

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

El efecto Hall cuántico

Juan Diego Chi-Wen Chang Santizo

Guatemala

2010

El efecto Hall cuántico

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA


Facultad de Ciencias y Humanidades

El efecto Hall cuántico

Trabajo de graduación presentado por Juan Diego Chi-Wen Chang Santizo para optar al
título de Licenciatura en Física

Guatemala

2010

(f) 

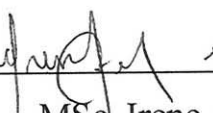
Lic. Adrián Licht

Asesor


Tribunal Examinador:

(f) 

Lic. Adrián Licht

(f) 

MSc. Irene Aguilar

(f) 

Dr. Adrián Gil

Fecha de aprobación: Guatemala, 1 de Mayo de 2010

PREFACIO

«El mundo es para quien nace para conquistarlo
y no para quien sueña que puede conquistarlo, aunque tenga razón.»
- *Tabaquería*, Fernando Pessoa (1928).

Al entrar a la universidad, muy pocas personas saben a lo que se quieren dedicar, no soy una de ellas. Aspiran a muchas cosas, planean muchas cosas, aunque éstas no sean las que se realicen en el futuro. Mi interés por la ciencia inició en la secundaria cuando ingresé al bachillerato científico en el colegio. De esta cuenta ingresé a la Licenciatura en Ingeniería Química de la Universidad del Valle de Guatemala. Con las clases del Lic. José Carlos Chiquín, mi interés por la Química se inició, así fue como llegué a tomar la decisión de estudiar una ciencia pura. Me inscribí en la Licenciatura en Química, aquí surgió mi interés por la Fisicoquímica especialmente la Química Cuántica, por lo que empecé a cursar los cursos de Física, hasta que decidí terminar la Licenciatura en Física.

Mi fascinación por esta rama del conocimiento empezó con el curso de Mecánica Analítica. Lograr encontrar que existe una formulación de la Mecánica Clásica tan versátil y que abre las puertas para el resto de la Física fue algo extraordinario. Ésta se reafirmó con los cursos de Mecánica Cuántica y Mecánica Estadística, donde la explicación de fenómenos naturales pierde mucho misticismo, como el concepto de entropía, que parece tan mística cuando se estudia en los primeros años de la universidad y adquiere una definición precisa con la teoría cuántica.

Al final del curso de Mecánica Cuántica surgió la idea de realizar una escuela de invierno en tópicos de dicha rama de la Física. Es aquí donde elegí explorar el tema del efecto Hall cuántico. La realización de estas conferencias fue de gran ayuda para hacer posible la realización de este trabajo. Este fenómeno despertó un gran interés en mí por la versatilidad del tema, abarcando desde mi primer gran interés en Física: Mecánica Analítica,

Teoría Electromagnética, Mecánica Cuántica y Mecánica Estadística. Además, el fenómeno tiene un gran auge en la investigación actual, tanto en el campo de la Física Teórica, como en Física Experimental o Física de Materia Condensada.

Quisiera expresar un sincero agradecimiento a mis catedráticos, en especial al Lic. José Carlos Chiquín (por mostrarme lo interesante que puede ser estudiar ciencia y sus acertados consejos), Lic. Dorval Carias (por su guía y valiosos consejos a lo largo de la carrera, así como mostrarme la belleza de la Matemática que es una valiosa herramienta para mi formación profesional, así como reforzar la confianza en mí), Lic. Roberto Hernández (por sus buenos consejos y mostrarme la Mecánica Analítica como una rama de la Física tan bella), Lic. Michael Morales (por sus buenos consejos, apoyo y enseñanzas en el desempeño de la carrera) y MSc. Álvaro Véliz (por enseñarme la herramienta necesaria para realizar este trabajo y sus muy valiosas recomendaciones, así como ser uno de los iniciadores por el gusto de la ciencia), así como a mi asesor Lic. Adrián Licht (por su confianza, su dedicación, su paciencia y sus consejos que me sirvieron de guía), por último y no por esto menos importante, MSc. Irene Aguilar (por el buen recibimiento que tuve en la licenciatura que estoy por culminar). También quisiera expresar mi gratitud a mis amigos que me apoyaron a lo largo de la carrera, en especial a todos los que me apoyaron en los numerosos desvelos que permitieron realizar mis estudios. En especial, gracias a mi familia que siempre me apoyó en mis decisiones.

*A mi familia, a mis catedráticos, a mis amigos y en especial a Sophos
Universidad del Valle de Guatemala.*

CONTENIDO

	Página
PREFACIO	v
LISTA DE FIGURAS	x
NOTACIÓN	xi
RESUMEN	xiii
Capítulos	
I. INTRODUCCIÓN	1
II. DINÁMICA CLÁSICA	3
III. DIAMAGNETISMO DE LANDAU	5
IV. DINÁMICA CUÁNTICA EN CAMPOS MAGNÉTICOS FUERTES	9
V. ESTADOS EN LA FRONTERA DEL EFECTO HALL ENTERO	16
VI. EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONADO	19
VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	22
VIII. BIBLIOGRAFÍA	23
IX. APÉNDICE	25

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
No.1	Ilustración del gauge de Landau para un potencial vectorial de la forma $\vec{A}(\vec{r}) = xB\hat{y}$. El campo magnético es perfectamente uniforme, pero el potencial vectorial tiene una dirección privilegiada.	9
No.2	Comportamiento de las cargas en la frontera del sistema. Éstas están interrumpidas en su movimiento circular con la pared.	17

NOTACIÓN

Aquí se presenta la notación utilizada en este trabajo.

δ	Ángulo de fase del oscilador armónico
ϵ	Energía
Φ	Flujo magnético
Φ_0	Cuanto de flujo magnético
μ	Potencial químico
ν	Cuantización entera
σ	Conductancia
ω_0	Frecuencia angular del oscilador armónico
ω_c	Frecuencia de ciclotrón
ω	Forma simpléctica
a	Operador aniquilación
a^t	Operador creación
\vec{a}	Aceleración
\vec{A}	Potencial magnético vectorial
B	Valor del campo magnético
\vec{B}	Campo magnético
c	Rapidez de la luz
e	Valor Absoluto de la carga del electrón
\vec{E}	Campo eléctrico
E	Valor del campo eléctrico
\vec{F}	Fuerza
h	Constante de Planck

\hbar	Constante de Planck
H	Hamiltoniano
i, I	Intensidad de corriente eléctrica
\vec{j}	Densidad de corriente
k, n	Niveles de energía
L_x, L_y	Dimensiones del sistema estudiado
m	Masa
N	Cantidad de niveles que permite el sistema
p	Momentum o cantidad de partículas en el sistema para el efecto Hall fraccionado
P	Perturbación
q	Cantidad de cuantos de flujo magnético
\vec{r}	Vector de posición de la partícula
R	Magnitud del vector posición de la partícula
Subíndices BE	Referentes a Bose-Einstein
Subíndices FD	Referentes a Fermi-Dirac
Subíndices x, y, z	Coordenadas en Mecánica Clásica
Supraíndices griegos	Coordenadas en Relatividad Especial
t	Tiempo
U	Propagador
\vec{v}	Velocidad de la partícula
W	Función de partición
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Vectores unitarios en el espacio cartesiano
x, y, z	Coordenadas en cada uno de los ejes coordenados

RESUMEN

Esta monografía del efecto Hall cuántico trata de presentar las bases para poder estudiar este fenómeno físico de gran interés para Físicos de materia condensada y semiconductores. Este fenómeno fue descubierto por el Físico alemán, Klaus von Klitzing en 1980, lo que le valió el premio Nobel en 1985. El efecto Hall entero (IQHE por sus siglas en inglés) es aquel donde el valor ν es un entero en la expresión que se mostrará luego de la conductividad. Experimentos realizados confirman la naturaleza de este número con una precisión de 10^{-8} y exactitud de 10^{-10} . Sin embargo, en 1982, Tsui Störmer y Gossard descubrieron que en algunos sistemas, este parámetro toma números racionales, a este fenómeno se le llama efecto Hall fraccionado o (FQHE). Estos aparecen cuando se toma en cuenta las interacciones entre electrones. Robert Laughlin, Tsui Störmer obtuvieron el Nobel en 1998 por explicar teóricamente el FQHE. Una manera de aplicarlo es en la metrología que busca medir estándares para la industria en la resistencia eléctrica utilizando como base $\frac{h}{e^2}$ que son constantes físicas universales. (Chang, 2009)

I. INTRODUCCIÓN

«We are at the very beginning of time for the human race. It is not unreasonable that we grapple with problems. But there are tens of thousands of years in the future. Our responsibility is to do what we can, learn what we can, improve the solutions, and pass them on.»

