
El teorema del mapeo abierto de Riemann

Elder Raúl Alejandro Guzmán Romero



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



El teorema del mapeo abierto de Riemann

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por
Elder Raúl Alejandro Guzmán Romero
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala, 2024

Vo.Bo.:



MSc. Juan Fernando Valdés Cruz

Tribunal Examinador:



MSc. Juan Fernando Valdés Cruz



Máster. Dorval Carías



Phd. Alan Reyes

Fecha de aprobación:

Guatemala, 6 de diciembre de 2024.

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios por su bondad en mi vida. Agradezco a mis padres, hermanos, a mi perrita Eralu y al resto de mi familia quienes han servido de soporte durante mi vida estudiantil. También agradezco a mis profesores que guiaron mi aprendizaje y en especial a mi asesor Juan Valdés por su apoyo durante el proceso de redacción del presente trabajo.

| | |
|-------------------------------------------------------------|-------------|
| Agradecimientos | III |
| Lista de figuras | VI |
| Resumen | VII |
| Abstract | VIII |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Objetivos | 2 |
| 2.1. Objetivo general | 2 |
| 2.2. Objetivos específicos | 2 |
| 3. Justificación | 3 |
| 4. Antecedentes | 4 |
| 5. Funciones biholomorfas | 5 |
| 5.1. Funciones holomorfas | 5 |
| 5.2. Mapeos conformes | 9 |
| 5.3. Automorfismos del plano complejo | 12 |
| 5.4. Automorfismos del disco | 13 |
| 5.5. Automorfismos de la mitad superior del plano | 16 |
| 5.6. El disco unitario y el semiplano superior | 20 |
| 5.7. Mapeo de Joukowski | 21 |
| 5.7.1. Flujo de un fluido ideal | 23 |
| 5.8. Transformaciones de fracciones lineales | 25 |
| 5.8.1. Estructura algebraica | 33 |
| 6. Teorema del mapeo de Riemann | 36 |
| 6.1. Teorema de Montel | 36 |
| 6.2. El teorema del mapeo abierto de Riemann | 39 |
| 6.3. Espacios simplemente conexos | 42 |

| | |
|---------------------------------------------------------|-----------|
| 7. Aplicación en ecuaciones diferenciales | 46 |
| 7.1. Ecuación de Laplace | 46 |
| 7.1.1. Ecuación de calor | 47 |
| 7.2. Problema de Dirichlet | 49 |
| 8. Superficies de Riemann | 53 |
| 8.1. La esfera de Riemann | 55 |
| 8.1.1. Automorfismos de la esfera de Riemann | 56 |
| 8.2. Funciones sobre superficies de Riemann | 59 |
| 8.3. Integración en una superficie de Riemann | 63 |
| 8.4. Dirichlet en la esfera | 66 |
| 9. Conclusiones | 70 |
| 10.Recomendaciones | 71 |
| Bibliografía | 72 |
| A. Ecuaciones de Cauchy-Riemann | 73 |
| A.1. Coordenadas en z y su conjugado | 74 |
| A.2. Funciones armónicas | 75 |

Lista de figuras

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1. Univalor de logaritmo | 6 |
| 5.2. Mapeo lineal $f(z) = az + b$ preserva ángulo entre curvas γ_1 y γ_2 | 10 |
| 5.3. Automorfismo del disco con $\theta = \pi$ y $\alpha = 0$ | 13 |
| 5.4. Automorfismo del semiplano superior $g(z) = 2z + 5$ | 18 |
| 5.5. Flujo de fluido pasando una placa. | 24 |
| 5.6. Flujo pasando por un disco sólido | 25 |
| 5.7. Inversión $f(z) = \frac{1}{z}$ | 29 |
| 5.8. Transformar un disco a un semiplano mediante traslaciones intermedias. | 34 |
| 6.1. Mapeo hacia el disco unitario | 40 |
| 6.2. Cinturón no acotado | 45 |
| 7.1. Ecuación de calor en una región con forma de lente | 50 |
| 8.1. Cartas complejas holomorficamente compatibles | 54 |
| 8.2. Proyección estereográfica | 56 |
| 8.3. Mapeo holomorfo entre superficies | 60 |
| 8.4. Biholomorfismo entre cono y huacal | 61 |
| 8.5. Curva sobre la esfera | 64 |

En el presente trabajo estudiamos las diferentes clases de abiertos simplemente conexos de los números complejos, entre los cuales podemos encontrar transformaciones que preservan ángulos entre rectas y que sean biyectivas. El teorema del mapeo abierto de Riemann nos da la respuesta. Por esto estudiamos los automorfismos y avanzamos hacia las funciones biholomorfas, vemos cómo transforma el disco unitario hacia el semiplano superior. Luego vemos familias de funciones biholomorfas y algunos usos de estas funciones en campos aplicados. También usamos este teorema como herramienta para solucionar ecuaciones diferenciales, hallar funciones armónicas en dominios poco usuales y un método para resolver el problema de Dirichlet. Finalmente concluimos con una introducción a las superficies de Riemann y damos un breve vistazo a una generalización del teorema del mapeo abierto de Riemann.

Abstract

In present work we study the different types of simply connected open sets of the complex numbers among which exist transformations that preserve angles between curves and are also bijective. The open Riemann mapping theorem gives us the answer. We proceed to study the automorphisms to advance to the study of the biholomorphic functions. We see how the unit disc transforms into the upper half plane. Then we study some family of biholomorphic functions and some uses of this type of function in applied fields. Also, we use this theorem as a tool for finding solutions of differential equations, finding harmonic functions in unusual regions, and as a method to solve Dirichlet's problem. Finally, we conclude with an introduction of Riemann's surfaces and a brief study of a generalization of the theorem.

CAPÍTULO 1

Introducción

Las funciones holomorfas han sido tema de estudio desde el desarrollo del análisis complejo, ocupando un lugar central dentro del análisis matemático. Quizá sea esto por su buen comportamiento o debido a poseer distintas formas de representación. Además, poseen propiedades relevantes para la topología como el ser mapeos abiertos, aunque esto no baste para ser un homeomorfismo. Sin embargo, ¿qué condición provoca que un mapeo holomorfo sea también un homeomorfismo? De esto se desprenden las funciones biholomorfas, que además de ser holomorfismos son también homeomorfismos. Estas funciones además poseen distintas propiedades, entre ellas que son mapeos conformes.

Estas funciones generan varias propiedades, entre ellas se encuentra el teorema del mapeo abierto de Riemann. Este nos relaciona dos abiertos propios de los complejos y simplemente conexos distintos del vacío por medio de un biholomorfismo. Esto indica que existen tres clases homeomorfas de abiertos simplemente conexos en el plano complejo. Pese a que demostramos la existencia, el encontrar explícitamente la función biholomorfa entre dos abiertos es un problema totalmente distinto. Esta propiedad es útil por varias razones, entre ellas nos permite trasladar entre abiertos distintas soluciones a ecuaciones diferenciales. Esto unido a que las funciones holomorfas se componen de un par de conjugados armónicas permite simplificar algunos problemas, como las soluciones a ecuaciones de Laplace.

La característica de los abiertos simplemente conexos en los números complejos es tan deseada que se ha buscado extender esta propiedad a espacios más complicados. Por lo que el teorema del mapeo abierto de Riemann posee varias generalizaciones, por lo que terminamos viendo una breve introducción a las superficies de Riemann y la generalización del teorema del mapeo abierto de Riemann, que nos permite clasificar las superficies de Riemann simplemente conexas.

2.1. Objetivo general

Clasificar a los abiertos simplemente conexos del plano según propiedades topológicas y analíticas.

2.2. Objetivos específicos

- Identificar los automorfismos de cada superficie de Riemann simplemente conexa.
- Estudiar los abiertos que son equivalentes con el disco unitario bajo biholomorfismos.
- Resolver el problema de Dirichlet mediante una adaptación sobre un abierto que facilite su resolución.
- Estudiar la clasificación de objetos de mayor dimensión.

Los abiertos en el plano complejo son variados, existe un gran número de ellos y por eso usualmente se trabaja con su base. El comportamiento generalmente difiere de uno a otro y por lo mismo se buscan clasificar por características comunes, como lo son los simplemente conexos. Pero, aun así, su complejidad puede ser abrumadora en ocasiones con contornos como la curva de Koch, siendo acotada y no diferenciable en todo punto. Ahí es donde entra el teorema del mapeo abierto de Riemann, indicándonos la existencia de un mapeo conforme y biyectivo entre cualquier sea dos abiertos del plano complejo, exceptuando todo el plano, propiedad que se cumple únicamente en dos dimensiones.

La existencia de dichos mapeos permite ver la equivalencia conforme de abiertos que se relacionan únicamente bajo funciones elementales, también pueden encontrarse soluciones a ecuaciones diferenciales en diferentes dominios mediante su solución en un abierto mucho más simple de trabajar e incluso inspira la clasificación de las superficies de Riemann en pocas clases.

CAPÍTULO 4

Antecedentes

El análisis complejo empezó a estudiarse en el siglo XVIII, con matemáticos brillantes interesados en esta área dando grandes aportes, como lo fue Riemann. Georg Friedrich Bernhard Riemann nace en septiembre 17 de 1826, hijo de un pastor luterano. En 1846 comienza su acercamiento al estudio de la matemática, cuando entra a la universidad de Göttingen y bajo la guía de Carl Friedrich Gauss decide cambiar su estudio de teología por el de la matemática, cambiándose también a la universidad de Berlín. En 1851 Riemann realiza su tesis de doctorado hablando sobre funciones en los complejos, donde enuncia el teorema del mapeo abierto. Su prueba inicial usa el principio de Dirichlet, el cual es también usado por él para resolver el problema de Dirichlet. Sin embargo, posteriormente Karl Weierstrass encuentra que uno de los principios asumidos no es universalmente válido, dando un contraejemplo. Luego, David Hilbert prueba que, para ciertos casos, incluidas algunas hipótesis que propone Riemann, dicho principio se cumple. Pero era necesario imponer restricciones adicionales sobre el contorno del abierto, que para un abierto simplemente conexo en general no son ciertas. Por eso, en 1900 William Fogg Osgood da la primera prueba rigurosa del teorema, estableciendo así el teorema del mapeo abierto de Riemann. Pero ahí no quedó el trabajo sobre la prueba, ya que, en 1912 Constantin Carathéodory da una prueba alterna usando el concepto de familias normales, la cual se vuelve el estándar mostrado en los libros de texto. Aun así, esta prueba hace uso de las superficies de Riemann por lo que es simplificado por Paul Koebe, desechando dichas superficies. Finalmente, las pruebas continuaron refinándose por los matemáticos Lipót Fejér, Frigyes Riesz, Alexander Ostrowski y Carathéodory.

Funciones biholomorfas

Los mapeos biholomorfos son un conjunto de funciones analíticas y biyectivas, lo cual las hace un grupo selecto. Esta especificidad les otorga una amplia gama de propiedades, varias de ellas heredadas. Este tipo de funciones son las de interés, comencemos por recordar algunas propiedades de las funciones holomorfas.

5.1. Funciones holomorfas

Las funciones analíticas son el foco principal de estudio del análisis complejo. Esta rama clásica de matemática ha sido ampliamente estudiada teniendo grandes exponentes como el suizo Leonhard Euler, el francés Augustin-Louis Cauchy o los alemanes Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann y Karl Weierstrass. Por eso mismo se han enunciado variedad de propiedades conocidas y otras no tanto, recordemos algunas características de este conjunto de funciones, comencemos por ver 2 ejemplos.

Ejemplo:

Piense en la función $\arg(z)$ que mapea hacia el argumento de un número complejo dado. Una de sus características principales es que esta función es periódica, pero también se caracteriza por tener múltiples valores para un mismo número. Por ejemplo, al evaluar $z = 1$ tenemos que $\arg(1) = 0$ pero también $\arg(1) = 2\pi$, en general se puede decir que $\arg(1) = 2\pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$. Pero esto no es una particularidad de la unidad, esto sucede también con todo número en \mathbb{C}^* . Inclusive existen curvas continuas, como la circunferencia de radio 1, que terminan teniendo múltiples valores para un mismo número. Esto al dar la vuelta completa añadiendo 2π al valor inicial del argumento.

Dándose cuenta de este aspecto se puede ver que si se toma la circunferencia de radio 1 pero centrada en 2 el valor de la función argumento a lo largo de la curva permanece con un solo valor. Esto dado que nunca da la vuelta completa al eje, ya que al llegar a $2+i$ o $2-i$ debe regresar. De aquí se puede deducir que si una curva nunca completa una vuelta alrededor del origen entonces la función argumento a lo largo

de la curva permanece siendo univaluada. Otra forma de ver esto, es que si nuestra curva simplemente cerrada delimita una región Ω , entonces el origen no pertenece a Ω por nunca ser encerrada por esta curva. Por lo que intuitivamente para la función argumento podemos decir que si se tiene una región Ω tal que $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple y $0 \notin \Omega$, entonces $\arg(z)$ es univaluada para todo $z \in \Omega$. Cabe resaltar que 0 es un polo de $\arg(z)$.

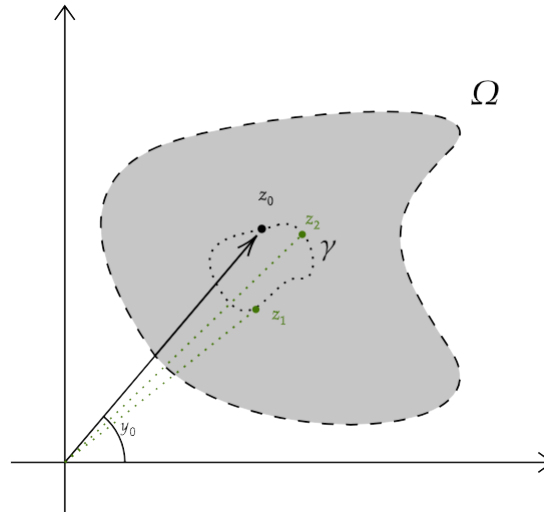


Figura 5.1: Univaluar de logaritmo

Ejemplo:

Teniendo en mente el ejemplo anterior, vea una función más compleja. Considere la función logaritmo complejo $\log(z)$ en una región Ω tal que ninguna curva cerrada rodea el origen. Tome ahora un punto z_0 con $\log(z_0) = x_0 + iy_0$ y sea $\gamma \subset \Omega$ una curva tal que $z_0 \in \gamma$. Esta ruta determinada por γ es continua, por lo que el conjunto su imagen es continua. Al evaluar recorriendo la curva en un punto z_1 con $\log(z_1) = x_1 + iy_1$ es evidente que $|y_0 - y_1| < 2\pi$, por lo que sin importar el recorrido elegido $\log(z_0) = z_0 + iy_0$. Como nuestro eje, el origen, no está en el dominio siempre se llega a un punto donde el valor de la parte imaginaria empieza a regresar al valor y_0 para así poder cerrar la curva.

A diferencia de la función definida en todo el plano complejo, cuando el origen está contenido en el dominio se puede construir una curva γ que encierre al origen. Esto hace que $\log(\cdot)$ pueda tener parte imaginaria distinta para un mismo punto aun conservando la continuidad de la función, dando como resultado que $\log(z_0) = x_0 + i(y_0 + 2\pi k)$ con k entero. Un ejemplo de esto se da al determinar $z_0 = 1$ y $\gamma = \partial\mathbb{D}$ ya que $\log(1) = 0$ pero si evaluamos alrededor de la circunferencia terminamos obteniendo que $\log(1) = 2\pi i$. Por lo cual si se restringe el dominio Ω de forma que no contenga el origen se consigue hacer que la función logaritmo sea univaluada.

Esta idea inspira el estudio de funciones holomorfas que dejen de tener problemas de múltiples valores. En ocasiones restringen la rama permitida, pero esto provoca problemas en la continuidad de la imagen; sin embargo, como podemos apreciar en el ejemplo anterior, si restringimos el dominio eliminamos ambos problemas. Vea entonces el primer lema.

Lema 5.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces f es univaluada en todo punto $z \in \Omega$.*

Demostración. Supongamos que no lo es, entonces f es multivaluada. En especial en el punto $z_0 \in \Omega$, por un lado se tiene que $f(z_0, 1) = w$ y considerando otro de sus valores $f(z_0, 2) = w'$, dependiendo de la forma de evaluarse. Haciendo uso de la integral de Cauchy para un disco D lo suficientemente pequeño centrado en z_0 se tiene que

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(z)}{z - z_0} dz = w' \Rightarrow f(z_0, 1) = f(z_0, 2),$$

por lo que el valor es único. \square

Cabe resaltar que pide el dominio simplemente conexo, ya que si se toma el disco puntado y la función logaritmo, es evidente que esta función permanece multivaluada. Además, hace uso de una propiedad de funciones analíticas en regiones simplemente conexas conocida como la integral de Cauchy. Esta propiedad es ampliamente conocida, pero la importancia no queda ahí, esta es utilizada para la prueba de distintos lemas como el siguiente.

Lema 5.2 (Desigualdad de Cauchy). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y D es un disco de radio R centrado en $z_0 \in U$ con su cerradura dentro de la región U , entonces*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! \|f\|_C}{R^n} \quad (5.1)$$

donde $\|f\|_C = \sup_{z \in C} f$, con C siendo el contorno del disco D .

Demostración. Haciendo uso del cambio de variable de integración $z - z_0 = Re^{i\theta}$, al aprovechar que la integral de Cauchy se integrará sobre el borde del disco D , es decir, sobre C .

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^{n+1}} Re^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\|f\|_C}{(Re^{i\theta})^n} id\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\|f\|_C}{R^n} 2\pi \\ &= \frac{n! \|f\|_C}{R^n}, \end{aligned}$$

mostrando lo buscado. \square

Vea que evaluando $n = 0$ en la desigualdad se obtiene que:

$$|f(z_0)| \leq \|f\|_C,$$

sugiriendo que en el borde de la región es dónde se maximiza la norma de la función. Este resultado da pie al principio del módulo máximo, el cual nos indica que una función holomorfa no alcanza un máximo local estricto dentro de un abierto. Dicho teorema se presenta en diferentes versiones, las cuales son equivalentes entre sí, pero la que se usará en esta ocasión es la siguiente.

Teorema 5.3 (Principio del módulo máximo). *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y la función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $z_0 \in D$ tal que*

$$\forall z \in D, |f(z_0)| \geq |f(z)|,$$

entonces f es constante en D .

El no alcanzar un máximo local estricto implica que una función f debe ser constante o no tener máximo local. Esto es equivalente a decir que el máximo de f estará en el borde de la región Ω , este resultado tiene aplicaciones en campos como la optimización. Antes de proceder con la demostración del teorema, es necesario ver un resultado previo, que es vital en la prueba.

Lema 5.4. *Supongamos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto $U = B_\epsilon(z_0)$, $\epsilon > 0$. Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in U$, entonces $f(z)$ es constante en U .*

Demostración. Tome $0 < \rho < \epsilon$, usando la integral de Cauchy para el borde de una bola abierta centrada en z_0 y de radio ρ , se sabe que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Parametrizando el borde de la bola como $z = z_0 + \rho e^{it}$, $\forall z \in \partial B_\rho(z_0)$ con $t \in [0, 2\pi)$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Deduciendo que:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt.$$

Pero por hipótesis $|f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z)| \leq |f(z_0)|$, dando que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,$$

juntando ambas desigualdades

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} 0 &= |f(z_0)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|] dt. \end{aligned}$$

Note que el integrando es una función continua de t y además

$$|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)| \Rightarrow 0 \leq |f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|,$$

para todo $t \in [0, 2\pi)$, como la integral sobre t da cero para términos no negativos, concluimos que

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + \rho e^{it})|,$$

teniendo que el módulo es constante para cualquier $0 < \rho < \epsilon$. Pero toda función holomorfa definida sobre un abierto conexo con módulo constante es constante lo que implica $f(z) = f(z_0)$, lo buscado. \square

Vea que el lema anterior se extiende para cualquier abierto U conexo al considerarlo una unión de bolas abiertas con intersecciones no vacías, ya que el ser una bola abierta es únicamente una simplificación del dominio. Con este lema probado se puede proceder con la demostración del principio del módulo máximo.

Demostración teorema 5.3. El camino a tomar consiste en construir dos conjuntos mutuamente excluyentes, uno consta de todos los puntos en los que la función es constante y el segundo conjunto en aquellos que la función toma valores distintos para así probar que el segundo conjunto es vacío, por ende la función es constante en todo el dominio.

Por lema 5.4 la función f es constante en toda bola centrada en z_0 contenida en D . Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \bigcup \{B_{\epsilon_z}(z) \subset D : f(z) = f(z_0)\},$$

y

$$B = \bigcup \{B_{\epsilon_z}(z) \subset D : f(z) \neq f(z_0)\},$$

vea que el ϵ_z es dependiente de z , no es necesariamente igual para todo z . Como D es abierto se sabe que existe tal ϵ_z por ser z un punto interior. Note que $A \cap B \neq \emptyset$ de lo contrario, si la intersección es no vacía, entonces

$$\exists z' \in D \ni z' \in A \cap B \Rightarrow z' \in A \text{ y } z' \in B,$$

esto dice que $f(z') = f(z)$ y $f(z') \neq f(z)$, lo cual es una contradicción. Además, $A \cup B = D$ dado que la imagen de un elemento $z_0 \in D$ o es igual a la imagen de z o no lo es. Pero entonces A, B es una desconexión del conjunto D , el cual por hipótesis es conexo ($\rightarrow \leftarrow$). Por lo tanto $B = \emptyset$, ya que el lema 5.4 no asegura que A es no vacío, finalmente $A = D$ implicando que f es constante, demostrando lo buscado. \square

Con el principio del módulo máximo sabemos que el máximo de una función no pertenece al interior del dominio.

Colorario 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ un mapeo holomorfo. Entonces, f alcanza su máximo en $\partial\Omega$, el contorno de Ω .

Demostración. Como f analítica, entonces f es continua, además $\bar{\Omega}$ es compacto por lo que f alcanza su máximo en $\bar{\Omega}$. Usando el principio del módulo máximo, tal valor no puede ser en el interior de Ω , si no es constante, por lo que alcanza el máximo en $\partial\Omega$. \square

5.2. Mapeos conformes

Los mapeos denominados conformes son funciones con la característica de preservar ángulos localmente entre curvas dirigidas. De manera formal:

Definición. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, entonces el mapeo holomorfo $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es **conforme** si y solo si su derivada f' es no nula en todo U , en notación

$$f'(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in U.$$

Un ejemplo de una mapeo conforme son las transformaciones lineales $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. Supongamos que se tiene dos curvas $\gamma_1 \neq \gamma_2$, entonces si entre estas curvas hay un ángulo

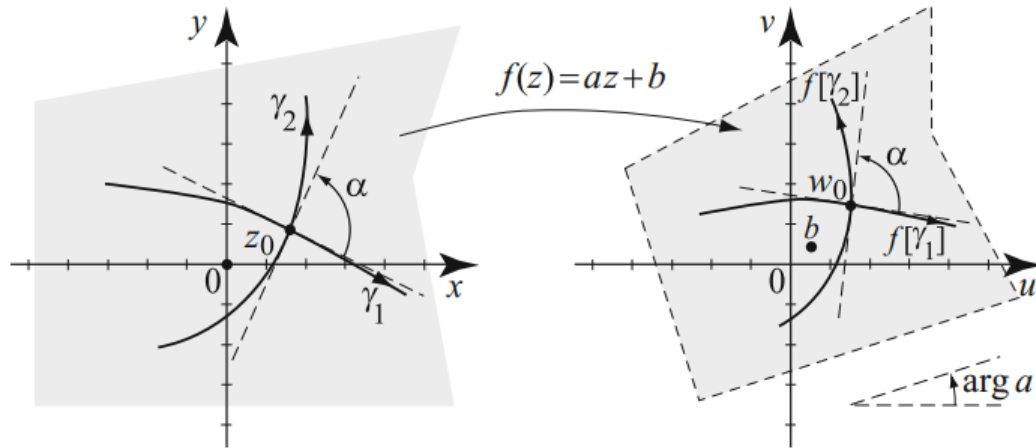


Figura 5.2: Mapeo lineal $f(z) = az + b$ preserva ángulo entre curvas γ_1 y γ_2 .

