

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad Ciencias y Humanidades
Departamento de Matemática



Modelos dinámicos en tiempo discreto para
análisis de portafolios de inversión

Trabajo de graduación presentado por
María Emilia Calderón Font
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática

Guatemala
2015

Modelos dinámicos en tiempo discreto para
análisis de portafolios de inversión

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemática



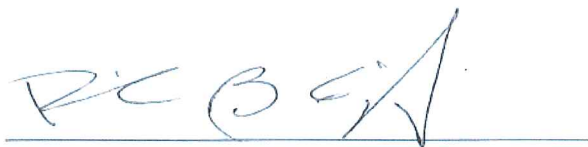
Modelos dinámicos en tiempo discreto para
análisis de portafolios de inversión

Trabajo de graduación presentado por
María Emilia Calderón Font
para optar al grado académico de Licenciada en Matemática

Guatemala

2015

Vo.Bo.:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'R. González de Paz', written over a horizontal line.

Dr. Raúl González de Paz


Tribunal Examinador:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'R. González de Paz', written over a horizontal line.

Dr. Raúl González de Paz

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Adrián Licht', written over a horizontal line.

Lic. Adrián Licht

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Dorval Carías', written over a horizontal line.

Lic. Dorval Carías

Fecha de aprobación: Guatemala, 7 de agosto 2015.

A Dios por la vida, familia y oportunidades que me brindó.
A mis padres, Federico Calderón y Emilia Font de Calderón, el cariño, esfuerzo, apoyo y
dedicación.
A mis hermanos, Lisette, Federico y Natalia, por su paciencia, alegría y compañía.
A mis abuelas, Lisette Montenegro y Katherine Mezguer, por ser siempre un gran
ejemplo para mí.
A mi asesor, Raúl González de Paz y a Adrián Licht, por el apoyo y colaboración que me
brindaron durante el desarrollo del presente trabajo.
A mis maestros, compañeros y amigos por haber compartido de su conocimiento y
tiempo conmigo.

ÍNDICE

Lista de cuadros	IV
Lista de figuras	V
Notación	VI
RESUMEN	VII
1. INTRODUCCIÓN	1
2. REVISIÓN DE TEMAS Y CONCEPTOS DE MATEMÁTICA FINANCIERA APLICABLES EN PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN	2
2.1. Probabilidades	2
2.2. Procesos estocásticos	4
3. ENFOQUE DE UTILIDAD ESPERADA	6
3.1. Utilidad esperada	7
3.2. Aversión al riesgo	8
3.2.1. Medida de Arrow-Pratt	10
4. MODELOS DE MEDIA-VARIANZA PARA UN PERÍODO (MODELO DE MARKOWITZ)	11
4.1. Descripción del modelo	11
4.2. Primera formulación del problema	13
4.3. Segunda formulación del problema	14
4.4. Otros planteamientos y restricciones	18
5. MODELOS DE MEDIA-VARIANZA PARA MÚLTIPLES PERÍODOS	20
5.1. Caso para activos riesgosos	23
5.2. Caso con un activo libre de riesgo	27
6. APLICACIÓN	35
6.1. Información histórica	35
6.2. Problema clásico	37
6.3. Definición del problema multiperiodico	38
6.4. Resultados	40
6.5. Discusión de resultados	43
7. RELACIÓN CON OTROS ENFOQUES DEL ANÁLISIS DE PORTAFOLIOS	45
7.1. Enfoque geométrico del análisis de media-varianza	45
7.2. Modelos de media-varianza y las cadenas de Markov	45
8. CONCLUSIONES	46
9. BIBLIOGRAFÍA	48
10. APÉNDICE	49

LISTA DE CUADROS

6.1. Retorno histórico y desviación estándar histórica de cada activo	37
6.2. Matriz de covarianza de la raíz	37
6.3. Matriz de covarianza de retornos a dos años	37
6.4. Solución problema clásico	38
6.5. Matrices de covarianza para nodos del 1 al 4	39
6.6. Solución al problema multiperódico	40
6.7. Multiplicadores de Lagrange	42
10.1. Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo	50
10.2. Retornos al final del período	58

LISTA DE FIGURAS

3.1. Aversión al riesgo	9
4.1. Frontera eficiente	16
5.1. Árbol de escenarios	22
6.1. Precio de activos	35
6.2. Retorno logarítmico semanal de IEV	36
6.3. Retorno logarítmico semanal de QQQ	36
6.4. Retorno logarítmico semanal de SPY	36
6.5. Frontera eficiente de aplicación clásica	38
6.6. Árbol de escenarios para portafolio de la aplicación	39

NOTACIÓN

Abreviaciones

min	mínimo
max	máximo
<i>i. e.</i>	es decir

Símbolos

\mathbb{R}	conjunto de los números reales
\mathbb{R}_+	conjunto de los números reales positivos
u'	primera derivada
u^n	n-ésima derivada
A^*	transpuesta de A
\mathbf{e}	vector de unos
$E(X)$	valor esperado de X
$Var(X)$	varianza de X
$Cov(X, Y)$	covarianza de X, Y
n	número de activos del portafolio
\mathbf{w}	vector de pesos del portafolio
\mathbf{R}	vector de retorno
$\bar{\mathbf{R}}$	vector de retorno esperado
$\hat{\mathbf{R}}$	retorno esperado- ponderado
\mathbf{V}	matriz de covarianza
R_f	retorno libre de riesgo
i	nodo padre
j	nodo actual
σ^2	riesgo
ρ	retorno del portafolio
Ψ	riesgo

RESUMEN

Los modelos de media-varianza sirvieron como la primera herramienta cuantitativa y matemática para el análisis de portafolios de inversión, relacionando al riesgo con el retorno. En el presente trabajo de investigación se describen los modelos para un período, que sirvieron como fundamento para el desarrollo del análisis multiperiodico. El análisis multiperiodico presentado en este trabajo se basa en la estructura de árboles de escenarios y aporta a la teoría modelos dinámicos en tiempo discreto. Se presentan casos distintos para la selección adecuada de estrategias de inversión con el objetivo de minimizar el riesgo y alcanzar un retorno fijado. En particular se analizá el trabajo de Karl Frauendorfer, Heiko Seide y Mark Steinbach.

1. INTRODUCCIÓN

En 1952 Markowitz planteó un problema de optimización cuadrática por medio del cual se dio el primer tratamiento sistemático al dilema retorno versus riesgo y aportó a la teoría un modelo estático. Con esto se fundó la teoría moderna del portafolio que fue ampliada por Merton en 1962, quien contribuyó con el desarrollo de la optimización dinámica de portafolios. Además se relacionó con criterios de selección basados en la aversión al riesgo (funciones de utilidad) y con mercados imperfectos (inclusión de factores como costos sobre las transacciones). Para resolver el problema planteado por Markowitz de una manera más apegada a la realidad, sin llegar a considerar el caso continuo, se ha generalizado la resolución (a un horizonte multiperiodico) por medio de la implementación de programación discreta y estocástica. La solución fue desarrollada por Frauendorfer y Seide, emplea un criterio de selección de portafolios eficientes en un contexto multiperiodico, y fue presentada en una publicación (en SIAM Review) de Mark Steinbach denominada “*Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*”. (Steinbach, 2001)

Este trabajo tiene como objetivo fundamental analizar la publicación de Steinbach, presentar resultados estructurados y obtenidos a finales de los noventa y principios del siglo XXI (*i.e.* recientes) acerca de la generalización del modelo planteado por Markowitz a un esquema dinámico en tiempo discreto. Consta de varias secciones, en las primeras dos se introduce al lector a temas y conceptos de matemática financiera aplicables en portafolios de inversión que forman parte del fundamento teórico de la optimización de portafolios y en el concepto de utilidad esperada asociado al contexto de la selección racional de las distintas alternativas de inversión. Con esto se crea un marco adecuado para introducir al lector en los modelos de media-varianza para un período y para la generalización del caso para múltiples períodos. Se analizan dos casos para los modelos multiperiodicos, tanto para los portafolios compuestos por activos riesgosos como para aquellos que contienen un activo libre de riesgo. Al concluir con el desarrollo central del trabajo, se presenta una aplicación para un portafolio compuesto por tres ETFs (Extended Traded Funds) en donde se desea alcanzar un retorno bianual del 13.5% y se presentan la relación de los modelos desarrollados con otros enfoques del análisis de portafolios. En general se obtuvieron los resultados esperados, teóricamente los modelos multiperiodicos son similares a los estáticos mientras que en la práctica se obtienen resultados distintos.

2. REVISIÓN DE TEMAS Y CONCEPTOS DE MATEMÁTICA FINANCIERA APLICABLES EN PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

Como se mencionó en la introducción el propósito de este trabajo es presentar resultados recientes sobre modelos dinámicos en tiempo discreto para el análisis de portafolios de inversión. Para el estudio de los mismos es indispensable que el lector se encuentre familiarizado con algunas definiciones, términos y conceptos relacionados con la teoría de portafolios. Esta sección tiene como objetivo presentar algunas definiciones de la teoría de probabilidades y otras relacionadas con procesos estocásticos.

2.1. Probabilidades

Definición 2.1. Considere un experimento y sea Ω , denominado *espacio muestral*, el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

Definición 2.2. Una *variable aleatoria* es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \ni X(\omega_i) = x_i, \forall \omega_i \in \Omega$ y $x_i \in \mathbb{R}$. Si la imagen de X es finita o infinita contable, la variable aleatoria se llama *discreta*.

Definición 2.3. Sean X, Y variables aleatorias discretas,

- El *valor esperado de X* está definido por

$$E(X) = \sum_{j=1}^n x(\omega_j)P(\omega_j).$$

- La *varianza de X* está definida por

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

- La *covarianza de X, Y* está definida por

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definición 2.4. Sean X, Y variables aleatorias discretas, el *valor esperado condicional de X dado $Y=y$* está definido por

$$E(X|Y = y) = \sum_x xP(X = x|Y = y).$$

Algunas propiedades:

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias discretas, y sea X una combinación lineal de las mismas

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$$

- X también es variable aleatoria.
- El valor esperado es lineal, *i.e.*

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i).$$

- La varianza no es lineal,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{i>1}^n \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}.$$

Definición 2.5. Una familia \mathcal{A} de subconjuntos de Ω , se denomina σ -*algebra* si cumple con:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $X \in \mathcal{A} \rightarrow X^c \in \mathcal{A}$
- $X_n \in \mathcal{A} \rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{A}$

Definición 2.6. Sea Ω un espacio muestral y \mathcal{A} σ -algebra. $P: \Omega \rightarrow [0, 1]$ es denominada *función de probabilidad* si cumple con lo siguiente:

- $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $\forall n$ A_n son disjuntos a pares (ie $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Definición 2.7. Una terna (Ω, \mathcal{A}, P) conformada por Ω un espacio muestral, \mathcal{A} una familia de eventos y P función de probabilidad se llama *espacio de probabilidad*.

2.2. Procesos estocásticos

Definición 2.8. Un *proceso estocástico* $X := (X_t)_{t \in T}$ es una familia de variables aleatorias X_t sobre un espacio de probabilidad común (Ω, \mathbb{F}, P) .

- Si $T \subseteq \mathbb{N}_0$, el proceso X se dice es *discreto*.
- Si T es intervalo en \mathbb{R} , el proceso X se dice es *continuo*.

Definición 2.9. Una *estrategia de inversión* o *de portafolio* es un proceso estocástico $\{h_t = (x_t, y_t) \ni t = 1, 2, \dots, T\}$ tal que h_t es una función de P_0, P_1, \dots, P_{t-1} los precios del portafolio.

Definición 2.10. Una familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t $t \in \mathbb{R}_+$ se llama *filtración* si $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$, $t \in \mathbb{R}_+$ y $t_1 \leq t_2$ implican $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.

Definición 2.11. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *medible* si $\forall a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) > a\}$.

Definición 2.12. Sea X un proceso estocástico

- Se dice que es un *proceso medible* si $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible.
- Se dice que es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ si X_t es \mathcal{F}_t medible para $t \in \mathbb{R}_+$.

Definición 2.13. Dado un espacio muestral filtrado en un proceso estocástico adaptado $X = \{X_t : t \in 1, \dots, T\}$. Se dice X es una *martingala* si:

$$E(X_{t+s} | \mathcal{F}_t) = X_t, \forall s, t \geq 0.$$

Teorema 2.14. Dado un proceso estocástico adaptado $X = \{X_t : t \in 1, \dots, T\}$, entonces los siguientes enunciados son equivalente:

1. X es una *martingala*.
2. $X_t = E(x_t | \mathcal{F}_t)$, $\forall t = 0, 1, \dots, T - 1$.
3. $E(\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 0$, $\forall t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Definición 2.15. Un proceso estocástico W es de *Wiener* si:

- $W_0 = 0$.
- El proceso W tiene incrementos independientes *i.e.* si $r < s \leq t < u$ entonces $W_u - W_t$ y $W_s - W_r$ son variables aleatorias independientes.

- Para $s < t$ la variable aleatoria $W_t - W_s$ tiene distribución Gaussiana $N(0, \sqrt{t-s})$
- W tiene trayectorias continuas.

Definición 2.16. Se dice un proceso estocástico X es *de difusión* si su dinámica local puede ser aproximada por una ecuación diferencial estocástica del siguiente tipo:

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)W_t$$

en donde W_t es un proceso de Wiener, que representa al ruido que es independiente de lo que ocurrió antes del tiempo t , mientras que μ y σ son funciones determinísticas.

3. ENFOQUE DE UTILIDAD ESPERADA

En un contexto incierto las decisiones de consumo y estrategias de inversión son influenciadas por varios factores, entre ellos las expectativas del inversionista. Una teoría distinta para las estrategias de inversión es aquella que permite realizar un análisis partiendo de una hipótesis de la utilidad esperada y por medio del cual se genera una representación para dicha utilidad (bajo circunstancias determinadas). Con el fin de incorporar los aspectos relacionados de la teoría de utilidad al análisis de media-varianza se presenta la axiomática desarrollada para el análisis de la elección racional, se introduce al lector en las relaciones de preferencia y en conceptos asociados a la aversión al riesgo.

Para el desarrollo de la teoría de utilidad, primero es necesario definir las reglas del comportamiento racional. Vonm Neumann y Morgenstern formularon un conjunto de axiomas para la caracterización de la elección racional durante situaciones inciertas en 1947. Con estos principios los inversionistas pueden comparar las distintas alternativas de inversión y establecer un orden de preferencia que va ligado al objetivo de tener más dinero. (Prigent, 2007)

Sea Ω el conjunto de los posibles resultados (ω_i), supóngase este conjunto es finito y sea $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ la probabilidad de ocurrencia de Ω .

Definición 3.1. Una lotería L es un vector de parejas ordenadas (ω_i, p_i) , con $\omega_i \in \Omega$. El conjunto de todas las loterías se denomina \mathcal{L} .

Definición 3.2. Un inversionista es *racional* si su relación de preferencia \succeq cumple con los siguientes axiomas:

- $\forall L^a, L^b \in \mathcal{L}, L^a \succeq L^b \circ L^b \succeq L^a$.

La relación de indiferencia asociada \sim es tal $\forall L^a, L^b \in \mathcal{L} \ni L^a \sim L^b \Rightarrow L^a \succeq L^b$ y $L^b \succeq L^a$.

- $\forall L \in \mathcal{L}, L \succeq L$.

- $\forall L^a, L^b, L^c \in \mathcal{L} \ni L^a \succeq L^b$ y $L^b \succeq L^c \Rightarrow L^a \succeq L^c$.

- $\forall L^a, L^b, L^c \in \mathcal{L},$ si $L^a \succeq L^b \succeq L^c$ entonces existe $\alpha \in [0, 1] \ni L^b \sim \alpha L^a + (-\alpha)L^c$.

