

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Regularización de funciones Zeta en efectos perturbativos en
Teoría Cuántica de Campos**

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Allan Rodolfo Hurtado Rodríguez

Guatemala
2018

Regularización de funciones Zeta en efectos perturbativos en
Teoría Cuántica de Campos

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Regularización de funciones Zeta en efectos perturbativos en
Teoría Cuántica de Campos**

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Allan Rodolfo Hurtado Rodríguez

Guatemala
2018

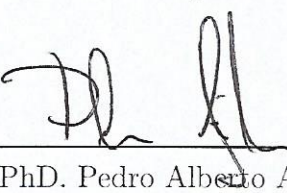
Vo.Bo.:

(f) 
PhD. Pedro Fernando Morales-Almazán

Tribunal Examinador:

(f) 
PhD. Pedro Fernando Morales-Almazán

(f) 
MSc. Zaida del Rosario Urrutia del Cid

(f) 
PhD. Pedro Alberto Aguilar Nuñez

Fecha de aprobación: Guatemala, 1 de diciembre de 2018.

Agradecimientos

- A Dios por darme la vida y permitirme descubrir como funciona su creación por medio del lenguaje matemático.
- A mis padres y abuelos por siempre apoyarme en todo momento, desde el primer día que entré a la universidad.
- A mis hermanos por siempre motivarme a seguir en lo que me gusta y creer en mí.
- A mis amigos por acompañarme durante estos cuatro años de la carrera y por permitirme compartir con ellos.
- A mis profesores del departamento de física y matemática, además de mi directora de carrera por siempre inculcarme la curiosidad y el pensamiento crítico, además de brindarme sus conocimientos, tanto adentro como fuera del salón.
- A mi asesor Pedro Morales, por darme consejos y ayudarme en la elaboración de esta tesis.
- A la universidad del valle de Guatemala por darme la oportunidad de estudiar en su casa de estudios.
- Al departamento de ayuda financiera por proporcionarme la beca que me permitió estudiar en UVG.

Agradecimientos	III
Lista de figuras	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Justificación	3
3. Objetivos	5
3.1. Objetivo general	5
3.2. Objetivos específicos	5
4. Marco teórico	7
4.1. Teoría clásica de campos	7
4.1.1. Formalismo lagrangiano y hamiltoniano	7
4.1.2. Simetrías y teorema de Noether	8
4.2. Mecánica cuántica y relatividad especial	10
4.2.1. Ecuación de Klein-Gordon	10
4.2.2. Ecuación de Dirac	12
4.3. Teoría de campos libres	15
4.3.1. Oscilador armónico	16
4.3.2. Campo escalar libre	17
4.4. El Vacío cuántico	18
4.5. Efecto Casimir	19
5. Energía de Casimir	23
5.1. Energía de Casimir en una dimensión	23
5.2. Energía de Casimir en dos dimensiones	24
5.3. Energía de Casimir para placas paralelas	25

6. Autoenergía	29
6.1. Autoenergía del electrón	29
7. Comparación entre energía de vacío y autoenergía	33
7.1. Energía de Casimir y autoenergía del electrón	33
8. Conclusiones	35
9. Bibliografía	37
10. Anexos	39
10.1. Función zeta de Riemann	39
10.2. Función zeta de Hurwitz	42
10.3. Función Zeta de Epstein	48

Lista de figuras

1.	Configuración de placas paralelas estudiada originalmente por Casimir [1]. . .	2
2.	Autoenergía del electrón [11].	29
3.	Curva C de radio menor a 2π [14].	46

Presentamos, primeramente, lo que es la energía de vacío y los temas previos e importantes para entender el vacío cuántico en el apartado del marco teórico, comenzando por una breve introducción a los temas más relevantes de la mecánica clásica, después se procede a dar una pequeña introducción a teoría cuántica de campos empezando con las ecuaciones de Dirac y Klein-Gordon. Después se muestra la cuantización de campos escalares libres que sirven de puente para poder abordar el vacío cuántico, además del oscilador armónico cuántico y definirlo en términos de los operadores creación y destrucción. Una vez definido lo anterior se muestra una breve introducción al trabajo de Casimir con placas paralelas.

Una vez teniendo el marco teórico cubierto, abordamos los cálculos de la energía de Casimir para tres diferentes configuraciones, tanto para una y dos dimensiones, empleando la técnica de regularización de funciones zeta. Luego se presenta el cálculo original de Casimir, con la diferencia de que se emplean las funciones zeta. Para los tres casos la energía de vacío resulta ser atractiva, reflejada en el signo menos que aparece en dichas expresiones. Para el caso de una dimensión la energía aumenta asintóticamente, por otro lado la energía para el caso de dos dimensiones resulta ser dependiente del cuadrado de las longitudes de la placa, lo cual puede interpretarse como el área de la misma, por lo que inferimos que se tiene un comportamiento asintótico también. La energía de Casimir para placas paralelas resulta ser asintótica con dependencia en la separación de las placas al cubo.

Por último, se presenta el cálculo de la autoenergía del electrón empleando las técnicas desarrolladas de la teoría cuántica de campos perturbativa y electrodinámica cuántica. El resultado obtenido es que dicha autoenergía depende de logaritmos principalmente, el comportamiento vendría a ser asintóticamente logarítmica.

El efecto Casimir es uno de los fenómenos físicos causados por lo que se conoce como energía de vacío y es consecuencia de la teoría cuántica de campos. Históricamente el efecto Casimir fue descubierto y estudiado por H.B.G Casimir y Dirk Polder mientras estudiaban fuerzas intermoleculares y fuerzas de Van der Waals. Esto nos puede parecer algo raro, pero tiene su explicación del porque el vacío tiene energía.

Una buena manera de explicarlo es en virtud del principio de incertidumbre. Este principio nos dice que no podemos medir dos cantidades físicas complementarias al mismo tiempo, esto quiere decir, que por ejemplo no podemos saber la posición y velocidad de una partícula al mismo tiempo, esta sería la razón del porque es coherente pensar en una energía asociada al vacío. Esta energía se conoce como energía del punto cero, la cual es debida a fluctuaciones cuánticas del vacío provocadas por creación y aniquilación de partículas virtuales o bien dicho de otro manera, son fluctuaciones de los modos normales del campo.

Dichas fluctuaciones pueden ser interpretadas como osciladores cuánticos, esto debido a que si calculamos la energía fundamental de un oscilador cuántico, esta corresponde con un valor proporcional a la frecuencia angular de la oscilación. Y como bien sabemos, dicha energía está cuantizada, es decir, solo toma valores discretos. También podemos mencionar que por reglas de conmutación de las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados, no conmutan en general con el hamiltoniano, lo que nos dice que ambas cantidades son no nulas y por tanto refuerza la idea de que existe energía en el vacío.

La manera en como Casimir estudió este efecto fue por medio de la configuración de placas paralelas tales que la distancia de separación de las mismas es mucho menor a las dimensiones de las placas. También consideró que fueran placas dieléctricas, lo que implica que el campo eléctrico transversal y el campo magnético normal, deben de anularse en la superficie. El cálculo de la energía entre las placas nos conduce a que las mismas deben de atraerse. Esto se conoce como fuerza de Casimir, provocado por lo anteriormente dicho, además de que para esta configuración, hay un número más grande de fluctuaciones afuera de las placas que adentro, creando una presión entre ellas. Las placas perturban dicho campo, provocando la interacción y forzando a las placas a juntarse.

Entonces esto nos hace ver que en presencia de objetos dichos campos se ven perturbados, provocando ya sea una fuerza de atracción o repulsión. Esto, por tanto, nos permite estudiar diferentes geometrías o configuraciones, pero como es bien conocido, en teoría cuántica de campos se trata con cantidades que dan un valor divergente, más precisamente el valor de la energía de Casimir independiente de su configuración dará un valor divergente, esto debido a que se suman todas las energías de los osciladores armónicos en el campo. Para tratar con tales divergencias se hace uso de la regularización de funciones zeta, siendo estas aplicadas en varias ramas de la física como lo son cosmología y agujeros negros, materia condensada, física nuclear, etc. Para esta tesis nos enfocaremos en la aplicación de dicha técnica en el cálculo de la energía de Casimir para diferentes configuraciones

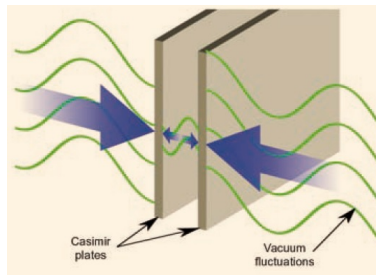


Figura 1: Configuración de placas paralelas estudiada originalmente por Casimir [1].

Existen otras técnicas que permiten renormalizar las expresiones divergentes, pero la técnica de regularización de funciones zeta permite también estudiar un poco del porque dichas funciones pueden describir tan bien un sistema cuántico, creando un puente entre física y matemática. Dichas funciones son de variable compleja que admiten una regularización a todo el plano complejo. También son de gran interés en teoría de números y análisis complejo debido a que se relaciona con la hipótesis de Riemann la cual arroja luz sobre la distribución de números primos.

El estudio y la comprensión de la energía de vacío tiene repercusiones más allá del efecto Casimir, es decir, uno de los problemas más grande de la física actual es lo que se conoce como el problema de la constante cosmológica. Esta constante fue introducida por A. Einstein en su teoría general de la relatividad como un término adicional a su ecuación de campo para la gravedad. Dicha constante se ha logrado medir a nivel experimental, pero mientras el cálculo teórico es ordenes de magnitud más grande que la evidencia experimental, siendo este el peor cálculo en la historia de la física teórica.

Ahora bien, dicha constante cosmológica se relaciona con la densidad de vacío que hay en el universo, entonces ahí radica la importancia de comprender de mejor manera la energía de vacío por medio del efecto Casimir y comparando con la autoenergía. Además cabe mencionar que la constante cosmológica está relacionada con la expansión acelerada del universo. Entender por que el universo se expande por medio de la comprensión de la energía de vacío sería un gran paso para la comprensión de nuestro universo y de como funciona. Entonces esto abre la posibilidad de que dicha expansión se deba a una fuerza repulsiva generada por la energía de vacío similar a lo que ocurre en el efecto Casimir.

3.1. Objetivo general

Calcular la energía de Casimir para diferentes configuraciones empleando regularización de funciones zeta y comparar con la autoenergía.

3.2. Objetivos específicos

- Calcular la energía de Casimir en una dimensión con condiciones de Dirichlet.
- Calcular la energía de Casimir en dos dimensiones con condiciones de Neumann.
- Calcular la energía de Casimir para placas paralelas empleando regularización de funciones zeta.
- Calcular la autoenergía del electrón.
- Regularizar la función zeta de Riemann.
- Regularizar la función zeta de Hurwitz.
- Regularizar la función zeta de Epstein.