α entonces entre $f[\gamma_1]$ y $f[\gamma_2]$ también hay un ángulo α , pese a que hayan rotada por un argumento a , dilatado por un factor $|a|$ y trasladado una distancia b , como se aprecia en la Figura 5.2.

El conservar los ángulos tiene varias aplicaciones como la cartografía, las ecuaciones de Maxwell y la teoría de la relatividad. Siguiendo esta línea de pensamiento de los mapeos analíticos, una condición suficiente para ser una función conforme es:

Lema 5.5. Si $f : U \rightarrow V$ es holomorfa e inyectiva, entonces f es conforme, dicho de otra forma:

$$\forall z \in U, f'(z) \neq 0$$

Además, la inversa de f definida en $f(U)$ es holomorfa.

Demostración. Se procede por contradicción, supongamos que para algún $z_0 \in U$ se da $f'(z_0) = 0$. Entonces

$$f(z) - f(z_0) = a(z - z_0)^k + G(z) \quad \forall z \text{ lo suficientemente cerca de } z_0$$

con $a \neq 0, k \geq 2$ y G con orden de desvanecimiento $k+1$ en z_0 . Para un w lo suficientemente pequeño tenemos

$$f(z) - f(z_0) - w = F(z) + G(z), \quad \text{donde } F(z) = a(z - z_0)^k - w.$$

Dado que $|G(z)| < |F(z)|$ en un círculo centrado en z_0 y como F tiene al menos 2 ceros en este círculo, por el teorema de Rouché sabemos que $f(z) - f(z_0) - w$ tiene al menos 2 ceros. Como $f'(z) \neq 0$ para todo $z \neq z_0$ que sean lo suficientemente cercanas a z_0 , tenemos que las raíces son distintas, *i.e.*, f no es inyectiva una contradicción. Entonces $\forall z_0 \in U, f'(z_0) \neq 0$.

Como f es inyectiva entonces denotemos $g : f(U) \rightarrow U$ la inversa de f en su imagen. Sea $w_0 \in f(U)$ y w cercano a w_0 , con $w = f(z)$ y $w_0 = f(z_0)$. Si $w \neq w_0$ tenemos:

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}, \quad (5.2)$$

como $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in U$ entonces si dejamos $z \rightarrow z_0$ tenemos que (5.2) da la derivada de g en w_0 , por lo cual g' existe en todo punto de $f(U)$, es decir, g es holomorfa en $f(U)$. \square

Este lema brinda una forma de verificar si un mapeo es conforme de manera relativamente sencilla, la cual, también nos asegura la existencia de un mapeo inverso que es también holomorfo.

Antes de entrar en detalle sobre este tipo de funciones veamos una propiedad adicional que será de gran ayuda en el desarrollo de la teoría.

Teorema 5.6. *Sea una región $\Omega \subset \mathbb{C}$, supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica e inyectiva. Entonces, f mapea $\partial\Omega$ sobre $\partial f[\Omega]$ de forma sobreyectiva.*

Antes de probar el teorema, hay que entender que quiere decir que mapea el contorno de la región, dado que f esta definida sobre Ω . Este concepto trabaja sobre secuencias convergentes $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \alpha$ de Ω tales que $\alpha \in \partial\Omega$ (o $\alpha = \infty$ en caso la región sea no acotada), entonces diremos que f mapea el contorno de Ω en el contorno de su imagen si el punto de convergencia β de la sucesión de imágenes $\{f(z_n)\}$ no pertenece a $f[\Omega]$, en consecuencia es parte de del contorno.

Demostración. La prueba consiste de dos partes. Primero, se prueba que f mapea puntos de acumulación en puntos de acumulación. Segundo, mostramos que el mapeo entre contornos es sobreyectivo.

La primera parte se prueba de forma indirecta, mostrando que para toda secuencia de Ω el límite de las imágenes esta en el interior de $f[\Omega]$ solo si el límite esta en el interior del dominio, en consecuencia si el límite en el contorno no queda en el interior entonces se encuentra en el borde. Considere una secuencia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Ω tales que $f(z_n) \rightarrow \beta$ con $\beta \in f[\Omega]$. Recordando que f es analítica y Ω una región, entonces la imagen $f[\Omega]$ es una región. Haciendo uso del lema 5.5 tenemos que f tiene una inversa f^{-1} holomorfa, por continuidad

$$f^{-1}(f(z_n)) \rightarrow f^{-1}(\beta) \Rightarrow z_n \rightarrow f^{-1}(\beta),$$

dado que $f^{-1}(\beta)$ es un elemento interior, se probó la primera parte. Es decir, si $\alpha_0 \in \partial\Omega$ y $z_n \rightarrow \alpha_0$ entonces las imágenes no pueden converger a algún punto interior de $f[\Omega]$.

Para la segundo parte, se trabaja con el espacio compacto $\overline{\mathbb{C}}$, para evitar separación por casos. Tome w en el contorno de $f[\Omega]$, entonces existe una secuencia $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} \in f[\Omega]$ que converge a w . De esta secuencia se recupera $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Omega$ donde $f(z_n) = w_n$. Ahora, por Bolzano-Weierstrass la secuencia $\{z_n\}$ tiene una subsucesión $\{z_{n_i}\}$ que converge a z' la cual esta en $\partial\Omega$, por la primera parte. En consecuencia,

$$\{f(z_{n_i})\} = \{w_{n_i}\} \rightarrow f(w),$$

mapeando el contorno de forma sobreyectiva. □

Finalmente estudiemos las funciones biholomorfas. Pero, ¿qué son las funciones biholomorfas?

Definición. Sean $U, V \subset \mathbb{C}$, una función holomorfa y biyectiva $f : U \rightarrow V$ es llamado un **biholomorfismo** entre U y V .

De la definición se puede ver que, si f es un biholomorfismo, entonces también es un mapeo conforme. Esto conlleva que hereda las propiedades de las funciones biyectivas y las funciones analíticas. Por ejemplo, conocemos que una función biyectiva f tiene inversa biyectiva f^{-1} , pero uniendo esto junto al lema 5.5 concluimos que f^{-1} es holomorfa, por lo que podemos decir que f^{-1} también es un biholomorfismo.

Colorario 2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ y $f : U \rightarrow f(U)$, si f es holomorfa y biyectiva, entonces f^{-1} es holomorfa y biyectiva.*

Un ejemplo trivial es la función identidad I , la cual es su propia inversa. Pero veamos mejor ejemplos sustanciosos, estudiemos un conjunto de mapeos denominados automorfismos.

5.3. Automorfismos del plano complejo

Definición. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow B$ una función holomorfa y biyectiva. Se dice que f es un **automorfismo**, si A el dominio y B contradominio son el mismo conjunto, *i.e.*, $f : A \rightarrow A$ es un biholomorfismo.

Estudiando los automorfismos se puede comenzar a entender el comportamiento de los biholomorfismo y generar ideas de sus propiedades. Quizá el automorfismo en el que se piensa primera es el mapeo identidad, que naturalmente cumple con todas las condiciones estipuladas. Pero buscando una función no trivial nos encaminamos a pensar en traslaciones al aprovechar que \mathbb{C} no es acotado. Pero de esta misma propiedad podemos deducir que los escalados cumplen, juntando ambas propiedades nacen los mapeos lineales que no se deforman en un punto. Pero, ¿existen otros tipos de automorfismos del plano? La respuesta la encontramos en el siguiente teorema.

Teorema 5.7. *Todo automorfismo f del plano complejo \mathbb{C} es un mapeo lineal de la forma:*

$$f(z) = az + b, \quad (5.3)$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

La prueba de la implicación de ida es directa, mostrar que un mapeo lineal es holomorfo y biyectivo es simple en comparación con la implicación de regreso. Esta última consta de primero mostrar que todos los automorfismo son polinomios para después concluir que son de grado 1, pero para poder proceder con esto necesitamos un pequeño lema.

Lema 5.8. *Sea $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función inyectiva y holomorfa en el disco puntuado. Entonces 0 es una singularidad removible de f .*

Demostración. Procedemos por contradicción, comencemos asumiendo que 0 es, de hecho, una singularidad esencial de la función inyectiva $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ que es holomorfa. Tome B_1 y B_2 subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos del disco puntuado, tales que $0 \in B_1$. Entonces por el teorema de Casorati-Weierstrass $f(B_1 - \{0\})$ es denso en \mathbb{C} . Además, por el teorema del mapeo abierto sabemos que $f(B_2)$ es un abierto de los complejos, por lo que $f(B_1 - \{0\}) \cap f(B_2) \neq \emptyset$, entonces podemos tomar $z_0 \in B_1$ y $w_0 \in B_2$ tales que $f(z_0) = f(w_0) \in f(B_1 - \{0\}) \cap f(B_2)$. Pero como f es inyectiva $z_0 = w_0$, una contradicción, concluyendo que 0 es una singularidad removible. □

Probado este lema podemos proceder con el plan trazada para probar la forma general de los automorfismo del plano complejo, empecemos con la prueba del teorema 5.7.

Demostración teorema 5.7. Comencemos probando que los mapeos lineales con $a \neq 0$ son automorfismos del plano. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida por $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y a distinto de cero. Sabemos que f es holomorfa, probemos entonces que es biyectiva. Tome dos números complejos z_1 y z_2 tales que:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) \\ az_1 + b &= az_2 + b \\ az_1 &= az_2 \\ z_1 &= z_2, \end{aligned}$$

por lo cual son el mismo número, implicando que f es inyectiva. Ahora mostremos que es sobreyectiva, tomemos $w \in \mathbb{C}$ y considere $z_0 = \frac{w-b}{a}$ aprovechando que a es no nulo, entonces

$$f(z_0) = a \frac{w-b}{a} + b = (w-b) + b = w, \tag{5.4}$$

por lo cual es sobreyectivo. Finalmente, hacemos uso del corolario 2 para concluir que f es un automorfismo del plano complejo.

Ahora mostremos la otra dirección. Suponga que la función f es un automorfismo del plano, como es analítica podemos expresarla como:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \tag{5.5}$$

definamos un otra función

$$g(z) = f(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z^{-1})^i = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \tag{5.6}$$

por lo que g es holomorfa e inyectiva en \mathbb{D}^* . Usando el lema 5.8 sabemos que 0 es un polo de g , por lo cual existe un entero m no negativo tal que $a_n = 0$ para todo $n > m$. Esto implica que f es un polinomio de grado m , pero como f es inyectiva entonces es un polinomio de grado 1, mostrando que todo automorfismo es un mapeo lineal con el coeficiente principal distinto de cero. \square

5.4. Automorfismos del disco

En el caso de los automorfismos del disco, encontramos que todos estos mapeos tienen la forma

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \tag{5.7}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\alpha \in \mathbb{D}$ es una constante arbitraria. Podemos notar que el automorfismo trivial, el mapeo identidad, es de esta forma. Vemos un ejemplo de estos mapeos del disco distinto de la identidad.

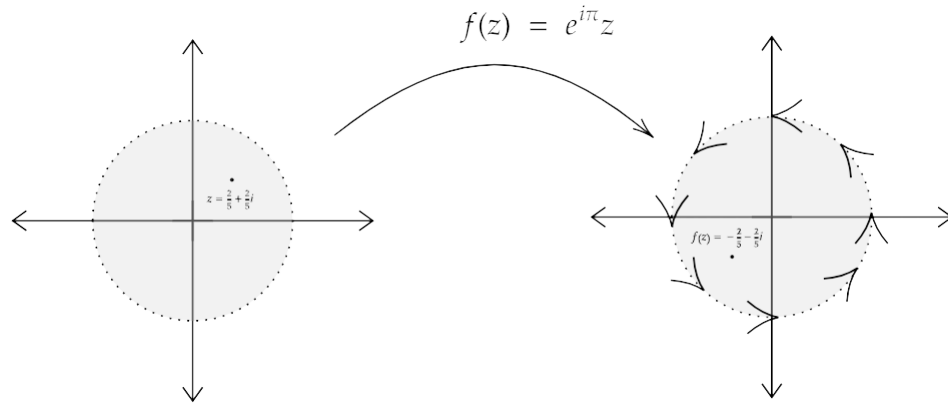


Figura 5.3: Automorfismo del disco con $\theta = \pi$ y $\alpha = 0$

Ejemplo:

Considerando la forma dada en la ecuación 5.7 supongamos que $\alpha = 0$ y $\theta = \pi$, reemplazando en la fórmula da como resultado

$$f(z) = e^{i\pi} z = (-1) z = -z.$$

Notemos que f es holomorfa y biyectiva, es decir, un biholomorfismo. Ahora analicemos que hace, proceda a evaluar algunos puntos:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= -1, \\ f(i) &= -i, \\ f(-i) &= i, \\ f(-1) &= 1, \\ f\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}i\right) &= -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Podemos ver que f mueve todos los puntos exceptuando el origen por una rotación. Analizando con mayor detenimiento notamos que la rotación provocada por f es por un factor de π , el argumento del exponencial complejo en la función. De aquí podemos ver que las rotaciones son automorfismo del disco, gracias a su simetría rotacional.

Notemos que al fijar $\alpha = 0$ en la ecuación 5.7 obtenemos funciones de la forma $f(z) = -e^{i\theta} z$, conocidas como rotaciones. Las rotaciones toman ventaja de los complejos por la función exponencial compleja, ya que al tomar un complejo $z \in \mathbb{D}$ y expresarlo en su forma polar $z = r e^{i\phi}$, podemos reescribir las rotaciones de la siguiente forma.

$$f(z) = e^{i\theta} r e^{i\phi} = r e^{i(\phi+\theta)},$$

aumentando el argumento por θ . Por otra parte, fijando la otra constante $\theta = 0$ obtenemos de la ecuación 5.7 la siguiente expresión

$$f(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z},$$

dándonos mapeos distintas a las rotaciones, estos los denominaremos deformaciones. Por lo que consideramos que los automorfismo del disco constan de dos partes, una rotación y una deformación.

Para mostrar qué todos los biholomorfismos del disco sobre sí mismo tienen la forma prescrita, no basta únicamente con estudiar las rotaciones, pero si es parte vital de la prueba. Antes de proceder con la prueba del teorema 5.11, enunciado más adelante, veamos algunos lemas auxiliares. El lema de Schwarz será se centra en funciones holomorfas sobre el disco con la característica de fijar el origen y su vínculo con las rotaciones.

Lema 5.9 (Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces,*

1. $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$.
2. Si para algún $z_0 \neq 0$ tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces f es una rotación.
3. $|f'(0)| \leq 1$. Si se da la igualdad, entonces f es una rotación.

Demostración. Dado que f es holomorfa, entonces se puede expresar como

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i,$$

su serie de potencia centrada en 0, la cual converge en todo el disco. Además, $f(0) = 0$ implica $a_0 = 0 \Rightarrow f(z)/z$ posee una singularidad removible en 0, i.e, es holomorfa en \mathbb{D} . Considere $z \in B_r$ con $0 < r < 1$, entonces:

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \quad (5.8)$$

ya que $|f(z)| \leq 1$ por rango de la función. Usando el principio del módulo máximo para la función $f(z)/z$ y la bola B_r podemos decir que (5.8) se cumple para todo $|z| \leq r$. Luego, si $r \rightarrow 1$ entonces (5.8) se transforma en:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1, \quad (5.9)$$

(considerando siempre que $f(z)/z$ tiene la singularidad en 0 removida y que en particular la desigualdad es trivial para $z = 0$), deducimos $|f(z)| \leq |z|$. Tenemos entonces el primer resultado.

Para el segundo resultado, supongamos que $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \neq 0$, entonces $f(z)/z$ alcanza el máximo en $z_0 \in \mathbb{D}$, por el principio del módulo máximo es constante en el disco. Luego, $f(z) = cz$ para algún c . Cuando evaluamos z_0 ,

$$f(z_0) = cz_0 \Rightarrow |z_0| = |f(z_0)| = |c||z_0| \Rightarrow |c| = 1$$

por lo que $c = e^{i\theta}$, para algún θ . Por lo que f es una rotación.

Finalmente, si se toma $g(z) = f(z)/z$ se obtiene que:

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0).$$

Pero, como se probó antes, $|g(z)| \leq 1$. Por último, si $|f'(0)| = 1$ tenemos $|g(0)| = 1$ entonces por el principio del máximo se tiene que $g(z) = f(z)/z$ es constante entonces $f(z) = cz$ y como ya se vió, es una rotación. □

Este lema proporciona suficiente herramienta sobre las rotaciones y las funciones con punto fijo en el origen para proceder con la prueba de la forma general. Aun así, esto no es suficiente para la prueba, falta información sobre las deformaciones, la cual obtendremos del siguiente lema.

Lema 5.10. *La función $f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definida por*

$$f_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (5.10)$$

dónde α es un elemento fijo del disco unitario, es un automorfismo del disco. Además, es su propia función inversa.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{D}$ una constante, entonces $\forall z \in \mathbb{D}$, $|\bar{\alpha}z| = |\alpha z| < 1$ por lo cual:

$$1 - \bar{\alpha}z > 0,$$

el denominador es distinto de cero, siendo f_α holomorfa. Es más, si se toma $z \in \bar{\mathbb{D}}$ se tiene que

$$|\bar{\alpha}z| = |\bar{\alpha}| \cdot |z| < 1,$$

siendo f_α continua en la cerradura. De esto, supongamos $|z| = 1 \rightarrow z = e^{i\phi}$ para algún $\phi \in \mathbb{R}$ entonces

$$f_\alpha(e^{i\phi}) = \frac{\alpha - e^{i\phi}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\phi}} = \frac{\alpha - e^{i\phi}}{e^{i\phi}(e^{-i\phi} - \bar{\alpha})} \Rightarrow |f_\alpha(e^{i\phi})| = \frac{|\alpha - e^{i\phi}|}{|e^{i\phi}| |e^{-i\phi} - \bar{\alpha}|} = \frac{|\alpha - e^{i\phi}|}{1 \cdot |\alpha - e^{i\phi}|} = 1.$$

Por una de las implicaciones del principio del módulo máximo, se sabe que $|f_\alpha| < 1$. Ahora vea:

$$\begin{aligned} (f_\alpha \circ f_\alpha)(z) &= \frac{\alpha - \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}}{1 - \bar{\alpha} \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}} \\ &= \frac{\alpha(1 - \bar{\alpha}z) - (\alpha - z)}{(1 - \bar{\alpha}z) - \bar{\alpha}(\alpha - z)} \\ &= \frac{\alpha - |\alpha|^2 z - \alpha + z}{1 - \bar{\alpha}z - |\alpha|^2 + \bar{\alpha}z} \\ &= \frac{(1 - |\alpha|^2)z}{1 - |\alpha|^2} \\ &= z, \end{aligned}$$

por lo cual f_α es su propia inversa en \mathbb{D} , lo que implica que f_α es biyectiva. Se vio que f_α es holomorfa, finalmente juntando ambos resultados se concluye que f_α es un automorfismo del disco unitario. \square

Note que $f_\alpha(0) = \alpha$ y $f_\alpha(\alpha) = 0$. Ahora ya está el terreno preparado para mostrar que en efecto todos los automorfismo tienen la misma forma.

Teorema 5.11. *Una función f es un automorfismo del disco \mathbb{D} , si y solo si,*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{D}$.

Demostración. (\Leftarrow) Notemos que la implicación de regreso es simple en comparación a su contraparte. Notando

$$f(z) = \phi \circ f_\alpha(z),$$

dónde ϕ es una rotación por un factor θ , decimos que f es un biholomorfismo por ser composición de biholomorfismo que, además, tienen de dominio y rango el disco, es decir, un automorfismo de \mathbb{D} .

(\Rightarrow) Supongamos que f es un automorfismo del disco, entonces por ser biyectiva se tiene un único $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Considere el automorfismo:

$$g = f \circ f_\alpha.$$

Vemos que las funciones holomorfas g, g^{-1} cumplen que $g(0) = 0$ y $g^{-1}(0) = 0$, entonces por el Lemma de Schwarz

$$\forall z \in \mathbb{D}, |g(z)| \leq |z| \text{ y } |z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \Rightarrow |g(z)| = |z|$$

por lo que es una rotación, es decir, tiene la forma $g(z) = e^{i\theta} z$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Luego,

$$e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = e^{i\theta} f_\alpha(z) = (g \circ f_\alpha)(z) = (f \circ f_\alpha \circ f_\alpha)(z) = f(z)$$

lo buscado. \square

5.5. Automorfismos de la mitad superior del plano

Ahora estudiemos los automorfismos del semiplano superior denotado por \mathbb{H} , este conjunto está dado por:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Este conjunto es una región simplemente conexa, la cual no incluye al eje real. La naturaleza del dominio presenta desventajas respecto al disco unitario por su falta de simetría rotacional, lo que impide que los mapeos de la forma $e^{i\theta}z$ con $\theta \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ sean automorfismos. Pero, en la misma medida le otorga ventajas sobre \mathbb{D} . Al considerar que \mathbb{H} es no acotado rápidamente viene a la mente las traslaciones, que al considerar que no hay restricciones sobre la parte real se concluye que las traslaciones de la forma

$$f(z) = z + b, b \in \mathbb{R},$$

son automorfismos. Observemos que $\text{Im}(b) = 0$ por que de lo contrario parte de \mathbb{H} se traslaparía con el semi-plano inferior. De forma similar se intuye que los mapeos de escalado son automorfismos, siempre y cuando no roten o reflejen el dominio, en otras palabras los mapeos que escalen por un factor real positivo. Veamos uno de estos automorfismos.

Ejemplo:

Considere la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con la regla de asignación

$$f(z) = 2z + 5.$$

Mostremos que si la función es restringida a \mathbb{H} es entonces un automorfismo.

Demostración. Notemos g es holomorfa y probemos que es sobreyectiva. Considere $w_0 \in \mathbb{H}$ y veamos que

$$\begin{aligned} w_0 &= f(z_0) && \Leftrightarrow \\ &= 2z_0 + 5 && \Leftrightarrow \\ w_0 - 5 &= 2z_0 && \Leftrightarrow \\ \frac{w_0 - 5}{2} &= z_0, \end{aligned}$$

siendo claro que $z_0 \in \mathbb{H}$, por lo cual f restringida sobre \mathbb{H} es sobreyectiva. Supongamos que $f|_{\mathbb{H}}(z) = f|_{\mathbb{H}}(z')$, esto implica:

$$2z + 5 = 2z' + 5 \Rightarrow 2z = 2z' \Rightarrow z = z',$$

mostrando que $f|_{\mathbb{H}}$ es inyectiva, junto a lo anterior se concluye que $f|_{\mathbb{H}}$ es biyectiva. Por lo tanto se muestra que es un automorfismo del disco, comportándose como se muestra en la Figura 5.4. □

Este ejemplo brinda un posible esquema para mostrar que toda transformación lineal $f(z) = az + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y a es positivo, son automorfismos del semiplano superior \mathbb{H} . Pero de igual forma que para el disco unitario no basta con encontrar algunos, buscamos identificar la forma general de todos los automorfismos, la cual ya se ha encontrado y es la siguiente:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{5.11}$$

sujeto a que a, b, c, d son constantes reales y $ad - bc = 1$. Esto implica que los mapeos vistos pueden reescribirse de esta forma, considerando el ejemplo anterior se puede comprobar que

$$f(z) = 2z + 5 = \frac{2\sqrt{2}z + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}z + \frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

cumpliendo con $ad - bc = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 1$. De forma similar se puede llegar a estandarizar las transformaciones lineales que son también automorfismos. Finalmente procedamos con el teorema que formaliza esta idea.

