

Diagramas de Feynman de colisiones  
protón-antiprotón a 1.8 TeV según el  
Modelo Estándar



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE  
GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Diagramas de Feynman de colisiones  
protón-antiprotón a 1.8 TeV según el  
Modelo Estándar

Trabajo de investigación presentado  
para optar al grado académico  
de Licenciado en Física

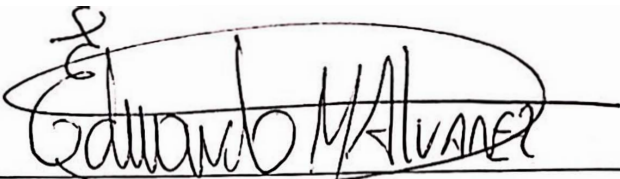
Hugo Leonel Cabrera Cifuentes

Guatemala  
2002

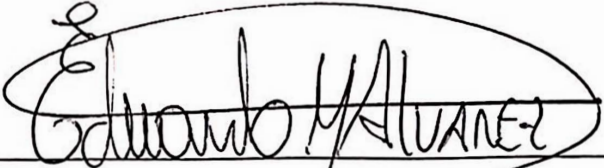
BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA




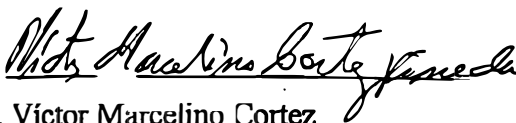
Vo.Bo. :

(f)   
MSc. Eduardo Álvarez

Tribunal :

(f)   
MSc. Eduardo Álvarez

(f)   
MSc. Carlos Salvadó

(f)   
Lic. Víctor Marcelino Cortez

Fecha de aprobación: 4 de marzo de 2002.



A mi compañera Judith,  
a mi mamá Feliza y  
a las y los *Compas*.



## PREFACIO

Hace poco más de cien años que J. J. Thompson descubrió el electrón y todavía hoy es considerado una de las partículas fundamentales de la naturaleza, puntual y sin estructura interna. Por el contrario, otras partículas que fueron subsecuentemente descubiertas y que en principio se pensó que eran fundamentales, como el protón, han demostrado tener una compleja estructura.

¿Cuáles son los constituyentes últimos de la materia?, ¿Cómo interactúan unos con otros? ¿Qué se debe requerir de una teoría matemática de las partículas fundamentales? Desde el descubrimiento del electrón, y más particularmente en los últimos cincuenta años ha habido una inmensa cantidad de experimentos, haciendo colisionar entre sí partículas a energías cada vez mayores. Paralelamente se ha desarrollado un impresionante esfuerzo teórico, dirigido siempre a tratar de responder preguntas como éstas.

La Física de Partículas, la parte de la ciencia que trata el asunto, es una de las áreas más importantes de investigación en la Física de hoy. Sin embargo, el estudiante de física promedio aún cuando completa sus estudios de Licenciatura, rara vez tiene algo más que una vaga noción acerca del tema. Una de las razones es que se pueden encontrar docenas de libros sobre física de partículas elementales de nivel de graduados o profesionales; hay también varios libros del nivel de *Scientific American*, pero nada entre estos dos.

Intentando abordar la problemática referida, el objetivo de este trabajo es hacer una síntesis a un nivel intermedio de los principales resultados que han ido dando forma a la teoría llamada Modelo Estándar de la Física de Partículas. Según Nima Arkani-Hamed, S. Dimopoulos y G. Dvali., actualmente ésta es considerada <<una muy exitosa teoría, espectacularmente consistente con un vasto rango de resultados experimentales>> (2002:35). El pretexto y a la vez el método para estudiar esta teoría es el análisis de lo que ocurre cuando colisionan protones con antiprotones a una energía del centro de masa de 1.8 TeV y se produce la última partícula descubierta, que completa una estructura simétrica predicha por el Modelo Estándar: el "quark top". Las principales herramientas que se utilizan en este estudio son los "diagramas de Feynman", introducidos por Richard Feynman para representar las interacciones entre las partículas. Estos diagramas sirven para hacer cálculos; sin embargo, para el nivel considerado aquí, es apropiado y suficiente usarlos solamente como instrumentos de análisis cualitativo. Al mismo tiempo, se dan ideas para familiarizarse con un conjunto de programas de computadora sencillos que permiten generar los dibujos de los procesos entre partículas.

Se espera que esta investigación sirva al lector para darse una idea general y básica del estado actual de la Física de Partículas. Se deja constancia del agradecimiento al Msc. Eduardo Álvarez, Decano de la Facultad de Ciencias y Humanidades de la Universidad del Valle de Guatemala, por su motivación, asesoría y apoyo.



# CONTENIDO

	Página
PREFACIO .....	xiii
CONTENIDO .....	xv
LISTA DE CUADROS .....	xvii
LISTA DE DIAGRAMAS .....	xix
RESUMEN .....	xxi
<b>Capítulos</b>	
I. INTRODUCCIÓN .....	1
II. PLANTEAMIENTOS BÁSICOS DEL MODELO ESTÁNDAR .....	3
III. CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y FÍSICOS PRELIMINARES .....	13
IV. SIMETRÍAS, LEYES DE CONSERVACIÓN Y NÚMEROS CUÁNTICOS .....	21
V. FORMULACIÓN MATEMÁTICA: LAS ECUACIONES DEL MODELO ESTÁNDAR .....	29
VI. DIAGRAMAS DE FEYNMAN .....	65
VII. COLISIONES PROTÓN-ANTIPROTÓN A 1.8 TeV: PRODUCCIÓN Y DECAIMIENTO DEL QUARK TOP .....	73
VIII. CONCLUSIONES .....	85
IX. BIBLIOGRAFÍA .....	89
X. APÉNDICE .....	93



## LISTA DE CUADROS

Cuadro	Página
2.1 Propiedades de los leptones .....	4
2.2 Propiedades de los quarks .....	5
2.3 Tres generaciones de materia .....	7
2.4 Posibilidades para carga, sabor y color de quarks y leptones .....	7
2.5 Características de las interacciones del Modelo Estándar .....	8
2.6 Bosones mediadores gauge .....	11
2.7 Tipos de carga y posibilidades de interacción de quarks y leptones .....	11
4.1 Leyes de conservación y su aplicación en las interacciones débil, electromagnética y fuerte .....	26
7.1 Una posibilidad para las interacciones en un evento top .....	77
7.2 Fracciones de decaimiento del quark top con $ \nu_{tb}  \approx 1$ .....	79
7.3 Procesos más importantes en colisiones $p\bar{p}$ que producen un quark top individual .....	83



# LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama	Página
1.1 .....	2
6.1 .....	66
7.1 .....	76
7.2 .....	77
7.3 .....	78
7.4 .....	80
7.5 .....	81
7.6 .....	83



## RESUMEN

En este trabajo se presentan las ideas centrales del Modelo Estándar de la Física de Partículas, haciendo énfasis en las simetrías que integran esta teoría y en la explicación que proporciona para las interacciones entre partículas fundamentales. Con el objetivo de aportar una herramienta de análisis de esta rama de la Física a los estudiantes de Licenciatura, se muestra una forma práctica de dibujar con computadora diagramas de Feynman para representar colisiones entre partículas, tomando como ejemplo las colisiones protón-antiprotón a 1.8 TeV. Como a esta energía se produce el quark top -una partícula que completa una estructura simétrica-, la exposición de este caso permite estudiar todos los distintos tipos de partículas y de fuerzas que describe el Modelo Estándar.



# I. INTRODUCCIÓN

Cuando un protón colisiona de frente con un *antiprotón* a una energía del centro de masa de 1.8 TeV, los dos se desintegran en sus partículas constituyentes llamadas *quarks*, *antiquarks* y *gluones*. En la colisión a tal energía se generan varias cadenas de producción y aniquilación de distintos *sabores* o tipos de las partículas mencionadas, de otras que reciben el nombre de *leptones* así como de *bosones intermedarios*. Dos de estos procesos, por medio de fuerzas *débiles* y *fuertes* llevan a la producción del quark *top*, el más pesado de los quarks conocidos. Para referirse a estos eventos de colisión se utilizan las letras  $p\bar{p}$ , donde la primera letra es el símbolo para el protón, y la segunda con una línea arriba, representa un antiprotón, la *antipartícula* del protón. Semejante cantidad de nuevos términos no debe abrumar, aquí solamente se introducen y más adelante se explica su significado.

Analizar lo que ocurre en colisiones  $p\bar{p}$  a esta energía, es decir establecer qué tipos de partículas específicamente se producen y por medio de qué mecanismos, constituye un escenario apropiado para presentar y verificar los postulados básicos del "Modelo Estándar de la Física de Partículas". Esta teoría explica la existencia de cientos de partículas conocidas y diversos procesos entre ellas, todo ello a partir de seis tipos o *sabores* de quarks (*up*, *down*, *charm*, *strange*, *bottom* y *top*) con sus correspondientes antipartículas, seis sabores de leptones (electrón, *muón*, y *tau*, cada uno con un compañero *neutrino*), y tres tipos de bosones intermedarios. Cada tipo de bosón está asociado a una de las tres fuerzas: débil, electromagnética y fuerte. Agregando la gravedad, se tienen las cuatro fuerzas que existen en la naturaleza. Todas las partículas mencionadas mantienen entre sí ciertas relaciones de simetría que han sido la guía en la formulación del Modelo; la matemática necesaria es proporcionada por la *teoría de grupos*.

Las simetrías que estructuran el Modelo Estándar se pueden apreciar al analizar las interacciones que generan el quark top: 1) la producción por fuerza fuerte de un par top-antitop a partir de un *vértice* donde interactúan un gluón, un quark top y un antiquark antitop, denotado  $gt\bar{t}$ , y 2) la producción electrodébil de un quark o un antiquark top individual a partir de un vértice  $Wtb$  (bosón *W*, quark top, quark bottom). Se considera en particular la producción de este tipo de quark porque es el más masivo y complementa los seis sabores de quark; de hecho fue el último en haber sido descubierto en el acelerador TEVATRON, del laboratorio Fermilab (Estados Unidos) en 1995, precisamente por medio de colisiones  $p\bar{p}$  de 1.8 TeV.

Como herramienta de análisis CUALITATIVO de las colisiones  $p\bar{p}$  se usan *diagramas de Feynman*. Estos permiten visualizar las interacciones de una forma sencilla. Según Michael Longo (1973:92-97), las partículas se representan con líneas de diferentes tipos (lisas, onduladas y de rizos), conectadas por vértices o puntos que se denominan electromagnéticos, débiles, electrodébiles o fuertes, según sea el tipo de fuerzas que intervienen en la interacción. En los vértices se deben verificar algunas reglas como conservación de carga eléctrica, conservación del *número leptónico* y conservación del número cuántico *extrañeza* y, como sería normal suponer, también se deben conservar la energía y el momento.

El contenido del trabajo se distribuye de la siguiente manera: la Sección II es una síntesis descriptiva de los postulados básicos que se incluyen en el Modelo Estándar, muestra la clasificación de las partículas y las fuerzas de la naturaleza según esta teoría. En la Sección III se revisan algunos conceptos matemáticos y físicos al nivel mínimo que permita la comprensión de los temas posteriores. Las simetrías que dan origen a leyes de conservación importantes dentro del Modelo Estándar y sus números cuánticos asociados se describen en la Sección IV. En la Sección V se presenta la formulación matemática del Modelo, es decir sus ecuaciones, haciendo énfasis en su significado físico y evitando las derivaciones matemáticas innecesarias. La Sección VI expone una metodología para elaborar diagramas de Feynman con el paquete `feynMF` y un conjunto de programas de computadora asociados. En el apéndice A se escriben los programas con los que se han generado los diagramas de Feynman que se analizan en el desarrollo del trabajo. A cada diagrama corresponde un programa con el mismo nombre.

La parte principal es la Sección VII, a donde confluyen los contenidos y resultados anteriores para analizar concretamente los diagramas de Feynman que representan la producción del quark top en colisiones protón-antiprotón a 1.8 TeV y sus subsecuentes posibles *decaimientos*. Para facilitar el seguimiento de la exposición se incluye el Diagrama 1.1, que muestra la estructura del contenido de la investigación.

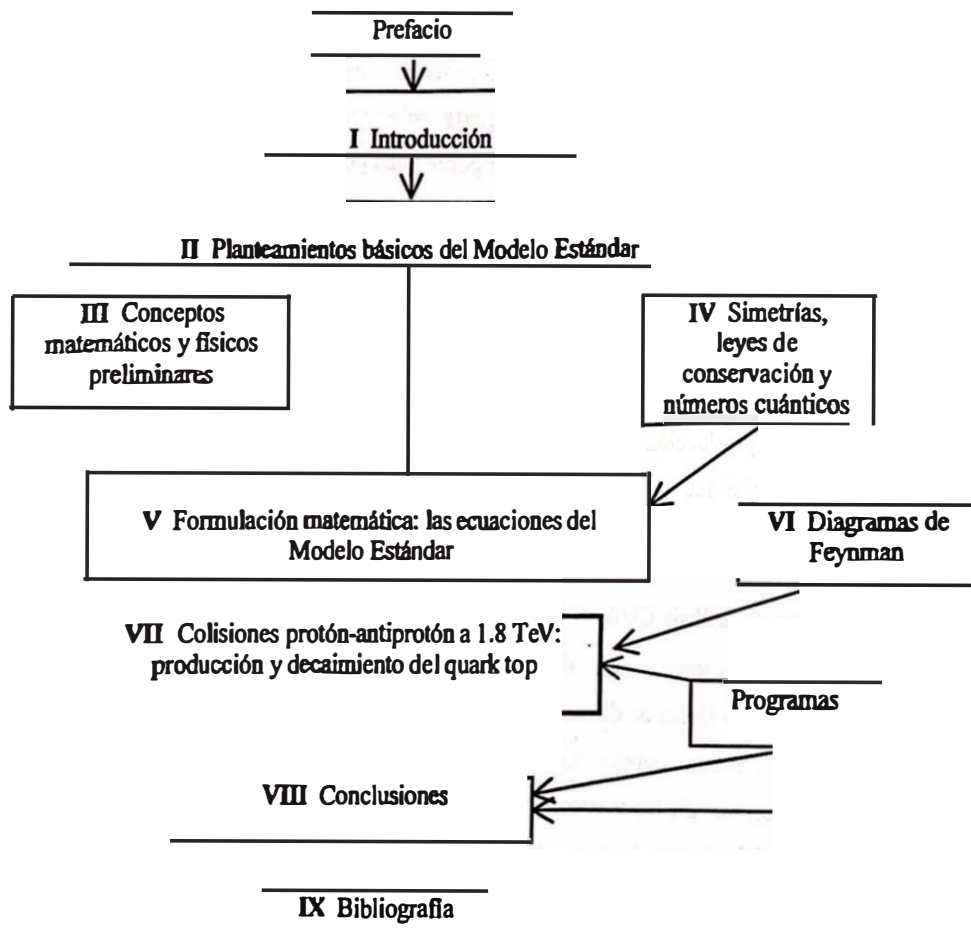


Diagrama 1.1

## II. PLANTEAMIENTOS BÁSICOS DEL MODELO ESTÁNDAR

La teoría de campos renormalizable llamada Modelo Estándar intenta describir toda la materia y todas las fuerzas existentes en el universo, exceptuando la gravedad. Andria Erzberg, M. Barnett y H. Quinn (1999) consideran que:

<<...su elegancia radica en la capacidad de justificar la existencia de cientos de partículas y complejos procesos sobre la base de sólo unas pocas partículas e interacciones fundamentales.>>

Según Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:1,2), el Modelo Estándar sostiene que la materia en el Universo está hecha de *fermiones* elementales interactuando a través de campos, de los cuales ellos son las fuentes. Las partículas asociadas con los campos de interacción son *bosones*. Los fermiones elementales del Modelo son los dos tipos de partículas, *leptones* y *quarks*, que en estado aislado pueden ser descritos por la ecuación de Dirac. En sus artículos, Chris Quigg (1997) y Luis Ibáñez (1998), así como R.D. Field, M. Barnett y H. Quinn (1999), coinciden en que el Modelo Estándar plantea dos ideas básicas: 1) cada tipo de fuerza fundamental es "transportada" por una partícula *portadora de fuerza*; y 2) la mayoría de las partículas que se conocen están compuestas en realidad de partículas más fundamentales llamadas quarks o de otra clase de partículas fundamentales llamadas leptones, es decir, toda la materia conocida está constituida por quarks y leptones.

En esta sección se introducen los planteamientos fundamentales del Modelo Estándar en forma descriptiva: se clasifican las partículas, en fermiones y bosones, y en quarks y leptones; luego se describen las tres interacciones: electromagnética, débil y fuerte.

### A. Fermiones y bosones

En mecánica cuántica un sistema de partículas idénticas 1, 2, 3,... es descrito por una función de onda  $\psi(r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots)$  donde  $r_i$  es el vector de coordenadas, y  $s_i$  es el espín de la  $i$ -ésima partícula. Se puede mostrar que la función de onda debe ser simétrica (par) o antisimétrica (impar) con respecto al intercambio de coordenadas entre cualquier par de partículas idénticas. Si ésta es simétrica, las partículas son llamadas bosones; si es antisimétrica, son llamadas fermiones. Esta simetría o antisimetría de las funciones de onda tiene consecuencias de mucho alcance. Por ejemplo, una función de onda antisimétrica debe desvanecerse cuando dos partículas idénticas se aproximan una a la otra. Como un resultado, dos fermiones en el mismo estado exhiben una fuerte repulsión mutua, lo cual lleva al *principio de exclusión de Pauli*<sup>1</sup>. Por otro lado, no existe restricción sobre el número de bosones ideales (no interactuando) que pueden ser ensamblados en un punto. De hecho, explica Longo, <<bosones reales interactúan unos con otros>> (1973:9,11).

---

<sup>1</sup> El "principio de exclusión" de Wolfgang Pauli establece que la función de ondas de un sistema polielectrónico debe ser antisimétrica respecto de la operación de intercambio de coordenadas entre dos electrones; está relacionado con el hecho que los electrones sean partículas elementales, sin estructura interna, por lo que es imposible distinguir un electrón de otro. La imposibilidad de identificar un electrón determinado implica que la energía de un sistema no debe ser afectada porque dos electrones intercambien sus posiciones.

Desde el punto de vista de la estadística cuántica, hay dos *funciones de distribución* que son válidas para partículas cuánticas: distribución de Bose-Einstein, que aplica a partículas que deben ser descritas por *eigenfunciones* que son simétricas con respecto al intercambio de cualesquiera dos etiquetas de partículas, y la distribución de Fermi-Dirac, que aplica a las partículas que deben ser descritas por eigenfunciones que son antisimétricas ante tal intercambio. Estas funciones de distribución especifican el número probable de partículas (bosones o fermiones), de un sistema en equilibrio a una temperatura dada que deben estar en un estado cuántico de energía determinado. Para analizar la forma explícita de estas funciones se puede consultar a Robert Eisberg y R. Resnick (1974:410) o a Richard Feynman (1972:30-38).

## B. Leptones, quarks y sistemas de quarks

1. **Leptones.** Los leptones conocidos y algunas de sus propiedades de interés para este trabajo se listan en el Cuadro 2.1. Los datos han sido tomados de S. Lea y R. Burke (1999:1188). Datos experimentales actualizados se encuentran en la página de internet de D.E. Groom *et al.* (2000c). De los leptones cargados, los únicos estables son el electrón  $e^-$  que transporta carga  $-e$  y su antipartícula, el positrón  $e^+$ . El muón  $\mu^-$  y el tau  $\tau^-$  (y sus antipartículas) difieren del electrón y positrón solamente en sus masas y en sus vidas medias finitas. Los otros tres leptones son los extremadamente difíciles de detectar neutrinos, que no tienen carga eléctrica y masa muy pequeña, según los últimos experimentos<sup>2</sup>. En este trabajo se considera que los neutrinos no tienen masa porque es lo que se asume dentro del Modelo Estándar, sin embargo, el reciente descubrimiento que las masas de los neutrinos no son cero tendrá dramáticas implicaciones para la cosmología y es un resultado que deberá incorporarse en las nuevas teorías.