4.1. Teoría clásica de campos

En este apartado daremos una breve descripción de los resultados básicos de la mecánica clásica sobre teoría clásica de campos, para poder así abordar en los siguientes apartados sobre la teoría cuántica de campos. Los cuatro puntos importantes son el formalismo lagrangiano y hamiltoniano, las simetrías y el teorema de Noether, además del concepto de campo escalar.

4.1.1. Formalismo lagrangiano y hamiltoniano

Primero daremos una definición de lo que es un campo escalar en el sentido clásico.

Definición 4.1: Un campo escalar es una distribución de una cantidad física escalar en una región del espacio-tiempo (\vec{x}, t) y lo denotaremos por $\phi(\vec{x}, t)$.

La definición anterior básicamente nos dice que para cierta región del espacio, se puede medir una cantidad física en un instante de tiempo. En la teoría de campos nos interesa estudiar la dinámica de los campos. Para poder hacerlo debemos definir el lagrangiano, donde la noción física sería la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema.

Definición 4.2: Sean $L(t)$ un funcional y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t), \nabla\phi(\vec{x}, t))$ una función que denominaremos densidad lagrangiana, tal que

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^3x \quad (1)$$

De la expresión anterior podemos definir la acción (integral doble de \mathcal{L} sobre un $d^3x dt =$

d^4x) y la variación de la acción, donde podemos formular un problema común en el cálculo de variaciones, es decir, encontrar una función que permita que la acción adquiriera un valor extremo. Básicamente imponemos las condiciones $\phi(\vec{x}, t_1) = \phi(\vec{x}, t_2) = 0$ tal que $\delta S = 0$ donde S es la acción y δS es la variación de la misma, desde un punto de vista más físico, se hizo uso del principio de mínima acción o principio de Hamilton.

Después de resolver el problema del cálculo de variación obtendremos algo que se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange, la cuál nos permite describir la dinámica de los campos. La ecuación de Euler-Lagrange tiene la siguiente forma.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2)$$

Ahora definiremos los puntos importantes del formalismo hamiltoniano, donde la noción física del hamiltoniano sería la energía total, es decir, la suma de la energía cinética y potencial del sistema.

Definición 4.3: Sea $\pi(x)$ el momentum conjugado a $\phi(x)$ tal que

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (3)$$

Donde notamos que $\pi = \pi(x)$ solamente, lo que implica que para el formalismo hamiltoniano $\phi = \phi(x)$. Ahora procederemos a definir el hamiltoniano.

Definición 4.4: Sea H el hamiltoniano y $\mathfrak{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$ la densidad hamiltoniana, donde esta densidad hamiltoniana es una transformación de Legendre, tal que.

$$H = \int \mathfrak{H} d^3x \quad (4)$$

Ahora las ecuaciones del movimiento que surgen del formalismo hamiltoniano y que también nos permiten estudiar la dinámica de los campos, incluyendo la parte temporal son [2]

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial H}{\partial \pi(\vec{x}, t)} \quad \dot{\pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(\vec{x}, t)} \quad (5)$$

4.1.2. Simetrías y teorema de Noether

En teoría de campos el concepto de simetría es uno de los más importantes por las implicaciones que tienen. De hecho un resultado muy importante acerca de las simetrías

es el teorema de Noether, habiendo simetrías globales o locales, a veces llamadas simetrías gauge. Un ejemplo de simetría sería la que surge bajo transformaciones de Poincare, es decir, que existe una invarianza relativista. La idea de simetría es poder dar un punto de partida más natural para la cuál se puede construir una teoría cuántica de campos, básicamente una simetría global es aquella que refleja una transformación igual en todos los puntos del campo clasificando el espectro de una teoría, por otro lado las simetrías locales o gauge eliminan estados, donde se reflejan redundancias en la descripción de la teoría, siendo por tanto las cantidades medibles invariantes gauge. Las simetrías gauge tienen su importancia debido a que reflejan un principio fundamental de la naturaleza, el cuál es la invarianza de las leyes físicas bajo transformaciones locales o gauge [3]. Esto nos conduce a definir el teorema de Noether el cual se enuncia como sigue.

Teorema 4.1 (teorema de Noether): Toda simetría continua del lagrangiano da lugar a una corriente conservada $j^\mu(x)$ tal que la ecuación de movimiento implica

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6)$$

es decir, $\frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ o dicho de otra forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (7)$$

Demostración: Trabajando con cantidades infinitesimales, definamos la siguiente transformación que será una simetría continua si el lagrangiano cambia por una derivada total $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$ para algún conjunto de funciones $F^\mu(\phi)$.

$$\delta \phi(x) = X(\phi) \quad (8)$$

Consideramos hacer una transformación arbitraria al campo $\delta \phi$, por lo que obtenemos que

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta \phi) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \quad (9)$$

Donde el término en corchetes desaparece cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen, así que por lo tanto obtenemos que

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \quad (10)$$

Pero por la transformación simétrica $\delta \phi = X(\phi)$, tenemos por definición que $\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$, donde al comparar con la ecuación (4.10) tenemos que

$$\partial_\mu F^\mu = 0 \tag{11}$$

Donde $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi)$ [2] □

La interpretación física del teorema de Noether es básicamente que para cada simetría, habrá una ley física que se conserva, por ejemplo, bajo transformaciones temporales o de traslación, surge la ley de la conservación de la energía .

4.2. Mecánica cuántica y relatividad especial

Ahora nos centraremos en tratar de reconciliar la teoría de la relatividad especial con la mecánica cuántica, es decir, se sabe muy bien que la ecuación de Schrodinger no es suficiente para poder describir el comportamiento de las partículas a velocidades relativistas. Para poder tener una mejor descripción de este tipo de partículas, analizaremos las ecuaciones de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac. Este par de ecuaciones son las ecuaciones básicas y principales en una teoría cuántica de campos, que en el apartado siguiente se obtendrá a partir de la cuantización de una teoría de campos clásica.

4.2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Podemos relacionar la ecuación de Schrodinger no relativista, con la relación energía-momentum no relativista, es decir

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{12}$$

donde se tiene que los operadores cuánticos para la energía y el momentum son $E := i \frac{\partial}{\partial t}$ y $p := -i \nabla$ respectivamente, y además estos operadores diferenciales actúan sobre la función de onda de Schrodinger.

Ahora para una ecuación de onda relativista se debería considerar la ecuación (4.12) para un cuadrivector, tal que, $p^\mu = (E, p)$ donde se debe satisfacer que $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2 = m^2$ donde las constantes $\hbar = c = 1$

Con esto obtenemos la siguiente relación

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{13}$$

Si sustituimos la relación de los operadores cuánticos para la energía y el momentum en la ecuación (4.12) y que estos a su vez estén actuado sobre un campo escalar unidimensional

$\phi(x, t)$ obtendremos que

$$-\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi(x, t) \quad (14)$$

definiendo el D'Alembertiano \square como $\square := -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ tenemos que

$$(\square^2 + m^2)\phi(x, t) = 0 \quad (15)$$

Con lo cual hemos obtenido la ecuación de Klein-Gordon, la cual es útil para describir partículas de espín 0 o del tipo bosón

Ahora para la solución de la ecuación de Klein-Gordon proponemos una solución de la forma de una onda plana, es decir

$$\phi(x, t) = Ce^{-ip \cdot x} \quad (16)$$

Donde se define que $p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - p \cdot x$, puesto que la solución a la ecuación de Klein-Gordon es una función de onda, sabemos que se cumple la relación mostrada en (4.13) al realizar la sustitución de nuestra solución. Pero surge un problema $E = \pm(p^2 + m^2)^{1/2}$

De la ecuación de Klein-Gordon en (4.14), después de multiplicar por el conjugado del campo escalar a ambos lados de la ecuación y después de manipulaciones algebraicas, llegaremos a una ecuación similar a la mostrada en (4.7) donde $\rho = i[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - (\frac{\partial \phi^*}{\partial t})\phi]$ y $j = i^{-1}[\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*)\phi]$ tal que la ecuación (4.6) se cumple y $j^\mu := (\rho, j) = i[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi]$

Ahora como la corriente de probabilidad j es idéntica a la de la ecuación de Schrodinger si realizáramos un procedimiento similar para dicha ecuación. Analizando ahora ρ como una densidad de probabilidad, notamos que por el hecho de que la ecuación de Klein-Gordon contiene derivadas temporales de segundo orden esto significa que ρ no necesariamente debe ser positiva, ya que tomando en cuenta la solución en (4.16) y aplicándole $\rho = i[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - (\frac{\partial \phi^*}{\partial t})\phi]$, obtenemos que

$$\rho = 2|C|^2 E \quad (17)$$

Donde E sabemos que puede ser positiva o negativa debido a la relación mostrada en (4.13). Esto nos indica que tanto la energía como la densidad de probabilidad pueden ser, ya sea positivas o negativas. Esto históricamente representó un problema [4].

4.2.2. Ecuación de Dirac

Una de las personas que abordó el problema fue Paul Dirac, rápidamente podemos darnos cuenta que necesitamos de una ecuación que sea lineal en la derivada temporal y espacial, con lo cual Dirac propuso la siguiente ecuación válida para partículas de espín 1/2

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\phi \quad (18)$$

Teniendo una ecuación lineal, Dirac pudo definir que $\rho \geq 0$, además de que la solución de (4.18) debe satisfacer también la ecuación de Klein-Gordon. Nos preguntamos ahora que son los coeficientes α y β . Para responder a esto consideremos (4.18) y elevamos al cuadrado ambos lados (los operadores), así tenemos que

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)(-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\phi \quad (19)$$

Desarrollando los términos tenemos que

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^i)^2} - \sum_{i,j=1, i>j}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} - im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \phi \quad (20)$$

Tomando el supuesto de que ϕ debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación (4.20) se simplifica a

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^i)^2} + m^2 \phi \quad (21)$$

De la expresión anterior notamos que se deben cumplir ciertas relaciones para α y β , en efecto son relaciones de anti-conmutación, es decir

$$\begin{cases} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, & i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, & i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{cases} \quad (22)$$

Donde α y β según la interpretación de Dirac, son matrices actuando sobre la función de onda que posee varias componentes en forma de vector columna, con lo cual se esperaría que cada componente obedezca la misma función de onda y que tengan la misma energía, esto significa que hay una degeneración representada por dichas componentes, o dicho de

otra forma se asocia un nuevo grado de libertad, donde éste nuevo grado de libertad es el espín. Éste se puede interpretar como un análogo al momentum angular orbital.