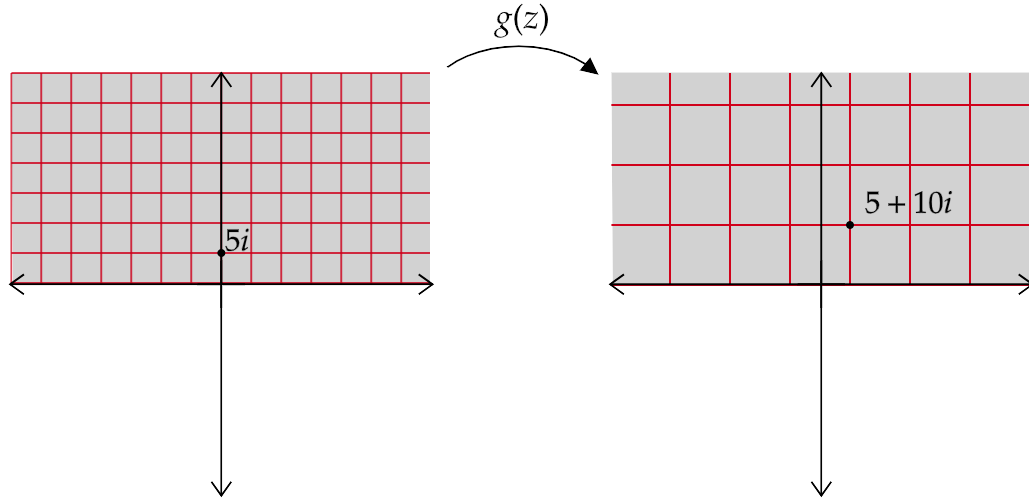


Figura 5.4: Automorfismo del semiplano superior $g(z) = 2z + 5$

Teorema 5.12. *Todo automorfismo de \mathbb{H} es de la forma:*

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{5.12}$$

para algún $M \in SL_2(\mathbb{R})$. *Conversamente, todo mapeo de esta forma es un automorfismo de \mathbb{H} .*

Antes de proceder con la demostración hay que aclarar un tema de la notación en el enunciado del teorema. Cuando se menciona $SL_2(\mathbb{R})$ se refiere al grupo especial lineal de matrices con determinante 1 de dimensión 2×2 definidas sobre los reales, así

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

es una matriz de este grupo e induce la función f_M como se indica en el teorema. Procedamos con la prueba del teorema 5.12.

Demostración. (\Leftarrow) Sea $M \in SL_2(\mathbb{R})$, recordemos que $\det(M) = 1$, note que

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_M(z)) &= \text{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \cdot \frac{c\bar{z} + d}{c\bar{z} + d} \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{acz\bar{z} + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz + d|^2} \right) \\ &= \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0, \forall z \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

por lo que $f_M : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.

Sea $M, M' \in SL_2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} f_M \circ f_{M'} &= \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} \\ &= \frac{aa'z+ab'+c'bz+bd'}{ca'z+b'e+c'dz+b'd} \\ &= \frac{(aa' + c'b)z + ab' + bd'}{(ca' + c'd)z + b'e + b'd} \\ &= f_{MM'} \end{aligned}$$

Con esto, vea que

$$f_M \circ f_{M^{-1}}(z) = f_{MM^{-1}}(z) = f_I(z) = z$$

por lo que f_M es biyectiva en \mathbb{H} y además es holomorfa, *i.e.*, es un automorfismo del semiplano superior.

(\Rightarrow) Considere una matriz $M \in SL_2(\mathbb{R})$ con $d = 0$ y un $z \in \mathbb{H}$, recordemos que

$$\text{Im}(f_M(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz|^2}$$

aprovechando el hecho que $\text{Im}(z) > 0$, existe un real c tal que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

y $f_{M_1}(z) = z'$ con $\text{Im}(z') = 1$. Luego, con la matriz

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\text{Re}(z') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tenemos que } f_{M_2}(z') = \frac{z' - \text{Re}(z')}{1} = \text{Im}(z') = i.$$

Entonces, se cumple que $f_{M_1 M_2}(z) = f_M(z) = i$ para algún z . Dicho de otra manera,

$$\forall z \in \mathbb{H} \exists M \in SL_2(\mathbb{R}) \ni f_M(z) = i.$$

Ahora considere el mapeo conforme estándar $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ dado por

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z},$$

que estudiaremos en la siguiente sección, y la matriz

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$. Vea que entonces la función $F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}$ es una rotación por un ángulo de -2θ , esto viene de

$$\begin{aligned}
 F \circ f_{M_\theta}(z) &= \frac{i - \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}}{i + \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}} \\
 &= \frac{i(z \sin \theta + \cos \theta) - z \cos \theta + \sin \theta}{i(z \sin \theta + \cos \theta) + z \cos \theta - \sin \theta} \\
 &= \frac{z(i \sin \theta - \cos \theta) + (\sin \theta + i \cos \theta)}{z(i \sin \theta + \cos \theta) + (i \cos \theta - \sin \theta)} \\
 &= \frac{z(-e^{-i\theta}) + ie^{-i\theta}}{ze^{i\theta}} \\
 &= \frac{(i - z)e^{-i\theta}}{(z + i)e^{i\theta}} \\
 &= e^{-2i\theta} \frac{z - i}{z + i} \\
 &= e^{-2i\theta} F(z),
 \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que f es un automorfismo de \mathbb{H} con $f(\beta) = i$ y una matriz $N \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $f_N(i) = \beta$. Entonces,

$$f \circ f_N(i) = i \Rightarrow F \circ f \circ f_N \circ F^{-1}(0) = 0,$$

por lo que $F \circ f \circ f_N \circ F^{-1}$ es un automorfismo del disco que fija el origen, entonces es una rotación. Por lo que, existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$F \circ f \circ f_N \circ F^{-1} = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1} \Rightarrow f \circ f_N = f_{M_\theta} \Rightarrow f = f_{M_\theta N^{-1}},$$

por lo que todo automorfismo del plano f se puede expresar como dijimos, *i.e.*, $f = f_A$ para algún $A \in SL_2(\mathbb{R})$. \square

5.6. El disco unitario y el semiplano superior

Visto los automorfismos de dos de los abiertos más importantes del plano nos toca avanzar hacia el teorema del mapeo abierto de Riemman. Este teorema nos asegura la existencia de un biholomorfismo entre \mathbb{D} y cualquier abierto simplemente conexo propio de los números complejos. Con esto en mente se procede a ver un ejemplo de estos mapeos entre las regiones estudiadas.

Teorema 5.13. *El mapeo $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ dado por:*

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z},$$

es un biholomorfismo, con inversa $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por:

$$G(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}.$$

Demostración. Vea que tanto G como F son holomorfas, gracias a los dominios en las que están definidas. También $\forall z \in \mathbb{H}, |z - i| < |z - (-i)| \rightarrow |F(z)| < 1 \rightarrow F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$. Ahora, tome $w \in \mathbb{D}$ con

$w = u + vi$ y note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(G(w)) &= \operatorname{Im} \left(i \frac{1 - u - vi}{1 + u + vi} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - u - vi}{1 + u - vi} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - u - vi)(1 + u - vi)}{(1 + u)^2 + v^2} \right) \\ &= \frac{(1 - u)(1 + u) + v^2}{(1 + u)^2 + v^2} = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 + u)^2 + v^2} \end{aligned}$$

Como $|w| < 1 \rightarrow u^2 + v^2 < 1$, entonces el numerador es positivo y el denominador también, es decir, $\operatorname{Im}(G(w)) > 0$ implicando que $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} F(G(w)) &= F \left(i \frac{1 - w}{1 + w} \right) = \frac{i - i \frac{1 - w}{1 + w}}{i + i \frac{1 - w}{1 + w}} = \frac{\frac{i + wi - i + iw}{1 + w}}{\frac{i + wi + i - wi}{1 + w}} = \frac{2iw}{2i} = w \\ G(F(z)) &= G \left(\frac{i - z}{i + z} \right) = i \frac{1 - \frac{i - z}{i + z}}{1 + \frac{i - z}{i + z}} = i \frac{\frac{i + z - i + z}{i + z}}{\frac{i + z + i - z}{i + z}} = i \frac{2z}{2i} = z \end{aligned}$$

Entonces son sus mutuos inverso y son biyectivos, es decir, son biholomorfismo probando todo lo que buscábamos. \square

Este mapeo biyectivo y analítico entre el semiplano superior y el disco unitario es parte vital del desarrollo de la teoría. Generalmente los mapeos biholmorfos derivados del teorema del mapeo abierto de Riemman toman este teorema para tratar de forma indistinta ambos abiertos. También es importante mencionar que en ocasiones encontrar un biholmorfismo entre una región Ω y \mathbb{D} es altamente complicado por lo que se opta por mapearlo a \mathbb{H} en su lugar, resultando en un mapeo mucho más sencillo. Veamos algunas familias de biholmorfismo para un mejor entendimiento del teorema objetivo.

5.7. Mapeo de Joukowski

El científico ruso Nikolay Zhukovsky fue el primero en investigar sobre el flujo del aire, se le reconoce como uno de los padres de la aerodinámica e hidrodinámica moderna, también es llamado el padre de la aviación rusa. En su estudio de los fluidos publicó una función compleja conforme $\zeta : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ llamado el mapeo de Joukowski, el cual se estudiaremos brevemente.

Teorema 5.14. Sean los conjuntos $B = S^1 \cup \mathbb{C}$ y $D = \{z : z \in \mathbb{R} \text{ y } |z| \leq 1\}$, el mapeo de Joukowski ζ definido por

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

produce dos biholomorfismos al restringir su dominio. Estos mapeos son $\zeta_1(z) : B^c \rightarrow D^c$ y $\zeta_2(z) : \mathbb{D} \rightarrow D^c$. Además, ζ mapea $\partial\mathbb{D}$ en D .

Demostración. Se sabe que $\frac{z}{2}$ y $\frac{1}{2z}$ son funciones holomorfas en $\{0\}^c$. Por lo que,

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \zeta(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z},$$

es holomorfa por ser suma de mapeos analíticos. Tome $a + bi = z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \right]\end{aligned}$$

Considere los casos donde $|z| = 1$ y $|z| \neq 1$. Vea que si $z \in \partial\mathbb{D}$ tenemos

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} \left[\left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \right] = \frac{1}{2} [(a + a) + (b - b) i] = \frac{2a}{2} = a,$$

pero $|z| < 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$ por lo cual $\zeta(z) \in D$, es decir, ζ mapea S^1 en D . En el caso $|z| \neq 1$ se tiene $\zeta(z) \notin D$. Procedemos por contradicción, supóngase que para algún z_0 con norma distinta de 1, $\zeta(z_0)$ esta en $[-1, 1]$. Entonces:

$$\begin{aligned}0 &= \text{Im}(\zeta(z_0)) \\ &= \text{Im} \left(\frac{1}{2} \left[\left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= b - \frac{b}{a^2 + b^2}, && \text{suponiendo que } b \neq 0, \\ &= 1 - \frac{1}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2}, && \text{sabiendo } z_0 \neq 0, \\ &= a^2 + b^2 - 1 \\ 1 &= a^2 + b^2,\end{aligned}$$

pero $1 = a^2 + b^2 = |z_0|^2$ dando $|z_0| = 1$ una contradicción. Entonces $b = 0$, de lo contrario $\zeta(z_0)$ no esta en D , pero esto implica que

$$\begin{aligned}\text{Re}(\zeta(z_0)) &= \text{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right),\end{aligned}$$

como $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y los signos de a y $\frac{1}{a}$ son iguales se sabe que $|a| + |a^{-1}| = |a + a^{-1}|$. Usando la desigualdad MA-MG sobre las normas,

$$\left| \frac{a + a^{-1}}{2} \right| = \frac{|a| + |a^{-1}|}{2} > \sqrt{|a||a^{-1}|} = 1,$$

siendo estricta gracias a $a \neq a^{-1}$. Pero si $|\operatorname{Re}(\zeta(z_0))| > 1$ entonces $\zeta(z_0) \notin D$, contradicción. Entonces no existe $z_0 \in \partial D^c \ni \zeta(z_0) \in [-1, 1]$. Tome distintos $e^w, e^v \in \mathbb{C} - (\partial D)$, supongamos que $\zeta(e^w) = \zeta(e^v)$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) &= \frac{1}{2}(e^v + e^{-v}) && \Rightarrow \\ (e^w + e^{-w}) &= (e^v + e^{-v}) && \Rightarrow \\ e^w - e^v &= e^{-v} - e^{-w} && \Rightarrow \\ e^w - e^v &= (e^w - e^v)e^{-v-w} && \Rightarrow \\ 1 &= e^{-v-w} && \Rightarrow \\ e^v &= e^{-w}, \end{aligned}$$

indicando que e^v, e^w son inversos multiplicativos. Esto muestra que ζ_1, ζ_2 son inyectivas por su restricción de dominio. Es más, esto da el mapeo $\zeta_2 \circ \zeta_1^{-1}$ biyectivo entre \mathbb{D} y B^c .

Tome $z', z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y supongamos que $\zeta(z) = z'$, entonces

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2}(z + z^{-1}) && \Rightarrow \\ 2z' &= z + z^{-1} && \Rightarrow \\ 2z'z &= z^2 + 1 && \Rightarrow \\ 0 &= z^2 - 2z'z + 1 && \Rightarrow \\ z'^2 &= z^2 - 2z'z + z'^2 + 1 && \Rightarrow \\ z'^2 &= (z - z')^2 + 1 && \Rightarrow \\ z &= (z'^2 - 1)^{1/2} + z'. \end{aligned}$$

Como no se indefine para ningún z' vemos que es sobreyectiva, siendo así biyectiva. Además, si $|z'| \neq 1$ sabemos que z estará en B^c o \mathbb{D} , pero z^{-1} estará en el otro conjunto, por lo cual, tanto ζ_1, ζ_2 son biyectivas y holomorfas, mostrando lo que buscamos. \square

5.7.1. Flujo de un fluido ideal

Recuerde que un fluido ideal es aquel que no se comprime durante el flujo y es no rotacional o sin vórtices. Plasmado de forma algebraica, considere un flujo estable de un fluido que ocupa el dominio Ω con campo vectorial de velocidad

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \text{ en el punto } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Dónde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ indica la velocidad instantánea en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ del fluido. Se dice que es incompresibles si y solo si:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

es decir, tiene divergencia cero. Por otro lado, un fluido es no rotacional si y solo su rizo se desvanece, en términos de derivadas parciales:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Note que las ecuaciones tienen similitud con Cauchy-Riemann.

Teorema 5.15. *El campo vectorial $\mathbf{v} = (u, v)$ de velocidad induce un flujo de fluidos ideal si y solo si la función*

$$f = u - iv$$

es holomorfa en lo complejos. Esto implica que u, v son conjugados armónicos.

Demostración. (\Rightarrow) Vemos que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman con signos opuestos para v , por lo que induce la función

$$f(x, y) = u(x, y) - iv(x, y),$$

holomorfa.

(\Leftarrow) Si $f = u + i(-v)$ es holomorfa, cumple Cauchy-Riemman. Por lo que el potencial complejo inducido por la función tiene divergencia y rizo iguales a cero. \square

Considere el caso de una placa que se mueve horizontalmente en un fluido. La placa tiene una sección horizontal semejante a un segmento de recta, supongamos que dicho plato es la suficientemente delgado y suave, para modelarse como una línea, no tiene grosor. Sin pérdida de la generalidad, se asume que la placa es el segmento de recta $D = [-1, 1]$ sobre el eje real. Como es de grosor despreciable, dicho plato no ejerce efecto apreciable sobre el flujo, por lo que su potencial complejo es

$$P(z) = z, \forall z \in \mathbb{C} - D,$$

siendo su campo vectorial de velocidad determinado por $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (u(x, y), v(x, y)) = (1, 0)$, como se muestra en la Figura 5.5.

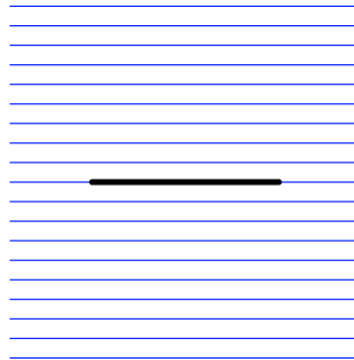


Figura 5.5: Flujo de fluido pasando una placa.

Considere ahora un problema levemente más complejo. Hay un cilindro que se mueve horizontalmente en un fluido ideal, se quiere encontrar el potencial complejo P . Supongamos que dicho cilindro tiene radio uno, como se mueve horizontalmente en un fluido ideal se puede modelar como un círculo de radio 1 centrado en el origen. Como se posee la solución para una placa horizontal y haciendo uso del mapeo de Joukowski restringido a B^c , el cual es un biholomorfismo entre $\mathbb{C} - D$ y $\mathbb{C} - B$, donde $B = S^1 \cup \mathbb{D}$. Esto ya que el ser armónico es preservado bajo mapeos biholomorfos, por lo cual sigue cumpliendo los requisitos de un fluido ideal.

Basandose en la solución encontrada para la placa, el potencial complejo $P(w)$ del fluido se puede recuperar mediante el mapeo ζ . Entonces el potencial complejo en el exterior del disco,

$$\forall w \in B^c, P(w) = P_p(g(z)) = g(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),$$

dónde, P_p es el potencial complejo de la placa. Como ilustra la Figura 5.6.

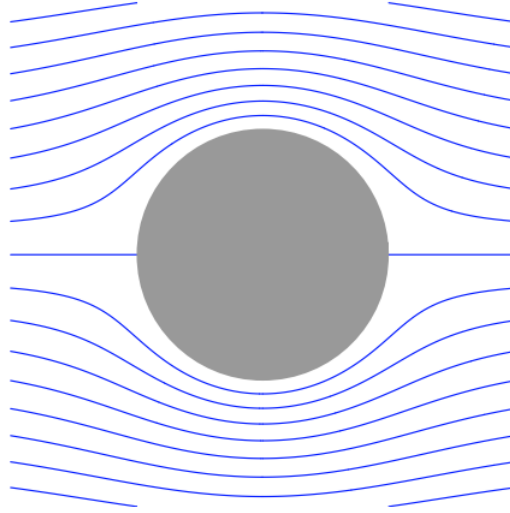


Figura 5.6: Flujo pasando por un disco sólido

5.8. Transformaciones de fracciones lineales

Estudiemos otro conjunto de funciones inyectivas y holomorfas denominadas fracciones lineales, de las cuales ya mostramos un ejemplo, la función que lleva el disco unitario \mathbb{D} al semiplano superior \mathbb{H} . Estas transformaciones tienen la forma

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{5.13}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son constantes complejas que cumplen $ad \neq bc$, de esta forma observando el comportamiento por la derivada $\phi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ aseguramos que no se degenera en un punto. Al conjunto de estas transformaciones lo denotaremos con $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$, por estar definido sobre los complejos.

Vea ahora que si $c = 0$, el mapeo expuesto en 5.13 se reduce a una función lineal entera, que no es de mayor interés. Por otro lado, si $c \neq 0$ podemos ver que se mantienen las propiedades de inyectividad y el ser analítica, exceptuando el polo simple de $z = -\frac{d}{c}$. Adicionalmente, la inversa de una transformación de este tipo sigue siendo una fracción lineal, como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 5.16. *Sea la transformación ϕ una fracción lineal con forma dada por 5.13 con constantes complejas a, b, c, d y $c \neq 0$. Entonces, si se define $\phi : \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$ el mapeo es biyectivo y holomorfo. Es más, la transformación inversa está dada por $\psi : \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ con regla de asignación*

$$\psi(w) = \frac{dw - b}{a - cw}.$$

Demostración. Es evidente que el ϕ es holomorfo en todo \mathbb{C} excepto donde el denominador se vuelve 0, que es justamente el punto $z = -\frac{d}{c}$, por lo que es holomorfa en su dominio. Para probar que es

inyectiva, tome $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{-\frac{c}{d}\}$ distintos tales que $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} && \Rightarrow \\ (az_1 + b)(cz_2 + d) &= (az_2 + b)(cz_1 + d) \\ acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd &= acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd && \Rightarrow \\ 0 &= ad(z_2 - z_1) - bc(z_2 - z_1) \\ 0 &= (ad - bc)(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

como $ad \neq bc$, se tiene entonces que $z_1 = z_2$ por lo que ϕ es uno a uno.

Es evidente que ψ está definido para todo su dominio, por lo que para probar que ϕ es sobreyectiva basta comprobar que ψ y ϕ son inversos. Tome z en el dominio de ϕ , por lo cuál

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(z) &= \psi\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \left(d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b\right) \left(a - c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{adz + db - bcz - bd}{cz + d}\right) \left(\frac{acz + ad - acz - bc}{cz + d}\right)^{-1} \\ &= z(ad - bc)(ad - bc)^{-1} \\ &= z, \end{aligned}$$

por lo que son inversos y sobreyectivos. Por lo tanto, ϕ es biholomorfismo con su inverso ψ transformación por fracción lineal. \square

Cabe mencionar que para evitar trabajar con polos se puede definir sobre los complejos completados $\overline{\mathbb{C}}$, de esta forma se extiende $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ con la condición de

$$\phi\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty,$$

la cual mantiene las propiedades anteriores eliminando el polo, como veremos en el capítulo 3. Además, facilita el trabajo en algunas ocasiones ya que evita la separación por casos.

La familia de transformaciones de fracciones lineales es un conjunto de funciones biyectivas y holomorfas, como se deduce del teorema anterior. Pero, la importancia de estas transformaciones no radica únicamente en ser un grupo de biholomorfismos, sino en cómo se comportan estos mapeos y que propiedades interesantes poseen. No es complicado ver que cuando $c = 0$, se obtienen transformaciones lineales, las cuales poseen una propiedad muy útil: mapean rectas en rectas y círculos en círculos. Esto se mantiene aún cuando $c \neq 0$, para verificar que así es, necesitamos ver primero el siguiente lema.

Lema 5.17. *Toda transformación por fracción lineal ϕ tal que $c \neq 0$, puede descomponerse de la forma*

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3, \tag{5.14}$$

dónde ϕ_1 y ϕ_3 son transformaciones lineales y ϕ_2 es tal que $\phi_2(z) \cdot z = k$, con k constante, a ϕ_2 se le denomina una inversión.

