

---

# Fundamentos del Cálculo de Itô: Bases Teóricas para el Cálculo Estocástico y sus Aplicaciones

---

Guillermo Alfonso Furlán Estrada



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Fundamentos del Cálculo de Itô:  
Bases Teóricas para el Cálculo  
Estocástico y sus Aplicaciones**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Guillermo Alfonso Furlán Estrada  
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala  
2024



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Fundamentos del Cálculo de Itô:  
Bases Teóricas para el Cálculo  
Estocástico y sus Aplicaciones**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Guillermo Alfonso Furlán Estrada  
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala  
2024

Vo.Bo..



(f)

Msc. Alan Reyes Figueroa

Tribunal Examinador.



(f)

Msc. Alan Reyes Figueroa



(f)

MSc. Rodrigo Leonardo



(f)

Msc. Dorval Carias Samayoa

Fecha de aprobación: Guatemala, 7 de Enero de 2025

<b>Lista de figuras</b>	<b>v</b>
<b>Lista de cuadros</b>	<b>vi</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.1.1. Objetivos generales . . . . .	2
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	2
<b>2. Nociones Básicas de la Teoría de Probabilidades</b>	<b>4</b>
2.1. Nociones Básicas de la Teoría de Probabilidades . . . . .	4
2.1.1. Definiciones fundamentales . . . . .	4
2.1.2. Variables aleatorias y distribuciones . . . . .	8
2.1.3. Esperanza matemática, varianza y momentos . . . . .	10
2.1.4. Procesos estocásticos . . . . .	13
<b>3. Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos</b>	<b>16</b>
3.1. Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos . . . . .	16
3.1.1. Definición de proceso gaussiano . . . . .	16
3.1.2. El movimiento browniano como proceso gaussiano . . . . .	17
3.1.3. Ejemplos de movimiento browniano . . . . .	22
<b>4. Martingalas</b>	<b>25</b>
4.1. Martingalas . . . . .	25
4.1.1. Esperanza condicional y función de distribución condicional . . . . .	25

4.1.2.	Martingalas . . . . .	29
4.1.3.	Transfromada de martingala . . . . .	34
<b>5.</b>	<b>Cálculo de Itô</b>	<b>37</b>
5.1.	Cálculo de Itô . . . . .	37
5.1.1.	La integral de Itô . . . . .	37
5.1.2.	Fórmula de Itô . . . . .	43
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales Estocásticas</b>	<b>49</b>
6.1.	Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .	49
6.1.1.	Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	49
6.1.2.	Unicidad y existencia de soluciones de EDES . . . . .	52
6.1.3.	El modelo de Vasiček . . . . .	55
<b>7.</b>	<b>Modelo de Vasiček con Datos Reales</b>	<b>57</b>
7.1.	Modelo de Vasiček con Datos Reales . . . . .	57
7.1.1.	Discretización del modelo . . . . .	57
7.1.2.	Resultados . . . . .	59
<b>8.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>66</b>
8.1.	Conclusiones . . . . .	66
8.2.	Recomendaciones . . . . .	67
<b>9.</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

---

## Lista de figuras

---

2.1. Movimiento browniano . . . . .	14
3.1. Movimiento browniano reflejado . . . . .	22
3.2. Movimiento browniano geométrico . . . . .	23
3.3. Movimiento browniano puente con $T=0.5$ . . . . .	24
4.1. Martingala de tiempo discreto . . . . .	30
4.2. Martingala de tiempo continuo . . . . .	31
7.1. Simulación de 2023-2024 calibrando desde 1996 . . . . .	59
7.2. Simulación de 2023-2024 calibrando desde 2000 . . . . .	60
7.3. Simulación de 2023-2024 calibrando desde 2010 . . . . .	60
7.4. Simulación de 2008 calibrado desde 1998 . . . . .	61
7.5. Simulación de 2016 calibrado desde 2006 . . . . .	61
7.6. Simulación de 2023 calibrado desde 2013 . . . . .	62
7.7. Simulación de 10 instancias . . . . .	63
7.8. Simulación de 30 instancias . . . . .	63
7.9. Simulación de 50 instancias . . . . .	63
7.10. Simulación de 150 instancias . . . . .	64
7.11. Simulación de 500 instancias . . . . .	64

---

Lista de cuadros

---

7.1. Resumen de métricas de evaluación . . . . .	60
7.2. Resumen de métricas de evaluación por año . . . . .	62
7.3. Métricas de evaluación de las simulaciones en diferentes iteraciones. . . . .	64

---

## Resumen

---

En este trabajo de graduación se busca sentar las bases teóricas para el desarrollo del Cálculo de Itô. Empezando con los conceptos básicos de la teoría de probabilidades y de procesos estocásticos. Luego se profundizará en ejemplos los particulares de procesos estocásticos de martingalas y movimiento browniano, esto por el rol que estos tienen en la teoría del cálculo estocástico. Con las bases sentadas se procederá a definir la integral de Itô y estudiar sus propiedades, ya con la integral definida se pasará la prueba de la fórmula de Itô. Con el fin de mostrar la aplicación de la teoría desarrollada se explorarán las ecuaciones diferenciales estocásticas y la prueba del teorema de unicidad de soluciones.

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

El cálculo de Itô es una herramienta importante en la teoría de procesos estocásticos y ha revolucionado la forma en que los sistemas con incertidumbre pueden ser modelados y analizados. A partir del desarrollo de esta rama del cálculo estocástico por el matemático japonés Kiyoshi Itô en la década de 1940, ha sido posible abordar problemas inherentes a la aleatoriedad, particularmente en el ámbito financiero. Este desarrollo ha sido esencial para la valoración de opciones y otros derivados financieros, y es utilizado ampliamente en modelos como el de Black-Scholes y otros relacionados con las tasas de interés.

A pesar de su importancia, la complejidad inherente del cálculo de Itô y la falta de recursos didácticos accesibles en español constituyen barreras significativas para su comprensión teórica y posterior aplicación, tanto para estudiantes como para profesionales. Esta tesis pretende llenar ese vacío al proporcionar un recurso integral, riguroso y accesible, que aborde desde los conceptos más básicos hasta las demostraciones más importantes de la teoría.

Los objetivos principales de este trabajo incluyen la exposición de los conceptos teóricos esenciales para comprender el cálculo de Itô, la explicación detallada de los teoremas fundamentales, principalmente la fórmula de Itô y su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Se busca, además, ofrecer ejemplos prácticos que ilustren cómo el cálculo de Itô puede ser aplicado de manera efectiva, facilitando el aprendizaje y la aplicabilidad de esta poderosa herramienta matemática en contextos académicos y profesionales.

El enfoque de esta tesis está dirigido a proporcionar una base teórica sólida sobre la cual los lectores puedan construir un entendimiento profundo del cálculo de Itô y sus aplicaciones. Con ello, se espera que los estudiantes y profesionales puedan superar las barreras teóricas y aplicativas que

suelen presentarse, contribuyendo a una mayor democratización del conocimiento en este campo.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivos generales

- Hacer una revisión y exposición de los principales conceptos teóricos necesarios para comprender el cálculo de Itô, detallando los teoremas fundamentales para el entendimiento de las fórmulas de Itô, y mostrar su uso en otro ámbito como la finanzas.
- Ilustrar algunas aplicaciones prácticas del cálculo de Itô, mediante la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Definir y explicar los conceptos necesarios básicos para la comprensión y construcción del cálculo de Itô.
- Desarrollar con rigor matemático los detalles teóricos que sustentan el Lema de Itô, el cual es la pieza fundamental de la teoría del cálculo de Itô.
- Ejemplificar el uso práctico del cálculo de Itô en la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante la exposición de casos concretos.

## 1.2. Justificación

La importancia de este trabajo radica en la escasez de recursos en español para el estudio del cálculo de Itô. Este trabajo de graduación busca llenar este vacío al proporcionar un recurso integral y accesible que parta de los conceptos más importantes de la teoría. Al establecer una base sólida en los principios del cálculo de Itô, se facilitará la comprensión de sus aplicaciones en diversas ramas del conocimiento. Además, este trabajo se enfocará en una de las aplicaciones directas más importantes de la teoría: la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Esto no solo permitirá a los lectores adquirir una comprensión profunda del cálculo de Itô, sino que también les proporcionará las herramientas necesarias para aplicar esta teoría en contextos prácticos y avanzados.

## 1.3. Antecedentes

El cálculo de Itô es una rama del cálculo estocástico desarrollada por el matemático japonés Kiyoshi Itô en la década de 1940. Este desarrollo revolucionó la manera en que se pueden modelar y analizar sistemas influenciados por la aleatoriedad. Antes de la contribución de Itô, los métodos deterministas predominaban en el análisis matemático, pero eran insuficientes para describir

fenómenos inherentemente estocásticos como el movimiento browniano. Fue esta innovación la que permitió ampliar el estudio de fenómenos con componentes estocásticos, que para muchas áreas del conocimiento pueden presentar un desafío.

Para poder introducirse en la teoría desarrollada por Itô, es necesaria una base teórica sólida en teoría de probabilidades, principalmente en variables aleatorias y probabilidad condicional. Además, se requiere conocimiento de las propiedades de los procesos estocásticos, en particular del movimiento browniano y las martingalas. Estos ejemplos de procesos estocásticos desempeñan un papel vital en el cálculo estocástico y, en especial, en el cálculo de Itô.

Uno de los temas más importantes de la teoría de Itô es su lema o fórmula, ampliamente utilizada para la solución o aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. En particular, este lema es una herramienta utilizada para resolver la ecuación de Black-Scholes, la cual constituye una base y una herramienta clave en la teoría de inversiones. Esta ecuación no podría comprenderse sin la fórmula de Itô. Además, dicha fórmula establece las bases para métodos de aproximación de soluciones, como el método de Milstein.

---

## Nociones Básicas de la Teoría de Probabilidades

---

### 2.1. Nociones Básicas de la Teoría de Probabilidades

El primer capítulo tratará los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades, los cuales permiten comprender el cálculo de Itô y sus aplicaciones en el análisis de procesos estocásticos. La comprensión de estos conceptos básicos es muy importante para avanzar hacia temas más complejos como el movimiento browniano o las martingalas.

#### 2.1.1. Definiciones fundamentales

La teoría de probabilidades proporciona las herramientas necesarias para comprender y analizar situaciones donde los resultados no se pueden determinar con exactitud previa, conocidas como experimentos aleatorios. Estos experimentos se caracterizan por depender de elementos de azar. Entre los experimentos simples se encuentran el lanzamiento de dados y las secuencias de lanzamientos de monedas. En escenarios más complejos, la desintegración de sustancias radioactivas o la generación de números aleatorios por ordenadores.

Dado que los resultados de estos experimentos no pueden preverse con certeza, es importante definir y comprender conceptos como el espacio muestral, los eventos y la probabilidad de los mismos. Estos conceptos son la base para modelar y analizar el comportamiento de experimentos aleatorios en un marco probabilístico.

**Definición 2.1.1** (Experimento aleatorio). Un *experimento aleatorio* es un experimento en el cual:

- Todos los resultados del experimento son conocidos por anticipado.
- Cualquier ejecución del experimento provee un resultado que no es conocido de antemano.
- El experimento puede ser repetido bajo idénticas condiciones.

La noción de un experimento aleatorio nos lleva a la necesidad de definir un espacio muestral  $\Omega$ , que es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento. En otras palabras, el espacio muestral es la colección de todos los resultados que pueden ocurrir cuando se realiza el experimento. Cada uno de estos resultados se denomina evento. Estos permiten modelar la incertidumbre asociada con el experimento.

Sin embargo, antes de definir de manera formal estos conceptos, es necesario disponer de una estructura que permita manejar combinaciones de eventos de manera consistente, garantizando que las operaciones básicas, como la unión o la complementación de conjuntos, sigan formando parte del conjunto de eventos válidos. Esta estructura se formaliza mediante el concepto de una  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 2.1.2** ( $\sigma$ -álgebra). Una  $\sigma$ -álgebra  $S$  es una clase no vacía de subconjuntos de  $\Omega$  que cumple con:

- $\emptyset \in S$ .
- Si  $E \in S$ , entonces  $E^c = \Omega \setminus E \in S$ .
- Si  $\{E_n\}, E_n \in S, n = 1, 2, \dots$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$ .

Ya con esta estructura se puede definir de manera formal tanto el espacio muestral como los eventos.

**Definición 2.1.3** (Espacio muestral). El *espacio muestral* de un experimento estadístico es una pareja  $(\Omega, S)$ , donde:

- $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
- $S$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ .

**Definición 2.1.4** (Evento). Un *evento* es cualquier conjunto  $A \in S$ . Un evento ocurre si el resultado del experimento corresponde a los puntos en  $A$ .  $\Omega$  es el evento seguro o cierto, y  $\emptyset$  es el evento imposible.

Después de establecer el espacio muestral y los eventos asociados, surge la necesidad de cuantificar la incertidumbre inherente a cada uno de estos eventos. Para ello, utilizamos la medida de probabilidad, una función que asigna un valor entre 0 y 1 a cada evento, reflejando así la probabilidad de su ocurrencia. La  $\sigma$ -álgebra garantiza que todos los subconjuntos de interés están incluidos, permitiendo que la medida de probabilidad se aplique de manera coherente en todo el espacio muestral.

**Definición 2.1.5** (Medida de probabilidad). Una función  $P$  definida sobre  $S$  es llamada una *medida de probabilidad* si satisface las siguientes condiciones:

- $P(A) \geq 0$  para todo  $A \in S$ .
- $P(\Omega) = 1$ .
- Para cualquier secuencia disjunta de conjuntos  $\{A_n\}$ ,  $A_n \in S$ , se cumple que:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Definición 2.1.6** (Espacio probabilístico). La tripleta  $(\Omega, S, P)$  es llamada un *espacio probabilístico*.

El concepto de un espacio probabilístico es la culminación de los elementos previamente definidos: un espacio muestral, una  $\sigma$ -álgebra y una medida de probabilidad. Juntos, estos tres elementos forman la base sobre la cual se construye todo el análisis probabilístico. El espacio muestral establece los posibles resultados, la  $\sigma$ -álgebra define los eventos de interés, y la medida de probabilidad cuantifica la incertidumbre asociada a estos eventos.

Una vez definidos los conceptos básicos, es importante también estudiar algunas propiedades que tienen estos objetos.

**Teorema 2.1.1** (Propiedades de la medida de probabilidad). *Las propiedades de una medida de probabilidad  $P$  definida en un espacio muestral  $\Omega$  son las siguientes:*

1. **Aditividad finita:** Para dos eventos disjuntos  $A$  y  $B$ , la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades individuales:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. **Complementariedad:** Para cualquier evento  $A$ , la probabilidad de su complemento es 1 menos la probabilidad del evento:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. **Aditividad general:** Para cualquier par de eventos  $A$  y  $B$ , la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de su intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. **Monotonidad:** Si un evento  $A$  es un subconjunto de otro evento  $B$ , entonces la probabilidad de  $A$  es menor o igual a la probabilidad de  $B$ :

$$P(A) \leq P(B).$$

A continuación se realizará la prueba de los enunciados anteriores.

1. **Aditividad finita:** Esta propiedad se obtiene directamente de la definición de función de probabilidad, siendo el caso para dos eventos de la suma de eventos disjuntos.
2. **Complementariedad:** El complemento de  $A$  es el conjunto de todos los resultados en  $\Omega$  que no están en  $A$ . Entonces,  $A \cup A^c = \Omega$  y  $A \cap A^c = \emptyset$ . Por lo tanto:

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1.$$

Y por aditividad finita:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Igualando, obtenemos:

$$1 = P(A) + P(A^c),$$

lo que implica:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. **Aditividad general:** Consideremos dos eventos  $A$  y  $B$ . La unión de estos eventos,  $A \cup B$ , puede expresarse como la unión de  $A$  y  $B \setminus A$

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Los eventos  $A$  y  $B \setminus A$  son disjuntos, por lo que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Ahora, note que  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ , con  $B \setminus A$  y  $A \cap B$  disjuntos, así que:

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

Sustituyendo  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$  en la ecuación de  $P(A \cup B)$ , obtenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + (P(B) - P(A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. **Monotonicidad:** Dado que  $A \subseteq B$ , el evento  $B$  puede descomponerse como  $B = A \cup (B \setminus A)$ , donde  $A$  y  $B \setminus A$  son disjuntos. Entonces, por aditividad finita:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Como  $P(B \setminus A) \geq 0$ , se deduce que:

$$P(B) \geq P(A).$$

□

Después de establecer las propiedades de la medida de probabilidad, como la aditividad, la complementariedad y la aditividad general, es natural explorar cómo se comporta la probabilidad cuando se introduce información adicional sobre el sistema. En muchas situaciones, no solo nos interesa la probabilidad de un evento aislado, sino también la probabilidad de que un evento ocurra dado que otro evento ya ha ocurrido. Este concepto es importante en muchos campos de la probabilidad y la estadística, y se conoce como probabilidad condicional.