Cuadro 2.1  
Propiedades de los leptones

Sabor	Símbolo	Carga eléctrica	Masa (MeV)
electrón	$e^-$	$-e$	0.511
neutrino electrónico	$\nu_e$	0	$< 1.8 \times 10^{-5}$
muón	$\mu^-$	$-e$	105.658
neutrino muónico	$\nu_\mu$	0	$< 0.25$
tau	$\tau^-$	$-e$	$1784 \pm 3$
neutrino tauónico	$\nu_\tau$	0	$< 0.35$

Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:3,89,90) explican que existe un tipo de neutrino asociado para cada tipo de leptón cargado eléctricamente: neutrino del electrón  $\nu_e$ , neutrino del muón  $\nu_\mu$  y neutrino del tau  $\nu_\tau$ . Según ellos, cada familia de leptones se ve que juega un papel idéntico en la naturaleza, una observación conocida como *universalidad leptónica*. Estos autores indican también que la *ecuación de Dirac*

<sup>2</sup> Sólo las partículas que poseen masa pueden cambiar de forma. En junio de 2001, representantes del Observatorio de Neutrinos Sudbury en Canadá anunciaron que los neutrinos creados por las reacciones nucleares en el núcleo del Sol cambian de uno a otro tipo durante su viaje hacia la Tierra. Cerca de 100 físicos de los Estados Unidos, Canadá y el Reino Unido colaboraron en el experimento de Sudbury. Los resultados fueron presentados durante un encuentro de la Asociación Canadiense de Física y en un trabajo enviado a la revista *Physical Review Letters*.

para un fermión cargado masivo predice, correctamente, la existencia de una antipartícula de antimateria de la misma masa y espín, pero con carga opuesta y momento magnético opuesto relativo a la dirección del espín. Además, la ecuación de Dirac para un neutrino sin masa  $\nu$  predice la existencia de un antineutrino  $\bar{\nu}$ ; entonces en total se tienen seis tipos o *sabores* de leptón, cada uno con su antileptón correspondiente.

Los electrones y los neutrinos son los únicos leptones estables. Los leptones más pesados, el muón y el tau, no se encuentran en la materia ordinaria porque decaen extremadamente rápido hacia leptones más livianos y, a veces, hacia pares quark-antiquark. Cuando un leptón pesado decae, una de las partículas resultantes es siempre el neutrino correspondiente. Las otras partículas que se producen pueden ser cualquier leptón más su correspondiente antineutrino, o cualquier quark con su antiquark. En contraste con los quarks, cualquiera de los seis leptones pueden encontrarse solos y parecen comportarse como puntos ideales, sin dimensión. Se cree correcto que en todas las interacciones los leptones preservan la carga eléctrica. Esta caracterización de los leptones se puede consultar en el libro de Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998: 3,4), en la página de internet de Andria Erzberg, M. Barnett y H. Quinn (1999) y en el artículo de Klaus Rith y Andreas Schäfer (1999).

2. Quarks. En el Cuadro 2.2 aparecen los seis tipos o *sabores* de quarks descubiertos hasta ahora: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom*, y *top*, (u, d, s, c, b, t), en orden creciente de masa; para describir a estas partículas en los siguientes párrafos se considera lo que exponen Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:4,13).

Los quarks tienen (algo inusual) carga eléctrica fraccionaria, de valor  $2/3$  ó  $-1/3$ , y llevan número de quark; los antiquarks se cuentan negativamente. El número neto de quark en un sistema aislado nunca se ha observado que cambie. Sin embargo, el número de diferentes sabores de quark no se conserva separadamente; cambios son posibles a través de interacción débil<sup>3</sup>.

Cuadro 2.2  
Propiedades de los quarks

Sabor	Símbolo	Carga eléctrica	Isoespín $I$	$I_3$	$S$	$C$	$B$	$T$	Masa (MeV)
up	u	$-\frac{1}{3} e$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0	330
down	d	$+\frac{2}{3} e$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	335
strange	s	$-\frac{1}{3} e$	0	0	-1	0	0	0	486
charm	c	$+\frac{2}{3} e$	0	0	0	+1	0	0	1650
bottom	b	$-\frac{1}{3} e$	0	0	0	0	-1	0	4500
top	t	$+\frac{2}{3} e$	0	0	0	0	0	+1	180000

<sup>3</sup> Los nombres de los quarks en español son *arriba*, *abajo*, *extrañeza*, *encanto*, *cima* y *fondo*. Sin embargo, en casi todas las fuentes consultadas se usan los términos y sus iniciales en inglés, por lo que aquí se adopta esa costumbre.

En el Modelo Estándar se introduce la idea de *color* de quark. Un quark no solamente tiene un índice de sabor, sino además, para cada sabor, un índice de color. Se postula que son tres los estados básicos de color: rojo, verde y azul. Esta invención del color resuelve el problema de la simetría de los *estados bariónicos* (la terminología se explicará más adelante), que en ausencia de un nuevo número cuántico son completamente simétricos en el intercambio de dos quarks. Pero si estas funciones de estado son multiplicadas por una función de estado de color antisimétrica, el estado superpuesto será antisimétrico, y el principio de exclusión de Pauli es preservado.

Los antiquarks son los compañeros de antimateria de los quarks; tienen la misma masa, pero su carga es opuesta a la del correspondiente quark. Los antiquarks tienen anticolores y los quarks pueden juntarse con los antiquarks de cargas opuestas a la suyas ya que los colores opuestos se atraen. Las tres modalidades de carga de color suman cero; la atracción entre diferentes colores es la interacción fuerte que une los quarks en objetos mayores y estables. En el Cuadro 2.2 se indican las cargas eléctricas y otros *números cuánticos* de los quarks. Nótese que el sabor de los quarks *s*, *c*, *b* y *t* aparece como un número cuántico asociado a un quark con carga de este sabor: *strangeness S*, *charmness C*, *bottomness B* y *topness T*. Los valores cuánticos definidos para estas partículas son iguales a -1, +1, -1 y +1, respectivamente, e iguales a cero para todos los otros quarks. Los datos se han tomado de S. Lea y R. Burke (1999:1187); si se requieren los valores de las masas con una incertidumbre experimental actual, se pueden encontrar en las páginas de internet de D.E. Groom *et al.* (2000d) y D.E. Groom *et al.* (2000e).

3. Hadrones: bariones y mesones. Los quarks con carga de color están *confinados* con otros quarks en sistemas compuestos llamados *hadrones*, que tienen color neutro y se extienden sobre distancias de 1 femtómetro ( $10^{-15}$  m). Por esta razón, las partículas de color no pueden ser encontradas individualmente y un quark aislado nunca ha sido observado. Los más elementales de los sistemas hadrónicos son los *bariones*, los cuales tienen tres como número quark neto y los *mesones* con número quark neto cero. En particular, el protón (uud) y el neutrón (udd), son bariones. Los mesones consisten esencialmente de un quark y un antiquark, enlazados transitoriamente por el campo de interacción fuerte. La composición de quarks y antiquarks de los bariones y mesones se denota ( $qqq$ ) y ( $q\bar{q}$ ) respectivamente.

4. Generaciones de partículas. Tanto los quarks como los leptones están clasificados en tres diferentes conjuntos denominados *generaciones* de partículas de materia, cada una formada por un quark y un leptón de cada uno de los tipos de carga. Cada generación es más pesada que la generación previa; las partículas de la segunda y tercera generaciones son inestables y decaen hacia partículas de la primera generación. Por eso toda la materia en el universo está hecha de partículas de la primera generación: quarks up y down, electrones y sus correspondientes neutrinos electrónicos. Lo anterior se resume en el Cuadro 2.3; para una ampliación sobre las características de los quarks, el lector interesado puede revisar los artículos de Frank Close y P. Page (1999), Luis Ibáñez (1998) y Madhusree Mulkerjee (1999), las páginas de internet de Andria Erzeberg, M. Barnett y H. Quinn (1999) y D.E. Groom *et al.* (2000f) y el libro de Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998: 4,11-14).

Cuadro 2.3  
Tres generaciones de materia

Generación	I	II	III
quarks	u	c	
	d	s	b
leptones	e	$\mu$	
	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$

El Cuadro 2.4 muestra las posibilidades que un quark o leptón (y sus antipartículas) tienen para los valores de los números cuánticos de carga eléctrica, sabor y color. Es interesante notar la simetría en el arreglo.

Cuadro 2.4  
Posibilidades para carga, sabor y color de quarks y leptones  
Quarks (carga, sabor, color) / Leptones (sabor, carga)

	Partículas			Antipartículas		
Quarks 6 sabores u c t d s b 3 colores r v a	$(+\frac{2}{3} ur)$	$(+\frac{2}{3} uv)$	$(+\frac{2}{3} ua)$	$(-\frac{2}{3} \bar{u} \bar{r})$	$(-\frac{2}{3} \bar{u} \bar{v})$	$(-\frac{2}{3} \bar{u} \bar{a})$
	$(+\frac{2}{3} cr)$	$(+\frac{2}{3} cv)$	$(+\frac{2}{3} ca)$	$(-\frac{2}{3} \bar{c} \bar{r})$	$(-\frac{2}{3} \bar{c} \bar{v})$	$(-\frac{2}{3} \bar{c} \bar{a})$
	$(+\frac{2}{3} tr)$	$(+\frac{2}{3} tv)$	$(+\frac{2}{3} ta)$	$(-\frac{2}{3} \bar{t} \bar{r})$	$(-\frac{2}{3} \bar{t} \bar{v})$	$(-\frac{2}{3} \bar{t} \bar{a})$
	$(-\frac{1}{3} dr)$	$(-\frac{1}{3} dv)$	$(-\frac{1}{3} da)$	$(+\frac{1}{3} \bar{d} \bar{r})$	$(+\frac{1}{3} \bar{d} \bar{v})$	$(+\frac{1}{3} \bar{d} \bar{a})$
	$(-\frac{1}{3} sr)$	$(-\frac{1}{3} sv)$	$(-\frac{1}{3} sa)$	$(+\frac{1}{3} \bar{s} \bar{r})$	$(+\frac{1}{3} \bar{s} \bar{v})$	$(+\frac{1}{3} \bar{s} \bar{a})$
	$(-\frac{1}{3} br)$	$(-\frac{1}{3} bv)$	$(-\frac{1}{3} ba)$	$(+\frac{1}{3} \bar{b} \bar{r})$	$(+\frac{1}{3} \bar{b} \bar{v})$	$(+\frac{1}{3} \bar{b} \bar{a})$
Leptones 6 sabores $e^- \mu^- \tau^-$ $\nu_e \nu_\mu \nu_\tau$	$e^-$			$e^+$		
	$\mu^-$			$\mu^+$		
	$\tau^-$			$\tau^+$		
	$\nu_e$			$\bar{\nu}_e$		
	$\nu_\mu$			$\bar{\nu}_\mu$		
	$\nu_\tau$			$\bar{\nu}_\tau$		

### C. Interacciones electromagnética, débil y fuerte y sus bosones mediadores

En la exposición de las interacciones en su página de internet, Andria Erzberg, M. Barnett y H. Quinn (1999) escriben que:

<<...en los procesos entre partículas se describen las fuerzas como si fueran producidas por el intercambio de otras partículas "mediadoras". Para cada tipo de fuerza hay una partícula mediadora asociada y sólo las partículas que son afectadas por una interacción pueden absorber o producir el portador de fuerza de esa interacción>>.

En la naturaleza hasta ahora han sido distinguidos cuatro tipos de campos de interacción que explican todas las fuerzas en el Universo. En la escala de la física de partículas, las fuerzas gravitacionales son insignificantes y así, el Modelo Estándar excluye de consideración el campo gravitacional y tiene en cuenta las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes de los quarks y leptones. El Cuadro 2.5, elaborado con

base en las referencias Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:2) y Andria Erzberg, M. Barnett y JI Quinn (1999) presenta algunas características de las interacciones que trata el Modelo Estándar. Por razones de síntesis no se incluye la interacción gravitatoria.

Cuadro 2.5  
Características de las interacciones del Modelo Estándar

Interacción	Débil	Electromagnética	Fuerte
	Electrodébil unificada		
actúa sobre	carga de sabor	carga eléctrica	carga de color
partículas que la sienten	leptones y quarks	cargadas	quarks y gluones
partículas que la transportan	$W^+$ , $W^-$ , $Z^0$	fotones	gluones

En siguientes incisos se introducen las tres teorías que forman parte del Modelo Estándar y que tratan cada una de las interacciones fundamentales. Nótese que en el Cuadro 2.5 las interacciones débil y electromagnética se indican unificadas dentro de una misma teoría *electrodébil*.

1. **Electrodinámica Cuántica.** La combinación de la mecánica cuántica, electromagnetismo y relatividad especial llevó a Dirac a la ecuación ahora universalmente conocida como la ecuación de Dirac y, con la *cuantización de los campos*, a la teoría cuántica de campos. Dentro de ésta, la Electrodinámica Cuántica –QED-, describe la interacción del electrón con el campo electromagnético. La teoría se puede extender a otras partículas con carga eléctrica; los *quanta* de interacción electromagnética entre fermiones eléctricamente cargados son los *fotones* sin masa.

2. **Interacción débil.** Según se ha visto antes, toda partícula fundamental –quark o leptón- tiene un atributo llamado sabor, el cual sólo se modifica por la interacción débil cargada. Hay seis sabores de quarks y seis sabores de leptones. Cuando un quark o un leptón cambian de tipo (por ejemplo un muón cambiando a un electrón) se dice que cambia de sabor. Los cuanta de los campos de interacción débil entre fermiones son los bosones cargados  $W^+$  y  $W^-$  y el bosón neutral  $Z^0$ . Como éstos llevan masa (a diferencia de los fotones), la interacción débil es de corto alcance, debido al *principio de incertidumbre de Heisenberg*<sup>4</sup>, que limita el tiempo de existencia de una partícula de una masa (o energía) dadas, y por ende la distancia que ésta puede viajar.

Típicamente las partículas portadoras de la fuerza débil actúan como intermediarios en aquellos decaimientos en los que las partículas cambian su carga eléctrica; esto pasa usualmente siempre que una

<sup>4</sup> El principio de incertidumbre de Werner Heisenberg establece que si  $\Delta E$  es la incerteza en el conocimiento de la energía  $E$  de un sistema, y  $\Delta t$  el intervalo de tiempo característico para tal razón de cambio en el sistema, hay un límite inferior en la precisión para conocer ambas cantidades al mismo tiempo dado por  $\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2$ ,  $\hbar = h / 2\pi$  donde  $h$  es la constante de Planck.

partícula cambia de sabor. La característica sorprendente de la interacción débil, es que *no conserva la paridad* y entonces la naturaleza no es ambidiestra.

Un par de quarks pueden interaccionar débilmente intercambiando bosones  $W^\pm$  o  $Z^0$ . Se puede considerar también el proceso como un quark que emite un bosón (virtual)  $W^+$  o  $W^-$ , y cambia su carga eléctrica, y por lo tanto, su sabor. El proceso débil predominante es el que involucra transiciones entre quarks de la misma generación, pero también ocurren transiciones raras entre algún quark  $+2/3$  y algún quark  $-1/3$ . Las interacciones débiles son las únicas mediante las cuales un quark se convierte en otro quark de otro tipo, o bien un leptón se convierte en otro leptón; son las responsables del hecho que todos los quarks y leptones más masivos decaen para producir quarks y leptones más livianos. Las interacciones débiles neutras, con un bosón  $Z^0$ , no alteran el sabor.

3. Teoría electrodébil unificada. En el Modelo Estándar, las interacciones electromagnética y débil están combinadas en una teoría electrodébil unificada. A primera vista pareciera que éstas tienen intensidades muy diferentes, pero de hecho son aproximadamente iguales. La diferencia entre ellas se debe a la enorme diferencia de masa entre los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  que son pesados, y el fotón que no tiene masa. Las cargas de la fuerza débil están relacionadas estrechamente con las cargas electromagnéticas y son del mismo orden de magnitud.

4. Cromodinámica Cuántica. Roman Sexl y H. Urbantke dicen en su libro que las interacciones electromagnética y débil <<están descritas por teorías gauge>> (2000:88), término que se explicará más adelante. En el Modelo Estándar la interacción fuerte es también descrita por una teoría gauge conocida como Cromodinámica Cuántica -QCD-. Los cuanta del campo de interacción fuerte -los gluones- tienen masa cero, y, como los fotones, puede esperarse que tengan rango infinito. Sin embargo, a diferencia del campo electromagnético, los campos de gluón están confinados, lo que hace que los quarks también estén así, como se mencionó anteriormente.

Del mismo modo que las partículas eléctricamente cargadas interactúan intercambiando fotones, las partículas con carga de color intercambian gluones en las interacciones fuertes. Por ejemplo, dos o más quarks, cercanos entre sí, intercambian rápidamente gluones, creando un "campo de fuerza de color" muy fuerte que liga entre sí a los quarks.

La fuerza fuerte es la que mantiene unidos a los quarks formando hadrones, es decir, los gluones pegan a los quarks unos con otros, de allí su nombre por la palabra en inglés "glue". El proceso por el que la interacción fuerte surge del intercambio de gluones entre los quarks es parecido al de la interacción electromagnética que intercambia fotones entre partículas eléctricamente cargadas, pero hay dos diferencias importantes. En primer lugar, los fotones no tienen carga eléctrica por lo que no "perciben" a los demás fotones de forma directa, mientras que los gluones sí tienen color y entonces interactúan entre sí. La otra diferencia es que la interacción fuerte es 100 veces más intensa que la electromagnética, por eso se le llama fuerza fuerte.

Aunque el "funcionamiento" de los gluones como pegamento todavía no está completamente determinado, se puede considerar que los gluones se aglomeran en un tubo que conecta el quark y el antiquark. El color que se origina en el quark "fluye" por el tubo hacia el antiquark, donde es absorbido. Cuando se extiende el tubo, tira con fuerza constante, cualquiera que sea su longitud. Haría falta energía infinita para estirarlo hasta el infinito, es decir, para separar un quark y un antiquark, por eso nunca hay en la naturaleza quarks libres: a la naturaleza le repugna el color. Si uno de los quarks en un hadrón dado es alejado de sus vecinos, el campo de fuerza de color entre el quark que escapa y sus vecinos se "estira". De esta manera, se adiciona más y más energía al campo de fuerza de color a medida que los quarks son obligados a apartarse. Llega un momento en que es energéticamente más favorable que el campo de fuerza de color se "rompa" formando dos nuevos quarks. De esta manera, la energía se conserva porque la energía del campo de fuerza de color se convierte en masa de los nuevos quarks, y el campo de fuerza de color puede "descansar" en un estado de menos esfuerzo. Por esta razón, la fuerza fuerte sólo actúa al nivel realmente pequeño de las interacciones entre quarks y –paradójicamente–, se desvanece cuando quarks y gluones están muy cerca unos de otros.

Cada quark tiene una de las tres cargas de color y cada antiquark tiene una de las tres cargas de color complementarias. Los gluones transportan pares color/anticolor (no es necesario que sea el mismo color: gluones rojo/antiazul son legítimos). Si bien hay nueve combinaciones posibles de pares color/anticolor, una de estas combinaciones es eliminada debido a consideraciones de simetría. Un gluón puede transportar efectivamente una de las ocho posibles combinaciones color/anticolor. En resumen, los quarks tienen color, los antiquarks tienen anti-color, los gluones tienen color y anti-color.

La carga de color se conserva siempre. Por lo tanto, cuando un quark emite o absorbe un gluón, el color del quark debe cambiar de tal modo que se conserve la carga de color. Por ejemplo, un quark "rojo" se transforma en un quark "azul" emitiendo un gluón "rojo/antiazul". El color neto sigue siendo "rojo". Dentro de un hadrón los quarks emiten y absorben gluones muy frecuentemente, de modo que no es posible observar el color de un quark individual. En un hadrón, por lo tanto, el color de los dos quarks que intercambian un gluón cambiará de forma tal que el sistema ligado se mantenga en un estado color neutro, y así permanezca observable. Es decir, los hadrones son de color neutro, al igual que los leptones; sólo los quarks y los gluones tienen carga de color. En una sección posterior se profundizará sobre el color neutro de los hadrones.

En esta breve presentación cualitativa de las interacciones se resumió lo que escriben, para la parte electrodébil Andria Erzberg, M. Barnett y H. Quinn (1999), Luis Ibáñez (1998); para la interacción fuerte Frank Close y P. Page (1999), Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:2,88,145), Andria Erzberg, M. Barnett y H. Quinn (1999), Luis Ibáñez 1998, Madhusree Mulkerjee (1999), Klaus Rith y Andreas Schäfer (1999). Para el principio de incertidumbre también se consultó a Robert Eisberg y R. Resnick (1974:73,74).

5. Bosones mediadores. En el Cuadro 2.6 se resumen las principales características de los bosones mediadores. Los datos se tomaron de Susan M. Lea y John Robert Burke (1999:1189) y D.E. Groom *et al.*(2000g:2-4). Como en casos anteriores, otras propiedades se pueden encontrar en esta última referencia.

Cuadro 2.6  
Bosones mediadores gauge

Nombre	Fuerza	Masa (MeV)	Carga eléctrica
fotón $\gamma$	electromagnética	0	0
$w^+$	débil	80	+e
$w^-$	débil	80	-e
$z^0$	débil	90	0
gluón g	fuerte	0	0

6. Síntesis de las interacciones. En resumen, los leptones interactúan a través de la interacción electromagnética (si están cargados) y por medio de la interacción débil. Los quarks interactúan con los leptones a través de interacción débil y electromagnética. Los quarks interactúan entre sí a través de las interacciones electromagnética y fuerte; los leptones y sus antipartículas no intervienen en las interacciones fuertes. Ninguna de las partículas portadoras de la fuerza débil tienen carga de color. Tanto la interacción fuerte como la débil causan el decaimiento de las partículas. Todo esto se puede visualizar en el Cuadro 2.7. Allí se muestran los tipos de carga involucrados cuando interactúan un leptón con otro leptón, un quark con un leptón y un quark con otro quark.