- $\forall L^a, L^b, L^c \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in [0, 1] L^a \succeq L^b \leftrightarrow \alpha L^a + (1 - \alpha)L^c \succeq L^a + (1 - \alpha)L^c$

Es decir la relación de preferencia debe ser completa, reflexiva, transitiva, continua e independiente. (Prigent, 2007)

3.1. Utilidad esperada

Teorema 3.3. *Asumasé la relación de preferencia en el conjunto \mathcal{L} de loterías, denotada por \succeq , satisface los axiomas de continuidad e independencia. Entonces la relación \succeq puede ser representada por un funcional lineal en las probabilidades: existe una función $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es el espacio de los posibles resultados, tal que para cuales quiera dos loterías $L^a = \{(p_1^a, \dots, p_n^a)\}$ y $L^b = \{(p_1^b, \dots, p_n^b)\}$, se tiene:*

$$L^a \succeq L^b \leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i^a u(\omega_i) \succeq \sum_{i=1}^n p_i^b u(\omega_i)$$

Demostración. Para ver la prueba refiérase a (Prigent, 2007) teorema 1.1. □

El teorema anterior es una equivalencia, por lo que se tiene que la utilidad esperada implica los axiomas de preferencia. Estos resultados pueden extenderse a espacios continuos *i.e.* para una medida de probabilidad \mathbb{P} en Ω se puede probar

$$U(\mathbb{P}) = \int_{\Omega} u(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

La función de utilidad de un individuo puede ser expandida por su serie de Taylor, alrededor del capital, x , esperado al final del período

$$u(x) = u(E(x)) + u'(E(x))(x - E(x)) + \frac{1}{2}u''(E(x))(x - E(x))^2 + R_3.$$

En donde $u^{(n)}$ es la n-ésima derivada de u y que la función de utilidad es continua

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E(x))(x - E(x))^n.$$

Asumiendo que la serie converge y que el valor esperado y la sumatoria son intercambiables se tiene que:

$$E(u(x)) = u'(E(x)) + \frac{1}{2}u''(E(x))\sigma^2(x) + E(R_3)$$

y si m^n denota el n-ésimo momento del capital esperado, se tiene:

$$E(R_3) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E(x)) m^n(x).$$

La utilidad esperada no se puede definir únicamente por el valor esperado y la varianza del capital ya que existe un término residual que depende de momentos de orden superior.

Para distribuciones arbitrarias, el modelo de media-varianza puede estar motivado por asumir una utilidad cuadrática. En ese caso se tiene $E(R_3) = 0$ y se tiene:

$$E(u(x)) = E(x) - \frac{b}{2} E(x^2) = E(x) - \frac{b}{2} (E(x))^2 + \sigma^2(x).$$

Si los porcentajes de retorno esperado y varianza son finitos, la utilidad cuadrática es suficiente para la elección de activos de inversión por medio de términos o relaciones de preferencia, definidos de acuerdo a la media y varianza del retorno.

Cuando en el análisis de media-varianza, se asume de manera implícita una función u tal que:

$$u(R_\pi) = f(E(R_\pi), \sigma^2(R_\pi))$$

dicha función se conoce como *función de utilidad de media-varianza* y cumple con las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial f}{\partial E} > 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} < 0.$$

3.2. Aversión al riesgo

Cuando a los inversionistas se les presentan diferentes alternativas con retornos similares, las decisiones que ellos toman se ven afectadas por la actitud o aversión hacia el riesgo, a continuación se introducirá la ilustración dada por Friedman y Savage. (Prigent, 2007)

Sea X una variable aleatoria con dos posibles valores x_1, x_2 , cuyas posibilidades son $p \in [0, 1]$, $1 - p$ respectivamente y u es la función de utilidad. Considere las loterías L^a, L^b en donde la probabilidad se reciba $E(X)$ de L^a es 1, mientras que de L^b se recibirá x_1, x_2 con sus respectivas probabilidades.

Demostración. Consideresé el caso presentado anteriormente, en donde la función de utilidad es convexa. Por definición de concavidad se tiene que:

$\forall \lambda \in [0, 1], \forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda u(a) + (1 - \lambda)u(b) \leq u(\lambda a + (1 - \lambda)b)$. Pero $E(X) = \lambda a + (1 - \lambda)b$ y $E(u(X)) = \lambda u(a) + (1 - \lambda)u(b)$; entonces $E(u(X)) \leq u(E(X))$. Como por la definición se tiene $u(C(X)) = E(u(X))$ entonces como u es creciente y $u(C(X)) \leq u(E(X))$, $C(X) \leq E(X)$ que corresponde a un averso al riesgo. \square

3.2.1. Medida de Arrow-Pratt Para medir el grado de aversión al riesgo se presentarán algunos de los resultados de Arrow y de Pratt, basados en que el grado de aversión no puede ser definido por la concavidad debido a que las funciones de utilidad son transformaciones lineales. (Prigent, 2007)

Definición 3.7. Sean U y V dos funciones de utilidad, en donde u es mas averso al riesgo y las primas satisfacen: $\pi_u(X) \geq \pi_v(X), \forall X \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.8. Sean u y v funciones de utilidad continuas, monótona-crecientes y diferenciables de segundo grado. Las siguientes propiedades son equivalentes y son caracterísitcas de mayor aversión al riesgo.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{u''(x)}{u'(x)} > -\frac{v''(x)}{v'(x)}$.
2. Existe una función concava tal que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \Phi[v(x)]$.
3. Para toda variable aleatoria $X \in \mathbb{R}, \pi_u(X) \geq \pi_v(X)$.

Definición 3.9. El término $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ se conoce como *medida absoluta de aversión al riesgo de Arrow-Pratt* (ARA-por sus siglas en inglés).

La razón $R(x) = xA(x)$ se conoce como *medida relativa de aversión al riesgo de Arrow-Pratt* (RRA-por sus siglas en inglés).

4. MODELOS DE MEDIA-VARIANZA PARA UN PERÍODO (MODELO DE MARKOWITZ)

Luego de haber introducido al lector en los temas y conceptos de matemática financiera aplicables en portafolios de inversión y de haberlo situado en el contexto básico del análisis de la utilidad esperada, se presenta el primer tratamiento sistemático que se le dio al dilema retorno versus riesgo. Tratamiento con el que se inició el desarrollo de la teoría moderna del portafolio y del cual se derivaron los modelos multiperiódicos de media-varianza que se analizan en la siguiente sección.

El punto inicial con el que la Matemática tomó un rol importante en la optimización de portafolios, se debe al trabajo de Harry Markowitz denominado “*Portfolio Selection*” publicado en el Journal of Finance en 1952. Fue el quien utilizó criterios de media-varianza para juzgar las estrategias de inversión, aportando a la teoría un modelo estático. Modelo que permite únicamente intercambio de acciones al inicio (tiempo $t = 0$) por lo que no hay posibles cambios en los precios (a lo largo del periodo de inversión) y el riesgo se modela únicamente a través de la varianza del retorno esperado. (Huang, C. y R. Litzenberger., 1988) Para el desarrollo y presentación del enfoque de media-varianza para un período en esta sección se describe el modelo, se presentan dos formulaciones distintas del problema de optimización cuadrática planteados por Markowitz y por último se mencionan otros planteamientos y restricciones asociados a este tipo de modelos.

4.1. Descripción del modelo

Considérese un mercado con n activos distintos, en donde los precios $P_i(T)$ en tiempo $t = T$ serán modelados como variables aleatorias no negativas, en el espacio de probabilidad (Ω, F, P) .

El retorno del activo i es definido como,

$$R_i(T) := \frac{P_i(T)}{P_i(0)}.$$

Asúmase que la media, varianza y covarianza del mismo son finitas,

$$E[R_i(T)] = \mu_i$$

$$Cov(R_i(T), R_j(T)) = \sigma_{i,j}.$$

Además se asume que el retorno de un activo (variable aleatoria) es independiente del retorno de los otros activos, es decir que no se puede expresar como combinación del retorno del resto de activos.

La notación para $i = 1, \dots, n$:

$\mathbf{w}=(w_1, \dots, w_n)$ es el vector de pesos (posiciones) del portafolio

$\mathbf{R}=(R_1, \dots, R_n)$ es el vector de retorno

$\bar{\mathbf{R}}=(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n)$ es el vector de retorno esperado

$\mathbf{e}=(1, \dots, 1)$ es un vector cuyas componentes son 1

$\mathbf{V}=[\sigma_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ matriz de covarianza de los retornos, es no singular por lo que decimos es invertible. Por ser una matriz simétrica (ya que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) y como las varianzas de los activos son estrictamente positivas, \mathbf{V} es definida positiva.

Se denota como A^* a la matriz transpuesta de A .

Definición 4.1. Un inversionista con capital inicial $x_0 > 0$, posee una posición $w_i \geq 0 \forall$ activo i cuyo precio inicial es $P_i(0)$

$$\sum_{i=1}^d w_i P_i(0) = x_0.$$

Entonces el *vector de portafolio* $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ esta definido como,

$$\pi_i := \frac{w_i P_i(0)}{x_0}, \forall i.$$

Definición 4.2. El *retorno esperado del portafolio* de cualquier portafolio π con pesos w , está dado por:

$$E[R_\pi] = \sum_{i=1}^n w_i E[R_i] = \mathbf{w} \bar{\mathbf{R}}^*, \quad (4.1)$$

y la *varianza de π* está dada por:

$$\sigma^2(R_\pi) = \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n w_i w_j \sigma_{ij} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2. \quad (4.2)$$

Se asume que cada activo es perfectamente divisible, es decir que el inversor puede tener $w_i \in \mathbb{R}$ número de acciones (posición) del activo $i, i = 1, \dots, d$. Una posición negativa ($w_i < 0$ para algún i) se conoce como una *posición corta*.

Nótese que

$$\frac{\sum_{i=1}^d w_i P_i(0)}{x_0} = 1,$$

además el capital final es denotado por x_T ,

$$x_T = \sum_{i=1}^d w_i P_i(T).$$

Se tiene que

$$R_\pi = \sum_{i=1}^d \pi_i R_i(T) = \frac{x_T}{x_0}.$$

Como medida de riesgo, se eligió la varianza del portafolio. Con esto en mente Markowitz buscó un balance entre el riesgo y el retorno del portafolio; consideró el problema de establecer un límite inferior para el retorno del portafolio, para luego poder elegir de acuerdo a este la mínima varianza. Como alternativa consideró también el problema de determinar un límite superior para la varianza, y así determinar el retorno máximo posible.

4.2. Primera formulación del problema

Este problema consiste en maximizar la media del retorno del portafolio, dado un límite superior para la varianza ($c_1 \in \mathbb{R}$).

$$\max_{\mathbf{R}} \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} \tag{4.3}$$

$$\text{sujeto a } \pi_i \geq 0 \forall i, \mathbf{w}^* \mathbf{e} = 1, \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} \leq c_1.$$

Esta primera formulación corresponde a un problema de optimización lineal con una restricción cuadrática adicional, en donde básicamente se están considerando todos los portafolios $\pi \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen las condiciones para que estén dentro de la región factible y deseada. No existen algoritmos estándares para la resolución del mismo.

Es relevante mencionar que esta versión no es dual de la siguiente, pero si están relacionadas de acuerdo a un teorema que puede ser probado como aplicación de teoría de optimización no lineal.

4.3. Segunda formulación del problema

Este segundo problema consiste en minimizar la varianza del retorno del portafolio dado un límite inferior para el retorno esperado.

Caso para activos riesgosos:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (4.4)$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} = E[R_\pi], \mathbf{w}^* \mathbf{e} = 1.$$

La primera restricción corresponde al nivel fijo de retorno esperado; mientras que la segunda, sirve únicamente para que el vector \mathbf{w} sea un vector de pesos, en el que se permiten posiciones cortas o pesos negativos. De nuevo se consideran los portafolios que cumplen con las restricciones, dentro de estos se encuentra el que tiene el retorno cuya varianza es la menor. Para esta segunda formulación si existe una solución eficiente.

Para la solución del Problema (4.4), considere el siguiente funcional Lagrangiano:

$$L(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (E[R_\pi] - \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}}) + \delta (1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e}) \quad (4.5)$$

en donde λ y δ son los multiplicadores de Lagrange (parámetros constantes). Además se asume que la matriz \mathbf{V} es invertible.

Para la resolución del Problema (4.4), se debe resolver:

$$\min_{\{\mathbf{w}, \lambda, \delta\}} L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)$$

En donde las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda \bar{\mathbf{R}} - \delta \mathbf{e} = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \lambda} &= E[R_\pi] - \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \delta} &= 1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

Como \mathbf{V} es definida positiva, estas condiciones son necesarias y suficientes para determinar la solución única de siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{e}^* \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{R}}, \\ B &= \bar{\mathbf{R}}^* \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{R}}, \\ C &= \mathbf{e}^* \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e}, \\ D &= BC - A^2. \end{aligned}$$

Como la inversa de una matriz definida positiva es definida positiva, entonces se tiene que $B > 0$ y $C > 0$. Además, nótese que $D > 0$, debido a:

$$(\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{R}} - B\mathbf{e})^* \mathbf{V}^{-1} (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{R}} - B\mathbf{e}) = B(BC - A^2)$$

ver proposición (10.1) en el apéndice.

Los multiplicadores de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{D} (CE[R_\pi] - A), \\ \delta &= \frac{1}{D} (B - AE[R_\pi]). \end{aligned}$$

Los pesos óptimos para el portafolio en el nivel $E[R_\pi]$ están dados por:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{D} (B\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - A\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}) + \frac{E[R_\pi]}{D} (C\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}} - A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}). \quad (4.6)$$

Si se introducen \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 , tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{D} (B\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - A\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}), \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{1}{D} (C\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}} - A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}). \end{aligned}$$

El vector de pesos se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + E[R_\pi]\mathbf{w}_2.$$

Nótese que los valores introducidos no dependen del retorno esperado, sino de los parámetros del mercado.

Proposición 4.3. *Dado un retorno esperado $E[R_\pi]$, el portafolio óptimo existe y es único. Además se puede descomponer como una combinación de dos portafolios, tales que:*

$$\mathbf{w} = (1 - E[R_\pi])\mathbf{w}_1 + E[R_\pi](\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

Demostración. Considere dos portafolios óptimos g y h con pesos \mathbf{w}_g y \mathbf{w}_h respectivamente. Sea q un portafolio óptimo cualquiera, deseamos probar $\mathbf{w}_q = \alpha\mathbf{w}_g + (1 - \alpha)\mathbf{w}_h$. Como $E[R_g] \neq E[R_h]$, existe una solución única para

$$E[R_q] = \alpha E[R_g] + (1 - \alpha)E[R_h].$$

El portafolio π con $\mathbf{w} = (\alpha, (1 - \alpha))$ invertidos en g y h , cumple con:

$$\mathbf{w} = \alpha(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 E[R_g]) + (1 - \alpha)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 E[R_h]) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 E[R_q].$$

Entonces se tiene $\mathbf{w} = \mathbf{w}_q$ □

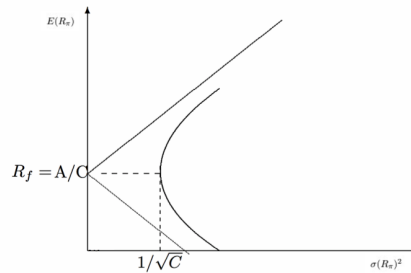
Observación 4.4. El portafolio \mathbf{w}_1 está asociado a un retorno esperado de 1, mientras que el portafolio $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ a un retorno de 0. Esta relación prueba el teorema de separación de fondos, también conocido como teorema de dos fondos.

Observación 4.5. De la relación (4.6), la varianza mínima para un nivel de retorno esperado ($E[R_\pi]$) fijo, se deriva la siguiente relación:

$$\frac{\sigma^2(R_\pi)}{1/C} - \frac{(E[R_\pi] - A/C)^2}{D/C^2} = 1.$$

Esta relación puede interpretarse geométricamente como una hipérbola en el plano cuyos ejes son $(\sigma(R_\pi), E[R_\pi])$.

FIGURA 4.1: Frontera eficiente



- Las asíntotas son:

$$E[R_p] = \frac{A}{C} \pm \frac{D/C^2}{1/C} \sigma(R_\pi).$$

- El foco de la hipérbola corresponde al único punto (portafolio) de mínima varianza $(\sqrt{1/C}, A/C)$. Dicho portafolio se conoce como *portafolio de mínima varianza* (mvp- por sus siglas en inglés).
- El conjunto de portafolios representado por la hipérbola, que superan el valor esperado del mvp, se denomina *frontera eficiente*.

