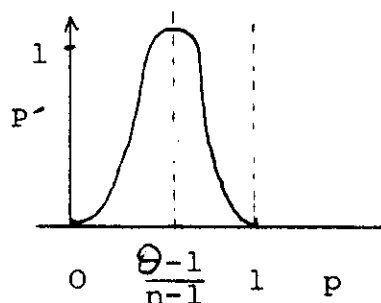
Caso d) Este caso será tratado por medio de considerar los ceros de la función continua Q , donde $Q(p) = P(p) - p$. Es claro que $Q(0) = Q(1) = 0$ y como $Q'(p) = P'(p) - 1$ tendremos entonces gracias al corolario 1 del teorema 4 que $Q'(0) = Q'(1) = -1$ lo que nos da la siguiente gráfica para $Q(p)$;

Figura 4,2a



Por lo tanto $Q(p_0) = p_0$ para algún p_0 con $0 < p_0 < 1$. Ese valor de p_0 será único a menos que podamos demostrar que $Q'(p) = 0$ para más de 2 valores de p , lo que contrariaría nuestra gráfica de la figura 4.2a. De el hecho de que $P' > 0$ (corolario 1, teorema 4) y de que $P'' = 0$ si y solo si $p = 0, 1$ o $\theta - 1/n - 1$, donde $0 < \theta - 1/n - 1 < 1$ ya que $n > \theta > 1$, se obtiene la siguiente gráfica:

Figura 4.2b



De esta gráfica se deduce que $P'=1$ para lo más 2 valores de p , por lo que $Q'=P'-1=0$ para lo más 2 valores de p , con lo que queda demostrado que existe un único $p_0 \in (0,1)$ tal que $Q(p_0)=0$, es decir que $P(p_0 - p_0)=0$. Por lo tanto solo existe un $p_0 \in (0,1)$ tal que $P(n, \theta, p_0)=p_0$.

Observación: Si $n=2\theta -1$, se sigue del corolario al teorema 3 que $p_0=1/2$. Más generalmente, si escribimos $p_0=p_0(n, \theta)$ entonces el teorema 1 muestra que $p_0(n', \theta) \gg p_0(n, \theta)$ siempre que $n' \gg n$, el teorema 2 que $p_0(n, \theta') \gg p_0(n, \theta)$ siempre que $\theta' < \theta$, y el teorema 3 que $p_0(n, \theta) + p_0(n, n-\theta+1)=1$.

Teorema 6: Para $n > \theta > 1$ y p_0 pequeño se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$ p_0 es asintóticamente igual a $(\frac{\theta!}{n^\theta})^{\frac{1}{\theta-1}}$

Demostración: Nuestro problema consistirá en obtener la más significativa contribución a la solución de la ecuación

$$p_0 = P(n, \theta, p_0) = \sum_{N=\theta}^n \binom{n}{N} p_0^N (1-p_0)^{n-N} = \binom{n}{\theta} p_0 (1-p_0)^{n-\theta} + \dots$$

es decir de la ecuación

$$1 = \binom{n}{\theta} p_0^{\theta-1} (1-p_0)^{n-\theta} + \dots$$

Ya que p_0 bastante pequeño tomaremos solamente el primer término. Por esa misma razón tendremos que $(1-p_0)^n \approx 1$ y en vista de que n será muy grande podemos tomar $\binom{n}{\theta} \approx \frac{n^\theta}{\theta!}$ puesto que $\frac{n!}{(n-\theta)!} \approx n^\theta$ pues $\frac{n!}{(n-\theta)!} = (n-\theta+1) \times (n-\theta+2) \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n \approx$

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{n - (n-\theta)} = n^\theta$$

Regresando a nuestro problema tendremos que

$$1 \approx \frac{n^\theta}{\theta!} p_0^{\theta-1} \implies p_0^{\theta-1} \approx \frac{\theta!}{n^\theta} \implies p_0 \approx \left(\frac{\theta!}{n^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