La probabilidad condicional permite actualizar las probabilidades iniciales basándose en la nueva información disponible, proporcionando una herramienta poderosa para modelar situaciones en las que el conocimiento de ciertos eventos afecta la incertidumbre de otros. A continuación, se presenta la definición formal de probabilidad condicional.

**Definición 2.1.7** (Probabilidad condicional). Sea  $(\Omega, S, P)$  un espacio probabilístico, y sea  $H \in S$  con  $P(H) > 0$ . Para cualquier  $A \in S$ , la *probabilidad condicional* de un evento  $A$  dado que ocurrió un evento  $H$  es igual a:

$$P(A | H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Las probabilidades condicionales permanecerán indefinidas cuando  $P(H) = 0$ .

## 2.1.2. Variables aleatorias y distribuciones

Las variables aleatorias son un concepto central en la teoría de probabilidad, proporcionando un marco para cuantificar y modelar la incertidumbre inherente en los experimentos aleatorios. Entender cómo se distribuyen y cómo se comportan estas variables es esencial para analizar cualquier proceso estocástico, como veremos en capítulos posteriores.

**Definición 2.1.8** (Variable aleatoria). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una *variable aleatoria*  $X$  es una función medible  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada conjunto de Borel  $B \subseteq \mathbb{R}$ , el conjunto inverso  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  es un evento en  $\mathcal{F}$ .

Una vez que definimos una variable aleatoria, nos interesa conocer cómo se distribuyen sus valores posibles en el espacio real. Para ello, introducimos la función de distribución acumulada (FDA), que describe la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual a un cierto número. Esta función permite entender la distribución de una variable aleatoria y analizar su comportamiento en diferentes contextos. Antes de ver la definición formal, el siguiente ejemplo puede ilustrar la idea.

**Ejemplo 2.1.1. (Lanzamiento de un dado)** Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado equilibrado de seis caras. Definimos la variable aleatoria  $X$  que asigna a cada resultado el número de puntos mostrados. En este caso,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  es simplemente la identidad.

**Definición 2.1.9** (Función de distribución acumulada). La *función de distribución acumulada* (FDA) de una variable aleatoria  $X$  es la función  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La FDA es monótona no decreciente y satisface  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .

**Ejemplo 2.1.2. (FDA para el lanzamiento de un dado)** Para el dado equilibrado, la FDA es una función escalonada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{k}{6} & \text{si } k \leq x < k + 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

Un concepto importante en la teoría de probabilidades es el de casi seguro. Este se utiliza en muchos contextos a lo largo de este trabajo y se define de la siguiente forma:

**Definición 2.1.10** (Evento casi seguro). Dado un espacio muestral  $\Omega$ , se dice que  $A \subseteq \Omega$  ocurre casi seguramente si la probabilidad de ocurrencia de A es 1, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que no ocurra A es 0.

Al trabajar con variables aleatorias, es importante distinguir entre variables discretas y continuas, ya que esto afecta la forma en que calculamos sus distribuciones y probabilidades.

**Definición 2.1.11** (Variable aleatoria discreta). Una variable aleatoria  $X$  es *discreta* si su imagen es un conjunto finito o numerable. Existe una *función de masa de probabilidad* (FMP)  $p_X(x) = P(X = x)$  para  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum_x p_X(x) = 1$ .

**Definición 2.1.12** (Variable Aleatoria Continua). Una variable aleatoria  $X$  es *continua* si existe una *función de densidad de probabilidad* (FDP)  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  tal que para cualquier conjunto de Borel  $B$ ,

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx.$$

La función  $f_X$  satisface  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ .

**Ejemplo 2.1.3. (Variable aleatoria discreta)** Consideremos un experimento donde se lanza una moneda justa tres veces. Sea  $Y$  el número de caras obtenidas.  $Y$  es una variable aleatoria discreta con posibles valores  $\{0, 1, 2, 3\}$  y función de masa de probabilidad dada por

$$p_Y(k) = P(Y = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

**Ejemplo 2.1.4. (Distribución normal)** Un ejemplo clásico de variable aleatoria continua es la *distribución normal*, que es fundamental en muchos campos de la probabilidad y la estadística. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde  $\mu$  es la media de la distribución y  $\sigma^2$  es la varianza. La distribución normal es simétrica respecto a su media  $\mu$  y presenta una dispersión que depende de  $\sigma^2$ . Es una de las distribuciones más importantes en probabilidad debido a su papel en el Teorema del Límite Central y su aplicabilidad en diversos campos.

Otra propiedad importante de las variables aleatorias es la independencia, que juega un rol crucial en la teoría de probabilidades, especialmente en el contexto de procesos estocásticos como el cálculo de Itô. Dos o más variables aleatorias son independientes si la ocurrencia de una no proporciona información sobre la ocurrencia de la otra.

**Definición 2.1.13** (Independencia de variables aleatorias). Un conjunto de variables aleatorias  $\{X_i\}_{i \in I}$  es *independiente* si para cualquier subconjunto finito  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$  y para cualquier conjunto de Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}$ , se cumple

$$P(X_{i_1} \in B_1, X_{i_2} \in B_2, \dots, X_{i_n} \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_{i_k} \in B_k).$$

La independencia implica que el conocimiento del valor de una variable aleatoria no proporciona información sobre el valor de las otras.

### 2.1.3. Esperanza matemática, varianza y momentos

La esperanza matemática y la varianza son conceptos que proporcionan medidas clave para describir el comportamiento promedio y la dispersión de las variables aleatorias. Estos conceptos son especialmente importantes en el análisis de riesgos y en la predicción de resultados en contextos financieros y científicos.

**Definición 2.1.14** (Esperanza matemática). La *esperanza matemática* de una variable aleatoria  $X$ , denotada  $E[X]$ , representa el valor promedio esperado de  $X$ . Se define como:

- Si  $X$  es discreta, entonces  $E[X] = \sum_x x \cdot p(x)$ .
- Si  $X$  es continua, entonces  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$ .

La esperanza matemática nos da una medida central del valor de una variable aleatoria, proporcionando una primera aproximación de su comportamiento a largo plazo. A continuación, veamos un ejemplo simple de cómo calcularla.

**Ejemplo 2.1.5. (Esperanza de una variable aleatoria discreta)** Consideremos una variable aleatoria discreta  $X$  que representa el resultado de lanzar un dado equilibrado de seis caras. La esperanza matemática de  $X$  es:

$$E[X] = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5.$$

Si bien la esperanza matemática proporciona una idea del promedio esperado, es importante también cuantificar la variabilidad de los valores que puede tomar la variable aleatoria. Aquí es donde entra en juego la varianza.

**Definición 2.1.15** (Varianza). La *varianza* de una variable aleatoria  $X$ , denotada  $\text{Var}(X)$ , mide la dispersión de  $X$  alrededor de su media y se define como:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

La varianza nos indica qué tan dispersos están los valores de  $X$  respecto a la esperanza matemática. Una varianza alta significa que los valores están ampliamente distribuidos, mientras que una varianza baja indica que los valores están más concentrados cerca del promedio.

**Ejemplo 2.1.6. (Varianza de una variable aleatoria continua)** Supongamos que  $Z$  es una variable aleatoria continua con una distribución normal estándar  $N(0, 1)$ . La varianza de  $Z$  es:

$$\text{Var}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} (z - 0)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$$

La esperanza matemática y la varianza son solo las primeras de una serie de medidas conocidas como momentos, que son esenciales para describir completamente la distribución de una variable aleatoria.

**Teorema 2.1.2** (Propiedades de la esperanza y varianza). *Las siguientes son propiedades importantes de la esperanza matemática y la varianza:*

1. **Linealidad de la esperanza:** Para cualquier  $a, b \in \mathbb{R}$  y variables aleatorias  $X, Y$ ,

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

2. **Varianza de una combinación lineal:** Para constantes  $a, b$  y variables aleatorias  $X, Y$  independientes,

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y).$$

3. **No negatividad de la varianza:** Para cualquier variable aleatoria  $X$ ,

$$\text{Var}(X) \geq 0.$$

4. **Invariancia de traslación de la varianza:** Si  $c$  es una constante,

$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X).$$

Estas propiedades no solo son útiles desde un punto de vista teórico, sino que también tienen aplicaciones prácticas en la modelización de datos y en la toma de decisiones bajo incertidumbre.

*Demostración.* ■ La **Linealidad de la esperanza** se demuestra directamente aplicando la definición de esperanza para variables aleatorias discretas y continuas.

- La **varianza de una combinación lineal** se deriva de la independencia de  $X$  y  $Y$ , considerando  $E[XY] = E[X]E[Y]$  en el cálculo.
- La **no negatividad de la varianza** es evidente ya que  $(X - E[X])^2 \geq 0$  implica que su esperanza también es no negativa.
- La **invariancia de traslación de la varianza** se muestra observando que  $\text{Var}(X + c) = E[(X + c - E[X + c])^2] = E[(X - E[X])^2] = \text{Var}(X)$ .

□

La varianza es una medida que pertenece a lo que se conoce como momentos centrales, en particular, es el segundo momento. Los momentos de una variable aleatoria son medidas que proporcionan información sobre la forma de su distribución. Son generalizaciones de la esperanza matemática y son útiles para describir la distribución.

**Definición 2.1.16** (Momento alrededor del origen). El  $k$ -ésimo momento de una variable aleatoria  $Y$  alrededor del origen se define como:

$$\mu'_k = E(Y^k).$$

**Definición 2.1.17** (Momento central). El  $k$ -ésimo momento central de una variable aleatoria  $Y$  se define como:

$$\mu_k = E[(Y - E[Y])^k].$$

Después de establecer las propiedades fundamentales de la esperanza y la varianza, es natural extender nuestro análisis a la relación entre dos variables aleatorias. Mientras que la varianza mide la dispersión de una sola variable respecto a su media, la covarianza nos permite cuantificar cómo dos variables aleatorias varían conjuntamente. Esta medida es crucial en la comprensión de las interdependencias entre variables, especialmente en contextos donde la correlación y la dependencia mutua juegan un papel importante.

**Definición 2.1.18** (Covarianza). La *covarianza* entre dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , denotada  $\text{Cov}(X, Y)$ , es una medida de cómo varían conjuntamente estas dos variables. Se define como:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Si  $\text{Cov}(X, Y) > 0$ , esto indica que cuando una de las variables toma valores superiores a su media, la otra tiende a hacer lo mismo. Por otro lado, si  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ , una variable tiende a tomar valores por encima de su media cuando la otra toma valores por debajo de la suya. Una covarianza de cero sugiere que las variables son incorreladas, aunque esto no necesariamente implica que sean independientes.

**Teorema 2.1.3** (Propiedad de la covarianza para variables aleatorias independientes). *Sea  $X$  una variable aleatoria en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $Y = X + Z$ , donde  $Z$  es una variable aleatoria independiente de  $X$ . Entonces, la covarianza entre  $X$  y  $Y$  está dada por:*

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X).$$

*Demostración.* Por definición, la covarianza entre  $X$  y  $Y$  es:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X + Z).$$

Dado que la covarianza es bilineal, podemos descomponer esta expresión en dos términos:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Z).$$

Sabemos que  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ .

Además, dado que  $X$  y  $Z$  son independientes, se cumple que  $\text{Cov}(X, Z) = 0$ . Por lo tanto, la expresión se reduce a:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X).$$

Esto demuestra que la covarianza entre  $X$  y  $Y$  es igual a la varianza de  $X$ .  $\square$

#### 2.1.4. Procesos estocásticos

**Definición 2.1.19** (Proceso estocástico). Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  definidas en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $T$  es el índice temporal. Estos procesos modelan sistemas donde la incertidumbre evoluciona con el tiempo.

El estudio de los procesos estocásticos se enfoca en entender cómo las variables aleatorias dentro de la colección  $\{X_t\}$  están relacionadas y cómo evolucionan a lo largo del tiempo. Para describir estas relaciones, es importante considerar ciertas propiedades clave de los procesos estocásticos.

**Definición 2.1.20** (Propiedades de los procesos estocásticos). A continuación, se presentan algunas propiedades que pueden tener los procesos estocásticos:

- **Estacionariedad:** Un proceso  $\{X_t\}$  es estrictamente estacionario si para cualquier  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y  $\tau$ , la distribución conjunta de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  es la misma que la de  $(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$ .
- **Independencia incremental:** Un proceso tiene incrementos independientes si para cualquier  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

Estas propiedades son fundamentales para la caracterización de los procesos estocásticos y son especialmente relevantes cuando se estudian modelos como el movimiento browniano o las martingalas.

**Definición 2.1.21** (Incrementos). Dado un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , se llama *incremento* de  $X_t$  en el intervalo  $[s, t]$  a la diferencia  $X_t - X_s$ , donde  $0 \leq s < t$ . Los incrementos de un proceso pueden ser independientes, lo que significa que las diferencias en intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes.

El movimiento browniano es uno de los ejemplos más importantes de un proceso estocástico con incrementos independientes, y juega un papel central en el cálculo de Itô.

**Definición 2.1.22** (Movimiento browniano estándar). Un proceso  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un *movimiento browniano estándar* si cumple las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$  casi seguramente.

- Los incrementos son independientes: Para  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s$  es independiente de  $\{B_u : u \leq s\}$ .
- Los incrementos son estacionarios y normalmente distribuidos:  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$  para  $0 \leq s < t$ .
- $B_t$  tiene trayectorias continuas casi seguramente.

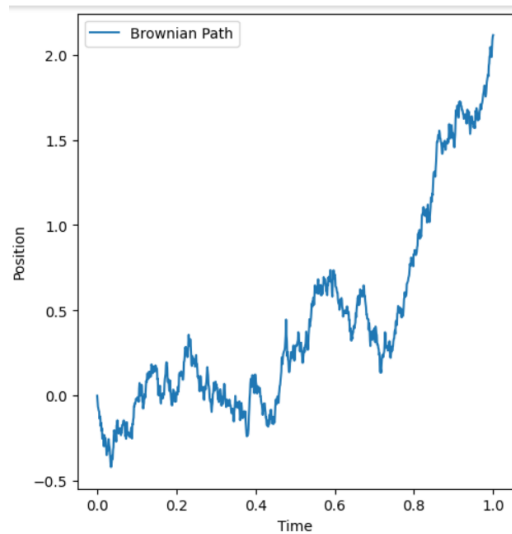


Figura 2.1: Movimiento browniano

Dado su carácter versátil y la riqueza de sus propiedades, el movimiento browniano, o también conocido como proceso de Wiener, se convierte en una herramienta fundamental para modelar fenómenos aleatorios que evolucionan de manera continua en el tiempo, abarcando aplicaciones que van desde la física hasta las finanzas. Sin embargo, para capturar completamente la dinámica de estos procesos estocásticos, no solo es necesario entender su comportamiento en términos de trayectoria, sino también la información disponible en cada instante del tiempo. Esta necesidad nos lleva al concepto de filtración, que formaliza la acumulación y evolución de la información a lo largo del tiempo en un proceso estocástico.

**Definición 2.1.23** (Filtración). Una *filtración*  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , es decir, para cada  $s \leq t$ , se tiene que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ .

La filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  representa la información acumulada hasta el tiempo  $t$ , y cada  $\mathcal{F}_t$  contiene todos los eventos que son observables hasta ese momento.

La filtración es crucial para definir conceptos como las martingalas, donde el valor esperado de la variable aleatoria en el futuro, dado todo lo que sabemos hasta ahora, es igual al valor presente.

**Definición 2.1.24** (Martingala). Una *martingala* es un proceso estocástico  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  tal que para cualquier tiempo  $s < t$ , se cumple que

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \& \quad E(|M_t|) < \infty$$

donde  $\mathcal{F}_s$  es la filtración que representa la información disponible hasta el tiempo  $s$ .

Tanto las martingalas como el movimiento browniano son procesos estocásticos fundamentales en el desarrollo del cálculo de Itô y sus propiedades se explorarán en los siguientes capítulos.

---

## Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos

---

### 3.1. Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos

En este capítulo, se inicia el estudio del movimiento browniano, uno de los procesos estocásticos más utilizados en la teoría de la probabilidad. Comenzaremos introduciendo la noción de procesos gaussianos, de los cuales el movimiento browniano es un caso particular. Luego, se proporcionarán las definiciones formales del movimiento browniano y se establecerá su relación con los procesos gaussianos. En secciones posteriores, se explorarán en detalle las propiedades del movimiento browniano, que son cruciales para su aplicación en el cálculo de Itô.

#### 3.1.1. Definición de proceso gaussiano

Los procesos gaussianos son utilizados en la teoría de procesos estocásticos debido a sus propiedades estructurales y a la facilidad con la que se pueden caracterizar mediante funciones de media y covarianza. Formalmente, se define un proceso gaussiano de la siguiente manera:

**Definición 3.1.1** (Proceso gaussiano). Un *proceso gaussiano* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  tal que para cualquier entero positivo  $n$  y cualquier selección de tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , el vector aleatorio  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  sigue una distribución conjunta gaussiana.