Caso con un activo libre de riesgo:

De forma análoga, en este caso se denota \mathbf{w} al vector de pesos de los activos riesgosos y \mathbf{R} al vector de retorno. El retorno para el activo libre de riesgo se denotará R_f y el porcentaje invertido en el es w_0 .

La restricción de peso es

$$\mathbf{w}^* \mathbf{e} + w_0 = 1 \longleftrightarrow w_0 = 1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e}.$$

Por lo que el problema a optimizar es:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} \tag{4.7}$$

$$\text{sueto a } \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} + (1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e}) R_f = E[R_\pi].$$

El funcional Lagrangiano asociado al Problema(4.7) es:

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (E[R_\pi] - \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} - (1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e}) R_f). \tag{4.8}$$

Se debe resolver:

$$\min_{\{\mathbf{w}, \lambda\}} L(\mathbf{w}, \lambda).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda (\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{e} R_f) = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \lambda} &= E[R_\pi] - \mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} - (1 - \mathbf{w}^* \mathbf{e}) R_f = 0. \end{aligned}$$

Entonces vector de pesos óptimos para un determinado $E[R_\pi]$ es:

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}^{-1}(\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{e}R_f) \frac{E[R_\pi] - R_f}{(\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{e}R_f)^* \mathbf{V}^{-1}(\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{e}R_f)}. \quad (4.9)$$

La varianza está dada por:

$$\sigma^2(R_\pi) = \mathbf{w}^* \mathbf{V} \mathbf{w} = \frac{(E[R_\pi] - R_f)^2}{J}$$

donde $J = B - 2AR_f + CR_f^2$ es no-negativo. Por lo que la desviación estándar es:

$$\sigma(R_\pi) = \begin{cases} +\frac{(E[R_\pi]-R_f)}{\sqrt{J}} & \text{si } R_f \leq E[R_\pi] \\ -\frac{(E[R_\pi]-R_f)}{\sqrt{J}} & \text{si } R_f > E[R_\pi] \end{cases}$$

Observación 4.6. Según el teorema de separación de fondos, sabemos que cualquier portafolio óptimo esta conformado por la combinación de un activo libre de riesgo y el portafolio tangente a la frontera eficiente.

La frontera eficiente con el activo libre de riesgo se descompone en dos partes:

- El segmento de recta entre el activo libre de riesgo y el portafolio tangente. Los portafolios que se encuentran sobre este segmento corresponden a inversionistas aversos al riesgo. El peso w_0 del activo riesgoso es positivo.
- La línea desde el punto tangente y el resto del conjunto de portafolios eficientes; en este caso la posición del activo riesgoso es corta. Esta parte, tiene los portafolios para inversionistas que desean correr mayor riesgo ya que buscan obtener un mayor retorno.

4.4. Otros planteamientos y restricciones

Restricciones adicionales pueden cambiar el planteamiento del problema, entre ellas se puede mencionar la venta restringida o prohibida de activos que no se poseen (*i.e.* restricción sobre ventas en corto), la inclusión de costos de transacción. Cuando estas restricciones son lineales, existen soluciones analíticas disponibles y el problema puede resolverse de manera similar al anterior, utilizando funcionales Lagrangianos. De lo contrario, se debe aproximar la solución y esto se realiza empleando métodos numéricos.

La mayoría de restricciones permiten resolver el siguiente problema con programación convexa:

$$\min_{\mathbf{w}} \Phi(\mathbf{w}) \tag{4.10}$$

sujeto a $w \in \mathbf{H}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{K}$.

Donde \mathbf{H} es un hiperplano, \mathbf{K} es un conjunto convexo y Φ es una función convexa. Usualmente, \mathbf{H} se determina a partir de una matriz \mathbf{A} , un vector \mathbf{v} tal que:

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{w} | \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{v}\}.$$

Por otro lado, \mathbf{K} es determinado por un conjunto de desigualdades de funciones convexas:

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{w} | \Psi \text{ convexa y } \Psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v}\}.$$

La optimización de problemas convexos tiene solución numérica, se han desarrollado algoritmos que pueden resolverlos; sin embargo, el número de activos puede inducir dificultades computacionales.

5. MODELOS DE MEDIA-VARIANZA PARA MÚLTIPLES PERÍODOS

Después de analizar el modelo de Markowitz, se presenta la generalización realizada inicialmente por Frauendorfer y Seide, que luego fue desarrollada por Steinbach en el artículo denominado “*Markowitz revisited: Single-Period and Multi-Period Mean-Variance Models*”. En dicho artículo se analizan los modelos dinámicos en tiempo discreto para análisis de portafolios de inversión, que son una generalización del desarrollo de clásico. En esta sección se describe el modelo, se introduce a la estructura de árboles de escenarios utilizada para modelar el retorno, se presentan dos casos distintos uno asociado a un portafolio compuesto por activos riesgosos y otro en el que se incluye un activo libre de riesgo. Con esta presentación se da por concluido el desarrollo teórico del trabajo y se inicia con el desarrollo práctico en el cual se incluye una aplicación (en la siguiente sección).

Dentro del análisis de media-varianza, en los modelos multiperiódicos se considera un horizonte (discreto) de $T + 1$ períodos que no tienen que tener la misma magnitud. La distribución del portafolio se determina en el tiempo $t = 0$, luego es redefinida para $t = 1, 2, \dots, T$ antes de que el inversionista obtenga ganancia alguna. Las decisiones en tiempo t , se realizan sin conocer los siguientes retornos R_{t+1}, \dots, R_T pero tomando en cuenta los retornos anteriores, se dice se tiene una política *no anticipada*.

Se supone que la distribución de retornos está dada por un árbol de escenarios, en el que cada retorno tiene un número de realizaciones finitas con probabilidad $p_j > 0 \forall j \in L_j$. L_j forma un nivel dentro del árbol. El conjunto de todos los nodos es $N := \cup_{t=0}^T L_t$ y el conjunto de hojas que representant un escenario es $L := L_T$. Se denota a $0 \in L_0$ como la raíz, $j \in L_j$ el nodo actual, $i \in L_{t-1}$ el nodo padre y como $S(j) \subseteq L_{t+1}$ los sucesores o nodos hijos. El retorno final está determinado por la distribución continua en cada hoja. De nuevo, el retorno y la posición de cada activo son variables aleatorias en un espacio de probabilidad discreto, continuo en la hoja, que posee una filtración generada por el árbol.

El valor esperado condicional del retorno se define como,

$$\bar{\mathbf{R}}_T := E[\mathbf{R}_{T+1}|L_T].$$

La matriz de covarianza,

$$\mathbf{V}_T = E[(\mathbf{R}_{T+1} - \bar{\mathbf{R}}_T)(\mathbf{R}_{T+1} - \bar{\mathbf{R}}_T)^*|L_T] = E[\mathbf{R}_{T+1}\mathbf{R}_{T+1}^*|L_T] - \bar{\mathbf{R}}_T\bar{\mathbf{R}}_T^*.$$

El vector de decisión o de posiciones se denota como \mathbf{w} ; es importante recalcar que los pesos varían en cada nodo y tiempo t ya que se resuelven distintos problemas de optimización en cada uno de ellos. Cuando solo se tiene activos riesgosos, la media y la varianza respectivamente son:

$$\rho(\mathbf{w}) = E[\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T] = E[\bar{\mathbf{R}}_T^*\mathbf{w}_T] = \sum_{j \in L} p_j \bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j$$

y

$$\sigma^2(\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T) = E[(\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T - \rho(\mathbf{w}))^2].$$

Lemma 5.1. (*Frauendorfer, K. y H. Siede., 1997*) *El riesgo está determinado por:*

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) &= \sigma^2(\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T) = E[\mathbf{w}_T^*(\mathbf{V}_T + \bar{\mathbf{R}}_T\bar{\mathbf{R}}_T^*)\mathbf{w}_T] - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= \sum_{j \in L} p_j \mathbf{w}_j^*(\mathbf{V}_j + \bar{R}_j\bar{R}_j^*)\mathbf{w}_j - \rho(\mathbf{w})^2. \end{aligned}$$

Demostración. Por la definición de la varianza se tiene:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) &= \sigma^2(\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T) = E[(\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T - \rho(\mathbf{w}))^2] \\ &= E[\mathbf{w}_T^*\mathbf{R}_{T+1}\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T] - \rho(\mathbf{w})^2 = E[E[\mathbf{w}_T^*\mathbf{R}_{T+1}\mathbf{R}_{T+1}^*\mathbf{w}_T|L_T]] - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= E[\mathbf{w}_T^*E[\mathbf{R}_{T+1}\mathbf{R}_{T+1}^*|L_T]\mathbf{w}_T] - \rho(\mathbf{w})^2 = E[\mathbf{w}_T^*(\mathbf{V}_T + \bar{\mathbf{R}}_T\bar{\mathbf{R}}_T^*)\mathbf{w}_T] - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= \sum_{j \in L} p_j \mathbf{w}_j^*(\mathbf{V}_j + \bar{R}_j\bar{R}_j^*)\mathbf{w}_j - \rho(\mathbf{w})^2. \end{aligned}$$

□

Observación 5.2. Nótese que de esta representación se deriva una matriz diagonal de riesgo debido a que tiene el término $\rho(\mathbf{w})^2$ separado. Como el retorno esperado del portafolio está fijado en este tipo de problemas de optimización (*i.e.* $\rho(\mathbf{w}) = \rho \in \mathbb{R}$), se puede despreciar $\rho(\mathbf{w})^2$ exceptuando cuando se considera la dependencia del retorno y del riesgo óptimo. Del lema anterior se puede deducir la prueba del siguiente corolario.

Corolario 5.3. Denótese $\rho_T(\mathbf{w}_T) := \overline{\mathbf{R}}_T^* \mathbf{w}_T$ y $\Psi_T(\mathbf{w}_T) = \mathbf{w}_T^* \mathbf{V}_T \mathbf{w}_T$ el retorno condicional y el riesgo al final del período respectivamente con realizaciones $\rho_j(\mathbf{w}_j) = \overline{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j$ y $\Psi_j(\mathbf{w}_j) = \mathbf{w}_j^* \mathbf{V}_j \mathbf{w}_j$ en L_T . Entonces $\Psi(\mathbf{w}) = \Psi_c(\mathbf{w}) + \Psi_d(\mathbf{w})$ en donde

$$\Psi_c(\mathbf{w}) = E[\Psi_T(\mathbf{w}_T)] = \sum_{j \in L} p_j \mathbf{w}_j^* \mathbf{V}_j \mathbf{w}_j$$

y

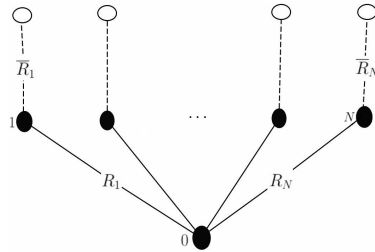
$$\Psi_d(\mathbf{w}) = E[\rho_T(\mathbf{w}_T)^2] - \rho(\mathbf{w})^2.$$

Observación 5.4. Lo definido como Ψ_c corresponde a la parte continua del riesgo, mientras que la parte discreta es Ψ_d . Esta distinción servirá para el siguiente análisis, ya que Ψ_c es el valor esperado de la varianza condicional del \mathbf{w}_{T+1} , midiendo así el riesgo promedio final y Ψ_d determina el balance en los retornos de un escenario.

Asumiendo transacciones ideales, es decir transacciones sin fricción y sin pérdidas de capital durante todo el escenario multiperiodico, la ecuación de capital $\mathbf{e}^* \mathbf{w} = 1$ es complementada por $\{\mathbf{e}^* \mathbf{w}_t = \mathbf{R}_t^* \mathbf{w}_{t-1}\}_{t=1}^T$ cuya forma discreta corresponde a $\{\mathbf{e}^* \mathbf{w}_j = \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_{\pi_j}\}_{j \in N - \{0\}}$.

Sin pérdida de generalidad en el análisis a desarrollar, se considera el caso de dos períodos que corresponde a $T=1$. En cuyo caso las hojas $j = 1, \dots, N$ de tal forma que $N - \{0\} = S(0) = L = 1, \dots, N$ tal como se muestra en la siguiente figura.

FIGURA 5.1: Árbol de escenarios para el modelo de media varianza de dos períodos



5.1. Caso para activos riesgosos

Sea $\hat{\mathbf{R}}_j := p_j \bar{\mathbf{R}}_j$ y $\hat{\mathbf{V}}_j := p_j(\mathbf{V}_j + \bar{\mathbf{R}}_j \bar{\mathbf{R}}_j^*)$ en las hojas $j \in L$, asumiendo $\hat{\mathbf{V}}_j > 0$, y que $\exists j \in N \ni \hat{\mathbf{R}}_j$ no es múltiplo de \mathbf{e} ; se pueden definir las siguientes variables:

$$\begin{aligned}\hat{A}_j &:= \mathbf{e}^* \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{e} \\ \hat{B}_j &:= \mathbf{e}^* \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \hat{C}_j &:= \hat{\mathbf{R}}_j^* \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \hat{D}_j &:= \hat{A}_j \hat{C}_j - \hat{B}_j^2\end{aligned}$$

Recursivamente para $t = T, \dots, 1$ e $i \in L_{t-1}$ sean:

$$\hat{\mathbf{R}}_i := \sum_{j \in S(i)} \frac{\hat{B}_j}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j \text{ y } \hat{\mathbf{V}}_i := \sum_{j \in S(i)} \frac{1}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^*.$$

En el siguiente análisis estas cantidades, análogas a sus contrapartes en las hojas, tienen un rol similar pero no el mismo significado. En particular, el valor esperado $\bar{\mathbf{R}}$ y la matriz de covarianza \mathbf{V} de la distribución discreta $\{\mathbf{R}_j\}_{j \in S(i)}$, se definen a continuación:

$$\bar{\mathbf{R}}_i := \hat{\mathbf{R}}_i / p_i, \quad \mathbf{V}_i := \hat{\mathbf{V}}_i / p_i - \bar{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{R}}_i^*.$$

Los supuestos son análogos al caso de un período y sirven para asegurar la convexidad estricta y para la eliminación de constantes degenerativas. Por estos supuestos, se tiene que de forma análoga al caso de un período que \hat{A}_j y \hat{C}_j son positivas, \hat{D}_j son no negativas y al menos una positiva.

El problema de media-varianza es:

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{j \in L} \frac{1}{2} \mathbf{w}_j^* \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j - \frac{1}{2} \rho^2 \tag{5.1}$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 = 1, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j = \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i \quad \forall j \in N - \{0\} \text{ y } \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j = E[R_\pi] = \rho.$$

A este problema (5.1) le corresponde el siguiente funcional Lagrangiano:

$$L(\mathbf{w}, \lambda, \mu; \rho) = \frac{1}{2} \sum_{j \in L} \mathbf{w}_j^* \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j - \frac{1}{2} \rho^2 - \lambda_0 (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 - 1) \\ - \sum_{j \in N - \{0\}} \lambda_j (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_j - \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i) - \mu \left(\sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j - \rho \right).$$

Teorema 5.5. *El problema (5.1) tiene solución única dada por:*

$$\mathbf{w}_j = \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} (\lambda_j \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_j), \quad \lambda_j = \frac{\mathbf{x}_j - \mu \hat{B}_j}{\hat{A}_j}, \quad \mu = \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right) \bigg/ \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j}.$$

En donde $\mathbf{x}_0 = 1$ y $\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i = \mathbf{x}_j$ para $j \in N - \{0\}$. El riesgo óptimo asociado esta dado por:

$$\Psi(\mathbf{w}) = \sigma^2(\rho) = \frac{1}{\hat{A}_0} + \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right) \bigg/ \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} - \rho^2;$$

el mínimo global $\hat{\rho}$ y el riesgo mínimo respectivamente son:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \bigg/ \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \right), \quad \sigma^2(\hat{\rho}) = \frac{1}{\hat{A}_0} + \left(\frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right)^2 \bigg/ \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \right).$$

Demostración. El sistema óptimo para dos períodos puede representarse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{e} & -\mathbf{R}_1 & \dots & -\mathbf{R}_N & 0 \\ & \hat{\mathbf{V}}_1 & & & \mathbf{e} & & & \hat{\mathbf{R}}_1 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \hat{\mathbf{V}}_N \\ & & & & & & \mathbf{e} & \hat{\mathbf{R}}_N \\ \mathbf{e}^* & & & & & & & \\ -\mathbf{R}_1^* & \mathbf{e}^* & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ -\mathbf{R}_N^* & & & & & & \mathbf{e}^* & \\ 0 & \hat{\mathbf{R}}_1^* & \dots & \hat{\mathbf{R}}_N^* & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N \\ -\lambda_0 \\ -\lambda_1 \\ \vdots \\ -\lambda_N \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

De la condición de primer orden $\partial L / \partial \mathbf{w}_j = 0$ se tiene que $\mathbf{w}_j = \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} (\lambda_j \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_j)$ para $j \in L$. Al sustituirlo en la restricción de capital junto con \hat{A}_j y \hat{B}_j , al despejar se obtiene

$\lambda_j = (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mu \hat{B}_j) / \hat{A}_j$. En este caso $i = 0$, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 \mathbf{e} + \sum_{j \in L} \lambda_j \mathbf{R}_j = -\lambda_0 \mathbf{e} + \sum_{j \in L} \frac{\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mu \hat{B}_j}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j = -\lambda_0 \mathbf{e} + \sum_{j \in L} \left(\frac{\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j - \mu \frac{\hat{B}_j}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j \right) \\ &= -\lambda_0 \mathbf{e} + \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 - \mu \hat{\mathbf{R}}_0, \end{aligned}$$

al despejar se obtiene $\mathbf{w}_0 = \hat{\mathbf{V}}_0^{-1} (\lambda_0 \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_0)$. De modo que al sustituir en la ecuación de capital,

$$1 = \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 = \mathbf{e}^* \hat{\mathbf{V}}_0^{-1} (\lambda_0 \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_0) = \lambda_0 \hat{A}_0 + \mu \hat{B}_0,$$

de lo que se obtiene $\lambda_0 = (1 - \mu \hat{B}_0) / \hat{A}_0$.