Cuadro 2.7  
Tipos de carga y posibilidades de interacción de quarks y leptones

Partícula / Cargas	Bosones mediadores / Campo de interacción	Partícula / Cargas
leptón / eléctrica leptón / sabor	fotón / electromagnético $w^+, w^-$ / débil	leptón / eléctrica leptón / sabor
quark / eléctrica quark / sabor	fotón / electromagnético $w^+, w^-$ / débil	leptón / eléctrica leptón / sabor
quark / eléctrica quark / sabor quark / color	fotón / electromagnético $w^+, w^-, z^0$ / débil $w^+$ gluón / fuerte	quark / eléctrica quark / sabor quark / color

En las siguientes secciones se describe el formalismo matemático que da sustento a las anteriores ideas básicas del Modelo Estándar.



### III. CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y FÍSICOS PRELIMINARES

En esta sección, como paso previo a tratar las simetrías del Modelo Estándar y sus leyes de conservación, se revisan los conceptos elementales sobre teoría de grupos y se introducen algunas de estas estructuras algebraicas que serán útiles más adelante. También se hace una breve exposición de las transformaciones que aparecen en la física de partículas y se describen ideas básicas de la Mecánica Cuántica, según la *interpretación de Copenhague*. El objetivo es sintetizar los contenidos matemáticos y físicos al nivel mínimo necesario para facilitar la comprensión de los temas que se abordarán en la Sección V, donde se verá la formulación matemática del Modelo Estándar.

#### A. Grupos y sistemas físicos

Para comprender mejor la relación entre las ideas del Modelo Estándar con las entidades matemáticas llamadas grupos, es pertinente mostrar por qué es posible asociar estructuras de grupo a simetrías entre las partículas. Antes, se escribe la definición de grupo, tomada de Roman Sexl y H. Urbantke (2000:336).

1. **Definición de grupo.** Un set no vacío  $G$  es llamado un *grupo* si  $(g, h) \in G \times G$  un elemento  $gh \in G$  (llamado el producto de  $g$  y  $h$ ) tal que se cumple lo siguiente:
  - a. Asociatividad.  $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3) = g_1g_2g_3$  para cada tripleta  $(g_1, g_2, g_3) \in G \times G \times G$ ;
  - b. Elemento unitario. Existe un elemento  $e \in G$  tal que  $eg = g$  para todo  $g \in G$ ;
  - c. Elemento inverso. Para cada  $g \in G$  existe un inverso  $g^{-1}$  tal que  $g^{-1}g = e$ .

El grupo es llamado conmutativo o *abeliano* si y sólo si en adición a las reglas anteriores,  $gh = hg$  para todo  $(g, h) \in G \times G$ .

2. **Representación matricial de un grupo.** Sea  $G$  un grupo,  $V$  un espacio vectorial y  $O$  un grupo de operadores lineales que actúan sobre  $V$ . Si

$$\begin{aligned} T : G &\rightarrow O \\ g &\rightarrow T(g) \end{aligned} \tag{3.1}$$

es un *homomorfismo*<sup>5</sup>, se dice que  $T$  es una *representación* del grupo  $G$  en el espacio  $V$ . La dimensión de la representación se define como la dimensión del espacio  $V$ . Si en éste se escoge una base  $\{y_1, y_2, \dots\}$ , se puede dar una representación matricial de cada uno de los operadores  $T(g)$ ; este conjunto de matrices formará también un grupo homomorfo a  $G$ .

---

<sup>5</sup> Una aplicación  $\phi$  de un grupo  $G$  en un grupo  $\bar{G}$  se dice que es un homomorfismo si para  $a, b \in G$  cualesquiera siempre se tiene que  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ . En el primer miembro de esta relación, es decir en el término  $\phi(ab)$ , el producto  $ab$  se calcula en  $G$  usando el producto de elementos de  $G$ , mientras que en el segundo miembro de la relación, es decir en el término  $\phi(a)\phi(b)$ , el producto es el de elementos en  $\bar{G}$ .

Lo importante del último resultado según Fernando Quevedo (1979:31,51-53), es que siempre se puede representar un grupo por medio de un conjunto de matrices. Definiciones, lemas y corolarios asociados a homomorfismos, se pueden encontrar en el libro de I.N. Herstein (1970:61-75). Atendiendo a la definición, una representación por matrices, escribe G. Sternan (1993:17):

<<...consiste de un set de matrices y una regla que asocia con cada elemento  $g_i$  del grupo abstracto una matriz  $D(g_i)$  en tal forma que si  $g_3 = g_2 \cdot g_1$  en el grupo abstracto, entonces  $D(g_3) = D(g_2)D(g_1)$  en el sentido de multiplicación de matrices>>.

### 3. Representación de transformaciones de un sistema físico mediante operadores entre

grupos. La física, para estudiar un evento en el Universo, lo localiza en el espacio y en el tiempo, y su interés principal es estudiar el cambio que ocurre en el arreglo materia-energía dentro del espacio-tiempo. El cambio al que se hace referencia puede ser el de un estado de un sistema físico a otro estado del mismo sistema (por ejemplo, una rotación de un sistema de partículas elementales); para estudiarlo se utiliza un modelo matemático, asignándole a cada estado una función de onda que es elemento de un espacio vectorial, y representando el cambio por un operador o transformación que actúa en este espacio.

En términos matemáticos, un operador actúa sobre los elementos de un conjunto dado, transformándolos en los elementos de algún otro conjunto. En física, el interés es relacionar estados de un mismo sistema, por lo que se toman aquí solamente operadores que relacionan elementos de un mismo conjunto. La idea es tratar de caracterizar estos operadores en base a ideas físicas.

Para comenzar, considérense  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  diferentes estados de un sistema, y  $U_1, U_2, U_3, \dots$  operadores sobre este conjunto de estados. Si se puede transformar el estado  $\psi_1$  en el estado  $\psi_2$  y éste último en el estado  $\psi_3$ , se puede también transformar el estado  $\psi_1$  en el estado  $\psi_3$ . Matemáticamente, si  $\psi_2 = U_1\psi_1$  y  $\psi_3 = U_2\psi_2$  se tiene que  $\psi_3 = U_2(U_1\psi_1)$ ; esto se puede escribir como  $(U_2U_1)\psi_1 = \psi_3$ , o sea que existe un operador  $U_2U_1$  que tiene el mismo efecto de aplicar sucesivamente  $\psi_2$  y  $\psi_1$  (propiedad cerradura). Si se tienen tres transformaciones sucesivas  $\psi_2 = U_1\psi_1, \psi_3 = U_2\psi_2, \psi_4 = U_3\psi_3$  y se quiere transformar el estado  $\psi_1$  en el  $\psi_4$ , se puede hacer de varias formas. Se puede transformar el estado  $\psi_1$  en el  $\psi_3$  y luego  $\psi_3$  en el  $\psi_4$ :  $\psi_4 = U_3(U_2U_1)\psi_1$ . También se puede transformar el estado  $\psi_1$  en el  $\psi_2$  y éste en el  $\psi_4$ :  $\psi_4 = (U_3U_2)U_1\psi_1$ ; entonces  $U_3(U_2U_1) = (U_3U_2)U_1$  (asociatividad).

El sistema físico se puede dejar en el mismo estado, lo que matemáticamente estaría representado por la existencia del operador identidad  $e$  (elemento neutro). Por último, si  $\psi = U_1\psi_1$ , debe existir  $U^{-1}$  tal que  $\psi_1 = U^{-1}\psi$ , de manera que  $UU^{-1} = e$ . Comparando los resultados de este análisis con la definición de grupo dada anteriormente se concluye que este conjunto de transformaciones tiene una estructura de grupo.

Por esta razón, se pueden aplicar los resultados de la teoría de grupos al conjunto de transformaciones que relacionan estados de sistemas físicos entre sí. Es más, ya que los elementos de este grupo son operadores que actúan sobre un espacio vectorial, el grupo es imagen de sí mismo ante una representación: la representación identidad, y se puede hablar de generadores del grupo, de los subespacios invariantes ante el grupo y de otros conceptos útiles. Para esta exposición se consultó a Fernando Quevedo (1979:31,51-53). Procede ahora introducir algunos grupos de matrices útiles para la representación de transformaciones dentro de la estructura del Modelo Estándar.

## B. Grupos importantes para el Modelo Estándar

En la formulación matemática del Modelo Estándar tienen especial importancia los grupos de matrices que se presentan a continuación con base en los libros de Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:193-198) y G. Serman (1993:17-19,540,541).

Una matriz  $U$   $n \times n$  es *unitaria* si  $U U^\dagger = U^\dagger U = I$ , donde  $U^\dagger$  es la matriz transpuesta de  $U$ . El producto de dos matrices unitarias es unitario. De aquí, matrices unitarias  $n \times n$  forman un grupo bajo multiplicación de matrices, denotado por  $U(n)$ . Las matrices unitarias  $n \times n$  son consideradas ellas mismas como una representación del grupo  $U(n)$ , llamada la *representación de definición*.

Considérese un campo  $\psi(x)$  que transforma según el set de transformaciones globales  $\psi_i \rightarrow U_{ij} \psi_j$ ,  $U^\dagger U = I$ , donde  $U$  es una matriz unitaria  $n \times n$ . Se dice que este campo transforma de acuerdo a la representación de definición de  $U(n)$ . De particular interés para cuantización son las *representaciones unitarias*, en las cuales las  $D(g_i)$  introducidas antes, son matrices unitarias. Esto es, por supuesto, el caso de la representación de definición de  $U(n)$ .

1. Los grupos no-abelianos  $U(2)$  y  $SU(2)$ . El ejemplo más simple de un grupo de invarianza es cuando se tiene un vector  $\psi(x)$  con solamente una componente compleja. El set de todas las fases  $\exp(i\theta)$  es la representación de definición del grupo  $U(1)$ , el grupo unidimensional unitario. Hay un simple generador para este grupo, el cual puede ser tomado como el número uno, la matriz unidad en una dimensión.

Un ejemplo más representativo es dado cuando  $\psi(x)$  tiene dos componentes complejas. El grupo de invarianza es entonces  $U(2)$ , definido por el set de matrices unitarias  $2 \times 2$ . El determinante de una matriz unitaria es una fase, y para un elemento  $U$  de  $U(2)$ , se puede escribir

$$U = e^{i\alpha} S, \det S = 1. \quad (3.2)$$

Cada elemento de  $U(2)$  es el producto de un factor de fase  $e^{i\alpha}$  (con  $\alpha$  real), el cual es un elemento de  $U(1)$ , y un elemento  $S$  del nuevo grupo  $SU(2)$ . En otras palabras, una matriz arbitraria en  $U(2)$  es el producto de un elemento de  $U(1)$  veces una matriz unitaria de determinante unidad. Estas matrices forman

ellas mismas el llamado grupo *especial unitario* de matrices  $2 \times 2$   $SU(2)$ . Más formalmente, se puede escribir  $U(2) = U(1) \times SU(2)$ . Esto es,  $U(2)$  es el producto directo de  $U(1)$  y  $SU(2)$ . Los generadores de  $SU(2)$  pueden ser identificados a partir de la siguiente forma general para cualquier matriz de determinante unidad,

$$s = \exp\left(i \sum_{a=1}^3 \beta_a \frac{1}{2} \sigma_a\right), \quad (3.3)$$

donde las  $\sigma_a$  son las llamadas *matrices de Pauli*, que se tratan en la Sección V:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Luego, los generadores de  $SU(2)$  son seleccionados convencionalmente como  $\frac{1}{2} \sigma_a$ . El grupo especial unitario  $SU(2)$  es central en la parte electrodébil del Modelo Estándar.

2. El grupo especial unitario  $SU(3)$ . Otro grupo importante en el Modelo Estándar es el grupo especial unitario de todas las matrices  $3 \times 3$  con determinante igual a 1, denotado por  $SU(3)$ . Los generadores de este grupo en la representación de definición también son seleccionados convencionalmente como  $\frac{1}{2} \lambda_a$ . El set  $\lambda_1 - \lambda_8$  son las ocho matrices llamadas de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (3.5) \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 3^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & -2/3^{1/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## C. Transformaciones de Lorentz y transformaciones gauge

Las ecuaciones del Modelo Estándar deben ser consistentes con el *principio de relatividad de Einstein*, el cual establece que las leyes de la naturaleza toman la misma forma en cada sistema inercial de referencia. Un sistema inercial es aquel en el cual un cuerpo libre se mueve sin aceleración. Distintos sistemas inerciales de referencia se relacionan por medio de las transformaciones determinadas que se describen a continuación. Para este desarrollo se consultó a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:19-68,148), Robert Eisberg y R. Resnick (1974:A11), Peter Schmöser (1995:12), V.B. Berestetskii, E. Lifshitz y L. Pitævskii (1980:12-34,119), Asim Barut (1980:5,6,94,95), Roman Sexl y H. Urbantke (2002:88) y G. Sterman (1993:136).

1. Transformaciones de Lorentz. Las coordenadas de espacio y tiempo de un evento medidas en diferentes sistemas de referencia inerciales están relacionadas por una *transformación de Lorentz*.

Una rotación es un caso especial de este tipo de transformaciones. Considere, por ejemplo, un sistema  $K'$  que está rotado un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $x_3$  con respecto a un sistema  $K$ . Si  $(t, \mathbf{x})$  son las coordenadas de tiempo y espacio de un evento observado en  $K$ , entonces en  $K'$  el evento es observado en  $(t', \bar{\mathbf{x}}')$  y

$$t = t', \quad x_1' = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad x_2' = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, \quad x_3' = x_3. \quad (3.6)$$

Las transformaciones de Lorentz, además, relacionan eventos observados en sistemas de referencia que se están moviendo con velocidad constante uno con respecto del otro. Considere, por ejemplo, un sistema inercial  $K'$  moviéndose en la dirección  $x_3$  en un sistema  $K$  con velocidad  $v$ , los ejes espaciales de  $K$  y  $K'$  coincidiendo a  $t = 0$ . Si  $(t, \bar{\mathbf{x}})$  son las coordenadas de tiempo y espacio de un evento observado en  $K$ , y  $(t', \bar{\mathbf{x}}')$  son las coordenadas del mismo evento observado en  $K'$ , la transformación toma la forma

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t - vx_3/c^2), \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x_3 - vt), \quad (3.7)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz.

Si se introduce un espacio vectorial de cuatro dimensiones de cuatri-vectores  $\bar{\mathbf{x}}$  con componentes  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , con  $x_0 = ct$ , se puede definir a todas las transformaciones que dejan invariante la expresión

$$x^2 \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (3.8)$$

como transformaciones homogéneas de Lorentz. Generalmente, transformaciones no-homogéneas de Lorentz son aquellas que dejan invariante la expresión

$$x^2 - y^2 \equiv (x_0^2 - y_0^2) - (x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2) - (x_3^2 - y_3^2); \quad (3.9)$$

éstas difieren de las transformaciones homogéneas por una traslación de coordenadas de espacio-tiempo. Las transformaciones hacia un sistema con ejes paralelos, pero moviéndose en una dirección arbitraria son llamadas *traslaciones*. Una transformación general de Lorentz entre dos sistemas inerciales  $K$  y  $K'$  cuyos orígenes coinciden en  $x^0 = x'^0 = 0$  es una combinación de una rotación y una traslación y está especificada por seis parámetros: tres dan la orientación de los ejes de  $K'$  con respecto a los ejes de  $K$ , y tres dan los componentes de la velocidad de  $K'$  con relación a  $K$ . A partir de ahora se utiliza una notación más conveniente: un evento en  $K$  se especifica por el set  $x^\mu$ , donde  $\mu = 1, 2, 3$ ; los índices griegos en general tomarán estos valores en este trabajo. Con esta notación, una transformación general de Lorentz toma la forma  $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$ , donde los elementos  $L^\mu_\nu$  de la matriz de transformación son reales y sin dimensión. Las matrices  $L^\mu_\nu$  forman el llamado *grupo propio de Lorentz*. Desde aquí se comenzó a usar la *convención de suma de Einstein*: se entiende que se suma sobre un índice repetido, y se elimina el símbolo de sumatoria.

2. Transformaciones gauge. Otro tipo de transformaciones que aparecen en la formulación del Modelo Estándar, dicen Roman Sexl y H. Urbantke, son las llamadas <<transformaciones gauge>> (2002:88), que son de la forma  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ , donde  $\chi(x)$  es un *campo escalar* arbitrario, función

del espacio y del tiempo. En general, las expresiones que son invariantes bajo transformaciones gauge son llamadas *invariantes gauge*. Una transformación que necesita no ser la misma en cada punto del espacio es llamada *local*. La transformación de la función de onda  $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ , con  $\chi(x, t)$ , es algunas veces llamada *transformación gauge local*, en contraste con la *transformación gauge global*  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ ,  $\psi^+ \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^+$ , con una fase  $\alpha$  real constante. Estas dos definiciones serán muy importantes en la Sección V.

#### D. Escalares, cuatrivectores covariantes y contravariantes

El intervalo  $(\Delta s)^2$  entre dos eventos  $x^\mu$  y  $x^\mu + \Delta x^\mu$  es definido para ser  $(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$ . Es una propiedad fundamental de una transformación de Lorentz que deja el intervalo entre dos eventos invariante, como se ejemplificó antes:  $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$ . Se puede expresar  $(\Delta s)^2$  más compactamente introduciendo el tensor métrico  $(g_{\mu\nu})$ :

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Luego  $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$  donde se suma sobre los índices superiores e inferiores. Note que  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  es un tensor simétrico; tiene los mismos elementos en cada sistema de referencia. Cantidades tales como  $(\Delta s)^2$ , que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz son, llamadas *escalares*. Se definen un *cuatrivector contravariante* como un set  $a^\mu$  que transforma como el set  $x^\mu$  bajo una transformación propia de Lorentz:  $a^\mu = L^\mu{}_\nu a^\nu$ , y un *cuatrivector covariante*  $a_\mu$  -que lleva un subíndice en lugar de un superíndice-, por  $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ . Se puede definir el tensor métrico contravariante  $g^{\mu\nu}$  de tal manera que  $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$ , los elementos de  $g^{\mu\nu}$  son idénticos a los de  $g_{\mu\nu}$ . La ley de transformación para vectores covariantes se puede escribir  $a'_\mu = L_\mu{}^\nu a_\nu$ . Para la presentación de estos tensores métricos se siguió a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:21).

#### E. Lagrangiano, densidad de Lagrangiano y Hamiltoniano

1. **Lagrangiano y densidad de Lagrangiano.** Un sistema en Mecánica Clásica es descrito matemáticamente -siguiendo en este tema a G. Serman (1993:3,4)-, por un set de coordenadas *generalizadas*  $\{q_i\}$ , y un *Lagrangiano*  $L\{q_i, \dot{q}_i\}$  el cual depende de las  $q_i$  y sus velocidades asociadas  $\dot{q}_i \equiv \{dq_i / dt\}$ . Las ecuaciones de movimiento para el sistema son las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \left( \frac{d}{dt} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (3.11)$$

En teoría de campos, el análogo de las coordenadas generalizadas  $\{q_i(t)\}$ , es un campo  $\phi(\mathbf{X}, t)$ , en el cual el índice descrito  $i$  ha sido reemplazado por el continuo vector de posición  $\mathbf{X}$ . La posición dada  $\mathbf{X}$  no es una coordenada, más bien es un parámetro que etiqueta la coordenada del campo  $\phi$  en el punto  $\mathbf{X}$  a un

particular tiempo  $t$ . Puede haber más que un campo en cada punto del espacio, y en tal caso los campos deben llevar un subíndice que los distinga, como en  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ . Para calificar como un sistema mecánico, los campos deben ser asociados a un Lagrangiano, el cual determina su desarrollo en el tiempo. Cada campo describe un infinito número de coordenadas, no obstante se deben hacer suposiciones específicas sobre el Lagrangiano para hacer el sistema manejable.

El interés aquí se centra en las teorías de campos locales, en las cuales las dinámicas no enlazan diferentes puntos en el espacio instantáneamente. Es entonces natural asumir que el Lagrangiano puede ser escrito como una integral sobre otra función, llamada densidad de Lagrangiano,  $\mathcal{L}$  :

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, t), \quad (3.12)$$

la cual depende del set de campos y sus primeras derivadas,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(\phi_a(\mathbf{x}, t), \partial\phi_a(\mathbf{x}, t) / \partial x^\mu). \quad (3.13)$$

Para un sistema en general, el Lagrangiano  $L$  se puede identificar como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema, es decir  $T - V$ . Esto se deberá tener presente en Sección V; allí, las ecuaciones del Modelo Estándar serán derivadas principalmente en forma de expresiones para densidades de Lagrangiano para partículas interactuando con campos.