Comentario: Como dato curioso debemos notar que si $\theta=2$ y $n=10^2$ entonces tendremos que $p_0 \approx \left[\frac{2!}{(10^2)^2} \right]^{\frac{1}{2-1}} = \frac{2}{10^4}$ lo que se

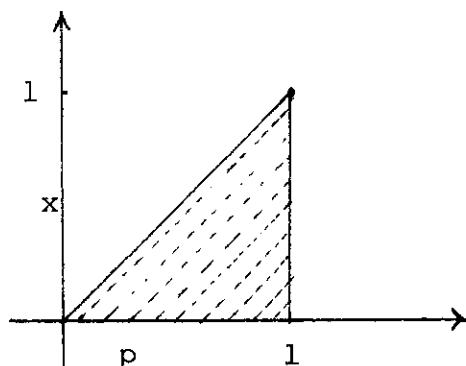
aproxima bastante al valor de p_0 para $\theta=2$ y $n=10^2$ de $p_0 = 2.05/10^4$ obtenido de la tabla que calculó J.S. Griffith en su libro "A View of the Brain", publicado en 1967 por la Oxford University Press, London, y cuya forma de cálculo desconozco.

Hemos visto en el teorema 4 que P' tiene una expresión bastante simple. Igual de simple sería calcular $\int_0^1 P dp$ y todos sus momentos respecto a p , tal como lo muestra nuestro siguiente teorema:

Teorema 7: $\int_0^1 P(n, \theta, p) p^m dp = \frac{1}{m+1} \left[1 - \frac{n!(m+\theta)!}{(\theta-1)!(n+m+1)!} \right]$

Demostración: Denotemos por I_m a la integral anterior y usando el teorema 4 tendremos que: $I_m = \theta \binom{n}{\theta} \int_{p=0}^{p=1} \int_{x=0}^{x=p} x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} p^m dx dp$

lo que significa que diagramáticamente la parte a integrar es



por lo que haciendo un cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_m &= \theta \binom{n}{\theta} \int_{x=0}^{x=1} \int_{p=x}^{p=1} x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} p^m dp dx \\
 &= \theta \binom{n}{\theta} \int_{x=0}^{x=1} x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} \left[\frac{1}{m+1} p^{m+1} \right]_{p=x}^{p=1} dx \\
 &= \theta \binom{n}{\theta} \frac{1}{m+1} \int_{x=0}^{x=1} x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} [1-x^{m+1}] dx \\
 &= \frac{\theta}{m+1} \binom{n}{\theta} \int_{x=0}^{x=1} x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx - \int_{x=0}^{x=1} x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx
 \end{aligned}$$

en vista que $P(n, \theta, 1) = 1$ tal como se vió al principio de esta sección y como por el teorema 4 $P(n, \theta, 1) =$

$$\theta \binom{n}{\theta} \int_0^1 x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx$$

tendremos que $\frac{\theta}{m+1} \binom{n}{\theta} \int_0^1 x^{\theta-1} (1-x)^{n-\theta} dx = P(n, \theta, 1) / (m+1) = 1 / (m+1)$. De igual forma también

$$1 = P(n+m+1, m+\theta+1, 1) =$$

$$= (m+\theta+1) \binom{n+m+1}{m+\theta+1} \int_0^1 x^{(m+\theta+1)-1} (1-x)^{(n+m+1)-(m+\theta+1)} dx$$

$$= \frac{(m+\theta+1) (n+m+1)!}{(m+\theta+1)! (n+m+1-(m+\theta+1))!} \int_0^1 x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx$$

$$= \frac{(n+m+1)!}{(m+\theta)! (n-\theta)!} \int_0^1 x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx \implies$$

$$\int_0^1 x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx = \frac{(m+\theta)! (n-\theta)!}{(n+m+1)!} \implies$$

$$\frac{\theta}{m+1} \binom{n}{\theta} \int_0^1 x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n!}{(\theta-1)! (n-\theta)!} \int_0^1 x^{m+\theta} (1-x)^{n-\theta} dx$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n!}{(\theta-1)! (n-\theta)!} \cdot \frac{(m+\theta)! (n-\theta)!}{(n+m+1)!}$$

$$= \frac{1}{m+1} \frac{n! (m+\theta)!}{(\theta-1)! (n+m+1)!} \quad \text{por lo tanto}$$

$$I_m = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n! (m+\theta)!}{(\theta-1)! (n+m+1)!} = \frac{1}{m+1} \left[1 - \frac{n! (m+\theta)!}{(\theta-1)! (n+m+1)!} \right]$$