Demostración. Sea ϕ con regla de asignación como 5.13 y consideremos los siguientes mapeos

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= cz + d, \\ \phi_2(z) &= z^{-1}, \\ \phi_3(z) &= ac^{-1} + (b - adc^{-1})z, \end{aligned}$$

dónde ϕ_1, ϕ_3 están definidos sobre los complejos y ϕ_2 está definido en $\mathbb{C} - \{0\}$. Véase que los ϕ_i cumplen con los requisitos del lema. Ahora consideremos z en el dominio de ϕ , entonces

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3(z) &= \phi_1 \circ \phi_2(cz + d) \\ &= \phi_1\left(\frac{1}{cz+d}\right) \\ &= \frac{a}{c} + b\left(\frac{1}{cz+d}\right) - \frac{ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} \\ &= \frac{1}{c(cz+d)}(a(cz + d) + bc - ad) \\ &= \frac{1}{c(cz+d)}(acz + ad + bc - ad) \\ &= \frac{acz+bc}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \phi(z) \end{aligned}$$

lo buscado. □

De este lema es posible deducir algunas propiedades de las fracciones lineales, basándonos en la naturaleza de sus funciones componentes. Pero la propiedad a mostrar es muy útil para nuestros fines. Estas transformaciones mapean rectas y círculos en el conjunto de rectas y círculos, como se ilustra en la Figura 5.7. Se sabe que las transformaciones lineales conservan esta propiedad, gracias a que únicamente trasladan, rotan y escalan las curvas en el plano, la única preocupación queda en la inversión. La inversión preserva dicho conjunto, pero antes de probar esta característica probemos una propiedad de los elementos de este conjunto.

Lema 5.18. *Sea Γ el conjunto de círculos y rectas. Todo elemento $\gamma \in \Gamma$ induce una ecuación de la forma*

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{5.15}$$

dónde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que $B^2 + C^2 - 4AD > 0$. Además, el conjunto de puntos que cumplen dicha ecuación con la condición dada son una recta si $A = 0$ o un círculo si $A \neq 0$.

Demostración. Noté que los elementos de Γ son un conjunto de números complejos z . Tome $\gamma \in \Gamma$ tal que:

1. γ es un círculo. Se puede escribir que

$$\gamma = \{x + iy \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Reescribiendo la ecuación del círculo,

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &= x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 \\ &= (x^2 + y^2) + (-2x_0)x + (-2y_0)y + (x_0^2 + y_0^2). \end{aligned}$$

Al igualar a cero, se obtiene:

$$(x^2 + y^2) + (-2x_0)x + (-2y_0)y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0, \tag{5.16}$$

dónde $A = 1, B = -2x_0, C = -2y_0$ y $D = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Por lo cual:

$$(-2x_0)^2 + (-2y_0)^2 - 4(1)(x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 4x_0^2 + 4y_0^2 - 4x_0^2 - 4y_0^2 + 4r^2 = 4r^2 > 0,$$

como se buscaba mostrar.

2. γ es una recta. Se puede decir entonces que todo punto $x + iy$ de γ cumple

$$y = ax + b,$$

con un poco de álgebra se obtiene la forma

$$ax + (-1)y + b = 0. \tag{5.17}$$

Es evidente que $A = 0, B = a, C = -1$ y $D = b$, además,

$$a^2 + (-1)^2 - 0 = a^2 + 1 > 0,$$

por lo que se buscaba la primera parte de lo que se busca mostrar.

Ahora, considere el conjunto de puntos

$$\gamma = \{x + iy \mid A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0\},$$

con $B^2 + C^2 - 4AD > 0$. Considere los siguientes casos:

1. $A = 0$. Se reescribe la ecuación 5.15 como

$$Bx + Cy + D = 0 \Rightarrow Bx + D = -Cy \Rightarrow \frac{-B}{C}x + \frac{-D}{C} = y,$$

que describe una recta.

2. $A \neq 0$. Reescribiendo la ecuación 5.15, se obtiene:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Entonces,

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + y^2 + \frac{C}{A}y + \frac{C^2}{4A^2} = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A},$$

siendo la ecuación de un círculo, note que el lado derecho de la igualdad indica el radio, pero es necesario que $r > 0$ por lo cual se concluye que $B^2 + C^2 - 4AD > 0$, mostrando lo que se buscaba.

□

Con esto dicho, ya se tiene una forma general para rectas y círculos, se llamará a este conjunto Γ . Así demostraremos que la inversión preserva Γ , suponiendo que $0^{-1} = \infty$ y $\infty^{-1} = 0$.

Teorema 5.19. Sean Γ el conjunto de círculos y rectas en el plano completado y $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la inversión dada por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Entonces, f preserva el conjunto Γ , en otras palabras, para todo elemento $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $f(\gamma) \in \Gamma$.

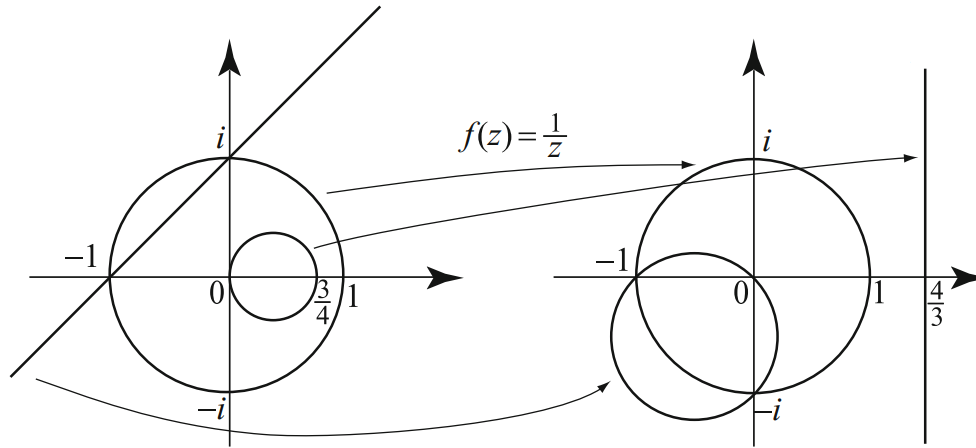


Figura 5.7: Inversión $f(z) = \frac{1}{z}$

Demostración. Tome $z = x + yi \in \mathbb{C}^*$, al aplicarle f se obtiene

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z} \\
 &= \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \\
 &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\
 &= \frac{1}{|z|^2} (\overline{x + iy}) \\
 &= \frac{1}{|z|^2} (x - iy) \\
 &= \frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2} i \\
 &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.
 \end{aligned}$$

Se encontró una expresión para la parte imaginaria y real de la imagen para los complejos distintos de cero. Haciendo uso de esto se probará la propiedad. Sea $\gamma \in \Gamma$ con ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Con esto presentamos 2 casos,

1. si $0 \notin \gamma$. Tome $z_0 \in \gamma$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \\ &= \frac{A}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) + \frac{B}{x^2 + y^2}x + \frac{C}{x^2 + y^2}y + \frac{D}{x^2 + y^2} \\ &= A + \frac{B}{x^2 + y^2}x + \frac{C}{x^2 + y^2}y + \frac{D}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= A + B \frac{x}{x^2 + y^2} + C \frac{y}{x^2 + y^2} + D \left(\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right) \\ &= A + B \frac{x}{x^2 + y^2} + (-C) \frac{-y}{x^2 + y^2} + D \left(\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

siendo la forma de una elemento $\gamma' \in \Gamma$, i. e., $f(\gamma) \in \gamma'$.

2. si $0 \in \gamma$. Note que el procedimiento anterior se sigue cumpliendo para todo $z_0 \neq 0$. Pero, dado que 0 es parte tenemos,

$$0 = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \Rightarrow D = 0.$$

Con esto la forma de $f(\gamma - \{0\})$ es

$$0 = A + B \frac{x}{x^2 + y^2} + (-C) \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

siendo una recta, por lo cual $f(0) = \infty \in \gamma'$ por lo cual, $f(\gamma) = \gamma' \in \Gamma$.

Mostrando así lo que se buscaba. □

Probar que una transformación de fracción lineal preserva el conjunto Γ es directa, cuando hacemos uso del lema 5.17, sabemos que se descompone en dos transformaciones lineales y una inversión, las tres funciones mapean Γ en sí mismo por lo que su composición comparte esta propiedad. Sin embargo, esta propiedad no es sobre los conjuntos de interés, las regiones, ya que se está trabajando con mapeos conformes entre abiertos conexos. La importancia del teorema visto radica en la utilidad que aporta para la identificar la imagen de una región. Pero, ¿cómo se usa para este fin? Lo ilustraremos en el siguiente ejemplo, con un biholomorfismo que ya conocemos.

Ejemplo:

Muestre que la transformación

$$\phi(z) = i \frac{1 - z}{1 + z},$$

mapea \mathbb{D} en \mathbb{H} de forma biyectiva.

Demostración. Notemos que

$$\phi(z) = \frac{i - iz}{1 + z},$$

siendo evidente que ϕ es una transformación por fracción lineal con irregularidad en -1 , entonces $\partial\mathbb{D}$ se mapea en algún elemento de Γ . Por propiedades geométricas se sabe que 3 puntos bastan para definir un círculo o recta. Teniendo que,

$$\phi(1) = 0; \quad \phi(i) = \frac{i + 1}{1 + i} = 1; \quad \phi(-1) = \frac{i - 1}{1 - i} = -1, \quad (5.18)$$

es evidente que forman una recta, el eje real. Usando el teorema 5.6 se sabe que la región $\phi(\mathbb{D})$ tiene por borde la recta $\text{Im}(z) = 0$, correspondiendo el semiplano a la

imagen del disco unitario bajo ϕ . Sin embargo, falta determinar si es el semi-plano superior o inferior. Pero evaluando,

$$\phi(0) = i$$

junto al hecho que ϕ es analítica en el interior de \mathbb{D} sabemos que la imagen corresponde al abierto conexo \mathbb{H} . \square

Pero, ¿cómo encontrar mapeos sobre otras región? Aprovechando lo usada en el ejemplo anterior, vemos que 3 puntos bastan para determinar un elemento de Γ . Mapeando los contornos entre sí se puede determinar la transformación que entrelacen las regiones delimitadas por dichos bordes. Esto resulta en una fórmula altamente útil descrita en el siguiente lema:

Lema 5.20. Sea $\phi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ una transformación tal que

$$\phi(z_1) = w_1, \quad \phi(z_2) = w_2, \quad \phi(z_3) = w_3,$$

dónde z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 son puntos distintos. Entonces ϕ esta dada implícitamente por la siguiente ecuación:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}. \quad (5.19)$$

Además, esta transformación de fracción lineal (TFL) es única.

Demostración. Procedemos a comprobar que la ecuación 5.19 cumple el mapeo de z_1, z_2 y z_3 en w_1, w_2 y w_3 , respectivamente. Para $z = z_1$ se tiene

$$\frac{z_1 - z_1}{z_1 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \Rightarrow 0 = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \Rightarrow w - w_1 = 0,$$

cumpliendo que $\phi(z_1) = w_1$. Para z_2 se da:

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} &= \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} && \Rightarrow \\ 1 &= \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} && \Rightarrow \\ (w - w_3)(w_2 - w_1) &= (w - w_1)(w_2 - w_3) && \Rightarrow \\ ww_2 - ww_1 - w_3w_2 + w_3w_1 &= ww_2 - ww_3 - w_1w_2 + w_1w_3 && \Rightarrow \\ 0 &= ww_1 - ww_3 + w_3w_2 - w_1w_2 && \Rightarrow \\ 0 &= w_3(w_2 - w) + w_1(w - w_2) && \Rightarrow \\ 0 &= (w_1 - w_3)(w - w_2) && \Rightarrow \\ 0 &= w - w_2 && \Rightarrow \\ w &= w_2, \end{aligned}$$

lo buscado. Finalmente, cuando $z = z_3$ primero se retiran los denominadores (para evitar que se divida por 0)

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_3) &= (w - w_1)(w_2 - w_3)(z - z_3)(z_2 - z_1) && \Rightarrow \\ (z_3 - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_3) &= (w - w_1)(w_2 - w_3)(z_3 - z_3)(z_2 - z_1) && \Rightarrow \\ (z_3 - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_3) &= 0 && \Rightarrow \\ w - w_3 &= 0 && \Rightarrow \\ w &= w_3, \end{aligned}$$

con lo cual se muestra que el mapeo ϕ cumple la regla de asignación, falta probar la unicidad. Primero probemos que si $\phi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ entonces ϕ tiene a lo más dos puntos fijos distintos o es el mapeo identidad. Nótese que

$$\begin{aligned} \phi(z) &= z && \Leftrightarrow \\ \frac{az+b}{cz+d} &= z && \Leftrightarrow \\ az+b &= cz^2+dz && \Leftrightarrow \\ 0 &= cz^2+(d-a)z-b, \end{aligned}$$

por lo cual, z puede tomar a lo sumo dos valores distintos, es decir, dos puntos fijos. De lo contrario $c = d - a = 0 = b$, mostrando que ϕ es el mapeo identidad. Con esto dicho, considere $\phi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ tales que

$$\phi(z_i) = w_i = \psi(z_i), \quad i = 1, 2, 3$$

para $z_i \neq z_j$ y $w_i \neq w_j$ ssi $i \neq j$. Haciendo uso de que ψ tiene inverso, obtenemos que

$$\psi^{-1} \circ \phi(z_i) = z_i,$$

esto para tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 los cuales son puntos fijos. Como composición de TFL's sigue siendo una transformación de fracción lineal (como se muestra en el teorema 5.21), esto implica que $\psi^{-1} \circ \phi$ es la identidad, *i.e.*, son inversos, en consecuencia $\psi = \phi$, mostrando la unicidad. \square

Ahora tenemos un método para obtener transformaciones con su fórmula explícita para una variedad de regiones, cabe resaltar que la fórmula sigue funcionando con unas leves modificaciones para el caso donde el punto z_3 se mapee al infinito, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Consideremos la región Ω dada por la ecuación $0 = x^2 + y^2 + x + y$ y el semiplano derecho $\mathbb{H}_{x^-} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Encontremos un biholomorfismo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_{x^+}$.

Demostración. Note que $0, -i, -1 \in \Omega$, entonces asuma que

$$\phi(0) = 0 \quad \phi(-i) = -i \quad \phi(-1) = \infty,$$

por el lema anterior se puede construir una expresión que cumpla los requisitos. Reemplazando queda:

$$\frac{z}{z+1} \frac{-i+1}{-1} = \frac{w}{w-\infty} \frac{-i-\infty}{-i}$$

esto puede reescribirse como:

$$\frac{z(i-1)}{z+1} = -\frac{w}{i} \Rightarrow \frac{z(1-i)}{z+1} = w$$

el cual mapea el borde del círculo en el eje imaginario. únicamente falta comprobar el abierto imagen es el correcto. Tomemos $\frac{-1}{2} \in \Omega$ y comprobemos que:

$$\phi\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\frac{-1}{2}(1-i)}{1-\frac{1}{2}} = -1+i \in \mathbb{H}_{x^-},$$

por lo cual, se ha encontrado el mapeo buscado. \square

5.8.1. Estructura algebraica

Hay una propiedad de este conjunto de mapeos que rivaliza en importancia con su utilidad para determinar las imágenes de las regiones. Esta es sobre el conjunto y no propiamente sobre las transformaciones, ya que posee una estructura algebraica que ha sido objeto de numerosos estudios, esta es la de un grupo. Recordando que necesita el par (G, \cdot) para ser un grupo son 4 axiomas:

1. La operación binaria \cdot es cerrada.
2. La operación binaria \cdot es asociativa.
3. Existe un elemento 1 llamado identidad que cumple

$$1 \cdot g = g \cdot 1 = g,$$

para todo $g \in G$.

4. Todo elemento $g \in G$ tiene un inverso g^{-1} tal que

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1.$$

El teorema 5.16 nos resuelve la propiedad 4 y nos sugiere cual es el elemento identidad. Aún así falta mostrar las otras propiedades y determinar cual sería la operación designada. Considerando que son funciones y viven en el espacio de funciones nos da una idea de cual es la operación entre funciones que funciona, sin embargo, todo es irrelevante si no lo mostramos.

Teorema 5.21. *El par $(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}, \circ)$ forman un grupo, donde \circ es la operación de composición entre funciones, con la función identidad I siendo el elemento neutro.*

Demostración. Mostraremos que la dupla cumple los axiomas en el orden listado anteriormente. Tome $\phi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ tales que

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad \psi(z) = \frac{ez + f}{gz + h}.$$

Entonces al operarlos obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(z) &= \frac{a \frac{ez+f}{gz+h} + b}{c \frac{ez+f}{gz+h} + d} \\ &= \frac{\frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{gz+h}}{\frac{c(ez+f) + d(gz+h)}{gz+h}} \\ &= \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} \\ &= \frac{aez + af + bgz + bh}{cez + cf + dgz + dh} \\ &= \frac{(ae + bg)z + af + bh}{(ce + dg)z + cf + dh} \end{aligned}$$

siendo esta la forma de una transformación de fracción lineal, pero para ser elemento de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ nos falta la condición que asegura el mapeo no es constante. Procediendo por contradicción,

$$\begin{aligned} 0 &= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - ceaf - cebh - dga f - dgbh \\ &= aedh + bgcf - dga f - bhce \\ &= ad(eh - gf) + bc(gf - he) \\ &= (ad - bc)(eh - gf), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Entonces, $\phi \circ \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Aprovechando que es un subconjunto del espacio de funciones sobre los complejos, el segundo axioma. Tomando I , se puede ver que:

$$\begin{aligned} I \circ \phi(z) &= I\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \phi(z) \\ &= \frac{aI(z) + b}{cI(z) + d} \\ &= \phi(I(z)) = \phi \circ I, \end{aligned}$$

lo que muestra la tercera propiedad. Finalmente, por teorema 5.16 el último axioma se prueba. \square

Ahora sabemos que podemos generar nuevas transformaciones mediante composiciones de elementos de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ las cuáles mantienen las propiedades vistas, son biholomorfismos que preservan las rectas y círculos, el conjunto Γ . Es útil esta propiedad por como reduce la complejidad a la hora de encontrar mapeos entre regiones determinadas, como vemos a continuación.

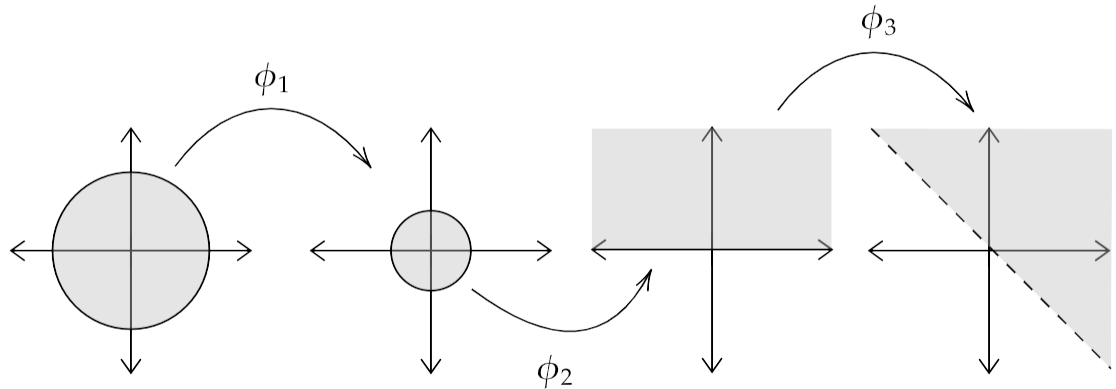


Figura 5.8: Transformar un disco a un semiplano mediante traslaciones intermedias.

Ejemplo:

De una fórmula explícita para un biholomorfismo ϕ entre un disco de radio 2 centrado en el origen y la región Ω determinada por la desigualdad $y > -x$.

Demostración. Observemos que $\partial\Omega$ es la recta $y = -x$. Por facilidad lo dividiremos en pasos como lo ilustra 5.8, primero un mapeo entre el disco de radio 2 y \mathbb{D} , luego el mapeo visto entre \mathbb{D} y \mathbb{H} , finalmente una rotación para obtener la región buscada. Teniendo

$$\phi_1 = \frac{z}{2},$$

nos mapea hacia \mathbb{D} . Sabiendo que

$$\phi_2 = \frac{1-z}{1+z}i,$$

mapea \mathbb{D} en \mathbb{H} , solo nos falta la función entre los semiplanos. Considerando que la recta pasa por el origen es evidente que una rotación basta. Siendo el borde la recta $x = -y$, la rotación es de $\frac{\pi}{4}$ a favor de las manecillas del reloj, *i.e.*, se multiplica por $e^{-\frac{\pi}{4}}$. La transformación es:

$$\phi_3(z) = e^{-\frac{\pi}{4}}z = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}z,$$

con esta última y aprovechando que son elementos de un grupo trabajamos con la composición. Definiendo ϕ con la regla de asignación

$$\phi(z) = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}z}{1 + \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}z}i = \frac{2 - \sqrt{2}(1-i)z}{4 + 2\sqrt{2}(1-i)z}i,$$

sigue siendo una transformación de fracción lineal heredando sus propiedades. Vemos que transforma el círculo de radio 2 centrado en $(0, 0)$ en la recta $y = -x$, los bordes de las regiones, evaluando $\phi(0) = \frac{1}{2}i$ elemento de la región Ω . \square

Teorema del mapeo de Riemann

Por fin llegamos al resultado principal, el teorema del mapeo de Riemann nos asegura que para cualquier abierto simplemente conexo Ω que sea distinto del plano complejo completo existe un biholomorfismo entre Ω y el disco unitario \mathbb{D} . La razón por la cual no existe mapeo holomorfo y biyectivo entre \mathbb{C} y \mathbb{D} se sigue del teorema de Liouville, ya que nuestra función holomorfa debe ser constante. Sin embargo, antes de proceder con la prueba del teorema objetivo es necesario ver el teorema de Montel que nos va a ayudar en mostrar la existencia de dicho biholomorfismo como un límite de una secuencia de funciones dadas.

6.1. Teorema de Montel

Definición. Una familia de funciones \mathcal{F} es **equicontinua** en un conjunto compacto K si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $z, w \in K$ son tales que $|z - w| < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon \text{ para todo } f \in \mathcal{F}.$$

Note que la condición de equicontinuidad es una condicionante fuerte, pide continuidad uniforme uniformemente en la familia, valga la redundancia. Vea que la familia de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre el compacto $[0, 1]$ descritas por

$$f_n(x) = x^n$$

no es equicontinua, dado que $|f_n(1) - f_n(x_0)| \rightarrow 1$ conforme $n \rightarrow \infty$ para cualquier $x_0 < 1$ fijo. Por otro lado, considere la familia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas sobre el mismo intervalo pero con regla de asignación

$$g_n(x) = x + \frac{1}{n},$$

es una familia equicontinua. Esto es fácilmente comprobable al darnos cuenta que $|g_n(x) - g_n(y)| = |x - y|$, así $\epsilon = \delta$.

Definición. Una familia de funciones holomorfas \mathcal{F} sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es una **familia normal** si toda sucesión de funciones en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω .

Las definiciones anteriores son esenciales para el entendimiento del teorema de Montel. Dicho teorema trabaja sobre familia de funciones dividiéndose en dos partes. La primera parte consiste en mostrar que esta familia es equicontinua y en la segunda parte muestra que es también una familia normal. Para lograr este objetivo es útil la siguiente notación.

Definición. Un **agotamiento** de un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una secuencia $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos compactos donde $K_n \subset \Omega$ para todo n , los cuales cumplen:

- $K_n \subset K_{n+1}$ para todo n .
- Todo subconjunto compacto K de Ω esta contenido en al menos un K_n de la secuencia.

Con esta terminología establecida se desprende el lema auxiliar descrito a continuación.