A continuación se presenta una propiedad de este tipo de procesos.

**Teorema 3.1.1.** Sea  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)}$  una colección de  $m$  procesos gaussianos definidos en  $[0, \infty)$  sobre el mismo espacio de probabilidad. Entonces, cualquier proceso construido mediante combinaciones lineales de estos también es un proceso gaussiano:

$$a_1 X_t^{(1)} + \cdots + a_m X_t^{(m)} = \left( a_1 X_t^{(1)} + \cdots + a_m X_t^{(m)} \right), \quad t \geq 0,$$

donde  $a_1, \dots, a_m$  pueden depender de  $t$ .

Dado que este resultado carece de interés teórico para el presente trabajo, no se incluye su demostración. Sin embargo, esta puede consultarse en la sección 2.3 del libro de Arguin.

### 3.1.2. El movimiento browniano como proceso gaussiano

En el capítulo anterior se mencionó el movimiento browniano como un ejemplo de proceso estocástico, el cual desempeña un papel crucial en el cálculo de Itô. A continuación, se presentarán las definiciones formales del movimiento browniano, destacando su caracterización como un proceso gaussiano con trayectorias continuas.

**Definición 3.1.2** (movimiento browniano estándar). El *movimiento browniano estándar*  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano con las siguientes propiedades:

1. La función de media es  $E[B_t] = 0$  para todo  $t \geq 0$ .
2. La función de covarianza está dada por

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \wedge t,$$

donde  $s \wedge t$  denota el mínimo entre  $s$  y  $t$ .

3. Las trayectorias del proceso  $t \mapsto B_t(\omega)$  son continuas casi seguramente.

En el capítulo anterior se presentó una definición de movimiento browniano la cual se demostrará que es equivalente a la presentada en este capítulo.

**Teorema 3.1.2** (Equivalencia de definiciones de movimiento browniano estándar). *Un proceso  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tiene la distribución de un movimiento browniano estándar en  $[0, \infty)$ , como se define en 3.1.2, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1.  $B_0 = 0$ .
2. Para cualquier  $s < t$ , el incremento  $B_t - B_s$  es gaussiano con media 0 y varianza  $t - s$ .
3. Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier elección de  $n$  tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ , los incrementos  $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  son independientes.
4. Las trayectorias  $t \mapsto B_t(\omega)$  son funciones continuas para un conjunto de  $\omega$  de probabilidad uno.

*Demostración.* Para probar este teorema, comenzamos demostrando que si  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso gaussiano con media cero y covarianza  $\text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$ , entonces satisface las condiciones de incrementos independientes y trayectorias continuas, y que esos incrementos tienen una distribución normal adecuada.

Dado que  $\{B_t\}$  es un proceso gaussiano, cualquier combinación lineal de sus valores en diferentes tiempos es también una variable aleatoria gaussiana. En particular, los incrementos  $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  son variables aleatorias gaussianas. Dado que la media del proceso es cero, la media de cada incremento es evidentemente cero. Para calcular la varianza de los incrementos, utilizamos la definición de la función de covarianza:

$$\text{Var}(B_t - B_s) = E[(B_t - B_s)^2] = E[B_t^2] - 2E[B_t B_s] + E[B_s^2] = \text{Var}(B_t) - 2\text{Cov}(B_t, B_s) + \text{Var}(B_s).$$

Sustituyendo las expectativas correspondientes y teniendo en cuenta que  $\text{Var}(B_t) = t$  y  $\text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$ , obtenemos que:

$$\text{Var}(B_t - B_s) = t - s,$$

lo que demuestra que los incrementos tienen la varianza correcta. Además, dado que la covarianza entre incrementos en intervalos disjuntos es cero, concluimos que los incrementos son independientes. La continuidad de las trayectorias es un resultado de la aplicación del teorema de Kolmogorov (el cual se puede encontrar en el libro de Kallianpur, teorema 1.2.2) sobre un proceso gaussiano.

Supongamos ahora que  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso que satisface las condiciones de incrementos independientes, cada uno distribuido normalmente, y que las trayectorias son continuas. Queremos demostrar que bajo estas condiciones,  $\{B_t\}$  es un proceso gaussiano con media cero y covarianza  $\text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$ .

Consideremos  $n$  tiempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Dado que los incrementos son independientes y siguen una distribución normal, podemos afirmar que las variables aleatorias  $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots$ , son gaussianas. Por la linealidad de la combinación de estas variables, cualquier combinación lineal de  $B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}$  también es gaussiana, lo que implica que el proceso  $\{B_t\}$  es gaussiano.

Finalmente, la covarianza del proceso  $\{B_t\}$  se sigue de las propiedades de los incrementos. Para  $s < t$ , se cumple que:

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \text{Cov}(B_s, B_s + (B_t - B_s)).$$

Dado que  $B_t - B_s$  es independiente de  $B_s$  y tiene media cero se puede usar el teorema 1.4 y tenemos:

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \text{Cov}(B_s, B_s) = \text{Var}(B_s) = s.$$

Esto coincide con  $s \wedge t$ . Así, hemos demostrado que  $\{B_t\}$  es un proceso gaussiano con la covarianza correcta.

□

La equivalencia demostrada entre las definiciones del movimiento browniano estándar es de gran importancia en la teoría de procesos estocásticos y en diversas aplicaciones prácticas. Esta equivalencia nos asegura que las diferentes maneras de caracterizar el movimiento browniano son consistentes entre sí, lo que nos proporciona una gran flexibilidad a la hora de trabajar con este proceso en distintos contextos.

Uno de los conceptos que se usará más adelante en la tesis es la variación cuadrática de una función. Esta es una forma de analizar cómo oscila una función a lo largo de un intervalo. Formalmente, se define como:

$$\langle f \rangle_t = \lim \sum (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2$$

En particular, nos interesa estudiar la variación cuadrática del movimiento browniano y para ello se necesita el siguiente concepto.

**Definición 3.1.3** (Convergencia en  $L^2$  de variables aleatorias). Una sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n \geq 1}$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se dice que converge en  $L^2$  a una variable aleatoria  $X$  si la norma  $L^2$  de la diferencia entre  $X_n$  y  $X$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Es decir,

$$\|X_n - X\| = (E[(X_n - X)^2])^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esta forma de convergencia también se conoce como convergencia en media cuadrática. Equivalentemente, esto implica que:

$$E[(X_n - X)^2] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

También es importante mencionar que el espacio  $L^2$  es el espacio de todas las variables aleatorias de un espacio de probabilidad que cumplen con

$$E[X^2] < \infty$$

**Teorema 3.1.3.** Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar. Para cualquier partición uniforme del intervalo  $[0, t]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $\Delta t = \frac{t}{n}$ , la suma de los cuadrados de los incrementos del movimiento browniano converge en  $L^2$  a  $t$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir,

$$\langle B \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = t.$$

*Demostración.* Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar. Queremos demostrar que, para cualquier partición uniforme del intervalo  $[0, t]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $\Delta t = \frac{t}{n}$ , la suma de los cuadrados de los incrementos del movimiento browniano converge en  $L^2$  a  $t$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir,

$$\langle B \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = t.$$

Dado que los incrementos del movimiento browniano estándar son independientes y normalmente distribuidos, tenemos que para cada incremento  $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ , se cumple que  $B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \sim N(0, \Delta t)$ . Esto implica que  $\mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \Delta t$ .

Consideramos la suma de los cuadrados de los incrementos:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2.$$

La esperanza de  $S_n$  es:

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2].$$

Dado que  $\mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \Delta t$ , entonces:

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t = n\Delta t = n \cdot \frac{t}{n} = t.$$

Por lo tanto,  $\mathbb{E}[S_n] = t$ .

Para calcular la varianza de  $S_n$ , consideramos:

$$\text{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - (\mathbb{E}[S_n])^2.$$

Ya sabemos que  $\mathbb{E}[S_n] = t$ , así que necesitamos calcular  $\mathbb{E}[S_n^2]$ . Expandimos  $S_n^2$  como:

$$S_n^2 = \left( \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right)^2.$$

Esto se expande como:

$$S_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4 + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2.$$

La expectativa de  $S_n^2$  es:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4] + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] \cdot \mathbb{E}[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2].$$

Dado que  $X \sim N(0, \Delta t)$ ,  $\mathbb{E}[X^4] = 3(\Delta t)^2$ , así que:

$$\mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4] = 3(\Delta t)^2.$$

Y dado que  $\mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \Delta t$ , los términos cruzados son:

$$\sum_{0 \leq j < k \leq n-1} \mathbb{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] \cdot \mathbb{E}[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2] = \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} (\Delta t)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (\Delta t)^2.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = 3n(\Delta t)^2 + n(n-1)(\Delta t)^2.$$

Simplificando:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = 3n \left(\frac{t}{n}\right)^2 + n(n-1) \left(\frac{t}{n}\right)^2 = t^2 + \frac{2t^2}{n}$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - t^2 = t^2 + \frac{2t^2}{n} - t^2 = \frac{2t^2}{n}$$

Finalmente, para mostrar la convergencia en  $L^2$ , consideramos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(S_n - t)^2] = \text{Var}(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2t^2}{n} = 0.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = t \text{ en } L^2.$$

□

### 3.1.3. Ejemplos de movimiento browniano

En esta subsección, se presentan diferentes variantes del movimiento browniano como ejemplos específicos, cada una con características y aplicaciones particulares que amplían el concepto básico de este proceso estocástico.

**Ejemplo 3.1.1** (Movimiento browniano reflejado). El *movimiento browniano reflejado* es una variante del movimiento browniano que se mantiene no negativo al reflejarse en cero cada vez que intenta cruzar al lado negativo. Formalmente, si  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar, el movimiento browniano reflejado  $R_t$  se define como:

$$R_t = |B_t| = B_t \vee (-B_t),$$

donde  $\vee$  denota el máximo. Este proceso es útil en modelos donde una variable estocástica no puede tomar valores negativos, como en ciertos modelos de colas o en la valoración de opciones financieras que incluyen barreras.

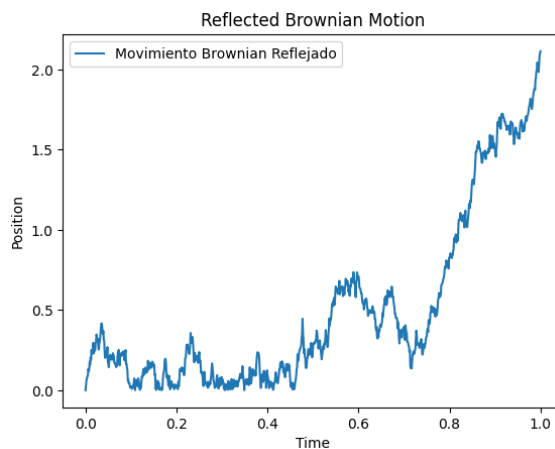


Figura 3.1: Movimiento browniano reflejado

**Ejemplo 3.1.2** (Movimiento browniano geométrico). El *movimiento browniano geométrico* es fundamental en la modelización de precios de activos financieros, donde se asume que los precios siguen una evolución exponencialmente multiplicativa. Si  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar, el movimiento browniano geométrico  $S_t$  se define como:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t),$$

donde  $S_0$  es el valor inicial,  $\mu$  es la tasa de crecimiento (o deriva), y  $\sigma$  es la volatilidad. Este modelo es la base del famoso modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones financieras.

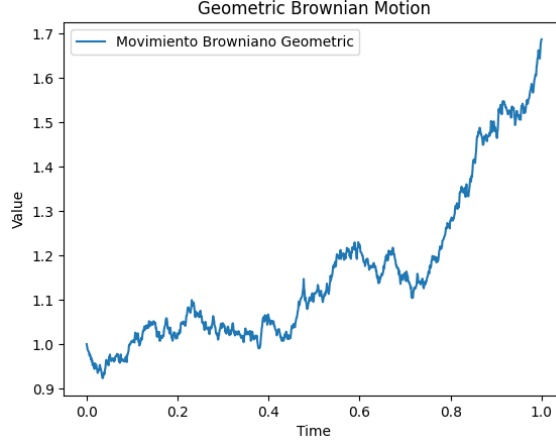


Figura 3.2: Movimiento browniano geométrico

**Ejemplo 3.1.3** (Movimiento browniano con deriva). El *movimiento browniano con Deriva* introduce un término de tendencia en el movimiento browniano estándar, lo que permite modelar procesos donde existe una tendencia a largo plazo además del componente aleatorio. Se define como:

$$X_t = \mu t + \sigma B_t,$$

donde  $\mu$  es la tasa de deriva y  $\sigma$  es la volatilidad del proceso. Este tipo de movimiento browniano es relevante en muchos contextos financieros y económicos, donde se observa una tendencia general en los datos junto con fluctuaciones aleatorias.

**Ejemplo 3.1.4** (Movimiento browniano fraccionario). El *Movimiento browniano fraccionario* es una generalización del movimiento browniano estándar, caracterizado por tener una estructura de dependencia más compleja entre los incrementos del proceso. Si bien el movimiento browniano estándar tiene incrementos independientes, el movimiento browniano fraccionario introduce una memoria en el proceso. Se define con un parámetro  $H \in (0, 1)$ , conocido como el parámetro de Hurst:

$$B_t^H = \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB_s,$$

donde  $B_t^H$  es el movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst  $H$ . Este proceso es útil en aplicaciones donde se observan fenómenos con dependencia a largo plazo, como en series temporales de naturaleza geofísica o financiera.

**Ejemplo 3.1.5** (Movimiento browniano puente). El *Movimiento browniano puente* es una versión condicionada del movimiento browniano, donde el proceso se fija en un valor específico en un tiempo futuro dado. Es decir, se considera un movimiento browniano estándar  $\{B_t\}$  condicionado a que  $B_T = 0$  para algún  $T > 0$ . Se define como:

$$B_t^{(T)} = B_t - \frac{t}{T}B_T, \quad t \in [0, T].$$

Este proceso es relevante en situaciones donde se necesita modelar un camino browniano que debe pasar por un punto específico en un tiempo determinado, como en ciertos problemas de control estocástico.

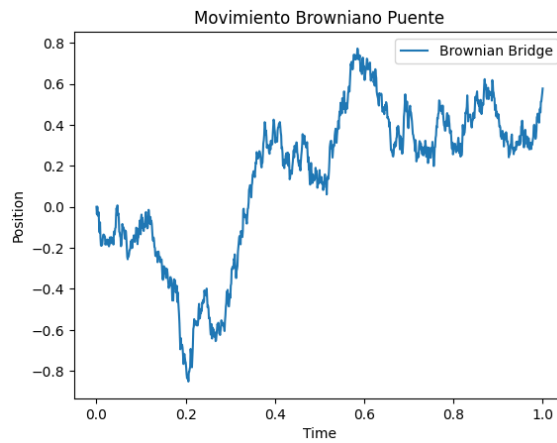


Figura 3.3: Movimiento browniano puente con  $T=0.5$

## 4.1. Martingalas

En este capítulo, exploraremos el concepto de martingala, previamente mencionado en capítulos anteriores. Una martingala es un tipo de proceso estocástico que desempeña un papel vital en diversas aplicaciones matemáticas, especialmente en el cálculo estocástico y en la teoría financiera. Antes de definir formalmente una martingala, es esencial entender el concepto de *esperanza condicional*, que es fundamental para la definición y las propiedades de las martingalas.

### 4.1.1. Esperanza condicional y función de distribución condicional

La esperanza condicional es una herramienta esencial en la teoría de probabilidades que permite calcular la mejor estimación de una variable aleatoria dada cierta información. Para formalizar este concepto, consideremos una variable aleatoria  $X$  y un evento  $B$  con  $P(B) > 0$ .

**Definición 4.1.1** (Función de distribución condicional). La *función de distribución condicional* de una variable aleatoria  $X$  dado un evento  $B$  con  $P(B) > 0$  se define como:

$$F_X(x|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definición 4.1.2** (Esperanza condicional). La *esperanza condicional* de  $X$  dado un evento  $B$  con

$P(B) > 0$  se define como:

$$E(X|B) = \frac{E(X\mathbb{I}_B)}{P(B)},$$

donde  $\mathbb{I}_B(w)$  es la función indicatriz del suceso  $B$  definida por:

$$\mathbb{I}_B(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in B, \\ 0 & \text{si } w \notin B. \end{cases}$$

Estas definiciones permiten describir cómo la información contenida en  $B$  afecta las propiedades estadísticas de  $X$ .