Corolario: $I_0 = \int_0^1 P(n, \theta, p) dp = 1 - (\theta/n+1)$

Demostración: Basta con tomar $m=0$ en el teorema anterior. De esa forma $I_0 = \frac{1}{0+1} \left[1 - \frac{n! (0+\theta)!}{(\theta-1)! (n+0+1)!} \right] = 1 - \frac{n! \theta!}{(\theta-1)! (n+1)!} = \underline{\underline{1 - \frac{\theta}{n+1}}}$

Observación: En vista de que el largo del intervalo $[0, 1]$ es exactamente 1, I_0 representa en nuestro caso al promedio de la probabilidad $P(n, \theta, p)$, siempre y cuando n y θ se mantengan fijos. Nótese, y es muy lógico, que si $\theta=0$ o si $n \rightarrow \infty$ entonces $I_0=1$.

4.2 Sistemas con conexiones inhibitoras

Si permitimos que algunas de las conexiones en el sistema al azar sean inhibitoras, entonces el rango posible de comportamiento de la actividad promedio de disparar se vuelve ma-

yor, aunque el tratamiento que aquí se dará es bastante simple.

Consideremos una neurona con n_e inputs excitadores y n_i inhibidores, y sean tanto n_e y n_i como θ y ϕ las mismas constantes para cada neurona del sistema. De nuevo escogamos cada conexión independiente y enteramente al azar para cada una de las M neuronas del sistema. Si una fracción p está activa en $t=0^*$ la probabilidad de que N_e inputs excitadores estén activos al tiempo $t=1$ será

$$\binom{n_e}{N_e} p^{N_e} (1-p)^{n_e-N_e}$$

y que N_i inputs inhibidores estén activos en $t=1$ será

$$\binom{n_i}{N_i} p^{N_i} (1-p)^{n_i-N_i}$$

por lo que la probabilidad de que N_e excitadores y N_i inhibidores lo estén al mismo tiempo $t=1$ es

$$\left[\binom{n_e}{N_e} p^{N_e} (1-p)^{n_e-N_e} \right] \cdot \left[\binom{n_i}{N_i} p^{N_i} (1-p)^{n_i-N_i} \right]$$

$$= \binom{n_e}{N_e} \cdot \binom{n_i}{N_i} p^{N_e+N_i} (1-p)^{n_e+n_i-N_e-N_i}$$

y como la neurona, a la que llegan esos inputs, disparará para cada caso en que $N_e - \phi N_i \gg \theta$ obtenemos entonces que

$$P_i(p) = \sum_{N_e - \phi N_i \gg \theta} \binom{n_e}{N_e} \binom{n_i}{N_i} p^{N_e+N_i} (1-p)^{n_e+n_i-N_e-N_i}$$

es la probabilidad de que la neurona dispare. Acuérdesse que la suma debe de realizarse sobre todos los pares de enteros

$N_e, N_i \geq 0 \leq N_e \leq n_e, 0 \leq N_i \leq n_i$ y que cumplan la condición, por lo que la suma puede también ser escrita como:

(*) Ver análisis similar en sección 4.1.1

$$\begin{aligned}
P_1(p) &= \sum_{N_i=0}^{n_i} \left[\sum_{N_e=0}^{n_e - \phi N_i} \binom{n_e}{N_e} \binom{n_i}{N_i} p^{N_e + N_i} (1-p)^{n_e + n_i - N_e - N_i} \right] \\
&= \sum_{N_i=0}^{n_i} \binom{n_i}{N_i} p^{N_i} (1-p)^{n_i - N_i} \cdot \sum_{N_e=0}^{n_e - \phi N_i} p^{N_e} (1-p)^{n_e - N_e} \\
&= \sum_{N_i=0}^{n_i} \binom{n_i}{N_i} p^{N_i} (1-p)^{n_i - N_i} P(n_e, \theta + \phi N_i, p)
\end{aligned}$$