2. **Hamiltoniano.** Otra definición relacionada que será necesaria más adelante es la de *Hamiltoniano* de un sistema, dado por la expresión

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L. \quad (3.14)$$

En términos de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ , la ecuación de energía para un sistema cerrado es  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E = T + V$ . Esta ecuación, que según Noel Cottingham y D.A. Greenwood <<es una consecuencia de la *homogeneidad del tiempo*>> (1998:21) (ver Sección IV), es la base para la transición de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica. Estos conceptos son útiles también en la Sección V, donde se trata la cuantización del campo electromagnético y de otros campos.

## F. Notación y significados físicos en la Mecánica Cuántica

1. **Notación en la Mecánica Cuántica.** Considérese una ecuación de la forma general  $\Omega\phi = \lambda\phi$ , donde  $\Omega$  es un operador y  $\lambda$  una constante. Las soluciones posibles  $\phi$  y los valores posibles de la constante  $\lambda$  están restringidos por las condiciones de frontera del problema, o en los "límites" del problema. Una de tales condiciones será que la función de onda sea uniforme. En lenguaje matemático la solución  $\phi$  de la ecuación se dice que es "función propia" del operador  $\Omega$  asociada al "valor propio"  $\lambda$  (también se usan los términos *eigenfunción* y *eigenvalor*). La función es propia en el sentido de satisfacer una ecuación diferencial junto con determinadas condiciones de contorno.

Cuando el resultado de aplicar dos operadores a una función arbitraria es independiente del orden en que se apliquen, se dice que los operadores conmutan entre sí. Cuando dos operadores conmutan es posible

encontrar funciones que sean simultáneamente propias de ambos. Una función de un operador conmuta con cualquier otra función del mismo operador. Las relaciones de conmutación entre operadores son tan importantes que se ha introducido una notación para abreviar la expresión  $AB - BA$ . Por definición  $AB - BA \equiv [A, B]$ . A esto se le llama "bracket conmutador". Supóngase que hay dos operadores  $A$  y  $B$  y que la función  $\phi$  es simultáneamente propia de ambos,

$$\begin{aligned} A\phi_{a,b} &= \lambda_a\phi_{a,b}, \\ B\phi_{a,b} &= \lambda_b\phi_{a,b}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se puede deducir que  $[AB - BA]\phi_{a,b} = 0$ . Supóngase también que existe un conjunto de operadores  $A, B, C, \dots$ , que no son funciones los unos de los otros, pero que forman un conjunto conmutable, es decir  $0 \equiv [A, B] = [B, C] = [C, A] = \text{etc}$ . Si este conjunto es tan amplio como permita el espacio con el que se está trabajando, se llama *conjunto completo de operadores conmutables*. Con tal de recordar que se hace referencia a los operadores  $A, B, C, \dots$ , los números  $a, b, c, \dots$ , especificarán completamente las funciones propias *normalizadas* (haciendo unitaria su integral sobre todo el espacio).

P. A. M. Dirac introdujo una notación que facilita la escritura de ecuaciones referentes a funciones propias. Si se tiene en mente cual conjunto completo de operadores conmutables  $A, B, C, \dots$  es el empleado para definir el conjunto de funciones propias, todo lo necesario para representar una determinada función  $\phi_{a,b,c,\dots}$  es escribir el conjunto de números  $a, b, c, \dots$ , etc. Dirac propuso la convención de emplear el símbolo  $|a, b, c, \dots\rangle$ , que llamó "ket", en lugar de la función propia  $\phi_{a,b,c,\dots}(x^1, \dots, x^N) \equiv |a, b, c, \dots\rangle$ . La función conjugada la representó por el símbolo llamado "bra":  $\phi_{a,b,c,\dots}^*(x^1, \dots, x^N) \equiv \langle a, b, c, \dots|$ . Cuando se quiere multiplicar los dos e integrar sobre todas las coordenadas, se pone lo que Dirac llamó un "braket" (a veces llamado "producto escalar" o "interno"). El producto escalar no es una función de las coordenadas, sino un número ordinario.

2. Interpretación de Copenhague. Según la interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica, el estado de un sistema en un instante dado está especificado por una función de onda  $\psi$ . Esta función evoluciona en el tiempo siguiendo la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (3.16)$$

Cada magnitud de la Mecánica Clásica corresponde a un operador de la Mecánica Cuántica. Si la función de onda es una función propia del operador, el resultado de una medida de la magnitud dinámica es exactamente el valor propio asociado. Por otra parte, supóngase que la función de onda no es propia del operador  $\Omega$ , pero que puede desarrollarse en serie de las funciones propias  $\psi = \sum_k a_k \phi_k$ , donde  $\Omega \phi_k = \lambda_k \phi_k$ . Entonces, según la interpretación de Copenhague, la probabilidad de que una medida dé el valor  $\lambda_k$  está dada por el producto del coeficiente  $a_k$  por su complejo conjugado, *i.e.* probabilidad =  $a_k^* a_k$ . Este resultado, así como las ideas anteriores de la Mecánica Cuántica, son parte del tratamiento de los temas planteado por John Avery (1975:118-137).

## IV. SIMETRÍAS, LEYES DE CONSERVACIÓN Y NÚMEROS CUÁNTICOS

En la formulación matemática del Modelo Estándar las simetrías y el rompimiento de las simetrías juegan un papel muy importante. Esto debido a que sus ecuaciones mantienen la misma forma después de ciertas transformaciones. A raíz de esto, así como simetrías bajo transformación de coordenadas, hay simetrías 'internas' de los campos de partículas. Para introducir este tema se resume en el siguiente párrafo lo escrito al respecto por Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:1-3) y Fernando Quevedo (1979:25-27).

Matemáticamente hablando, cada conjunto de las transformaciones de simetría referidas (representadas por matrices) forma una estructura algebraica de grupo. Las leyes de conservación están íntimamente ligadas a las simetrías que existen en las interacciones. A cada simetría le corresponde una ley de conservación y por lo tanto, cada número cuántico está determinado por la existencia de una simetría. El *teorema de Noether* establece, esencialmente, que para cada simetría continua de la naturaleza hay una correspondiente ley de conservación. De la presumida homogeneidad del espacio y del tiempo se sigue que el Lagrangiano de un sistema cerrado es invariante bajo traslaciones uniformes del sistema en el espacio y en el tiempo; tales transformaciones son, por lo tanto operaciones de simetría sobre el sistema y llevan, respectivamente, a las leyes de conservación de momento y conservación de energía.

En la Sección II se dividió a los hadrones en mesones y bariones. Para lograr una clasificación "más precisa", es necesario caracterizar detalladamente cada partícula. Esto se hace asociando un conjunto de números cuánticos a las partículas (los cuales las caracterizan completamente) en base a las simetrías de cada interacción y las leyes de conservación asociadas a las mismas.

### A. Simetrías externas

1. Homogeneidad del tiempo: conservación de energía. La ley de conservación de la energía restringe el número de posibles procesos de interacción entre partículas; al respecto, Quevedo (1979:16) dice que:

<<...esta ley se debe a que el comportamiento de cualquier sistema físico es independiente del origen del tiempo. Esta simetría se conoce como *homogeneidad del tiempo*. En otras palabras, en base a la simetría de los sistemas físicos ante traslaciones en el tiempo, se lleva a la conservación de la energía y ésta establece reglas de selección, evitando que muchos procesos sucedan. Para que esta ley tenga sentido y se cumpla, es necesario asignarle a cada partícula un número llamado "masa en reposo" que le da una energía intrínseca.>>

Recuérdese que masa y energía son diferentes manifestaciones de la misma cosa.

2. Homogeneidad del espacio: conservación de momento lineal. La ley de conservación del momento lineal, otra vez según Quevedo (1979:16):

<<...se debe también a una simetría: la invarianza de los sistemas físicos ante traslaciones espaciales, es decir a la *homogeneidad del espacio*. En este caso no hay necesidad de asignarle alguna cantidad intrínseca a las partículas para que se cumpla esta ley>>.

3. Isotropía del espacio: conservación de momento angular. Nuevamente según Quevedo (1979:16-18), cada partícula:

<<...tiene un *momento angular intrínseco* o de espín; debido a la relación espín – estadística se sabe que todas las partículas de espín semientero obedecen la estadística de Fermi-Dirac y las de espín entero, la de Bose-Einstein; por esta razón se puede dividir a las partículas en fermiones y bosones respectivamente. Entonces, además de las anteriores, existe una tercera ley de conservación que se debe a la *isotropía* del espacio, es decir, a la simetría del sistema ante rotaciones espaciales; ésta es la ley de conservación del momento angular. Es necesario asignarle a cada partícula un número cuántico de espín o momento angular intrínseco para que se cumpla esta ley en todos los procesos. Un electrón, por ejemplo, tiene un espín total  $S = 1/2$  con dos estados posibles de espín: para “arriba” ( $S_z = 1/2$ ) y para “abajo” ( $S_z = -1/2$ ).>>

Con relación a este número cuántico cabe mencionar a continuación lo que escribe Longo (1973:11):

<<...empíricamente se obtiene que partículas con un espín semientero de la forma  $1/2, 3/2, 5/2, \dots$  son fermiones, mientras que las partículas con espín entero son bosones. Entonces leptones y bariones son fermiones; mesones y fotones son bosones. Un sistema cuyo número cuántico de momento angular  $\ell$  es par,  $0, 2, \dots$ , tiene la parte espacial de su función de onda simétrica o par. Dos bosones idénticos sin espín (por ejemplo, mesones  $\pi^0$ ) deben por lo tanto estar en un estado con  $\ell$ , de tal forma que la función de onda es simétrica. Para partículas con espín, la función de onda total que describe el sistema es el producto de una parte de espín y una parte espacial. Por ejemplo, ya que los protones son fermiones, dos protones con sus espines paralelos, es decir simétricos, deben tener  $\ell$  impar, mientras que dos protones con espines antiparalelos deben estar en un estado con  $\ell$  par.>>

Es apropiado aquí revisar la Sección II para ver el significado de estos conceptos.

4. Conservación de paridad  $P$ . En Mecánica Cuántica cada estado de un sistema físico está descrito por una función; algunas de estas funciones tienen comportamientos definidos cuando se hace una inversión de las coordenadas espaciales: o permanecen invariantes o cambian de signo. Se dice que las primeras tienen una *paridad* +1 (par) y las segundas una paridad -1 (impar). Para que una interacción sea simétrica respecto a la operación paridad (esto es, que la paridad se conserve), se debe asociar a cada partícula un número cuántico multiplicativo, su paridad intrínseca  $P = \pm 1$ . Se ha encontrado que la paridad se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en interacciones débiles, por lo que este número cuántico no se asigna a los leptones. Para esta breve presentación de la paridad se también se consultó a Fernando Quevedo (1979:19) y a Michael Longo (1973:15,16). La idea en esta sección es familiarizarse con el concepto; más adelante, en la Sección V, se abordará con más profundidad.

5. Inversión de coordenada temporal. Algo similar al caso anterior sucede si se considera una inversión de la coordenada temporal: según Quevedo <<existe también una ley de conservación asociada a esta operación, la ley de conservación de  $\mathcal{T} = \pm 1$ >> (1979:19).

## B. Simetrías internas

El segundo grupo son las leyes de conservación relacionadas con simetrías *internas*, que son simetrías ante transformaciones gauge. Esencialmente, la idea es que si a cada partícula se le asigna un campo

complejo  $\psi(x)$ , donde la cantidad observable es  $\psi(x)\psi^*(x)$ , y si se efectúa la transformación  $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$  (con  $\alpha$  real), se tiene que  $\psi(x)\psi^*(x) \rightarrow \psi(x)\psi^*(x)$  y la cantidad observable no cambia. En otras palabras, el sistema será invariante ante esta transformación. Quevedo habla de estas leyes de conservación diciendo que <<llevan a asociarle un número cuántico aditivo a cada partícula>> (1979:20). En términos formales, la simetría de transformación de fase está dada por

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad \psi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^*(x), \quad x^\mu \rightarrow x^\mu \quad (4.1)$$

con una fase  $\alpha$  real constante. En la Sección III.C se vio que esta transformación independiente de las coordenadas es llamada global porque es la misma en cada punto del espacio tiempo. Cuando las ecuaciones de movimiento son invariantes ante tal transformación, esta es conocida como una simetría interna de la teoría. En palabras de Stermán, <<el teorema de Noether muestra que una simetría interna resulta en una conservación de corriente>> (1993:15,16), resultado que se obtendrá para varios casos en la Sección V. En la descripción de las simetrías internas que se presenta a continuación se incluye información tomada de Fernando Quevedo (1979:20-27), Michael Longo (1973:9-13) y Robert Eisberg y R. Resnick (1974:707). Esta última referencia se consultó específicamente para el caso de la conservación de la hipercarga.

1. Conservación de carga eléctrica  $Q$ . A cada partícula se le asigna una carga eléctrica  $Q$  en unidades definidas de  $e$ , la carga del electrón. El valor de este número cuántico, que también puede ser negativo, se establece de acuerdo a su comportamiento en las interacciones electromagnéticas. Por ejemplo, en la Sección II se vio que los quarks tienen cargas y anticargas fraccionarias  $\pm 1/3$ ,  $\pm 2/3$ . Si se analizan las reacciones y decaimientos que ocurren, se ve que siempre se cumple que la suma de las cargas de las partículas al inicio del proceso, es igual que la suma de las cargas de las partículas al final. Se puede notar que esta ley de conservación se refiere a una propiedad totalmente intrínseca de las partículas, cosa que no sucede por ejemplo con la energía o momentum angular, pues no se puede decir que la suma de las masas o espines al comienzo del proceso sea igual que la suma al final.

2. Conservación de número bariónico  $B$ . A los núcleos se les asigna un número de masa  $A$  igual a la suma de los protones y neutrones; luego,  $A = 1$  para el neutrón y el protón. Se puede generalizar el concepto de número de masa a todos los bariones; así se le asigna un *número bariónico*  $B = 1$  a los bariones,  $B = -1$  a los antibariones y  $B = 0$  a las demás partículas. Se ha observado que cada una de las interacciones que ocurren en la naturaleza satisfacen la ley de conservación siguiente: la suma de los números bariónicos de las partículas es igual al inicio y al final de una interacción.

3. Conservación de número leptónico  $L$ . En todos los procesos observados se cumple la ley de conservación del número leptónico  $L$ . Es decir, si se asigna  $L = 1$  a los leptones,  $L = -1$  a los antileptones y  $L = 0$  a las demás partículas, y se define el número leptónico total de un conjunto de partículas como la suma de números leptónicos de cada una de ellas, se puede establecer que este número es igual al inicio y al final de una interacción. Existe un número leptónico para cada uno de los tres leptones conocidos:  $L_e$ ,  $L_\mu$ ,  $L_\tau$  que se conservan independientemente, de tal forma que, por ejemplo  $L_e = 1$  para el electrón y su neutrino y  $L_e = 0$  para el muón y el tau. De esta manera se tiene que  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ .

4. Conservación de extrañeza  $S$ . Existe otra simetría que proviene de las interacciones fuertes que tiene que ver con las partículas denominadas “extrañas”, que son las que en su constitución incluyen quarks strange. Se asigna el número cuántico extrañeza  $S$ :  $S = 1$  para las partículas extrañas y  $S = -1$  para las partículas no-extrañas, de tal forma que  $S$  se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las interacciones débiles, por lo que la extrañeza de los leptones no está definida. Como previamente se anotó, las antipartículas tienen igual y opuesta extrañeza.

5. Conservación de hipercarga  $Y$ . Para correlacionar las propiedades de los mesones y hadrones, en lugar del número cuántico extrañeza  $S$ , se usa un número cuántico  $Y$  llamado hipercarga, definida por  $Y = S + B$ , donde  $B$  es el número bariónico. Dado que  $B$  se conserva en todas las interacciones, las reglas concernientes a la conservación de  $S$  se trasladan a  $Y$ .

6. Conservación de espín isotópico  $I$ . Las partículas están agrupadas en familias o multipletes cuyas masas son casi iguales (por ejemplo  $\pi^0$  y  $\pi^\pm$ ). Esta relación familiar ha sido por supuesto reconocida en los nombres dados a las partículas. Es por lo tanto conveniente tratar a los miembros de un multiplete como diferentes estados de la misma partícula. Los estados (miembros) se distinguen por un número cuántico, espín isotópico o isoespín, el cual es completamente análogo al espín ordinario. Justo como el número cuántico de espín determina la orientación del vector de espín en el espacio real, el número cuántico de isoespín puede ser pensado como el que determina la orientación de un vector de isoespín en un espacio de isoespín ficticio (sin significado físico). Para una partícula de espín  $S$ , hay  $2S + 1$  orientaciones posibles del vector de espín con relación a una dirección dada; similarmente, para un multiplete con isoespín  $I$ , hay  $2I + 1$  miembros del multiplete. Ya que las partículas en cada multiplete son además distinguibles por su carga, la orientación de  $I$  puede ser pensada como determinando la carga. Por convención la componente de  $I$  a lo largo del eje  $Z$  en el espacio de isoespín es relacionada a la carga  $Q$  según

$$I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{B}{2} - \frac{S}{2} \quad (4.2)$$

donde  $B$  es el número bariónico y  $S$  la extrañeza. Las otras dos componentes de  $I$  son entonces indefinidas (como deberían ser para vectores de espín ordinarios en mecánica cuántica) y no tienen especial significado físico.

Experimentalmente se encuentra que las interacciones fuertes conservan el isoespín. En otras palabras, el isoespín total del estado final de una reacción fuerte debe ser el mismo que el del estado inicial. Las interacciones electromagnética y débil, por otro lado, no conservan el isoespín. El espín isotópico de los leptones no está definido, ya que los leptones no participan en las interacciones fuertes y el espín isotópico no es conservado en las interacciones débiles. Como un resultado de la conservación del isoespín, las propiedades de un sistema a la vista de las interacciones fuertes, están determinadas solamente por su isoespín total, independientemente de  $T_3$  (carga).

Como ayuda para comprender el concepto de isoespín se puede pensar que el neutrón y el protón deberían ser tratados como diferentes estados de “espín” de una sola partícula, el nucleón, precisamente de la

misma forma como un electrón con espín  $1/2$  y un electrón con espín  $-1/2$  son diferentes estados de espín de una sola partícula; de aquí el nombre de isoespín. Al nucleón se le asigna entonces un número cuántico de isoespín  $I = 1/2$  con componentes de carga  $I_3 = -1/2$  para el estado neutrón,  $I_3 = 1/2$  para el estado protón.

Es importante mencionar que dado que los miembros de cada isomultiplete tienen aproximadamente la misma masa, pero difieren en carga, se puede decir que si no hubiera interacción electromagnética (solamente interacción fuerte), entonces cada isomultiplete sería como “una sola partícula”, y habría menos hadrones diferentes. La fuerza electromagnética es la causante de la diferencia de masas: esta interacción *rompe la simetría* del grupo de isoespín, es decir el grupo de rotaciones en el isoespacio (que tiene estructura de grupo  $SU(2)$ ), creando así esta diferencia.

Otra observación importante con relación al isoespín es que el principio de Pauli puede ser generalizado a cualquier sistema de nucleones considerando al isoespín justo como al espín ordinario. Entonces la función de onda total del sistema es el producto de tres partes: una parte del espín, una parte del isoespín y una parte espacial. Para fermiones el producto total debe ser impar. Esto es a menudo referido como el *principio generalizado de Pauli*.

7. **Conjugación de carga: conservación de  $C$ .** Si en un proceso se cambian las partículas por antipartículas, el proceso que resulta también es permitido. Esta simetría se llama *conjugación de carga* y conduce a la conservación del número  $C$  (que está definido sólo para ciertas partículas neutras) en las interacciones fuertes y electromagnéticas pero no en las débiles. Esta ley de conservación también se abordará con más detalle en la Sección V.

8. **Conservación de  $CPT$ .** Si un proceso se invierte en el tiempo, luego en el espacio y, finalmente, se cambian partículas por antipartículas se tiene una cantidad que se conserva en todas las interacciones:  $CPT$ .

9. **Conservación de  $G$ -paridad.** Con el fin de extender la conjugación de carga a partículas cargadas se introdujo el número cuántico “ $G$ -paridad”, definido sólo para partículas con  $B = S = 0$ . Esta operación es la composición de  $e^{i\pi I_2} C$ , donde  $C$  es la conjugación de carga y  $e^{i\pi I_2}$  es una rotación de  $180^\circ$  alrededor el eje “ $y$ ” del isoespacio. Para el nivel de este trabajo no se considera necesario abordar con más profundidad esta ley de conservación.