**Definición 4.1.3** (Esperanza condicional para variables aleatorias discretas). Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con valores  $x_1, x_2, \dots$ , la *esperanza condicional* de  $X$  dado  $B$  se expresa como:

$$E(X|B) = \sum_{t=1}^{\infty} x_t \frac{P(\{w : X(w) = x_t\} \cap B)}{P(B)} = \sum_{t=1}^{\infty} x_t P(X = x_t|B).$$

**Definición 4.1.4** (Esperanza condicional para variables aleatorias continuas). Si  $X$  tiene una función de densidad  $f_X$ , entonces la *esperanza condicional* de  $X$  dado  $B$  se expresa como:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{I}_B(x) f_X(x) dx = \frac{1}{P(B)} \int_B x f_X(x) dx.$$

Una notación reducida es  $\int_B g(x) dx$  en lugar de  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathbb{I}_B(x) dx$ .

A partir de estas definiciones, es importante considerar cómo se generaliza este concepto cuando la esperanza condicional se toma con respecto a otra variable aleatoria. Esta forma de esperanza condicional es particularmente útil en situaciones donde queremos entender cómo cambia la expectativa de una variable aleatoria dado el conocimiento parcial de otra. A continuación, presentamos la definición formal de la esperanza condicional de una variable aleatoria  $X$  dada otra variable aleatoria  $Y$ .

**Definición 4.1.5** (Esperanza condicional para variables aleatorias). Para una variable aleatoria  $X$  sobre  $\Omega$  con  $\mathbb{E}(X) < \infty$ , definimos la *esperanza condicional de  $X$ , dada la variable aleatoria  $Y$* , como la variable aleatoria discreta:

$$E(X|Y)(w) = E(X|A_i) = E(X|Y = y_i) \quad \text{para } w \in A_i, i = 1, 2, \dots$$

Si sabemos que ha acaecido  $A_i$ , podemos restringirnos a los  $w \in A_i$ . Para aquellos  $w$ ,  $E(X|Y)(w)$  coincide con la esperanza condicional clásica  $\mathbb{E}(X|A_i)$ .

**Teorema 4.1.1.** *Las esperanzas de  $X$  y  $E(X|Y)$  son iguales:  $E(X) = E(E(X|Y))$ .*

*Demostración.* Para demostrar que  $E(X) = E(E(X|Y))$ , utilizaremos las definiciones previas de esperanza condicional. Partimos de la definición de esperanza condicional de una variable aleatoria

$X$  dada otra variable aleatoria  $Y$ , en la que se considera una partición  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  del espacio muestral  $\Omega$  tal que cada  $A_i = \{Y = y_i\}$ .

Por la definición de esperanza condicional de  $X$  dada  $Y$ , sabemos que:

$$E(E(X|Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|A_i)P(A_i).$$

Dado que  $E(X|A_i) = E(X\mathbb{I}_{A_i})/P(A_i)$ , podemos reescribir la suma como:

$$E(E(X|Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X\mathbb{I}_{A_i})}{P(A_i)}P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X\mathbb{I}_{A_i}).$$

Observamos que la suma  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i} = \mathbb{I}_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} = \mathbb{I}_{\Omega} = 1$ . Por lo tanto, podemos simplificar:

$$E(E(X|Y)) = E\left(X \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}\right) = E(X \cdot 1) = E(X).$$

Por lo tanto, se puede concluir que  $E(X) = E(E(X|Y))$ , lo que demuestra el teorema.  $\square$

**Teorema 4.1.2.** Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias independientes, entonces  $E(X|Y) = E(X)$ .

*Demostración.* Sean  $X$  e  $Y$  independientes. Por la definición de independencia, tenemos que:

$$P(X \in A, Y = y_i) = P(X \in A)P(Y = y_i) = P(X \in A)P(A_i).$$

Esto implica que la probabilidad conjunta de  $X$  e  $Y$  factoriza como el producto de sus probabilidades marginales. Considerando la variable indicatriz  $\mathbb{I}_{A_i}$  y la independencia, obtenemos que:

$$P(X \in A, \mathbb{I}_{A_i} = 1) = P(X \in A)P(\mathbb{I}_{A_i} = 1).$$

Esta relación se verifica también para  $\mathbb{I}_{A_i} = 0$ . Por lo tanto, las variables aleatorias  $X$  y  $\mathbb{I}_{A_i}$  son independientes, y para  $w \in A_i$ , tenemos:

$$E(X|Y)(w) = E(X|A_i) = \frac{E(X\mathbb{I}_{A_i})}{P(A_i)} = \frac{E(X)E(\mathbb{I}_{A_i})}{P(A_i)} = E(X),$$

lo que demuestra que, bajo independencia,  $E(X|Y) = E(X)$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

Hasta ahora, hemos explorado la definición de la esperanza condicional en términos de eventos específicos y otra variable aleatoria. Sin embargo, es esencial comprender una definición más generalizada: la esperanza condicional dada una  $\sigma$ -álgebra. Esta forma de esperanza condicional nos permite trabajar con conjuntos de información más ricos y detallados, representados por una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . A continuación, presentamos la definición formal de la esperanza condicional de una variable aleatoria  $X$  dada una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .

**Definición 4.1.6** (Esperanza condicional dada una  $\sigma$ -álgebra). Una variable aleatoria  $Z$  se denomina *esperanza condicional de  $X$  dada la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$*  si:

1.  $Z$  es  $\mathcal{F}$ -medible es decir  $\sigma(Z) \subseteq \mathcal{F}$ .
2.  $Z$  satisface la relación

$$E(X\mathbb{1}_A) = E(Z\mathbb{1}_A), \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}.$$

donde  $\sigma(Z)$  es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a  $Z$ . Nótese que en caso que  $X$  sea  $\mathcal{F}$ -medible entonces  $X$  es la esperanza condicional dado  $\mathcal{F}$  de  $X$ .

**Teorema 4.1.3.** *La definición de la esperanza condicional  $E(X|Y)$  de una variable aleatoria  $X$  dada otra variable aleatoria  $Y$  es un caso especial de la esperanza condicional general  $E(X|\mathcal{F})$  cuando  $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $Y$ .*

*Demostración.* Queremos demostrar que  $E(X|Y)$  coincide con  $E(X|\sigma(Y))$ . Consideremos cualquier conjunto  $A$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(Y)$ . Sabemos que cualquier conjunto  $A \in \sigma(Y)$  puede escribirse como una unión de conjuntos disjuntos de la forma:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \text{donde } A_i = \{w \in \Omega : Y(w) = y_i\}, \quad I \subseteq \mathbb{N}.$$

Definimos la esperanza condicional  $E(X|Y)$  como una variable aleatoria  $Z$  tal que:

$$Z(w) = E(X|Y = y_i) = E(X|A_i) \quad \text{para } w \in A_i.$$

Aquí,  $Z$  es una función de  $Y$ , por lo que  $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ , ya que  $Z$  no contiene más información que la contenida en  $Y$ .

Para demostrar que  $Z = E(X|Y)$  también satisface la definición de  $E(X|\sigma(Y))$ , consideremos la propiedad de la esperanza condicional:

$$E(X\mathbb{1}_A) = E(Z\mathbb{1}_A), \quad \text{para todo } A \in \sigma(Y).$$

Primero, calculemos  $E(X\mathbb{1}_A)$ :

$$E(X\mathbb{I}_A) = E\left(X \sum_{i \in I} \mathbb{I}_{A_i}\right) = \sum_{i \in I} E(X\mathbb{I}_{A_i}).$$

Ahora, evaluemos  $E(Z\mathbb{I}_A)$ :

$$E(Z\mathbb{I}_A) = \sum_{i \in I} E(X|A_i)P(A_i) = \sum_{i \in I} E(X\mathbb{I}_{A_i}).$$

Dado que  $E(X\mathbb{I}_A) = E(Z\mathbb{I}_A)$  para todo  $A \in \sigma(Y)$ , y que  $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ , concluimos que:

$$Z = E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)).$$

Por lo tanto, la definición de  $E(X|Y)$  es efectivamente un caso especial de la definición general de  $E(X|\mathcal{F})$  cuando  $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ .  $\square$

### 4.1.2. Martingalas

Un concepto crucial antes de hablar de martingalas es la adaptación de los procesos estocásticos a una filtración.

**Definición 4.1.7** (Proceso adaptado). Un proceso estocástico  $X$  está adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$  si para todo  $s \geq 0$ , se cumple que  $\sigma(X_s) \subseteq \mathcal{F}_s$ .

A partir de este concepto, podemos definir las versiones más generales de martingalas: supermartingalas y submartingalas.

**Definición 4.1.8** (Supermartingala y submartingala). Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Decimos que  $X$  es una *supermartingala* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$  si cumple las siguientes propiedades:

1. Integrabilidad:  $E(|X_t|) < \infty$  para todo  $t \geq 0$ .
2. Propiedad de supermartingala: Para cualquier par de tiempos  $0 \leq s \leq t$ , se verifica que:

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

De manera similar, decimos que  $X$  es una *submartingala* si en lugar de la desigualdad anterior se cumple:

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t.$$

Una martingala es un caso especial de supermartingala donde  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  para todo  $0 \leq s \leq t$ .

Una vez establecida la definición general de martingalas, es útil considerar ejemplos específicos que ilustran cómo estos procesos estocásticos se manifiestan en diferentes contextos. A continuación, presentamos dos casos importantes de martingalas: el caso de tiempo discreto y el caso de tiempo continuo.

**Ejemplo 4.1.1** (Martingala de tiempo discreto). Consideremos un proceso estocástico  $X = (X_n)_{n=0,1,\dots}$  adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots}$ . Decimos que  $X$  es una *martingala de tiempo discreto* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Integrabilidad:  $E(|X_n|) < \infty$  para todo  $n = 0, 1, \dots$
2. Adaptación: El proceso  $X_n$  es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_n)$ , es decir,  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible para cada  $n$ .
3. Propiedad de Martingala: Para todo  $n = 0, 1, \dots$ , se verifica:

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

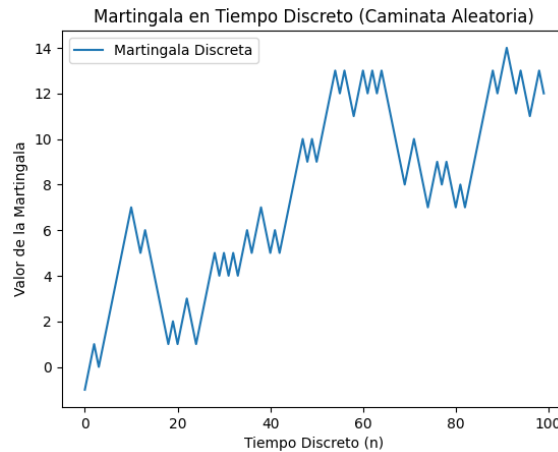


Figura 4.1: Martingala de tiempo discreto

**Ejemplo 4.1.2** (Martingala de tiempo continuo). Consideremos un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Decimos que  $X$  es una *martingala de tiempo continuo* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Integrabilidad:  $E(|X_t|) < \infty$  para todo  $t \geq 0$ .
2. Adaptación: El proceso  $X_t$  es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$ , es decir,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para cada  $t \geq 0$ .
3. Propiedad de martingala: Para todos los tiempos  $0 \leq s \leq t$ , se cumple que:

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s.$$

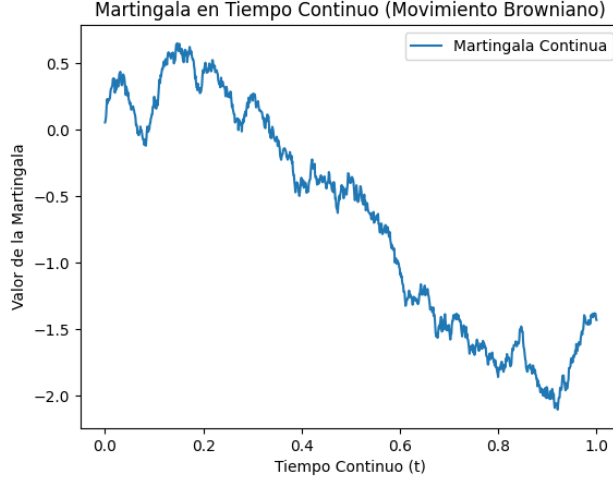


Figura 4.2: Martingala de tiempo continuo

En otras palabras, en una martingala el valor esperado condicional del estado futuro  $X_t$  dado toda la información acumulada hasta el tiempo  $s$  es igual al valor en el tiempo  $s$ . Esto significa que  $X_s$  es la mejor predicción de  $X_t$  dada la información disponible en  $\mathcal{F}_s$ .

**Ejemplo 4.1.3.** Considérese una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , donde:

1.  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  y  $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ .
2. Los incrementos son distribuidos simétricamente, es decir,  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ .

Sea el proceso acumulativo:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

y la filtración asociada  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , que contiene toda la información disponible hasta el tiempo  $n$ . Se desea verificar que  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  es una martingala respecto a  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ .

**Integrabilidad:**  $\mathbb{E}[|S_n|] < \infty$  para todo  $n \geq 0$ . Esto se cumple porque  $S_n$  es la suma finita de variables aleatorias  $X_i$ , cada una con  $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ .

**Adaptación:** El proceso  $S_n$  es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_n$ , ya que  $S_n$  depende únicamente de  $X_1, \dots, X_n$ , que están incluidas en  $\mathcal{F}_n$ .

**Propiedad de martingala:** Nótese que

$$S_n = S_m + (X_{m+1} + \cdots + X_n),$$

y, dado que  $X_{m+1}, \dots, X_n$  son independientes de  $\mathcal{F}_m$  y tienen esperanza cero y  $S_m$  es  $\mathcal{F}_m$ -medible entonces:

$$\mathbb{E}[S_n | \mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[S_m | \mathcal{F}_m] + \mathbb{E}[X_{m+1}, \dots, X_n | \mathcal{F}_m] = S_m + 0 = S_m.$$

Por lo tanto,  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  es una martingala respecto a  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ . Este ejemplo particular de martingala es lo que se conoce como una caminata aleatoria.

**Definición 4.1.9** (Filtración natural). La filtración natural generada por un proceso  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es la familia de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , donde cada  $\mathcal{F}_t$  contiene toda la información accesible (observable) hasta el tiempo  $t$ . Esto se define como:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t),$$

donde  $\sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los valores del proceso  $B_s$  para  $s$  en el intervalo  $[0, t]$ .

Un ejemplo importante de martingala es el movimiento browniano estándar.

**Teorema 4.1.4.** Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar y  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtración natural generada por  $(B_t)_{t \geq 0}$ . Entonces,  $(B_t)_{t \geq 0}$  es una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

*Demostración.* Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar y  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtración natural generada por  $(B_t)_{t \geq 0}$ . Observemos que la adaptabilidad de  $B_t$  a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es evidente por la construcción misma de la filtración, ya que  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$ . Además, sabemos que  $E(B_t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  por definición del movimiento browniano estándar. Por lo tanto, solo queda demostrar que  $(B_t)_{t \geq 0}$  satisface la propiedad de martingala.

Dado que  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar, sus incrementos son independientes y estacionarios. En particular, para  $0 \leq s \leq t$ , el incremento  $B_t - B_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  y se distribuye como una normal con media cero y varianza  $t - s$ , es decir,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ . Usando la linealidad de la esperanza condicional y la independencia de los incrementos, obtenemos:

$$E(B_t | \mathcal{F}_s) = E(B_s + (B_t - B_s) | \mathcal{F}_s).$$

Aplicando la linealidad de la esperanza condicional, esto se descompone en:

$$E(B_t | \mathcal{F}_s) = E(B_s | \mathcal{F}_s) + E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s).$$

Dado que  $B_s$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible, tenemos que  $E(B_s | \mathcal{F}_s) = B_s$ . Además, debido a la independencia de  $B_t - B_s$  con respecto a  $\mathcal{F}_s$ , sabemos que  $E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0$ . Por lo tanto,

$$E(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s + 0 = B_s.$$

Esto muestra que para todo  $0 \leq s \leq t$ ,

$$E(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s.$$

Por lo tanto, el movimiento browniano estándar  $(B_t)_{t \geq 0}$  es una martingala continua con respecto a su filtración natural  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .  $\square$

Un concepto interesante relacionado con las martingalas es el tiempo de parada, el cual se define de la siguiente manera.

**Definición 4.1.10.** Una variable aleatoria  $\tau$  en  $\Omega$  se llama *tiempo de parada* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  si, para todo  $t \geq 0$ , el conjunto de eventos  $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$  pertenece a  $\mathcal{F}_t$ .

Además, dado que  $\mathcal{F}_t$  es una  $\sigma$ -álgebra, también se debe cumplir que  $\{\omega : \tau(\omega) > t\} \in \mathcal{F}_t$ .

A partir de este concepto, se puede dar paso al siguiente resultado.