- Richard P. Feynman.

El efecto Hall cuántico (QHE) es uno de los descubrimientos de la segunda mitad del siglo XX más importantes en el campo de la materia condensada. Le hace frente al fenómeno de superconductividad, dando un significado a la Mecánica Cuántica a nivel macroscópico. El QHE ocurre en sistemas bidimensionales de electrones en el límite de campos magnéticos fuertes perpendiculares. (Girvin, 1998)

La teoría de este fenómeno toma como objeto de estudio todas las propiedades físicas de sistemas de electrones en dos dimensiones en el límite en el que el traslape de los niveles de Landau dado por el desorden o por las interacciones entre electrones pueden ser consideradas perturbaciones débiles. A este límite se le denomina el régimen cuántico de Hall. (Mac Donald, 1994)

En este fenómeno se ve la cuantización de Hall para la conductancia, la cual es universal e independiente de todos los detalles macroscópicos como el material utilizado, la pureza de la muestra o la intensidad del campo magnético, ya que la conductancia está dada en múltiplos de e^2/h siendo e la carga del electrón y h la constante de Planck. (Girvin, 1998)

En 1980, Klaus von Klitzing descubrió el efecto Hall cuántico, en Grenoble, mientras medía el transporte de electricidad de un gas bidimensional de electrones sometidos a un campo magnético fuerte. (Mac Donald, 1994) Él descubrió que un entero con una precisión de 10^{-10} cuantizaba la resistividad en este fenómeno. A esto se le llama el efecto Hall cuántico entero (IQHE). (Girvin, 1998)

En 1982, Daniel Tsui, Horst Störmer y Arthur Gossard descubrieron en algunos experimentos que este número podía tomar valores racionales. A esto se le llama el efecto Hall fraccionado (FQHE). Las partículas se condensan en estados cuánticos especiales cuyas excitaciones tienen la extraña propiedad de ser descritas por números cuánticos en forma de fracciones, incluyendo cargas fraccionadas y estadísticas entre la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac. Esto les valió el premio Nobel en 1985. Años más tarde, Robert Laughlin logró explicar este fenómeno teóricamente, lo que le valió el premio Nobel en 1998. (Girvin, 1998)

La alta precisión de la cuantización de la conductancia de Hall y su universalidad, i.e., la independencia de la geometría de la muestra, la densidad electrónica y la homogeneidad del campo magnético indican que se debe a una consecuencia de un principio general, Laughlin mostró que la cuantización viene de una invarianza gauge y de la existencia de una brecha de movilidad. (Karlhede, 1992)

En este trabajo se estudiará antes que nada el problema clásico, ya que así se inicia el estudio de cualquier problema cuántico. Luego se procede a cuantizar el problema asumiendo una ausencia de interacción entre los electrones y así estudiar el efecto Hall cuántico entero. Por último se explica el fenómeno tomando en cuenta las interacciones de Coulomb entre los electrones, para explicar el fenómeno fraccionado.

II. DINÁMICA CLÁSICA

«This change in the conception of reality is the most profound and the most fruitful that physics has experienced since the time of Newton. »

- Del libro 'Maxwell's Influence on the Development of the Conception of Physical Reality', *James Clerk Maxwell: A Commemorative Volume 1831-1931*.

Como cualquier problema en Mecánica Cuántica, es necesario estudiar antes el problema clásico para luego cuantizarlo. Aquí se estudiará el problema clásico. En la siguiente sección se cuantizará el problema.

Las ecuaciones clásicas de movimiento de una carga e moviéndose en dos dimensiones (plano (x, y)) en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ vienen dadas por la fuerza de Lorentz y por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

entonces, componente por componente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{eB}{c}\dot{y} \\ m\ddot{y} = \frac{eB}{c}\dot{x} \end{cases}$$

esto, ignorando las interacciones eléctricas, que es el caso del IQHE. (Girvin, 1998)

Se propone para este sistema la siguiente solución:

$$\vec{r} = R \begin{bmatrix} \cos(\omega_c t + \delta) \\ \sin(\omega_c t + \delta) \end{bmatrix}$$

donde R es la amplitud de x y y , δ es una fase, y $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$, a la cual se le conoce como frecuencia de ciclotrón. (Girvin, 1998)

Nótese que el período de la órbita es independiente del radio y que la velocidad tangencial $v = R\omega_c$ es la que determina el radio. Esto último se debe a la fuerza de Lorentz.

Ahora bien, es preciso recordar que hay diferencias entre el momentum mecánico y el momentum conjugado electromagnético. Esto se hace más explícito en el punto de vista mecánico-analítico. Es preferible utilizar este enfoque para poder aprovecharse de las simetrías gauge. (Shankar, 1994)

De esta cuenta, se tiene que el momentum conjugado electromagnético es:

$$p^\mu \equiv m\dot{x}^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$$

de donde, se tiene que el momentum mecánico es:

$$p_{mec}^\mu \equiv m\dot{x}^\mu = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu$$

por lo que el Hamiltoniano es,

$$H(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{1}{2m} \left(p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right) \left(p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right)$$

(Girvin, 1998)

III. DIAMAGNETISMO DE LANDAU

« We mathematicans are all a bit crazy.»
 - Lev Davidovitch Landau.

Se procede a estudiar el diamagnetismo de Landau donde un electrón se mueve en un plano a través del cual pasa un campo magnético perpendicular al mismo. El hamiltoniano del sistema es el siguiente:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{\mu}_0 \cdot \vec{B}$$

donde $\vec{\mu}_0 = \frac{e}{2\mu c} \vec{A}$ y como $\vec{B} = B\hat{z}$, el hamiltoniano se vuelve:

$$H = \frac{p^{*2}}{2m}$$

donde $\vec{p}^* = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$ que es el momentum conjugado en electromagnetismo, entonces,

$$\vec{p}^{*2} = \vec{p}^2 + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2$$

de donde, se deduce que,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \right)$$

escrito de otra forma,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(p_x + \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(p_y + \frac{e}{c} A_y \right)^2 \right)$$

(Chang, 2009)

Ahora se cuantiza el sistema volviendo el momentum, el potencial magnético vectorial, la posición y el hamiltoniano operadores en un espacio de Hilbert. Entonces, tenemos que,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(P_x + \frac{eB}{c} Y \right)^2 + \left(P_y + \frac{eB}{c} X \right)^2 \right)$$

Se proponen entonces las siguientes sustituciones:

$$Q = \frac{cP_x + (qBY)/2}{qB}$$

y

$$P = \frac{P_y + qBX}{2c}$$

Esta transformación es canónica, es decir que cumple con la relación $J\omega J^T = \omega$ donde $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ y J es la jacobiana de la transformación. En este caso vamos a hacer la demostración. Se recuerda que,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q_i} & \frac{\partial Q}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P}{\partial q_i} & \frac{\partial P}{\partial p_i} \end{pmatrix}$$

Entonces, se obtiene

$$J\omega J^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{c}{qB} \\ -\frac{qB}{2c} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{qB}{2c} \\ \frac{c}{qB} & \frac{1}{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la transformación es canónica. Por lo tanto la sustitución nos deja la Física invariante, i.e., las ecuaciones de Hamilton preservan su forma, y es válido utilizar el formalismo estándar, i.e. Q y P son variables canónicas conjugadas con $[Q, P] = i\hbar$. En el hamiltoniano, utilizando las sustituciones propuestas,