Las componentes de la función de onda de Dirac, componen un espinor, el cuál según las condiciones mostradas en (4.22) los coeficientes α y β deben de ser matrices 4×4 , es decir

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula, $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria y σ_i son las matrices de Pauli, todas matrices 2×2 . Siendo las matrices de Pauli definidas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Por último, las ecuaciones en (4.22) deben de cumplir la relación de anti-conmutación $[A, B] = AB - BA$, es decir

$$\begin{cases} [\alpha_i, \beta] = 0 \\ [\alpha_i, \alpha_j] = 2\delta_{ij}\mathbf{1} \\ \beta^2 = \mathbf{1} \end{cases} \quad (25)$$

Ahora la solución a la ecuación de Dirac para el caso de una partícula libre en un espacio-tiempo de Minkowski unidimensional, es una función del tipo onda plana, es decir,

$$\phi(x, t) = B e^{-ip \cdot x} \quad (26)$$

Donde B es un espinor o matriz 4×4 independiente de x . Al sustituir (4.26) en (4.18). Para evitar cálculos de más, se usará la representación de matrices 2×2 como la mostrada en (4.23), y escogiendo entonces a B como

$$B = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (27)$$

El cual nos produce el siguiente sistema de ecuaciones al momento de sustituir nuestra solución propuesta en la ecuación de Dirac

$$E \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Si se resuelve para χ encontramos que

$$B = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix} \quad (29)$$

Sustituyendo χ del sistema formado en (4.28) y recordando que $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = p^2 \mathbf{1}$ se obtiene que $(E + m)(E - m)\psi = p^2\psi$ pero esto nos conduce nuevamente a

$$E = \pm(p^2 + m^2)^{1/2} \quad (30)$$

Esto nos llevó nuevamente a tener soluciones para la energía negativa y positiva, ahora analizando la corriente de probabilidad para la ecuación de Dirac, tendremos que si definimos la densidad de probabilidad como

$$\rho = \phi^\dagger \phi \quad (31)$$

Donde de la expresión tenemos que ϕ^\dagger es el conjugado de ϕ , recordando ahora la condición impuesta por Dirac, tenemos que $\rho = \sum_{a=1}^4 |\phi_a|^2 > 0$, además sabemos que debe de cumplir con la ecuación de continuidad y que $j = \phi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \phi$ con lo cual ahora sí tenemos una densidad de probabilidad positiva.

Pero ahora nos queda un solo problema, que pasa con las energías negativas, ya que tanto para E positivo como negativo, se tiene probabilidad positiva. Dirac propuso que el vacío es un estado sin partículas de energía positiva, de tal forma que los estados de energía están llenos de electrones pero por principio de exclusión de Pauli, las partículas de energía positiva no pueden caer en niveles más bajos de energía, con lo cual el vacío tiene ahora carga y energía negativa infinita pero todas las observaciones representan fluctuaciones finitas de energía y carga con respecto a este vacío. Por lo tanto, la ausencia de una partícula de energía negativa es equivalente a la presencia de una partícula con carga opuesta de energía positiva, con lo cuál vemos que la genialidad de Dirac está en la reinterpretación para las dos soluciones de la energía, es decir, interpretarlas como antipartículas.

Lo propuesto por Dirac abrió un campo nuevo de investigación, el de las antipartículas pero aún no se ha resuelto el caso para la ecuación de Klein-Gordon. Para esto Richard Feynman tuvo una genial idea para poder interpretar las soluciones negativas para la ecuación de Klein-Gordon. Lo que Feynman propuso fue que la emisión/absorción de una antipartícula es físicamente equivalente a la absorción/emisión de una partícula [4], esta idea no sólo se aplica para la ecuación de Klein-Gordon, también puede aplicarse esta interpretación a la ecuación de Dirac. La amplitud invariante para la emisión/absorción de un antifermión con un cuadrimomentum p^μ y espín proyección s_z en el marco de referencia, es igual a menos la amplitud para la absorción/emisión de un fermión con $-p^\mu$ y $-s_z$ en el resto del marco de referencia.

Con lo anteriormente dicho, las energías negativas pueden ser interpretadas como antipartículas según la interpretación de Dirac. Ahora la interpretación de Feynman nos dice

aún más, a parte de que estas energías se pueden interpretar como antipartículas, la interacción entre partículas y antipartículas provoca una aniquilación de pares, y es de aquí donde surgen los diagramas de Feynman, los cuales nos dicen que las antipartículas pueden interpretarse como partículas que viajan atrás en el tiempo según la interpretación de Feynman [4].

4.3. Teoría de campos libres

La cuantización canónica consiste básicamente en la técnica que nos permite partir del formalismo hamiltoniano a una teoría cuántica. La idea en sí, es tratar a los momentos y coordenadas generalizadas de la mecánica clásica como operadores, siendo así el análogo cuántico de los bracket de Poisson en mecánica clásica las relaciones de conmutación, es decir que aplicando esto al i -ésimo (o j -ésimo) campo de la definición (4.1) y su respectivo i -ésimo (o j -ésimo) momentum conjugado de la definición (4.3), así nuestro campo cuántico obedece las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{cases} [\phi_i(\vec{x}), \phi_j(\vec{y})] = [\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})] = 0 \\ [\phi_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_i^j \end{cases} \quad (32)$$

Tal que la evolución temporal queda relegada a la ecuación de Schrödinger y al autoestado $|\psi\rangle$ con H el hamiltoniano, así

$$i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (33)$$

Cómo ya bien sabemos, la idea de la mecánica cuántica es obtener información a través del espectro del hamiltoniano, aunque en una teoría cuántica de campos es muy difícil usar este método debido a que tratamos con infinitos grados de libertad al estudiar cada punto del campo. Aquí es donde empezamos a hablar acerca de las teorías de campos libres, las cuales nos permite escribir la dinámica de dicho campo tal que cada grado de libertad sea independiente de los otros. La característica principal de estos campos libres son que sus lagrangianos son cuárticos en sus campos, esto quiere decir que las ecuaciones de movimiento son lineales. Por ejemplo la ecuación de Klein-Gordon mostrada en (4.15).

Para poder visualizar las coordenadas en las cuales se desacoplan los grados de libertad tomamos la transformada de Fourier del campo en el espacio de momentos

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (34)$$

Tal que $\phi(\vec{p}, t)$ debe de satisfacer la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de momentos, donde para cada punto del campo se resuelve la ecuación del oscilador armónico con una

frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + m^2}$ entonces para poder cuantizar el campo debemos cuantizar este número infinito osciladores armónicos [5] [2].

4.3.1. Oscilador armónico

Sabemos que el hamiltoniano del oscilador armónico es

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (35)$$

Para poder encontrar el espectro del hamiltoniano debemos definir un par de operadores conocidos como operadores destrucción y creación respectivamente, donde estos cumplen con $[a, a^\dagger] = 1$

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}p \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q - \frac{i}{\sqrt{2\omega}}p \quad (36)$$

Donde podemos reescribir el hamiltoniano en términos de estos operadores, además cumpliendo con las siguientes relaciones $[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger$ y $[H, a] = -\omega a$ siendo así el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (37)$$

Notamos que las relaciones anteriormente mencionadas nos dan indicio de que los operadores creación y destrucción nos llevan entre estados propios de energía, es decir, si $|E\rangle$ es un autoestado de energía y la ecuación de eigenvalores es $H|E\rangle = E|E\rangle$ dichos operadores nos permiten construir estados de energía, ya sea un estado menor o mayor, por ejemplo con el operador creación obtenemos que

$$H a^\dagger |E\rangle = (E + \omega) a^\dagger |E\rangle \quad (38)$$

De forma similar aplicando el operador destrucción obtenemos la misma ecuación con la diferencia que el eigenvalor sería $(E - \omega)$. Al aplicar varias veces dichos operadores encontramos que la energía del oscilador armónico está cuantizada y es de la forma $\dots, E - 2\omega, E - \omega, E, E + \omega, E + 2\omega, \dots$

Definiendo el estado fundamental del oscilador armónico como $|0\rangle$ al encontrar dicha energía del estado fundamental se espera que al tratarse del vacío no hubiera manifestación de energía pero resulta ser que la energía del punto cero es $H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega|0\rangle$ donde los estados excitados surgen al aplicar a^\dagger repetidas veces, siendo así el n-ésimo estado

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (39)$$

con energía

$$H |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega |n\rangle \quad (40)$$

La interpretación física de estos operadores sería la creación y aniquilación de pares de partículas-antipartículas provocando fluctuaciones cuánticas en el vacío de tal forma que este tenga energía, conocida como energía del estado fundamental o del punto cero [5] [2] .

4.3.2. Campo escalar libre

Ahora veremos que al aplicar la cuantización del oscilador armónico a un campo escalar libre, debemos escribir como una suma lineal infinita de operadores creación y destrucción tal que se puedan reescribir tanto el campo ϕ como su momento conjugado π

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} [a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \quad (41)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}}}}{\sqrt{2}} [a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \quad (42)$$

Donde la ecuación en (4.32) se cumple, también se cumple para los operadores creación y destrucción.

$$\begin{cases} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \end{cases} \quad (43)$$

Ahora calcularemos el hamiltoniano usando las definiciones en (4.41) y (4.42). Sabemos que el hamiltoniano para un campo escalar libre real es

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \quad (44)$$

Con lo cual este hamiltoniano lo podemos reescribir usando la ecuación que aparece en (4.37), integramos sobre todo el espacio de momentos y aplicamos (4.43)

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} [a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[\frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \quad (45)$$

Notamos que esta integral es divergente debido a la delta de Dirac evaluada en cero y además integrada sobre todo el espacio de momentos [5] [2] [6].

4.4. El Vacío cuántico

Definiremos el vacío como la aplicación del operador destrucción aplicado al estado fundamental, es decir

$$a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad (46)$$

Con lo cual podemos definir la energía del estado fundamental E_0 (primer término de (4.45)) como

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle = \left[\frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\vec{p}} \delta^3(0) \right] \quad (47)$$

Lo cual sabemos que da un valor infinito, es decir, es divergente. En teoría cuántica de campos es normal tratar con resultados divergentes. En este caso el infinito surge por que se integró sobre todo el espacio, que se supone infinito, a este tipo de divergencias se les conoce como divergencias infrarrojas.

Para tratar con este infinito supondremos que trabajamos en una caja de largo L con $L \rightarrow \infty$ así tenemos que el volumen V (con $\vec{p} = 0$ por lo que la exponencial se hace uno)

$$(2\pi)^3 \delta^3(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3x = V \quad (48)$$

Pero aún sigue siendo divergente el resultado por que calculamos la energía total, si calculamos la densidad de energía ε_0 encontramos que

$$\varepsilon_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \quad (49)$$

Notamos que se están sumando la energía de todos los osciladores armónicos por lo que aún sigue siendo divergente, aquí podemos interpretar el vacío cuántico como infinitos osciladores armónicos acoplados. Aquí tenemos que conforme $\vec{p} \rightarrow \infty$ $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ esto significa que tenemos frecuencias grandes en espacios muy reducidos (asumimos válida nuestra teoría para energías altas en espacios pequeños), esto se conoce como divergencias ultra violeta. Una manera práctica de tratar con este resultado divergente es reordenar los operadores y hacer que los operadores destrucción siempre estén a la derecha, a este método se le conoce como ordenamiento normal [5] [2].