Lema 6.1. *Todo abierto $O \subset \mathbb{C}$ tiene un agotamiento.*

La prueba del lema consiste en considerar los conjuntos que están más allá de una distancia mínima del borde y su norma es acotada, en otras palabras una familia de conjuntos

$$K_n = \{k \mid d(\partial O, k) \geq \delta_n \text{ y } |k| < \epsilon_n\},$$

dónde δ_n es una sucesión monótona decreciente de reales y ϵ_n es una sucesión monótona creciente de reales. Estas condiciones aseguran que $K_n \subset K_{n+1}$ y los K_n son cerrados y acotados, *i.e.*, son compactos. Ahora podemos proceder con la prueba del teorema de Montel.

Teorema 6.2 (Montel). *Suponga que \mathcal{F} es una familia de funciones holomorfas en $O \subset \mathbb{C}$ abierto, uniformemente acotada en los compactos de O . Entonces,*

1. \mathcal{F} es equicontinua en todo subconjunto compacto de O .
2. \mathcal{F} es una familia normal.

Demostración. (1.) Sea $K \subset O$ compacto y $r > 0 \ni D_{3r}(z) \subset O$ para todo elemento $z \in K$. Sean $z, w \in K$ con $|z - w| < r$ y denote el contorno de $D_{2r}(w)$ como γ . Usando la formula integral de Cauchy podemos escribir la diferencia de $f(z) - f(w)$ como:

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a)}{a - z} da - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a)}{a - w} da = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(a) \left[\frac{1}{a - z} - \frac{1}{a - w} \right] da$$

Como $a \in \gamma$,

$$r < |a - z| < 3r \Rightarrow \frac{1}{|a - z|} < \frac{1}{r} \wedge |a - w| = 2r > r \Rightarrow \frac{1}{|a - w|} < \frac{1}{r}$$

Obtenemos que,

$$\left| \frac{1}{a - z} - \frac{1}{a - w} \right| = \left| \frac{(a - w) - (a - z)}{(a - z)(a - w)} \right| = \frac{|z - w|}{|a - z||a - w|} \leq \frac{|z - w|}{r^2}$$

Denotando como B la cota uniforme de la familia \mathcal{F} en el compacto formado por los puntos y tales que $d(y, K) \leq 2r$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(c) \left[\frac{1}{c-z} - \frac{1}{c-w} \right] dc \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} |f(c) dc| \left| \frac{1}{c-z} - \frac{1}{c-w} \right| \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(c) dc| \frac{|z-w|}{|r^2|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{|z-w|}{r^2} 2\pi r B \\ &= \frac{|z-w| 2\pi r}{2\pi r^2} B \\ &= \frac{|z-w|}{r} B = \frac{B}{r} |z-w|, \end{aligned}$$

veamos que $\frac{B}{r}$ es la constante de Lipschitz para f , por lo que f es Lipschitz. Recordemos que lo anterior es cierto para todo $z, w \in K$ con $|z-w| < r$ y $f \in \mathcal{F}$, entonces \mathcal{F} es equicontinua en cualquier compacto K .

(2.) Sea $\{f_n\}$ una secuencia en \mathcal{F} y el compacto $K \subset O$. Tome un subconjunto denso $W = \{w_i\}$ en O . Dado que $\{f_n\}$ es uniformemente acotado, la sucesión de puntos $\{f_n(w_1)\}$ es acotada y por la propiedad de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $\{f_{n,1}(w_1)\}$ convergente. Esto mismo puede hacer para encontrar una subsucesión $\{f_{n,2}(w_2)\}$ de la sucesión $\{f_{n,1}\}$. De esta forma se puede encontrar:

$$\{f_{n,k}\} \subset \{f_{n,k-1}\} \text{ tal que } \{f_{n,k}(w_k)\} \text{ converge.}$$

Luego, tome la diagonal $g_n = f_{n,n}$ de las sucesión anidadas anteriores. Por construcción, $g_n(w_j)$ converge para cada j . Recordemos que \mathcal{F} es equicontinua, entonces dado $\epsilon/3 > 0$ existe δ que cumple la condición de equicontinuidad. Considere la cubierta abierta de K formada por $D_\delta(w_i)$, por compacidad hay una subcubierta finita, digamos de J elementos, entonces $K \subset \bigcup_{i=1}^J D_\delta(w_i)$. Por convergencia puntual de los g 's existe un N lo suficientemente grande tal que

$$|g_m(w_j) - g_n(w_j)| < \epsilon/3,$$

por finitud se puede tomar el N máximo que cumple para todo $j = 1, \dots, J$.

Entonces si $z \in K$, sabemos que para algún j tenemos que $z \in D_\delta(w_j)$, por lo que:

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(w_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

entonces $\{g_n\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy, siendo también uniformemente convergente en K . Finalmente, sean $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$ un agotamiento de O , y tome una sucesión $\{g_{n,m}\}$ de funciones de la sucesión original $\{f_n\}$ que converge en el compacto K_m y $\{g_{n,m}\} \subset \{g_{n,m-1}\}$. Vea que la secuencia $\{g_{n,n}\}$ converge uniformemente en todo compacto de O , entonces \mathcal{F} es normal. \square

Ya casi terminamos la preparación para el teorema cumbre de esta ocasión, aun así, hace falta un último resultado. Este teorema nos dice que una función límite de una familia inyectiva hereda esta propiedad o esta familia se termina degenerando en una función constante.

Lema 6.3. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\{f_n\}$ una secuencia de funciones inyectivas holomorfas en Ω que convergen uniformemente en cada compacto de Ω hacia una función holomorfa f , entonces f o es inyectiva o es constante.*

Demostración. Se procede por contradicción, suponga que la función límite f no es inyectiva, por lo que se puede encontrar al menos dos puntos distintos

$$z_1, z_2 \in \Omega \ni f(z_1) = f(z_2).$$

Considere la secuencia $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$, la cual converge uniformemente a $g(z) = f(z) - f(z_1)$ en los compactos de Ω . Con esto se plantean dos casos:

■ Primer caso: Si $g(z)$ es holomorfa pero no es idénticamente cero. Entonces para existe γ un circulo lo suficientemente pequeño centrado en z_2 se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(w)}{g(w)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{g'(\gamma(x))\gamma'(x)}{g(\gamma(x))} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{g \circ \gamma} \frac{du}{u} = 1,$$

por el teorema de la integral de Cauchy. Como g no se desvanece en ningún punto de γ se tiene que $\frac{1}{g_n} \Rightarrow \frac{1}{g}$ en γ y como también $g'_n \rightarrow g'$ uniformemente se concluye otra convergencia uniforme:

$$\frac{g'_n}{g_n} \Rightarrow \frac{g'}{g}.$$

Sabiendo que g_n no tiene ceros en γ o su interior dado que todas las f_n son inyectivas, unidos a

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(w)}{g(w)} dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'_n(w)}{g_n(w)} dw = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

contradicción. Por lo tanto, g no tiene algún cero distinto de z_1 . Por lo cual para todo $w \in \Omega$ distinto de z_1 tenemos:

$$0 \neq g(w) = f(w) - f(z_1) \Rightarrow f(w) \neq f(z_1),$$

para cualquier $z_1 \in \Omega$. Esto se traduce en que f únicamente toma el valor $f(z_1)$ exactamente una vez. Como z_1 es arbitrario lo podemos generalizar par cualquier elemento de Ω , por lo que concluimos que f es inyectiva.

■ Segundo caso: si $g(z) = 0$, entonces

$$0 = g(z) = f(z) - f(z_1) \Rightarrow f(z) = f(z_1), \forall z \in \Omega,$$

por lo cual $f(z)$ es constante.

Finalmente, al unirse los dos casos se obtiene el resultado buscado. f es constante o f es una función inyectiva. □

6.2. El teorema del mapeo abierto de Riemann

Por fin se ha llegado a la cereza del pastel y gracias a los resultados auxiliares mostrados con anterioridad la demostración será elegante. El teorema del mapeo abierto de Riemann, también conocido simplemente como el teorema del mapeo de Riemann consta de una prueba que puede esquematizarse en tres pasos:

1. Mostrar que cualquier conjunto simplemente conexo es biholomorfo a algún subconjunto de \mathbb{D} .
2. Probar que para todo subconjunto simplemente conexo existe un mapeo entre este y el disco unitario, el cual es holomorfo e inyectivo.

3. Se concluye con que el mapeo del paso anterior es conforme, siendo suficiente demostrar que es sobreyectivo.

Luego de establecer la estructura a seguir en la prueba, finalmente se puede proceder con lo prometido.

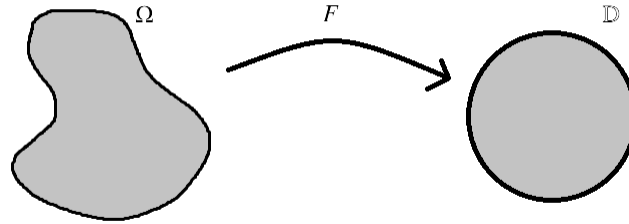


Figura 6.1: Mapeo hacia el disco unitario

Teorema 6.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ propio y holomorficamente simplemente conexo. Si $z_0 \in \Omega$ entonces existe un mapeo biyectivo y holomorfo $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que

$$F(z_0) = 0,$$

el cual es único, salvo por rotaciones.

Demostración. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto propio, abierto y simplemente conexo. Tomemos $w \in \mathbb{C} - \Omega$ y vea que para todo $z \in \Omega$, $z - w \neq 0$. Vea que entonces la función definida por:

$$f(z) = \log(z - w),$$

es continua y holomorfa en Ω (por ser simplemente conexa y gracias a la elección de w no crea problemas de múltiples valores para un punto, es decir, el argumento se mantiene en la misma rama de la función logaritmo ya que nunca completa una rotación). Tome un $z' \in \Omega$ arbitrario, suponga que $f(z) = f(z')$, entonces:

$$e^{f(z)} = z - w = z' - w = e^{f(z')} \rightarrow z = z',$$

dando como resultado que $f(z)$ es inyectiva. Es más, se puede ver que existe un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(\Omega) \cap D_\epsilon(f(z') + 2\pi i) = \emptyset$. De lo contrario $f(z') + 2\pi i$ es un punto de acumulación, i.e., $\exists \{z_n\} \subset \Omega \ni f(z_n) \rightarrow f(z') + 2\pi i$, al mapearlo por la función continua exponencial, se obtiene que $z_n \rightarrow z'$ y de la misma forma $f(z_n) \rightarrow f(z')$, lo cual lleva a una contradicción. Con esto dicho, considere el mapeo:

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - f(z') - 2\pi i}.$$

Esta función es continua, inyectiva y holomorfa, es entonces un biholomorfismo entre Ω y $F(\Omega)$. Además, es acotada, ya que $|f(z) - f(z') - 2\pi i| > \epsilon$. Con esto, podemos trasladar $F(\Omega)$ para contener al origen y escalar para que esté contenido en el disco unitario.

Basándose en lo anterior, es seguro tratar a Ω indistintamente de un abierto subconjunto del disco unitario que contenga al origen. Ahora, considere

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ es una función holomorfa e inyectiva, con } f(0) = 0\},$$

el cual no es vacío por la existencia del mapeo identidad. Además, por construcción es evidente que \mathcal{F} es uniformemente acotada gracias a su rango. Usando la desigualdad de Cauchy se tiene que

$$|f'(0)| \leq \frac{|f|_{\mathbb{D}}}{\epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon},$$

dónde $|f|_{\mathbb{D}}$ es el supremo en el disco, el cual sabemos que es menor o igual a 1 y ϵ es el radio de un círculo centrado en 0 y contenido en Ω . Esto se cumple para toda función de la familia \mathcal{F} , es decir, $|f'(0)|$ es uniformemente acotada. Definiendo

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|,$$

y eligiendo una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $|f'_n(0)| \rightarrow s$ conforme $n \rightarrow \infty$. Usando el teorema de Montel, la sucesión $\{f_n\}$ de funciones holomorfas uniformemente acotadas tiene una subsucesión $\{f_m\}$ que converge uniformemente en los compactos a una función holomorfa en Ω ,

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Sabemos que $s \geq 1$ por la función identidad, por lo cual f es no constante. Usando el lema 6.3 se deduce que f es inyectiva, ya que cada f_m lo es. Usando la continuidad y el principio del módulo máximo se sabe que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, por esto el rango es \mathbb{D} . Note que $f(0) = 0$, uniéndolo a lo anterior, tenemos que $f \in \mathcal{F}$ con $|f'(0)| = s$.

En resumen, tiene f un mapeo inyectivo y holomorfo de Ω en el disco unitario centrado en el origen, para que sea un biholomorfismo solo nos falta probar que f es sobreyectiva en \mathbb{D} . Se opta proceder por contradicción, suponga que f no es sobreyectiva, entonces

$$\exists \alpha \in \mathbb{D} - f(\Omega) \ni f_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z},$$

un automorfismo del disco. Dado que Ω es conexo, también lo es $(f_\alpha \circ f)(\Omega) = U \subset \mathbb{D}$. Teniendo que $\alpha \notin f(\Omega)$ y $f_\alpha \circ f$ es inyectiva, aunado a que $f_\alpha(\alpha) = 0$ concluimos que $0 \notin U$. Entonces es posible definir (en una sola rama) la raíz cuadrada en U como

$$g(w) = e^{\frac{1}{2} \log w}$$

Con esto, considere la función

$$F = f_{g(\alpha)} \circ g \circ f_\alpha \circ f$$

claramente F al igual que cada función componente es holomorfa, inyectiva y mapea en el disco unitario. Además, $F(0) = 0$ por lo cual $F \in \mathcal{F}$. Si definimos $h(w) = w^2$, entonces

$$f = f_\alpha^{-1} \circ h \circ f_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Phi \circ F. \tag{6.1}$$

Tenemos $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ con $\Phi(0) = 0$, función que no es inyectiva por lo que no puede ser una rotación entonces, por el lema de Schwarz tenemos que $|\Phi'(0)| < 1$. Luego,

$$f'(z) = (\Phi' \circ F)(z)F'(z) \Rightarrow f'(0) = \Phi'(F(0))F'(0) = \Phi'(0)F'(0) \tag{6.2}$$

dando que

$$|f'(0)| < |F'(0)|, \text{ una contradicción.}$$

Entonces dicho α no existe, *i.e.*, f es sobreyectiva, siendo entonces un mapeo biholomorfo de Ω en el disco.

Finalmente se muestra la unicidad bajo rotaciones. Suponga ahora que existen dos biholomorfismos F, G de Ω hacia la bola unitaria centrada en 0 tal que mapean $z_0 \in \Omega$ en el origen. Considere $H = F \circ G^{-1}$ un automorfismo del disco que fija el origen, por Schwarz es una rotación. Entonces,

$$F \circ G^{-1}(z) = e^{i\theta} z \rightarrow F(z) = e^{i\theta} G(z)$$

por lo que G es una rotación de F . □

Es importante mencionar que la condición de simplemente conexa es necesaria en dos pasos puntuales, la aplicación de logaritmo y raíz cuadrada. La propiedad de ser simplemente conexa utilizada es

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

es la única requerida para la prueba, pero para que esto se cumpla basta con que la región (propia) sea holomorficamente simplemente conexa. Sin embargo, para los números complejos ambos tipos de conexidad simple son equivalentes y no son los únicos, en esta idea se centra el siguiente capítulo lo que proporciona una variedad de formas para reescribir las condiciones del teorema del mapeo abierto de Riemann.

6.3. Espacios simplemente conexos

Las regiones simplemente conexas nacen de formalizar la idea de conjuntos que sean de una sola pieza y no tengan huecos. Esto permite que el borde y las curvas cerradas simple dentro del abierto sean homotópicas a un punto, visto de otra forma, ningún elemento fuera del propio conjunto puede ser encerrado por curvas formados por puntos del propio conjunto, esto da como resultado que el conjunto complemento sea de una sola pieza, aunque no necesariamente sin agujeros. De estos diferentes enfoques nacen las 3 equivalencias que se verán, sin embargo, dos de ellas terminan siendo un poco más restringidas por la naturaleza misma de la idea. Vea la primera equivalencia.

Teorema 6.5. *Una región Ω es simplemente conexa si y solo si es holomorficamente simple conexa. Esto significa que para toda curva cerrada γ y función holomorfa en Ω se cumple que:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. (\Rightarrow) Sea γ una curva cerrada en Ω , por teorema de Cauchy:

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 0$$

, i. e., Ω es holomorficamente simple conexa.

(\Leftarrow) Recordemos que si $\Omega \neq \mathbb{C}$ entonces el teorema del mapeo abierto aplica, i. e., existe un biholomorfismo $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Como el disco es simplemente conexo, entonces también lo es Ω ya que la deformación de dos curvas puede ser llevada de su contraparte en el disco por medio de ψ . \square

La primera equivalencia es relativamente sencilla de probar, las complicaciones vienen para las otras dos equivalencias. Antes de proceder con estos resultados es necesario recordar el Teorema de aproximación de Runge.

Teorema 6.6 (Aproximación de Runge). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en una vecindad de K , entonces f puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales cuyas singularidades están en K^c . Más aún, si K^c es conexo entonces f puede ser aproximado por polinomios.*

Adicionalmente, vea el siguiente lema no tan conocido pero igualmente útil para la prueba sobre las caracterizaciones de un conjunto simplemente conexo.

Lema 6.7. *Sean $E, F \subset \mathbb{C}$ disjuntos, cerrados y no vacíos con F acotado y tales que $\Omega = (E \cup F)^c$ es acotado. Sea $w \in F$, entonces existe una colección $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ de cuadros cerrados los cuales pertenecen a una cuadrícula del plano, siendo tal que:*

- $w \in Q_1^o$.
- $Q_j^o \cap Q_k^o = \emptyset$, si $j \neq k$.
- F esta contenido en el interior de $\bigcup_{i=1}^n Q_i$.
- $\bigcup_{i=1}^n Q_i$ es disjunto de E .
- El contorno de $\bigcup_{i=1}^n Q_i$ esta contenido totalmente en $(E \cup F)^c$ y es la unión finita de curvas cerradas poligonales simples disjuntas.

La prueba de este lema esta fuera del enfoque de este texto, sin embargo puede encontrarse en el libro [10]. Con estos dos resultados técnicos se puede probar las equivalencias deseadas.

Teorema 6.8. Si Ω es una región acotada en \mathbb{C} , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- Ω es simplemente conexa.
- Para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ y todo punto $z \in \Omega^c$ tenemos que el numero de rotación es cero, i.e:

$$W_\gamma(z) = 0.$$

- El complemento de Ω es conexo.

Demostración. (1 \Rightarrow 2) Suponga que Ω es simplemente conexa y tome $z \notin \Omega$, considere la función

$$f(w) = \frac{1}{w - z},$$

holomorfa en Ω . Por teorema 6.5, Ω es holomorficamente simplemente conexa, entonces tenemos que:

$$0 = \int_\gamma f(w)dw = \int_\gamma \frac{dw}{w - z} = 2\pi i W_\gamma(z),$$

lo buscado.

(2 \Rightarrow 3)

Se busca probar que Ω^c es conexo, se procederá por contradicción con la prueba. Suponga que Ω^c tiene una disconexión en E, F . Dado que Ω^c es cerrado, entonces E, F son cerrados, disjuntos y no vacíos, con uno y solo uno no acotado, sin perdida de la generalidad suponga que es E es el no acotado. Entonces F es compacto por Heine-Borel. Nótese que E, F cumplen las condiciones del lema 6.7, por lo que existe $w \in F$ y la colección de "cuadros" \mathcal{Q} tales que:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\partial Q_j} \frac{dz}{z - w} = 1,$$

dado que $w \in Q_1$. Observe que los bordes ∂Q_j forman curvas poligonales $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ y al reemplazarlas en la ecuación anterior queda:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z - w} = 1.$$

Note que para todo $\gamma_k \ni k$ no pertenece al interior la integral da 0, por lo que para algún γ_l se da que $W_{\gamma_l} \neq 0$, pero dicha curva se ubica en Ω siendo la contradicción buscada.

(3 \Rightarrow 1) Suponga que Ω^c es conexo, sea $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada y f un función holomorfa en Ω . Denote por

$$d(z, A) = \inf\{|z - w| : w \in A\},$$

donde z es un punto y A un conjunto, le llamaremos distancia de z a A . Con esto dicho, dado que Ω es acotado el conjunto

$$K = \{z \in \Omega : d(z, \Omega^c) \geq \epsilon\},$$

es cerrado y acotado, por lo que es compacto. Además, como Ω abierto y $\gamma \subset \Omega$ podemos encontrar un $\epsilon > 0 \ni \gamma \subset K$. Vea que K cumple las hipótesis del Teorema de aproximación de Runge, pero para la versión fuerte falta probar la conexidad de K^c . Se procede por contradicción, suponga que el abierto K^c no es conexo, entonces existe la disconexión O_1, O_2 de K^c . Sean

$$E = O_1 \cap \Omega^c \text{ y } F = O_2 \cap \Omega^c.$$

Note que,

$$E \cup F = (O_1 \cap \Omega^c) \cup (O_2 \cap \Omega^c) = K^c \cap \Omega^c = \Omega^c,$$

también,

$$E \cap F = (O_1 \cap \Omega^c) \cap (O_2 \cap \Omega^c) = (O_1 \cap O_2) \cap \Omega^c = \emptyset,$$

para lograr lo buscado falta probar que E, F son cerrado y no vacíos, así se contradice que Ω^c es conexo. Considere (z_n) secuencia en E que converge a al punto z . Vea que $(z_n) \subset \Omega^c$ y este es cerrado, entonces $z \in \Omega^c$ y dado que $\epsilon > 0$:

$$K \subset \Omega \rightarrow \Omega^c \subset K^c \rightarrow z \in K^c = O_1 \cup O_2,$$

pero como son abiertos, si $z \in O_2$ entonces para algún entero N se da que $(z_m)_{m \geq N} \subset O_2 (\rightarrow \leftarrow)$ por lo que:

$$z \in O_1 \rightarrow Z \in O_1 \cap \Omega^c = E \Rightarrow E \text{ es cerrado.}$$

De forma análoga, F es cerrado. Suponga ahora que E es vacío, entonces

$$O_1 \cap \Omega^c = \emptyset \rightarrow O_1 \subset \Omega.$$

Tomemos $w \in O_1$ y $z \in O_2 \cap \Omega^c$ con $|w - z| < \epsilon$, el cual existe por $w \in K^c$. Nótese que el segmento de recta que une $z \in O_2$ y $w \in O_1$ esta enteramente en K^c . Pero

$$t^* = \sup\{0 \leq t \leq 1 : (1-t)z + tw \in O_2\},$$

resulta entonces que $t^* \in (0, 1)$ y $z' = (1-t^*)z + t^*w$ es un punto de acumulación de O_1, O_2 disjuntos y abiertos, entonces

$$z' \notin O_1, O_2 \rightarrow z' \in O_1 \cup O_2 = K^c (\rightarrow \leftarrow).$$

Por lo que E es no vacío, similarmente F tampoco es vacío. Entonces, Ω^c es disconexo contradiciendo la hipótesis, por lo que K^c debe ser conexo, se puede aplicar Runge. Usando el teorema de aproximación de Runge, existe una secuencia de polinomios (P_n) que aproxima uniformemente a f en K y por consecuencia en $\gamma \subset K$. Recordando que

$$\int_{\gamma} P_n(w)dw = 0,$$

para todo polinomio y en especial los de (P_n) , por lo que

$$0 = \int_{\gamma} P_n(w)dw \rightarrow_{unif} \int_{\gamma} f(w)dw \Rightarrow \int_{\gamma} f(w)dw = 0.$$

Así Ω es holomorficamente simple conexa y por equivalencia es simplemente conexo. \square

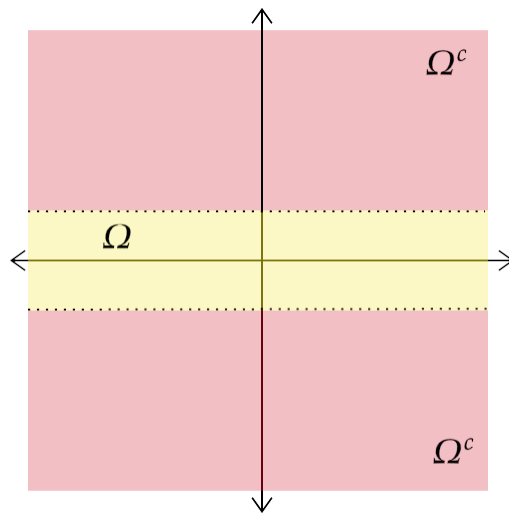


Figura 6.2: Cinturón no acotado

Note que la condición de acotación es necesaria. Si obviamos esta restricción, entonces podemos tomar un cinturón horizontal

$$\Omega = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } |b| < k\},$$

dónde k es una constante real positiva. Vea que Ω sigue siendo simplemente conexa, pero como no es acotado su complemento se forma por dos conjuntos $E = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } b > k\}$ y $F = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } b < -k\}$, existiendo una desconexión como muestra la Figura 6.2. Además, esta hipótesis es necesaria para poder llegar a la contradicción de la implicación entre el segundo y tercer punto.