**Teorema 4.1.5** (Martingala detenida). *Sea  $(M_t, t \geq 0)$  una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  y sea  $\tau$  un tiempo de parada para la misma filtración. Entonces, el proceso detenido definido por:*

$$M_{t \wedge \tau} = \begin{cases} M_t & \text{si } t \leq \tau, \\ M_\tau & \text{si } t > \tau, \end{cases}$$

*también es una martingala continua con respecto a la misma filtración.*

*Demostración.* Sea  $(M_t, t \geq 0)$  una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$  y sea  $\tau$  un tiempo de parada. Definimos el proceso detenido  $(M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$  como:

$$M_{t \wedge \tau} = \begin{cases} M_t & \text{si } t \leq \tau, \\ M_\tau & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

lo que se quiere demostrar es  $(M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$  es una martingala con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$ , es decir, que:

$$E[M_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge \tau}, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t.$$

analizando los casos se tiene entonces que : **Caso 1:**  $s \geq \tau$

Si  $s \geq \tau$ , entonces  $t \geq s \geq \tau$ , lo que implica que  $M_{t \wedge \tau} = M_\tau$  y  $M_{s \wedge \tau} = M_\tau$ . Lo que implica

$$E[M_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s] = E[M_\tau | \mathcal{F}_s] = M_\tau,$$

ya que  $M_\tau$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible cuando  $s \geq \tau$ . Por lo tanto, se cumple que:

$$E[M_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge \tau}.$$

**Caso 2:**  $s < \tau$

Si  $s < \tau$ , existen dos subcasos:

- Si  $t \leq \tau$ , entonces  $M_{t \wedge \tau} = M_t$  y  $M_{s \wedge \tau} = M_s$ . Dado que  $(M_t)$  es una martingala con respecto a  $(\mathcal{F}_t)$ , se cumple que:

$$E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Por lo tanto:

$$E[M_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s] = M_s = M_{s \wedge \tau}.$$

- Si  $t > \tau$ , entonces  $M_{t \wedge \tau} = M_\tau$ . Dado que  $M_\tau$  es  $\mathcal{F}_\tau$ -medible y  $s < \tau$ , se cumple que:

$$E[M_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s] = E[M_\tau \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Por lo tanto, en este caso también se cumple:

$$E[M_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge \tau}.$$

En ambos casos, se demostró que:

$$E[M_{t \wedge \tau} \mid \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge \tau}, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t.$$

Por lo tanto,  $(M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$  es una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$ . □

**Teorema 4.1.6** (Teorema de la parada opcional de Doob). *Si  $(M_t, t \geq 0)$  es una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  y  $\tau$  es un tiempo de parada tal que  $\tau < \infty$  y el proceso detenido  $(M_{t \wedge \tau}, t \geq 0)$  está acotado, entonces:*

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

*Demostración.* Dado que  $(M_{t \wedge \tau}, t \geq 0)$  es una martingala, por definición se cumple:

$$E[M_{t \wedge \tau}] = E[M_0].$$

Ahora, dado que  $\tau(\omega) < \infty$  casi seguramente, tenemos que, con probabilidad uno,  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau} = M_\tau$ . En particular, se cumple que:

$$E[M_\tau] = E \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[M_{t \wedge \tau}] = E[M_0].$$

□

### 4.1.3. Transformada de martingala

La transformada de martingala es un procedimiento que nos permite generar un nuevo proceso estocástico a partir de una martingala  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  y un proceso previsible  $C = (C_n)_{n \geq 1}$ . El nuevo proceso resultante sigue siendo una martingala bajo ciertas condiciones y tiene aplicaciones importantes en el cálculo estocástico. Se define formalmente como:

**Definición 4.1.11** (Transformada de martingala). Sea  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  una martingala con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , y sea  $C = (C_n)_{n \geq 1}$  un proceso previsible. La *transformada de martingala* de  $X$  por  $C$  es el proceso  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ , donde:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1}), \quad Y_0 = 0.$$

en la definición anterior se menciona que el proceso es "previsible" esto significa :

**Definición 4.1.12** (Proceso previsible). Sea  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  una filtración en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un proceso estocástico  $C = (C_n)_{n \geq 1}$  se dice que es *previsible* (o *predictable*) con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)$  si para cada  $n \geq 1$ , la variable aleatoria  $C_n$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible. Es decir,

$$\sigma(C_n) \in \mathcal{F}_{n-1}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Un proceso previsible es uno cuyo valor en el tiempo  $n$  puede ser anticipado utilizando únicamente la información disponible hasta el tiempo  $n - 1$ , y por lo tanto no depende de la información obtenida en el mismo tiempo  $n$ .

**Teorema 4.1.7.** Sea  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  una martingala con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , y sea  $C = (C_n)_{n \geq 1}$  un proceso previsible. Entonces, el proceso  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ , definido como:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1}),$$

es una martingala.

*Demostración.* Sea  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  una martingala con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , y sea  $C = (C_n)_{n \geq 1}$  un proceso previsible. Queremos probar que el proceso  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ , definido por

$$Y_n = \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1}), \quad Y_0 = 0,$$

es una martingala con respecto a  $(\mathcal{F}_n)$ .

Primero, notamos que el proceso  $Y_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible, ya que cada  $X_i$  es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_n$ , y los coeficientes  $C_i$  son predecibles. Por lo tanto,  $Y_n$  es adaptado a  $(\mathcal{F}_n)$ .

Ahora, para que  $Y_n$  sea una martingala, debemos demostrar que  $E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1}$  para todo  $n$ .

Sabemos que:

$$Y_n = Y_{n-1} + C_n(X_n - X_{n-1}).$$

Tomando la esperanza condicional de ambos lados con respecto a  $\mathcal{F}_{n-1}$ , obtenemos:

$$E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(Y_{n-1} + C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Dado que  $Y_{n-1}$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, y la esperanza es lineal, podemos sacar a  $Y_{n-1}$  de la esperanza condicional:

$$E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + E(C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Además, dado que  $C_n$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, podemos extraer  $C_n$  de la esperanza condicional:

$$E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + C_n E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Dado que  $X_n$  es una martingala, sabemos que  $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ , lo que implica que:

$$E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1}.$$

Esto demuestra que  $Y_n$  es una martingala con respecto a  $(\mathcal{F}_n)$ . □

## 5.1. Cálculo de Itô

Este capítulo abordará los conceptos fundamentales del cálculo de Itô, una herramienta clave en el análisis de procesos estocásticos y en la modelización matemática de fenómenos aleatorios. A lo largo de esta investigación, hemos desarrollado una base sólida en teoría de probabilidades y procesos estocásticos, todo con el objetivo de culminar en la comprensión y aplicación del cálculo de Itô, su dominio es crucial para el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas y otras aplicaciones en finanzas, física y diversas áreas de la matemática.

### 5.1.1. La integral de Itô

La integral de Itô juega un papel integral en el cálculo estocástico, permitiendo integrar procesos estocásticos con respecto a un movimiento browniano. En esta sección, presentamos su definición utilizando la transformada de martingala.

**Definición 5.1.1** (Integral de Itô para procesos simples). Sea  $(B_t, t \leq T)$  un movimiento browniano estándar en  $[0, T]$  y sea  $X$  un proceso simple dado por

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} Y_j \mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}$$

en  $[0, T]$ , donde  $Y_j$  son variables aleatorias adaptadas a la filtración de Brown al igual que  $X$ . La integral de Itô de  $X$  con respecto al movimiento browniano se define como la transformada de martingala:

$$\int_0^T X_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} Y_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}),$$

y de manera similar, para cualquier  $t \leq T$ ,

$$\int_0^t X_s dB_s = Y_0(B_{t_1} - B_0) + Y_1(B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + Y_j(B_t - B_{t_j}),$$

si  $t \in (t_j, t_{j+1}]$ .

La construcción de la integral de Itô a través de la transformada de martingala es especialmente relevante porque nos permite interpretar  $\int_0^T X_t dB_t$  como el resultado de aplicar una operación previsible sobre un proceso de martingala (el movimiento browniano  $B_t$ ). Al ser una transformada de martingala, la integral misma es también un proceso de martingala, siempre que  $X_t$  sea adecuadamente integrable y previsible.

A continuación, listamos algunas de las propiedades de la integral de Itô.

**Teorema 5.1.1.** *La integral de Itô es lineal. Es decir, para dos procesos estocásticos previsibles  $X_t$  y  $Y_t$ , y dos constantes  $a$  y  $b$ , se tiene que:*

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dB_t = a \int_0^T X_t dB_t + b \int_0^T Y_t dB_t.$$

*Demostración.* Sea  $B_t$  un movimiento browniano estándar y consideremos dos procesos estocásticos previsibles  $X_t$  y  $Y_t$ . Queremos demostrar que la integral de Itô es lineal, es decir:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dB_t = a \int_0^T X_t dB_t + b \int_0^T Y_t dB_t.$$

Por la definición de la integral de Itô basada en la transformada de martingala para procesos simples:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} (aX_{t_i} + bY_{t_i}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Distribuyendo dentro de la suma:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dB_t = a \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + b \sum_{i=0}^{n-1} Y_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Reconociendo las sumas como integrales de Itô, obtenemos:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dB_t = a \int_0^T X_t dB_t + b \int_0^T Y_t dB_t.$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad de linealidad de la integral de Itô.  $\square$

**Teorema 5.1.2.** *La integral de Itô de un proceso adaptado y previsible  $X_t$  con respecto a un movimiento browniano  $B_t$  satisface la propiedad de isometría:*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right].$$

*Demostración.* Consideremos la definición de la integral de Itô como una suma de incrementos del movimiento browniano ponderados por  $X_t$ :

$$\int_0^T X_t dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

La esperanza del cuadrado de la integral de Itô es:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 \right].$$

Usando la independencia de los incrementos del movimiento browniano y la linealidad de la esperanza:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ X_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right].$$

Dado que  $\mathbb{E} \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = t_{i+1} - t_i$ , tenemos:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ X_{t_i}^2 \right] (t_{i+1} - t_i).$$

En el límite, cuando la partición se refina, esto se convierte en:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right].$$

□

Hasta ahora, hemos definido la integral de Itô para procesos simples. Sin embargo, en muchos casos prácticos, necesitamos extender esta definición a procesos estocásticos más generales. Para ello, utilizaremos la aproximación por procesos simples, basándonos en el resultado que establece que cualquier proceso previsible puede ser aproximado por procesos simples en el sentido de  $L^2$ .

**Teorema 5.1.3** (Aproximación de procesos vía procesos simples). *Sea  $X \in L_c^2(T)$ . Entonces,  $X$  se puede aproximar por procesos simples adaptados en  $\mathcal{S}(T)$ , donde  $\mathcal{S}(T)$  es el conjunto de todos los procesos simples y adaptados en el intervalo  $[0, T]$ , en el sentido de que existe una secuencia  $X^{(n)} \in \mathcal{S}(T)$  tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E} \left[ \left( X_t^{(n)} - X_t \right)^2 \right] dt = 0.$$

*Demostración.* Consideremos una partición  $t_j = \frac{j}{n}T$  de  $[0, T]$  y el proceso simple adaptado dado por

$$X_t^{(n)} = \sum_{j=0}^n X_{t_j} 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t), \quad t \leq T.$$

donde  $1_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$  es la función indicadora del intervalo  $(t_j, t_{j+1}]$ .

Este proceso simple  $X_t^{(n)}$  toma un valor constante  $X_{t_j}$  en cada intervalo  $(t_j, t_{j+1}]$ . Esto corresponde a una aproximación escalonada de  $X_t$  utilizando los valores de  $X$  en los puntos de la partición.

Debido a la continuidad de las trayectorias de  $X$ , se cumple que, para cada  $t \leq T$  y cada  $\omega$ , el proceso  $X_t^{(n)}(\omega)$  converge puntualmente a  $X_t(\omega)$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Es decir,  $X_t^{(n)}(\omega) \rightarrow X_t(\omega)$  para cada  $t$  y  $\omega$ .

Ahora queremos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] dt = 0.$$

Para ello, utilizamos el Teorema de Convergencia Dominada.

Como mencionamos anteriormente,  $X_t^{(n)}(\omega) \rightarrow X_t(\omega)$  para cada  $t \leq T$  y para cada  $\omega$ . Esto implica que  $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$  puntualmente casi seguramente.

Para aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, necesitamos encontrar una función que mayorice  $(X_t^{(n)} - X_t)^2$  y que sea integrable en el tiempo con respecto a  $t$ . Observamos que, debido a la continuidad de  $X_t$ , las trayectorias de  $X_t^{(n)}$  y  $X_t$  están acotadas por una constante  $M > 0$ , es decir, podemos suponer que:

$$|X_t^{(n)}| \leq M \quad \text{y} \quad |X_t| \leq M \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Como consecuencia, tenemos la acotación:

$$|X_t^{(n)} - X_t|^2 \leq 4M^2.$$

Esta función constante  $4M^2$  es integrable en  $[0, T]$ , ya que:

$$\int_0^T 4M^2 dt = 4M^2 T < \infty.$$

Dado que  $(X_t^{(n)} - X_t)^2$  está acotada por una función integrable en el intervalo  $[0, T]$ , cumplimos la segunda condición del Teorema de Convergencia Dominada.

Dado que las dos condiciones (convergencia puntual casi segura y acotación por una función integrable) están satisfechas, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para intercambiar el límite y la integral. Esto nos da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] dt = \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] dt = 0,$$

ya que  $\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] \rightarrow 0$  puntualmente para cada  $t$ , debido a la convergencia de  $X_t^{(n)}$  a  $X_t$ .

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] dt = 0.$$

□

Con esta herramienta ya es posible tener una integral de Itô para procesos no simples.

**Teorema 5.1.4.** Sea  $(B_t, t \leq T)$  un movimiento browniano estándar definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sea  $(X_t, t \leq T)$  un proceso en  $\mathcal{L}_c^2(T)$ . Existen variables aleatorias  $\int_0^t X_s dB_s$ ,  $t \leq T$ , con las siguientes propiedades:

- **Linealidad:** Si  $X$  e  $Y$  están en  $\mathcal{L}_c^2(T)$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_0^t (aX_s + bY_s) dB_s = a \int_0^t X_s dB_s + b \int_0^t Y_s dB_s, \quad t \leq T.$$

- **Martingala continua:** El proceso  $\left(\int_0^t X_s dB_s, t \leq T\right)$  es una martingala continua para la filtración de Brown.
- **Isometría de Itô:** La variable aleatoria  $\int_0^t X_s dB_s$  está en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con esperanza cero y varianza

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t X_s dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s^2] ds = \mathbb{E} \left[ \int_0^t X_s^2 ds \right], \quad t \leq T.$$

*Demostración.* Sea  $X = (X_t, t \leq T)$  un proceso en  $\mathcal{L}_c^2(T)$ . Por el Teorema anterior, podemos aproximar  $X$  mediante una sucesión de procesos simples adaptados  $X^{(n)}$ . En particular, esto implica que la sucesión  $X^{(n)}$  es de Cauchy para la métrica:

$$\|X^{(n)} - X^{(m)}\| = \left( \int_0^T \mathbb{E} \left[ (X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2 \right] dt \right)^{1/2}.$$

El paso clave es reconocer que la integral  $I_t^{(n)} = \int_0^t X_s^{(n)} dB_s$  está bien definida como una variable aleatoria en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Utilizando la isometría de Itô, encontramos que la distancia en  $L^2$  entre las integrales de  $X^{(n)}$  y  $X^{(m)}$  es igual a la distancia en  $L^2$  entre los propios procesos:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t X_s^{(n)} dB_s - \int_0^t X_s^{(m)} dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (X_s^{(n)} - X_s^{(m)})^2 ds \right].$$

Dado que  $X^{(n)}$  es de Cauchy en  $\mathcal{L}_c^2(T)$ , se sigue que la sucesión  $I_t^{(n)}$  también es de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Por la completitud de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , existe un límite  $I_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que denotamos como  $\int_0^t X_s dB_s$ . Además, el límite es independiente de la elección de la sucesión de aproximación  $X^{(n)}$ .

La linealidad de la integral de Itô sigue directamente de la linealidad de la integral aplicada a los procesos aproximantes  $X^{(n)}$  y  $Y^{(n)}$  para dos procesos  $X$  y  $Y$ .

La propiedad de isometría resulta del hecho de que si  $I_t^{(n)} \rightarrow I_t$  en  $L^2$ , entonces  $\mathbb{E}[(I_t^{(n)})^2] \rightarrow \mathbb{E}[I_t^2]$  y  $\mathbb{E}[I_t^{(n)}] \rightarrow \mathbb{E}[I_t]$ .

Finalmente, para demostrar que  $I_t = \int_0^t X_s dB_s$  es una martingala, necesitamos verificar que  $\mathbb{E}[I_t | \mathcal{F}_s] = I_s$  para  $0 \leq s \leq t$ . Dado que  $X$  es un proceso previsible y adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , la integral de Itô está bien definida y es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

Primero, utilizamos la propiedad de linealidad de la esperanza condicional para separar la integral:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^s X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{E} \left[ \int_s^t X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right].$$

El primer término es simplemente  $\int_0^s X_u dB_u = I_s$ , ya que  $\int_0^s X_u dB_u$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible. Ahora, veamos el segundo término. Por las propiedades de los incrementos independientes del movimiento browniano, y dado que  $X_u$  es previsible, el incremento  $\int_s^t X_u dB_u$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ . Por lo tanto:

$$\mathbb{E} \left[ \int_s^t X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

Esto nos da:

$$\mathbb{E}[I_t | \mathcal{F}_s] = I_s.$$

De este modo, hemos mostrado que  $I_t$  es una martingala continua con respecto a la filtración generada por el movimiento browniano. □

### 5.1.2. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es una herramienta central en el cálculo estocástico que nos permite expresar cómo una función suave de un proceso estocástico, como el movimiento browniano, evoluciona en el tiempo. A continuación, presentamos la demostración del teorema utilizando la expansión de Taylor para funciones dos veces diferenciables.