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2mc^2}$$

que es el hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico donde se tiene que

$$m\omega_0^2 = \frac{e^2 B^2}{mc^2}$$

De donde

$$\omega_0 = \frac{eB}{mc}$$

que es de nuevo la frecuencia de Larmor o de ciclotrón. (Chang, 2009)

Ahora bien, se considera la siguiente sustitución:

$$Q' = P_x + \frac{eB}{2c} X$$

Ésta no se puede insertar en el hamiltoniano a pesar de ser canónica. Esto refleja que hay una degeneración infinita en los niveles de energía del oscilador. Se verifica esto en el nivel basal. A estos estados degenerados en el estado basal les llamamos «Lowest Landau Levels» (LLL). Para ver esto se estudia el estado basal del sistema usando la siguiente ecuación, tal y como se hace en el problema del oscilador armónico cuántico:

$$a|0\rangle = 0$$

se recuerda que el trabajo se hace sobre un sistema en dos dimensiones, entonces se trabajará el problema en el plano complejo con la coordenada z ,

$$z' = x - iy$$

$$z = x + iy$$

Entonces, la ecuación para el estado basal se vuelve en este sistema de coordenadas,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{eB}{4\hbar c} z \right) \psi_0(zz') = 0$$

Si se propone la siguiente solución:

$$\psi_0(zz') = \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c} zz'\right) u(z, z')$$

sustituyendo, se obtiene que,

$$\frac{\partial u}{\partial z'} \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c} zz'\right) - \frac{eB}{4\hbar c} z \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c} zz'\right) u + \frac{eB}{4\hbar c} z \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c} zz'\right) u = 0$$

entonces, se obtiene al final esta sencilla ecuación,

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = 0$$

Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que es una función analítica y puede ser escrita como una serie de potencias donde cada monomio z^m es un elemento de una base linealmente independiente, por lo que un estado puede escribirse como,

$$\psi_m = z^m \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c} zz'\right)$$

Nótese que m sólo tiene como restricción que $m \in \mathbb{N}$ entonces la degeneración de los LLL es infinita. (Chang, 2009)

Para m grande, la partícula se encuentra en un radio de $r_m = \sqrt{2ml^2}$ donde

- $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$, a l se le llama longitud magnética.

- Si el sistema está acotado por un disco de radio R en lugar de ser infinito, la mayor cantidad N de m que puede estar en el sistema de LLL está dada por

$$N = \frac{\pi R^2 B}{\Phi_0}$$

donde $\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}$ que es el cuanto de flujo magnético. (Chang, 2009)

IV. DINÁMICA CUÁNTICA EN CAMPOS MAGNÉTICOS FUERTES

«For those who are not shocked when they first come across quantum theory cannot possibly have understood it.»

- *Physics and Beyond*, W. Heisenberg citando a Niels Bohr (1971).

Una vez estudiada la aproximación clásica y semi clásica del problema, es preciso proceder a estudiar el problema cuántico escogiendo el gauge (ver apéndice) que se utilizará para este problema. Este gauge está relacionado con el potencial magnético vectorial. Uno adecuado para este problema es el gauge de Landau:

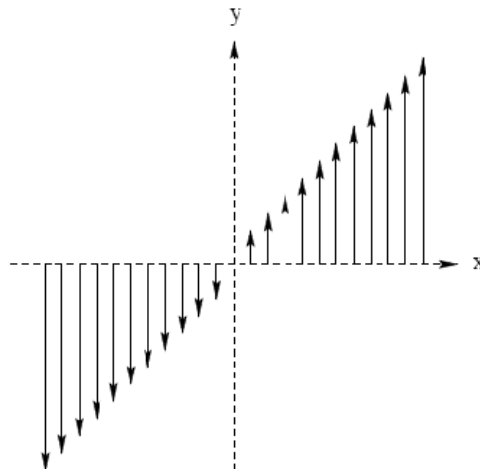
$$\vec{A}(\vec{r}) = xB\hat{y}$$

el cual obedece a la ecuación

$$\nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$$

para B constante que es el campo magnético del problema inicial. Esta igualdad es fácilmente verificable calculando el rotacional del potencial magnético vectorial. (Girvin, 1998)

Figura No 1: Ilustración del gauge de Landau para un potencial vectorial de la forma $\vec{A}(\vec{r}) = xB\hat{y}$. El campo magnético es perfectamente uniforme, pero el potencial vectorial tiene una dirección privilegiada.



(Girvin, 1998)

Dado este gauge, se tiene invarianza traslacional en la dirección \hat{y} , así como en \hat{x} . Se procede a verificar esta afirmación, para una traslación $\varepsilon\hat{y} + \delta\hat{x}$:

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \delta\hat{x} + (xB + \varepsilon)\hat{y}$$

tenemos entonces ahora, que,

$$\nabla \times \vec{A}' = B\hat{z}$$

de donde se obtiene el mismo campo magnético que en el caso anterior.

Una vez estudiado el gauge y sus simetrías, es preciso estudiar el Hamiltoniano del sistema, nótese que en general un Hamiltoniano es de la forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

siendo V un potencial, así que nuestro Hamiltoniano sería de la forma,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + \left(p_y + \frac{eB}{c}x \right)^2 \right)$$

por lo que el problema mecánico-cuántico consiste en resolver la ecuación de Schrödinger,

$$H\psi_k = \epsilon_k\psi_k$$

Aprovechando la simetría gauge del sistema, se propone la siguiente solución,

$$\psi_k = e^{iky} f_k(x)$$

Dicha solución tiene la ventaja de ser un eigenestado de p_y y entonces se puede reemplazar éste por $\hbar k$ en el Hamiltoniano, entonces, se obtiene un nuevo Hamiltoniano,

$$h_k \equiv \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} \left(\hbar k + \frac{eB}{c}x \right)^2$$

con el cual, la ecuación de Schrödinger se vuelve,

$$h_k f_k(x) = \epsilon_k f_k(x)$$

(Girvin, 1998)

Nótese que no hay ningún momentum en la parte de \hat{y} por lo que se tiene el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional con la frecuencia clásica del ciclotrón y una posición central $X_k = kl^2$:

$$h_k = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x + kl^2)^2$$

De aquí se puede ver que la onda plana elegida en \hat{y} tiene toda una familia de eigenvalores:

$$\epsilon_k = (n + 1/2)\hbar\omega_c$$

Que depende de n que es independiente de $\hbar k$ que es el momentum en la componente \hat{y} , por lo que los eigenestados no normalizados están descritos, con el procedimiento del apéndice C, por:

$$\psi_{nk}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{iky} H_n(x + kl^2)^2 e^{-1/2l^2(x+kl)^2}$$

donde H_n es un polinomio de Hermite. (Girvin, 1998)

A estos niveles de energía del oscilador se les conoce como niveles de Landau. Dada la independencia de n con k , la degeneración en cada nivel es enorme, como se mostrará a continuación. Para esto se asume que las condiciones en \hat{y} son periódicas, esto para asegurar la continuidad de la solución. Dado el gauge utilizado, no es posible imponer dicha condición en \hat{x} . Ahora supóngase que el fenómeno utilizado se estudia sobre un rectángulo de dimensiones $L_x L_y$ donde el borde izquierdo se encuentra en $x = -L_x$ y el derecho en $x = 0$. Entonces, los valores de k van de $k = 0$ hasta $k = L_x/l^2$ dado que x oscila entre 0 y L_x . Por la no periodicidad en x , los lados izquierdo y derecho difieren. Se deduce entonces que el número total de estados, N , en cada nivel de Landau viene dado por:

$$N = \frac{L_y}{2\pi} \int_0^{L_x/l^2} dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} = N_\Phi$$

donde

$$N_\Phi = \frac{BL_x L_y}{\Phi_0}$$

que es la cantidad de cuantos de flujo que hay en cada muestra. (Girvin, 1998)