Aplicación en ecuaciones diferenciales

El teorema es propio de los abiertos simplemente conexos en los números complejos, se ha probado que el análogo del teorema no existe para dominios que no sean simplemente conexos, para conjuntos de variable compleja múltiple (\mathbb{C}^n) o para espacios reales de dimensión 3 o mayor. Pese a esto, el teorema tiene un alto valor teórico, siendo la base para teoremas con grandes aportes a otras teorías, como el teorema de uniformización de superficies de Riemann o el teorema medible del mapeo de Riemann. También nos asegura la existencia de mapeos que son altamente complicados de encontrar, ya que inclusive un mapeo entre abiertos relativamente sencillos (como el de un disco y el interior de un cuadrado) se tornan en mapeos analíticos sin fórmulas explícitas al usar únicamente funciones elementales. Una función armónica se puede trasladar a otro dominio por conjugación con un biholomorfismo y sigue siendo una función armónica, de esta forma podemos encontrar soluciones a problemas como el de Dirichlet.

7.1. Ecuación de Laplace

La ecuación diferencial de Laplace es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, la cual es expresada usualmente como

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0.$$

Esta ha sido estudiada ampliamente, al punto de desarrollar la teoría del potencial, rama que se dedica a solucionar las funciones armónicas. Pese a su estudio como funciones de variable real, también pueden ser analizadas como funciones complejas al aprovechar los mapeos analíticos y las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Se sabe que una función holomorfa f puede ser expresada en términos de dos funciones u, v como

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

la parte real u e imaginaria v . Gracias a la caracterización de Cauchy-Riemann, ambas funciones son armónicas, esto quiere decir que son soluciones a la ecuación de Laplace, de esto se deduce el siguiente corolario.

Colorario 3. Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos simplemente conexos distintos de \mathbb{C} y $u(x, y)$ una función armónica en U . Entonces existe una función v en V inducida por u que cumple

$$\Delta v = 0.$$

Demostración. Note que U, V son abiertos simplemente conexos distintos del plano completo, entonces por el teorema del mapeo de Riemann existe un biholomorfismo $F : V \rightarrow U$, además, existe una función holomorfa f en U tal que $\operatorname{Re}(f) = u$. Entonces,

$$g = f \circ F,$$

es una función analítica en V . Además, si se toma $\operatorname{Re}(g) = \operatorname{Re}(f \circ F) = v$ sabemos que es armónica, i.e., $\Delta v = 0$. Por lo que v es la función inducida por u , o el traslado de la solución u hacia V . \square

Ejemplo:

Encuentre una función $f(x, y)$ definida sobre el semiplano superior tal que

$$|f(x, y)| < 1,$$

es solución para la ecuación de Laplace.

Demostración. Recordemos que existe un biholomorfismo F entre \mathbb{H} y \mathbb{D} , según teorema 5.13. El problema se reduce a encontrar un g en el disco que sea armónica y acotada. Pero gracias a que $|w| < 1$ para todo $w \in \mathbb{D}$, basta con un automorfismo del disco, como e^w , que es holomorfa en \mathbb{D} . Entonces si $F(x, y) = F(z) = w$ y $f_1(w) = e^w$,

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(f_1(w)) = \operatorname{Re}(f_1 \circ F(z)) = \operatorname{Re}(f_1 \circ F(x, y)),$$

es armónica en H . Note que $f_1 \circ F$ mapea H en D por lo que la composición nos asegura $|f| < 1$. Luego de un poco de álgebra llegamos a la fórmula explícita:

$$f(x, y) = e^{\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}} \cos\left(\frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}\right).$$

\square

7.1.1. Ecuación de calor

Este es uno de los problemas más conocidos en el estudio de las ecuaciones diferenciales desde su deducción por Joseph Fourier en 1822, el desarrollo sobre la teoría de esta ecuación puede encontrarse en el texto *Applied Partial Differential Equations*. La ecuación de calor busca encontrar una función $u : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ y el intervalo I de reales, tal que cumpla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

Acompañada de una condición de temperatura inicial, descrita como

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}),$$

indicando el estado en el tiempo 0 del cuerpo. Pero, ¿qué sucede cuando el calor es independiente del tiempo? Se llega a un estado estable, esto transforma la ecuación anterior a

$$0 = \Delta u,$$

implicando que u es una función armónica. Además, recordando que la ecuación de calor está acompañada de condiciones en la frontera, cuando se estabiliza las condiciones se tornan en

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

para $\mathbf{x} \in \partial U$, modelándose para un espacio de codimensión 1.

Si se toma el problema en el espacio \mathbb{R}^2 , este puede resolverse mediante una recuperación desde una solución equivalente en los complejos. Es decir, se puede resolver el problema de calor estable en el disco unitario \mathbb{D} y así como para la ecuación de Laplace, se puede trajectinar al dominio deseado. Se procederá con un ejemplo, pero antes considere el siguiente biholomorfismo:

Ejemplo:

Considere la región con forma de lente Ω delimitada superiormente por el segmento de círculo inferior que pasa por $-2, -i$ y 2 e inferiormente por el segmento de círculo entre $-2, -i$ y 2 , como se ilustra en la Figura 7.1. Resuelva la ecuación de calor en estabilidad para Ω con condiciones iniciales $u = 100$ para el arco superior y $u = 0$ para el arco inferior.

Demostración. Veamos que Ω es una región simplemente conexa, por lo que existe una biholomorfismo entre Ω y \mathbb{H} , se elige el semiplano superior ya que las condiciones límite son constantes distintas. Comenzamos construyendo ϕ , un mapeo inyectivo y analítico. Veamos $\partial\Omega$ esta formada por dos arcos que si se mapea por una transformación lineal nos pueden dar un segmento del plano para luego mapearlo en \mathbb{H} , dividiéndolo en 2 mapeos que lo componen de forma que:

$$\phi = \phi_2 \circ \phi_1.$$

Usando el teorema 5.19, se puede encontrar el primer mapeo ϕ_1 asumiendo que:

$$\phi_1(-2) = 0 \quad \phi_1(-i) = 1 \quad \phi_1(2) = \infty,$$

por lo cual,

$$\frac{z+2}{z-2} \cdot \frac{-i-2}{-i+2} = \frac{w}{1} \Rightarrow \phi_1(z) = w = -\frac{z+2}{z-2} \cdot \frac{i+2}{2-i}. \quad (7.1)$$

Note que el arco superior del lente se mapeo en la semirecta del eje imaginario positivo incluido el cero, ya que:

$$\phi_1(-2) = 0 \quad \phi_1(2) = \infty,$$

y

$$\begin{aligned} \phi_1\left(\frac{2}{3}i\right) &= -\frac{\frac{2}{3}i+2}{\frac{2}{3}i-2} \cdot \frac{2+i}{2-i} \\ &= \frac{(6+2i)(2+i)}{(6-2i)(2-i)} \\ &= \frac{(6+2i)^2(2+i)^2}{(36+4)(4+1)} \\ &= \frac{4}{200}(3+i)^2(2+i)^2 \\ &= \frac{1}{50}(6i+8)(4i+3) \\ &= \frac{1}{50}(24i^2+24+18i+32i) \\ &= \frac{1}{50}(50i) \\ &= i, \end{aligned}$$

mostrando lo dicho. Ahora buscamos un mapeo del primer cuadrante en el semiplano superior. Considerando que si z está en el primer cuadrante puede describirse

$$z = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \theta \in (0, \pi/2)$$

únicamente es necesaria ampliar el argumento para que $\theta \in (0, \pi)$. Por lo cual el mapeo:

$$\phi_2(z) = z^2 = (re^{i\theta})^2 = re^{2i\theta}, \quad (7.2)$$

basta. Finalmente el mapeo se consigue al unir con las ecuaciones 7.1 y 7.2 obteniendo:

$$\phi = \phi_1(z)^2 = \left(\frac{z+2}{z-2} \cdot \frac{2+i}{2-i} \right)^2.$$

Ahora, note que la función argumento $\text{ARG}(w)$ es biholomorfa en \mathbb{H} por lo que $\Delta \text{ARG} = 0$, además:

$$\text{ARG}(w) = \begin{cases} 0, & \Im(w) = 0 \text{ y } \text{Re}(w) > 0, \\ \pi, & \Im(w) = 0 \text{ y } \text{Re}(w) < 0, \end{cases}$$

por lo que si:

$$U(w) = \frac{100}{\pi} \text{ARG}(w)$$

cumple las condiciones buscadas. Finalmente, se recupera la solución, siendo esta:

$$u(z) = \frac{100}{\pi} \text{ARG} \left(\frac{z+2}{z-2} \cdot \frac{2+i}{2-i} \right)^2.$$

□

7.2. Problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet consiste en encontrar una función u sujeta a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y f es una función sobre el contorno de Ω . En otras palabras, encontrar una función armónica u en Ω tal que tome los valores de f en el borde de Ω . Se conoce un método para obtener soluciones del problema por medio de convoluciones con el núcleo de Poisson. Sin embargo, se estudiará el uso del teorema abierto de Riemman para encontrar soluciones a este problema usando mapeos biholomorfos.

Consideremos el problema de Dirichlet dónde Ω consiste de un cinturón horizontal definido por

$$\Omega = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}, \quad (7.3)$$

el cual tiene como borde las rectas \mathbb{R} y $\mathbb{R} + i$ y f se desvanece en ∞ . Este se resolverá usando un método indirecto, según los siguientes pasos:

1. Reescribir el problema mediante un mapeo conforme G hacia el disco unitario
2. Resolver para el disco unitario aprovechando el kernel de Poisson.

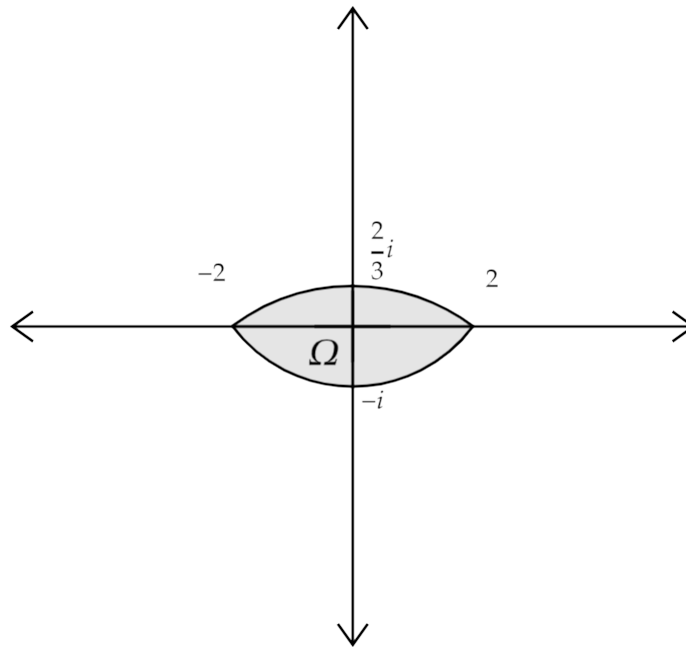


Figura 7.1: Ecuación de calor en una región con forma de lente

3. Recuperar la solución mediante el inverso G^{-1} del mapeo conforme, el cual es también un biholomorfismo.

Para llegar a la meta se comenzará con un teorema sobre dos funciones vitales en la resolución de este problema.

Teorema 7.1. Las funciones $F : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$, y $G : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ definidas de la forma

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1-w}{1+w} i \right) \text{ y } G(w) = \frac{i - e^{w\pi}}{i + e^{w\pi}},$$

son mapeos holomorfos, biyectivos e inversos entre sí. Dónde Ω es el cinturón definido con anterioridad en 7.3.

Demostración. Defina las funciones $F_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$, $F_2 : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$, $G_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$, $G_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_1(w) &= \frac{1-w}{1+w} i, \\ F_2(w) &= \frac{1}{\pi} \log(w), \\ G_1(z) &= e^{z\pi}, \\ G_2(z) &= \frac{i-z}{i+z}, \end{aligned}$$

Nótese que los mapeos F_1 y G_2 son biholomorfismos e inversos entre sí, por teorema 5.13. Además, como \log es holomorfa y biyectiva en \mathbb{H} , F_2 lo es. Vea que

$$F(w) = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1-w}{1+w} i \right) = \frac{1}{\pi} \log (F_1(w)) = F_2 \circ F_1(w),$$

en consecuencia F es analítica y biyectiva en \mathbb{D} . Tenemos también que

$$F(G(w)) = F_2 \circ F_1 \circ G_2 \circ G_1(w) = F_2 \circ I \circ G_1(w) = \frac{1}{\pi} \log(e^{w\pi}) = \frac{w\pi}{\pi} = w,$$

donde I es el mapeo identidad. Entonces, G y F son inversos. Recordando que el inverso de un biholomorfismo es un biholomorfismo, $F^{-1} = G$ es analítico y biyectivo. \square

Analicemos ahora el comportamiento de F cuando la evaluamos en la circunferencia de radio 1, es decir, el conjunto $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. Tome $a + bi \in \partial\mathbb{D} \ni a^2 \neq 1$,

$$\begin{aligned} F(a + bi) &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-(a+bi)}{1+(a+bi)}i\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-(a+bi)}{1+(a+bi)}i\right) \left(\frac{(1+a)-bi}{(1+a)+bi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{(1-a)(1+a)-(1+a)bi-(1-a)bi-(bi)^2}{(1+a)^2+(bi)^2}i\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-a^2-b^2-bi-abi-bi+abi}{1+2a+a^2+b^2}i\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-(a^2+b^2)-2bi}{1+2a+1}i\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-1-2bi}{2(1+a)}i\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{2b}{2(1+a)}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{b}{a+1}\right). \end{aligned}$$

Note que $w = \frac{b}{a+1} \in \mathbb{R}$, entonces $\log(w) = \ln|w| + k\pi$. Ahora, separe el dominio en el medio disco superior e inferior sin -1 o 1 . Como $|a| < 1$ se tiene que $a + 1 > 0$ por lo que si $b < 0$ el argumento de w es π resultando en $F(z) = \ln|w| + i$, por otro lado si $b > 0$ resulta en $F(z) = \ln|w|$. Es decir, F mapea el semi-disco superior en \mathbb{R} y el semi-disco inferior en la recta $\Im(z) = i$.

De forma más precisa, considere $z = e^{x+iy}$, como $|z| = 1$, $z = e^{iy}$. Analizando el comportamiento de F aprovechando el análisis anterior vemos que conforme y va de $-\pi$ a 0 la función $F(e^{iy})$ toma valores de $i + \infty$ hasta $i - \infty$ y conforme y va de 0 a π la función $F(e^{iy})$ toma valores de $-\infty$ hasta ∞ .

Considere la función

$$\tilde{f}(e^{iy}) = \begin{cases} \tilde{f}_b(a + bi), & y \neq \pi k, k^2 = k, \\ 0, & y = \pi k, k^2 = k, \end{cases}$$

dónde $F(e^{iy}) = a + bi$ y $\tilde{f}_b(a + bi) = f(a, b)$. Ahora, \tilde{f} es continua en $\partial\mathbb{D}$, aplicando el kernel de Poisson para encontrar la solución al problema de Dirichlet en el límite del disco:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - y) \tilde{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 P_r(\theta - y) \tilde{f}_1(y) dy + \int_0^{\pi} P_r(\theta - y) \tilde{f}_0(y) dy, \end{aligned}$$

dónde $w = re^{i\theta}$, y

$$P_r(\theta - y) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Vea que \tilde{u} es armónica y G es holomorfa en el disco, por lo que se tiene que $\tilde{u} \circ G$ es armónica en la Ω y cumple las condiciones de frontera para el problema de Dirichlet. Asumiendo que $re^{i\theta} = G(i\phi)$ se puede reescribir \tilde{u} , de la siguiente forma

$$\tilde{u}(w) = \tilde{u} \circ G(i\phi) = \frac{\sin(\pi y)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u(t, 0)}{\cosh \pi t - \cos \pi y} + \frac{u(t, 1)}{\cosh \pi t + \cos \pi y} \right] dt.$$

Note que $\tilde{u} \circ G$ mapea $\partial\Omega$ en $\partial\mathbb{D}$ cumpliendo las condiciones de frontera, por lo que $u(0, y) = \tilde{u} \circ G(i\phi)$ es solución para $\phi \in (0, 1)$. Recordando que la solución para Dirichlet para el cinturón Ω con condiciones de desvanecerse en el infinito es única, una traslación por x de las condiciones resulta en una traslación de la solución. Por lo que, luego de un cambio de variable se concluye que

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u(x-t, 0)}{\cosh \pi t - \cos \pi y} + \frac{u(x-t, 1)}{\cosh \pi t + \cos \pi y} \right] dt.$$

Por lo $u(x, y)$ es la solución al problema de Dirichlet en Ω . Esto recuperado de la solución por kernel de Poisson para el disco unitario centrado en el origen, mediante las funciones del teorema 7.1, las cuales sabemos su existencia por el Teorema del mapeo abierto de Riemman.

 Superficies de Riemann

El teorema del mapeo de Riemann sirve como base para varios teoremas de espacios topológicos y consta de varias generalizaciones. El teorema de clasificación de superficies de Riemann simplemente conexas es quizá la generalización más intuitiva y conocida del teorema. La primera prueba formal fue publicada por Henri Poincaré y Paul Koebe en 1907, posteriormente Koebe continuó publicando varias pruebas y generalizaciones alternativas para el teorema.

El teorema de clasificación de superficies de Riemann tiene varias formas de enunciarlo, todas se reducen a clasificar las superficies de Riemann. El teorema propone que todo el conjunto se reduce a 3 clases de isomorfismos bajo mapeos biholomorfas, siendo sus representantes estándar el disco unitario \mathbb{D} , el plano complejo \mathbb{C} y su compactificación de Alexandroff conocida como la esfera de Riemann S^2 .

En este trabajo se con la versión suave, ya que su papel es secundario. Pero de cualquier forma es necesario un desarrollo de la teoría sobre los objetos sobre los que el teorema funciona, las superficies de Riemann.

Las superficies de Riemann son 1-variedades complejas junto con una estructura adicional conocida como estructura compleja. Para poder entender que es esta estructura compleja es necesario ver algunas definiciones previas.

Definición. Sean X una superficie de compleja, U un subconjunto abierto de X y $V \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto. Una **carta compleja** en X es un homeomorfismo (mapeo biyectivo y bicontinuo) $\phi : U \rightarrow V$. Dos cartas complejas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ con $i = 1, 2$ se dice que son *holomorficamente compatibles* si el mapeo

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un biholomorfismo, vea la Figura 8.1.

Recuerde que una superficie compleja es una variedad 1-dimensional que sus cartas se mapean a \mathbb{C} en lugar de \mathbb{R}^2 , por lo que los mapeos $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ son funciones sobre los complejos, por lo cual ser biholomorfo hace sentido. De aquí es fácilmente comprobable que si $\phi : U \rightarrow V$ es una carta

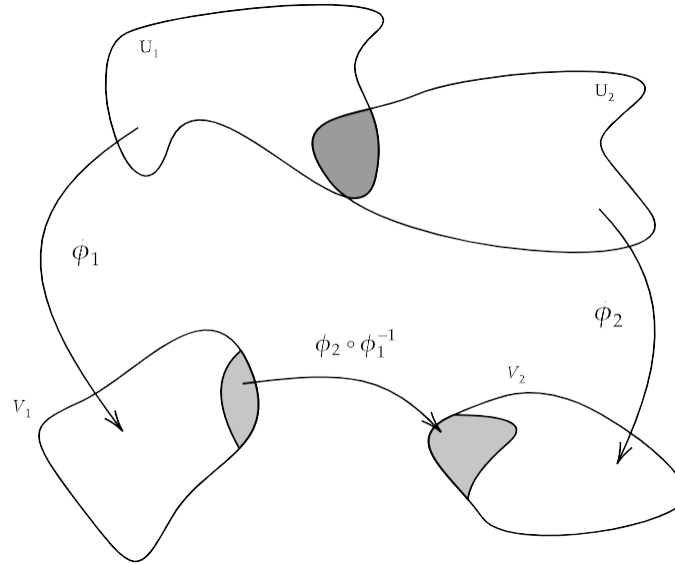


Figura 8.1: Cartas complejas holomorficamente compatibles

compleja y $u \subset U$ es abierto entonces $\phi|_u : u \rightarrow \phi(u)$ la función restringida a u es holomorficamente compatible con $\phi : U \rightarrow V$.

Definición. Un **atlas complejo** de X es un sistema de cartas complejas holomorficamente compatibles

$$\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i, | i \in I\},$$

donde I es un conjunto de índices, tales que cubren la superficie, es decir

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X.$$

Se conoce como *analíticamente equivalentes* a dos atlas complejos \mathcal{U} y \mathcal{U}' de X si todas las cartas complejas de \mathcal{U} son holomórficamente compatibles con todas las cartas complejas de \mathcal{U}' .

A partir de este momento se escribirá simplemente atlas para referirse a un atlas complejo, excepto se indique explícitamente. Vea que los biholomorfismo se preservan bajo composición, por lo que considerando la relación de ser analíticamente equivalente se puede ver que la responsabilidad recae en los abiertos de una superficie y el ser biholomorfos entre sí. De esto se puede ver fácilmente que esta relación entre atlas complejas forma una relación de equivalencia, de la cual nace la estructura compleja.

Definición. Se llama **estructuras complejas** sobre una variedad X a las clases de equivalencia de los atlas complejos en X .

Cabe resaltar dos aspectos de las estructuras complejas:

1. Se pueden determinar por la elección de un atlas.
2. Posee un atlas maximal \mathcal{U}^* , tomando un elemento \mathcal{U} de la estructura compleja se puede determinar el maximal tomando todas las cartas complejas que sean holomorficamente compatible con toda carta de \mathcal{U} .

Por esto cuando se refieran a una carta compleja arbitraria siempre se tomará del atlas maximal de la estructura compleja dada, excepto se indique lo contrario. Finalmente se puede establecer que es una superficie de Riemann.

Definición. Una **superficie de Riemann** es un par (X, Σ) , donde X es una superficie conexa y Σ es una estructura compleja en la 1-variedad compleja X .