**Teorema 5.1.5** (Fórmula de Itô para movimiento browniano). *Sea  $(B_t, t \leq T)$  un movimiento browniano estándar. Consideremos  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ . Entonces, con probabilidad uno, tenemos*

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  y sea  $B_t$  un movimiento browniano estándar.

Además, considérese una partición del intervalo  $[0, t]$ ,  $\{t_j\}_{j=0}^n$ , donde  $t_0 = 0$  y  $t_n = t$ . En cada subintervalo  $[t_j, t_{j+1}]$ , aplicamos la expansión de Taylor a  $f(B_t)$ :

$$f(B_{t_{j+1}}) - f(B_{t_j}) = f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{1}{2}f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + o((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2).$$

Sabemos que  $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$  es aproximadamente  $dt = t_{j+1} - t_j$ , debido a la propiedad de la variación cuadrática del movimiento browniano. Por el Teorema 3.1.3, este término converge a  $dt$  en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sumando estas diferencias a lo largo de todos los subintervalos, tenemos:

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{j=0}^{n-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2.$$

En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , es decir, cuando el tamaño de los subintervalos  $\Delta t$  tiende a cero. El primer término se convierte en la integral de Itô

$$\sum_{j=0}^{n-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \rightarrow \int_0^t f'(B_s) dB_s.$$

El segundo término se convierte en la integral de Riemann:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

Hemos demostrado que, bajo las condiciones del teorema, la fórmula de Itô es válida para funciones  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  y procesos brownianos estándar:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

□

Una versión útil de esta fórmula es la versión diferencial de la fórmula de Itô

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

Es importante dejar claro que la forma diferencial no tiene sentido por sí misma. Es una manera compacta de expresar las dos integrales en la fórmula de Itô y un dispositivo poderoso para cálculos.

**Teorema 5.1.6** (Las reglas de los productos de diferenciales en el cálculo de Itô). *Sea  $B_t$  un proceso de movimiento browniano estándar en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Las siguientes reglas de los productos de diferenciales:*

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad y \quad dB_t \cdot dB_t = dt,$$

*son una consecuencia directa de las propiedades de la variación cuadrática y cruzada de los procesos estocásticos.*

*Demostración.* Para demostrar estas reglas, analizamos cada una de las propiedades utilizando la definición formal de la variación cuadrática y cruzada de los procesos.

$$dt \cdot dt = 0:$$

El término  $dt \cdot dt$  representa el producto de dos incrementos infinitesimales de tiempo. Esto se puede entender como la variación cuadrática de la función identidad consigo misma. Sea  $X_t = t$  la función identidad. La variación cuadrática de  $X_t$  consigo misma se define como:

$$\langle X \rangle_t = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2,$$

donde  $\Pi$  es una partición del intervalo  $[0, t]$ . Claramente, dado que la suma de los cuadrados de los incrementos  $(t_{i+1} - t_i)^2$  es de un orden superior a  $t_{i+1} - t_i$ , la variación cuadrática se anula en el límite:

$$\langle X \rangle_t = 0.$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$dt \cdot dt = 0.$$

$$dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0:$$

El término  $dt \cdot dB_t$  es un caso de la variación cruzada entre un proceso determinista y un proceso estocástico. Sea  $X_t = t$  la función identidad y  $Y_t = B_t$  un proceso de movimiento browniano. La variación cruzada se define como:

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Dado que los incrementos de  $B_t$  son independientes de los incrementos de  $t$  y tienen media cero, la contribución promedio del producto se anula en el límite:

$$\langle X, Y \rangle_t = 0.$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0.$$

$$dB_t \cdot dB_t = dt:$$

La propiedad más importante es la variación cuadrática del movimiento browniano consigo mismo. Sea  $Y_t = B_t$ . La variación cuadrática se define como:

$$\langle Y \rangle_t = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Por la definición del movimiento browniano, sabemos que:

$$E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i.$$

Por lo tanto, al tomar el límite conforme el tamaño de la partición tiende a cero, obtenemos:

$$\langle B \rangle_t = t.$$

Esto implica que:

$$(dB_t)^2 = dt.$$

Se ha demostrado que las reglas de los productos de diferenciales:

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad \text{y} \quad dB_t \cdot dB_t = dt,$$

se derivan directamente de las propiedades de la variación cuadrática y cruzada de los procesos estocásticos. Estas reglas permiten manipular los diferenciales de manera coherente en el contexto estocástico.  $\square$

Una vez que se demostró la validez de la fórmula, es importante ver cómo usar esta herramienta, por lo que se pasará al siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.1.1** (Aplicación de la fórmula de Itô a una función cuadrática). Consideremos la función  $f(x) = x^2$  y apliquemos la fórmula de Itô al proceso de movimiento browniano  $B_t$ . Para  $f(x) = x^2$ , tenemos:

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = 2.$$

Utilizando la fórmula de Itô en su versión diferencial, obtenemos:

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

Sustituyendo las derivadas de  $f(x) = x^2$ , se tiene:

$$df(B_t) = 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \cdot 2 dt = 2B_t dB_t + dt.$$

Integrando ambos lados desde 0 hasta  $t$ , obtenemos:

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + t.$$

Dado que  $B_0 = 0$  para el movimiento browniano estándar, esto se reduce a:

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + t.$$

Este resultado es una aplicación directa de la fórmula de Itô a la función cuadrática. La integral  $\int_0^t 2B_s dB_s$  es una integral estocástica, mientras que el término  $t$  aparece debido a la variación cuadrática de  $B_t$ , que es  $t$ . Este ejemplo muestra cómo la fórmula de Itô permite calcular la evolución de una función no lineal de un proceso browniano.

Habiendo explorado este ejemplo básico, es posible generalizar la Fórmula de Itô a funciones que dependen tanto del tiempo como del espacio. Esta generalización es crucial para aplicaciones más complejas, como las ecuaciones diferenciales estocásticas. A continuación, presentamos esta versión más general de la fórmula.

**Teorema 5.1.7** (Fórmula de Itô). *Sea  $(B_t, t \leq T)$  un movimiento browniano estándar en  $[0, T]$ . Consideremos una función  $f$  de tiempo y espacio con  $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ . Entonces, con probabilidad uno, para todo  $t \in [0, T]$ , tenemos:*

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial t} f(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, B_s) \right) ds.$$

En forma diferencial, esto se escribe como:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, B_t) dB_t + \left( \frac{\partial}{\partial t} f(t, B_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, B_t) \right) dt.$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ . Considérese un movimiento browniano estándar  $B_t$ . Tomemos una partición del intervalo  $[0, t]$ ,  $\{t_j\}_{j=0}^n$ , donde  $t_0 = 0$  y  $t_n = t$ . Aplicamos una expansión de Taylor en cada subintervalo  $[t_j, t_{j+1}]$  alrededor del punto  $(t_j, B_{t_j})$ . Según la fórmula de Taylor, tenemos:

$$\begin{aligned} f(t_{j+1}, B_{t_{j+1}}) &= f(t_j, B_{t_j}) + \frac{\partial}{\partial x} f(t_j, B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{\partial}{\partial t} f(t_j, B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t_j, B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + o((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2). \end{aligned}$$

Sabemos que  $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \approx t_{j+1} - t_j$ , debido a la propiedad de variación cuadrática del movimiento browniano. Así, podemos reescribir la expansión de Taylor como:

$$f(t_{j+1}, B_{t_{j+1}}) - f(t_j, B_{t_j}) = \frac{\partial}{\partial x} f(t_j, B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{\partial}{\partial t} f(t_j, B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t_j, B_{t_j})(t_{j+1} - t_j).$$

Sumando estas diferencias a lo largo de los subintervalos, obtenemos:

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(t_j, B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \frac{\partial}{\partial t} f(t_j, B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t_j, B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) \right).$$

Cuando el tamaño de los subintervalos tiende a cero, los primeros términos convergen a la integral de Itô y los términos restantes convergen a una integral de Riemann:

Por lo tanto, hemos demostrado la fórmula de Itô para funciones en  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ :

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial t} f(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, B_s) \right) ds.$$

Finalmente, la versión diferencial de la fórmula de Itô se escribe como:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, B_t) dB_t + \left( \frac{\partial}{\partial t} f(t, B_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, B_t) \right) dt.$$

□

El Lema o fórmula de Itô establece las bases para extender el cálculo diferencial al ámbito estocástico, permitiendo modelar dinámicas con incertidumbre. Esta herramienta será utilizada en el desarrollo de ecuaciones diferenciales estocásticas, que exploraremos en el próximo capítulo.

## 6.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En los capítulos anteriores, hemos desarrollado los conceptos para entender y explicar las herramientas fundamentales del cálculo estocástico, como la integral de Itô y el Lema de Itô. En este capítulo, aplicaremos estos conceptos a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs), que permiten modelar sistemas que combinan una evolución determinista con componentes aleatorios, representados a menudo mediante procesos estocásticos como el movimiento browniano. El capítulo presentará las definiciones formales de las EDEs, junto con ejemplos que ilustran su resolución y aplicación.

### 6.1.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

**Definición 6.1.1** (Ecuación diferencial estocástica). Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una ecuación de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t,$$

donde:

- $X_t$  es el proceso desconocido que se desea encontrar.
- $\mu(X_t, t)$  es el término de deriva que determina el comportamiento promedio o determinista de  $X_t$ , y es una función medible de  $X_t$  y  $t$ .

- $\sigma(X_t, t)$  es el coeficiente de difusión que mide la intensidad del ruido aleatorio, y es una función medible de  $X_t$  y  $t$ .
- $B_t$  es un movimiento browniano estándar que introduce la aleatoriedad en la ecuación.

Esta ecuación describe la evolución de un proceso estocástico bajo la influencia de una fuente de ruido representada por el movimiento browniano. Esta ecuación se interpreta en su forma integral, de la siguiente manera:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dB_s,$$

donde el primer término en la integral es una integral de Riemann que representa el componente determinista del proceso, y el segundo término es una integral de Itô que describe la parte aleatoria inducida por el movimiento browniano  $B_t$ .

Al tener ya una definición general de ecuación diferencial estocástica, es importante mostrar su aplicación con un ejemplo concreto. A continuación, se resolverá un caso particular de EDE que muestra cómo un proceso estocástico puede modelar la evolución de una variable en presencia de ruido aleatorio.

**Ejemplo 6.1.1** (Movimiento browniano con deriva). Considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes,  $X_t$  es el proceso que queremos determinar, y  $B_t$  es un movimiento browniano estándar.

Esta ecuación describe un proceso estocástico cuyo comportamiento está gobernado tanto por una deriva  $\mu X_t$ , que refleja un crecimiento o decrecimiento determinista, como por un término estocástico  $\sigma X_t dB_t$ , que introduce fluctuaciones aleatorias.

Para encontrar la solución a esta ecuación diferencial estocástica se puede utilizar la fórmula de Itô .

Aplicando la fórmula de Itô a la función  $f(X_t) = \ln(X_t)$  para simplificar la ecuación. Sabemos que para cualquier función  $f(X_t)$ , la fórmula de Itô nos da:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2.$$

Dado que  $f(X_t) = \ln(X_t)$ , tenemos que  $f'(X_t) = \frac{1}{X_t}$  y  $f''(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}$ . Por lo tanto, aplicando la fórmula de Itô, obtenemos:

$$d \ln(X_t) = \frac{1}{X_t}(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2}(\sigma X_t)^2 dt.$$

Simplificando:

$$d \ln(X_t) = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt.$$

Reagrupando términos:

$$d \ln(X_t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t.$$

Integrando ambos lados desde  $t = 0$  hasta  $t = T$ , obtenemos:

$$\ln(X_T) = \ln(X_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T.$$

Finalmente, exponenciando ambos lados, obtenemos la solución explícita para  $X_T$ :

$$X_T = X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right).$$

Esta es la solución de la ecuación diferencial estocástica. La fórmula muestra que el proceso  $X_t$  sigue un comportamiento exponencial, donde  $\mu$  determina la tasa de crecimiento promedio y  $\sigma$  controla la magnitud de las fluctuaciones aleatorias inducidas por el movimiento browniano  $B_t$ .

Este ejemplo nos muestra cómo la fórmula de Itô es una herramienta muy útil para trabajar con las EDE. El siguiente ejemplo muestra cómo puede ser usada para soluciones numéricas de las mismas ecuaciones.

**Ejemplo 6.1.2** (Aplicación del lema de Itô con el método de Milstein). En muchas aplicaciones, la simulación de trayectorias de procesos estocásticos requiere la discretización de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE). Para una EDE genérica de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t,$$

donde  $B_t$  es un movimiento browniano estándar, y las funciones  $\mu(X_t)$  y  $\sigma(X_t)$  representan la deriva y la volatilidad del proceso, respectivamente, el método de Milstein proporciona un mecanismo el cual permite realizar esta tarea.

Primero se divide el intervalo temporal  $[0, T]$  en  $n$  subintervalos con  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ . El incremento del proceso  $X_t$  en el intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$  se puede aproximar mediante:

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mu(X_s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(X_s) dB_s.$$

En este esquema, la integral estocástica se aproxima usando el Lema de Itô para mejorar la precisión de la aproximación numérica.

Para mejorar la aproximación, aplicamos el Lema de Itô a la función  $\sigma(X_s)$  para obtener una expansión de segundo orden. La expansión estocástica para  $\sigma(X_s)$  en el intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$  es:

$$\sigma(X_s) \approx \sigma(X_{t_j}) + \sigma'(X_{t_j})\sigma(X_{t_j})(B_s - B_{t_j}),$$

donde  $\sigma'(X_{t_j})$  es la derivada de  $\sigma(X_t)$  respecto a  $X_t$ .

Sustituyendo esta expansión en el incremento, se obtiene:

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \approx \sigma(X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \mu(X_{t_j})\Delta t + \sigma'(X_{t_j})\sigma(X_{t_j}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_s - B_{t_j}) dB_s.$$

El término  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_s - B_{t_j}) dB_s$  se calcula aplicando la fórmula de Itô:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_s - B_{t_j}) dB_s = \frac{1}{2} (B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2 - \Delta t) - B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Finalmente, la aproximación de Milstein para el incremento del proceso es:

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \approx \sigma(X_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \mu(X_{t_j})\Delta t + \frac{\sigma'(X_{t_j})\sigma(X_{t_j})}{2} ((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - \Delta t).$$

### 6.1.2. Unicidad y existencia de soluciones de EDES

El propósito de esta sección es destacar cómo el Lema de Itô actúa como una herramienta en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. En particular, su aplicación permite establecer la unicidad de las soluciones de estas ecuaciones, lo que resulta crucial para garantizar la consistencia y validez de los modelos estocásticos.

Antes de abordar el teorema de existencia y unicidad para las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs), es importante definir formalmente qué entendemos por soluciones fuertes y débiles de estas ecuaciones. Estas definiciones ayudarán a clarificar las condiciones bajo las cuales se espera que las soluciones existan y sean únicas.

**Definición 6.1.2** (Solución fuerte). Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con una filtración admisible  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

con condición inicial  $x \in \mathbb{R}$ , es un proceso adaptado  $X_t = X_t^x$  con trayectorias continuas tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \quad \text{casi seguramente.}$$

Para que esta definición tenga sentido, hay varios puntos sutiles a tener en cuenta. Primero, la existencia de las integrales en la ecuación anterior requiere cierto grado de regularidad en las funciones  $X_t$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ . En particular, debe cumplirse que para todo  $t \geq 0$ , con probabilidad uno:

$$\int_0^t |\mu(X_s)| ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t \sigma^2(X_s) ds < \infty.$$

En segundo lugar, se requiere que la solución exista para todo  $t < \infty$  con probabilidad uno. En algunos casos, las soluciones pueden existir solo hasta un tiempo finito, debido a que el proceso puede explotar (es decir, irse a  $\pm\infty$ ) en tiempo finito. Finalmente, la definición requiere que el proceso  $X_t$  viva en el mismo espacio de probabilidad que el proceso de Wiener  $W_t$ , y que esté adaptado a la filtración dada.

**Definición 6.1.3** (Solución débil). Una solución débil de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

con condición inicial  $x$ , es un proceso estocástico continuo  $X_t$  definido en algún espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tal que existe un movimiento browniano  $W_t$  y una filtración admisible  $\mathcal{F}$  en la cual el proceso  $X_t$  está adaptado y satisface la ecuación estocástica.