Esta última expresión nos permite ya sacar algunas conclusiones sobre $P_1(p)$ (realmente debiésemos escribir $P_1(p) = P_1(n_e, n_i, \theta, \phi, p)$). Algunas directamente, por comparación con los resultados de la sección anterior; otros no tan fácilmente, por medio de un más profundo análisis matemático, pero en ambos casos, sobre todo en el último, quedarán pendientes, en vista de que no es de mi intención extenderme más en este tema, además de que la sección anterior ya mostró bastante al respecto de este tipo de acercamiento al problema, con lo que prefiero dar paso a algo que creo tiene más interés,

4.3. Análisis de series temporales

En las 2 secciones anteriores hablamos de una probabilidad p , de que x neuronas estuviesen activas a un determinado tiempo. Esa probabilidad generó, en el primero de los casos, otra probabilidad $P(n, \theta, p)$, esta a $P(n, \theta, P)$ y así sucesivamen-

te. En la sección 4.1.1 se dijo que p pudiera ser x/M , donde M es el número de neuronas del sistema. Es obvio entonces, que nos hagamos la siguiente pregunta: ¿Qué valor tendrá realmente p ? A decir verdad, no creo que p pueda determinarse con exactitud pero, si creo que lo que resta de esta sección pueda acercarnos un buen poco a imaginarnos cual pueda ser valor de p .

Con series temporales, me refiero a las series de gráficas que durante determinados tiempos se obtienen de la actividad de una neurona. Estas series pueden ser obtenidas por medio de introducir en el cerebro un largo microelectrodo de 1 um o menos de diámetro que mide los cambios de potencial de una célula nerviosa, y por medio de un aparato especial los grafica. En vista del espontaneo disparar de una neurona, no nos es posible por medio de estas gráficas determinar exactamente cada cuanto disparan, pero si podemos sacar un valor promedio, con lo que podremos deducir la probabilidad de que en un intervalo δt , de tiempo, dispare. Es obvio que esta probabilidad depende del tamaño de δt , es decir es proporcional al tiempo, por lo que estará dada por $\lambda \delta t + o(\delta t)$, donde es λ una constante y $o(\delta t)$ es tal que $o(\delta t) \ll \lambda \delta t$ cuando $t \rightarrow 0$. Nótese que el proceso no tiene memoria ya que debido a la espontaneidad de la neurona, ésta tiene igual probabilidad de disparar, así lo haya hecho 100 veces en el último segundo o ninguna.

Nos preguntamos ahora cual es la probabilidad de que la

neurona dispare x veces en el período de tiempo $(0, t]$. Sea $p_x(t)$ la probabilidad anterior. Encontraremos ahora inductivamente empezando por $x=0$, una fórmula para $p_x(t)$. Evidentemente $p_0(t + \delta t) = P_1 P_2$, donde $P_1 =$ probabilidad de que la célula no dispare en el intervalo $(0, t] = p_0(t)$ y $P_2 =$ probabilidad de que la célula no dispare en $(t, t + \delta t]$

$$= 1 - (\lambda \delta t + o(\delta t)) \implies$$

$p_0(t + \delta t) = p_0(t) - \lambda p_0(t) \delta t + o(\delta t) \dots \dots (1)$, donde $o(t)$ es ahora una cantidad distinta pero siempre muy pequeña.