## C. Sumario de leyes de conservación

El Cuadro 4.1 elaborado con base en Michael Longo (1973:17) y Susan M. Lea y John R. Burke (1997:1193) resume la conducta de las interacciones débil, electromagnética y fuerte ante las leyes de conservación y las simetrías relacionadas. Es interesante notar la aparente correlación entre la intensidad de

las interacciones y el grado de simetría. En el cuadro mencionado puede verse que existen leyes de conservación aparte de las consideradas antes, asociadas al hecho que tanto el sabor de los quarks y leptones, como el color y anticolor de los quarks y gluones, también son números cuánticos. Estas otras leyes surgen de la naturaleza de las interacciones electrodébiles y fuertes. Ya se ha mencionado, además, que los quarks y antiquarks llevan número de quark, (que también se puede considerar un número cuántico) y que el número de quark neto en un sistema aislado nunca se ha observado que cambie.

El Cuadro 4.1 muestra los números cuánticos que se han descrito y sus propiedades de conservación. Las cantidades conservadas tradicionales –energía, cantidad de movimiento, momento angular y carga-, naturalmente se conservan en las interacciones entre partículas. El número de quark y el bariónico también se conservan absolutamente en el Modelo Estándar. Se han desarrollado algunas teorías para tratar de unificar las fuerzas fuerte y electrodébil, que predicen la no conservación de los números de quarks y bariónico. Hasta 1996, según Lea y Burke <<no había prueba experimental de ese concepto>> (1997:1192). El sabor de quark se conserva mediante las fuerzas fuerte y electromagnética, pero no mediante la fuerza débil. En la Sección V se podrá ver el origen de algunas de estas leyes de conservación, cuando se inspeccionen las ecuaciones del Modelo Estándar.

Cuadro 4.1  
Leyes de conservación y su aplicación en las interacciones  
débil, electromagnética y fuerte

Cantidad conservada	débil	electromagnética	fuerte
energía	sí	sí	sí
momento lineal	sí	sí	sí
momento angular	sí	sí	sí
carga eléctrica	sí	sí	sí
número bariónico	sí	sí	sí
número leptónico	sí	sí	sí
generación de leptón	sí	sí	sí
número de quark	sí	sí	sí
paridad $P$	no	sí	sí
extrañeza $S$	no	sí	sí
conjugación de carga	no	sí	sí
sabor de quark	no	sí	sí
color de quark	sí	sí	no
espín isotópico $I$	no	no	sí

#### D. Estructuras simétricas del Modelo Estándar

En sus trabajos S. Kulhmann (1989:44) y Madhusree Mulkerjee (1997:52-57) coinciden en que el Modelo Estándar usa teorías gauge para describir las fuerzas conocidas en la naturaleza y predice las

propiedades de los bosones vectoriales que median estas fuerzas: el gluón de la Cromodinámica Cuántica, y los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  del modelo electrodébil; la existencia de estos bosones gauge es una necesidad asociada a los generadores de la simetría que se mantiene en diferentes puntos del espacio. La forma de la interacción de los bosones con los fermiones es descrita por la simetría gauge y un parámetro que es una constante de acoplamiento.

Las teorías que integran el Modelo Estándar tienen cada una distintas simetrías. Antes de entrar a analizar como surge cada una de éstas, es conveniente hacer una sobre vista de todo el Modelo en conjunto, describiendo brevemente las simetrías que le dan estructura y lo que éstas representan físicamente. Para esto se tomó información de los trabajos de Patrick Liniger (2001:28-40) y de Paul Langacker (1989:5-9).

La base de la estructura de todo el Modelo Estándar es la complicada simetría gauge conocida como  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , combinada con la relatividad clásica general para gravitación (que se ignora aquí). Este grupo de simetría es espontáneamente *roto* hacia abajo a  $SU(3) \times U(1)$ .

Dentro del Modelo Estándar, la QCD es una teoría gauge local no-abeliana basada en el grupo  $SU(3)$  (de color). Este describe el hecho que la forma de las ecuaciones de movimiento es invariante cuando se transforman los diferentes colores de quark en algún otro sin cambiar sus otros números cuánticos. Asociados a los ocho generadores de  $SU(3)$  presentados en la Sección III están ocho gluones vectoriales los cuales pueden ser absorbidos o emitidos en transiciones entre los diferentes colores de quark.

En contraste, la Electrodinámica Cuántica se basa en la invarianza bajo una rotación de fase local unidimensional  $U(1)$  (de carga eléctrica). Esta diferencia en la simetría en la base produce una diferencia significativa en cómo interactúan los transportadores de la fuerza. En QED, el fotón solamente interactúa con pares fermión-antifermión porque el fotón no transporta carga eléctrica. En el otro lado, en QCD, los gluones transportan la carga de color; el resultado es *vértices*, es decir interacciones, de 3 gluones y de 4 gluones, así como vértices gluón-fermión-antifermión.

La interacción electrodébil es producida por invarianza gauge local bajo el grupo de simetría  $SU(2) \times U(1)$  (de isospín débil  $\times$  de hipercarga débil). Este grupo envuelve cuatro generadores y, por lo tanto, cuatro bosones gauge: dos cargados ( $W^\pm$ ) y dos neutrales ( $W^0, B$ ).  $SU(2)$  describe rotaciones o transformaciones de quarks up en down y (simultáneamente) neutrinos en electrones, con transformaciones similares sobre los quarks y leptones de las familias fermiónicas pesadas (es importante resaltar este aspecto simétrico entre las familias). El tercer generador de  $SU(2)$  y el generador de  $U(1)$  describen transformaciones de fase sobre los campos de fermión. Solamente los campos *levógiros* transforman bajo  $SU(2)$  ya que los campos *dextrógiros* son *singletes*, implicando violación de paridad.

Los fermiones elementales están dentro de *isodobletes* débiles levógiros e isosingletes débiles dextrógiros. Los quarks son introducidos casi en la misma forma que los leptones como campos levógiros

formando dobletes de isoespin y los compañeros dextrógiros son singletes de isoespin. La única diferencia con los leptones es que los quarks  $u$ ,  $c$  y  $t$ , son introducidos con un componente dextrógiro. Las asignaciones del número cuántico hipercarga son seleccionadas de forma que los quarks obtengan la correcta carga eléctrica.

Por último, en estas consideraciones previas, la belleza del Modelo Estándar se puede apreciar en la simetría entre las designaciones para los leptones y quarks:

$$\begin{array}{l}
 \text{leptones} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad e^-_D \quad \mu^-_D \quad \tau^-_D \quad \nu_{eD} \quad \nu_{\mu D} \quad \nu_{\tau D} \\
 \text{quarks} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \quad d'_D \quad s'_D \quad b'_D \quad u_D \quad c_D \quad t_D.
 \end{array} \tag{4.3}$$

A pesar de la aparente simplicidad de esta estructura simétrica del Modelo Estándar, la relación entre la formulación matemática y el mundo físico que se establece con los resultados experimentales, es más bien compleja, incluso en su pura terminología.

Por ejemplo, la correspondencia entre una teoría con bosones sin masa  $W$  y  $Z$  (dados por expresiones matemáticas), con el mundo real, donde estos bosones son enteramente pesados comparados a la mayoría de las otras partículas, no es obvia. La explicación del Modelo Estándar es que el mecanismo de *rompimiento espontáneo de simetría* introduce el campo escalar complejo de Higgs, que transforma como un doblete  $SU(2)$  y provee la masa de los bosones.

## V. FORMULACIÓN MATEMÁTICA: LAS ECUACIONES DEL MODELO ESTÁNDAR

### A. La ecuación de Klein-Gordon

Si  $x$  representa al set  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , se define que el campo escalar  $\phi(x)$  transforma simplemente como  $\phi'(x') = \phi(x)$ , donde  $x'$  y  $x$  se refieren al mismo punto en el espacio-tiempo. Considerando el cambio de campo  $d\phi$  debido al movimiento infinitesimal de  $x$  a  $x + dx$  se construye un campo vectorial a partir de un campo escalar, siguiendo a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998: 19-35), al lado de Asim Barut (1980:36,211).

El diferencial

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (5.1)$$

es invariante bajo una transformación de Lorentz y se pueden definir los vectores covariante y contravariante

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi \right) = \partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi = g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t}, -\nabla\phi \right). \quad (5.2)$$

Además, las siguientes expresiones son invariantes bajo transformaciones de Lorentz:

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla\phi)^2 \text{ y } \partial_\mu\partial^\mu\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi. \quad (5.3)$$

Considérese una densidad de Lagrangiano invariante de Lorentz de la forma  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$  donde  $\phi(x) = \phi(x^0, \mathbf{x})$  es un campo escalar. En cualquier punto  $x$  del espacio tiempo, tal densidad depende solamente del campo y sus primeras derivadas en ese punto. La teoría de campo se dice que es *local*: no hay 'acción a distancia'. Esta es una importante característica del Modelo Estándar. La ecuación de campo es

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Si  $\phi(x)$  es un campo escalar real, se tiene como caso particular la densidad de Lagrangiano invariante de Lorentz

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2]. \quad (5.5)$$

Esto da origen a la ecuación de campo siguiente, conocida como la ecuación de *Klein-Gordon*,

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi(r, t) - m^2\phi(r, t) = 0. \quad (5.6)$$

La solución general de la ecuación diferencial es una superposición de ondas planas dada por

$$\phi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}, \quad (5.7)$$

donde la frecuencia  $\omega_k$  está relacionada con el vector de onda  $\mathbf{k}$  por la relación de dispersión  $\omega_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$ , y  $\theta_k$  es un ángulo de fase arbitrario.

En esta ecuación  $V$  es el volumen del cubo dentro del que se consideran las soluciones para aplicar condiciones de frontera periódicas. Los factores  $\sqrt{2\omega_k}$  son introducidos por conveniencia posterior y los factores de fase han sido absorbidos dentro de las amplitudes de onda complejas  $a_k$ . La suma es sobre todos los valores permitidos de  $k$ . Con las identificaciones de de Broglie  $E = \omega$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$  (considerando  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ) la relación de dispersión para  $\omega_k$  es equivalente a la ecuación de Einstein para una partícula libre,  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . Se conjetura que la ecuación de Klein-Gordon para  $\phi$  describe una partícula escalar de masa  $m$ . No hay un vector asociado a un campo escalar de una componente, y el momento angular intrínseco asociado con tal partícula es cero.

La ecuación de Klein-Gordon puede ser pensada como una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger. G. Sterman (1993:9) escribe:

<<...la identificación de  $\phi(\mathbf{r}, t)$  con la función de onda de una partícula individual es, algunas veces, referida como la *primera cuantización* del campo de Klein-Gordon. Esto requiere un campo complejo, si al menos se describirán eigenestados de momento. Posteriormente se cuantizará la misma  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , un proceso conocido como segunda cuantización en vista de la interpretación de  $\phi(\mathbf{r}, t)$  como una función de onda.>>

Considérense ahora los campos escalares complejos  $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ . Éstos satisfacen la ecuación de Klein-Gordon; si el campo  $\Phi$  transporta carga  $q$ , el campo  $\Phi^*$  transporta carga  $-q$ . A partir de la densidad de Lagrangiano (real) que es la suma de contribuciones de los campos escalares  $\phi_1$  y  $\phi_2$ ,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2], \quad (5.8)$$

se obtiene la ecuación de Klein-Gordon  $-\partial_\mu \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi = 0$  para un campo complejo  $\Phi$  que tiene como solución general una superposición de ondas planas de la forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \left( \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \frac{b_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad (5.9)$$

donde ahora  $a_k$  y  $b_k$  son números complejos independientes.

## B. Electromagnetismo Clásico

1. Ecuaciones de Maxwell. Con las unidades apropiadas usadas antes, las *ecuaciones de Maxwell* toman la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad (\text{a}), & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \quad (\text{b}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}), & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{d}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnético. Las densidades de carga y corriente eléctricas  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  se consideran ahora campos 'externos' que se pueden manipular libremente. En este sistema las ecuaciones

no-homogéneas (a) y (b) son consistentes con el observado hecho de la conservación de carga, la cual es expresada por la ecuación de continuidad  $\partial\rho / \partial\tau + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , que toma la forma invariante de Lorentz  $\partial_\mu J^\mu = 0$  si se postula que las densidades de carga-corriente  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$  forman un campo cuatrivector contravariante. Introduciendo un potencial escalar  $\phi$  y un potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , las ecuaciones (c) y (d) son satisfechas idénticamente por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau}. \quad (5.11)$$

Se postula entonces que los potenciales  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  también forman un campo cuatrivector contravariante. Así, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en términos de un tensor antisimétrico  $F^{\mu\nu}$  definido por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Como entonces el campo electromagnético es un campo tensorial, sus componentes transforman bajo una transformación de Lorentz como las componentes de un tensor. Las ecuaciones de Maxwell homogéneas corresponden a las identidades  $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0$ , donde  $\lambda, \nu, \mu$  son cualquiera tres de 0, 1, 2, 3. Las ecuaciones no-homogéneas toman la forma covariante  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ .

## 2. Densidad de Lagrangiano para el electromagnetismo. Una densidad de Lagrangiano para el electromagnetismo es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (5.13)$$

El cuatripotencial  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  no es único: soluciones equivalentes difieren por transformaciones gauge que tienen la forma que ya ha sido presentada en la Sección III:  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi = (\phi + \partial\chi / \partial\tau, \mathbf{A} - \nabla\chi)$  donde  $\chi(x)$  es un campo escalar arbitrario. En términos de potenciales, las ecuaciones de campo son  $(\partial_\mu \partial^\mu)A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = J^\nu$ .

La densidad de Lagrangiano (5.13) es invariante bajo una transformación de inversión espacial, lo que significa que el electromagnetismo es indiferente al sentido de la mano. A la operación de inversión espacial de los ejes de coordenadas en el origen (Sección III),  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ ,  $\nabla \rightarrow \nabla' = -\nabla$ , se le refiere como la operación paridad. Los ejes del sistema de coordenadas transformados son levógiros. Por convención, la densidad de carga se toma como invariante bajo esta transformación: si a algún instante de tiempo  $\rho^p(\mathbf{r}^p)$  es la densidad de carga referida a los ejes de coordenadas invertidos, entonces se tiene que

$\rho^P(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ . La densidad de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  es una velocidad, transforma como un vector ordinario:  $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$ .

Las ecuaciones de Maxwell retienen la misma forma en el sistema de coordenadas primado si  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  también transforma como un vector,  $\mathbf{E}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , y  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  transforma como un vector axial,  $\mathbf{B}^P(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ . En términos de los potenciales, se debe tener que  $\phi^P(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r})$ ,  $A^P(\mathbf{r}') = -A(\mathbf{r})$ . Así, las ecuaciones de campo en un sistema levógiro tienen la misma forma que en un sistema dextrógiro.

Si la materia es reemplazada por antimateria, ambas densidades, de carga y de corriente, cambian de signo:  $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \rho^C(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{J}^C(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$ . Las ecuaciones de Maxwell toman la misma forma si se define la operación conjugación de carga  $\phi^C(\mathbf{r}) = -\phi(\mathbf{r})$ ,  $A^C(\mathbf{r}) = -A(\mathbf{r})$ . Como con la transformación de Lorentz y la transformación paridad, la densidad de Lagrangiano para electromagnetismo es invariante bajo la transformación de conjugación de carga. Estos resultados son presentados de esta forma por Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:37-42). Las ecuaciones de Maxwell también se consultaron en los libros de Asim Barut (1980:92-95) y de Peter Schmöser (1995:133,134); éste último muestra claramente su eigenvarianza.

3. Campos vectoriales masivos. Según Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:44-46), la densidad de Lagrangiano para el electromagnetismo (5.13) se puede modificar agregando un invariante de Lorentz adicional para quedar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - J^\mu A_\mu, \quad (5.14)$$

donde  $J^\mu$  es una corriente externa. El término adicional modificará la ecuación de campo para obtener  $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu$ . Como se tiene que  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0$ , se sigue de la ecuación anterior que  $m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$ . Usando esta expresión -que implica que las  $A^\nu$  no son independientes-, las ecuaciones de campo se simplifican a  $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + m^2 A^\nu = J^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu J^\mu) / m^2$ , y en el espacio libre cada componente de  $A^\nu$  satisface

$$\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\nu + m^2 A^\nu = 0. \quad (5.15)$$

Esta ecuación de onda está relacionada por las reglas de cuantización  $E \rightarrow i\partial/\partial t$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ , con la ecuación de Einstein para una partícula libre,  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . Se puede concluir que el Lagrangiano modificado, cuando es cuantizado, describe partículas de masa  $m$  asociadas con un campo de cuatro componentes, tres de las cuales son independientes. Las soluciones de onda plana son de la forma  $A^\nu = a \varepsilon^\nu \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$  donde  $\omega_k = k^0 = \sqrt{m^2 + k^2}$ . Para satisfacer la condición  $\partial_\nu A^\nu = 0$  se necesita  $k_\nu \varepsilon^\nu = 0$ .

El espín intrínseco de una partícula es su momento angular en un marco de referencia en el cual está en reposo. En tal sistema el vector que da la dirección de la onda plana es cero,  $\mathbf{k} = 0$ . Lo anterior

significa que el Lagrangiano modificado describe partículas masivas que tienen espín intrínseco  $S$  con  $S = 1$  y  $S_z = 1, 0, -1$ , considerando  $z$  la dirección de propagación de la onda plana.

4. Ecuación de Dirac y campo de Dirac. Para presentar la ecuación de Dirac y su invarianza de Lorentz se continúa siguiendo el tratamiento dado por Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:48-53) con algunas ideas tomadas de Peter Schmöser (1995:5-23). Los primeros plantean que se puede considerar la función de onda de Dirac como un campo, el cual será subsecuentemente cuantizado conjuntamente con el campo electromagnético. La transición a una teoría cuántica de campos se llama segunda cuantización (Sección III). El campo, como la función de onda de Dirac, es complejo.

En cuantización, los campos electromagnéticos  $A_\mu(x)$  y  $F_{\mu\nu}(x)$  son operadores dependientes del espacio y del tiempo. Los valores esperados de estos operadores en los alrededores descritos por los estados cuánticos son los campos clásicos.

Los campos de Dirac  $\psi(x)$  también son operadores dependientes del espacio y del tiempo sobre la cuantización; sin embargo, no hay campos clásicos medibles correspondientes. La diferencia refleja el principio de exclusión de Pauli, el cual aplica a fermiones pero no a bosones. Entonces los campos son pensados como funciones de onda de Dirac de partículas individuales.

Dirac inventó su ecuación tratando de hacer la ecuación de Schrödinger para una función de onda de un electrón  $\psi$ ,  $i(\partial\psi/\partial t) = H\psi$ , compatible con la relatividad especial. Para asegurar simetría entre espacio y tiempo postuló que el Hamiltoniano para un electrón libre debe ser de la forma  $H_D = \alpha \cdot p + \beta m = i\alpha \cdot \nabla + \beta m$ , donde  $m$  es la masa del electrón,  $p$  su momento,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\beta$  son matrices. La ecuación de Schrödinger llega a ser la ecuación de Dirac multicomponente

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla - \beta m \right) \psi = 0. \quad (5.16)$$

Si esta ecuación describe a un electrón libre de masa  $m$ , sus soluciones deben satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Para que esto sea posible se introduce un grupo de ecuaciones que resultan satisfechas por el set de matrices  $2 \times 2$  de espín de Pauli  $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ . Es convencional tomar

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

donde  $\sigma^0$  es la matriz unitaria  $2 \times 2$ . Se tienen ahora cuatro matrices anticonmutativas para representar las  $\alpha_i$  y  $\beta$ , y es necesario introducir un segundo set de matrices de Pauli y representar  $\alpha_i$  y  $\beta$  por matrices  $4 \times 4$ . La representación no es única; en la llamada *representación quiral* se tiene, escribiendo las matrices  $2 \times 2$  en forma de *bloque*,

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

donde la matriz 0 y la matriz identidad pueden ser escritas respectivamente como

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Como las  $\alpha_i$  y  $\beta$  son matrices  $4 \times 4$ , la función de onda de Dirac  $\psi$  es una matriz columna de cuatro componentes. Considerada como una ecuación relativista de Schrödinger, la ecuación de Dirac describe una partícula con momento angular intrínseco  $(\hbar/2)\sigma$  y momento magnético intrínseco  $(q\hbar/2m)\sigma$  si la partícula transporta carga  $q$ , y existen soluciones de 'energía negativa' que fueron interpretadas por Dirac como antipartículas. Una densidad de Lagrangiano que lleva a la ecuación de Dirac es la siguiente:

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left( i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \cdot \nabla - \beta m \right) \psi = \psi_a^* \left( \mathbf{I}_{ab} i \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_{ab} \cdot \nabla - \beta_{ab} m \right) \psi_b, \quad (5.20)$$

donde se han escrito índices en las matrices. Aquí,  $\psi_a^*$  es una matriz fila, el conjugado Hermítico  $\psi^\dagger = \psi_a^*$  de  $\psi$ .