Antes de pasar al enunciado y a la demostración del teorema de unicidad y existencia, es necesario enunciar el siguiente lema, que será de utilidad en la prueba.

**Lema 6.1.1** (Desigualdad de Gronwall). *Sea  $v(t)$  una función no negativa que satisface la siguiente desigualdad integral:*

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds,$$

donde  $F \geq 0$  y  $A \geq 0$  son constantes. Entonces,  $v(t)$  satisface la cota:

$$v(t) \leq F \exp(At), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

La desigualdad de Gronwall es un resultado muy utilizado en la teoría de ecuaciones diferenciales. Por lo mismo, no tiene valor teórico para la teoría desarrollada en este trabajo, y no se realizará la prueba, la cual se puede encontrar en el artículo de Steven P. Lalley titulado Stochastic Differential Equations. Con este resultado, podemos pasar al teorema de existencia y unicidad.

**Teorema 6.1.2** (Existencia y unicidad de soluciones de EDEs). *Sea  $X_t$  una solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

donde  $\mu(X_t, t)$  y  $\sigma(X_t, t)$  son funciones que satisfacen las siguientes condiciones:

- **Condición de Lipschitz:** Existen constantes  $L_1 > 0$  y  $L_2 > 0$  tales que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $t \in [0, T]$ , se cumple:

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq L_1|x - y| \quad \text{y} \quad |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq L_2|x - y|.$$

- **Condición de crecimiento lineal:** Existen constantes  $K_1 > 0$  y  $K_2 > 0$  tales que:

$$|\mu(x, t)| \leq K_1(1 + |x|) \quad \text{y} \quad |\sigma(x, t)| \leq K_2(1 + |x|).$$

Entonces, existe una solución única  $X_t$  para la EDE en el intervalo  $[0, T]$ , tal que  $X_t$  es un proceso continuo y adaptado.

*Demostración.* Para demostrar la unicidad de la solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = Z,$$

supongamos que existen dos soluciones  $X_t(\omega)$  y  $\hat{X}_t(\omega)$  que satisfacen la condición inicial  $Z$  y  $\hat{Z}$ . Nuestro objetivo es probar que estas dos soluciones son iguales casi seguramente, es decir,  $P(X_t = \hat{X}_t, \forall t \in [0, T]) = 1$ .

Para proceder, comenzamos definiendo la diferencia entre las soluciones  $X_t$  y  $\hat{X}_t$ . Sea  $a(s, \omega) = b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)$  y  $\gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$ . De este modo, podemos escribir la diferencia entre las soluciones como:

$$X_t - \hat{X}_t = Z - \hat{Z} + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \gamma(s)dB_s.$$

El siguiente paso es calcular el valor esperado del cuadrado de esta diferencia, es decir,

$$\mathbb{E} \left[ |X_t - \hat{X}_t|^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( Z - \hat{Z} + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \gamma(s)dB_s \right)^2 \right]$$

Aplicando la isometría de Itô a la segunda integral, y la desigualdad  $(a+b+c)^2 < 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$  obtenemos:

$$\mathbb{E} \left[ |X_t - \hat{X}_t|^2 \right] < 3\mathbb{E}[|Z - \hat{Z}|^2] + \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t a(s)ds \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t |\gamma(s)|^2 ds \right].$$

Aquí, la isometría nos permite tratar las integrales con respecto al movimiento browniano de manera cuadrática. Notese que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left( \int_0^t a(s)ds \right)^2 < \left( t \int_0^t |a(s)|^2 ds \right)$$

Además, aprovechamos la propiedad de Lipschitz de las funciones  $b$  y  $\sigma$ , que garantiza que:

$$|b(t, X_t) - b(t, \hat{X}_t)|^2 \leq L^2 |X_t - \hat{X}_t|^2 \quad \text{y} \quad |\sigma(t, X_t) - \sigma(t, \hat{X}_t)|^2 \leq L^2 |X_t - \hat{X}_t|^2.$$

Con estas condiciones, podemos acotar:

Para el primer término, usamos la condición de Lipschitz sobre la función  $b$ , sustituyendo en la integral, obtenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)) ds \right)^2 \right] \leq tL^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds.$$

Para el segundo término, aplicamos la misma condición de Lipschitz sobre  $\sigma$ , Sustituyendo, obtenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)|^2 ds \right] \leq \int_0^t L^2 \mathbb{E}[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds.$$

Sumando estas condiciones

$$\mathbb{E} [ |X_t - \hat{X}_t|^2 ] \leq 3\mathbb{E}[|Z - \hat{Z}|^2] + 3(1+t)L^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds.$$

A continuación, definimos la función  $v(t) = \mathbb{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2]$ , que satisface la siguiente desigualdad integral:

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds,$$

donde  $F = 3\mathbb{E}[|Z - \hat{Z}|^2]$  y  $A = 3(1+t)L^2$ . Para resolver esta desigualdad, aplicamos la *desigualdad de Gronwall*, lo que nos da la cota:

$$v(t) \leq F \exp(At).$$

Si las dos soluciones tienen la misma condición inicial, es decir,  $Z = \hat{Z}$ , entonces  $F = 0$ , lo que implica que  $v(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Como consecuencia, las dos soluciones deben coincidir en todo  $t$ , es decir,  $P(X_t = \hat{X}_t \text{ para todo } t \in [0, T]) = 1$ . Esto concluye la demostración de la unicidad de la solución.

□

### 6.1.3. El modelo de Vasiček

El modelo de Vasiček es una aplicación del cálculo de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas en el ámbito financiero, utilizado para modelar la evolución de las tasas de interés. Propuesta por Oldrich Vasiček en 1977, este modelo es del tipo procesos de reversión a la media, en los cuales se asume que las tasas de interés tienden a retornar a un nivel promedio a lo largo del tiempo.

El modelo de Vasiček se define como la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t),$$

donde:

- $r(t)$  es la tasa de interés en el tiempo  $t$ .

- $a > 0$  es la velocidad de reversión al nivel promedio, que determina la rapidez con la que la tasa se aproxima a  $b$ .
- $b$  es el nivel de equilibrio o promedio al que la tasa de interés tiende a regresar.
- $\sigma > 0$  es el coeficiente de volatilidad que controla la magnitud de las fluctuaciones aleatorias.
- $dW(t)$  representa un incremento infinitesimal de un movimiento browniano.

El término  $a(b - r(t))dt$  describe la tendencia de  $r(t)$  a acercarse al nivel  $b$  con una intensidad proporcional a  $a$ . Por otro lado, el término  $\sigma dW(t)$  introduce la aleatoriedad inherente al proceso, modelando las fluctuaciones estocásticas de la tasa de interés. La solución a esta ecuación se encuentra en el espacio de procesos adaptados, y el cálculo de Itô es importante para formalizar el tratamiento de estas soluciones.

El modelo de Vasiček permite obtener una solución explícita de  $r(t)$  aplicando técnicas del cálculo de Itô. La solución general de la ecuación diferencial estocástica es:

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s),$$

donde  $r(0)$  es la condición inicial de la tasa de interés. Este resultado destaca cómo el proceso  $r(t)$  es una combinación de una tendencia determinista hacia el nivel  $b$  y un componente estocástico.

El modelo de Vasiček es ampliamente utilizado en la valoración de bonos y en la gestión de riesgos financieros. Una de las aplicaciones más destacadas es en la construcción de la curva de tasas de interés y en la modelización de la estructura temporal de las tasas, lo que permite evaluar la sensibilidad de los precios de los bonos ante cambios en las tasas. No obstante, el modelo tiene limitaciones, como la posibilidad de tasas de interés negativas, que pueden requerir extensiones o modificaciones del modelo básico para su aplicabilidad en escenarios más complejos.

En el contexto de este trabajo, el modelo de Vasiček ilustra cómo las ecuaciones diferenciales estocásticas y el cálculo de Itô permiten describir procesos financieros complejos.

## 7.1. Modelo de Vasíček con Datos Reales

### 7.1.1. Discretización del modelo

Para poder aplicar el modelo de Vasíček a datos históricos de tasas de interés, es esencial discretizar la ecuación diferencial estocástica para trabajar con intervalos de tiempo finitos. La ecuación diferencial estocástica continua:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

se puede aproximar mediante una versión en tiempo discreto, especialmente útil para datos financieros con observaciones a intervalos regulares, como mensuales o trimestrales.

La derivación de la versión discreta se inicia considerando la forma integral de la ecuación estocástica en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ :

$$r(t_{k+1}) - r(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(b - r(s)) ds + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW(s).$$

Para aproximar el término determinista, asumimos que en un intervalo pequeño  $\Delta t$ , el valor de

$r(s)$  se mantiene constante y es aproximadamente igual a  $r(t_k)$ . Esto nos permite escribir:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(b - r(s)) ds \approx a(b - r(t_k)) \Delta t.$$

El término estocástico en la ecuación diferencial estocástica es:

$$\sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW(s),$$

donde  $W(t)$  es un movimiento browniano. Una de las propiedades fundamentales del proceso de Wiener es que sus incrementos son independientes y tienen distribución normal con media cero y varianza proporcional al intervalo de tiempo, es decir:

$$W(t_{k+1}) - W(t_k) \sim N(0, \Delta t).$$

Dado esto, podemos representar la integral estocástica como:

$$\sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW(s) \approx \sigma Z_k,$$

donde  $Z_k$  es una variable aleatoria con distribución normal  $N(0, \Delta t)$ . Esta aproximación se justifica porque la integral de Itô  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW(s)$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiene las mismas propiedades estadísticas que un incremento de un movimiento Browniano.

Entonces la aproximación en tiempo discreto de la ecuación se expresa como:

$$r_{t_{k+1}} = r_{t_k} + a(b - r_{t_k}) \Delta t + \sigma Z_k, \quad k > 0,$$

Para estimar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  a partir de datos históricos, es necesario plantear un modelo de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) que permita ajustar la ecuación discretizada y encontrar las mejores estimaciones para los parámetros. Las derivaciones teóricas de las fórmulas usadas en el proceso de estimación son las siguientes:

- Estimación de  $1 - b\Delta t$ : La persistencia de las tasas de interés en el tiempo se modela observando la autocorrelación entre valores consecutivos. Matemáticamente, se puede expresar como:

$$1 - b\Delta t = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (r_{t_k} - \bar{r})(r_{t_{k+1}} - \bar{r})}{\sum_{k=0}^{n-1} (r_{t_k} - \bar{r})^2},$$

donde  $\bar{r}$  es la media de las tasas en el conjunto de datos.

- Estimación de  $a\Delta t$ : El término  $a\Delta t$  se deriva a partir de la media ajustada de las tasas, de forma que:

$$a\Delta t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (r_{t_{k+1}} - (1 - b\Delta t)r_{t_k}).$$

- Estimación de  $\sigma\Delta t$ : La estimación de  $\sigma$  se basa en la varianza de los residuos calculados sobre el ajuste, dada por:

$$\sigma\Delta t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (r_{t_{k+1}} - (1 - b\Delta t)r_{t_k} - a\Delta t)^2}.$$

A partir de estas estimaciones se pueden obtener los valores que se usarán para valuar en el modelo para predecir valores futuros.

### 7.1.2. Resultados

Para mostrar el uso de ese modelo se tomaron los datos públicos de tasas de interés pasivas de todos los meses desde 1996 hasta 2023, publicadas por el Banco de Guatemala y obtenidas en su página en este enlace, y con esta información se busca realizar simulaciones para proyectar tasas de interés. Es importante definir qué es una tasa pasiva de interés, la cual se define como el porcentaje que el banco pagará a los depositarios por mantener su dinero en una cuenta u otro servicio financiero, en este caso particular por un año o menos.

Los datos usados para la calibración del modelo se transformaron de forma que se tiene una columna con el año de la tasa, otra con el mes de la tasa y la última con el valor de las tasas de interés activas. La base de datos contiene 348 entradas completas, abarcando, como se mencionó, desde el año 1996 hasta octubre de 2024. Ahora se mostrará cómo el modelo se usa para predecir tasas de interés en diferentes períodos.

Lo primero será mostrar cómo se comporta la simulación en diferentes ventanas de tiempo. Para esto, se calibrará el modelo con datos de ventanas de tiempo de diferentes tamaños, pero usando los mismos valores normales.

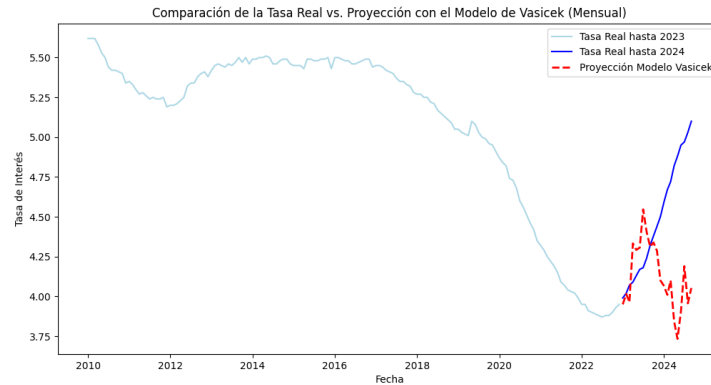


Figura 7.1: Simulación de 2023-2024 calibrando desde 1996

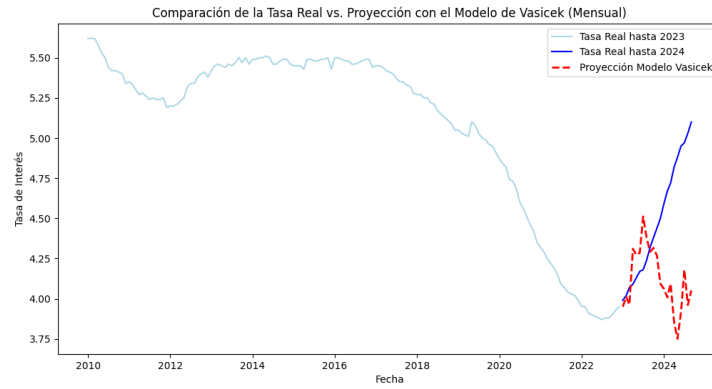


Figura 7.2: Simulación de 2023-2024 calibrando desde 2000

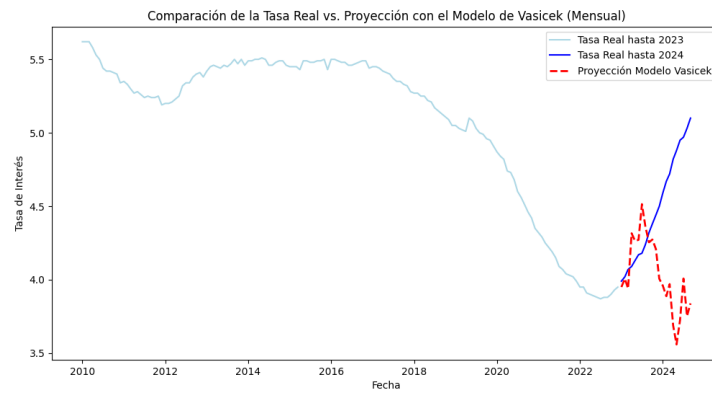


Figura 7.3: Simulación de 2023-2024 calibrando desde 2010

Año	MAE	MSE	RMSE	R <sup>2</sup>
2000	0.4588	0.3661	0.6050	-1.8435
2010	0.5399	0.5134	0.7165	-2.9883
1996	0.4618	0.3701	0.6084	-1.8750

Tabla 7.1: Resumen de métricas de evaluación

El fin de esto es comparar si el tamaño de la ventana de tiempo que se usa para calibrar el modelo afecta. Los resultados de las métricas muestran que el modelo tuvo un rendimiento similar en 1996 y 2000, con valores de MAE, MSE y RMSE cercanos y un  $R^2$  consistentemente negativo, lo que indica dificultades para capturar la variabilidad de los datos. Sin embargo, en 2010, se observan peores resultados en todas las métricas, con un MAE más alto y un  $R^2$  notablemente negativo (-2.9883). Esto resalta que, aunque el modelo fue consistente en 1996 y 2000, enfrentó mayores desafíos en 2010.

Otro aspecto interesante de estudiar es cómo se acopla el modelo a ciertas ventanas de tiempo. Para ello, se simularán distintos períodos, calibrando con los 10 años anteriores a cada período, y se analizará su comportamiento.