De la restricción del retorno,

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_0 = \sum_{j \in L} (\lambda_j \hat{B}_j + \mu \hat{C}_j) = \sum_{j \in L} \left(\frac{\hat{B}_j}{\hat{A}_j} \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mu \frac{\hat{B}_j^2}{\hat{A}_j} + \mu \hat{C}_j \right) \\ &= \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \mu \sum_{j \in L} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} = \lambda_0 \hat{B}_0 + \mu \hat{C}_0 + \mu \sum_{j \in L} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \\ &= \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} - \mu \frac{\hat{B}_0^2}{\hat{A}_0} + \mu \hat{C}_0 + \mu \sum_{j \in L} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_0} = \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} + \mu \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j}. \end{aligned}$$

De esto y del hecho que las variables definidas \hat{A}_j , \hat{C}_j son todas positivas y \hat{D}_j son todas no negativas y alguna de ellas es positiva (ya que $\hat{D}_j = 0$ si y solo sí $\hat{\mathbf{R}}_j$ y \mathbf{e} son linealmente dependientes, la prueba es análoga a la presentada en el apéndice en proposición 10.1) se deriva:

$$\mu = \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right) / \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j}.$$

Nótese que el denominador no es 0 ya que existe un j para el cual D_j no es cero.

Por otro lado, para el mínimo global se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^* \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j &= (\mathbf{V}_j^{-1} (\lambda_j \mathbf{e} + \mu \mathbf{R}_j))^* \mathbf{V}_j (\mathbf{V}_j^{-1} (\lambda_j \mathbf{e} + \mu \mathbf{R}_j)) \\ &= \lambda_j (\lambda_j \mathbf{e}^* + \mu \mathbf{R}_j^*) \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{e} + \mu (\lambda_j \mathbf{e}^* + \mu \mathbf{R}_j^*) \mathbf{R}_j = \lambda_j (\lambda_j \hat{A}_j + \mu \hat{B}_j) + \mu (\lambda_j \hat{B}_j + \mu \hat{C}_j) \\ &= \lambda_j \left(\frac{\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mu \hat{B}_j}{\hat{A}_j} \hat{A}_j + \mu \hat{B}_j \right) + \mu \left(\frac{\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mu \hat{B}_j}{\hat{A}_j} \hat{B}_j + \mu \hat{C}_j \right) \\ &= \lambda_j \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mu \frac{\hat{B}_j \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mu \hat{D}_j}{\hat{A}_j} = \frac{(\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0)^2}{\hat{A}_j} + \mu^2 \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \end{aligned}$$

y de manera similar se resuelve

$$\mathbf{w}_0^* \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 = \lambda_0 + \mu \frac{\hat{B}_0 + \mu \hat{D}_0}{\hat{A}_0} = \frac{1}{\hat{A}_0} + \mu^2 \frac{\hat{D}_0}{\hat{A}_0}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j \in L} \mathbf{w}_j^* \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j &= \sum_{j \in L} \left(\frac{(\mathbf{R}^* \mathbf{w}_0)^2}{\hat{A}_j} + \mu^2 \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \right) = \mathbf{w}_0^* \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 + \mu^2 \sum_{j \in L} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \\ &= \frac{1}{\hat{A}_0} + \mu^2 \sum_{j \in L} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} = \frac{1}{\hat{A}_0} + \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right)^2 \bigg/ \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j}. \end{aligned}$$

Restando ρ^2 se obtiene una ecuación de riesgo $\sigma(\rho)^2 = s + (\rho - c)^2/d - \rho^2$. Como el portafolio óptimo \mathbf{w} es una función afín al retorno ρ y $\Psi(\mathbf{w}) = \sigma^2(\rho)$ es una función cuadrática y convexa, entonces la frontera eficiente es estrictamente convexa (si y solo si $d < 1$) o $\sigma^2(\rho) \equiv 0$ (si y solo si $d = 1$ y $c = s = 0$). Pero $s = \hat{A}_0^{-1}$ que es positiva por ser la inversa de $\hat{A}_0 > 0$; de lo que se obtiene el mínimo global de $\sigma^2(\rho)$ que es $s + c^2/(1 - d)$ en $\hat{\rho} = c/(1 - d)$. \square

En la prueba anterior, primero se resolvió el problema para las hojas y luego para la raíz, para el caso $T = 1$. La generalización de esta prueba se puede realizar siguiendo el procedimiento de forma recursiva, este método se conoce como *método de complemento de Schur para árboles raros (tree-sparce)*.

La solución para el caso $T = 0$ da resultados similares a los presentados en el capítulo anterior, sin embargo las condiciones son mas débiles ($\mathbf{V} + \overline{\mathbf{R}\mathbf{R}^*} > 0$ en lugar de $\mathbf{V} > 0$). Los siguientes dos teoremas establecen las relaciones entre los problemas, las pruebas no se presentarán pero fueron desarrolladas por Steinbach ver (Steinbach, 2001).

Teorema 5.6. *Considere el caso de un período para el teorema anterior, para el cual $\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V} > 0$. Entonces*

$$\hat{A}_0 = \frac{A + D}{1 + C}, \quad \hat{B}_0 = \frac{B}{1 + C}, \quad \hat{C}_0 = \frac{C}{1 + C}, \quad \hat{D}_0 = \frac{D}{1 + C}$$

y

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}, \quad \hat{\lambda} = \lambda, \quad \hat{\mu} = \mu + \rho.$$

5.2. Caso con un activo libre de riesgo

El retorno del activo libre de riesgo se denotará \mathbf{R}_{f_1} y \mathbf{R}_{f_2} para el período 1 y 2 respectivamente, dichos retornos son independientes de los escenarios a trabajar. El retorno combinado del activo libre de riesgo se denota como $\mathbf{R}_f := \mathbf{R}_{f_1}\mathbf{R}_{f_2}$; al igual que en el caso anterior se definen las siguientes variables a las que se adiciona una relacionada con el activo libre de riesgo:

$$\hat{\mathbf{R}}_j = p_j \bar{\mathbf{R}}_j, \quad \hat{\mathbf{V}}_j = p_j(\mathbf{V}_j + \bar{\mathbf{R}}_j \bar{\mathbf{R}}_j^*) \text{ para } j \in L, \text{ y } \hat{\mathbf{R}}_{f_j} = p_j \mathbf{R}_{f_2}.$$

Los supuestos básicos para este análisis son:

- $\forall j \in N : \mathbf{V}_j > 0$
- $\exists j \in N : \bar{\mathbf{R}}_j \neq \mathbf{R}_{f_{t+1}} \mathbf{e}$.
- $\mathbf{R}_f \neq 0$

Considerando los supuestos descritos anteriormente, se pueden definir para las hojas del árbol:

$$A_j = \mathbf{e}^* \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{e}, \quad B_j := \mathbf{e}^* \mathbf{V}_j^{-1} \bar{\mathbf{R}}_j, \quad C_j := \bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{V}_j^{-1} \bar{\mathbf{R}}_j$$

$$D_{f_j} := \mathbf{R}_{f_2}^2 A_j - 2\mathbf{R}_{f_2} B_j + C_j = (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e})^* \mathbf{V}_j^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e});$$

mientras que para la raíz se tiene:

$$\hat{p}_0 := \sum_{j \in S(0)} \frac{p_j}{D_{f_j} + 1}, \quad \hat{\mathbf{R}}_0 := \sum_{j \in S(0)} \frac{p_j}{D_{f_j} + 1} \mathbf{R}_j, \quad \hat{\mathbf{V}}_0 := \sum_{j \in S(0)} \frac{p_j}{D_{f_j} + 1} \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^*.$$

Por último, si $\bar{\mathbf{R}}_0 = \hat{\mathbf{R}}_0 / \hat{p}_0$, $\mathbf{V}_0 = \hat{\mathbf{V}}_0 / \hat{p}_0 - \bar{\mathbf{R}}_0 \bar{\mathbf{R}}_0^*$ y $\mathbf{R}_{f_1} = \hat{p}_0 \mathbf{R}_f$, se puede definir la constante pendiente

$$D_{f_0} = \mathbf{R}_{f_1}^2 A_0 - 2\mathbf{R}_{f_1} B_0 + C_0.$$

De la misma forma que en los casos anteriores, se tiene que A_j, C_j son positivas, B_j es no negativa. La prueba es trivial para las primeras tres constantes; sin embargo no para D_{f_j} .

Proposición 5.7. *Por lo menos una D_{f_j} es positiva.*

Demostración. $D_{f_j} = 0$ si y solo si $\bar{\mathbf{R}}_j \neq \mathbf{R}_{f_{t+1}} \mathbf{e}$, pero se sabe que $\exists j \in N \ni \bar{\mathbf{R}}_j = \mathbf{R}_{f_{t+1}} \mathbf{e}$ por lo que al menos un $D_{f_j} \neq 0$. \square

Es importante mencionar que para el siguiente análisis se utilizan dos formulaciones distintas para el riesgo y el retorno. Denótese de la siguiente manera el retorno

$\rho_T(\mathbf{w}_T, \mathbf{w}_{f_T}) := \bar{\mathbf{R}}_T^* \mathbf{w}_T + \mathbf{R}_{f_{T+1}} \mathbf{w}_{f_T}$, cuyas realizaciones se pueden expresar como

$\rho_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{f_j}) := \bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \mathbf{R}_{f_{T+1}} \mathbf{w}_{f_j}$. El vector de pesos discretos es denotado por

$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{f_j})_{j \in N}$.

Lemma 5.8. *El retorno en presencia de un activo libre de riesgo, puede escribirse como:*

$$\rho(\mathbf{w}) = \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} = \sum_{j \in L} p_j \rho_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{f_j}),$$

y el riesgo tiene dos representaciones:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_j & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j^* & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= \sum_{j \in L} p_j \mathbf{w}_j^* \mathbf{V}_j \mathbf{w}_j + \sum_{j \in L} p_j \rho_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{f_j})^2 - \rho(\mathbf{w})^2 \end{aligned}$$

$$\Psi(\mathbf{w}) := \Psi_c(\mathbf{w}) + \Psi_d(\mathbf{w}).$$

Demostración. Por su definición, la representación continua del retorno es

$$\rho(\mathbf{w}) = E[\mathbf{R}_{T+1}^* \mathbf{w}_T + \mathbf{R}_{f_{T+1}} \mathbf{w}_{f_T}] = E[\bar{\mathbf{R}}_T^* \mathbf{w}_T + \mathbf{R}_{f_{T+1}} \mathbf{w}_{f_T}] = E[\rho_T(\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_{f_T})].$$

Utilizando la definición del Lema (5.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) &= E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{T+1} \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{T+1} \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \end{pmatrix}^* \right] \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} \right] - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathbf{V}_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} \right] + E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{T+1} \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{T+1} \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} \right] - \rho(\mathbf{w})^2 \\ &= E[\mathbf{w}_T^* \mathbf{V}_T \mathbf{w}] + E[(\bar{\mathbf{R}}_T^* \mathbf{w}_T + \mathbf{R}_{f_{T+1}} \mathbf{w}_{f_T})^2] - \rho(\mathbf{w})^2. \end{aligned}$$

En ambos casos, se obtiene la fórmula discreta. \square

Utilizando la primera definición de riesgo y retorno, del Lemma (5.8) el problema para este caso es:

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{j \in L} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_j & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j^* & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho^2 \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} &= 1, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} = \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i + \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_{f_i} \quad \forall j \in N - \{0\}, \\ \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} &= \rho. \end{aligned}$$

Su funcional Lagrangiano es,

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, \lambda, \mu; \rho) &= \sum_{j \in L} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_j & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j^* & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho^2 \\
&\quad - \lambda_0 (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} - 1) - \sum_{j \in N - \{0\}} \lambda_j (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} - \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i - \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_{f_i}) \\
&\quad - \mu \left(\sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} - \rho \right).
\end{aligned}$$

Teorema 5.9. *El problema (5.2) tiene solución única, cuando $T = 1$*

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j &= -\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \mathbf{V}_j^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e}), \quad j \in N - \{0\}, & \mathbf{w}_0 &= -\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \mathbf{V}_0^{-1} (\hat{\mathbf{R}}_0 - \hat{\mathbf{R}}_{f_1} \mathbf{e}), \\
\mathbf{w}_{f_j} &= \frac{1}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} (C_j + \mathbf{R}_{f_2} B_j + 1) + \mu \right), & \mathbf{w}_{f_0} &= \frac{1}{\mathbf{R}_f} \left(\frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} (C_0 + \mathbf{R}_{f_1} B_0 + 1) + \mu \right), \\
\lambda_j &= \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}}{D_{f_j} + 1} \left(\mathbf{R}_{f_2} (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu \right), & \lambda_0 &= \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}}{1 + D_{f_0}} (\mathbf{R}_f - \mu) \equiv \hat{\rho} (\mathbf{R}_f - \mu), \\
\mu &= \mathbf{R}_f \frac{\rho - \hat{\rho}}{\mathbf{R}_f - \hat{\rho}}, & \hat{\rho} &:= \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}}{1 + D_{f_0}} \in (0, \mathbf{R}_f).
\end{aligned}$$

El riesgo asociado es:

$$\Psi(\mathbf{w}) \equiv \sigma^2(\rho) = \hat{\rho} \frac{(\mathbf{R}_f - \rho)^2}{\mathbf{R}_f - \hat{\rho}}.$$

El mínimo global se alcanza en $\hat{\rho} = \mathbf{R}_f$ y tiene valor cero.