Como se han escrito las matrices de Dirac en bloques de matrices  $2 \times 2$ , es natural escribir en forma similar el campo de Dirac de cuatro componentes como un par de campos de dos componentes. Así,  $\psi_L$  y  $\psi_D$  son, respectivamente, las dos componentes top y bottom del campo de Dirac de cuatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

La ecuación de Dirac es

$$i \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \psi_L \\ \partial_0 \psi_D \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_j \psi_L \\ \partial_j \psi_D \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_D \end{pmatrix} = 0; \quad (5.22)$$

una multiplicación en bloque de matrices da las dos ecuaciones acopladas para  $\psi_L$  y  $\psi_D$

$$\begin{aligned} i\sigma^0 \partial_0 \psi_L - i\sigma^j \partial_j \psi_L - m\psi_D &= 0, \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi_D - i\sigma^j \partial_j \psi_D - m\psi_L &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Siempre dentro de la misma lógica, es conveniente definir  $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  y  $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$  para mostrar la estructura de Lorentz. Con esta notación se puede escribir

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_D &= 0, \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_D - m\psi_L &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

La densidad de Lagrangiano se puede obtener en términos de  $\psi_L$  y  $\psi_D$  a partir de la ecuación de Dirac y el resultado es  $\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_D^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_D - m(\psi_L^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_L)$ . Con un poco de manipulación de matrices (que se omite), se puede verificar que el Lagrangiano asociado y por ende, las ecuaciones de campo, toman la misma forma en cada sistema de referencia inercial.

La densidad de Lagrangiano obtenida anteriormente puede, además hacerse invariante bajo inversión espacial de los ejes. Denotando como primas las coordenadas de un punto como se ve desde los ejes invertidos, se tiene  $r' = -r$  y  $\nabla' = -\nabla$ . De aquí, a partir de las definiciones de  $\sigma^\mu$  y  $\tilde{\sigma}^\mu$ , se puede escribir  $\sigma^\mu \partial'_\mu = \sigma^\mu \partial_\mu$ ,  $\sigma^\mu \partial'_\mu = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu$ . La densidad de Lagrangiano tratada es invariante si  $A^P(r') = -A(r)$  donde  $\psi_L^P(r') = \psi_D(r)$ ,  $\psi_D^P(r') = \psi_L(r)$ . Actualmente, la densidad de Lagrangiano también retendrá la misma forma si para algún real  $\alpha$  se toma, por ejemplo  $\psi_L^P(r') = e^{i\alpha} \psi_D(r)$ ,  $\psi_D^P(r') = e^{i\alpha} \psi_L(r)$ .

5. **Espinores de Dirac.** Cantidades complejas de dos componentes que transforman bajo una transformación de Lorentz de acuerdo a

$$\begin{aligned}\psi_L'(x') &= M\psi_L(x), \\ \psi_D'(x') &= N\psi_D(x),\end{aligned}\quad (5.25)$$

son llamadas *espinores levógiros* y *espinores dextrógiros*, respectivamente. Los subíndices L y D anticipan esto (M y N son matrices unimodulares  $F^{\mu\nu}$  con las propiedades  $M^\dagger \tilde{\sigma}^\nu M = \tilde{\sigma}^\nu$  y  $N^\dagger \sigma^\nu N = \sigma^\nu$ , relacionadas por  $M^\dagger N = N^\dagger M = I$ ). El campo de cuatro componentes de Dirac es a menudo llamado *espinor de Dirac*.

6. **Interacciones electromagnéticas de los fermiones.** Para describir las interacciones electromagnéticas de fermiones es conveniente introducir matrices  $\gamma^\mu$   $4 \times 4$  definidas por  $\gamma^0 = \beta$ ;  $\gamma^i = \beta\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En la representación quiral

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Escrita con las matrices  $\gamma^\mu$ , la densidad de Lagrangiano (5.21) queda  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$  donde  $\psi$  es la matriz fila  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Con ésto, La ecuación de Dirac toma la forma simétrica  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ . Otra matriz usada es  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ; en representación quiral,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & -0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

A partir de lo anterior se pueden construir las matrices  $\frac{1}{2}(I - \gamma^5)$ ,  $\frac{1}{2}(I + \gamma^5)$ , que son operadores de proyección que dan las partes levógira y dextrógira del espinor de Dirac:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(I - \gamma^5)\psi &= \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2}(I + \gamma^5)\psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.28)$$

7. **Soluciones de espacio libre de la ecuación de Dirac.** Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:59-61) analizan las soluciones de la ecuación de Dirac como sigue a

continuación. Antes se vio que la ecuación de Dirac para una partícula en el espacio libre es equivalente a las ecuaciones acopladas de dos componentes (5.25). Estas ecuaciones tienen soluciones de onda planas de la forma  $\psi_L = u_L e^{i(p \cdot r - Et)}$ ,  $\psi_D = u_D e^{i(p \cdot r - Et)}$  donde  $u_L$  y  $u_D$  son espinores de dos componentes. Como las soluciones de la ecuación de Dirac además satisfacen la ecuación de Klein-Gordon, se debe tener  $E^2 = p^2 + m^2$ .

Se pueden obtener las soluciones en sistema  $K'$  en el cual la partícula está en reposo. Denotando las cantidades en el sistema  $K'$  como primadas se tiene que las soluciones con energía positiva  $E' = m$  son  $\psi'_L = u e^{-im\tau'}$ ,  $\psi'_D = u e^{-im\tau'}$ , donde

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

es un espinor arbitrario de dos componentes. Se adoptó la convención que la dependencia del tiempo de un eigenestado está dada por el factor de fase  $e^{-iEt}$ . En el sistema de referencia  $K'$ , los espinores levógiros y dextrógiros de energía positiva son idénticos. Como consecuencia esta solución es invariante bajo inversión espacial y se dice que tiene paridad positiva. La solución en un sistema  $K$  en el cual el sistema  $K'$  y la partícula se están moviendo con velocidad  $\mathbf{v}$  se obtiene haciendo una traslación de Lorentz. Por simplicidad se toma  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ , a lo largo del eje  $z$  con  $v > 0$ , y se considera el estado con  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$ . En este escenario las transformaciones entre  $K$  y  $K'$  son

$$\begin{aligned} \psi_L &= M^{-1} \psi'_L = \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{pmatrix} e^{-im\tau'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-im\tau'} e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_D &= N^{-1} \psi'_D = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix} e^{-im\tau'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-im\tau'} e^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sustituyendo en estas expresiones  $t' = t \cosh \theta - z \sinh \theta$  y notando que  $m \cosh \theta = \gamma m = E$ ,  $m \sinh \theta = \gamma m v = p$ , donde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  se llega a la ecuación

$$\psi_L = e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_D = e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

El operador *helicidad*, definido por  $\text{helicidad} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  es usado para clasificar los estados de onda. El valor esperado de este operador en un estado dado es una medida del alineamiento del espín intrínseco de la partícula con su dirección de movimiento en este estado. Para  $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ,  $p > 0$ , el operador  $\text{helicidad} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \Sigma_z$ . Entonces el estado dado por las expresiones anteriores para  $\psi_L$  y  $\psi_D$  es un eigenestado del operador *helicidad* con *helicidad* positiva  $1/2$ , el cual se puede escribir como el espinor de Dirac  $\psi_+$ . Se ha insertado el factor  $1/\sqrt{2}$  para hacerlo conforme con la normalización estándar del escalar de Lorentz  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \psi_L^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_L = 1$ . En forma similar, tomando  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  se puede construir  $\psi_-$ , un eigenestado de *helicidad* negativa  $-1/2$ . Las dos expresiones son

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\rho z - \epsilon t)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\rho z - \epsilon t)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix} \quad \rho > 0. \quad (5.32)$$

Un resultado importante es que todas las ondas con energía positiva pueden ser generadas aplicando rotaciones a los estados que se han obtenido. La helicidad de un estado no cambia por una rotación, ya que está definida por un producto escalar. Las generalizaciones para una onda con vector de onda  $\mathbf{p}$  son  $\psi_+ = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \epsilon t)} \mathbf{u}_+(\mathbf{p})$  y  $\psi_- = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \epsilon t)} \mathbf{u}_-(\mathbf{p})$  donde

$$\mathbf{u}_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} |+\rangle \\ e^{\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |-\rangle \\ e^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Los estados de espín de Pauli  $|\pm\rangle$  son aquí los eigenestados de los operadores  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  con eigenvalores  $\pm 1$ . Esta notación fue explicada en la Sección III.

Un estado general de energía positiva puede ser construido como una superposición de ondas planas. En el sistema  $K'$  en el cual la partícula está en reposo, hay además soluciones de energía negativa  $E' = -m$ :  $\psi'_L = \mathbf{v} e^{i\mathbf{m}t'}$ ,  $\psi'_D = -\mathbf{v} e^{i\mathbf{m}t'}$ . En este caso los espinores levógiros y dextrógiros  $\mathbf{v}$  difieren en signo. Entonces la solución de energía negativa cambia signo bajo una inversión espacial y se dice que tiene paridad *negativa*. La misma traslación de Lorentz usada anteriormente da soluciones  $\psi_+$  y  $\psi_-$  con helicidades positiva y negativa, respectivamente, las cuales se pueden escribir como espinores de Dirac similares y las soluciones generalizan a

$$\psi_+ = e^{i(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \epsilon t)} \mathbf{v}_+(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v}_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |-\rangle \\ -e^{\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

$$\psi_- = e^{i(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \epsilon t)} \mathbf{v}_-(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v}_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-\theta/2} |+\rangle \\ e^{\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

En este caso  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  permanecen como eigenestados de  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  como fue definido antes. El invariante de Lorentz  $\bar{\Psi}\Psi$  adquiere un signo menos (en el caso de soluciones de energía negativa,  $\bar{\Psi}\Psi = \psi_L^\dagger \psi_D + \psi_D^\dagger \psi_L = -1$ ).

Soluciones negativas de la ecuación de Dirac a primera vista parecen ser un problema: en teoría cuántica una partícula puede hacer transiciones entre estados; así, todos los estados de Dirac deberían verse como inestables para una transición a energía más baja. Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:61) afirman que la solución de Dirac fue asumir que todos los estados de energía cercanos están ocupados, de tal forma que el principio de exclusión de Pauli prohíbe transiciones hacia ellos.

Un estado de energía negativa no-ocupado o *agujero*, se comportará como una antipartícula de energía positiva, de la misma masa pero momento, espín y carga eléctrica opuestos. Al dejarlo sin llenar, este estado de energía negativa  $\psi_+$  de  $\psi'_L = \mathbf{v} e^{i\mathbf{m}t'}$ ,  $\psi'_D = -\mathbf{v} e^{i\mathbf{m}t'}$  corresponde a una antipartícula

de energía positiva  $E$ , momento  $p$ , y helicidad positiva, ya que el espín del agujero es, además, opuesto al del estado de energía negativa. Una partícula que cae dentro de un estado vacío de energía negativa será visto como la simultánea aniquilación de un par partícula-antipartícula con la emisión de energía electromagnética  $\geq 2mc^2$ .

Conversamente, la excitación de una partícula desde un estado de energía negativa a uno de energía positiva será visto como una producción de par. El mar de fondo uniforme de estados de energía ocupados, con su carga eléctrica infinita asociada, se asume que es no-observable. En cualquier caso, es claramente arbitrario decir que el electrón es considerado la partícula y el positrón la antipartícula, o viceversa.

Dado lo anterior, la interpretación inicial de la ecuación de Dirac presenta problemas. Así se conduce, inevitablemente, a una teoría cuántica de campos en la cual partículas y antipartículas aparecen como los cuanta del campo, de alguna forma en la misma vía que los fotones aparecen como los cuanta del campo electromagnético. Allan Woods y Ted Grant (1995:67) comentan al respecto que:

<<...la respuesta negativa implica una idea contradictoria: energía negativa. Esto parece ser un absurdo desde el punto de vista de la lógica formal. En la medida en que masa y energía son equivalentes, energía negativa implica masa negativa. El propio Dirac estaba inquieto por las implicaciones de su teoría. Se vio obligado a predecir la existencia de partículas que serían idénticas al electrón pero con carga eléctrica positiva, algo de lo que no se había oído hablar previamente.>>

En su libro, Peter Schmöser (1995:29) presenta otra interpretación de estas soluciones de energía negativa, introducida por Von Stükelber y Feynman. Según ellos, una función de onda que es solución de energía negativa puede considerarse tomando la dirección del tiempo hacia atrás y corresponde a una antipartícula con el sentido del tiempo hacia delante. En otras palabras, la emisión (o absorción) de una antipartícula con impulso  $p^\mu$  es equivalente a la emisión o absorción de una partícula con impulso  $-p^\mu$ .

8. El caso de los neutrinos. En el Modelo Estándar, los neutrinos están descritos por la ecuación de Dirac de cero masa, explican Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:62,63), y entonces las ecuaciones de dos componentes (5.32) para  $\psi_L$  y  $\psi_D$  no están acopladas, como no lo están las correspondientes contribuciones a la densidad de Lagrangiano.  $\psi_L$  satisface la ecuación  $i(\partial_0 - \sigma^k \partial_k)\psi_L = 0$ . Ahora (dentro del Modelo Estándar) no puede ser aplicada la técnica previa para obtener una solución: una partícula de masa cero tiene velocidad  $c$  en cada sistema de referencia, así que no hay sistema en reposo. Por eso se buscan directamente soluciones de onda plana como

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i(\rho z - E t)}, \quad (5.36)$$

donde  $\rho > 0$  y  $E = \rho$ . Tomando  $u_1 = 0$  se obtiene la solución. Este es un estado de helicidad negativa. En forma parecida se puede obtener la solución para la ecuación dextrógira,

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\rho z - E t)}, \quad \psi_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\rho z - E t)} \quad (5.37)$$

donde  $\rho > 0$  y  $< 1.8 \times 10^5$ , la cual es un estado de helicidad positiva. Soluciones de energía negativa son

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(-\rho z + E t)}, \quad \psi_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(-\rho z + E t)}, \quad \rho > 0. \quad (5.38)$$

Como 'agujeros' ellos tienen energía positiva y momento  $\rho$  positivo. Además el agujero correspondiente a  $\psi_L$  tiene helicidad positiva, y el correspondiente a  $\psi_D$  tiene helicidad negativa, ya que tanto el momento como el espín de un agujero son opuestos a los del estado de energía vacante. En este caso, la naturaleza parece hacer uso solamente del campo  $\psi_L$ ; los neutrinos tienen helicidad negativa.

Los correspondientes antineutrinos son claramente distinguibles pues tienen helicidad positiva. Anteriormente se vio que bajo inversión espacial  $\psi_L \leftrightarrow \psi_D$ : de aquí, si  $\psi_D$  no interactúa, la Naturaleza no es simétrica con respecto a la operación paridad. Los neutrinos libres son introducidos dentro del Modelo Estándar a través de una densidad de Lagrangiano de la forma  $\mathcal{L}_\nu = i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L$ .

### C. Electrodinámica

La densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$  es invariante bajo la transformación  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$  donde  $\alpha$  es una constante de fase. Estas transformaciones forman un grupo  $U(1)$  y se dice que son globales: las mismas en cada punto del espacio y del tiempo. En cada punto  $x$  del espacio,  $\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$  transforma como un cuatri-vector contravariante y puede ser definido como el campo contravariante  $j^\mu(x) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = (P(x), \mathbf{j}(x))$ . En esta expresión se debe identificar  $P(x) = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \psi^\dagger(\gamma^0)^2\psi = \psi_a^* \psi_a = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2$ . Luego con la condición  $\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0$  toma la forma  $\partial P / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Si  $P(x)$  es interpretado como la probabilidad de densidad asociada con la función de onda  $\psi(x)$  y  $\mathbf{j}(x)$  como la probabilidad de corriente, esta ecuación expresa conservación local de partículas. Aquí la ley de conservación aparece como una consecuencia de la simetría  $U(1)$  de las transformaciones, otro ejemplo de ley de conservación asociada con simetrías del Lagrangiano.

1. Ecuación de Dirac con un campo electromagnético. La ecuación para el Hamiltoniano de una partícula de carga  $q$  en el espacio libre es  $H(\mathbf{p}, q) = E$ . En mecánica clásica, el Hamiltoniano para una partícula que transporta carga  $q$  moviéndose dentro de un campo electromagnético externo especificado por los potenciales electromagnéticos  $(\phi, \mathbf{A})$  es obtenido a partir del Hamiltoniano de la partícula libre por la sustitución  $E \rightarrow E - q\phi$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ , o equivalentemente,  $p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$ , donde  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  es el cuatri-vector energía-momento de la partícula. Con la regla de cuantización  $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$  la sustitución anterior sugiere que la ecuación de Dirac en la presencia de un campo electromagnético debería ser  $\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m \psi = 0$ , y debería haber una correspondiente

sustitución en la densidad de Lagrangiano. Usando la densidad de Lagrangiano para electromagnetismo, ecuación (5.13), y  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ , se obtiene que la densidad de Lagrangiano para el campo de Dirac junto con el campo electromagnético con fuentes de carga-corriente externas  $J^\mu$  es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu. \quad (5.39)$$

El Lagrangiano es todavía invariante bajo la transformación  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$  con  $\alpha$  constante, y esto lleva como antes, a la conservación de partículas  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ,  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . La correspondiente variación de los campos  $A^\mu$  lleva a las ecuaciones de Maxwell con densidad de carga-corriente  $J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu + qj^\mu$ .

En las últimas expresiones para la conservación de partículas y en las ecuaciones de Maxwell,  $j^\mu(x)$  es el número de partículas conservado en la densidad de corriente y  $qj^\mu(x)$  es la carga conservada en la densidad de corriente. Luego, la última expresión para la densidad de Lagrangiano incluye al campo electromagnético producido por la corriente cargada de partículas así como al campo producido por fuentes externas. Haciendo  $q = \text{carga del electrón} = -e$ , y  $m$  la masa del electrón, este Lagrangiano es, después de la cuantización, el Lagrangiano de la Electrodinámica Cuántica.

Ya antes se planteó que el cuatri-potencial  $A_\mu$  no es único: los mismos campos eléctrico y magnético son obtenidos después de una transformación gauge  $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu\chi(x)$  donde  $\chi(x)$  es una función arbitraria del tiempo y del espacio. Si  $\psi(x)$  es una solución de la ecuación de Dirac con el cuatri-potencial  $A_\mu$  la correspondiente solución en el gauge con cuatri-potencial  $A'_\mu$  está dada por  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi}\psi(x)$ . De aquí, la ecuación de Dirac con un campo electromagnético es equivalente a  $[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA'_\mu) - m]\psi' = 0$ . Las dos transformaciones, de  $A_\mu(x)$  y de  $\psi(x)$ , hacen una transformación general gauge local, y entonces la densidad de carga-corriente  $qj^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es invariante bajo la transformación. La fase de un campo de Dirac cargado, por ejemplo el de un electrón, es un artefacto gauge sin significado físico: es una fase que no puede ser medida.

La situación anterior se puede ver desde una diferente perspectiva. Considérese que el Lagrangiano correspondiente es invariante bajo la transformación global  $U(1)$   $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi$  donde  $\alpha$  es constante. Si ahora se requiere que el Lagrangiano sea invariante bajo una transformación similar, pero local,  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi(x)}\psi(x)$  -donde  $\chi(x)$  es una función arbitraria del espacio y del tiempo-, se está forzado a introducir el campo gauge  $A_\mu$ , con la propiedad de transformación  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi$ , lo que se hace para poder cancelar y eliminar los términos que surgen. Bajo este otro punto de vista, el campo electromagnético tratado aparece como una consecuencia de la invarianza del Lagrangiano bajo una

transformación de simetría local. Por otra parte, también en este caso se puede considerar la operación conjugación de carga para reemplazar materia por antimateria. Esto se logra intercambiando el campo de Dirac por su complejo conjugado.

Considérese una solución de energía positiva de la ecuación de campo la cual tiene un factor de fase  $e^{-iEt}$ . Después de la conjugación compleja ésta tiene un factor de fase  $e^{iEt}$ , y con la convención estándar de fase es una solución de energía negativa. En la interpretación del 'agujero', la operación de conjugación compleja no deja  $\mathcal{L}$  invariante: se necesitan manipulaciones adicionales para mostrar la simetría.

Si  $\psi$  es una solución de energía positiva de la ecuación de Dirac para una partícula que transporta carga  $q$ ,  $(\gamma^2 \psi^*)$  es una solución de energía negativa en el campo de carga conjugada  $A_\mu^c = -A_\mu$  introducido anteriormente. Además se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_L &= -i \sigma^2 (\psi_D^c)^*, & \psi_D &= i \sigma^2 (\psi_L^c)^*, \\ \psi_L^\dagger &= i (\psi_D^c)^T \sigma^2, & \psi_D^\dagger &= -i \sigma^2 (\psi_L^c)^T \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

El nuevo Lagrangiano tiene exactamente la misma forma después de la conjugación de carga, dado que los potenciales conjugados de carga están definidos como  $A_\mu^c = -A_\mu$  y que cualquier densidad de carga-corriente  $J_\mu$  externa también cambia de signo.