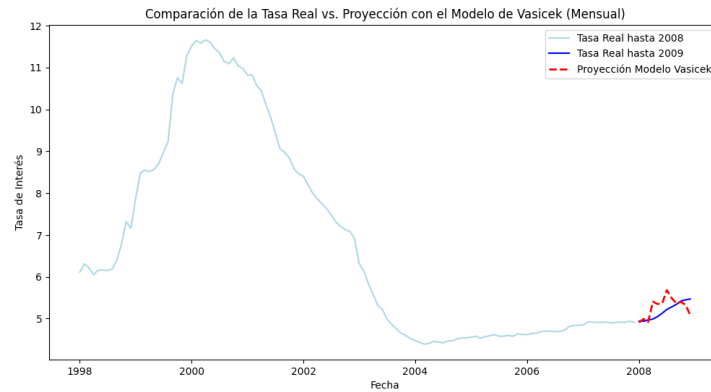


Figura 7.4: Simulación de 2008 calibrado desde 1998

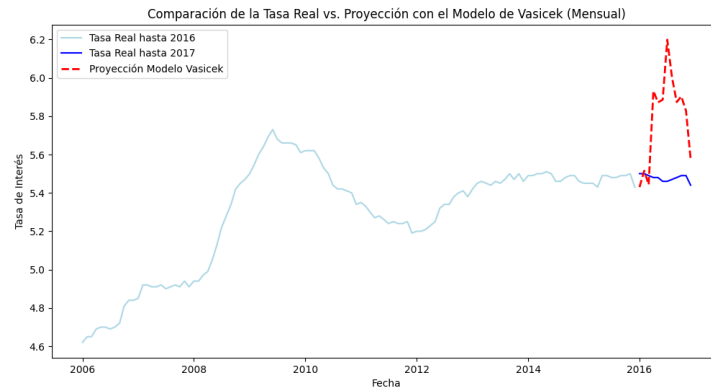


Figura 7.5: Simulación de 2016 calibrado desde 2006

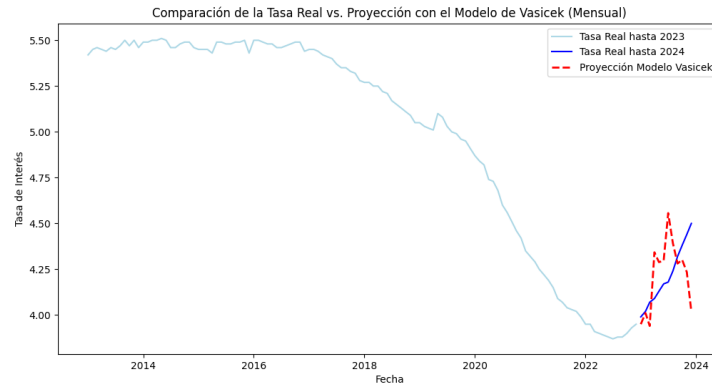


Figura 7.6: Simulación de 2023 calibrado desde 2013

Año	MAE	MSE	RMSE	R <sup>2</sup>
2008	0.1935	0.0628	0.2506	-0.6149
2016	0.3294	0.1527	0.3908	-512.8548
2023	0.1707	0.0475	0.2180	-0.8612

Tabla 7.2: Resumen de métricas de evaluación por año

Los resultados de las métricas de evaluación indican diferencias significativas en el rendimiento del modelo entre los períodos analizados. En 2006-2016, las métricas muestran un comportamiento particularmente problemático, con un MAE más alto (0.3294) y con un R<sup>2</sup> extremadamente bajo (-512.8548), lo que sugiere que el modelo tuvo un desempeño muy deficiente, incapaz de capturar la variabilidad de los datos y con errores notables. En contraste, los años 2008 y 2023 presentan mejores resultados, con MAE y RMSE más bajos (0.1935 y 0.1707 para el MAE, respectivamente), y valores de R<sup>2</sup> menos negativos, aunque aún indican un ajuste pobre. Esto resalta que, aunque el modelo tiene limitaciones generales, se acopla mejor a los datos de los períodos de 2008 y 2023.

Como última prueba se realizarán varias simulaciones y se observará el comportamiento de la media de las predicciones en un mismo intervalo de tiempo.

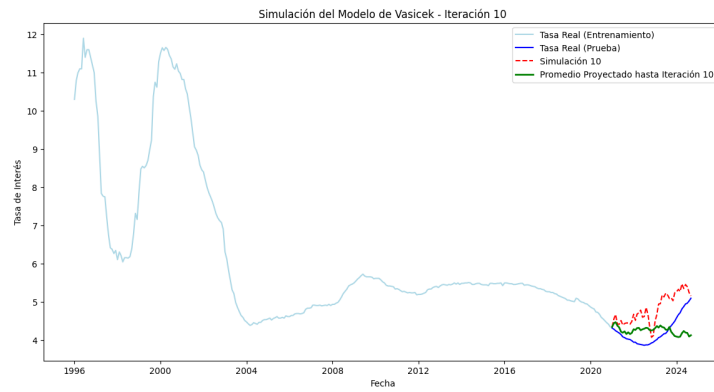


Figura 7.7: Simulación de 10 instancias

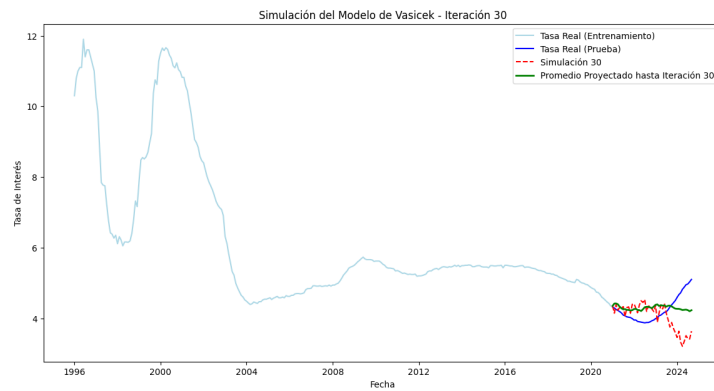


Figura 7.8: Simulación de 30 instancias

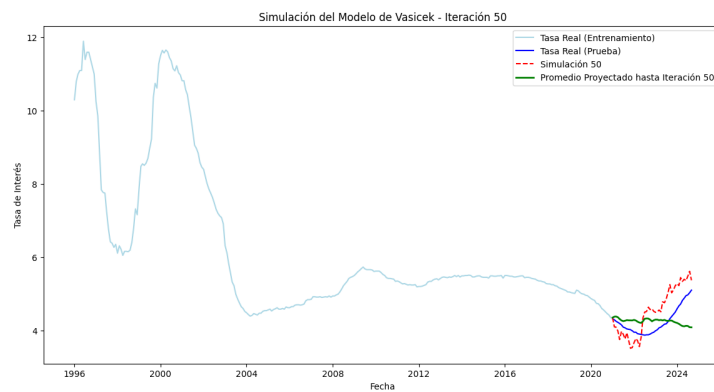


Figura 7.9: Simulación de 50 instancias

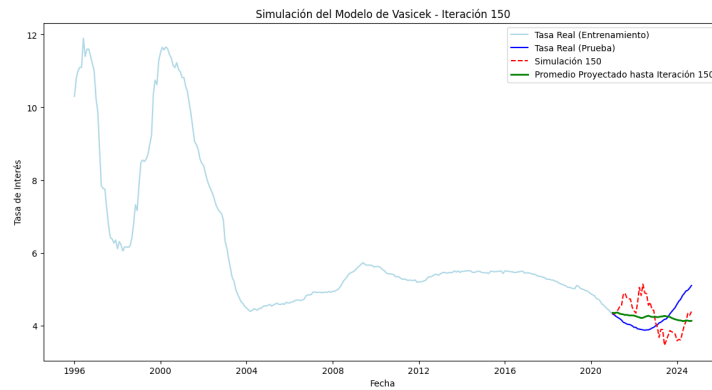


Figura 7.10: Simulación de 150 instancias

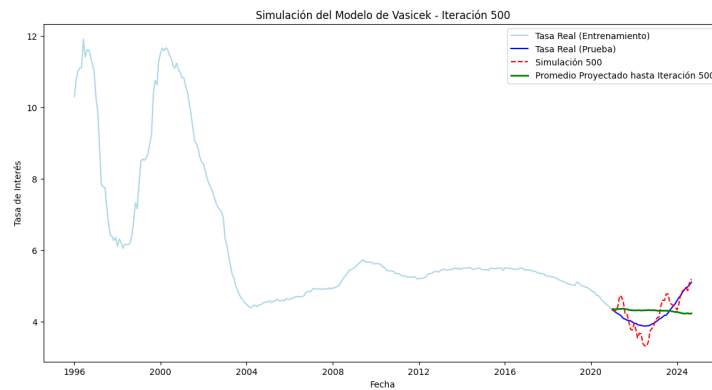


Figura 7.11: Simulación de 500 instancias

Iteraciones	MAE	MSE	R <sup>2</sup>
10	0.3406	0.1678	-0.3476
30	0.3207	0.1425	-0.1444
50	0.3314	0.1682	-0.3505
150	0.3229	0.1593	-0.2793
500	0.3330	0.1518	-0.2193

Tabla 7.3: Métricas de evaluación de las simulaciones en diferentes iteraciones.

Al realizar 500 simulaciones y calcular los promedios, se puede observar que las métricas en general mejoran, pero alcanzaron su óptimo en la iteración 30. Esto puede deberse a que, al estar simulando con valores normales aleatorios, con muchas simulaciones el promedio de estos valores tiende a la media, lo que hace que el modelo tienda a ajustarse a una línea recta.

Luego de realizar varias simulaciones en diferentes escenarios, queda claro que, al menos para este conjunto de datos, el modelo no parece ser el más adecuado para describirlos. Sin embargo, en lapsos cortos o para predicciones a corto plazo, puede proporcionar una idea del comportamiento de las tasas de interés.

---

## Conclusiones y Recomendaciones

---

### 8.1. Conclusiones

En conclusión, este trabajo ha cumplido con el objetivo de presentar una revisión y exposición detallada y rigurosa de los conceptos teóricos esenciales para comprender el cálculo de Itô y sus aplicaciones. Desde los fundamentos de la teoría de probabilidades hasta la definición formal de procesos estocásticos, como las martingalas y el movimiento browniano, se ha construido una base sólida que sostiene el desarrollo del cálculo estocástico. Esta base es fundamental para comprender los detalles del cálculo de Itô, cuyas propiedades y teoremas fueron discutidos y demostrados a lo largo del trabajo, destacando la importancia de la integral de Itô y la fórmula de Itô como herramientas clave en la modelización de fenómenos aleatorios.

El estudio de la integral de Itô y su construcción mediante procesos de aproximación constituye una de las partes más importantes de este trabajo. Analizar su comportamiento como martingala bajo ciertas condiciones permite explicar muchas de sus propiedades. Con esta herramienta, es posible modelar sistemas que incluyen ruido estocástico, algo esencial en el ámbito financiero y en otros campos que requieren análisis de incertidumbre. Lo más importante de esta integral es su papel en la fórmula de Itô, la cual permite expresar cómo una función suave de un proceso estocástico evoluciona en el tiempo, específicamente en este trabajo, en relación con un movimiento browniano.

Con estas herramientas se exploraron las ecuaciones diferenciales estocásticas. En este ámbito, a través de ejemplos y demostraciones, se ha logrado ilustrar la aplicabilidad de la teoría en la

resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas, especialmente como herramienta principal para asegurar la unicidad de las soluciones y para resolverlas.

Un aspecto relevante de esta tesis es la inclusión de aplicaciones prácticas, como la implementación del modelo de Vasicek, que ejemplifica cómo el cálculo de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas se traducen en herramientas concretas para el análisis y la predicción de tasas de interés. Esta parte del trabajo no solo muestra la utilidad de la teoría en modelos financieros, sino que también enfatiza la importancia de la calibración y la simulación de modelos estocásticos utilizando datos reales. El análisis de las simulaciones permitió observar las limitaciones y la efectividad del modelo al aplicarse a distintos escenarios temporales, destacando la necesidad de una interpretación cuidadosa y de posibles ajustes para mejorar la precisión de las proyecciones.

La tesis también resalta el desafío de la comprensión y enseñanza del cálculo de Itô, especialmente en contextos de habla hispana, donde los recursos didácticos sobre el tema son escasos. Este trabajo contribuye a cerrar esa brecha, ofreciendo explicaciones claras y accesibles que facilitan el entendimiento de los conceptos teóricos y sus aplicaciones prácticas, partiendo de los conceptos más básicos. Se espera que este aporte motive futuros trabajos y permita a estudiantes y profesionales abordar con mayor confianza problemas que involucren procesos estocásticos y cálculos complejos.

En resumen, el desarrollo del cálculo de Itô y sus aplicaciones presentado en esta tesis no solo proporciona una base académica rigurosa, sino que también ofrece una visión práctica de cómo los métodos estocásticos pueden integrarse en áreas como las ecuaciones diferenciales estocásticas o el análisis y la solución de problemas en otras disciplinas, como la economía. Con ello, se logra una mayor comprensión de las herramientas matemáticas que respaldan decisiones y modelos que dependen de cierta incertidumbre, permitiendo así obtener herramientas más sofisticadas en diferentes áreas del conocimiento.

## 8.2. Recomendaciones

Las recomendaciones presentadas a continuación tienen como propósito orientar futuras investigaciones y aplicaciones basadas en los hallazgos de este trabajo. Estas propuestas buscan fortalecer la comprensión teórica del cálculo de Itô, evaluar su aplicabilidad en diferentes contextos y promover su integración con herramientas modernas. Además, se plantean estrategias para mejorar la implementación práctica de modelos financieros, con énfasis en su adaptación a escenarios específicos y el uso de tecnologías avanzadas que potencien su utilidad en la toma de decisiones. Estas sugerencias están alineadas con las conclusiones obtenidas, ofreciendo un marco para avanzar en el desarrollo de esta área de estudio.

Se recomienda profundizar en la relación entre el cálculo de Itô y otros procesos estocásticos más complejos con el fin de extender su aplicabilidad en otras áreas. Esta ampliación del estudio

teórico permitiría explorar nuevas conexiones matemáticas y reforzar la utilidad de estos procesos en diferentes contextos.

Por otro lado, sería valioso utilizar datos de otros países para evaluar si el modelo de Vasicek es adecuado para el contexto guatemalteco o si existen particularidades locales que limitan su desempeño. Esta comparación internacional podría proporcionar una perspectiva más amplia sobre la efectividad del modelo y sugerir posibles adaptaciones específicas para Guatemala.

Asimismo, se propone combinar el cálculo de Itô con técnicas modernas de machine learning. La integración de estas herramientas computacionales avanzadas facilitaría la simulación y calibración de modelos, permitiendo evaluar su impacto en escenarios con datos de alta frecuencia y mayor volatilidad.

Finalmente, aunque el modelo de Vasicek es ampliamente utilizado, sería importante investigar variantes y extensiones, como los modelos CIR o Heston, evaluando su desempeño frente a datos reales. Esto permitiría identificar beneficios adicionales respecto al modelo original y fortalecer la capacidad predictiva de las herramientas financieras basadas en el cálculo de Itô.

## Bibliografía

- 
- [1] J. I. Almarza, “El Cálculo Estocástico en la Valuación de Activos Financieros”, Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2011. dirección: <https://exactas.uba.ar/tesis>.
  - [2] S. P. Lalley, *Existence and Uniqueness of Solutions to Stochastic Differential Equations*, Lecture notes, 2016.
  - [3] G. Kallianpur, *Stochastic Filtering Theory* (Stochastic Modelling and Applied Probability). New York: Springer-Verlag, 1980, vol. 13, ISBN: 978-1-4757-6592-2.
  - [4] H.-H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration* (Universitext). New York: Springer, 2006, ISBN: 978-0387-28720-1.
  - [5] M. M. Sánchez, *Aplicaciones de Cálculo Estocástico en la Gestión de Productos Financieros*, Presentación en la Universidad de Murcia, 2010. dirección: <https://banesto.es/mmenensa>.
  - [6] R. C. Merton, “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, *Journal of Economic Theory*, vol. 3, págs. 373-413, 1971. DOI: 10.1016/0022-0531(71)90038-X.
  - [7] S. Stelljes, “Applications of Stochastic Calculus to Finance”, Master’s Thesis, University of North Florida, 2004. dirección: <https://digitalcommons.unf.edu/etd/267>.
  - [8] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* (Springer Finance). New York: Springer, 2004, ISBN: 978-0-387-40101-0.
  - [9] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2003, ISBN: 978-3-662-03185-8.
  - [10] L.-P. Arguin, *A First Course in Stochastic Calculus* (Pure and Applied Undergraduate Texts). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2022, ISBN: 978-1-4704-6488-2.

- [11] K. Itô, “Stochastic Integral”, *Proceedings of the Imperial Academy*, vol. 20, págs. 519-524, 1944.
- [12] N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima y H. Kunita, *Ito’s Stochastic Calculus and Probability Theory*. Tokyo: Springer-Verlag, 1996, ISBN: 978-4-431-68534-0.
- [13] F. D. Rouah, *Euler and Milstein Discretization*, Unpublished manuscript, 2016. dirección: <https://www.frouah.com>.
- [14] D. D. Wackerly, W. M. III y R. L. Scheaffer, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, 7th. Cengage Learning, 2008, ISBN: 978-607-481-399-9.