Esto último se da porque el flujo magnético, para un campo magnético y una superficie \mathcal{A} constantes viene dado por

$$\Phi = \frac{B}{\mathcal{A}}$$

(Griffiths, 1999)

El resultado obtenido para la cuantización del flujo magnético es consistente con el resultado que se verá más adelante en este trabajo. Dado que la familia de eigenfunciones encontrada es unidimensional, la degeneración de cada nivel de Landau es extensa para el caso bidimensional. Esto es porque el espacio entre las condiciones $\Delta_k = \frac{2\pi}{L_y}$ decrece cuando el rango $\left[0, L_x/l^2\right]$ crece con L . (Girvin, 1998)

La amplitud del oscilador armónico en el nivel de Landau n , es del orden de $l\sqrt{n}$, lo que es microscópico comparado con el tamaño del sistema. Pero, el espaciamiento entre los centros:

$$\Delta = \Delta_k l^2 = \frac{2\pi l^2}{L_y}$$

es ampliamente menor ya que $L_y \gg l$. (Girvin, 1998)

¿Por qué la amplitud del oscilador es del orden de $l\sqrt{n}$? Bueno, nótese que $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c$ y clásicamente, se tiene que $\epsilon = \frac{1}{2}m\omega_c(X_{max} + kl^2)^2$ donde A es la amplitud. Igualando términos, se tiene, con un enfoque semi clásico,

$$\frac{1}{2}m\omega_c(X_{max} + kl^2)^2 = (n + 1/2)\hbar\omega_c$$

ahora bien es preciso recordar que $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$, entonces, se tiene que, $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$, por lo que,

$$(X_{max} + kl^2)^2 = l\sqrt{2n + 1}$$

que es del orden de $l\sqrt{n}$. (Kramer, 2005)

Nótese que en general, se tiene que la función de onda de los estados está dada por un paquete de energía gaussiano que es de la forma: $U(t)\psi_{nk}(\vec{r})$ donde $U(t)$ es un propagador de la forma: $U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, entonces se tiene por principio de superposición que la solución general de una onda en este sistema es de la forma,

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n \int_{L_y} \frac{dk}{2\pi} a_n(\vec{k}) \psi_{nk}(\vec{r}) e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_c t}$$

Es importante recalcar que en un problema de dos dimensiones ordinario, el conjunto completo de estados es modelado por un momentum bidimensional. Aquí se obtiene uno discreto y uno unidimensional. (Girvin, 1998)

Los detalles de la posición inicial y momentum vienen dados por los $a_n(k)$ de las amplitudes. Resulta evidente por la exponencial compleja que $\psi(r, t)$ es periódica $\frac{2\pi}{\omega_c}$. Siguiendo un razonamiento semiclásico, el movimiento de las partículas es circular (órbita de ciclotrón) esto es fácilmente justificable ya que la fuerza de Lorentz tien la siguiente forma:

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

dado que $\vec{E} = 0$ se tiene que,

$$\vec{F} = \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B})$$

entonces, por segunda ley de Newton se tiene para un vector de aceleración \vec{a} que,

$$m\vec{a} = \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B})$$

y por las propiedades del producto cruz, la velocidad es ortogonal a la aceleración por lo que se tiene la característica de un movimiento circular uniforme. (Marion, 2004)

Por simplicidad, se restringe el estudio a los niveles bajos de Landau (LLL), para $n = 0$ donde las eigenfunciones en el gauge de Landau son de la forma:

$$\psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} l}} e^{iky} e^{-\frac{1}{2l^2}(x+kl^2)^2}$$

y cada estado tiene como energía,

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \hbar \omega_c$$

Ahora se asumirá que \vec{B} es grande para poder ignorar los niveles más altos de Landau (Girvin, 1998)

Dada la gran degeneración de los estados, las combinaciones serán estados estacionarios, por lo que la corriente será nula. Pero, localmente hay una densidad de corriente dado que semi-clásicamente hay un movimiento circular de las cargas. Se analiza entonces el valor esperado:

$$\langle \vec{J} \rangle = -\frac{e}{m} \langle \psi_k | \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} | \psi_k \rangle$$

Entonces, para la componente y se tiene que,

$$\langle J_y \rangle = -\frac{e}{m\pi^{1/2}l} \int dx e^{-\frac{1}{2l^2}(x+kl^2)^2} \left(\hbar k + \frac{eB}{c} x \right) e^{-\frac{1}{2l^2}(x+kl^2)^2}$$

$$\langle J_y \rangle = \frac{e}{m\pi^{1/2}l} \int dx e^{-\frac{1}{2l^2}(x+kl^2)^2} (x + kl^2)$$

(Girvin, 1998)

Ahora considérese el caso en que sí existe un campo eléctrico que es constante en la dirección de x , dando lugar al siguiente potencial:

$$V(\vec{r}) = eE_x$$

Esto tiene una simetría traslacional en la dirección de y . Esto hace que el gauge elegido siga siendo conveniente. Separando las variables, se observa que, de la misma manera, el Hamiltoniano cambia para obtener:

$$h_k = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (x + kl^2)^2 + eE_x$$

Si se procede a completar el cuadrado para obtener un potencial cuadrático, se vuelve a obtener el potencial de un oscilador armónico simple, cuya posición central sería,

$$X_k = -kl^2 - \frac{eE}{m\omega_c^2}$$

y la energía es ahora linealmente dependiente de X_k :

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \hbar\omega_c + eEX_k + \frac{1}{2} mc \frac{E}{B}$$

Ahora, se define a

$$\vec{v} \equiv -\frac{cE}{B}$$

por lo que existe una corriente neta que es de la forma:

$$\langle J_y \rangle = -e\vec{v}$$

Esto muestra simplemente que $\bar{v}\hat{y}$ que es la velocidad de la onda electromagnética la cual usualmente es $c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$. (Girvin, 1998)

V. ESTADOS EN LA FRONTERA DEL EFECTO HALL ENTERO

«La teoría es la que decide lo que podemos observar.»
- W. Heisenberg citando a Albert Einstein (1926).

Considérese una superficie de ancho infinito en un campo eléctrico no uniforme. Por simplicidad, se tomará al potencial $V(x)$ como una función suave. Asumiendo que todavía existe la simetría traslacional de la sección anterior, la solución de la ecuación de Schrödinger sería:

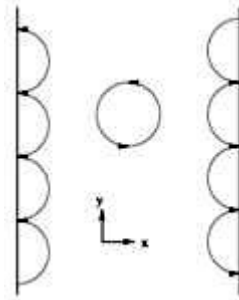
$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{iky} f_k(x)$$

Este sistema es perturbativo, por lo que es posible anticipar, dada la perturbación al sistema (que es pequeña), que el pico estará cerca del punto $X_k \equiv -kl^2$. Asimismo, los eigenvalores ϵ_k no serán precisamente lineales en k , pero reflejarán la energía cinética del ciclotrón, agregándole la energía potencial $V(X_k)$ (y un pequeño análogo de la perturbación de la sección anterior). Se nota entonces que la velocidad de la partícula viene dada por:

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial k} \hat{y}$$

que tiene el signo opuesto, en ambos límites de la muestra. Esto se traduce en que en el estado basal, hay corrientes de signo opuesto corriendo en el plano. La interpretación semi-clásica de estas corrientes es que representan la interrupción del movimiento circular del ciclotrón debida a las colisiones con la pared como se muestra en la siguiente figura:

Figura No 2: Comportamiento de las cargas en la frontera del sistema. Éstas están interrumpidas en su movimiento circular con la pared.