Para esto también se ha seguido el desarrollo de Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:65-70); además se ha revisado lo que presenta Peter Schmöser (1995:9,223-225) para un electrón en un campo electromagnético y lo contenido en el Apéndice A de su libro en donde trata la ecuación de Lagrange para una partícula en un campo electromagnético.

## 2. Electrodinámica de una carga en campo escalar. La ecuación de Klein-Gordon (5.6)

$-\partial_\mu \partial^\mu \phi(r, t) - m^2 \phi(r, t) = 0$  describe el movimiento de una partícula escalar no cargada.

Siempre siguiendo a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:70,71), sustituyendo  $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$  se obtiene la correspondiente ecuación para una partícula escalar cargada de espín cero en un campo electromagnético,  $[(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2]\phi = 0$ , cuya solución es una función de onda necesariamente compleja o de dos componentes  $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2}$ . Para este caso se tiene la densidad de Lagrangiano  $s = [(i\partial_\mu + qA_\mu)\Phi^*][(i\partial^\mu - qA^\mu)\Phi] - m^2\Phi^*\Phi$ , que es invariante bajo una transformación local gauge  $\Phi \rightarrow e^{-i\alpha}\Phi$ .

Las partículas de espín cero son bosones y los campos  $\Phi$  y  $\Phi^*$  conmutan. Tomando el complejo conjugado de la nueva ecuación de Klein-Gordon se tiene que si  $\Phi(x)$  es una solución para una partícula que lleva una carga  $q$  en un campo externo, entonces  $\Phi^*(x)$  es una solución para una partícula que lleva

carga  $-q$ . Definiendo el campo  $\Phi^c(x) = \Phi^*(x)$  como el conjugado de carga de  $\Phi$ , la densidad de Lagrangiano anterior es invariante bajo conjugación de carga  $\Phi \rightarrow \Phi^c$  si los potenciales conjugados de carga son nuevamente definidos como  $A_\mu^c = -A_\mu$ .

## D. Cuantizando campos: Electrodinámica Cuántica

En cuantización los campos electromagnético y de Dirac se consideran campos de operador actuando sobre los estados de un sistema. La energía total del campo clásico se convierte en el operador Hamiltoniano, el cual determina la dinámica del sistema.

La Electrodinámica Cuántica o QED, que trata la cuantización de estos campos es, como se expresó antes, un componente importante del Modelo Estándar y para abordarlo se considera el campo clásico más simple –el de una partícula escalar masiva– que satisface la ecuación de Klein-Gordon, presentando el tema tal como lo hacen Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:75-77). Una herramienta usual para abordar este tema es el formalismo de operadores de creación y aniquilación.

En la expansión del campo se consideran las amplitudes de onda  $a_k$  y  $a_k^*$  como números complejos ordinarios. Para cuantizar la teoría se interpreta  $a_k$  como un operador de aniquilación y  $a_k^*$  se convierte en el operador de creación  $a_k^\dagger$ , el conjugado Hermítico de  $a_k$ . Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación  $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$ ,  $[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$ ,  $[a_k, a_{k'}] = 0$ . La energía total de campo es ahora el operador Hamiltoniano  $H = \sum_k a_k^\dagger a_k \omega_k = \sum_k N_k \omega_k$  donde  $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$  y se sigue de las relaciones de conmutación que  $N_k = a_k^\dagger a_k$  es el operador de número. Para su tratamiento, como antes, se confinan todas las partículas dentro de un cubo de volumen  $V$  y se usan condiciones de frontera periódicas. Con la definición de Hamiltoniano se pueden descartar contribuciones de ‘punto cero de energía’ y luego hacer la energía del estado de vacío  $|0\rangle$  igual a cero. Los eigenestados de energía excitados del Hamiltoniano pueden ser interpretados como ensambles de partículas con un número entero  $n_k$  de partículas en el estado  $k$ , donde  $n_k$  es el eigenvalor del operador de número  $N_k$ . Las partículas obedecerán la estadística de Bose-Einstein. Estos conceptos y la notación han sido introducidos en la Sección III.

En la radiación gauge, el campo electromagnético en el espacio libre es cuantizado en una forma muy similar al campo de Klein-Gordon. Las amplitudes de onda  $a_{k\alpha}$  y  $a_{k\alpha}^*$ , que aparecen en la expansión para  $A(r, t)$  se convierten en los operadores de aniquilación y creación  $a_{k\alpha}$  y  $a_{k\alpha}^\dagger$ , y la energía total del campo se convierte en el operador Hamiltoniano  $H_{em} = \sum_{k,\alpha} a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} \omega_k$  donde  $\omega_k = |k|$ .

Los operadores  $a_{k\alpha}$  y  $a_{k\alpha}^\dagger$  aniquilan y crean fotones de vector de onda  $k$  y polarización  $\alpha$ , y satisfacen las relaciones de conmutación  $[a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'}$ ,  $[a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}] = 0$ ,  $[a_{k\alpha}^\dagger, a_{k'\alpha'}^\dagger] = 0$ .  $N(k, \alpha) = a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha}$  es el operador de número. Los eigenestados de energía de la radiación del campo corresponden a ensambles de fotones, que, como partículas escalares, obedecen la estadística de Bose-

Einstein. Cuantizando el campo de Dirac de un electrón libre, las amplitudes de onda que aparecen en la expansión para la solución general de la ecuación de Dirac del espacio libre y sus complejos conjugados asimismo se convierten en operadores:  $b_{\mathbf{p}\varepsilon}$  y  $b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger$  aniquilan y crean electrones de momento  $\mathbf{p}$ , helicidad  $\varepsilon$ ;  $d_{\mathbf{p}\varepsilon}$  y  $d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger$  aniquilan y crean positrones de momento  $\mathbf{p}$ , helicidad  $\varepsilon$ . Electrones y positrones son fermiones, y estos operadores obedecen relaciones de anticonmutación. Además, todos los operadores de electrón anticonmutan con todos los operadores de positrón. El operador de número de electrones  $N_e(\mathbf{p}, \varepsilon) = b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\varepsilon}$  y el operador de número de positrones  $N_p(\mathbf{p}, \varepsilon) = d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger d_{\mathbf{p}\varepsilon}$  tienen eigenvalores restringidos a 0 y 1, en acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Electrones y positrones obedecen la estadística de Fermi-Dirac.

Después de la segunda cuantización, desaparecen las dificultades que fueron asociadas con la interpretación de la ecuación de Dirac como una ecuación de onda para una partícula individual. Electrones y positrones están ahora en similar posición y el 'mar' de estados de energía negativa no se necesita más. La energía total del campo es ahora el Hamiltoniano  $H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger) E_{\mathbf{p}}$ . Usando una relación de conmutación y descartando un término de energía constante de punto cero —el cual es negativo para fermiones—, el Hamiltoniano es  $H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger d_{\mathbf{p}\varepsilon}) E_{\mathbf{p}}$ . La energía del estado de vacío es entonces cero, y los estados excitados corresponden a ensambles de electrones y positrones. De igual manera, el momento del campo es ahora el operador momento  $\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger d_{\mathbf{p}\varepsilon}) \mathbf{p}$ . Con este resultado se puede obtener el operador  $\sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}^\dagger)$  que cuenta el número de electrones menos el número de positrones, un número que por lo tanto es constante en electrodinámica cuántica.

## E. La interacción débil

En el Modelo Estándar, un leptón individual puede cambiar solamente a otro de la misma familia, y un leptón y un antileptón de la misma familia pueden solamente ser creados o destruidos juntos. Esto significa que se da conservación del número leptónico (los antileptones contados negativamente) para cada familia por separado. En este caso, al igual que en el anterior, conservación de partículas se sigue de una simetría  $U(1)$  del Lagrangiano. Esto se muestra con el modelo de densidad de Lagrangiano que se trata para la interacción débil,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$  donde, usando espinores de Dirac para los campos de leptón

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} & + \bar{\Psi}_e (\gamma^\mu i \partial_\mu - m_e) \Psi_e + \nabla_e \gamma^\mu i \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_e \\ & + \bar{\Psi}_\mu (\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\mu) \Psi_\mu + \nabla_\mu \gamma^\mu i \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_\mu \\ & + \bar{\Psi}_\tau (\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\tau) \Psi_\tau + \nabla_\tau \gamma^\mu i \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_\tau. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \alpha_\pi [j^\mu \partial_\mu \phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \phi_\pi^\dagger] \quad (5.42)$$

y en términos de los espinores de Dirac, la corriente  $j^\mu$  puede ser escrita como

$$j^\mu = \psi_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v_e + \psi_\mu \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v_\mu + \psi_\tau \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v_\tau. \quad (5.43)$$

La densidad de Lagrangiano (5.42) incorpora el decaimiento de los mesones  $\pi^+$ , con estructura de quarks (ud), y  $\pi^-$  (ud) que casi en un 100% ocurre a través de  $\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$ ,  $\pi^+ \rightarrow \mu + \nu_\mu$ . El campo  $\Phi$  es escalar y complejo, y describe a estos mesones;  $\phi$  es una constante de acoplamiento efectivo real. En sí misma,  $\mathcal{L}_{\text{libre}}$  tiene siete simetrías  $U(1)$ : siete fases independientes sobre los siete campos libres; incluyendo  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  pueden ser reducidas a cuatro, las cuales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \psi_e &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_e} \psi_e, & v_e &\rightarrow e^{i\alpha_e} v_e; \\ \psi_\mu &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_\mu} \psi_\mu, & v_\mu &\rightarrow e^{i\alpha_\mu} v_\mu; \\ \psi_\tau &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_\tau} \psi_\tau, & v_\tau &\rightarrow e^{i\alpha_\tau} v_\tau; \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\Phi_\pi \rightarrow e^{i\beta} \Phi_\pi. \quad (5.45)$$

Los factores de fase  $\alpha_e, \alpha_\mu, \alpha_\tau$  están asociados a las corrientes de leptón conservadas. Si se requiere que  $\mathcal{L}$  sea invariante bajo una simetría gauge local, con  $\beta = \beta(x)$  arbitrariamente dependiente del espacio y del tiempo, nuevamente se llega a la introducción del campo electromagnético  $A^\mu$  considerado en la parte anterior del electromagnetismo.

Habiendo revisado todas las construcciones anteriores y sus simetrías, se pueden ahora considerar los *rompimientos*, de simetría global para encontrar el surgimiento de partículas sin masa llamadas *bosones de Goldstone*, y de simetría local, para obtener el *bosón de Higgs*. Así como en la introducción de este tema, en el siguiente inciso se sigue a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:92-101).

1. **Rompimiento de simetría global y bosones Goldstone.** Una densidad de Lagrangiano posible para un campo escalar complejo  $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2}$  es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi. \quad (5.46)$$

En esta expresión  $(\partial\Phi^\dagger / \partial t)(\partial\Phi / \partial t)$  puede ser considerada como la densidad de energía cinética y  $\nabla\Phi^\dagger \cdot \nabla\Phi + m^2\Phi^\dagger\Phi$  como la densidad de energía potencial. Si  $\Phi$  es constante, independiente del espacio y del tiempo, la única contribución a la energía es  $m^2\Phi^\dagger\Phi$ . Como  $m^2$  es positivo esta será un mínimo cuando  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Así  $\Phi = 0$  corresponde al estado 'vacío'.

Considérese ahora la densidad de Lagrangiano obtenida cambiando el signo en frente de  $m^2$ . Esto sería inestable: la densidad de energía potencial es entonces ilimitada hacia abajo. La estabilidad puede ser restablecida introduciendo un término  $(m^2 / 2\phi_0^2)(\Phi^\dagger\Phi)^2$  donde  $\phi_0^2$  es otro parámetro (real). Por conveniencia se agrega un término constante  $m^2\phi_0^2 / 2$  y entonces  $\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)$  donde, desarrollando el trinomio cuadrado perfecto,

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2 \quad (5.47)$$

La densidad de Lagrangiano (5.46) tiene una simetría 'global'  $U(1)$ :  $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\alpha}\Phi$ .  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}'$ , para cualquier real  $\alpha$ . Equivalentemente, eso se puede expresar con las transformaciones  $\phi_1' = \phi_1 \cos\alpha + \phi_2 \sin\alpha$ ,  $\phi_2' = \phi_2 \cos\alpha - \phi_1 \sin\alpha$ . La transformación rota el estado alrededor de un círculo  $|\Phi|^2 = \text{constante}$  en el espacio de estados  $(\phi_1, \phi_2)$ . Si se recoge la dirección particular en el espacio  $(\phi_1, \phi_2)$  para la cual  $\Phi$  es real, y se toma el estado de vacío como  $(\phi_0, 0)$ , se rompe la simetría  $U(1)$ . Expandiendo alrededor de este estado base  $(\phi_0, 0)$ , se pone  $\Phi = \phi_0 + (1/\sqrt{2})(\chi + i\psi)$ . La densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi$  (5.46) se hace

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[ \sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2} \right]^2 \quad (5.48)$$

Como se ve, desaparece la parte imaginaria y ahora, después del rompimiento de la simetría  $U(1)$  se deben interpretar los nuevos campos. En lugar del campo complejo  $\Phi$ , se tienen dos campos escalares reales acoplados  $\chi$  y  $\psi$ . Se escribe  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$  donde

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi \quad (5.49)$$

representa los campos de partícula libre, y contiene todos los términos en  $\mathcal{L}$  que son cuadráticos en los campos y dominan para campos clásicos y pequeñas oscilaciones. El resto de la densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  corresponde a interacciones entre las partículas libres y a correcciones de orden superior a su movimiento. Hay un término cuadrático  $-m^2\chi^2$ ; así que el campo  $\chi$  corresponde a una partícula escalar de espín cero y masa  $\sqrt{2}m$  (por comparación con la densidad de Lagrangiano invariante de Lorentz). En el caso del campo  $\psi$  no hay término cuadrático: la correspondiente partícula escalar de espín cero es por lo tanto sin masa. Las partículas sin masa que siempre surgen como un resultado de rompimiento de simetría global son llamadas bosones de Goldstone.

2. Rompimiento de simetría local y el bosón de Higgs. Ahora se puede hacer una generalización ulterior y se construye una densidad de Lagrangiano que es invariante bajo una transformación gauge local  $U(1)$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-iq\theta(x)}\Phi$ , donde  $\theta = \theta(x)$  puede ser dependiente del tiempo y del espacio. Esto requiere la introducción de un campo gauge (sin masa)  $A_\mu$  como se hizo al considerar la electrodinámica de un campo escalar cargado: con  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  se toma

$$\mathcal{L} = \left[ \partial_\mu - iqA_\mu \right] \Phi^\dagger \left[ \partial^\mu + iqA^\mu \right] \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger\Phi) \quad (5.50)$$

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2 \quad (5.51)$$

La densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}$  es invariante bajo una transformación local gauge  $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\Phi(x)$ ,  $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$ . Un campo de energía

mínimo es obtenido cuando los campos  $A_\mu$  desvanecen, y  $\Phi$  es constante. Definido por un punto sobre la circunferencia  $|\phi| = \phi_0$ . Cualquier transformación gauge sobre esta configuración de campo es también un mínimo. Nuevamente se tiene una infinidad de estados de vacío. Dado  $\Phi(x)$ , se puede elegir  $\theta(x)$  de tal forma que el campo  $\Phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\Phi(x)$  sea real. Esto rompe la simetría, ya que no se tiene más libertad de hacer transformaciones gauge adicionales. Haciendo  $\Phi(x) = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2}$ , donde  $h(x)$  es real:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - iqA'_\mu)(\phi_0 + h/\sqrt{2})][(\partial^\mu + iqA'^\mu)(\phi_0 + h/\sqrt{2})] - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2\phi_0} \left[ \sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right]^2. \quad (5.52)$$

Por claridad, nuevamente se separa esto en  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ . Dejando caer las primas en el campo gauge, queda

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + q^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu, \quad (5.53)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q^2 A_\mu A^\mu \left( \sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right) - \frac{m^2 h^2}{2\phi_0} \left( \sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right). \quad (5.54)$$

Antes del rompimiento de simetría se tenía un campo escalar complejo  $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ , y un campo vectorial sin masa con dos estados de polarización. En  $\mathcal{L}_{\text{libre}}$  se tiene un escalar individual  $h(x)$  correspondiente a un bosón sin espín de masa  $\sqrt{2}m$ , y un campo vectorial  $A_\mu$  correspondiente a un bosón vectorial de masa  $\sqrt{2}q\phi_0$ , con tres componentes independientes. Este mecanismo para introducir masa dentro de una teoría fue inventado por Higgs y otros en 1964, y la partícula correspondiente al campo  $h(x)$  es llamada un *bosón de Higgs*.

Como una consecuencia del rompimiento de simetría local el campo gauge adquiere una masa, y el bosón de Goldstone sin masa de espín cero que apareció en el caso de rompimiento de simetría global es reemplazado por el estado polarizado longitudinal de este masivo bosón de espín uno. Una presentación clara de este mecanismo de Higgs en formalismo de Lagrangianos es desarrollada por Peter Schümser (1995:153-157).

## F. Campos gauge masivos

Anteriormente se estableció una densidad de Lagrangiano simple invariante de Lorentz a la cual se le requirió además, ser invariante bajo una transformación local  $U(1)$ , lo que llevó a la introducción de un 'campo gauge'  $A_\mu$ . El rompimiento de la simetría local resulta en el apareamiento de un campo vectorial que transporta masa, junto con un campo escalar de Higgs que también lleva masa. La motivación para la introducción de la masa en esta forma es que la teoría cuántica subsecuente puede ser *renormalizada*. Para esto se puede ver a Susan M. Lea y John R. Burke (1999:894)<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>La energía propia de las partículas elementales, aunque ciertamente no es infinita, es enorme. Como es constante, se puede simplemente convenir en ignorarla y trabajar sólo con energías finitas de interacción. La resta de constantes infinitas de propiedades físicas de las partículas es una característica común de las teorías actuales y es básicamente lo que se conoce por *renormalización*.

El siguiente paso, retomando lo que dicen Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:103-111), es aplicar esta idea a un Lagrangiano más complicado que tiene un significado físico importante y conduce a la identificación apropiada de campos con los bosones vectoriales masivos correspondientes  $W^\pm$ ,  $Z$  y con la partícula de Higgs.

La siguiente generalización, básica en el Modelo Estándar, consiste en la construcción de una densidad de Lagrangiano que es invariante bajo una transformación local  $SU(2)$  así como bajo una transformación local  $U(1)$ , introduciendo un campo de dos componentes

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

donde ahora  $\Phi_A = \phi_1 + i\phi_2$  y  $\Phi_B = \phi_3 + i\phi_4$  son ambos campos escalares complejos, dando, en total, cuatro campos reales. Si  $e^{-i\theta(x)}$  es cualquier elemento del grupo  $U(1)$  y  $U$  es cualquier elemento del grupo  $SU(2)$  (ver Sección III), se requiere que la densidad de Lagrangiano sea invariante bajo la transformación  $U(1) \times SU(2)$   $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)}U\Phi$ . Una densidad de Lagrangiano simple que tiene una simetría global  $U(1) \times SU(2)$  es

$$\mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi). \tag{5.56}$$

Si  $V(\Phi^\dagger \Phi) = m^2 \Phi^\dagger \Phi$ , esta densidad de Lagrangiano corresponde a cuatro campos escalares independientes, todos con la misma masa  $m$ .

En el Modelo Estándar, las simetrías globales  $U(1)$  y  $SU(2)$  son promocionadas a simetrías locales. La transformación  $U(1)$  puede ser escrita  $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)}\Phi = \exp(-i\theta(x)\tau^0)\Phi$ , donde en este contexto se escribe  $\tau^0$  para la matriz unitaria

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.57}$$

Para que esto llegue a simetría local, se introduce un campo vectorial gauge  $B_\mu(x)\tau^0$  con la ley de transformación  $B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) + (2/g_1)\partial_\mu\theta(x)$  y se hace el reemplazo  $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - (g_1/2)B_\mu$  como se hizo antes. Aquí la constante  $g_1$  es un parámetro de la teoría, y el factor (2) se escribe por convención.

Cualquier elemento de  $SU(2)$  puede ser escrito en la forma  $U = \exp(-i\alpha^k \tau^k)$  donde las  $\alpha^k$  son tres números reales y los  $\tau^k$  son los tres generadores del grupo  $SU(2)$ . Los  $\tau^k$  son idénticos que las matrices de espín de Pauli:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.58}$$

Para que la simetría global  $SU(2)$  sea construida dentro de una simetría local  $SU(2)$ , con  $U = U(x)$  dependiente de coordenadas de espacio y de tiempo, se debe introducir un campo vectorial gauge  $W_\mu^k(x)$  para cada generador  $\tau^k$ . La ley de transformación para las matrices  $W_\mu(x) = W_\mu^k(x)\tau^k$  es  $W_\mu(x) \rightarrow W'_\mu(x) = U(x)W_\mu(x)U^\dagger(x) + (2i/g_2)(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$ , una generalización de transformaciones anteriores en esta sección. Las matrices

$$W_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

son Hermíticas y tienen traza cero. Estas propiedades son preservadas por la transformación dada.