La solución asociada tiene el 100 % de la inversión en el activo libre de riesgo:

$$(\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{\mathbf{w}}_{f_0}) = (0, 1), \quad (\hat{\mathbf{w}}_j, \hat{\mathbf{w}}_{f_j}) = (0, \mathbf{R}_{f_1}), \quad \hat{\lambda} = 0, \quad \hat{\mu} = \mathbf{R}_f.$$

Demostración. El sistema de condiciones óptimas se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\partial L / \partial \mathbf{w}_0 = 0 : & & -\lambda_0 \mathbf{e} + \sum_{j \in L} \lambda_j \mathbf{R}_j &= 0, \\
\partial L / \partial \mathbf{w}_{f_0} = 0 : & & -\lambda_0 + \sum_{j \in L} \lambda_j \mathbf{R}_{f_1} &= 0, \\
\partial L / \partial \mathbf{w}_j = 0 : & & \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j + \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_{f_j} - \lambda_j \mathbf{e} - \mu \hat{\mathbf{R}}_j &= 0 \quad \forall j \in L, \\
\partial L / \partial \mathbf{w}_{f_j} = 0 : & & \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} - \lambda_j - \mu \hat{\mathbf{R}}_{f_j} &= 0 \quad \forall j \in L, \\
\partial L / \partial \lambda_0 = 0 : & & \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} &= 1, \\
\partial L / \partial \lambda_j = 0 : & & \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} - \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 - \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} &= 0 \quad \forall j \in L, \\
\partial L / \partial \mu = 0 : & & \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} &= \rho.
\end{aligned}$$

De $\partial L/\partial \mathbf{w}_{f_j} = 0$ al despejar para \mathbf{w}_{f_j} se tiene que

$$\mathbf{w}_{f_j} = \frac{1}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \left(\lambda_j + \mu \hat{\mathbf{R}}_{f_j} - \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j}^* \mathbf{w}_j \right) = \frac{1}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(-\bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} + \mu \right). \quad (5.3)$$

Como $\hat{\mathbf{V}}_j = p_j(\mathbf{V}_j + \bar{\mathbf{R}}_j^* \bar{\mathbf{R}}_j)$, al sustituir \mathbf{w}_{f_j} en $\partial L/\partial \mathbf{w}_j = 0$ se tiene:

$$0 = \hat{\mathbf{V}}_j \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_j \left(-\bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} + \mu \right) - \lambda_j \mathbf{e} - \mu \hat{\mathbf{R}}_j = p_j \mathbf{V}_j \mathbf{w}_j + \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e});$$

de lo anterior se obtiene el siguiente resultado

$$\mathbf{w}_j = -\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \mathbf{V}_j^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e}).$$

Sustituyendo \mathbf{w}_j en (5.3)

$$\mathbf{w}_{f_j} = \frac{1}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{V}_j^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e}) + \frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} + \mu \right) = \frac{1}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} (C_j + \mathbf{R}_{f_2} B_j + 1) + \mu \right).$$

Luego de sustituir \mathbf{w}_j y \mathbf{w}_{f_j} , la restricción de capital es:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} &= \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} = -\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \mathbf{e}^* \mathbf{V}_j^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_{f_2} \mathbf{e}) + \mathbf{w}_{f_j} \\ &= -\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} (B_j - \mathbf{R}_{f_2} A_j) + \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j}} (C_j - \mathbf{R}_{f_2} B_j + 1) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_{f_2}} \\ &= \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(\frac{\mathbf{R}_{f_2}^2 A_j - 2\mathbf{R}_{f_2} B_j + C_j + 1}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \right) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_{f_2}} \\ &= \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} \left(\frac{D_{f_j} + 1}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \right) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_{f_2}}. \end{aligned}$$

De la restricción de capital se despeja para λ_j ,

$$\lambda_j = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}}{D_{f_j} + 1} \left(\mathbf{R}_{f_2} (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu \right).$$

En la raíz la condición $\partial L/\partial \mathbf{w}_{f_0} = 0$ es:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 + \sum_{j \in L} \lambda_j \mathbf{R}_{f_1} = -\lambda_0 + \sum_{j \in L} \frac{\mathbf{R}_{f_1} \hat{\mathbf{R}}_{f_j}}{D_{f_j} + 1} \left(\mathbf{R}_{f_2} (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu \right) \\ &= -\lambda_0 + \mathbf{R}_f \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_f \hat{\mathbf{R}}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} - \mu \hat{\mathbf{R}}_{f_1}; \end{aligned}$$

al despejar se obtiene el siguiente resultado,

$$\mathbf{w}_{f_0} = \frac{\mu \hat{\mathbf{R}}_{f_1} + \lambda_0 - \mathbf{R}_f \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0}{\mathbf{R}_f \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} = \frac{1}{\mathbf{R}_f} \left(-\mathbf{R}_{f_2} \bar{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \mu \right). \quad (5.4)$$

Al sustituir λ_j y \mathbf{w}_{f_0} en $\partial L / \partial \mathbf{w}_0 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 + \sum_{j \in L} \lambda_j \mathbf{R}_j = -\lambda_0 \mathbf{e} + \sum_{j \in L} \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}}{D_{f_j} + 1} \left(\mathbf{R}_{f_j} (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu \right) \mathbf{R}_j \\ &= -\lambda_0 \mathbf{e} + \mathbf{R}_{f_2}^2 \sum_{j \in L} \frac{p_j (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) \mathbf{R}_j}{D_{f_j} + 1} - \mu \mathbf{R}_{f_2} \sum_{j \in L} \frac{p_j \mathbf{R}_j}{D_{f_j} + 1} \\ &= -\lambda_0 \mathbf{e} + \mathbf{R}_{f_2}^2 \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_f \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0 \mathbf{w}_{f_0} - \mu \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ &= -\lambda_0 \mathbf{e} + \mathbf{R}_{f_2}^2 \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0 \left(-\mathbf{R}_{f_2} \bar{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \mu \right) - \mu \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ &= \mathbf{R}_{f_2}^2 \hat{p}_0 \mathbf{V}_0 + \frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \left(\bar{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{e} \right), \end{aligned}$$

de lo que se obtiene \mathbf{w}_0 y al substituir en (5.4) se obtiene \mathbf{w}_{f_0} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= -\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \mathbf{V}_0^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{e}), \\ \mathbf{w}_{f_0} &= \frac{1}{\mathbf{R}_f} \left(-\mathbf{R}_{f_2} \bar{\mathbf{R}}_0^* \left(\frac{-\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \mathbf{V}_0^{-1} (\bar{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{e}) \right) + \frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \mu \right) \\ &= \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} (C_0 - \mathbf{R}_{f_1} B_0 + 1) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_f}. \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de capital en la raíz es:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} = -\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} (B_0 - \mathbf{R}_{f_1} A_0) + \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} (C_0 - \mathbf{R}_{f_1} B_0 + 1) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_f} \\ &= \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} (\mathbf{R}_{f_1}^2 A_0 - 2\mathbf{R}_{f_1} B_0 + C_0 + 1) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_f} = \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f} \left(\frac{D_{f_0} + 1}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \right) + \frac{\mu}{\mathbf{R}_f}. \end{aligned}$$

De esto se tiene λ_0 mostrada a continuación,

$$\lambda_0 = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}}{D_{f_0} + 1} (\mathbf{R}_f - \mu) = \hat{\rho} (\mathbf{R}_f - \mu).$$

Como se tiene que $D_{f_j} \geq 0$ entonces $p_j / (D_{f_j} + 1) \in (0, p_j]$; por ende se tiene que $\hat{p}_0 \in (0, 1]$.

Si $p_0 = 1$ entonces $D_{f_j} = 0$ para $j \in L$ y $D_{f_0} > 0$. Con esto se prueba la inclusión de $\hat{\rho} \equiv \frac{\mathbf{R}_f \hat{p}_0}{D_{f_0} + 1} \in (0, \mathbf{R}_f)$.

Sustituyendo \mathbf{w}_j y \mathbf{w}_{f_j} , se tiene:

$$\hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} = -\frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} (C_j - \mathbf{R}_{f_2} B_j) + \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} (C_j - \mathbf{R}_{f_2} B_j + 1) + p_j \mu = \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} + p_j \mu. \quad (5.5)$$

Similarmente en la raíz se obtiene,

$$\hat{\mathbf{R}}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \hat{\mathbf{R}}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} = -\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f} (C_0 - \mathbf{R}_{f_1} B_0) + \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f} (C_0 - \mathbf{R}_{f_1} B_0 + 1) + \hat{p}_0 \mu = \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f} + \hat{p}_0 \mu. \quad (5.6)$$

Sustituyendo λ_j y λ_0 en la condición del retorno

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} = \sum_{j \in L} \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} + \mu p_j = \mu + \sum_{j \in L} \frac{\lambda_j}{\mathbf{R}_{f_2}} \\ &= \sum_{j \in L} \frac{p_j}{D_{f_j} + 1} \left(\mathbf{R}_{f_2} (\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu \right) + \mu \\ &= \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \hat{\mathbf{R}}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} - \hat{p}_0 \mu + \mu = \frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_f} + \mu = \frac{\hat{\rho}}{\mathbf{R}_f} (\mathbf{R}_f - \mu) + \mu. \end{aligned}$$

De esto se tiene $\rho = \hat{\rho} + \mu(\mathbf{R}_f - \hat{\rho})/\mathbf{R}_f$ y además que $\mu = \mathbf{R}_f(\rho - \hat{\rho})/(\mathbf{R}_f - \hat{\rho})$.

Para calcular el riesgo considérese la siguiente expresión $\bar{\Psi}_j(\mathbf{w}_j) := \mathbf{w}_j^* \mathbf{V} \mathbf{w}_j + \rho_j(\mathbf{w})^2$ y para $p_j \rho_j(\mathbf{w})$ se utilizará la última expresión del (5.5).

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\mathbf{w}) &= \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \right)^2 D_{f_j} + \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} + \mu \right)^2 = \left(\frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \right)^2 (D_{f_j} + 1) + 2 \frac{\lambda_j}{\hat{\mathbf{R}}_{f_j}} \mu + \mu^2 \\ &= \frac{[\mathbf{R}_{f_2} (\bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu]^2}{D_{f_j} + 1} + 2\mu \frac{[\mathbf{R}_{f_2} (\bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0}) - \mu]}{D_{f_j} + 1} + \mu^2 \\ &= \frac{[\mathbf{R}_{f_2} (\bar{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0})]^2}{D_{f_j} + 1} + \mu^2 \frac{D_{f_j}}{D_{f_j} + 1}. \end{aligned}$$

Como $\Psi(\mathbf{w}) = \sum_{j \in L} p_j \bar{\Psi}_j(\mathbf{w}_j) - \rho^2$ se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) + \rho^2 &= \mathbf{R}_{f_2}^2 \sum_{j \in L} p_j \frac{(\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_{f_0})^2}{D_{f_j} + 1} + \sum_{j \in L} \frac{p_j D_{f_j}}{D_{f_j} + 1} \\ &= \mathbf{R}_{f_2}^2 \sum_{j \in L} \frac{p_j}{D_{f_j} + 1} ((\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0)^2 + 2\mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 + (\mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0})^2) + \mu^2 \sum_{j \in L} \frac{p_j D_{f_j} + p_j - p_j}{D_{f_j} + 1} \\ &= \mathbf{R}_{f_2}^2 (\mathbf{w}_0^* \hat{\mathbf{V}}_0 \mathbf{w}_0 + 2\mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0} \hat{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \hat{p}_0 (\mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0})^2) + \mu^2 (1 - \hat{p}_0). \end{aligned}$$

Usando la ecuación (5.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} (\mathbf{w}_0^* \mathbf{V}_0 \mathbf{w}_0 + (\bar{\mathbf{R}}_0^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{R}_{f_1} \mathbf{w}_{f_0})^2) &= \mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \right)^2 D_{f_0} + \left(\frac{\lambda_0}{\mathbf{R}_{f_2} \hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \frac{\mu}{\mathbf{R}_{f_2}} \right)^2 \right] = \\ \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \left[\frac{1}{\mathbf{R}_{f_2}} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \right)^2 D_{f_0} + \left(\frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \mu \right)^2 \right] \right] &= \hat{p}_0 \left[\left(\frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} \right)^2 (D_{f_0} + 1) + 2\mu \frac{\lambda_0}{\hat{\mathbf{R}}_{f_1}} + \mu^2 \right] \end{aligned}$$

que simplificado, resulta ser

$$\hat{p}_0 \left(\frac{(\mathbf{R}_f - \mu)^2}{D_{f_0} + 1} + 2\mu \frac{\mathbf{R}_f - \mu}{D_{f_0} + 1} + \mu^2 \right) = \hat{p}_0 \left(\frac{\mathbf{R}_f + \mu^2 D_{f_0}}{D_{f_0} + 1} \right).$$

Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{w}) + \rho^2 &= \hat{p}_0 \left(\frac{\mathbf{R}_f^2 + \mu^2 D_{f_0}}{D_{f_0} + 1} \right) + \mu^2 (1 - \hat{p}_0) = \mathbf{R}_f \hat{\rho} + \mu^2 \left(1 - \frac{\hat{p}_0}{D_{f_0} + 1} \right) \\ &= \mathbf{R}_f \hat{\rho} + \mu^2 \left(1 - \frac{\hat{\rho}}{\mathbf{R}_f} \right) = \mathbf{R}_f \hat{\rho} + \mathbf{R}_f \frac{(\rho - \hat{\rho})^2}{\mathbf{R}_f - \hat{\rho}}. \end{aligned}$$

Al restar ρ^2 se tiene la fórmula de riesgo dada; de $\partial\Psi/\partial\hat{\rho} = 0$ se obtiene el mínimo y de forma trivial el resto de lo enunciado. \square

Este problema puede ser modificado, si se hacen restricciones sobre ρ , para que sea límite inferior del retorno. Este cambio tiene el mismo comportamiento que en los modelos para un único período. A continuación se formula el problema con sus restricciones y su correspondiente funcional Lagrangiano.

$$\min_{\mathbf{w}, \theta} \sum_{j \in L} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_j & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j^* & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\rho + \theta)^2 \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} &= 1, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} = \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i + \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_i \quad \forall j \in N - \{0\} \\ \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} &= \rho + \theta, \quad \theta \geq 0. \end{aligned}$$

El funcional Lagrangiano es:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, \theta, \lambda, \mu, \eta; \rho) &= \sum_{j \in L} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_j & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_j^* & \mathbf{R}_{f_{T+1}} \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j \\ \mathbf{w}_{f_j} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\rho + \theta)^2 \\
&\quad - \lambda_0 (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_{f_0} - 1) - \sum_{j \in N - \{0\}} \lambda_j (\mathbf{e}^* \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{f_j} - \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i - \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_{f_i}) \\
&\quad - \mu \left(\sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \hat{\mathbf{w}}_j + \mathbf{R}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} - \rho - \theta \right) - \eta \theta
\end{aligned}$$

Teorema 5.10. *El problema (5.7) tiene una solución única. Para $\rho \geq \mathbf{R}_f$ se obtiene que $\theta = 0$ y $\eta = \mu - \rho \geq 0$, de lo contrario se tiene la misma solución que en el problema anterior. Para $\eta \leq \mathbf{R}_f$ se obtiene $\eta = 0$ y $\theta = \rho - \mathbf{R}_f \geq 0$, con un retorno $\mathbf{R}_f = \rho + \theta$ y la solución libre de riesgo del problema anterior.*

Demostración. Las condiciones óptimas incluyen las del problema anterior, exceptuando por la condición $\partial L / \partial \mu = 0$ en la que se reemplaza ρ por $\rho + \theta$, quedando de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_j + \hat{\mathbf{R}}_{f_j} \mathbf{w}_{f_j} = \rho + \theta.$$

Adicionalmente, de $\partial L / \partial \theta = 0$ se tiene que:

$$\mu - (\rho + \theta) = \eta$$

con $\theta \geq 0$, $\eta \geq 0$ y $\eta \theta = 0$ (*i.e.* son complementarios). La prueba continúa de la misma manera que la anterior pero $\rho + \theta$ en lugar de todas las veces que aparece ρ .

Finalmente, las distinciones en los casos siguientes se deben a la no negatividad de θ y η , además de que se complementan:

- $\theta = 0$ y $\mu \geq \rho$ ó
- $\theta > 0$ y $\mu = \rho + \theta$.

De la identidad de μ ,

$$\mu = \mathbf{R}_f \frac{(\rho + \theta - \hat{\rho})}{(\mathbf{R}_f - \rho)},$$

se tiene $\rho \geq \mathbf{R}_f$ para el primer caso y $\rho + \theta = \mathbf{R}_f$ para el segundo. □

6. APLICACIÓN

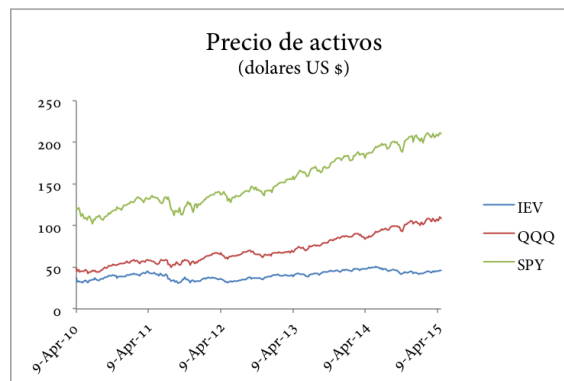
A continuación se presenta un ejemplo del modelo de media-varianza para múltiples períodos, cuando $T = 1$ y dicho período es de un año; además se presentan los resultados del problema clásico resuelto únicamente para el nodo padre bajo las mismas condiciones del ejemplo multiperiodico. Los ejemplos fueron realizados para un portafolio compuesto por 3 activos riesgosos (ETFs) que son:

- iShares Europe (IEV)
- PowerShares QQQ Trust, Series 1 (QQQ)
- SPDR S&P 500 ETF (SPY).