4.5. Efecto Casimir

El efecto Casimir es un fenómeno correspondiente a la teoría cuántica de campos debido a la cuantización de los campos electromagnéticos en la presencia de conductores eléctricos, lo cuál provoca una atracción entre las placas manifestación de las fluctuaciones cuánticas del vacío, la geometría usual para este fenómeno es la configuración de placas paralelas de longitud L separadas una distancia $a \ll L$. Los supuestos para este sistema físico son que a debe de ser más grande que las distancias interatómicas $a\omega_c \gg 1$; el campo eléctrico \vec{E}_p paralelo a las placas de un conductor físico, desaparecerá para frecuencias mucho más bajas que la frecuencia típica a escala atómica ω_c . A frecuencias más grandes que la escala atómica los conductores serán transparentes sin condiciones impuestas sobre el campo eléctrico. Para la región donde la frecuencia es similar a la escala atómica la conductividad será una función complicada de la frecuencia dada por $\theta(\omega_c - \omega)$. Impondremos condiciones de frontera periódicas sobre un cubo que encerrará las placas, esto para regularizar el volumen infinito [5].

Empezaremos calculando las frecuencias en tres diferentes regímenes en los cuales se necesitará saber cual es la frecuencia del oscilador armónico cuántico. Sabemos que los momentos paralelos a las placas son de la forma

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L} \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z} \quad (50)$$

Debido a esto la frecuencia es entonces

$$\omega^{(i)} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (k_z^i)^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (51)$$

Donde tenemos que para $\omega > \omega_c$ la frecuencia es la misma como en la ausencia de placas, ya que las placas actúan como objetos transparentes, así $k_z^{(1)} = \frac{2\pi n_z}{L}$ con $n_z \in \mathbb{Z}$, para $\omega < \omega_c$ y entre las placas $k_z^{(2)} = \frac{\pi n_z}{a}$ con $0 \leq n_z \in \mathbb{Z}$, por último afuera de las placas y $\omega < \omega_c$ tenemos que $k_z^{(3)} = \frac{\pi n_z}{L-a}$ con $0 \leq n_z \in \mathbb{Z}$

Lo que nos interesa es la diferencia entre la energía entre las placas y en ausencia de ellas, para eso sumamos la contribución de todas las frecuencias donde si esta frecuencia excede ω_c todas las contribuciones a la energía se cancelan, ya que las placas actuarían como cuerpos transparentes, así

$$E(a) - E_0 = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left(\frac{1}{2} \omega^{(2)}(n_x, n_y, n_z) + \frac{1}{2} \omega^{(3)}(n_x, n_y, n_z) - \frac{1}{2} \omega^{(1)}(n_x, n_y, n_z) \right) \quad (52)$$

Analizamos para cuando $n_z \neq 0$ el campo eléctrico tendrá dos modos de polarización con dos componentes a lo largo de las placas, por otro lado, para $n_z = 0$ y $n_x, n_y \neq 0$ solamente será un modo de polarización. Por lo que si aislamos el primer caso

$$\begin{aligned}
E(a) - E_0 &= \frac{1}{2} \sum_{n_x, n_y} \omega(n_x, n_y, 0) + \\
&+ \sum_{n_x, n_y} \sum_{n_z=1}^{\infty} (\omega^{(2)}(n_x, n_y, n_z) + \omega^{(3)}(n_x, n_y, n_z) - 2\omega^{(1)}(n_x, n_y, n_z))
\end{aligned} \tag{53}$$

Ahora lo que haremos será asumir que el tamaño L del cubo es más grande que las demás escalas del problema, además de que los niveles n_x y n_y se espacian un poco y las sumas se sustituyen por integrales usando $dn_x = \frac{Ldk_x}{2\pi}$ y $dn_y = \frac{Ldk_y}{2\pi}$ por lo que la expresión (53) se transforma en

$$\begin{aligned}
E(a) - E_0 &= \frac{L^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y + \\
&+ \left[\frac{1}{2} \omega \theta(\omega_c - \omega) + \sum_{n_z=1}^{\infty} (\omega^{(2)} \theta(\omega_c - \omega^{(2)}) + \omega^{(3)} \theta(\omega_c - \omega^{(3)}) - 2\omega^{(1)} \theta(\omega_c - \omega^{(1)})) \right]
\end{aligned} \tag{54}$$

De igual forma podemos sustituir la suma por una integral para n_z ya que los niveles de frecuencias $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(3)}$ están muy juntos así tenemos que

$$\sum_{n_z=1}^{\infty} \omega^{(2)} \theta(\omega_c - \omega^{(2)}) = \frac{L-a}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \theta(\omega_c - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}) \tag{55}$$

$$\sum_{n_z=1}^{\infty} 2\omega^{(1)} \theta(\omega_c - \omega^{(1)}) = \frac{L}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \theta(\omega_c - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}) \tag{56}$$

Definamos $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ y $n = ak_z/\pi$ por lo que tenemos que

$$\begin{aligned}
E(a) - E_0 &= \frac{L^2}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk \left[\frac{1}{2} k \theta(\omega_c - k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \theta(\omega_c^2 - k^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}) - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \theta(\omega_c^2 - k^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}) \right]
\end{aligned} \tag{57}$$

Definiremos la siguiente función

$$f(n) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \theta(\omega_c^2 - k^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}) \tag{58}$$

Por lo que la energía por unidad de área se puede escribir como

$$\frac{E(a) - E_0}{L^2} = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} dn f(n) \quad (59)$$

Donde se ha usado la fórmula de sumación de Ramanujan, la cual es

$$\int_0^{\infty} dn f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \sum_0^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0) \quad (60)$$

tal que los números de Bernoulli son

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \quad (61)$$

por lo que al calcular $f(n)$ encontramos que

$$f(n) = \frac{1}{6\pi} \left(\omega_c^2 - \frac{\pi^3 n^3}{a^3} \right) \quad (62)$$

Donde tenemos que $f^{(2p-1)}(0) = 0$ conforme $p > 0$ mientras que $f^{(2p)}(0) = -\pi^2/a^3$ por lo tanto la energía de Casimir para placas paralelas es (con $B_4 = -1/30$)

$$\frac{E(a) - E_0}{L^2} = \frac{\pi^2 B_4}{a^3 4!} = -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{720 a^3} \quad (63)$$

Notamos que el signo menos indica que la energía disminuye entre las placas lo que se traduce en una atracción entre las mismas. Ahora definimos la fuerza de Casimir como $\frac{\partial E}{\partial a}$ con E igual a la expresión anterior, así

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \quad (64)$$

Notamos que la fuerza es atractiva por el signo menos [5][7] [2] [8].

5.1. Energía de Casimir en una dimensión

Se presentará el cálculo para la energía de Casimir en una dimensión con condiciones de Dirichlet con el laplaciano correspondiente.

Sea $f := f(x)$ y considerese el siguiente problema de autovalores con condiciones de Dirichlet

$$-\Delta f = \lambda f, \quad f(0) = f(L) = 0 \tag{65}$$

Donde $\Delta := \frac{d^2}{dx^2}$ y L es la longitud de un intervalo.

La solución general al problema presentado en (5.1) es

$$f(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \tag{66}$$

Aplicando las condiciones de Dirichlet se tiene que $B = 0$ y que $\lambda_n^{1/2} = \frac{n\pi}{L}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ siendo así la solución a (7.1)

$$f_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{67}$$

Consideremos ahora la traza del operador pseudo-diferencial, el cual debe de ser un operador del tipo elíptico para garantizar que sus autovalores sean reales y por tanto tener

una energía definida físicamente hablando. Además de asociarle una función zeta arbitraria $\zeta_P(s)$

$$Tr(\Delta) = \zeta_P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{-2s} := \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2s} \zeta_R(2s) \quad (68)$$

Donde notamos que la función zeta asociada a este operador es la función zeta de Riemann evaluada en $\zeta_R(-1)$, haciendo ahora $s = -1/2$ obtenemos que la energía de Casimir en una dimensión con condiciones de Dirichlet con unidades geometrizadas, *i.e* con constantes iguales a 1 es

$$E_{Cas} = Tr(\Delta) = -\frac{1}{12} \frac{\pi}{L} \quad (69)$$

Donde notamos que el signo menos nos indica que al calcular la fuerza de Casimir esta será atractiva para esta configuración.

5.2. Energía de Casimir en dos dimensiones

Ahora procederemos a calcular la energía de Casimir para el caso de una placa con condiciones de frontera de Neumann. Consideremos $f := f(x, y)$. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$-\Delta f = \lambda f, \quad f_y(x, 0) = f_y(x, b) = f_x(0, y) = f_x(a, y) = 0 \quad (70)$$

Donde el laplaciano es $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Usando separación de variables obtenemos las siguientes ecuaciones

$$X'' + \lambda_x X = 0, \quad X'(0) = X'(a) = 0 \quad (71)$$

$$Y'' - \lambda_y Y = 0, \quad Y'(0) = Y'(b) = 0 \quad (72)$$

Las cuales tienen soluciones diferentes de cero para $\lambda_x > 0$ y $\lambda_x = 0$ para el caso del eje X mientras que para el eje Y se tienen soluciones diferentes de cero para $\lambda_y > 0$ y $\lambda_y = 0$, esto según la teoría de Sturm-Liouville. Note que $\lambda_y = \lambda - \lambda_x$

La solución para las ecuaciones presentadas en (5.7) y (5.8) luego de aplicar condiciones de frontera son

$$X(x) = C_1 \quad X_n(x) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (73)$$

$$Y(y) = C_3 \quad Y_m(y) = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (74)$$

Donde a, b son las dimensiones de la placa. Ahora la solución para (5.6) resulta ser $f_n(x, y) = X(x)Y(y) + X_n(x)Y_n(y)$ debido a al método empleado

$$f_{nm}(x, y) = A + B \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (75)$$

Donde se ha definido $A = C_1C_3$ y $B = C_2C_4$ además de que $\lambda_{nx}^{1/2} = \frac{n\pi}{a}$ y $\lambda_{my}^{1/2} = \frac{m\pi}{b}$

Ahora la traza del operador resulta ser

$$\begin{aligned} E_{Cas} &= Tr(\Delta) = \sum_{(n,m)=(1,1)}^{\infty} (\lambda_{nx} + \lambda_{my}) = \\ &= \sum_{(n,m)=(1,1)}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \right) := \left(\frac{\pi}{ab} \right)^2 \sum_{(n,m)=(1,1)}^{\infty} (b^2n^2 + a^2m^2) \end{aligned} \quad (76)$$

Definiendo la forma cuadrática $Q(n, m) = b^2n^2 + a^2m^2$ la función zeta asociada a este operador es la función zeta de Epstein evaluada en $\zeta_E(-1)$ por tanto

$$E_{Cas} = Tr(\Delta) = \left(\frac{\pi}{ab} \right)^2 \zeta_E(-1) \quad (77)$$

5.3. Energía de Casimir para placas paralelas

Ahora basandose en [9] se replicó el cálculo de la energía de Casimir para placas Paralelas de longitud R y separadas una distancia a con $a \ll R$ descubierto por H.B.G. Casimir [10] con la diferencia de que aquí se presenta el resultado usando la técnica de regularización de funciones zeta.