(Girvin, 1998)

Dado que el momentum en un campo magnético corresponde a una posición, se tiene una superficie de Fermi. En el caso de la sección anterior, la corriente neta de Hall era nula, ahora existe dicha corriente. Para calcular la misma, es preciso sumar todas las velocidades de los distintos estados:

$$I = -\frac{e}{L_y} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{L_y}{2\pi} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial k} n_k$$

donde se asume que un único nivel de Landau es ocupado y que n_k es la probabilidad que el k -ésimo nivel esté ocupado. Si se asume temperatura cero y dado que el integrando es una derivada perfecta, se tiene que,

$$I = -\frac{e}{h} \int_{\mu_R}^{\mu_L} d\epsilon = -\frac{e}{h} [\mu_L - \mu_R]$$

Nótese que los límites de integración cambiaron. Esto se debe a que el diferencial ha cambiado, es necesario trabajar con la energía, la cual no puede ser infinita. Se recuerda del efecto Hall clásico que el voltaje de Hall viene siendo de la forma:

$$(+e)V_H = (+e)[V_R - V_H] = \mu_R - \mu_L$$

donde, μ_R y μ_L son los potenciales químicos en la frontera los cuales expresan la energía necesaria para transferir una partícula de un lugar a otro. Una vez se ha notado lo anterior, se tiene entonces que la corriente viene dada por la siguiente expresión ya que se tiene en cuenta más niveles y además se está trabajando con fermiones (ver apéndice D),

$$I = -\nu \frac{e^2}{h} V_H$$

donde ν es la cantidad de niveles de Landau que contribuyen a la corriente. ¡Claramente, la corriente está cuantizada! Desde un punto de vista un poco más pragmático, se consideran las conductividades longitudinales (σ_{xx}) y las transversales (σ_{xy}) donde,

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -\nu \frac{e^2}{h}\end{aligned}$$

¡La conductancia está cuantizada! (Girvin, 1998)

VI. EFECTO HALL FRACCIONADO

«It is the harmony of the diverse parts, their symmetry, their happy balance; in a word it is all that introduces order, all that gives unity, that permits us to see clearly and to comprehend at once both the ensemble and the details.»

- *The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science Science and Methods*, Henri Poincaré (1946).

Bajo ciertas circunstancias, el efecto Hall cuántico puede ser cuantizado por fracciones en lugar de un entero. Por ejemplo, en un campo magnético tres veces mayor que el que $\nu = 1$, se tiene que ν se vuelve $1/3$. Dado que $\sigma_{xx} \rightarrow 0$, los electrones pueden viajar de un lado del sistema al otro libremente. (Girvin, 1998)

El efecto Hall cuántico fraccionado tiene por diferencia con el entero que se toma en cuenta la repulsión de Coulomb de los electrones. (Girvin, 1998)

Debido a que se toman en cuenta las interacciones entre electrones de la dicha fuerza que es una fuerza central, es necesario elegir un nuevo gauge que tenga simetría rotacional:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$$

conocido como el gauge simétrico. Ergo, se puede anticipar que el momentum angular, más que el momentum lineal será la cantidad conservada. (Girvin, 1998)

De nuevo, por simplicidad, se realiza el análisis para el nivel de Landau más bajo, sólo con el fin de evitar problemas en los cálculos, y se cambia el signo del campo magnético por $\vec{B} = -B\hat{z}$. Con esas restricciones, no es difícil deducir que las soluciones de la partícula libre de Schrödinger teniendo definido el momentum angular es:

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2 2^m m!}} z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

donde $z = (x + iy)/l$ es un número complejo, como se mostró en la sección de los niveles de Landau. (Girvin, 1998)

Una vez estudiado esto, es posible derivar una cuantización más general que la del efecto Hall entero, donde, $\sigma_{xy} = \frac{p}{q} \left(\frac{e^2}{h} \right)$ de los dos postulados que se muestran a continuación:

- Si la energía de Fermi está en una región de estados localizados en el volumen, entonces los únicos estados que pueden ser excitados por la inserción de un número entero de cuantos de flujo, involucran el movimiento de cargas de un extremo al otro. No hay excitaciones posibles en medio. (Esto se vio en la sección anterior)
- Hay un número q mínimo tal que el sistema puede ser regresado al estado original moviendo un número entero, p , de electrones de un extremo del sistema al otro a través de un circuito externo.

(Karlhede, 1992)

Para justificar el primer, si la energía de Fermi en el sistema está en una región de estados localizados, entonces no hay excitaciones que puedan darse fuera de la frontera, ya que hay una movilidad en el espectro de los estados extendidos. En la frontera, hay un potencial que es creciente con la posición, así el espectro es diferente que en el resto del sistema, por lo que existirán estados extendidos a la energía de Fermi. De estos, sólo los de la frontera son alterados por un cuanto de flujo magnético dado que el proceso no es adiabático. Entonces, el efecto de agregar un cuanto de flujo al sistema hace que haya un intercambio entre las partículas del sistema, lo que no produce ningún cambio fuera de las fronteras. (Karlhede, 1992)

Viendo el segundo postulado, en el efecto Hall entero, agregar un cuanto de flujo mueve un electrón por nivel de Landau de un extremo al otro, entonces, $q = 1$. En el efecto Hall fraccionado, las partículas tienen cargas fraccionadas, lo que hace que se pueda tomar $q > 1$ cuantos de flujo a través del sistema.

La cuantización de Hall viene de estos postulados. El voltaje de Hall es básicamente el cambio de energía medido cuando una carga se mueve de un lugar al otro (potencial químico). Dado que una muestra aislada tiene un número entero de electrones, sólo es

posible mover un número entero de electrones de un extremo al otro. La carga total pe transportada cuando q cuantos flujos son insertados implica un cambio en la energía total del sistema de $\Delta E = peV_H$. Entonces, la corriente de Hall viene dada por:

$$I = c \frac{\Delta E}{\Delta \Phi} = \frac{p e^2}{q h} V_H$$

Y dado que la conductancia de Hall es, $\sigma_{xy} = I/V_H$, se tiene que ésta es de la forma:

$$\sigma_{xy} = \frac{p}{q} \left(\frac{e^2}{h} \right)$$

¡Ésta está cuantizada!

VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

«How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!»

- Isaac Asimov.

Este trabajo ha mostrado algunos aspectos teóricos del efecto Hall Cuántico, tanto en su versión entera como en su versión fraccionada. Este fenómeno ha abierto la puerta a distintas aplicaciones en nanotecnología utilizando como gas bidimensional de electrones al grafeno, así como el desarrollo de más aspectos teóricos como la explicación de la cuantización de la conductancia de la manera $\sigma_{xy} = \frac{5}{2} \left(\frac{e^2}{h} \right)$.

En general, el QHE estudia el comportamiento colectivo de electrones en dos dimensiones sometidos a un campo magnético perpendicular al plano. Esto se logra estudiando antes el comportamiento individual de las cargas por medio de los niveles de Landau. En el IQHE, se llega a que la conductancia de Hall es de la forma: $\sigma_{xy} = \nu \left(\frac{e^2}{h} \right)$ donde ν es un número entero. El número entero que indica la cuantización tiene esta naturaleza debido a que no se toman en cuenta las interacciones entre electrones para su estudio. Ahora bien, para poder realizar un estudio del FQHE, es necesario tomar en cuenta esto y la diferencia radica en que $\sigma_{xy} = \frac{p}{q} \left(\frac{e^2}{h} \right)$. Esto se debe a que para su estudio ya se toman en cuenta las interacciones, por medio del potencial de Coulomb entre las partículas.

Es un tema muy amplio por las diferentes ramas de la Física que abarca como la Mecánica Clásica, Mecánica Cuántica, Mecánica Estadística y Teoría Electromagnética. En la segunda y la tercera, este tema ha permitido la obtención de dos premios Nobel y aún tiene algunos aspectos por explicar.