Una expansión de Taylor de primer grado nos daría $p_0(t + \delta t) = p_0(t) - p_0'(t) \delta t + o(\delta t) \dots \dots (2)$

Iguando (1) y (2) obtenemos que $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$

$$\implies \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \implies \frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda dt \implies$$

$$\int_0^t \frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda \int_0^t dt \implies \ln p_0(t) \Big|_{t=0}^{t=t} = -\lambda t \Big|_0^t \implies$$

$\ln p_0(t) - \ln p_0(0) = -\lambda t \implies \ln \frac{p_0(t)}{p_0(0)} = -\lambda t$ y como obviamente

$$p_0(0) = 1 \implies \ln p_0(t) = -\lambda t \implies p_0(t) = e^{-\lambda t} \dots \dots (3)$$

Podemos ahora proceder inductivamente:

$$p_x(t + \delta t) = P_a P_b + P_c P_d, \text{ donde}$$

$P_a =$ probabilidad de x disparos en $(0, t] = p_x(t)$

$P_b =$ probabilidad de 0 disparos en $(t, t + \delta t] = 1 - (\lambda \delta t + o(\delta t))$

$P_c =$ probabilidad de $(x-1)$ disparos en $(0, t] = p_{x-1}(t)$

$$\begin{aligned}
 P_d &= \text{probabilidad de 1 disparo en } (t, t+\delta t] = \lambda \delta t + o(\delta t) \\
 \text{por lo tanto } p_x(t+\delta t) &= p_x(t) [1 - \lambda \delta t + o(\delta t)] + p_{x-1}(t) [\lambda \delta t + o(\delta t)] \\
 \implies p_x(t+\delta t) &= p_x(t) - \lambda p_x(t) \delta t + p_x(t) o(\delta t) + \lambda p_{x-1}(t) \delta t + p_{x-1}(t) o(\delta t) \\
 &= p_x(t) - \lambda p_x(t) \delta t + \lambda p_{x-1}(t) \delta t + (p_x(t) + p_{x-1}(t)) o(\delta t) \\
 &= p_x(t) - \lambda p_x(t) \delta t + \lambda p_{x-1}(t) \delta t + o(\delta t) \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

De nuevo haciendo uso de la aproximación de primer grado por medio de una serie de Taylor, esta vez para $p_x(t+\delta t)$, obtenemos

$$p_x(t+\delta t) = p_x(t) + p'_x(t) \delta t + o(\delta t) \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{Igualando (4) y (5) resulta } p'_x(t) = -\lambda p_x(t) + \lambda p_{x-1}(t) \dots \dots \dots (6)$$

Para resolver esta ecuación diferencial haremos el siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{cambio de variable } p_x(t) &= e^{-\lambda t} v_x(t) \implies \\
 p'_x(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} v_x(t) + e^{-\lambda t} v'_x(t).
 \end{aligned}$$

Substituyendo en (6) obtenemos

$$-\lambda e^{-\lambda t} v_x(t) + e^{-\lambda t} v'_x(t) = -\lambda e^{-\lambda t} v_x(t) + \lambda e^{-\lambda t} v_{x-1}(t)$$

$$\implies e^{-\lambda t} v'_x(t) = \lambda e^{-\lambda t} v_{x-1}(t) \implies v'_x(t) = \lambda v_{x-1}(t) \dots \dots \dots (7)$$

$$\implies \frac{dv_x(t)}{dt} = \lambda v_{x-1}(t) \implies dv_x(t) = \lambda v_{x-1}(t) dt$$

$$\implies \int_0^t dv_x(t) = \lambda \int_0^t v_{x-1}(t) dt \dots \dots \dots (8)$$

$$\implies v_x(t) \Big|_0^t = \lambda \int_0^t v_{x-1}(t) dt.$$

Como $v_x(t) = e^{\lambda t} p_x(t) \implies v_\delta(t) = e^{\lambda t} p_\delta(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1$ y como

$v_x(0) = e^{\lambda \cdot 0} p_x(0) = 1 \cdot 0 = 0$ tendremos que

$$v_1(t) \Big|_0^t = v_1(t) = \lambda \int_0^t v_0(t) dt = \lambda \int_0^t dt = \lambda t \Big|_0^t = \lambda t \implies \underline{\underline{v_1(t) = \lambda t}}$$

$$\implies v_2(t) = \lambda \int_0^t v_1(t) dt = \lambda \int_0^t \lambda t dt = \lambda^2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^t = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

$$\implies v_3(t) = \lambda \int_0^t v_2(t) dt = \lambda \int_0^t \frac{(\lambda t)^2}{2} dt = \frac{\lambda^2 \lambda}{2} \int_0^t t^2 dt = \frac{\lambda^3 t^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^t = \frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

$$\implies v_4(t) = \lambda \int_0^t v_3(t) dt = \lambda \int_0^t \frac{\lambda^3 t^3}{3!} dt = \frac{\lambda^4 t^4}{3! \cdot 4} \Big|_0^t = \frac{(\lambda t)^4}{4!}$$