Consideremos $f := f(x, y, z)$ y teniendo el siguiente problema de autovalores con condiciones de Dirichlet para el eje X y los dos ejes restantes se imponen condiciones de frontera periódicas para un toroide de radio R donde al hacer $R \rightarrow \infty$ conforme la función tiende a cero, se recupera la configuración de placas paralelas [9]

$$-\Delta f = \lambda f, \quad f(0, y, z) = f(a, y, z) = 0 \quad (78)$$

Donde se definió $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Usando separación de variables otenemos tres ecuaciones para cada eje

$$X'' + \lambda_x X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0 \quad (79)$$

$$Y'' + \lambda_y Y = 0, \quad Y(0) = Y(R) \quad (80)$$

$$Z'' + \lambda_z Z = 0, \quad Z(0) = Z(R) \quad (81)$$

Donde hemos definido $\lambda = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$. La solución para el eje X al aplicar las condiciones de frontera es

$$X_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) \quad (82)$$

Ahora para los dos ejes restantes se tiene que las soluciones al aplicar las condiciones de frontera periódicas encontramos que $\lambda_y = \frac{2n_1\pi}{R}$ y $\lambda_z = \frac{2n_2\pi}{R}$

$$Y_{n_1}(y) = C \sin\left(\frac{2n_1\pi}{R}y\right) + D \cos\left(\frac{2n_1\pi}{R}y\right) \quad (83)$$

$$Z_{n_2}(z) = E \sin\left(\frac{2n_2\pi}{R}z\right) + F \cos\left(\frac{2n_2\pi}{R}z\right) \quad (84)$$

Por tanto la solución para el eje Z y Y son combinación lineal de senos y cosenos, pero por polinomio característico una solución es también una combinación lineal de exponenciales complejas

$$Y_{n_1}(y) = C e^{i\frac{2n_1\pi}{R}y} + D e^{-i\frac{2n_1\pi}{R}y} \quad (85)$$

$$Z_{n_2}(z) = E e^{i\frac{2n_2\pi}{R}z} + F e^{-i\frac{2n_2\pi}{R}z} \quad (86)$$

Haciendo $R \rightarrow \infty$ conforme las funciones tiendan a cero, tendremos que $D = F = 0$ así las soluciones para el eje Y y Z son

$$Y_{n_1}(y) = C e^{i\frac{2n_1\pi}{R}y} \quad (87)$$

$$Z_{n_2}(z) = E e^{i\frac{2n_2\pi}{R}z} \quad (88)$$

Por tanto la solución para el problema de autovalores presentado en (5.14) debido al método de solución empleado es

$$f_{nn_1n_2}(x, y, z) = A' \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) e^{i\frac{2n_1\pi}{R}y} e^{i\frac{2n_2\pi}{R}z} \quad (89)$$

Ahora calculando la traza del operador

$$E_{Cas} = Tr(\Delta) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \sum_n \left[\left(\frac{2n_1\pi}{R}\right)^2 + \left(\frac{2n_2\pi}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{-s} = \zeta_P(s) \quad (90)$$

Puesto que R tiende a infinito, entonces la primera suma se convierte en una integral doble

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2n_1\pi}{R} \right)^2 + \left(\frac{2n_2\pi}{R} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s} dn_1 dn_2 \quad (91)$$

Consideremos el siguiente cambio de variable $k_1 = \frac{2n_1\pi}{R}$ y $k_2 = \frac{2n_2\pi}{R}$, la expresión anterior se escribe como

$$\left(\frac{R}{2\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s} dk_1 dk_2 \quad (92)$$

Usando coordenadas polares $k_1 = k \cos(\theta)$, $k_2 = k \sin(\theta)$ y $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ con $0 < k < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$

$$\left(\frac{R}{2\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} k \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s} dk d\theta = \left(\frac{R}{2\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \int_0^{\infty} k \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s} dk \quad (93)$$

Consideremos el siguiente cambio de variable $u = k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{-s} du &= \frac{R^2}{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-s} u^{-s+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{R^2}{4\pi(a-s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{-s+1} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{-R^2}{4\pi(1-s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^{2(-s+1)} := \frac{-R^2}{4\pi(1-s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2s+2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s+2} = \\ &= \frac{-R^2}{4\pi(1-s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2s+2} \zeta_R(2s-2) \quad (94) \end{aligned}$$

Notamos que la función zeta asociada para el operador, es la función zeta de Riemann, evaluando en $s = -1/2$ obtenemos que

$$E_{Cas} = Tr(\Delta) = \frac{-R^2}{4\pi\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \zeta_R(-3) = \frac{-R^2\pi^2}{720a^3} \quad (95)$$

El signo menos nos indica que existe una atracción entre las dos placas paralelas.

6.1. Autoenergía del electrón

Ahora procederemos a calcular la autoenergía del electrón. Para esto haremos uso de los diagramas de Feynman, el cual para el caso de la autoenergía del electrón se presenta su respectivo diagrama en la Figura 6.1. Antes de que presentemos el cálculo como tal, daremos una explicación breve de lo que es la autoenergía. La línea recta representa al electrón con un momento p y la línea ondulada representa al fotón emitido interactuando con el electrón con momento k , la autoenergía del electrón es básicamente la autointeracción que surge del electrón con el sistema y como la partícula afecta su entorno. Además de usar la notación siguiente $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i$ y $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k_0 - \gamma^i k_i$ tal que $p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z)$ y $k_\mu = (E, -k_x, -k_y, -k_z)$ además de que las matrices γ^μ son las matrices de Dirac y las cuales vendrían a ser en términos de las matrices de Pauli y la identidad

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (96)$$

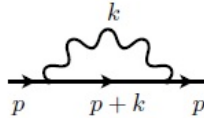


Figura 2: Autoenergía del electrón [11].

Para comenzar con el cálculo primero debemos identificar lo que se conocen como propagadores de las partículas, los cuales vienen asociados con los diagramas de Feynman. Para el caso de la autoenergía del electrón, la línea ondulada y la recta vendrían a ser representados

por las siguientes expresiones por definición respectivamente

$$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{2} \right) \quad \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \quad (97)$$

Donde ξ se conoce como gauge de Feynman y $g_{\mu\nu}$ vendría a ser la métrica con signatura $sig(1, -1, -1, -1)$, la cual en este caso vendría a ser la métrica de Minkowski. La expresión para la autoenergía del electrón vendría a ser dados los propagadores anteriores, donde dichos propagadores son funciones de Green soluciones de la ecuación de Dirac.

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{2} \right) \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \quad (98)$$

El diagrama tiene una divergencia ultravioleta lineal, pero por simetría de Lorentz esta se reducirá a una divergencia logarítmica [5] se ha escogido ϵ como un parámetro perturbativo debido a la corrección radiativa. Escogiendo ahora el gauge de Feynman $\xi = 1$ obtenemos que la autoenergía del electrón con contribuciones a 1-loop es

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \quad (99)$$

La cual es equivalente a tener la siguiente expresión con $p^2 < m^2$ y para una dimension d [11]

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \quad (100)$$

Identificamos que ahora los propagadores correspondientes al diagrama de Feynman con gauge de Feynman $\xi = 1$ son

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (101)$$

De la propiedad de las matrices γ las cuales se relacionan con las matrices de Pauli, tenemos que obedecen el álgebra de Dirac en dimensión d [11].

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = d \quad (102)$$

Usado el hecho que $g_{\mu\nu} \gamma^\mu = \gamma_\mu$ obtenemos que

$$\gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu = -(\not{p} + \not{k}) \gamma_\mu \gamma^\mu + 2(\not{p} + \not{k}) = -(d-2)(\not{p} + \not{k}) \quad m \gamma_\mu \gamma^\mu = md \quad (103)$$

Por lo que obtenemos

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\not{p} + \not{k}) + md}{((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)} \quad (104)$$

Lo cual es equivalente a la siguiente expresión después de haber hecho $k \rightarrow k + px$ y haciendo primeramente uso de un truco ideado por Feynman para juntar los denominadores [6] [12]

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{(2-d)(\not{p} + \not{k}) + md}{(k+px)^2 - x(m^2 - (1-x)p^2) + i\epsilon} \quad (105)$$

El truco ideado por Feynman para juntar los denominadores vendría a ser la siguiente igualdad

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA - (1-x)B]^2} \quad (106)$$

Consideremos las siguientes sustituciones $M^2 = x(m^2 - (1-x)p^2)$, $l = k + px$ lo que implica que $\not{l} = \not{k} + \not{p}x$ y $dl = dk$

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{(2-d)(\not{l} + (1-x)\not{p}) + md}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \quad (107)$$

La cual puede ser resuelta haciendo uso de la siguiente identidad y de la regularización dimensional haciendo $d = 4 - 2\varepsilon$ e introduciendo la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ [12]

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i(\mu^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) + O(\varepsilon) \right) \quad (108)$$

Por lo que la autoenergía vendría a ser

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) = \frac{i\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - 1 - 2 \int_0^1 dx (1-x) \log \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) + O(\varepsilon) \right] - \\ - \frac{i\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \log \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (109)$$

Donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y μ^2 es un regulador, es decir, es una masa asociada al fotón para controlar las divergencias infrarrojas (parámetro no físico), el cual se introdujo por la regularización dimensional y el cual puede desaparecer haciendo tender a infinito dicho parámetro por medio de la renormalización, dejando así en términos de parámetros físicos medibles [6]

Introduzcamos el siguiente radio

$$r := \frac{p^2}{m^2} \quad (110)$$

Así tenemos que $M = xm^2(1 - (1 - x)r)$ y haciendo uso de las siguientes identidades

$$\int_0^1 dx \log \left(\frac{M^2}{4\pi} \mu^2 \right) = \left[-2 + \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{r} \right) \log(1 - r) \right] \quad (111)$$

$$\int_0^1 dx x \log \left(\frac{M^2}{4\pi} \mu^2 \right) = \frac{1}{2} \left[-2 + \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{1}{r} \right)^2 \log(1 - r) \right] \quad (112)$$