Para completar el estudio, se recomienda estudiar este fenómeno en distintos materiales como en los ferromagnetos. Otro aspecto interesante por profundizar son las propiedades topológicas que tiene el problema como la cuantización derivada de la incompresibilidad.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

- Arfken, George y Weber, Hans. 2005. *Mathematical Methods for Physicists*. 6^a ed. Massachusetts. El Sevier. 1182 págs.
- Chang, Juan Diego. 2009. «Efecto Hall Cuántico». Notas de la actividad Escuela de Invierno de Mecánica Cuántica en la Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala (Inédito). 11 págs.
- Dirac, Paul. 1958. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4^a ed. Londres. Oxford University Press. 314 págs.
- Girvin, Steven. 1997. «The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries». *arXiv.org*. arXiv:cond-mat/9907002v1
- Gritffiths, David. 1995. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2^a ed. New Jersey. Prentice Hall. 394 págs.
- Gritffiths, David. 1999. *Introduction to Electrodynamics*. 3^a ed. New Jersey. Prentice Hall. 576 págs.
- Gregory, Douglas. 2006. *Classical Mechanics An Undergraduate Text*. 1^a ed. New York. Prentice Hall. 596 págs.
- Hall, Edwin. 1879. «On a New Action of the Magnet on Electric Currents». *American Journal of Mathematics*. Vol 2. Págs 287-292
- Halliday, David; Resnick, Robert y Krane, Kenneth. 1999. *Física Vol. 2 Versión Ampliada*. 3^a ed. México. CECSA. 691 págs.
- Huang, Kerson. 1987. *Statistical Mechanics*. 2^a ed. New York. John Wiley & Sons. 493 págs.
- Karlhede, Anders; Kivelson, Steve y Sondhi, Shivaji. 1992. «The Quantum Hall Effect: The Article». Notas de la actividad Escuela de Invierno de Física Teórica en Jerusalén. 106 págs.
- Kramer, Tobias. 2005. «A heuristic quantum theory of the integer quantum Hall effect». *arXiv.org*. arXiv:cond-mat/050945v2

- Mac Donald, Allan. 1994. «Introduction to the Physics of the Quantum Hall Regime». *arXiv.org*. arXiv:cond-mat/9410047v1
- Marion, Jerry y Thornton, Steven. 2004. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5^a ed. Belmont. Thomson. 656 págs.
- Pathria, Raj. 2001. *Statistical Mechanics*. 2^a ed. Oxford. Butterworth Heinemann. 529 págs.
- Shankar, Ramamurti. 1994. *Principles of Quantum Mechanics*. 2^a ed. New York. Springer. 676 págs.
- Shankar, Ramamurti. 2001. «Theories of the Fractional Quantum Hall Effect». *arXiv.org*. arXiv:cond-mat/0108271v1
- Thornton, Steven y Rex, Andrew. 2000. *Modern Physics for Scientists and Engineers*. 2^a ed. Belmont. Thomson. 668 págs.

IX. APÉNDICE

A. El efecto Hall clásico

El efecto Hall es la creación de una diferencia de potencial perpendicular al flujo de corriente en un conductor y el campo magnético que lo atraviesa. Este fenómeno fue descubierto en 1879 por Edwing Hall, un físico estadounidense. Tiene muchas aplicaciones como medir la corriente en fluidos.

Los sensores del efecto Hall son utilizados para detectar corrientes sin hacer contacto con el conductor. Son especialmente útiles para medir pequeñas corrientes directas que no son inducidas por suficiente corriente de una manera bastante acertada. Estos sensores son también utilizados para detectar el campo magnético terrestre.

Si se considera una cinta rectangular plana de ancho l por la cual fluye una corriente i , se tiene que la dirección de la corriente es la convencional, i.e. la opuesta al movimiento de los electrones. A ésta se le induce un campo magnético uniforme B perpendicular al plano en el que se encuentra la cinta. Las cargas experimentan una fuerza de la siguiente forma:

$$\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

y se mueven hacia la derecha de la cinta. Notemos que las cargas positivas que se mueven en la dirección de la cinta y las que se mueven en la dirección de i experimentan una fuerza de desviación en la misma dirección. (Chang, 2009)

Esta primera fuerza que desvía las cargas hacia la derecha produce un campo eléctrico en la cinta, lo cual constituye el efecto Hall. Esto quiere decir que existe una

diferencia de potencial al que llamamos voltaje de Hall, $V = E/l$. El signo de este voltaje da el signo de la carga y su magnitud da la densidad de carga. Se asume que las cargas son electrones que se mueven a una velocidad de arrastre \vec{v}_d . Cuando los electrones se mueven, el campo magnético los desvía hacia la derecha, lo que crea un campo eléctrico que actúa en el conductor hasta que llega a un equilibrio y tenemos, por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

es decir,

$$\vec{E} = -\vec{v}_d \times \vec{B}$$

(Chang, 2009)

Nótese que en este caso, la velocidad y el campo magnético son ortogonales, por lo que se tiene que,

$$E = v_d B$$

(Chang 2009)

Ahora bien, si recordamos que $v_d = j/ne$ donde j es la densidad de corriente o corriente por unidad de área A en la cinta y n es la densidad de los electrones, y t es el espesor de la cinta, se tiene que $A = lt$, por lo que sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que,

$$\frac{V}{l} = \frac{i}{ltne} B$$

de donde se obtiene que,

$$n = \frac{iB}{etV}$$

Si de aquí se tiene que,

$$R_H = \frac{V}{i} = \frac{1}{etn}$$

que aunque no es una resistencia en sí, se le llama resistencia de Hall. (Chang, 2009)

B. Elementos de la teoría gauge

Para poder estudiar el electromagnetismo, son necesarias cinco ecuaciones, de las cuales es posible deducir toda la teoría. Éstas son las cuatro ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz. La última está dada por la siguiente igualdad:

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

y las cuatro primeras son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

donde \vec{v} es la velocidad de la carga e , \vec{E} y \vec{B} son el campo eléctrico y magnético respectivamente, c es la velocidad de la luz, ρ y \vec{j} son la densidad de carga y la de corriente respectivamente, y están sujetas a la siguiente condición de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(Shankar, 1994)

Las cuatro de Maxwell describen cómo son afectados los campos electromagnéticos en presencia de cargas y la fuerza de Lorentz nos describe la respuesta de una carga a la presencia de un campo electromagnético. (Shankar, 1994)

Ahora, es preciso verificar que esta condición sea válida. Si se utiliza la cuarta ecuación de Maxwell y se le aplica la divergencia de ambos lados, se obtiene:

$$-\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} = 4\pi \nabla \cdot \vec{j}$$

ya que se tiene la siguiente identidad, $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E})$, siendo \vec{E} un campo cualquiera. Si se utiliza ahora la primera ecuación de Maxwell, se tiene la condición mencionada anteriormente. (Shankar, 1994)

Ahora, se recuerda que en Teoría Electromagnética, se suele trabajar con el potencial magnético vectorial y el potencial eléctrico. ¿De dónde vienen estos? Nótese que en la tercera ecuación de Maxwell, se tiene una divergencia nula del campo magnético, esto quiere decir que éste debe ser el rotacional de algún otro campo vectorial, al cual se le llama potencial magnético vectorial \vec{A} , por lo que, este potencial es tal que,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Si se sustituye el campo magnético por la igualdad obtenida en la ecuación anterior en la segunda ecuación de Maxwell, se obtiene que,

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

y utilizando la identidad matemática $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ para un escalar cualquiera, se obtiene que,

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

de donde,

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ahora, utilizando la siguiente igualdad:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

y reemplazando en las ecuaciones 1 y 4 de Maxwell, se obtiene:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

¿Qué sucede si se sustituyen dichos potenciales por los siguientes?

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla \Lambda$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

con Λ arbitrario. ¿Qué sucede con los campos eléctrico y magnético?