⋮

$$\implies v_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \dots \dots \dots (9)$$

Por lo que $p_x(t) = e^{-\lambda t} v_x(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!}$ será la

probabilidad de que una neurona dispare x veces en el intervalo de tiempo $(0, t]$. Para obtener el resultado deseado al principio de esta sección basta con poner $x=1$ y $t=\bar{t}$ con lo que $p_1(\bar{t}) = e^{-\lambda \bar{t}} \lambda \bar{t}$, y si $\bar{t}=1$, tal como se ha tomado en varios casos, entonces $p_1(1) = \lambda e^{-\lambda}$.

CAPITULO 5

ALGUNOS COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Los biólogos frecuentemente critican la neurona lógica por ser muy irreal, especialmente en relación a su dependencia temporal. Es importante para nosotros realizar que ésto no es muy cierto. La gran ventaja de la neurona lógica es su simplicidad que frecuentemente nos permite de una forma fácil ganar conocimiento al respecto de como esperamos que actue un sistema de neuronas. La neurona lógica tiene muchas propiedades realistas tales como valor de cambio, excitabilidad, sumación espacial y carácter de todo o nada, pero en nuestro intento de ganar simplicidad tenemos que pagar el precio de la falta de realismo en algunos aspectos. Esta es una característica normal en la aplicación de matemática en el mundo real, es decir, el hecho que frecuentemente de forma deliberada simplifiquemos algo en un afán por ganar tratabilidad matemática, mientras que debemos reconocer el peligro, que tal simplificación nos puede llevar a resultados no genuinos.

Respecto al problema que se menciona en la segunda línea del párrafo anterior, debieramos de cualquier forma tener una idea de qué valor y significado deba de tener el intervalo de tiempo \mathcal{T} . En opinión de algunos especialistas, \mathcal{T}

debiera de ser tomado como el promedio estimado del tiempo que transcurre entre el disparar de una célula presináptica y el momento en que ese disparo por primera vez tiene el potencial suficiente para influenciar el proceso de disparar de todas aquellas células postsinápticas a las que está conectada. Entonces $\bar{\tau}$ debe de ser formado de 4 componentes, cada una de las cuales será probablemente un pequeño múltiplo o submúltiplo de 1 msec. El primero, $\bar{\tau}_1$, es el tiempo que le toma al potencial de acción viajar a través del axón a los botones sinápticos. Luego existe un pequeño retraso $\bar{\tau}_2$, llamado el retraso sináptico, antes de que el potencial postsináptico (PSP) empiece a aparecer (según algunos autores $\bar{\tau}_2 = 0.2 \rightarrow 2$ msec). El PSP sale dando lugar a $\bar{\tau}_3$, que también tarda unos cuantos msec. Finalmente, $\bar{\tau}_4$ es el tiempo en que crece el potencial de acción desde su nivel de cambio hasta su máximo. $\bar{\tau}_4$ es probablemente de valores típicos menores a 1 msec. Así pues, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_3 + \bar{\tau}_4$ con valores de unos cuantos msec., probablemente menos de 10 msec., según los entendidos.

Aunque ésto da una forma de asignar un valor a $\bar{\tau}$, no hace que la cuantización sea aceptable; solo requiere que se permita a una célula disparar a una sucesión de tiempos $t_0 + p\bar{\tau}$, $p \in \mathbb{Z}^+$. La arbitrariedad en la escogencia de t_0 se debe al hecho de que normalmente no existe sincronización en su sistema real.