Por lo tanto la autoenergía del electrón es

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= \frac{i\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + 1 + \frac{1}{r} - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \log(1 - r) \right] \not{p} - \\ &\quad - \frac{i\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{3}{2} - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \log(1 - r) \right] m \end{aligned} \quad (113)$$

La solución anterior se derivó bajo el supuesto de $r < 1$ y $r \neq 0$. Extendiendo para todo r [12]

Para $r = 0$ las integrales en (8.14) y (8.15) se simplifican y así encontramos que

$$-i\Sigma(0) = \frac{i\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - 1 \right] \not{p} - \frac{i\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right] m \quad (114)$$

Ahora para $r > 1$ necesitamos hacer la continuación analítica del logaritmo, haciendo $M^2 \rightarrow M^2 - i\varepsilon$ y consecuentemente $r \rightarrow r + i\varepsilon$ además de reemplazar $\log(1 - r)$ por $\log|1 - r| - i\pi\theta(r - 1)$ [12]

Así finalmente la solución para todos los momentas p válidos para los electrones, está dado por

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= -i\Sigma(0) + \frac{i\alpha}{4\pi} \left[2 + \frac{1}{r} - \left(1 - \frac{1}{r} \right) (\log|1 - r| - i\pi\theta(r - 1)) \right] \not{p} - \\ &\quad - \frac{i\alpha}{\pi} \left[2 - \left(1 - \frac{1}{r} \right) (\log|1 - r| - i\pi\theta(r - 1)) \right] m \end{aligned} \quad (115)$$

Donde notamos que dicha autoenergía tiene un comportamiento asintótico del tipo logaritmico.

Comparación entre energía de vacío y autoenergía

7.1. Energía de Casimir y autoenergía del electrón

Entre las similitudes que podemos encontrar entre ambas energías es que ambos cálculos presentaron divergencias ultravioletas, requiriendo regularizar las expresiones para tratar con dichas divergencias. Las divergencias ultravioletas surgen de la misma naturaleza de la teoría, es decir, a espacios muy pequeños hay cantidades muy grandes de energía, lo cual vendría a ser la definición de la divergencia ultravioleta. También podemos mencionar que las correcciones radiativas que son correcciones de segundo orden, inducen dicha divergencia, puesto que los cálculos a un loop o más se integra desde un momento cero hasta uno infinito, donde el problema surge en el infinito. Ahora en el caso de la energía de Casimir dichas divergencias surgen del hecho de que la suma de todos los autovalores del operador dan sumas divergentes, interpretando esto como la contribución de la frecuencia de osciladores armónicos cuánticos infinitos, donde nuevamente recaemos en la definición de divergencia ultravioleta en términos de la frecuencia. Otra cosa importante que podemos mencionar es que en la energía de Casimir, esta siempre es inversamente proporcional a la longitud, al cuadrado del área y al cubo de la distancia de separación según sea el caso, siendo así un fenómeno asintótico, como podemos observar en las ecuaciones (5.5), (5.13) y (5.31). Por otro lado la autoenergía vendría a ser también asintótica pero del tipo logaritmica, debido al tipo de expresión a la que se llegó, la cual se muestra en las ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.20).

Entre las diferencias que podemos remarcar en ambos fenómenos es que por ejemplo en la autoenergía del electrón, la divergencia ultravioleta parece ser al principio del tipo lineal, pero por simetrías quirales, esta se reduce a una divergencia ultravioleta del tipo logaritmica en (6.4). Mientras que las divergencias en la energía de Casimir, son del tipo lineal en el caso de 1 y 3 dimensiones o cuadrático en el caso de 2 dimensiones, es decir, en 1 y 3 dimensiones

se suman todos los números naturales y en 2 dimensiones se suman todos los cuadrados de los números naturales, donde el límite de las sumas parciales da un valor infinito, como observamos en (5.4), (5.12) y (5.30).

En un sentido más cualitativo podemos decir que el campo contribuye al espacio de manera que se manifiesta la energía de vacío, es decir, las fluctuaciones cuánticas de vacío que son consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg y de la presencia de una variedad o objeto que excita el campo provocando la creación y aniquilación de pares de partículas virtuales, manifestandose así la energía de vacío, tal que lo que se mide son las diferencias de energía entre los estados fundamentales de las fluctuaciones de vacío, por ejemplo, entre el primer estado fundamental y el segundo estado fundamental, debido a que podemos tener una vez el estado fundamental, dos veces el estado fundamental o tres veces el estado fundamental, etc entre las placas por ejemplo (debido a los autovalores que son múltiplos enteros), y es de ahí donde se obtienen esas diferencias de energía. Ahora en el caso de la autoenergía del electrón, esta surge de la misma interacción que tiene el electrón consigo mismo estando en el espacio, provocando una excitación en el campo, debido a la absorción y emisión de fotones virtuales, que dependiendo de cierta condición pueden llegar a ser fotones reales. Esta autointeracción genera ciertas correcciones a la masa y carga del electrón, con esto podemos decir que la autoenergía puede ser vista como la interacción de dicha partícula con el espacio o bien del espacio con la partícula, puesto que la misma excitación del campo afecta al electrón mismo y la autointeracción del electrón afecta al campo, afectandose así mutuamente. En ambos casos (Casimir y autoenergía) nos referimos a excitaciones del campo diferentes, ya que son provocadas por ya sea objetos o partículas.

De ambos fenómenos podemos decir que la energía de vacío y la autoenergía del electrón se comportan asintóticamente, la energía de Casimir es del tipo función inversa o recíproca, mientras que la autoenergía es del tipo logarítmica. Esto vendría a interpretarse de tal manera que el vacío cuántico en presencia de una partícula, esta perturba el vacío tal como sucede en el caso de que no estuviera y tuvieramos un objeto o variedad. La diferencia radicaría en que el vacío cuántico es perturbado por medio de fluctuaciones de vacío provocada por la creación y aniquilación de partículas debido a la presencia de una variedad o objeto como por ejemplo las placas. Mientras que en el caso de la autoenergía, la interacción de la partícula con el sistema provoca dicha perturbación manifestándose como energía, creando así pares virtuales de partículas que interactúan con el electrón, en este caso fotones y que según ciertas condiciones este puede volverse un fotón real, donde esta autointeracción induce ciertas correcciones a la energía del electrón. También podemos concluir que la energía de Casimir nos da un valor exacto de la energía, mientras que la autoenergía del electrón es una aproximación debido a las correcciones radiativas y desarrollo asintótico.

También podemos concluir que la técnica de regularización de funciones zeta permite obtener de manera fácil y exacta la energía de vacío, debido a que sólo debemos resolver un problema de autovalores y sumar sobre todos los autovalores, regularizando la expresión final. Además de que las funciones zeta admiten una regularización para extenderlas a todo el plano complejo.

-
-
- [1] R. Esquivel Sirvent, «La fuerza del vacío. El efecto Casimir», *UNAM, Revista mundo nano*, vol. 4, 2011.
 - [2] D. Tong, *Quantum field theory University of Cambridge part III mathematical tripos*. Department of applied mathematics y theoretical physics, Centre for mathematical science, University of Cambridge, 2007.
 - [3] H. energy physics, «Teoría cuántica de campos», *Universidad de Oviedo*, 2012.
 - [4] I. Aitchinson y A. Hey, *Gauge theories in particle physics*, 3ra. Institute of physics publication, 2003, vol. Vol. 1.
 - [5] E. D'Hoker, *Quantum field theory part I*. Department of physics y astronomy, University of California, 2004.
 - [6] S. Weinberg, *Quantum theory of fields*, 1ra. Cambridge University Press. University of Texas at Austin, 1995, vol. Vol. 1.
 - [7] K. Rébora, «Energías de Casimir en medios dieléctricos aplicaciones», Tesis doct., Departamento de física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de La Plata, 2005.
 - [8] C. Villareal, «Fronteras de la física en el siglo XXI: Fuerzas de Casimir», *UNAM, México D.F.*, 2013.
 - [9] K. Kirsten, «Basic zeta functions and some applications in physics», *Department of mathematics, Baylor University*, 2010.
 - [10] H. Casimir, «On the attraction between two perfectly conducting plates», *Communicated at the meeting*, 1948.
 - [11] J. C. Romao, «Advance quantum field theory», *Physics department, Técnico de Lisboa*, 2016.
 - [12] R. Rietkerk, «One-loop amplitudes in perturbative quantum field theory», *Master thesis. Institute for theoretical physics, Utrecht University*, 2012.
 - [13] C. A. J. Orjuela, «Regularización de funciones automórficas de variedades con geometría especial de Kahler», *Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia*, 2012.

- [14] A. I. Romero, «Series de Dirichlet», *Tesis de Licenciatura. Universitat d' Alacant*, 2016.
- [15] F. Rubin, «Riemann's first proof of the analytic continuation of $\zeta(s)$ and $L(s, \chi)$ », *Seminar on modular forms*, 2006.
- [16] M. F. Deuring, «On Epsteins Zeta Function», *The Annals of Mathematics*, vol. 38, n.º 3, pág. 585, 1937. DOI: 10.2307/1968602.

10.1. Función zeta de Riemann

En este apartado presentaremos el formalismo de la función zeta de Riemann, es decir, su definición y su continuación analítica la cual nos permite calcular resultados divergentes en cálculos de la energía de Casimir, para más detalles sobre la función zeta de Riemann ver [13].

Definición A.1 (Función zeta de Riemann): Sea la función zeta de Riemann $\zeta_R(s)$ siendo $s \in \mathbb{C}$, tal que

$$\zeta_R(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (116)$$

Donde el dominio de convergencia dado por el criterio de la integral es de $\Re(s) > 1$. La función $\zeta_R(s)$ admite una continuación analítica a una función meromorfa a todo \mathbb{C} con polo simple $s = 1$ y residuo 1.

Antes de presentar la continuación analítica de $\zeta_R(s)$ daremos unas definiciones sobre los números de Bernoulli y la formula de Euler-Maclaurin.

Definición A.2 (Serie generatriz para los números de Bernoulli): Sea la serie generatriz de los números de Bernoulli

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} \quad (117)$$

tal que $B_n := B_n(0)$ siendo así

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \quad (118)$$

Si reescribimos el lado izquierdo de la ecuación anterior usando

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{-z(e^z - 1) + z(e^z + 1)}{z(e^z - 1)} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right) \frac{e^{-z/2}}{e^{z/2}} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right) \quad (119)$$

Tal que

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \quad (120)$$

Consideramos la fórmula inductiva para los números de Bernoulli

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0 \quad , m \geq 1 \quad (121)$$

De la cual podemos construir los llamados polinomios de Bernoulli

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x) \quad (122)$$

De donde podemos definir a $\tilde{B}_n(x)$ una función de variable real con periodo 1 tal que coincida con $B_n(x)$ en $[0, 1]$ lo que implica que $\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x])$ donde se ha usado la función mayor entero.