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}'$$

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{A} - \nabla \Lambda)$$

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B}' = B$$

además,

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \Phi'$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{A} - \nabla \Lambda)}{\partial t} - \nabla \left(\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)$$

$$\vec{E}' = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}$$

Dada la arbitrariedad de Λ , ¡los potenciales son arbitrarios! (Shankar, 1994)

Nótese que las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz, no dependen de los potenciales, por lo que la transformación anterior de los potenciales es irrelevante para la

Física del sistema, a esto se le llama **transformación gauge**, cuya invarianza se conoce como **invarianza gauge**. Ahora bien, los parámetros como Λ , son conocidos como **parámetros gauge** y los potenciales (\vec{A}', Φ') y (\vec{A}, Φ) son **gauge-equivalentes**, relacionados por una transformación gauge. (Shankar, 1994)

C. Oscilador Armónico Cuántico

Para estudiar este fenómeno, se trabajará antes el fenómeno clásico para luego cuantizarlo. Para esto se va a tomar un sistema de masa resorte cuya fuerza se asume nula en la posición de equilibrio y que tiene todas sus derivadas, por lo que puede ser expandida en una serie de potencias:

$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2F}{dx^2} \right)_0 + \dots$$

si considera a la posición de equilibrio como $x = 0$, se tiene que $F_0 = 0$ y si además se asume que las oscilaciones son pequeñas, es posible desprejar el término cuadrático y los que le siguen, por lo que se tiene la siguiente relación:

$$F(x) = -kx$$

donde $k > 0$ ya que la fuerza restauradora siempre apunta a la posición de equilibrio. A esto se le conoce como la ley de Hooke. Ahora bien, si se denota a ω_0 como la frecuencia angular del sistema, se tiene que $k = m\omega_0^2$, entonces la ley de Hooke puede escribirse como

$$F(x) = -m\omega_0^2 x$$

(Marion, 2004)

Ahora bien, es preciso encontrar el Hamiltoniano del sistema, para esto hay que calcular el potencial de dicho sistema. Dado que la fuerza es conservativa,

$$\vec{F} = -\nabla U$$

donde U es la energía potencial del sistema, dado que éste es unidimensional, se obtiene que:

$$-m\omega_0^2 x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

por lo que se deduce que,

$$U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

(Gregory, 2006)

Ahora bien, el Hamiltoniano, H , de un sistema conservativo viene dado por la siguiente expresión:

$$H = T + U$$

donde T es la energía cinética del sistema en términos del momentum. Así que el Hamiltoniano clásico sería,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

(Gregory, 2006)

Ahora bien, se procede a cuantizar el sistema, por lo que se tiene que el Hamiltoniano, la posición y el momentum son operadores:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 X^2$$

Para ver este sistema se trabajará en la base de las energías, donde se recuerda que por medio de la cuantización de Dirac, se tiene que

$$[X, P] = i\hbar$$

(Shankar, 1994)

Se define a continuación los siguientes operadores de manera a que estos sean adimensionales y adjuntos:

$$a = \left(\frac{m\omega_0}{2\hbar}\right)^{1/2} X + i\left(\frac{1}{2m\omega\hbar}\right)^{1/2} P$$

$$a^t = \left(\frac{m\omega_0}{2\hbar}\right)^{1/2} X - i\left(\frac{1}{2m\omega\hbar}\right)^{1/2} P$$

Estos satisfacen a la siguiente relación de conmutación:

$$[a, a^t] = 1$$

Nótese que el siguiente es un operador hermitiano:

$$a^t a = \frac{m\omega_0}{2\hbar} X^2 + \frac{1}{2m\omega_0\hbar} P^2 + \frac{i}{2\hbar} [X, P] = \frac{H}{\hbar\omega_0} - \frac{1}{2}$$

de manera que

$$H = (a^t a + 1/2)\hbar\omega_0$$

(Shankar, 1994)

Se define entonces el siguiente operador,

$$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega_0} = (a^t a + 1/2)$$

cuyos eigenvalores ϵ miden la energía en unidades de $\hbar\omega$. Se desea entonces resolver los eigenvalores para este nuevo operador.

$$\hat{H}|\epsilon\rangle = \epsilon|\epsilon\rangle$$

donde ϵ es la energía del sistema en las unidades que se mencionaron anteriormente. Se utilizarán a continuación las siguientes dos relaciones:

$$[a, \hat{H}] = a$$

y

$$[a^t, \hat{H}] = -a^t$$

La utilidad de los operadores a y a^t se ve en que dados los eigenestados de \hat{H} , estos degeneran a otros. Considérese,

$$\hat{H}a|\epsilon\rangle = (a\hat{H} - [a, \hat{H}])|\epsilon\rangle$$

$$\hat{H}a|\epsilon\rangle = (a\hat{H} - a)|\epsilon\rangle$$

$$\hat{H}a|\epsilon\rangle = (\epsilon - 1)a|\epsilon\rangle$$

Se infiere entonces que $a|\epsilon\rangle$ es un eigenestado con eigenvalor, $\epsilon - 1$, i.e.,

$$a|\epsilon\rangle = C_\epsilon|\epsilon - 1\rangle$$

Donde C_ϵ es una constante y $|\epsilon - 1\rangle$ y $|\epsilon\rangle$ son eigenkets normalizados. (Shankar, 1994)

Similarmente se ve que,

$$a^t|\epsilon\rangle = C_{\epsilon+1}|\epsilon + 1\rangle$$

Usualmente, uno se refiere a estos operadores como operadores escalón por obvias razones. También son conocidos como operadores de creación y aniquilación ya que crean o destruyen un quantum de energía. (Shankar, 1994)

Tomando en cuenta el resultado obtenido para el operador de aniquilación, se podría pensar que se tienen energías negativas en el sistema, lo cual no es cierto ya que los valores propios del hamiltoniano deben ser no negativos. Es por esta razón que se impone la siguiente restricción al estado basal del sistema:

$$a|\epsilon_0\rangle = 0$$

De esta cuenta, operando ahora con el operador creación, se tiene que

$$a^t a|\epsilon_0\rangle = 0$$

de donde, se obtiene, por la definición de \hat{H} que,

$$(\hat{H} - 1/2)|\epsilon_0\rangle = 0$$

Esto implica que,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}$$

(Shankar, 1994)

Ahora, puede procederse a aumentar este estado basal n veces aplicando el operador de creación. Entonces, los niveles del oscilador vienen dados por,

$$\epsilon_n = (n + 1/2)$$

o bien,

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0$$

Es importante notar que para el oscilador unidimensional, no hay degeneración. (Shankar, 1994)

Ahora, se procede a calcular las constantes C_ϵ y $C_{\epsilon+1}$. Como, $\epsilon_n = (n + 1/2)$, se cambiará la notación por la siguiente:

$$a|\epsilon\rangle = C_\epsilon|\epsilon - 1\rangle$$

cambiaría por,

$$a|n\rangle = C_n|n - 1\rangle$$

si se considera la adjunta de la ecuación anterior, se obtiene que,

$$\langle n|a^\dagger = \langle n - 1|C_n^*$$

Combinando ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n - 1|n - 1\rangle C_n^* C_n$$

$$\left\langle n \left| \hat{H} - \frac{1}{2} \right| n \right\rangle = C_n^* C_n$$

$$\langle n|n|n\rangle = |C_n|^2$$

ya que n es eigenvalor de \hat{H} . Entonces,

$$C_n = \sqrt{n}e^{i\theta}$$

con, θ arbitrario. Por convención, se elige que sea nulo. Entonces,

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle$$

Similarmente, para el operador creador se tiene que,

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle$$

De esta cuenta, se tiene que un estado arbitrario es de la forma:

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} \frac{a^\dagger}{\sqrt{n-1}} |n-2\rangle \dots = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

(Shankar, 1994)

Esta perspectiva parece ser muy cómoda si se conoce al estado basal, sin embargo, no se conoce, así que el problema no está resuelto, no hay una forma explícita de los eigenestados del problema. Sin embargo, este enfoque provee mucho material para estudiar sistemas que poseen un hamiltoniano de la misma forma que el oscilador, ya que se aprovechan las relaciones de conmutación.