No seguiremos insistiendo al respecto del anterior problema, puesto que es inevitable; mejor pasamos a otros 2 puntos. El primero es que en ningún momento se consideró la re-

fracción (sec.2.2.5). El período de refracción sería normalmente menor que $\bar{\tau}$, así que el hecho de que una neurona lógica no pueda disparar 2 veces en menos de $\bar{\tau}$ segundos es suficiente para nuestro propósito. En caso de no ser así, entonces tendremos que introducir en la definición de neurona lógica, el requerimiento de que no pueda ésta disparar de nuevo hasta transcurridos $x\bar{\tau}$ segundos después de la última vez que lo haya hecho, donde $x \in \mathbb{Z}^+$ y $x \geq 1$. El segundo punto que quería mencionar es la habituación (sec. 2.2.6). Esta puede ser incorporada fácilmente en la definición por medio de imponer algunas restricciones en el número de veces que una neurona lógica pueda disparar en un período dado. Por ejemplo, uno pudiera exigir de que la neurona no puede disparar al tiempo $t_0 + p\bar{\tau}$ si lo ha hecho más de a veces en el intervalo de tiempo $[t_0 + (p-b)\bar{\tau}, t_0 + p\bar{\tau})$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ fijos (nótese que el período de refracción está dado por el caso especial $a=0$, $b=x-1$).

Sinceramente creo que pudiéramos seguir enumerando ventajas y desventajas en el modelo. La mera verdad es, según mi opinión, el hecho de que este modelo presenta un enfoque matemático fácil para la comprensión de la naturaleza de las neuronas. Es así, como luego de una quizá poco larga, pero muy interesante parte biológica, se expuso un modelo neuronal de bastante tratabilidad matemática, pero que desgraciadamente por el momento bastante difícil de hacer funcionar en una computadora, lo que es una lástima debido a su creciente importancia en la actualidad, por lo que finalmente se enfocó el pro-

blema desde un ángulo probabilístico.

Espero que con este trabajo haya llenado al menos en una pequeña parte la curiosidad de todas aquellas personas interesadas por saber en que consiste un tratamiento biomatemático, y haya podido mostrar a los faltos de fé en la matemática, de su poder explicativo de un fenómeno, para muchos supuestamente ajeno a ella. Y es por ese afanoso motivo que me decidí a hacer una tesis de fácil comprensión en vez de una de "altos conceptos matemáticos". Así pues, espero haber llenado a la mayor cabalidad mi objetivo, tal como fué también expuesto en la introducción, pero la última palabra en la apreciación la tienen, ustedes, señores lectores.

BIBLIOGRAFIA

- Conrad, M., Guettinger, W., Dal Cin, M.: "Physics and Mathematics of the Nervous System", "Lecture Notes in Biomathematics". Springer Verlag (1974)
- Griffith, J.S.: "A View of the Brain". Oxford University Press (1977)
- Hodkin, A.L. y Huxley, A.F.: "A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve". Journal of Physiology, Volúmen 117 (1952) (páginas 500-544)
- Holden, Arun V.: "Models of the Stochastic Activity of Neurons", "Lecture Notes in Biomathematics". Springer Verlag (1976)
- Kent, Ernest W.: "The Brains of Men and Machines", "Part 1: Biological Models for Robotics". Revista BYTE, Volúmen 3 (1978) (páginas 11-22 y 96-106)
- Mac Kay, Donald M. y McCulloch, Warren S.: "The Limiting Information Capacity of a Neuronal Link". Bulletin of Mathematical Biophysics, Volúmen 14 (1972) (páginas 127-135)
- McCulloch, Warren S. y Pitts, Walter: "A Logical Calculus of Ideas Inherent in Nervous Activity". Bulletin of Mathematical Biophysics, Volúmen 5, (1943) (páginas 115-133)
- Rachevsky, Nicolas: "A Suggestion for another Statistical Interpretation of the Fundamental Equations of the Mathematical Biophysics of the Central Nervous System". Bulletin of Mathematical Biophysics, Volúmen 7 (1945) (páginas 223-226)
- Smith, C.U.M.: "El Cerebro". Alianza Editorial (1972)
- Von Neumann, John: "The Computer and the Brain". Yale University Press (1958)