Los activos se eligieron por ser representativos de distintos sectores del mercado, IEV vinculado a acciones de empresas europeas, QQQ está asociado a la tecnología (sigue el comportamiento del índice NASDAQ-100) y el SPY se encuentra vinculado al mercado de Estados Unidos (sigue el comportamiento del índice SP500). Considerando también que los ETFs (Exchange Traded Funds) son instrumentos financieros constituidos por fondos que invierten de forma tal que tratan de replicar el retorno (usualmente total, *i.e.* incluyendo las eventuales distribuciones en efectivo a los inversionistas) de un índice, commodity o una canasta de activos específica. Además se considera que los inversionistas pueden invertir en ETFs de forma prácticamente idéntica a la inversión en acciones.

6.1. Información histórica

FIGURA 6.1: Precio de activos



En la Figura (6.1) se muestra la serie histórica de los precios de los activos seleccionados, correspondiente al período de abril del 2010 a mayo del 2015, extraída de Yahoo Finance en forma semanal la cual se encuentra en el Cuadro (10.1) del apéndice. Con dicha información se procedió a calcular los retornos logarítmicos semanales presentados también en el Cuadro (10.1) del apéndice y son ilustrados en las figuras de la 6.2 a la 6.4.

FIGURA 6.2: Retorno logarítmico semanal de IEV

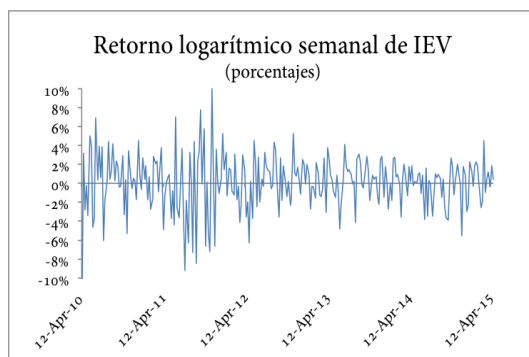


FIGURA 6.3: Retorno logarítmico semanal de QQQ

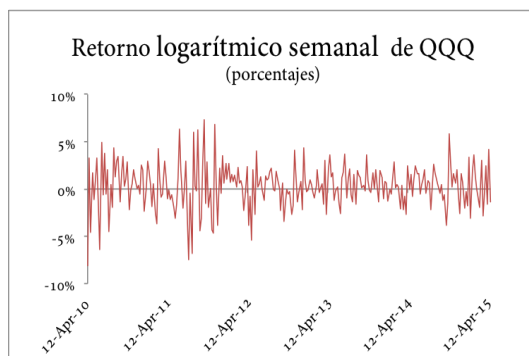
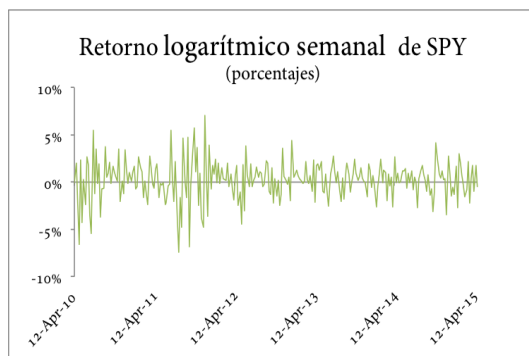


FIGURA 6.4: Retorno logarítmico semanal de SPY



CUADRO 6.1: Retorno histórico y desviación estándar histórica de cada activo

	Retorno (%)	Desviación
IEV	4.57	0.2078
QQQ	15.66	0.1687
SPY	11.16	0.1484

Se hace notar que los valores correspondientes al: retorno, covarianzas y desviaciones fueron anualizados. En base a dichos retornos se calculó el retorno histórico y la desviación estándar histórica mostrados en el Cuadro (6.1) y también en base de la misma información se calcularon las covarianzas entre los activos, de esto se obtuvo la matriz de covarianza para la raíz presentada en Cuadro (6.2).

CUADRO 6.2: Matriz de covarianza de la raíz

\mathbf{V}_0	IEV	QQQ	SPY
IEV	0.0430	0.0271	0.0016
QQQ	0.0271	0.0281	0.0027
SPY	0.0016	0.0027	0.0219

6.2. Problema clásico

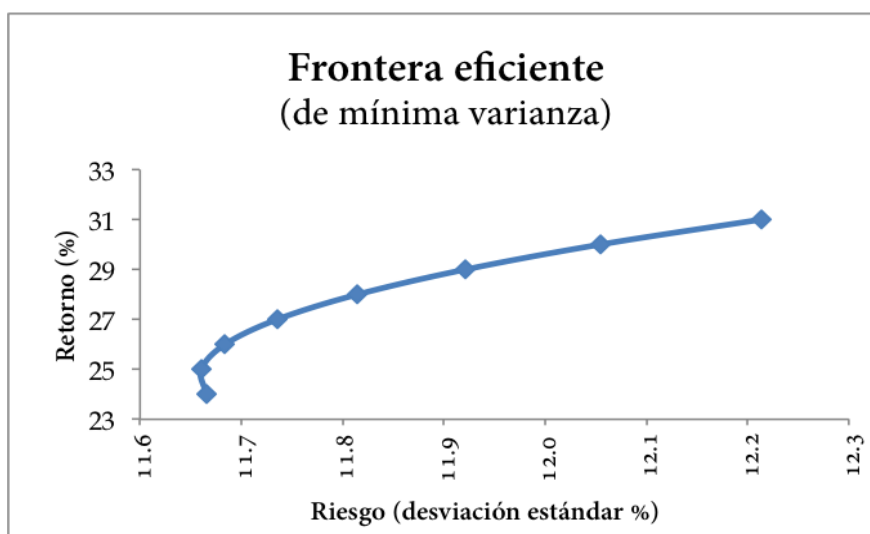
Se resolvió el problema (4.4), con el objetivo de encontrar la solución clásica del nodo padre del ejemplo multiperiodico desarrollado en la siguiente sección. En esta resolución, se optimizó el vector de pesos de modo que al invertir con esta estrategia se obtenga el retorno deseado con el riesgo mínimo.

El retorno objetivo seleccionado para el portafolio fue de $\rho = 13,5\%$ (retorno a alcanzar en dos años). Se emplearon los retornos esperados de los activos (en dos años) y la matriz de covarianza (para el periodo de dos años), calculados en forma bianual en base de los datos históricos de los cuadros (6.1 y 6.2); los valores para los retornos son: 0.0914, 0.3132 y 0.2233, respectivamente para IEV, QQQ y SPY y la matriz de covarianza se encuentra en el siguiente cuadro:

CUADRO 6.3: Matriz de covarianza de retornos a dos años

\mathbf{V}_0	IEV	QQQ	SPY
IEV	0.0860	0.0541	0.0032
QQQ	0.0541	0.0567	0.0053
SPY	0.0032	0.0053	0.0438

FIGURA 6.5: Frontera eficiente



Por otro lado, es relevante mencionar que la solución presentada cumple con las siguientes restricciones: $\mathbf{w}^* \mathbf{e} = 1$, $\mathbf{w}^* \bar{\mathbf{R}} = 13.5$. Además de la solución que se encuentra en el Cuadro (6.4), se presenta en la Figura (6.5) la frontera eficiente o de mínima varianza.

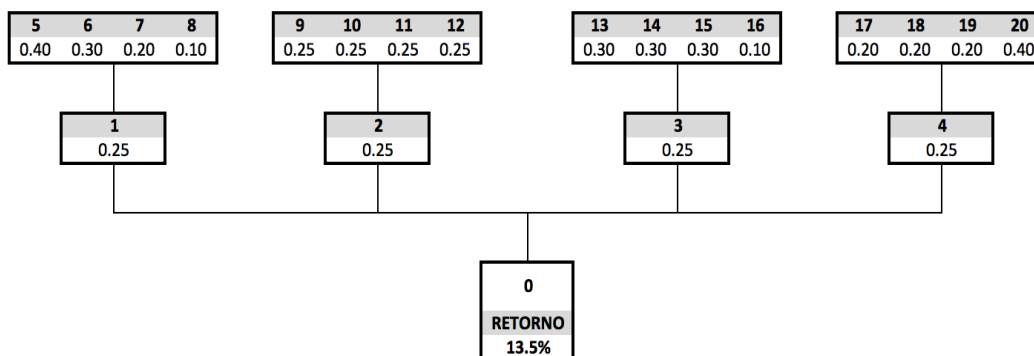
CUADRO 6.4: Solución problema clásico

IEV	QQQ	SPY
0.5829	-0.1857	0.6428

6.3. Definición del problema multiperiodico

El retorno objetivo seleccionado para el portafolio fue de $\rho = 13,5\%$ para el escenario de multiples períodos y el número de posibles escenarios fue $N = 4$. En base a la información que anteriormente fue presentada, se procedió a estimar 4 posibles escenarios a un año para cada uno de los cuales se asumió la probabilidad de ocurrencia, los retornos de cada activo (al final del primer año, ver Cuadro 10.2) y las matrices de covarianzas para cada uno de los referidos escenarios. Así también se establecieron retornos esperados para el final del segundo año (también ver Cuadro 10.2 en apéndice), que sirvieron para calcular el valor esperado como promedio ponderado de los nodos del primer nivel. En la Figura (6.6) se presenta el árbol de escenarios utilizado para el desarrollo de este ejemplo, cada recuadro muestra en la línea superior el número de nodo y en la inferior, la probabilidad de ocurrencia de cada.

FIGURA 6.6: Árbol de escenarios para portafolio de la aplicación



Las matrices de varianza-covarianza para cada cada nodo son:

CUADRO 6.5: Matrices de covarianza para nodos del 1 al 4

V_1	IEV	QQQ	SPY	V_2	IEV	QQQ	SPY
IEV	0.04600	0.0301	0.0046	IEV	0.04400	0.02806	0.0026
QQQ	0.03006	0.0314	0.0057	QQQ	0.02806	0.02836	0.0027
SPY	0.00459	0.0057	0.0249	SPY	0.00259	0.00266	0.0219

V_3	IEV	QQQ	SPY	V_4	IEV	QQQ	SPY
IEV	0.04200	0.0261	0.0006	IEV	0.04000	0.02406	-0.0014
QQQ	0.02606	0.0284	0.0027	QQQ	0.02406	0.02536	-0.0003
SPY	0.00059	0.0027	0.0219	SPY	-0.00141	-0.00034	0.0189

Con esta información se procedió a calcular los valores de $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{V}}$ y $\hat{\mathbf{V}}^{-1}$ primero para los nodos hojas y luego para la raíz. Luego se procedió a calcular las constantes definidas en la Sección (5.1) que son \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} y \hat{D} de igual forma primero para las hojas y luego para la raíz.

6.4. Resultados

Con dichos valores establecidos, cumpliendo las restricciones debidas, se procedió a resolver el problema (5.1) empleando el teorema (5.5).

Se calculó el primer multiplicador de Lagrange empleado la fórmula (previamente descrita en este trabajo),

$$\mu = \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right) / \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} = 0,1489.$$

Se encontraron los pesos para el nodo cero de acuerdo a la siguiente fórmula, obtenida en la demostración del teorema (5.5), $\mathbf{w}_0 = \hat{\mathbf{V}}_0^{-1} (\lambda_0 \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_0)$ y $\lambda_0 = (1 - \mu \hat{B}_0) / \hat{A}_0$. Los pesos del nodo padre sirvieron para proceder a calcular las λ_j s, que a su vez permitieron encontrar los pesos para el resto de nodos. Lo anterior se realizó por medio de la implementación de las siguientes ecuaciones, previamente descritas:

$$\mathbf{w}_j = \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} (\lambda_j \mathbf{e} + \mu \hat{\mathbf{R}}_j) \text{ y } \lambda_j = \frac{\mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_i - \mu \hat{B}_j}{\hat{A}_j}.$$

Además se verificó que dicha solución cumpliera con las restricciones de retorno y de capital, correspondientes a la minimización del problema (5.1), que son:

$$\mathbf{e}^* \mathbf{w}_0 = 1, \mathbf{e}^* \mathbf{w}_j = \mathbf{R}_j^* \mathbf{w}_0 \quad \forall j \in N - \{0\} \text{ y } \sum_{j \in L} \hat{\mathbf{R}}_j^* \mathbf{w}_j = \rho.$$

La solución es presentada a continuación:

CUADRO 6.6: Solución al problema multiperíodico

peso/nodo	IEV	QQQ	SPY	λ_j
0	-0.4457	1.0200	0.4257	-0.0015
1	-1.0030	1.2497	-0.0505	-0.0023
2	-0.9954	1.2128	-0.0398	-0.0030
3	-0.9004	1.1263	-0.0428	-0.0024
4	-0.6280	0.6564	0.1771	-0.0009

De los resultados del problema multiperiodico, mostrados en el Cuadro (6.6) notesé que:

- El signo de la posición para todos los activos es la misma para el nodo 4 y para la raíz; en los demás nodos (1, 2 y 3) el signo de la posición de SPY cambia.
- El valor de los pesos para cada activo en los nodos 1,2 y 3 es similar, de estos se puede obtener un rango de referencia para la reinversión adecuada.
- En los nodos 1, 2 y 3, los pesos para el activo IEV varían (entre la posición mayor y menor) en 0.1026, mientras que en todo el nivel varían en 0.3750.
- En los nodos 1,2 y 3, los pesos para el QQQ varían (entre la posición mayor y menor) en 0.2097, mientras que en todo el nivel varían en 0.5933.
- En los nodos 1,2 y 3, los pesos para el SPY varían (entre la posición mayor y menor) en 0.0107 puntos, mientras que en todo el nivel varían en 0.2279.
- Los multiplicadores de Lagrange (λ_j) son todos negativos y al igual que los pesos, se tiene un valor similar para los nodos 1,2 y 3.

El riesgo óptimo asociado a esta solución es 0.1311, valor que se obtuvo empleando la siguiente fórmula del teorema (5.5)

$$\sigma^2(\rho) = \frac{1}{\hat{A}_0} + \left(\rho - \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right) / \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} - \rho^2.$$

El retorno mínimo global anual es de 7.30 % con un riesgo óptimo asociado de 0.0015, valores encontrados al utilizar las siguientes ecuaciones que también son descritas en el teorema (5.5):

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} / \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \right) \text{ y } \sigma^2(\hat{\rho}) = \frac{1}{\hat{A}_0} + \left(\frac{\hat{B}_0}{\hat{A}_0} \right)^2 / \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\hat{D}_j}{\hat{A}_j} \right).$$

Para fines comparativos y de discusión se resolvió el mismo problema multiperiodico variando únicamente el retorno objetivo; se presentan a continuación los valores de los multiplicadores de Lagrange para ambas aplicaciones.

CUADRO 6.7: Multiplicadores de Lagrange para retornos 13.5% y 27.0%

ρ	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	μ
13.5%	-0.0015	-0.0023	-0.0030	-0.0024	-0.0009	0.1489
27.0%	-0.0037	-0.0070	-0.0079	-0.0069	-0.0026	0.3141

6.5. Discusión de resultados

En general, los resultados obtenidos en la aplicación del modelo multiperiodico son coherentes con lo esperado. Esto debido a los cambios en los pesos reflejados por la variación en retornos esperados de cada uno de los activos, además de que los datos expuestos cumplen con las condiciones o restricciones del problema asociados a la inversión de capital y el retorno objetivo. Para el primer nodo el capital invertido es uno, los pesos estan normalizados, factor que no se repite en los siguientes periodos debido a que cualquier ganancia obtenida es reinvertida en el segundo periodo.