No obstante, para determinar los eigenestados en un resultado más manejable, se procede a estudiar el problema en la base de las coordenadas:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \psi = E\psi$$

(Griffiths, 1995)

Las cosas pueden simplificarse un poco si se estudia con la siguiente variable que es adimensional:

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x$$

en términos de ξ , la ecuación de Schrödinger se lee como,

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi$$

donde $K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega_0}$ es la energía en unidades de $1/2 \hbar\omega_0$. (Griffiths, 1995)

Para iniciar el estudio, nótese que para oscilaciones grandes, los términos cuadráticos de ξ dominan a K y por lo tanto a la energía. Por lo que,

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \approx \xi^2\psi$$

lo que tiene una solución aproximada de,

$$\psi(\xi) \approx Ae^{-\xi^2/2} + Be^{\xi^2/2}$$

Note que el término B no es normalizable ya que diverge, así que la única solución físicamente aceptable, para oscilaciones grandes es:

$$\psi(\xi) \approx Be^{\xi^2/2}$$

De esta cuenta, para otros valores de ξ , se tiene que los estados vienen dados por una función de la forma:

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{\xi^2/2}$$

entonces, la ecuación diferencial se vuelve de la forma:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0$$

que es la ecuación de Hermite, cuya solución se expresa (por medio del método de Frobenius) de la forma:

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

que describe el estado para el n -ésimo nivel de energía. Donde, H_n son los polinomios de Hermite.

D. Sistemas de partículas indistinguibles (Estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac):

Es recomendable, iniciar estudiando las partículas indistinguibles en gases de partículas que no interactúan. El hamiltoniano del sistema viene dado por la siguiente expresión:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N H_i(q_i, p_i)$$

aquí, las variables subindexadas son aquellas que están asociadas a la i -ésima partícula. Se procede a estudiar la ecuación de Schrödinger para el sistema:

$$H\psi_E(\mathbf{q}) = E\psi_E(\mathbf{q})$$

donde E es la energía. Dada la forma del Hamiltoniano, la solución es de la forma:

$$\psi_E(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^N u_{\epsilon_i}(q_i)$$

de manera que,

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i$$

El factor $u_{\epsilon_i}(q_i)$, en la multiplicatoria es la eigenfunción de la i -ésima partícula de hamiltoniano $H_i(q_i, p_i)$ y energía ϵ_i :

$$H_i u_{\epsilon_i}(q_i) = \epsilon_i u_{\epsilon_i}(q_i)$$

(Pathria 2001)

Claramente, el estado debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$N = \sum_i n_i$$

y ésta otra,

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i$$

De acuerdo con esto, la función de onda de todo el sistema es la siguiente:

$$\psi_E(\mathbf{q}) = \prod_{m=1}^{n_1} u_1(m) \prod_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} u_2(m) \dots$$

donde los $u_i(m)$ son las funciones de onda de cada partícula. (Pathria, 2001)

Si ahora se permutan las partículas, es decir que se cambian las posiciones de $(1, 2, \dots, N)$ por $(P1, P2, \dots, PN)$ se tiene una función de onda con una permutación P que sería de la forma:

$$P\psi_E(\mathbf{q}) = \prod_{m=1}^{n_1} u_1(Pm) \prod_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} u_2(Pm) \dots$$

En Física Clásica, donde las partículas se ven iguales, i.e. se ven distinguibles cualquier permutación que ve un intercambio de las partículas se ve como nuevo, físicamente distinto. Entonces hay

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots}$$

micro estados distintos del sistema, que corresponden a cierta distribución $\{n_i\}$. La ecuación anterior puede ser entendida como el peso estadístico según la distribución que se tiene. Claro, se puede corregir cambiando el factor anterior por,

$$W_c\{n_i\} = \frac{1}{n_1! n_2! \dots}$$

Así pues, la única manera de entender esto es por lo indistinguible de las partículas. (Pathria, 2001)

Sin embargo, según la teoría cuántica, la situación no es del todo satisfactoria aun con esa corrección. De acuerdo con un punto de vista estrictamente cuántico, un intercambio de partículas aun si son diferentes, no deberían generar nuevos micro estados en el sistema. Básicamente, esto quiere decir que el conjunto de los n_i corresponde a los estados u_i , la pregunta ¿qué partícula está en qué estado? carece totalmente de sentido. Entonces el estado no permutado y el que sí está permutado puede verse como el mismo microestado. Entonces, el peso estadístico puede ser la unidad para cualesquiera conjuntos $\{n_i\}$. En efecto, cada uno de estos n_i debe ser 0 ó 1. De manera trivial se tiene que el peso estadístico viene dado por,

$$W_q\{n_i\} \equiv 1$$

(Pathria, 2001)

Al mismo tiempo, una función de onda como las que se han visto hasta ahora, se llama de Boltzmann y se denota por el símbolo $\psi_{Boltz}(\mathbf{q})$ es inapropiada para describir el estado de un sistema compuesto por partículas indistinguibles, ya que una permutación afecta al microestado. Dado esto, la función de onda del sistema debe construirse de manera que para permutaciones no se vean afectados los micro estados. La manera más sencilla de realizar esto es aplicando la siguiente restricción:

$$|P\psi|^2 = |\psi|^2$$

Esto lleva a las siguientes dos posibilidades:

$$P\psi = \psi$$

para toda permutación, lo que quiere decir que la función de onda es simétrica, o bien,

$$P\psi = \begin{cases} +\psi & \text{para permutaciones pares} \\ -\psi & \text{para permutaciones impares} \end{cases}$$

lo que quiere decir que la función de onda es antisimétrica. Se llama a estas funciones de onda como ψ_S y ψ_A respectivamente, matemáticamente son descritas por:

$$\psi_S(\mathbf{q}) = const. \sum_P P\psi_{Boltz}(\mathbf{q})$$

y para la antisimétrica,

$$\psi_A(\mathbf{q}) = const. \sum_P \delta_P P\psi_{Boltz}(\mathbf{q})$$

donde, δ_P en la expresión para la antisimétrica es $+1$ ó -1 de acuerdo a si las permutaciones son pares o impares. (Pathria, 2001)

Nótese entonces que la función de onda antisimétrica puede escribirse como,

$$\psi_A(\mathbf{q}) = const. \left| \begin{array}{cccc} u_i(1) & u_i(2) & \cdots & u_i(N) \\ u_j(1) & u_j(2) & \cdots & u_j(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_l(1) & u_l(2) & \cdots & u_l(N) \end{array} \right|$$

donde la diagonal principal es precisamente la función de onda de Boltzmann mientras que las otras son las posibles permutaciones. Los signos positivos y negativos aparecen automáticamente con el cálculo del determinante. Además, si dos partículas llegan a tener el mismo estado, se tendría dos filas iguales, lo que hace que el determinante sea cero. Dicho estado físico para el sistema es imposible de realizar. Entonces si un sistema de partículas tiene una función de onda antisimétrica, se tiene un resultado equivalente al principio de exclusión de Pauli para los electrones. Este comportamiento es propio de partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac o simplemente de Fermi, a las cuales se les llama fermiones. El peso estadístico de éstas que llamaremos $W_{FD}\{n_i\}$ es de la forma:

$$W_{FD}\{n_i\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_i n_i^2 = N \\ 0 & \text{si } \sum_i n_i^2 > N \end{cases}$$

(Pathria, 2001)

Este problema, sin embargo, no aparece en la función de onda simétrica, no hay restricciones en los n_i . La estadística que gobierna este comportamiento es el de Bose-Einstein, o simplemente de Bose. A estas partículas se les llama bosones. Su función de peso, $W_{BE}\{n_i\}$, es,

$$W_{BE}\{n_i\} = 1$$

(Pathria, 2001)

No está de más mencionar que existe una conexión entre la estadística que tienen las partículas, i.e., su comportamiento colectivo con su espín. Por ejemplo, un bosón tiene como espín un entero y un fermión un múltiplo impar de un medio. Se puede mencionar en la categoría de los primeros a los fotones, los fonones, los π -mesones, los átomos de helio 4, entre otros, y de la segunda categoría a los electrones, los nucleones, los μ -mesones, los neutrinos o los átomos de helio 3 entre otros. (Pathria, 2001)