En general se escribe X en lugar del par (X, Σ) siempre que la estructura compleja Σ tomada este clara, en ocasiones se cambia la estructura compleja por un representante \mathcal{U} con el cual se trabajará, escribiendo entonces (X, \mathcal{U}) . Note que localmente una superficie de Riemann X no es nada más que un abierto de los números complejos. Sin embargo, cada punto en la superficie pertenece a varias cartas complejas, esto se traduce en que se identifica dentro de distintos abiertos de \mathbb{C} , pero gracias a que las cartas deben ser holomórficamente compatibles podemos llevar propiedades analíticas de los complejos hacia la superficie de Riemann, pero estas propiedades deben ser invariantes bajo biholomorfismos.

Ejemplo: Superficies de Riemann

- El plano complejo \mathbb{C} , considere la estructura compleja Σ definido por el atlas con carta única dada por el mapeo identidad $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Subconjuntos de una superficie de Riemann X , tome un conjunto abierto y conexo $Y \subset X$. Vea que Y tiene una estructura natural heredada que la convierte en una superficie de Riemann. Concretamente, tome el atlas conformado por todas las cartas complejas

$$\phi : U \rightarrow V$$

en X , donde $U \subset Y$. Esto muestra que las regiones de los complejos son superficies de Riemann

Viendo estos ejemplos, procedamos a ver una de las superficies de Riemann más conocidas, que incluso comparte nombre, la esfera de Riemann. Además es vital en el enunciado del teorema de clasificación de superficies de Riemann.

8.1. La esfera de Riemann

La esfera de Riemann S^2 , recordado que la esfera S^2 es homeomorfa al plano complejo completado $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $\infty \notin \mathbb{C}$ es un símbolo. Recordemos que esto lo podemos probar usando la proyección estereográfica, esta asignación es una biyección entre ambos conjuntos. El mapeo consta de asignar el punto superior al ∞ y luego proyectar la esfera respecto a su polo superior y asignando el punto de intersección como su proyección, como muestra la Figura 8.2.

Ya que vimos esto, procedamos a mostrar que la esfera S^2 es una superficie de Riemann. Comencemos dotando a $\overline{\mathbb{C}}$ de la topología definida por los siguientes tipos de abiertos:

1. Conjuntos $U \subset \mathbb{C}$ los cuales son también abiertos de la topología usual de los complejos.
2. Conjuntos resultantes de la unión $V \cup \{\infty\}$ donde $K^c = V \subset \mathbb{C}$ es complemento de un subconjunto compacto K de los complejos.

Esta topología hace que $\overline{\mathbb{C}}$ sea un espacio topológico compacto Hausdorff. Ahora armamos la

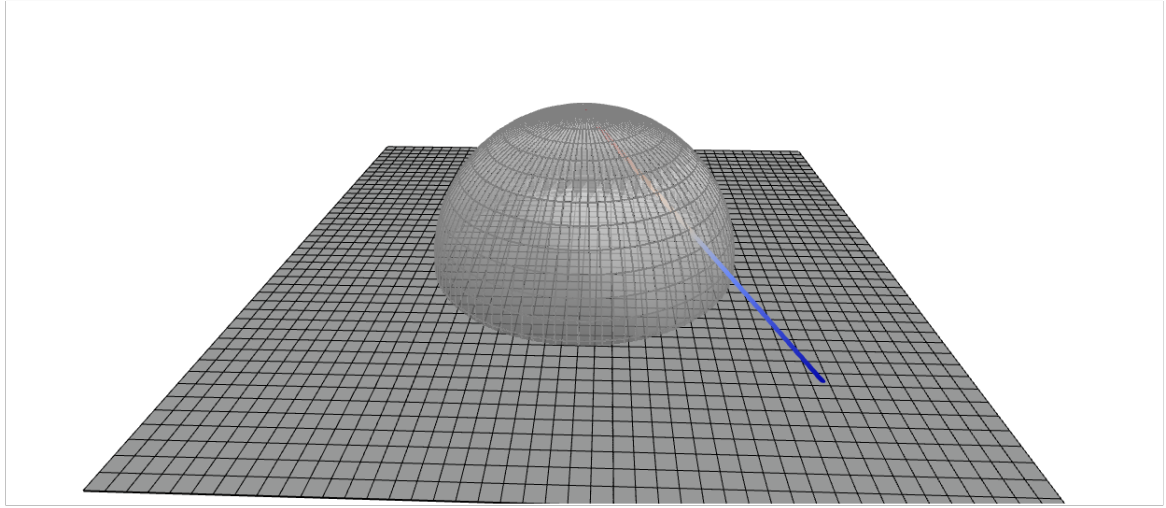


Figura 8.2: Proyección estereográfica

estructura compleja de la esfera, considere los conjuntos:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \overline{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C}, \\ U_2 &:= \overline{\mathbb{C}} - \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Definiendo los mapeos $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ para $i = 1, 2$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= z \\ \phi_2(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{para } z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \text{para } z = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que estos mapeos son homeomorfismos, esto muestra que S^2 es una superficie compleja. Dado que U_1 y U_2 son abiertos conexos que además tienen intersección no vacía $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ podemos asegurar que la esfera es conexa. Finalmente la estructura compleja de S^2 se define por el atlas complejo que contiene las cartas ϕ_i descritas anteriormente, solo falta mostrar que son holomorficamente compatibles. Pero $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ y

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \text{ siendo la asignación } z \mapsto 1/z, \quad (8.1)$$

es un biholomorfismo.

8.1.1. Automorfismos de la esfera de Riemann

Hemos visto los automorfismos de varios conjuntos de números complejos, incluido el plano complejo, sin embargo esta familia de transformaciones son automorfismos de un superconjunto de los números complejos, la esfera de Riemann S^2 . Vimos que S^2 es homeomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$ usando la proyección estereográfica, por lo que podemos tratarlos indistintamente.

Luego de aclarar eso continuemos, como indicamos después de la prueba del teorema 5.16, si consideremos como dominio y contradominio a $\overline{\mathbb{C}}$ se mantienen las propiedades dadas de las transformaciones de fracciones lineales. Pero dado que algunas definiciones únicamente están dadas para

\mathbb{C} y no para el compacto $\overline{\mathbb{C}}$, es necesario que extendamos la noción de ser analítico para nuestro compacto.

Definición. Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica en ∞** si y solo si el mapeo $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$ tiene límite en $w = 0$ dentro de los complejos completados.

Ahora sabemos cuándo una función f analítica en \mathbb{C} se puede extender a una función holomorfa en $\overline{\mathbb{C}}$. Además, rápidamente vemos que una función meromorfa g en \mathbb{C} se puede extender a una función holomorfa en los complejos completados. Nosotros usaremos la versión extendida de holomorfismo para $\overline{\mathbb{C}}$ sobre la notación de meromorfismos y holomorfismos en \mathbb{C} .

Lema 8.1. *Sea la transformación ϕ una fracción lineal con forma dada por 5.13 con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y c distinta de cero. Entonces la función $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es biyectiva y holomorfa.*

Arreglados estos detalles queremos encontrar todos los automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$. Rápidamente vemos que todas las TFLs son automorfismos de la esfera de Riemann, pero buscamos todos y, en efecto, las transformaciones de fracciones lineales son todos. Sin embargo, para probar este resultado necesitamos un lema sobre las funciones holomorfas sobre la compactificación de un punto de los complejos.

Lema 8.2. *Una función f es analítica en $\overline{\mathbb{C}}$ si y solo si f es un mapeo racional.*

Demostración. (\Leftarrow) Comencemos con el converso, un mapeo racional es una función analítica en $\overline{\mathbb{C}}$. Sea $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función racional, entonces existen polinomios sobre los complejos P, Q tales que:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (8.2)$$

con $\text{grad}(Q) > 0$. Usando el algoritmo de división euclídeo reescribimos

$$F(z) = P'(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}, \quad (8.3)$$

para polinomios P', r . Como $\text{grad}(r) < \text{grad}(Q)$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{w}\right) &= \lim_{w \rightarrow 0} \left[P'\left(\frac{1}{w}\right) + \frac{r\left(\frac{1}{w}\right)}{Q\left(\frac{1}{w}\right)} \right] \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} P'\left(\frac{1}{w}\right) + \lim_{w \rightarrow 0} \frac{r\left(\frac{1}{w}\right)}{Q\left(\frac{1}{w}\right)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} P'\left(\frac{1}{w}\right) + 0 \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} P'\left(\frac{1}{w}\right), \end{aligned}$$

límite que existe en los complejos completados, por lo cuál F es analítica en ∞ .

(\Rightarrow) La prueba en la otra dirección la dividimos en dos partes, primero mostramos que tiene una cantidad finita de polos para después probar que es una función racional. Recordemos que los polos son puntos aislados, por lo cual son a lo más contables. Sean $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ los polos de la función f holomorfa en $\overline{\mathbb{C}}$. Suponga que hay infinitos distintos polos, como la esfera de Riemann es compacta entonces es secuencialmente compacta, por lo cual (p_n) tiene una subsucesión (q_n) convergente. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ el punto de convergencia. Entonces:

- Si z_0 no es un polo entonces f es analítica en z_0 . Esto implica que $\exists \epsilon > 0$ tal que f es holomorfa en $B_\epsilon(z_0)$. Pero z_0 es el límite de la sucesión (q_n) por lo que la cola esta dentro de $B_\epsilon(z_0)$ implicando que no es analítica en la vecindad, contradicción.

- Si z_0 es un polo, entonces está aislado por lo cual $\exists \epsilon > 0$ tal que f es holomorfa en $B_\epsilon(z_0)$. Pero z_0 es el límite de la sucesión (q_n) por lo que la cola esta dentro de $B_\epsilon(z_0)$ implicando que todos son iguales a z_0 , esto contradice la infinitud de polos.

Esto implica que hay una cantidad $N \in \mathbb{N}$ de polos, esto muestra la primera parte. Consideremos ahora la serie de Laurent para f alrededor del polo p_n de grado d_n :

$$f(z) = \sum_{i=-d_n}^{\infty} a_{n,i} z^i = \sum_{i=-d_n}^{-1} a_{n,i} z^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} z^i = L_i(z) + S_i(z). \quad (8.4)$$

Repitiendo esto para todos los polos obtenemos la familia $(L_i(z))_{1 \leq i \leq N}$, definimos la función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$F(z) = f(z) - \sum_{i=1}^N L_i(z). \quad (8.5)$$

Notemos que si evaluamos un polo de f en F obtenemos:

$$F(p_n) = f(p_n) - \sum_{i=1}^N L_i(p_n) = L_n(p_n) - S_n(p_n) - \sum_{i=1}^N L_i(p_n) = S_n(p_n) - \sum_{i=1}^{n-1} L_i(p_n) - \sum_{i=n+1}^N L_i(p_n), \quad (8.6)$$

que es holomorfa en \mathbb{C} . Además,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) - \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N L_i(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

el cual es un elemento en $\overline{\mathbb{C}}$. Por lo cual F es una constantes o un polinomio. En cualquiera de ambos casos:

$$F(z) = \sum_{i=0}^n c_n z^n = f(z) - \sum_{i=1}^N L_i(z) \Rightarrow f(z) = F(z) + \sum_{i=1}^N L_i(z),$$

siendo f una función racional, lo buscado. \square

Con este lema auxiliar podemos probar que todas las transformaciones de fracciones lineales son automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ y todo automorfismo de la esfera de Riemann es una TFL.

Teorema 8.3. *Todo automorfismo del plano complejo completado $\overline{\mathbb{C}}$ está dado por una transformación de fracción lineal y toda función de este tipo es un automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. (\Leftarrow) Comencemos mostrando que toda transformación por fracción lineal es un automorfismo. Usando el teorema 5.16 sabemos que nuestra TFL ϕ es biyectiva y holomorfa en todo \mathbb{C} , exceptuando los puntos $z_0 = \frac{-d}{c}$ en el dominio y $w_0 = \frac{-d}{c}$ en el contradominio. Por definición, z_0 es el único polo de ϕ por lo que es meromorfa. Por hipótesis tomamos como región la esfera de Riemann, en consecuencia

$$\phi(z_0) = \infty \text{ y } \phi(\infty) = w_0,$$

por lo que ϕ es biyectiva, lo que buscamos.

(\Rightarrow) Sea f un automorfismo de la esfera de Riemann, entonces f es holomorfa y biyectiva. Usando f es analítica en S^2 es una función racional, eso quiere decir que existen polinomios P, Q sobre los complejos tales que:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Como f es biyectiva hay un polo y una raíz, por lo cual el polinomio P es lineal y Q es a lo más de grado 1. Esto implica que podemos reescribir la función:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Por último, la inyectividad nos asegura que $ad \neq bc$, de lo contrario f se vuelva constante. Esto muestra que f es una transformación de fracción lineal. \square

Recordemos que tanto el teorema del mapeo de Riemann como su generalización, el teorema de clasificación de superficies de Riemann, trabajan con objetos simplemente conexos. Ya hemos mostrado que el plano complejo y el disco unitario son simplemente conexos, pero para la esfera de Riemann únicamente hemos probado su conexidad, así que es necesario que probemos que es simplemente conexa. Para eso usaremos el teorema 6.5, pero para eso necesitamos saber qué son las funciones holomorfas.

8.2. Funciones sobre superficies de Riemann

Sabiendo que son las superficies de Riemann se puede empezar a jugar con ellas, que tipos funciones hay y que propiedades obtienen por los atlas complejos. Se comenzará por ver funciones de superficies de Riemann hacia las superficie de Riemman trivial, el conjunto de los números complejos.

Definición. Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un subconjunto abierto. Una función $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada **holomorfa**, si para toda carta compleja $\phi : U \rightarrow V$ en X la función

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap Y) \rightarrow \mathbb{C} \quad (8.7)$$

es holomorfa en el subconjunto $\phi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$.

Al conjunto de todas las funciones holomorfas del conjunto Y lo denotaremos por $\mathcal{P}(Y)$. Vea que estas funciones son de valor complejo, pero la que se usa para verificar si son holomorfas en la ecuación 8.7 es una función de los complejos. De aquí podemos ver que la suma y producto de funciones holomorfas continúa siendo holomorfa, es decir, el conjunto $\mathcal{P}(Y)$ es cerrado bajo la suma y producto. Adicionalmente, las funciones constantes son elementos de este conjunto, por lo cual podemos concluir que $\mathcal{P}(Y)$ es un álgebra de funciones.

Notemos que para comprobar si una función f es holomorfa en Y no hace falta verificar para toda carta compleja en un atlas máxima, usando el hecho de que son holomorficamente compatible y por el principio de cadenas maximales nos basta con mostrar para una familia de cartas que cubran Y . Con esto dicho, se puede continuar a una generalización del concepto holomorfismo extendiéndolo a funciones entre dos superficies de Riemann.

Definición. Sean X y Y dos superficies de Riemann. Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ entre las superficies de Riemann es **holomorfo**, si para todo par de cartas complejas $\phi : U_X \rightarrow V_X$ en X y $\psi : U_Y \rightarrow V_Y$ en Y con $f(U_X) \subset U_Y$, el mapeo:

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : V_X \rightarrow V_Y, \quad (8.8)$$

es holomorfo en el sentido usual, como en la Figura 8.3.

Notemos que para corroborar si un mapeo entre superficies es holomorfo se recurre a las imágenes de sus cartas en los complejos, por esto en el caso que $Y = \mathbb{C}$ es evidente que el mapeo holomorfo

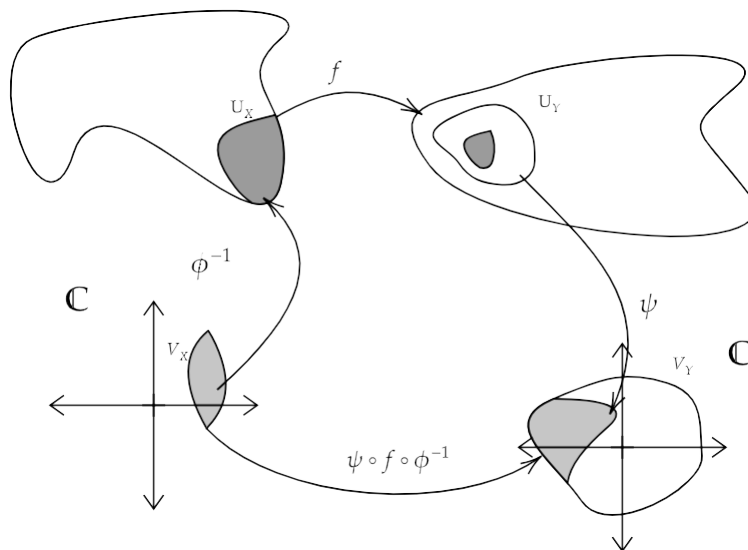


Figura 8.3: Mapeo holomorfo entre superficies

entre superficies es lo mismo que las funciones holomorfas. Ahora que sabe que es un holomorfismo entre superficies podemos proceder a los biholomorfismos entre superficies, como se ha visto estas definiciones son traídas desde el mundo de los complejos y la de un biholomorfismo no es la excepción.

Definición. Sean X, Y dos superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo entre ambas superficies. Se dice que f es un biholomorfismo si es biyectivo y los mapeos

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y, \\ f^{-1} : Y &\rightarrow X, \end{aligned}$$

son holomorfos. Entonces, si existe dicho biholomorfismo f se llamarán isomorfas a las superficies de Riemann X y Y .

Vea que si piensa rápidamente en superficies de Riemann isomorfas la respuesta inmediata que se le debe ocurrir luego de leer este escrito son los abiertos simplemente conexos de los complejos. Tome dos abiertos simplemente conexos Ω_1 y Ω_2 de los complejos, usando el mapeo identidad les dota de una estructura compleja natural, finalmente buscamos el biholomorfismo que los haga isomorfos, pero por el teorema del mapeo de Riemann sabes que son isomorfos entre ellos y al disco unitario. Pero vea el siguiente ejemplo, este es un poco más interesante y está ilustrado en la Figura 8.4.

Ejemplo:

Sea la superficie X un cono con vértice en el origen, altura h_1 y radio mayor R_1 que abre hacia el semi-eje z positivo y la superficie Y un huacal de altura h_2 y radio máximo R_2 tangente en el origen al plano xy y que abre hacia el semi-eje positivo z , como se ilustra en la Figura 8.4. Muestre que X es isomorfa a Y .

Demostración. Se comenzará probando que efectivamente son superficies de Riemann para luego enunciar un biholomorfismo f y así finalmente probar que en efecto es un biholomorfismo concluyendo que X es isomorfa a Y .

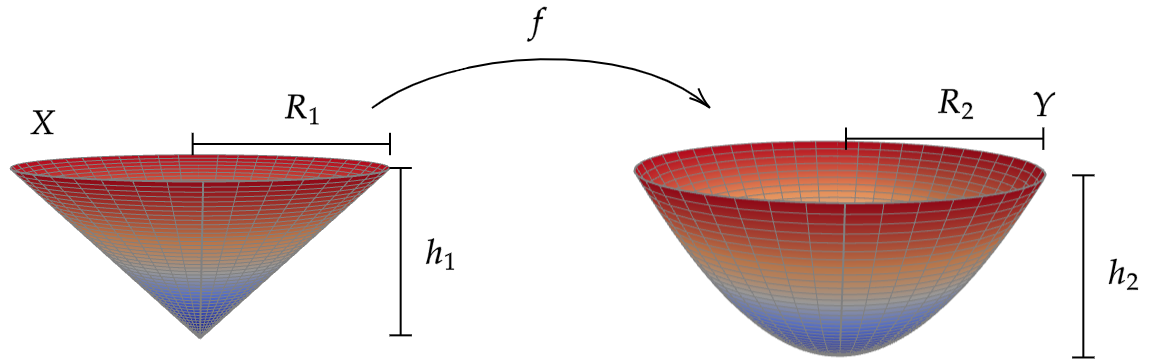


Figura 8.4: Biholomorfismo entre cono y huacal

Por conveniencia se usarán las siguientes parametrizaciones:

$$X = \left\{ \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_1}{R_1} r \right) \mid r \in [0, R_1] \text{ y } \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$Y = \left\{ \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_2}{R_2^2} r^2 \right) \mid r \in [0, R_2] \text{ y } \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Ahora vea las siguientes cartas complejas

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ con regla } \phi \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_1}{R_1} r \right) = r e^{i\theta},$$

$$\psi : Y \rightarrow \mathbb{C}, \text{ con regla } \psi \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_2}{R_2^2} r^2 \right) = r e^{i\theta},$$

que evidentemente forman estructuras complejas para X y Y , respectivamente. Probado que son superficies de Riemann, se procede a construir el biholomorfismo f que viendo las cartas y sus parametrizaciones se puede deducir una función que cumpla. Considere la función entre superficies $f : X \rightarrow Y$ dado por:

$$f(x, y, z) = \left(x, y, \frac{R_1^2 h_2}{h_1^2 R_2^2} z^2 \right). \tag{8.9}$$

Es evidente que es una función continua y biyectiva, ya que en las primeras dos componentes es invariante y para la tercera únicamente es un escalado. Ahora falta probar que es holomorfa con inversa holomorfa,

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \phi^{-1} (r e^{i\theta}) &= \psi \circ f \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_1}{R_1} r \right) \\ &= \psi \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_2}{R_2^2} r^2 \right) \\ &= r e^{i\theta}, \end{aligned}$$

por lo que f es holomorfa. Ahora para la inversa,

$$\begin{aligned}\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(re^{i\theta}) &= \phi \circ f^{-1}\left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_2}{R_2^2} r^2\right) \\ &= \phi\left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{h_1}{R_1} r\right) \\ &= re^{i\theta},\end{aligned}$$

el cual es holomorfo. Por lo tanto, f es un biholomorfismo entre X y Y , entonces el cono y el huacal son isomorfos. \square

De aquí surge una pregunta:

- ¿Son todas las superficies de Riemann simplemente conexas también isomorfas al disco unitario \mathbb{D} o qué otros conjuntos de superficies isomorfas existen?

El teorema de clasificación de Superficies de Riemann responde la pregunta, si tomamos solo las superficies simplemente conexas existen los tres tipo anteriormente mencionados y si se toma cualquier superficie, se elige clasificar por sus cubiertas y caen de nuevo a únicamente los tres tipos ya mencionados.

Teorema 8.4 (Clasificación de Superficies de Riemann simplemente conexas). *Las superficies de Riemann simplemente conexas constan únicamente de:*

- *el disco unitario \mathbb{D} .*
- *el plano complejo \mathbb{C} .*
- *la esfera de Riemann S^2 .*

Salvo biholomorfismos.

Podemos ver que para todas las superficies de Riemann directamente derivadas de una región del plano, el teorema del mapeo abierto de Riemann nos indica que son biholomorfas al disco. Pero eso no basta para probar el teorema, pero la demostración puede encontrarse en [3], nosotros veremos que, en efecto, esas tres superficies de Riemann son distintas entre sí.

Lema 8.5. *No existe biholomorfismos entre cualquier par de las siguientes superficies,*

1. *el disco unitario \mathbb{D} .*
2. *el plano complejo \mathbb{C} .*
3. *la esfera de Riemann S^2 .*

Demostración. (3 \Rightarrow 2) Suponga que existe un biholomorfismo $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ entre la esfera de Riemann y el plano complejo. Recordemos que S^2 es compacto, como f es continuo entonces $f[S^2]$ es compacto; pero, \mathbb{C} no es compacto, contradicción. Entonces, no existe biholomorfismo entre S^2 y \mathbb{C} .