Los multiplicadores de Lagrange miden la razón de cambio de la función objetivo (en el punto óptimo) con respecto a las restricciones impuestas. Para cada funcional tenemos dos diferentes, pero en esta aplicación se tienen tres (λ_0 , λ_j , $j=1,\dots,N-0$ y μ) debido a que la restricción de capital es dividida en dos. En los modelos multiperiodicos λ_0 está relacionado con la restricción del capital inicial, se tiene que al inicio $T = 0$ los pesos de los activos deben sumar 1. Los λ_j están relacionados con la restricción de capital que establece que los pesos en un nodo particular (no el nodo raíz ($T = 0$)) deben sumar lo mismo que el producto de los pesos del nodo padre correspondiente multiplicados por el retorno correspondiente al nodo j (*i.e.* el retorno que corresponde a haber llegado al estado representado por el nodo j). Por último se tiene que el multiplicador μ se relaciona con la restricción del retorno esperado de la inversión.

El multiplicador más interesante de analizar vinculado a una medida de riesgo es μ ; ya que establece la razón de cambio en la función objetivo (*i.e.* el riesgo) al variar el retorno requerido. De esta forma se puede ver que la razón de cambio del riesgo con respecto al retorno buscado de 13,5 % es 0.1489 de acuerdo al los resultados obtenidos, mientras que si se requiere un retorno de 27 % este multiplicador tiene un valor de 0.3141 . Claramente se puede notar que la razón de incremento de riesgo en relación con el retorno requerido crece en forma sustancial al duplicarse el retorno requerido (el valor de μ se multiplica más de 2.1 veces). Como se explicó anteriormente, los otros multiplicadores (λ_0 y λ_j s), representan restricciones definidas por la estructura del modelo y su utilización como medida de riesgo es indirecta. Por ejemplo, λ_j representa la razón de cambio de la función objetivo (riesgo) al variar el producto de los pesos de los activos por los retornos de los mismos. Así para retornos mayores el valor de λ_j se hace más negativo (por ejemplo: para un retorno objetivo de 13,5 % el valor de λ_1 es de 0.0023 mientras que para un retorno objetivo de 27 % es de -0.0070).

Ahora bien, si comparamos la resolución del problema clásico con el multiperiodico podremos notar a simple vista que la distribución inicial del capital es totalmente distinta, ya que de los tres activos, solamente la inversión en SPY tiene el mismo signo y los valores de los pesos de los activos varía significativamente. En el problema clásico la estrategia vende en corto a QQQ, mientras en el caso multiperiodico QQQ es en quien más se invierte. Por otro lado, es importante mencionar que el riesgo (desviación estándar) para el problema clásico fue de 18,83 %, mientras que para el multiperiodico el riesgo es de 36,21 %; es relevante mencionar que las medidas de riesgo son distintas debido a que en el modelo clásico se considera desviación estándar convencional, mientras que en el multiperiodico se considera el riesgo presentado en el lemma (5.8).

Se recomienda al inversionista que luego de haber realizado la inversión inicial, antes de que llegue el momento de reinvertir, evalúe que tan acertada estuvo la misma; y que se repita el ejercicio anterior (antes de volver a invertir) con el objetivo de generar una estrategia que tome en cuenta los acontecimientos sucedidos en el transcurso del primer año. Con la nueva estrategia, se puede analizar que tanto han cambiado las estrategias y se puede tomar la mejor decisión para el nuevo período.

7. RELACIÓN CON OTROS ENFOQUES DEL ANÁLISIS DE PORTAFOLIOS

Para complementar el desarrollo práctico, se investigó acerca de la relación con otros enfoques del análisis de portafolios y se presentan a continuación dos pequeñas síntesis de la relación con el enfoque geométrico y con las cadenas de Markov.

7.1. Enfoque geométrico del análisis de media-varianza

Markus Leippold, Fabio Trojani y Paolo Vanini analizaron los modelos de media-varianza de múltiples períodos, mostraron que las condiciones óptimas en dichos modelos pueden descomponerse en una base que resulta ser un conjunto de estrategias con una interpretación económica clara. Además probaron que las fronteras son generadas por una base ortogonal de retornos dinámicos.

Específicamente, la estrategia óptima en un modelo de $T + 1$ períodos es una combinación lineal de la estrategia de segundo momento de un mínimo global para el modelo y una sucesión de $T + 1$ estrategias locales de retorno en exceso que exponen al portafolio dinámico y óptimo al exceso de retorno de cada activo en cada período. (Leippold M., Trojani F. y P. Banini., Sfp) Algunos beneficios de este enfoque son los efectos de la diversificación en el tiempo, el impacto del horizonte de inversión en el portafolio óptimo y dinámico, por ende el impacto en los pesos o posiciones de los diversos activos y la determinación de una razón óptima inicial para los portafolios de activos y pasivos.

7.2. Modelos de media-varianza y las cadenas de Markov

G. Yin y Zun Yu Zhou presentaron un modelo modulado en tiempo discreto para la selección de portafolios de inversión, para ello estudiaron una versión discreta del modelo de Markowitz, es decir de la selección de portafolios de inversión por su media-varianza, en donde los parámetros del mercado dependen del régimen del mercado que varía entre un número finito de estados, representados mediante una cadena de Markov. También se analizó la selección de portafolios multiperiodicos y la solución numérica de problemas de tiempo continuo. (Yin, G. y X. Zhou., 2004)

8. CONCLUSIONES

Del desarrollo teórico del presente trabajo, en particular de los modelos de media-varianza para múltiples períodos, se puede concluir lo siguiente:

- Los problemas multiperiódicos y sus modelos correspondientes se comportan de manera similar al caso estático. Se esperaba ese comportamiento, debido a que fueron desarrollados como una extensión o generalización del enfoque clásico con el objetivo de minimizar la medida de riesgo seleccionada (varianza).
- De la optimización se obtiene un nivel de riesgo para el retorno fijado y una estrategia para re balancear los pesos, esto también de acuerdo con la dinámica del proceso estocástico que describe al retorno.
- No se presentan los modelos de media-varianza que permiten pérdidas de capital en los múltiples escenarios ni aquellos con restricciones sobre las preferencias de consumo, ventas en corto o transacciones (y sus costos). Las preferencias de consumo no han sido incluidas por autores anteriormente, por ende se desconoce la forma en que puedan relacionarse o incidir en los modelos de portafolios de inversión a largo plazo.

Dejando a un lado el ámbito teórico, del práctico y de la aplicación desarrollada se puede mencionar que:

- Los modelos de programación estocástica se están convirtiendo en herramientas estándares para la selección de estrategias de inversión, ya que cada vez se disminuye más el tiempo de resolución de los problemas de optimización e incrementa el alcance de la tecnología como medio facilitador.
- El esfuerzo computacional vinculado a la discretización del problema crece demasiado rápido, por lo que se puede mejorar el algoritmo para lograr una mayor eficiencia.
- Los resultados obtenidos (en la aplicación) son coherentes con respecto a lo esperado, ya que la variación en los retornos incidió en los pesos y se cumplieron las restricciones del problema.
- La razón de cambio del riesgo con respecto al retorno es mayor a uno, lo cual refleja que el multiplicador de Lagrange λ es sensible.

9 BIBLIOGRAFÍA

- Amenc, N. y V. LeSourd. (2003). *Portfolio theory and performance analysis*. Wiley & Sons Inc, Inglaterra.
- Elton, E. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley & Sons Inc, EE UU, 9na Ed.
- Frauentorfer, K. y H. Siede. (1997). *Mean-Variance Analysis in a Multiperiods Setting*. Alemania.
- Huang, C. y R. Litzenberger. (1988). *Foundations for financial economics*. Prentice Hall, EE UU, 1ra Ed.
- Korn, R. y E. Korn. (2000). *Option Pricing and Portfolio Optimization. Modern Methods of Financial Mathematics*, volume 31 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, EE UU, 2da Ed.
- Leippold M., Trojani F. y P. Banini. (S.f.p). *A Geometric approach to multi-period mean variance optimization of assets and liabilities*. Reporte técnico. Universidad del Sur de Suiza y Universidad de Zurich.
- Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press, EE UU, 1era Ed.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Prigent, J. (2007). *Portfolio Optimization and Performance Analysis*. Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Inglaterra.
- Ross, S. (2011). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Cambridge University Press, EE UU, 3ra Ed.
- Steinbach, M. (1999). *Markowitz Revisited: Single-Period and Multi-Period Mean-Variance Models*. Alemania.
- Steinbach, M. (2001). Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis. *SIAM Review-Society for Industrial and Applied Mathematics*, 43(1):31–85.

Yin, G. y X. Zhou. (2004). Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: From discrete-time models to their continuous-time limits. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 49(3):349 – 360.

10. APÉNDICE

Proposición 10.1. *En el Modelo de Markowitz Versión No. 2, se tiene que $D > 0$.*

Demostración. Como $\bar{\mathbf{R}}$, \mathbf{e} son linealmente independientes, y $\mathbf{V} > 0$ entonces se tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \\ \bar{\mathbf{R}}^T \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{e} \bar{\mathbf{R}}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0$$

cuyo determinante es positivo y es $D > 0$. Es decir,

$$BD = B(BC - A^2) = (A\bar{\mathbf{R}} - B\mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (A\bar{\mathbf{R}} - B\mathbf{e}).$$

□

Proposición 10.2. *En el Modelo de Markowitz Versión No. 2, los multiplicadores de Lagrange son:*

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{D} (CE[R_\pi] - A), \\ \delta &= \frac{1}{D} (B - AE[R_\pi]). \end{aligned}$$

Demostración. De las condiciones de primer orden se tiene que

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}^{-1} (\delta \mathbf{e} + \lambda \bar{\mathbf{R}}) \tag{10.1}$$

Al multiplicar (10.1) por \mathbf{e}^T se tiene,

$$1 = \mathbf{e}^T \mathbf{w} = \delta \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} + \lambda \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \delta C + \lambda A \tag{10.2}$$

Y al multiplicar (10.1) por $\bar{\mathbf{R}}^T$ se tiene

$$E[R_\pi] = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{w} = \delta \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} + \lambda \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \delta A + \lambda B. \tag{10.3}$$

Multiplicando (10.2) por -A y (10.3) por C, al sumar dichos productos se obtiene λ ; δ se obtiene de la suma del producto de (10.2) con B y (10.3) con -A.

□

A continuación se presenta la serie histórica de precios y retornos logarítmicos semanales de los activos seleccionados para el desarrollo de la aplicación. Posteriormente se presentan los retornos para cada uno de los nodos del árbol de escenarios correspondiente a la aplicación presentada en este trabajo.

CUADRO 10.1: Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
27-abr-15	46.45	109.05	210.72	0.41	-1.36	-0.44
20-abr-15	46.26	110.54	211.65	1.85	4.18	1.76
13-abr-15	45.41	106.01	207.95	-0.35	-1.63	-1.00
06-abr-15	45.57	107.75	210.04	1.21	2.47	1.73
30-mar-15	45.02	105.12	206.44	0.40	-0.38	0.34
23-mar-15	44.84	105.52	205.74	-1.00	-2.81	-2.24
16-mar-15	45.29	108.53	210.41	4.49	2.98	2.20
09-mar-15	43.30	105.34	205.83	-1.92	-1.95	-0.81
02-mar-15	44.14	107.41	207.50	-2.57	-0.92	-1.51
23-feb-15	45.29	108.40	210.66	-0.04	-0.01	-0.27
17-feb-15	45.31	108.41	211.24	1.80	1.39	0.69
09-feb-15	44.50	106.91	209.78	2.25	3.60	2.04
02-feb-15	43.51	103.13	205.55	1.81	1.99	3.01
26-ene-15	42.73	101.10	199.45	-0.28	-3.08	-2.73
20-ene-15	42.85	104.26	204.97	1.29	3.36	1.64
12-ene-15	42.30	100.82	201.63	2.25	-1.77	-1.29
05-ene-15	41.36	102.62	204.25	-2.29	-0.31	-0.58
29-dic-14	42.32	102.94	205.43	-3.00	-2.02	-1.45
22-dic-14	43.61	105.04	208.44	0.85	0.69	0.93
15-dic-14	43.24	104.32	206.52	1.80	1.59	2.76
08-dic-14	42.47	102.67	200.89	-5.56	-2.61	-3.48
01-dic-14	44.90	105.38	208.00	-0.18	-0.60	0.39
24-nov-14	44.98	106.01	207.20	0.92	2.04	0.25
17-nov-14	44.57	103.87	206.68	2.02	0.63	1.19
10-nov-14	43.68	103.22	204.24	0.30	1.58	0.44
03-nov-14	43.55	101.60	203.34	-1.23	0.20	0.83
27-oct-14	44.09	101.40	201.66	1.69	2.78	2.63
13-oct-14	42.22	93.00	188.47	0.12	-1.54	-1.09
06-oct-14	42.17	94.44	190.54	-3.84	-3.87	-3.09

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
29-sep-14	43.82	98.17	196.52	-3.65	-0.62	-0.70
22-sep-14	45.45	98.78	197.90	-2.43	-1.21	-1.40
15-sep-14	46.57	99.98	200.70	0.45	0.50	0.79
08-sep-14	46.36	99.48	199.13	-1.50	-0.41	-0.99
02-sep-14	47.06	99.89	201.11	0.55	0.11	0.20
25-ago-14	46.80	99.78	200.71	0.97	0.73	0.76
18-ago-14	46.35	99.05	199.19	0.58	1.68	1.76
11-ago-14	46.08	97.40	195.72	1.00	2.60	1.28
04-ago-14	45.62	94.90	193.24	-1.16	0.24	0.38
28-jul-14	46.15	94.67	192.50	-3.45	-2.16	-2.68
21-jul-14	47.77	96.74	197.72	-0.06	0.64	0.01
14-jul-14	47.80	96.12	197.71	0.29	0.89	0.56
07-jul-14	47.66	95.27	196.61	-3.42	-0.45	-0.81
30-jun-14	49.32	95.70	198.20	1.57	2.06	1.21
23-jun-14	48.55	93.75	195.82	-3.76	1.05	-0.06
16-jun-14	50.41	92.77	195.94	0.82	0.49	0.93
09-jun-14	50.00	92.32	194.13	-1.05	-0.54	-0.64
02-jun-14	50.53	92.82	195.38	1.09	1.64	1.39
27-may-14	49.98	91.31	192.68	0.90	1.58	1.22
19-may-14	49.53	89.88	190.35	0.00	2.44	1.22
12-may-14	49.53	87.71	188.05	0.20	1.04	0.05
05-may-14	49.43	86.80	187.96	-0.22	-0.79	-0.05
28-abr-14	49.54	87.49	188.06	1.83	1.50	0.95
21-abr-14	48.64	86.19	186.29	0.21	-0.01	-0.05
14-abr-14	48.54	86.20	186.39	1.72	2.45	2.65
07-abr-14	47.71	84.11	181.51	-1.27	-2.65	-2.66
31-mar-14	48.32	86.37	186.40	0.77	-0.78	0.49
24-mar-14	47.95	87.05	185.49	2.02	-2.22	-0.38
17-mar-14	46.99	89.00	186.20	0.49	0.37	0.83
10-mar-14	46.76	88.67	184.66	-3.53	-2.08	-1.93
03-mar-14	48.44	90.53	188.26	-0.19	0.21	1.05
24-feb-14	48.53	90.34	186.29	0.93	0.45	1.30
18-feb-14	48.08	89.93	183.89	0.69	0.13	-0.07