Definición A.3 (Fórmula de Euler-Maclaurin): Sea la suma de Euler-Maclaurin

$$\sum_{t=a}^{b-1} f(t) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_a^b \tilde{B}_n(x) f^{(n)}(x) dx \quad (123)$$

Donde $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y $a \leq x \leq b$

Si hacemos $f(t) = t^{-s}$ con $s \in \mathbb{C}$, $a = 1$ y $b = N \geq 2$ obtenemos que

$$\sum_{t=1}^N t^{-s} = \frac{1 - N^{1-s}}{s-1} + \frac{1 - N^{-s}}{s-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{B_k}{k!} s(s+1)(s+2)\dots(s+k-2)(1 - N^{-s-k+1}) - (124)$$

$$- \frac{1}{n!} s(s+1)\dots(s+n-1) \int_1^N \tilde{B}_n(x) x^{-s-n} dx$$

Estudiamos el caso para cuando $N \rightarrow \infty$ obtenemos $\zeta(s)$, sabemos que $\tilde{B}_n(x)$ es periódica en $[0, \infty)$ entonces la serie converge para $\Re(s) > 1 - n$. Obtenemos que

$$\zeta_R(s) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{B_k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-2) - (125)$$

$$- \frac{1}{n!} s(s+1)\dots(s+n-1) \int_1^{\infty} \tilde{B}_n(x) x^{-s-n} dx, \quad \Re(s) > 1 - n$$

Haciendo el caso para $n=2$

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} s - \frac{1}{2} s(s+1) \int_1^{\infty} \tilde{B}_n(x) x^{-s-2} dx (126)$$

Si sabemos que $B_2 = 1/6$ por la ecuación (A.6) definiendo a $B_0 = 1$, así obtenemos que el dominio de convergencia para $\zeta_R(s)$ es de $\Re(s) > -1$, evaluando en $s = 0$ notamos que la integral que aparece en (A.11) desaparece, por tanto

$$\zeta_R(0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} (127)$$

Ahora haciendo $n = m + 2$ con $m \geq 1$

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{B_k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-2) - (128)$$

$$- \frac{1}{(m+2)!} s(s+1)\dots(s+m+1) \int_1^{\infty} \tilde{B}_n(x) x^{-s-m-2} dx, \quad \Re(s) > -m - 1$$

Evaluando en un $s = -m$

$$\zeta_R(-m) = \frac{1}{-m-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{B_k}{k!} (-m)(-m+1)\dots(-m+k-2) (129)$$

La cual es la expresión regularizada, donde notamos que por el hecho de que $m \geq 1$

$$\frac{1}{(m+2)!} s(s+1)\dots(s+m+1) \int_1^\infty \tilde{B}_n(x) x^{-s-m-2} = 0, \quad s = -m \quad (130)$$

Ahora notamos que también si hacemos $s = -2r$ o $s = -2r + 1$ con $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\zeta_R(-2r) = \frac{1}{-2r+1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2r+1} \frac{B_k}{k!} (-2r)(-2r+1)\dots(-2r+k-1) = 0 \quad (131)$$

$$\zeta_R(-2r+1) = -\frac{1}{2r} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2r} \frac{B_k}{k!} (-2r+1)(-2r+2)\dots(-2r+k) \quad (132)$$

10.2. Función zeta de Hurwitz

En el siguiente apartado presentaremos el formalismo para la función zeta de Hurwitz, con el objetivo de obtener su ecuación funcional y regularizada. Las demostraciones presentadas aquí, no son de mi autoría, para más detalles puede verse la siguiente referencia [14] [15].

Definición B.1 (Función zeta de Hurwitz): Sea la función zeta Hurwitz $\zeta_H(s, a)$ con $\Re(s) > 1$ y $\Re(a) > 0$ tal que

$$\zeta_H(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (133)$$

Note que $\zeta_H(s, 1) = \zeta_R(s)$. Para presentar la ecuación funcional para la función zeta de Hurwitz tenemos que definir y revisar ciertos teoremas que nos permitirán hacer la continuación analítica de $\zeta_H(s, a)$.

Definición B.2 (Exponente de convergencia): Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C} - \{0\}$ con $|\{a_n\}| \rightarrow \infty$ el exponente de convergencia es

$$\mu := \inf \left\{ x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty \right\} \quad (134)$$

Definición B.3: Sean los factores canónicos $E_0(s) := 1 - s$ y los factores elementales $E_m(s) := (1 - s)e^{\sum_{n=1}^m s^n/n} \forall m \geq 1$.

Teorema B.1 (Factorización de Hadamard): Sea una función f donde esta es entera, no constante y finita tal que, es de orden λ , donde los ceros de f son s_1, s_2, \dots, s_n si tenemos la sucesión $\{a_n\}_n \geq 1$ con exponente de convergencia μ y siendo k el orden del cero de f en $s = 0$, tenemos

$$f(s) = s^k \prod_{s_n \neq 0} E_h \left(\frac{s}{s_n} \right) e^{g(s)} \quad (135)$$

Donde h es el menor entero tal que $h > \mu - 1$ y $g(s)$ es un polinomio de grado menor o igual que λ .

Demostración: Ver la siguiente referencia [14]. □

Teorema B.2 (Regla de L'hospital): Sean f y g funciones analíticas en $s_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = 0$ entonces

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f'(s)}{g'(s)} \quad (136)$$

Demostración: Ver la siguiente referencia [14]. □

Definición B.4: Sea una singularidad esencial de una función analítica f aquella en la cual f no tiene una singularidad evitable o un polo.

Teorema B.3 (Clasificación de singularidades): Sea f una función tal que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con singularidad aislada en s_0 , tenemos que

- f tiene un polo en s_0 de orden $n \geq 1$ si y solo si $\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^n f(s) \in \mathbb{C} - \{0\}$
- f tiene una singularidad evitable en s_0 si y solo si $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \in \mathbb{C}$
- f tiene una singularidad esencial en s_0 si y solo si $\nexists \lim_{s \rightarrow s_0} f(s)$

Corolario B.1: $\forall s \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2} \right) \quad (137)$$

Demostración: En virtud del teorema de factorización de Hadamard (Teorema B.1) se tiene el resultado deseado. □

Definición B.5 (Función Gamma): Sea $\Gamma(s)$ la función Gamma tal que

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\} \quad (138)$$

Teorema B.4 (Fórmula de Gauss): La función Gamma se puede reescribir como

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} \quad (139)$$

Demostración: Consideremos $\int_0^\infty t^{s-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ con $n \in \mathbb{N}$, definamos $x = t/n$, así tenemos que

$$n^s \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^n dx \quad (140)$$

Al integrar por partes varias veces obtenemos que

$$\begin{aligned} n^s \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^n dx &= n^s \frac{n}{s} \int_0^1 x^s (1-x)^{n-1} dx = \\ &= \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)} \int_0^1 x^{s+n-1} dx = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s+n)} \end{aligned} \quad (141)$$

□

Definición B.6 (Constante de Euler-Mascheroni): Sea $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ con $\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ convergente.

Teorema B.5: La función $\Gamma(s)$ de cumple con la siguiente igualdad

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} \quad (142)$$

Demostración: En virtud de la fórmula de Gauss (Teorema B.4) tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \frac{e^{\ln(n)s}}{s} \frac{1}{s(\frac{s+1}{1})\dots(\frac{s+n}{n})} = \\ &= \frac{e^{(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})n}}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{s/k} = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{s/k} \end{aligned} \quad (143)$$

□

Teorema B.6: La ecuación funcional de $\Gamma(s)$ es

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (144)$$

Demostración: En virtud de la fórmula de Gauss (Teorema B.4)

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s+1} n!}{(s+1)\dots(s+n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ns}{s+n-1} \frac{n! s^n}{s\dots(s+n)} \right) = s\Gamma(s) \end{aligned} \quad (145)$$

□

Teorema B.7: $\Gamma(s)$ cumple que

$$\Gamma(s)\Gamma(s-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (146)$$

Demostración: Usando el teorema B.6 tenemos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = -s\Gamma(s)\Gamma(-s) \quad (147)$$

Por teorema B.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(-s) &= \left(\frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} \right) \left(-\frac{e^{\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{-s/n} \right) = \\ &= -\frac{1}{s^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (148)$$

En virtud del corolario B.1 y combinando las ecuaciones (B.15) y (B.16)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (149)$$

□

Definición B.7 (Abscisa de convergencia uniforme): Sea una serie de Dirchlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ la abscisa de convergencia uniforme σ_u es el menor valor real tal que, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en el semiplano cerrado, contenido en $\{\sigma + it : \sigma > \sigma_u\}$

Teorema B.8: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ con $\sigma_u \leq 0$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \ln(\lambda_n)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} dx \quad (150)$$

Solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \ln(\lambda_n)}$ es convergente $\forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$

Demostración: Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge en $(0, \infty)$ de manera uniforme, usamos la definición de la función Gamma (definición B.5) y hacemos $y = \lambda_n x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} dx &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-\lambda_n x} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\ln(\lambda_n) s} \end{aligned} \quad (151)$$

□

Teorema B.9: Sea $\Gamma(s)\zeta_H(s, a) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}dx$, $\forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ con $0 < a \leq 1$

Demostración: Consideremos $\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)s}$ con $0 < a \leq 1$, lo cual no converge en $s = 0$, pero para $\sigma > 0$

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)s} = e^{-as} \sum_{n=0}^\infty e^{-ns} = e^{-as} \frac{1}{1 - e^{-\sigma}} < \infty \quad (152)$$

Lo que implica que $\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)s}$ sea convergente en $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$ con convergencia absoluta, aplicando el teorema B.8

$$\Gamma(s)\zeta_H(s, a) = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+a)x} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx \quad (153)$$

□

Lema B.1: Consideremos una curva C tal que

$$I(s, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}e^{az}}{1 - e^z} dz \quad (154)$$

es una función entera con $0 < a \leq 1$.

Demostración: Ver la siguiente referencia [14].

□

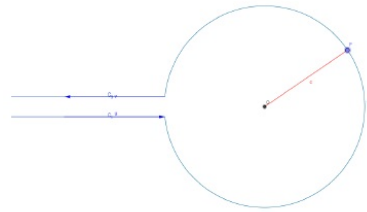


Figura 3: Curva C de radio menor a 2π [14].