(2 \Rightarrow 1) Suponga que existe un biholomorfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ entre el disco unitario y el plano complejo. Vea que

$$|f| < 1,$$

es decir, f es acotada. Pero f es entera y acotada, usando el teorema de Liouville f es constante, contradicción. Entonces, no existe biholomorfismo entre \mathbb{D} y \mathbb{C} .

(1 \Rightarrow 3) Suponga que existe un biholomorfismo $f : S^2 \rightarrow \mathbb{D}$ entre la esfera de Riemann y el disco unitario. Recordemos que S^2 es compacto, como f es continuo entonces $f[S^2]$ es compacto; pero, \mathbb{D} no es compacto, contradicción. Entonces, no existe biholomorfismo entre S^2 y \mathbb{D} .

□

Aún así falta comprobar que la esfera de Riemann es simplemente conexa, para eso usaremos la equivalencia entre holomorficamente simple conexa y simplemente conexa. Para esto necesitamos ver como integrar en las superficies.

8.3. Integración en una superficie de Riemann

Para entrar a la integración sobre las superficies es necesario tener un objeto para integrar, estos objetos son llamados *formas* en la teoría de superficies de Riemann.

Definición. Una **1-forma holomorfa** en la coordenada z sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma:

$$\omega = f(z)dz, \quad (8.10)$$

dónde f es una función holomorfa en V .

Estos son los objetos que transportaremos haciendo uso de las cartas complejas, pero dado que una superficie tiene varias cartas complejas debemos tener algún tipo de compatibilidad entre los dominios que se traslapan.

Definición. Sean $\omega_1 = f(z_1)dz_1$ y $\omega_2 = f(z_2)dz_2$ 1-formas holomorfas definidas sobre abiertos V_1 y V_2 , respectivamente. Diremos que el mapeo holomorfo $z_1 = T(z_2)$ **transforma** ω_1 en ω_2 si

$$g(z_2) = f(T(z_2))T'(z_2). \quad (8.11)$$

Veamos que el mapeo holomorfo nos indica que $dz_1 = T'(z_2)dz_2$ por lo que si T transforma las 1-formas de manera que:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f(z_1)dz_1 \\ &= f(T(z_2)) dz_1 \\ &= f(T(z_2))T'(z_2) dz_2 \\ &= \omega_2, \end{aligned}$$

efectivamente las 1-formas son iguales entre sí. De forma similar podemos definir las 1-formas sobre superficies.

Definición. Una **1-forma holomorfa** sobre una superficie de Riemann X es una colección de 1-formas holomorfas $\{\omega_i\}$ sobre los abiertos V_i para cada carta compleja $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ de la superficie. Esta colección es tal que si dos cartas ϕ_i, ϕ_j se traslapan entonces la 1-forma ω_i se transforma en la 1-forma ω_j por medio del mapeo holomorfo $T = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ que es el cambio de coordenadas entre las cartas.

Con este concepto diseñado especialmente para la integración en superficies de Riemann sobre curvas, únicamente nos falta definir las curvas.

Definición. Una **curva** o **camino** sobre una superficie de Riemann X es una función continua e infinitamente diferenciable por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de un intervalo cerrado en los reales hacia X . Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son llamadas las orillas de γ . Diremos que una curva es *cerrada* si y solo si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Ejemplo:

Considere la superficie S^2 la esfera de Riemann y la función $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ sobre S^2 definida por $\gamma(a) = (0, \cos(2\pi a), \sin(2\pi a))$, como se ve en la Figura 8.5. Veamos que γ es una curva cerrada, ya que

$$\gamma(0) = (0, 1, 0) = \gamma(1).$$

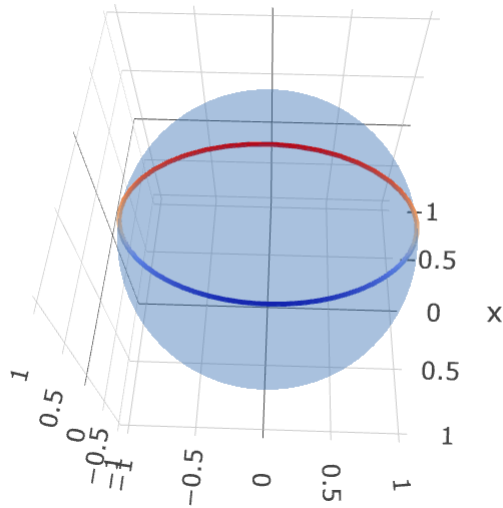


Figura 8.5: Curva sobre la esfera

Notemos que en el ejemplo anterior, para ninguna de las dos cartas complejas de la esfera U_1, U_2 tenemos que γ está contenida completamente. Por lo que es útil utilizar las particiones de una curva γ .

Definición. Una **partición** de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ sobre la superficie de Riemann X es una descomposición en n curvas $\gamma_i : [a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leq i \leq n$ tales que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.

Veamos que entonces para nuestra curva γ sobre la esfera podemos hacer una partición tal que las curvas γ_1, γ_2 están contenidas en una sola carta de la superficie. Poder hacer esto es importante para la integración en las superficies, por lo cual necesitamos la certeza de poder realizarlo de manera independiente del atlas de la superficie de Riemann, lo cual es posible gracias al dominio compacto.

Lema 8.6. Sea γ una curva sobre la superficie de Riemann X . Entonces γ puede ser particionada en un número finito n de particiones $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tal que cada γ_i es una curva y la imagen está contenida completamente en una carta compleja.

Demostración. La prueba se deduce del dominio compacto y la continuidad de la función γ . Sabemos que $\gamma[a, b]$ es compacto, por lo que para todo conjunto de cartas complejas que lo cubren existe un subconjunto finito que contiene la imagen. De aquí seleccionamos los puntos a_i que particionan la curva y obtenemos la partición $\{\gamma_i\}$. \square

Dado que estamos trabajando sobre números complejos es útil adoptar una notación distinta al uso de parte real e imaginaria, pero equivalente. Esta notación usa los números complejos y sus conjugados para reescribir las partes reales e imaginarias, ya que si $z = x + iy$ podemos escribir

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ y } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (8.12)$$

Es más, también podemos reescribir los diferenciales

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \text{ y } dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \quad (8.13)$$

De esto obtenemos que las expresiones de la forma

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy,$$

pueden reescribirse como

$$r(z, \bar{z})dz + s(z, \bar{z})d\bar{z}. \quad (8.14)$$

Teniendo los diferenciales dz y $d\bar{z}$ podemos definir las formas diferenciales que usaremos para integrales de línea en superficies.

Definición. Una C^∞ **1-forma** en la coordenada z en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}, \quad (8.15)$$

dónde las funciones $f, g \in C^\infty$ en V .

De igual manera necesitamos definir la regla de transformación entre las formas diferenciales.

Definición. Suponga que $\omega_1 = f_1(z, \bar{z})dz + g_1(z, \bar{z})d\bar{z}$ es una C^∞ 1-forma en la coordenada z sobre el abierto V_1 y $\omega_2 = f_2(z, \bar{z})dz + g_2(z, \bar{z})d\bar{z}$ es una C^∞ 1-forma en la coordenada z sobre el abierto V_2 . Sea $z = T(w)$ tal que define un mapeo holomorfo entre los abiertos V_2 y V_1 . Se dice que ω_1 **se transforma en** ω_2 bajo T si $f_2(w, \bar{w}) = f_1(T(w), \overline{T(w)})T'(w)$ y $g_2(w, \bar{w}) = g_1(T(w), \overline{T(w)})\overline{T'(w)}$.

Notemos que justamente usando la regla de la cadena tenemos que los diferenciales $dz = T'(w)dw$ y $d\bar{z} = \overline{T'(w)}d\bar{w}$. Usamos el mismo método que antes para trasladar estas ideas a las superficies de Riemann.

Definición. Sea X una superficie de Riemann. Una C^∞ **1-forma** en X es una colección de C^∞ 1-forma $\{\omega_i\}$ en las cartas complejas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ en la variable del abierto V_i . Estas son tales que si dos cartas $\psi_i : U_i \rightarrow V_i$ y $\psi_j : U_j \rightarrow V_j$ tienen dominios que se traslapan, entonces las C^∞ 1-formas ω_1, ω_2 se transforman bajo el cambio de coordenadas $T = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

Ahora procedamos con las integrales de línea sobre las superficies de Riemann.

Definición. Sea ω una C^∞ 1-forma y γ una curva en la superficie de Riemann X con partición $\{\gamma_i\}$. La **integral de ω sobre γ** es el número complejo

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left[f_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})\overline{z'(t)} \right] dt$$

Ahora podemos mostrar que nuestra última superficie de Riemann simplemente conexa, en efecto es simplemente conexa.

Lema 8.7. *La esfera de Riemann S^2 es simplemente conexa.*

Demostración. Veamos que para usar el teorema 6.5 necesitamos una función holomorfa e integrar sobre una curva arbitraria γ . Sea f una función holomorfa en la esfera de Riemann, por lema 8.2 sabemos que f es una función racional. Además, por definición las funciones

$$f \circ \phi_1^{-1} \text{ y } f \circ \phi_2^{-1},$$

son holomorfas en \mathbb{C} , por lo cual $f(z)$ es un polinomio. Note que además deben ser holomorficamente compatibles, así que usando el cambio de coordenadas obtenemos en \mathbb{C}^* :

$$\begin{aligned} f \circ \phi_1^{-1}(z) &= f \circ \phi_2^{-1}(z) \cdot \phi_2^{-1'}(z) \\ f(z) &= f(1/z) \cdot (-z^{-2}) \\ z^2 f(z) &= -f(1/z). \end{aligned}$$

Reescribiendo como polinomio a $f(z)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} z^2 \sum_{i=0}^n a_n z^n &= - \sum_{i=0}^n a_n z^{-n} \\ \sum_{i=0}^n a_n z^{n+2} &= - \sum_{i=0}^n a_n z^{-n} \\ \sum_{i=0}^n a_n (z^{n+2} + z^{-n}) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$, lo cual es absurdo excepto si $f(z) = 0$. Finalmente tome γ una curva cerrada sobre S^2 , usando el lema 8.6 podemos obtener la partición $\{\gamma_i\}$ tales que están contenidas completamente en una de las dos cartas de la esfera. Expresando $f(z)dz$ como una C^∞ 1-forma, $f(z)dz = r(z, \bar{z})dz + s(z, \bar{z})d\bar{z} = \omega$

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} 0 = \sum_i 0 = 0$$

Por lo cuál al aplicar la integral sobre una curva cerrada simple de una función holomorfa en la esfera S^2 , obtenemos que es 0. Por esto concluimos que S^2 es simplemente conexa. \square

8.4. Dirichlet en la esfera

En el segundo capítulo vimos como usar el teorema del mapeo abierto de Riemann para solucionar el problema de Dirichlet sobre abiertos en el plano, esto podemos extenderlo a la superficie de Riemann simplemente conexa del disco unitario \mathbb{D} . Pero, ¿cómo es dicho problema sobre la tercer clase de superficies de Riemann, la esfera S^2 ? Para plantear esta generalización del problema de

Dirichlet necesitamos poder resolver ecuaciones diferenciales sobre la esfera. Para poder hacer esto es necesario tener la forma volumétrica de la esfera de Riemann. Sabemos que esta es

$$d\text{vol}_{S^2} = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

en \mathbb{R}^3 . Pero estamos trabajando con superficies complejas por lo que debemos reescribirla en este ámbito:

Lema 8.8. *La forma volumétrica de la esfera de Riemann S^2 es*

$$d\text{vol}_{S^2} = \frac{2}{i} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \quad (8.16)$$

Demostración. Comencemos calculando las derivadas de $\phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$, la proyección estereográfica dada por:

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{1}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right).$$

Dicho de forma equivalente para cada coordenada:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad x_2 = \frac{1}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}}.$$

Derivando obtenemos las siguientes tres igualdades:

1.

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dz}{(1 + z\bar{z})} - \frac{(z + \bar{z}) dz}{(1 + z\bar{z})^2} \cdot \bar{z} dz + \frac{d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})} - \frac{(z + \bar{z}) z d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \\ &= \frac{(1 + z\bar{z} - z\bar{z} - \bar{z}^2) dz + (1 + z\bar{z} - z^2 - z\bar{z}) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \\ &= \frac{1 - \bar{z}^2}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{1 - z^2}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} dx_2 &= \frac{dz}{(1 + z\bar{z}) i} - \frac{(z - \bar{z}) \cdot \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i} dz - \frac{d\bar{z}}{(1 + z\bar{z}) i} - \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i} \cdot z d\bar{z} \\ &= \frac{(1 + z\bar{z} - z\bar{z} + \bar{z}^2) dz - (1 + z\bar{z} + z^2 - z\bar{z}) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i} \\ &= \frac{(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} dx_3 &= \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} dz - \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^2} \cdot \bar{z} dz + \frac{z}{1 + z\bar{z}} d\bar{z} - \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^2} \cdot z d\bar{z} \\ &= \frac{(\bar{z} + z\bar{z}^2 - z\bar{z}^2 + \bar{z}) dz + (z + z^2\bar{z} - z^2\bar{z} + z) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \\ &= \frac{2\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{2z}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z}. \end{aligned}$$

Con esto podemos calcular el elemento volumétrico de la esfera en las coordenadas de z y \bar{z} , recordemos que este es:

$$d\text{vol}_{S^2} = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2. \quad (8.17)$$

Calculemos cada sumando por separada para luego encontrar $d\text{vol}_{S^2}$.

$$\begin{aligned} x_1 dx_2 \wedge dx_3 &= \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \left[\frac{(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i} \right] \wedge \left[\frac{2\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{2z}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z} \right] \\ &= \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \cdot \frac{1}{(1 + z\bar{z})^2 i} [(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}] \wedge \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2} [\bar{z} dz + z d\bar{z}] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z + \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}] \wedge [\bar{z} dz + z d\bar{z}] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z + \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [2z(1 + \bar{z}^2) dz \wedge d\bar{z} - 2\bar{z}(1 + z^2) d\bar{z} \wedge dz] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z + \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [z + z\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2\bar{z}] dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z + \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} (z + \bar{z})(1 + z\bar{z}) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{(z + \bar{z})^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 dx_3 \wedge dx_1 &= \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})i} \left[\frac{2\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{2z}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z} \right] \wedge \left[\frac{1 - \bar{z}^2}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{1 - z^2}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z} \right] \\ &= \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})i} \cdot \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2} [\bar{z} dz + z d\bar{z}] \wedge \frac{1}{(1 + z\bar{z})^2} [(1 - \bar{z}^2) dz + (1 - z^2) d\bar{z}] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [\bar{z} dz + z d\bar{z}] \wedge [(1 - \bar{z}^2) dz + (1 - z^2) d\bar{z}] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [\bar{z}(1 - z^2) dz \wedge d\bar{z} + z(1 - \bar{z}^2) d\bar{z} \wedge dz] \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} [\bar{z} - z^2\bar{z} - z + z\bar{z}^2] dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{(1 + z\bar{z})^5} (1 + z\bar{z})(\bar{z} - z) dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{2}{i} \cdot \frac{(z - \bar{z})^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 dx_1 \wedge dx_2 &= \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \left[\frac{1 - \bar{z}^2}{(1 + z\bar{z})^2} dz + \frac{1 - z^2}{(1 + z\bar{z})^2} d\bar{z} \right] \wedge \left[\frac{(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2 i} \right] \\
 &= \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \cdot \frac{[(1 - \bar{z}^2) dz + (1 - z^2) d\bar{z}]}{(1 + z\bar{z})^2} \wedge \frac{[(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}]}{(1 + z\bar{z})^2 i} \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^5} [(1 - \bar{z}^2) dz + (1 - z^2) d\bar{z}] \wedge [(1 + \bar{z}^2) dz - (1 + z^2) d\bar{z}] \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^5} [-(1 - \bar{z}^2)(1 + z^2) dz \wedge d\bar{z} + (1 - z^2)(1 + \bar{z}^2) d\bar{z} \wedge dz] \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^5} [-(1 + z^2 - \bar{z}^2 - z^2\bar{z}^2) - (1 + \bar{z}^2 - z - z^2\bar{z}^2)] dz \wedge d\bar{z} \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^5} [-2 + 2z^2\bar{z}^2] dz \wedge d\bar{z} \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{z\bar{z} - 1}{(1 + z\bar{z})^5} (-1 + z\bar{z})(1 + z\bar{z}) dz \wedge d\bar{z} \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{(z\bar{z} - 1)^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z}.
 \end{aligned}$$

Finalmente sumamos los términos que calculamos independientemente:

$$\begin{aligned}
 \text{dvol}_{S^2} &= x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{(z + \bar{z})^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z} + \frac{-2}{i} \cdot \frac{(z - \bar{z})^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z} + \frac{2}{i} \cdot \frac{(z\bar{z} - 1)^2}{(1 + z\bar{z})^4} dz \wedge d\bar{z} \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{(1 + z\bar{z})^4} [(z + \bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2 + (z\bar{z} - 1)^2] dz \wedge d\bar{z} \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^4} [z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - z^2 + 2z\bar{z} - \bar{z}^2 + z^2\bar{z}^2 - 2z\bar{z} + 1] \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^4} [z^2\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 1] \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^4} (z\bar{z} + 1)^2 \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}.
 \end{aligned}$$

Lo que buscamos. □

El término 8.16 es conocido también como la *fubini-study metric* o forma de Kähler de la esfera. Con esta forma definida ya podemos resolver ecuaciones diferenciales sobre la esfera de Riemann, por lo que únicamente nos falta plantear el problema de Dirichlet sobre la superficie. Recordando que este problema consta de encontrar una función armónica con condiciones en la frontera, debemos ver que es una función armónica en la esfera. Recordemos que una función f es armónica si:

$$\nabla^2 f = 0, \text{ o equivalente, } \partial\bar{\partial}f = 0. \quad (8.18)$$

Por lo cuál podemos escribir el problema de dirichlet sobre la esfera como encontrar una función f tal que:

$$\partial\bar{\partial}f = 0 \text{ y } f(w) = u(w) \text{ en } \partial\Omega,$$

donde Ω es un abierto simplemente conexo en S^2 .

Hemos visto que los biholomorfismos crean tres clases distintas de abiertos simplemente conexos en los números complejos, siendo estos el plano complejo \mathbb{C} , el disco unitario \mathbb{D} y el conjunto vacío \emptyset . Estudiamos algunas familias de funciones biholomorfas y sus aplicaciones. Además, vimos distintos automorfismos para cada una de las superficies de Riemann simplemente conexas encontrando que estas funciones tienen una forma general para cada superficie. También exploramos cómo resolver ecuaciones diferenciales usando el teorema del mapeo abierto de Riemann para trasladar el dominio de las soluciones, en especial para el problema de Dirichlet haciendo uso de la propiedad la cual indica que las funciones componentes son conjugadas armónicas. Finalmente vimos una generalización del teorema, la cual clasifica las superficies de Riemann y como reescribir el problema de Dirichlet en estas tres superficies simplemente conexas.

CAPÍTULO 10

Recomendaciones

1. Estudiar métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales para unirlos a biholomorfismos para la resolución en distintos abiertos.
2. Profundizar en las superficies de Riemann para demostrar el teorema de clasificación de superficies de Riemann.

- [1] Asmar, Nakhle H.; Grafakos, Loukas: *Complex Analysis with Applications (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Springer International Publishing, 2018.
- [2] Carmo, Manfredo Perdigao do: *Riemannian Geometry*. Springer, 1992.
- [3] Forster, Otto: *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1981.
- [4] Haberman, Richard: *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (5th Edition)*. Pearson, 2012.
- [5] KOLMOGOROV, A. N. y S. V. FOMIN: *Elements of the Theory of Functions and Functional analysis Volume 1*. Graylock Press, 1963.
- [6] Lee, John Marshall: *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*. Springer-Verlag, 1950.
- [7] Lee, John Marshall: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.
- [8] Miranda, Rick: *Algebraic curves and Riemann surfaces*. American Mathematical Society, 1953.
- [9] Salamon, Dietmar: *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.
- [10] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami: *Complex Analysis (Princeton Lectures in Analysis, No. 2)*. Princeton University Press, 2003.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son un par de ecuaciones diferenciales parciales esenciales en el estudio de las funciones holomorfas en los números complejos. Estas ecuaciones brindan una condición necesaria para la ser diferenciable en \mathbb{C} .

Teorema A.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z = x + iy$ un número complejo, tal que f puede escribirse como*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

para dos funciones de valores reales u, v . Entonces si f es holomorfa en z_0 tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (\text{A.1})$$

Además, el valor

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

si existe la derivada en z_0 .

Demostración. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en $z_0 = x_0 + iy_0$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces existe el límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{[u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)}.$$

Por esto sabemos que las derivadas direccionales existen, puntualmente las siguientes dos:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{[u(x, y_0) + iv(x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \\
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \\
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0} = \\
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\
 & \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{[u(x_0, y) + iv(x_0, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = \\
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = \\
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y) - iv(x_0, y_0)}{iy - iy_0} = \\
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)} = \\
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{i[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)} = \\
 & \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \lim_{(x_0,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).
 \end{aligned}$$

Igualando ambos limites obtenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

de lo cual obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

A.1. Coordenadas en z y su conjugado

Veamos ahora estas ecuaciones pero usando un sistema de coordenadas distintas. Teniendo que:

$$z = x + iy \quad y \quad \bar{z} = x - iy \tag{A.2}$$

podemos reescribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann al cambiar la parte imaginaria y real por un numero complejo z y su conjugado. Usando las ecuaciones en (A.2) podemos obtener:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

operando ambas ecuaciones concluimos que:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} = -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}.$$

Por conveniencia establecemos la siguiente notación:

$$\partial f = \frac{\partial}{\partial z} f, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f, \quad f_x = \partial f = \frac{\partial}{\partial x} f, \quad f_y = \partial f = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Entonces, teniendo $f(x, y)$ una función C^∞ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \partial f &= \frac{1}{2} (f_x - i f_y). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \bar{\partial} f &= \frac{1}{2} (f_x + i f_y). \end{aligned}$$

Veamos que si f es holomorfa entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} (f_x + i f_y) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Por esto vemos que la condición:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} f = 0,$$

es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo cual indica también que sus funciones componentes son conjugadas armónicas.

A.2. Funciones armónicas

Recordemos que f es armónica si y solo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx} + f_{yy} = 0. \tag{A.3}$$

Condición que buscamos reescribir en coordenadas de z y \bar{z} . Usando

$$\partial f = \frac{1}{2} (f_x - i f_y),$$

y

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2} (f_x + i f_y),$$

obtenemos las igualdades

$$f_x = \partial f + \bar{\partial} f \quad \text{y} \quad if_y = \bar{\partial} f - \partial f. \quad (\text{A.4})$$

De aquí podemos reescribir los sumandos de la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} f_x \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial z} f_x \\ &= 2 \partial f_x \\ &= 2 \partial (\partial f + \bar{\partial} f) \\ &= 2 (\partial \partial f + \partial \bar{\partial} f), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_y \\ &= -\frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} f_y \\ &= -\frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial z} f_y \\ &= -\frac{2}{i} \partial f_y \\ &= -\frac{2}{i} \partial \left(\frac{-\partial f + \bar{\partial} f}{i} \right) \\ &= 2 (\partial \bar{\partial} f - \partial \partial f). \end{aligned}$$

Finalmente podemos escribir la ecuación de Laplace como

$$2 (\partial \partial f + \partial \bar{\partial} f) + 2 (\partial \bar{\partial} f - \partial \partial f) = 4 \partial \bar{\partial} f = 0,$$

por lo cual una función f es armónica ssi

$$\partial \bar{\partial} f = 0. \quad (\text{A.5})$$