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
10-feb-14	47.75	89.81	184.02	2.74	2.83	2.39
03-feb-14	46.46	87.30	179.68	2.59	1.19	0.84
27-ene-14	45.27	86.27	178.18	-1.84	-0.54	-0.40
21-ene-14	46.11	86.74	178.89	0.00	0.00	-2.62
13-ene-14	46.11	86.74	183.64	-2.72	-1.31	-0.27
06-ene-14	47.38	87.88	184.14	0.34	0.66	0.68
30-dic-13	47.22	87.30	182.89	1.75	0.76	-0.52
23-dic-13	46.40	86.64	183.85	-1.48	-1.01	1.25
16-dic-13	47.09	87.52	181.56	2.80	1.17	1.92
09-dic-13	45.79	86.50	178.11	2.48	1.93	-1.58
02-dic-13	44.67	84.85	180.94	-2.26	-1.35	-0.03
25-nov-13	45.69	86.00	181.00	-1.41	0.31	0.11
18-nov-13	46.34	85.73	180.81	0.69	2.05	0.42
11-nov-13	46.02	83.99	180.05	0.44	0.04	1.54
04-nov-13	45.82	83.96	177.29	0.81	1.71	0.61
28-oct-13	45.45	82.54	176.21	-0.42	-0.33	0.15
21-oct-13	45.64	82.81	175.95	-1.85	-0.11	0.89
14-oct-13	46.49	82.90	174.39	1.45	0.91	2.40
07-oct-13	45.82	82.15	170.26	2.83	3.62	0.81
30-sep-13	44.54	79.23	168.89	0.81	-0.21	-0.01
23-sep-13	44.18	79.40	168.91	-0.52	0.42	-1.07
16-sep-13	44.41	79.07	170.72	-0.16	0.10	0.82
09-sep-13	44.48	78.99	169.33	2.18	1.18	1.96
03-sep-13	43.52	78.06	166.04	3.06	1.46	1.45
26-ago-13	42.21	76.93	163.65	2.59	1.92	-1.80
19-ago-13	41.13	75.47	166.62	-4.17	-1.58	0.48
12-ago-13	42.88	76.67	165.83	0.19	1.56	-2.08
05-ago-13	42.80	75.48	169.31	-0.05	-1.33	-0.96
29-jul-13	42.82	76.49	170.95	0.91	-0.63	1.08
22-jul-13	42.43	76.97	169.11	1.45	2.10	-0.04
15-jul-13	41.82	75.37	169.17	1.28	1.04	0.99
08-jul-13	41.29	74.59	167.51	1.86	-0.95	2.72
01-jul-13	40.53	75.30	163.02	4.05	3.68	1.61

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
24-jun-13	38.92	72.58	160.42	0.44	1.82	0.85
17-jun-13	38.75	71.27	159.07	-2.17	1.19	-2.55
10-jun-13	39.60	70.43	163.18	-4.83	-2.59	-0.99
03-jun-13	41.56	72.28	164.80	-0.81	-1.52	0.82
28-may-13	41.90	73.39	163.45	0.81	0.19	-1.13
20-may-13	41.56	73.25	165.31	-1.46	-0.22	-0.98
13-may-13	42.17	73.41	166.94	-0.85	-1.21	2.14
06-may-13	42.53	74.30	163.41	0.47	1.70	1.26
29-abr-13	42.33	73.05	161.37	0.83	1.28	1.96
22-abr-13	41.98	72.12	158.24	2.68	3.60	1.76
15-abr-13	40.87	69.57	155.48	3.79	2.15	-2.11
08-abr-13	39.35	68.09	158.80	-3.03	-2.68	2.32
01-abr-13	40.56	69.94	155.16	2.67	3.02	-0.97
25-mar-13	39.49	67.86	156.67	-0.56	-1.62	0.69
18-mar-13	39.71	68.97	155.60	-1.40	0.55	-0.15
11-mar-13	40.27	68.59	155.83	-1.23	0.12	0.25
04-mar-13	40.77	68.51	155.44	1.01	-0.38	2.17
25-feb-13	40.36	68.77	152.11	2.15	2.04	0.14
19-feb-13	39.50	67.38	151.89	-1.53	0.36	-0.14
11-feb-13	40.11	67.14	152.11	-0.37	-0.90	0.20
04-feb-13	40.26	67.75	151.80	-0.35	-0.35	0.37
28-ene-13	40.40	67.99	151.24	-2.76	0.49	0.66
22-ene-13	41.53	67.66	150.25	0.82	0.98	1.29
14-ene-13	41.19	67.00	148.33	1.99	-0.10	0.85
07-ene-13	40.38	67.07	147.07	-0.05	-0.28	0.48
31-dic-12	40.40	67.26	146.37	1.97	0.94	4.43
24-dic-12	39.61	66.63	140.03	2.48	4.37	-1.95
17-dic-12	38.64	63.78	142.79	-1.11	-2.20	0.48
10-dic-12	39.07	65.20	142.10	0.41	0.79	-0.22
03-dic-12	38.91	64.69	142.41	1.66	-0.37	0.18
26-nov-12	38.27	64.93	142.15	0.76	-1.33	0.56
19-nov-12	37.98	65.80	141.35	1.11	1.38	3.59
12-nov-12	37.56	64.90	136.37	5.28	4.09	-1.30

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
05-nov-12	35.63	62.30	138.16	-1.75	-1.80	-2.43
31-oct-12	36.26	63.43	141.56	-2.29	-2.71	0.15
22-oct-12	37.10	65.17	141.35	0.16	-0.28	-1.43
15-oct-12	37.04	65.35	143.39	-1.39	-0.50	0.35
08-oct-12	37.56	65.68	142.89	0.00	0.00	-2.25
01-oct-12	37.56	65.68	146.14	1.88	-1.51	1.50
24-sep-12	36.86	66.68	143.97	-1.77	-3.39	-1.31
17-sep-12	37.52	68.98	145.87	2.70	0.60	-0.93
10-sep-12	36.52	68.57	147.24	-3.55	-2.28	2.00
04-sep-12	37.84	70.15	144.33	-1.26	-0.04	2.22
27-ago-12	38.32	70.18	141.16	3.56	1.07	-0.25
20-ago-12	36.98	69.43	141.51	4.34	1.85	-0.47
13-ago-12	35.41	68.16	142.18	-0.23	-0.19	0.95
06-ago-12	35.49	68.29	140.84	-0.59	-0.04	1.06
30-jul-12	35.70	68.32	139.35	1.21	2.16	0.48
23-jul-12	35.27	66.86	138.68	1.43	1.90	1.61
16-jul-12	34.77	65.60	136.47	1.83	1.12	0.53
09-jul-12	34.14	64.87	135.75	3.21	0.98	0.19
02-jul-12	33.06	64.24	135.49	-0.33	1.35	-0.45
25-jun-12	33.17	63.38	136.10	0.42	-1.16	1.96
18-jun-12	33.03	64.12	133.46	-2.01	-0.06	-0.51
11-jun-12	33.70	64.16	134.14	2.77	1.27	0.78
04-jun-12	32.78	63.35	133.10	-2.47	0.57	3.78
29-may-12	33.60	62.99	128.16	2.11	0.19	-3.03
21-may-12	32.90	62.87	132.10	4.51	3.99	1.80
14-may-12	31.45	60.41	129.74	-3.68	-2.71	-4.43
07-may-12	32.63	62.07	135.61	0.18	2.05	-1.02
30-abr-12	32.57	60.81	137.00	-6.28	-5.39	-2.44
23-abr-12	34.68	64.18	140.39	-2.00	-0.81	1.75
16-abr-12	35.38	64.70	137.95	-3.58	-3.85	0.59
09-abr-12	36.67	67.24	137.14	1.29	2.35	-1.91
02-abr-12	36.20	65.68	139.79	3.03	-0.77	-0.73
26-mar-12	35.12	66.19	140.81	-2.03	-2.29	0.83

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
19-mar-12	35.84	67.72	139.65	-4.13	0.25	-0.46
12-mar-12	37.35	67.55	140.30	-0.35	0.91	1.97
05-mar-12	37.48	66.94	137.57	-1.75	0.63	0.19
27-feb-12	38.14	66.52	137.31	3.06	2.28	0.28
21-feb-12	36.99	65.02	136.93	-1.26	0.23	0.38
13-feb-12	37.46	64.87	136.41	-0.77	1.41	1.51
06-feb-12	37.75	63.96	134.36	1.44	0.83	-0.13
30-ene-12	37.21	63.43	134.54	1.63	1.53	2.04
23-ene-12	36.61	62.47	131.82	-1.30	0.67	-0.10
17-ene-12	37.09	62.05	131.95	3.29	2.70	2.39
09-ene-12	35.89	60.40	128.84	1.46	1.05	0.88
03-ene-12	35.37	59.77	127.71	5.28	2.70	1.75
27-dic-11	33.55	58.18	125.50	0.48	0.64	-0.71
19-dic-11	33.39	57.81	126.39	-1.04	3.49	3.87
12-dic-11	33.74	55.83	121.59	0.21	-0.45	-3.60
05-dic-11	33.67	56.08	126.05	3.57	2.20	0.95
28-nov-11	32.49	54.86	124.86	-6.61	-3.86	7.07
21-nov-11	34.71	57.02	116.34	0.69	0.70	-4.73
14-nov-11	34.47	56.62	121.98	9.97	6.83	-3.76
07-nov-11	31.20	52.88	126.66	-7.17	-4.66	0.94
31-oct-11	33.52	55.40	125.48	-5.26	-4.33	-2.46
24-oct-11	35.33	57.85	128.60	0.14	0.09	3.67
17-oct-11	35.28	57.80	123.97	-6.63	-1.95	1.14
10-oct-11	37.70	58.94	122.57	5.76	2.82	5.76
03-oct-11	35.59	57.30	115.71	-0.06	-1.52	2.24
26-sep-11	35.61	58.18	113.15	7.73	7.33	-0.34
19-sep-11	32.96	54.07	113.54	3.36	2.97	-6.79
12-sep-11	31.87	52.49	121.52	2.38	-3.11	4.72
06-sep-11	31.12	54.15	115.92	-8.44	-4.41	-1.65
29-ago-11	33.86	56.59	117.85	4.44	6.21	-0.10
22-ago-11	32.39	53.18	117.97	-7.26	-0.19	4.62
15-ago-11	34.83	53.28	112.64	0.00	0.28	-4.75
08-ago-11	34.83	53.13	118.12	3.27	6.01	-1.65

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
01-ago-11	33.71	50.03	120.08	-6.29	-6.84	-7.42
25-jul-11	35.90	53.57	129.33	-1.82	-0.48	-3.98
18-jul-11	36.56	53.83	134.58	-9.22	-7.46	2.17
11-jul-11	40.09	58.00	131.69	-3.19	-2.72	-2.04
05-jul-11	41.39	59.60	134.40	3.64	2.98	0.36
27-jun-11	39.91	57.85	133.92	0.00	0.00	5.46
20-jun-11	39.91	57.85	126.81	-3.64	-2.02	-0.19
13-jun-11	41.39	59.03	127.05	-2.53	1.92	-0.43
06-jun-11	42.45	57.91	127.60	6.95	6.29	-2.19
31-may-11	39.60	54.38	130.42	-4.35	1.09	-2.34
23-may-11	41.36	53.79	133.51	-0.82	-1.57	-0.07
16-may-11	41.70	54.64	133.61	-3.74	-3.08	-0.32
09-may-11	43.29	56.35	134.04	0.90	-1.90	-0.12
02-may-11	42.90	57.43	134.20	0.56	-0.59	-1.65
25-abr-11	42.66	57.77	136.43	0.05	-1.10	1.96
18-abr-11	42.64	58.41	133.78	-1.30	-0.10	1.31
11-abr-11	43.20	58.47	132.04	-4.83	-1.04	-0.62
04-abr-11	45.34	59.08	132.86	3.75	1.26	-0.22
28-mar-11	43.67	58.34	133.15	1.69	2.94	1.40
21-mar-11	42.94	56.65	131.30	-0.90	-0.53	2.73
14-mar-11	43.33	56.95	127.76	2.36	-0.89	-2.38
07-mar-11	42.32	57.46	130.84	2.13	1.08	-1.24
28-feb-11	41.43	56.84	132.47	2.84	4.30	0.11
22-feb-11	40.27	54.45	132.33	-1.63	-3.68	-1.65
14-feb-11	40.93	56.49	134.53	-2.70	-2.59	1.06
07-feb-11	42.05	57.97	133.11	0.64	0.55	1.48
31-ene-11	41.78	57.65	131.15	-1.76	-1.86	2.65
24-ene-11	42.52	58.73	127.72	1.88	0.50	-0.51
18-ene-11	41.73	58.44	128.37	0.43	1.83	-0.72
10-ene-11	41.55	57.38	129.30	2.71	2.92	1.68
03-ene-11	40.44	55.73	127.14	-0.64	0.09	1.10
27-dic-10	40.70	55.68	125.75	0.76	-2.34	0.12
20-dic-10	40.39	57.00	125.60	4.51	2.00	1.04

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
13-dic-10	38.61	55.87	124.30	-1.72	2.56	-0.14
06-dic-10	39.28	54.46	124.48	0.31	-0.51	1.29
29-nov-10	39.16	54.74	122.89	0.51	0.40	3.38
22-nov-10	38.96	54.52	118.80	-0.54	0.06	-1.25
15-nov-10	39.17	54.49	120.29	0.77	1.14	0.07
08-nov-10	38.87	53.87	120.20	3.40	2.06	-2.07
01-nov-10	37.57	52.77	122.72	-5.29	0.57	3.51
25-oct-10	39.61	52.47	118.49	0.33	-0.08	0.12
18-oct-10	39.48	52.51	118.35	-3.31	-2.19	0.55
11-oct-10	40.81	53.67	117.70	2.96	2.82	0.99
04-oct-10	39.62	52.18	116.54	-0.33	1.04	1.67
27-sep-10	39.75	51.64	114.61	-0.38	0.29	-0.18
20-sep-10	39.90	51.49	114.82	1.87	3.44	2.05
13-sep-10	39.16	49.75	112.49	2.35	1.50	0.90
07-sep-10	38.25	49.01	111.48	0.26	-1.32	0.53
30-ago-10	38.15	49.66	110.89	4.15	3.42	3.70
23-ago-10	36.60	47.99	106.86	1.35	2.94	-0.63
16-ago-10	36.11	46.60	107.53	0.47	1.27	-0.72
09-ago-10	35.94	46.01	108.31	4.41	4.31	-3.70
02-ago-10	34.39	44.07	112.39	0.15	-1.91	1.90
26-jul-10	34.34	44.92	110.27	-1.70	0.45	-0.13
19-jul-10	34.93	44.72	110.41	-6.00	-4.46	3.46
12-jul-10	37.09	46.76	106.66	3.88	2.05	-1.21
06-jul-10	35.68	45.81	107.96	0.59	-0.54	5.48
28-jun-10	35.47	46.06	102.20	3.91	3.81	-5.40
21-jun-10	34.11	44.34	107.87	0.32	-0.63	-3.52
14-jun-10	34.00	44.62	111.73	6.91	4.94	1.85
07-jun-10	31.73	42.47	109.68	-3.74	-6.38	2.64
01-jun-10	32.94	45.27	106.82	-4.66	-3.75	-2.36
24-may-10	34.51	47.00	109.37	3.93	3.24	0.24
17-may-10	33.18	45.50	109.11	5.04	0.91	-4.29
10-may-10	31.55	45.09	113.89	-3.40	-1.12	2.34
03-may-10	32.64	45.60	111.26	-0.24	1.68	-6.57

Continuación del Cuadro 10.1
(Precio y retorno logarítmico semanal de cada activo)

Fecha	Precio (US\$)			Retorno logarítmico (%)		
	IEV	QQQ	SPY	IEV	QQQ	SPY
26-abr-10	32.72	44.84	118.81	-2.77	-4.56	-2.49
19-abr-10	33.64	46.93	121.81	3.14	3.29	2.03
12-abr-10	32.60	45.41	119.36	-12.20	-8.10	-0.16
09-abr-10	36.83	49.24	119.55			

CUADRO 10.2: Retornos al final del período

Nodo	IEV	QQQ	SPY
0	0.0457	0.1566	0.1116
1	0.0480	0.1644	0.1172
2	0.0434	0.1488	0.1061
3	0.0448	0.1535	0.1094
4	0.0503	0.1723	0.1228
5	0.0480	0.1644	0.1172
6	0.0528	0.1727	0.1172
7	0.0480	0.1612	0.1114
8	0.0528	0.1809	0.1289
9	0.0456	0.1562	0.1114
10	0.0443	0.1518	0.1082
11	0.0465	0.1592	0.1135
12	0.0434	0.1488	0.1061
13	0.0493	0.1688	0.1203
14	0.0470	0.1612	0.1149
15	0.0448	0.1535	0.1094
16	0.0435	0.1489	0.1061
17	0.0513	0.1757	0.1253
18	0.0498	0.1705	0.1216
19	0.0603	0.1895	0.1253
20	0.0528	0.0513	0.1757