Teorema B.10: Sea $\forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ y $0 < a \leq 1$ tenemos que

$$\zeta_H(s, a) = \Gamma(1 - s)I(s, a) \quad (155)$$

Demostración: Definamos $g(s) = \frac{e^{as}}{1 - e^{-s}}$, por el lema B.1

$$2\pi i I(s, a) = \int_{C_1} z^{s-1} g(z) dz + \int_{C_2} z^{s-1} g(z) dz + \int_{C_3} z^{s-1} g(z) dz \quad (156)$$

Transformando la expresión anterior a coordenadas polares y considerando que C_2 tiene radio $c < 2\pi$, C_1, C_2 son cortes en el eje real negativo menores que $-c$

$$\int_{C_1} z^{s-1} g(z) dz = \int_{\infty}^c r^{s-1} e^{-\pi i(s-1)} g(re^{-\pi i}) e^{-\pi i} dr = -e^{-\pi i s} \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr \quad (157)$$

$$\int_{C_2} z^{s-1} g(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1} e^{i\theta(s-1)} g(ce^{i\theta}) cie^{i\theta} d\theta = c^s i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \quad (158)$$

$$\int_{C_3} z^{s-1} g(z) dz = \int_c^{\infty} r^{s-1} e^{\pi i(s-1)} g(re^{\pi i}) e^{\pi i} dr = e^{\pi i s} \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr \quad (159)$$

Así la expresión (B.24) se puede escribir como

$$\begin{aligned} 2\pi i I(s, a) &= -e^{-\pi i s} \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + c^s i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta + e^{\pi i s} \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr \\ &= 2i \sin(\pi s) \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + c^s i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (160)$$

Lo que implica que

$$\pi I(s, a) = \sin(\pi s) \int_c^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \quad (161)$$

Pero por regla de L'hospital (teorema B.2)

$$\lim_{s \rightarrow 0} s g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s e^{as}}{1 - e^s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{as} + s a e^{as}}{-e^s} = -1 \quad (162)$$

Donde $sg(s)$ tiene una singularidad evitable en $s = 0$ en virtud del teorema de clasificación de singularidades (teorema B.3), lo que implica que es analítica en $\{s \in \mathbb{C} : |s| < c\}$ y acotada por $M > 0$ donde M es una constante. Entonces si $s = \sigma + it$

$$\begin{aligned} \left| \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \right| &\leq \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta t} |g(ce^{i\theta})| d\theta \leq \\ &\leq \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta t} \frac{M}{c} d\theta = \frac{c^{\sigma-1} M}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta t} d\theta \leq M e^{\sigma-1} e^{\pi|t|} \end{aligned} \quad (163)$$

Ahora si $\sigma > 1$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta = 0 \quad (164)$$

Pero por teorema B.9

$$\begin{aligned} \pi I(s, a) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(\sin(\pi s) \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta s} g(ce^{i\theta}) d\theta \right) = \\ &= \sin(\pi s) \int_0^\infty \frac{r^{s-1} e^{-ar}}{1 - e^{-r}} dr = \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta_H(s, a), \quad \forall s \in \{\sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 1\} \end{aligned} \quad (165)$$

En virtud del teorema B.7

$$\zeta_H(s, a) = \frac{\pi}{\sin(\pi s) \Gamma(s)} I(s, a) = \Gamma(1 - s) I(s, a) \quad (166)$$

□

La cual converge a todo \mathbb{C} con polo $s=1$ y residuo 1, obteniendose así la ecuación funcional para la función zeta de Hurwitz.

10.3. Función Zeta de Epstein

En el siguiente apartado se presenta la función zeta de Epstein y su respectiva ecuación funcional, la cual permite su extensión a todo el plano complejo, basandose en [16].

Definición C.1 (forma cuadrática): Sea la función $Q(x, y)$ una forma cuadrática, tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$ con Q positivo, siendo así

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (167)$$

Donde se tiene que $a > 0$ y $D = 4ac - b^2 > 0$

Definición C.2 (función zeta de Epstein): Sea la función zeta de Epstein $\zeta_E(s)$ tal que

$$\zeta_E(s) := \sum_{(n,m) \neq (0,0)}^\infty [Q(n, m)]^{-s} = \sum_{n=-\infty}^\infty \sum_{m=-\infty}^{\infty'} [Q(n, m)]^{-s} \quad (168)$$

Donde el primado significa que se excluye el 0 de la suma. El dominio de convergencia de la función presentada en C.2 es el semiplano complejo y $\Re(s) = \sigma > 1$, la cual se puede extender a todo el plano complejo con polo en $s = 1$

Definición C.3 (fórmula de sumación de Euler-Poisson): La fórmula de sumación de Euler-Poisson se define como

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{\nu=1}^\infty \int_a^b f(x) (e^{2\pi i \nu x} + e^{-2\pi i \nu x}) dx \quad (169)$$

con $f \in C^2$ y $f(x) = Q(n.m)^{-s}$, $m \neq 0$

Definición C.4 (fórmula de Mellin): Sea la fórmula de Mellin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(u) e^{-u} du = e^{-c} \quad (170)$$

Con $\alpha > 0$ y $\Re(c) > 0$

Aplicando la definición C.3 a la definición C.2 tenemos que

$$\sum_{n=-N}^N Q(n, m)^{-s} = \int_{-N}^N Q(x, m)^{-s} dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-N}^N (e^{2\pi i \nu x} + e^{-2\pi i \nu x}) Q(x, m)^{-s} dx \quad (171)$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$ tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(n, m)^{-s} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, m)^{-s} dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2\pi i \nu x} + e^{-2\pi i \nu x}) Q(x, m)^{-s} dx \quad (172)$$

Tenemos que la primera de las integrales de la expresión anterior es

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x, m)^{-s} dx = \pi^{1/2} a^{s-1} \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} |m|^{1-2s} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \quad (173)$$

Con lo cual tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(x, m)^{-s} = \pi^{1/2} a^{s-1} \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} |m|^{1-2s} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega(s, \nu, m) + \omega(s, -\nu, m)] \quad (174)$$

Donde se definió a $\omega(s, \nu, m)$ como

$$\omega(s, \nu, m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x} Q(x, m)^{-s} dx, \quad \sigma > 0 \quad (175)$$

Usando la definición B.5 encontramos que

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\omega(s, \nu, m) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x} \Gamma(s) Q(x, m)^{-s} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-yQ(x, m)} dy dx = \\ &= \int_0^{\infty} y^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x - yQ(x, m)} dx dy \end{aligned} \quad (176)$$

La segunda integral de la expresión anterior es

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x - y(ax^2 + bmx + cy^2)} dx = \\
& = e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a} - m^2 y \frac{D}{4a} - \frac{x^2 \nu^2}{ay}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu a \left[x - \frac{2\pi i \nu - b m y}{2ay} \right]^2} dx = \\
& = \sqrt{\frac{\pi}{ay}} e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a} - m^2 y \frac{D}{4a} - \frac{x^2 \nu^2}{ay}} \quad (177)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Gamma(s) \omega(s, \nu, m) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a}} \int_0^{\infty} y^{s-3/2} e^{-\frac{m^2 D}{4a} y - \frac{\pi^2 \nu^2}{ay}} dy \quad (178)$$

Con lo cual $\omega(s, \nu, m)$ es una función integral de s con (C.12) uniformemente convergente para cualquier región de s delimitada. Más aún $\Gamma(s) \omega(s, \nu, m)$ es una función integral donde $\omega(s, \nu, m) = 0 \forall s \in [0, -1, -2, \dots]$ en virtud de los polos de la función Gamma.

Ahora aplicando la definición C.4 obtenemos otra expresión para $\omega(s, \nu, m)$

$$e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{ay}} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{\pi^2 \nu^2}{ay}\right)^{-\frac{1}{2}u} du, \quad \alpha > 0 \quad (179)$$

Así tenemos que

$$\Gamma(s) \omega(s, \nu, m) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a}} \int_0^{\infty} y^{s-3/2} e^{-\frac{m^2 D}{4a} y} \frac{1}{4\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{\pi^2 \nu^2}{ay}\right)^{-\frac{1}{2}u} du dy \quad (180)$$

Siempre que $\sigma - 1/2 + 1/2\alpha > 0$, cambiando ahora el orden de integración y usando la definición de la función Gamma

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}s} \pi^{-s} \Gamma(s) \omega(s, \nu, m) & = \frac{\pi^{-1/2-s}}{4i} \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1-s}{2}} a^{s-1} e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a}} \\
& \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left(\frac{D\pi^2}{4a^2}\right) \Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u}{2} + s - 1/2\right) |\nu|^{-u} |m|^{-u-2s-1} du \quad (181)
\end{aligned}$$

Donde $\sigma > 0$ y $\sigma - 1/2 + 1/2\alpha$ significan que los polos del integrando van sobre el lado izquierdo de la línea de integración,

Sea ahora la siguiente sustitución $v = u + 2s - 1$

$$\left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}s} \pi^{-s}\Gamma(s)\omega(s, \nu, m) = \frac{-1/2-(1-s)}{4i} \left(\frac{D}{4}\right)^{s/2} a^{-s} e^{-\frac{\pi i b m \nu}{a}} \int_{\alpha+2\sigma-1-i\infty}^{\alpha+2\sigma-1+i\infty} \left(\frac{D\pi^2}{4a^2}\right)^{-\frac{1}{2}v} \Gamma\left(\frac{v}{2} + (1-s) - 1/2\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\nu|^{-v-2(1-s)+1} |m|^{-v} dv \quad (182)$$

Donde la línea de integración es sobre el lado derecho de los polos del integrando.

Comparando C.15 y C.16

$$\left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}s} \pi^{-s}\Gamma(s)\omega(s, \nu, m) = \left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\omega(1-s, m, \nu) \quad (183)$$

De donde se muestra de la expresión anterior que para cualquier región de s delimitada tenemos que

$$|\omega(s, \nu, m)| < const. |\nu|^{-\alpha} |m|^{1-\alpha-2\sigma} \quad (184)$$

La cual es uniforme $\forall \nu, m$

Ahora la serie

$$\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\omega(s, \nu, m) + \omega(s, -\nu, m)) = R_Q(s) \quad (185)$$

Es por tanto uniformemente y absolutamente convergente para cualquier región de s delimitada, además de representarse por una función integral $R_Q(s)$. Así

$$\zeta_E(s) = a^{-s}\zeta_R(2s) + a^{s-1}\sqrt{\pi} \left(\frac{D}{4}\right)^{1/2-s} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s-1) + R_Q(s) \quad (186)$$

Puesto que la función zeta de Riemann es meromorfa por los resultados presentados en el anexo A y reescribiendo $\zeta_R(2s-1)$ como $\zeta_R(2s-2)$ obtenemos que

$$\left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}s} \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_E(s) = \left(\frac{1}{4}D\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\zeta_E(1-s) \quad (187)$$

Donde la expresión anterior es la ecuación funcional para la función zeta de Epstein, siendo esta extendida a todo el plano complejo con polo en $s = 1$.