Una transformación global  $SU(2)$   $W'_\mu = UW_\mu U^\dagger$  corresponde a una rotación de los vectores  $W_\mu^k$  en el espacio tridimensional de 'isospin débil' definido por los generadores  $\tau^k$ . Como último paso, se define  $D_\mu \Phi = [\partial_\mu + (ig_1/2)B_\mu + (ig_2/2)W_\mu]\Phi$ . Si  $\Phi' = e^{-i\theta(x)}U\Phi$ , se puede verificar que  $D'_\mu \Phi' = e^{-i\theta(x)}UD_\mu \Phi$ . La correspondiente densidad de Lagrangiano localmente invariante gauge es

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi). \quad (5.60)$$

La densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_\Phi$  es además invariante bajo transformaciones de Lorentz si se requiere que  $B_\mu$  y  $W_\mu$  transformen como cuatri-vectores covariantes.

1. Los campos gauge. En el caso del campo gauge  $B_\mu$  se define el tensor de intensidad de

campo  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ , y otra vez  $-(1/4)B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$  es la contribución dinámica a la densidad de Lagrangiano. Hay complicaciones adicionales introduciendo los tensores de intensidad de campo para los campos gauge  $W_\mu$ , cuyas raíces están en la naturaleza no-abeliana del grupo  $SU(2)$ . El tensor de intensidad de campo debe ser tomado como

$$W_{\mu\nu} = [\partial_\mu + (ig_2/2)W_\mu]W_\nu - [\partial_\nu + (ig_2/2)W_\nu]W_\mu. \quad (5.61)$$

Bajo una transformación  $SU(2)$  como la considerada  $W_\mu \rightarrow W'_\mu$  se puede mostrar que  $W_{\mu\nu} \rightarrow W'_{\mu\nu} = UW_{\mu\nu}U^\dagger$ . La complicada definición dada para  $W_{\mu\nu}$  es necesaria para conseguir esta última propiedad de transformación. La matriz  $W_{\mu\nu}$  también puede escribirse como  $W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^i \tau^i$  donde

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^1 &= \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_2(W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\nu^2 W_\mu^3), \\ W_{\mu\nu}^2 &= \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_2(W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\nu^3 W_\mu^1), \\ W_{\mu\nu}^3 &= \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^1 W_\mu^2). \end{aligned} \quad (5.62)$$

La densidad de Lagrangiano puede expresarse como

$$\mathcal{L}_{\text{din}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu}. \quad (5.63)$$

Los campos  $w_\mu^1$  y  $w_\mu^2$  están eléctricamente cargados, y es conveniente aquí definir las combinaciones complejas  $w_\mu^+ = (w_\mu^1 - iw_\mu^2) / \sqrt{2}$ ,  $w_\mu^- = (w_\mu^1 + iw_\mu^2) / \sqrt{2}$ . El campo  $w_\mu^-$  es el complejo conjugado del campo  $w_\mu^+$ . Además, se puede definir  $w_{\mu\nu}^+$  según (5.64),  $w_{\mu\nu}^-$  en forma similar y  $w_{\mu\nu}^3$  como (5.65); entonces la densidad de Lagrangiano (5.63) se da por la ecuación (5.66).

$$w_{\mu\nu}^+ = (w_{\mu\nu}^1 - iw_{\mu\nu}^2) / \sqrt{2} = (\partial_\mu + ig_2 w_\mu^3) w_\nu^+ - (\partial_\nu + ig_2 w_\nu^3) w_\mu^+, \quad (5.64)$$

$$w_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu w_\nu^3 - \partial_\nu w_\mu^3 - ig_2 (w_\mu^- w_\nu^+ - w_\nu^- w_\mu^+), \quad (5.65)$$

$$\mathcal{L}_{\text{din}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} w_{\mu\nu}^3 w^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} w_{\mu\nu}^+ w^{+\mu\nu}. \quad (5.66)$$

## 2. Rompimiento de simetría $SU(2)$ . Considérese nuevamente un potencial $V(\Phi^\dagger\Phi)$ dado

por (5.67) donde  $\phi_0$  es un parámetro fijo, el cual es el análogo al usado en el rompimiento de simetría global y bosones Goldstone. Con esta expresión para  $V$ , el estado de vacío del sistema es degenerado en el espacio cuatri-dimensional de los campos escalares.

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2] = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2]. \quad (5.67)$$

Para romper la simetría  $SU(2)$  se tienen a disposición tres parámetros reales  $\alpha^k(x)$ , los cuales especifican un elemento de  $SU(2)$ . Se usa esta libertad para adoptar un gauge en el cual para cualquier configuración de campo  $\Phi_A = 0$  (dos condiciones) y  $\Phi_B$  es real (una condición). El estado base y los estados excitados son de las formas siguientes, con  $h(x)$  real:

$$\Phi_{\text{base}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x) / \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

Una simetría local  $U(1)$  se mantiene: los campos dados por la última expresión no cambian por una transformación de la forma

$$e^{-i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

Tales matrices dan una representación  $2 \times 2$  del grupo  $U(1)$ . Esta simetría residual retornará para ser la simetría  $U(1)$  del electromagnetismo. Ahora, partiendo de la expresión

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^2 h^2 + \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2}\phi_0} + \frac{m^2 h^4}{8\phi_0^2} = V(h) \quad (5.70)$$

y utilizando ecuaciones anteriores, la densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)$  es, en términos de  $h(x)$ :

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^+ W^{+\mu} (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 + \left[ \frac{g_2^2}{4} W_\mu^+ W^{+\mu} - \frac{g_1 g_2}{2} W_\mu^+ B^\mu + \frac{g_1^2}{4} B_\mu B^\mu \right] (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 - V(h), \quad (5.71)$$

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^+ W^{+\mu} (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 - V(h). \quad (5.72)$$

Aquí se puede introducir  $\theta_w$ , el llamado ángulo de Weinberg, con las expresiones

$$\sin \theta_w = \frac{g_1}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}, \quad \cos \theta_w = \frac{g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}, \quad (5.73)$$

y se definen las siguientes ecuaciones que corresponden a una rotación de ejes en el espacio  $(B_\mu, W_\mu^3)$ :

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos \theta_w - B_\mu \sin \theta_w, \quad A_\mu = W_\mu^3 \sin \theta_w + B_\mu \cos \theta_w. \quad (5.74)$$

La rotación puede ser invertida para dar

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_w - Z_\mu \sin \theta_w, \quad W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta_w + Z_\mu \cos \theta_w. \quad (5.75)$$

Se insiste en que la intención en esta Sección, más que desarrollar las derivaciones matemáticas, es llegar a ecuaciones con significado físico. Por esto no se toman en cuenta unos pasos que consisten en sustituciones y manipulaciones en las ecuaciones anteriores, que llevan a

$$B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos \theta_w - Z_{\mu\nu} \sin \theta_w, \quad (5.76)$$

$$W_{\mu\nu}^3 = A_{\mu\nu} \sin \theta_w + Z_{\mu\nu} \cos \theta_w - i g_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+), \quad (5.77)$$

donde  $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Aquí  $A_{\mu\nu}$  es la expresión  $F_{\mu\nu}$  de antes y  $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ .

3. Identificación de campos. Se está ahora en la posibilidad de reorganizar los términos en la

densidad de Lagrangiano total  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\text{din}}$  para revelar su contenido físico. Se puede comenzar considerando la ecuación

$$\mathcal{L}_{\text{din}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \quad (5.78)$$

y ahora se pueden expresar los campos  $B_\mu$  y  $W_\mu^3$  en términos de los campos  $A_\mu$  y  $Z_\mu$  y luego se puede escribir  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  donde

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad (5.79)$$

$$- \frac{1}{2} [(D_\mu W_\nu^+) * -(D_\nu W_\mu^+) *] [D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}] + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu},$$

$$D_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu + i g_2 \sin \theta_w A_\mu) W_\nu^+. \quad (5.80)$$

En la parte  $\mathcal{L}_1$  se puede reconocer la densidad de Lagrangiano para un campo escalar de bosón neutral masivo libre  $h(x)$ , un campo vectorial de bosón masivo neutral libre  $Z_\mu(x)$ , y un par de campos vectoriales de bosón masivo cargado  $W_\mu^+(x)$  y  $W_\mu^-(x)$ , interactuando con el campo electromagnético  $A_\mu(x)$ . La densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_2$  es la suma de los términos de interacción remanentes

$$\mathcal{L}_2 = \left( \frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} h \phi_0 \right) \left( g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right) - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \quad (5.81)$$

$$+ \frac{i g_2}{2} (A_{\mu\nu} \sin \theta_w + Z_{\mu\nu} \cos \theta_w) (W^{-\mu} W^{+\mu} - W^{-\nu} W^{+\nu})$$

$$+ \frac{g_2^2}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu}) - g_2^2 \cos^2 \theta_w (Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W^{+\nu} - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu})$$

$$+ \frac{i g_2}{2} \cos \theta_w [(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-) (D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) - (Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+) ((D^\mu W^{+\nu}) * -(D^\nu W^{+\mu}) *)]$$

El propósito de escribir esta ecuación es mostrar que la mayoría de la simetría  $U(1) \times SU(2)$  con la que se comenzó ha sido perdida en el rompimiento de simetría. En particular, no se ven trazas de la simetría  $SU(2)$  en las interacciones descritas por  $\mathcal{L}_2$ . Sin embargo, es precisamente este complicado set de interacciones el que hace la teoría renormalizable, como ésta sería si la simetría no hubiera sido rota.

Todo el desarrollo anterior se ha seguido con el objetivo de obtener los siguientes resultados: se identifican los tres campos vectoriales  $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$ ,  $Z_\mu$ , con los mediadores de la interacción débil, las partículas  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ . También se identifican los parámetros de masa  $M_W = \phi_0 g_2 / \sqrt{2}$ ,  $M_Z = \phi_0 (g_1^2 + g_2^2)^{1/2} / \sqrt{2}$ , con las masas relacionadas por  $M_W / M_Z = 0.8810 \pm 0.0016$ . Experimentalmente se obtiene que los bosones  $W^\pm$  llevan carga  $\pm e$  y se puede identificar que  $e = g_2 \sin \theta_w = g_1 \cos \theta_w$ . Los campos  $W_\mu^1$ ,  $W_\mu^2$  y  $Z$  tienen expansiones de campo libre similares a la expresión para  $A(r, t)$  obtenidas anteriormente, pero con tres estados de polarización.

Como un campo cuántico,  $W_\mu^+$  destruye bosones  $W^+$  y crea bosones  $W^-$ ;  $W_\mu^-$  destruye bosones  $W^-$  y crea bosones  $W^+$ . Allí permanece el campo escalar de Higgs  $h(x)$ . El valor esperado del estado de vacío  $\phi_0$  del campo de Higgs es  $\phi_0 = \sqrt{2} M_W / g_2 = 180 \text{ GeV}$ . El único parámetro no fijado experimentalmente es la masa  $M_H = \sqrt{2} m$  del bosón de Higgs. Ningún bosón de Higgs ha sido aún identificado experimentalmente, aunque su existencia es, evidentemente, una parte esencial del Modelo Estándar<sup>7</sup>.

Hasta este punto se tiene que los requerimientos de simetría  $U(1)$  y  $SU(2)$ , seguidos por rompimiento de simetría  $SU(2)$  han generado el campo electromagnético, los campos vectoriales de bosones masivos  $W^\pm$  y  $Z$ , y el campo escalar de Higgs. Procede ahora agregar los campos de leptón fermión a estos campos de bosón, para obtener la *teoría electrodébil de Weinberg-Salam*.

## G. Teoría electrodébil de Weinberg-Salam para leptones

Se ha visto como el mecanismo de Higgs da masa a los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ . Para dar masa a los leptones cargados, el electrón, el muón y el tau, ellos también deben acoplarse al campo de Higgs. Se arribará entonces a la teoría unificada de la interacción electrodébil de Weinberg-Salam. Por razones de continuidad se sigue la exposición de Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:112-120), tomando en cuenta la parte electrodébil del Modelo Estándar en el libro de Peter Schmöser (1995:159-176).

<sup>7</sup> En el Laboratorio Europeo de Física de Partículas (CERN) se está construyendo actualmente el Large Hadron Collider (LHC), con los objetivos centrados en encontrar el Higgs. Este será el acelerador de más alta energía que existirá en los próximos años, para ser estrenado en el 2005. La máquina se desarrolla en Europa con un entramado de colaboraciones internacionales que incluye la participación a gran escala de Estados Unidos y con miles de científicos e ingenieros involucrados en el programa.

El paso a dar es acoplar los campos de leptón a los campos gauge de bosón, es decir al campo electromagnético, a los campos  $W^+$  y  $W^-$  y al campo  $Z$ . A bajas energías la teoría debe reproducir la fenomenología de baja energía de la interacción débil; esta consideración y los principios de simetría gauge local  $U(1) \times SU(2)$  determinan los acoplamientos de manera única.

1. Dobletes de leptón. Primero se construirá una densidad de Lagrangiano para campos de leptón que es invariante bajo transformaciones  $U(1)$  y  $SU(2)$ . El espinor de electrón levógiro  $e_L$  y el espinor de neutrino del electrón  $\nu_{eL}$  son puestos juntos en un doblete  $SU(2)$ , como se hizo con los campos de Higgs en la ecuación (5.55),

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Aquí se está nuevamente especializando la notación: anteriormente espinores de dos componentes levógiro y dextrógiro fueron denotados por  $\psi_L$  y  $\psi_D$  respectivamente. Bajo una transformación  $SU(2)$  este doblete transforma en exactamente la misma forma que el doblete de Higgs:  $L \rightarrow L' = UL$ . Como las transformaciones  $SU(2)$  mezclan los dos campos de espinor maquillando el doblete, en el mantenimiento de la invarianza de Lorentz solamente campos con las mismas propiedades de transformación de Lorentz pueden ser combinados juntos dentro de un doblete. No hay evidencia para la existencia de un neutrino dextrógiro, así que el electrón de espinor dextrógiro  $e_D$  no tiene compañero con quien juntarse en un doblete. Se concluye que bajo una transformación  $SU(2)$ ,  $e_D$  es un invariante:  $e_D \rightarrow e'_D = e_D$ . Para ser consistentes con la regla de transformación para  $L$ , todas las derivadas gauge de  $SU(2)$  deben ser de la misma forma,  $\partial_\mu + i(g_2/2)W_\mu$ , donde  $g_2 \sin \theta_W = e$ , como antes. En la fuente se menciona que ésta es una consecuencia de la estructura no-abeliana del grupo  $SU(2)$ . Sin embargo, no hay una restricción similar para  $g'$ , la constante de acoplamiento a  $B_\mu$ , el campo gauge  $U(1)$ . Manteniendo  $g'$  a disposición se puede tomar  $D_\mu L = [\partial_\mu + i(g_2/2)W_\mu + i(g'/2)B_\mu]L$ . Se debe elegir  $g'$  tal que el neutrino es neutral y el electrón tiene carga  $-e$ . Los términos en  $D_\mu L$  que acoplan al campo electromagnético  $A_\mu$  son combinaciones lineales de  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$ . Usando las correspondientes expresiones, los términos en  $A_\mu$  son

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu + \{i(g_2/2)\sin\theta_W + i(g'/2)\cos\theta_W\}A_\mu, & 0 \\ 0, & \partial_\mu + \{-i(g_2/2)\sin\theta_W + i(g'/2)\cos\theta_W\}A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Las derivadas gauge  $\partial_\mu \nu_{eL}$  y  $(\partial_\mu - ieA_\mu)e_L$ , que dejan al neutrino eléctricamente neutral pero imparten carga eléctrica  $-e$  a  $e_L$ , son obtenidas con la elección  $g' \cos \theta_W = -g_2 \sin \theta_W = -e$ . La derivada gauge completa de los campos levógiros es entonces

$$D_\mu L = \begin{pmatrix} \partial_\mu + i(e/\sin 2\theta_W)Z_\mu, & i\{e/\sqrt{2}\sin\theta_W\}W_\mu^+ \\ i\{e/(\sqrt{2}\sin\theta_W)\}W_\mu^-, & \partial_\mu - ieA_\mu - ie \cot(2\theta_W)Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

Con  $g'' = -2g_1$ , y  $g' = -g_1$  se tiene que, bajo una transformación local  $U(1) \times SU(2)$ ,  $L \rightarrow L' = e^{i\alpha(x)}U(x)L$ ,  $e_0 \rightarrow e'_0 = e^{2i\alpha(x)}e_0$ ; las derivadas gauge satisfacen

$$D'_\mu L' = \left[ \partial_\mu + i(g_2/2)W'_\mu + i(g'/2)B'_\mu \right] L' = e^{i\theta} U D_\mu L \quad (5.85)$$

$$D'_\mu e'_0 = (\partial_\mu + i(g''/2)B'_\mu) e'_0 = e^{i\theta} D_\mu e_0, \quad (5.86)$$

donde los campos  $B_\mu$  y  $W_\mu$  transforman como en el caso de los campos gauge masivos. Ahora se puede construir una expresión para la parte dinámica de la densidad de Lagrangiano del electrón y del neutrino del electrón que sea invariante gauge e invariante de Lorentz. Esta es

$$\mathcal{L}_{\text{din}}^e = L^\dagger \sigma^{\mu\nu} i D_\mu L + e_0^\dagger \sigma^{\mu\nu} i D_\mu e_0. \quad (5.87)$$

La invarianza gauge sigue de la construcción de las derivadas gauge, y la invarianza de Lorentz de las propiedades del set de espinores. Las matrices  $\sigma_\mu$  actúan sobre los índices de espinor, mientras que la transformación  $SU(2)$  actúa independientemente sobre las componentes del doblete de campos de espinor.

Además, la interacción con el campo electromagnético ha sido completamente determinada a partir del factor  $D_\mu L$ , que da todas las interacciones con los bosones vectoriales pesados. Finalmente, se debe dar masa a los leptones cargados. Una contribución invariante gauge y de Lorentz a la densidad de Lagrangiano que impartirá masa al electrón pero deja el neutrino sin masa (dentro del Modelo Estándar) es

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^e = -c_e \left[ L^\dagger \Phi \right] e_0 + e_0^\dagger \left( \Phi^\dagger L \right) = -c_e \left[ \nu_L^\dagger \Phi_A + e_L^\dagger \Phi_B \right] e_0 + e_0^\dagger \left( \Phi_A^\dagger \nu_L + \Phi_B^\dagger e_L \right), \quad (5.88)$$

donde  $\Phi$  es el campo de doblete Higgs y  $c_e$  es una constante de acoplamiento sin dimensiones.

Después del rompimiento de simetría se tiene

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^e = -c_e \phi_0 (e_L^\dagger e_0 + e_0^\dagger e_L) - \frac{c_e}{\sqrt{2}} (e_L^\dagger e_0 + e_0^\dagger e_L). \quad (5.89)$$

Comparando esto con la densidad de Lagrangiano de Dirac se identifica  $c_e \phi_0$  con la masa del electrón  $m_e$ .

Introducir masa siguiendo los principios de simetría es introducir una interacción entre el campo del electrón y el campo de Higgs  $h(x)$ . La constante de acoplamiento al campo de Higgs es  $c_e / \sqrt{2} = m_e / \sqrt{2}\phi = 2.01 \times 10^{-6}$ . La densidad total de Lagrangiano  $\mathcal{L}^e$  para el electrón y su neutrino está dada por las ecuaciones anteriores  $\mathcal{L}^e = \mathcal{L}_{\text{din}}^e + \mathcal{L}_{\text{masa}}^e$ . De la densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}^e$  se pueden recoger los términos que corresponden a expresiones obtenidas anteriormente para un neutrino de Dirac sin masa, y un electrón de Dirac de masa  $m_e$  y carga  $-e$  en un campo electromagnético:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^e = \nu_{eL}^\dagger \sigma^{\mu\nu} i (\partial_\mu \nu_{eL}) + e_{eL}^\dagger \sigma^{\mu\nu} i (\partial_\mu - ieA_\mu) e_{eL} + e_{e0}^\dagger \sigma^{\mu\nu} i (\partial_\mu - ieA_\mu) e_{e0} - m_e (e_{eL}^\dagger e_{e0} + e_{e0}^\dagger e_{eL}). \quad (5.90)$$

Las densidades de Lagrangiano  $\mathcal{L}^\mu$  y  $\mathcal{L}^\tau$  para los leptones muon y tau y sus neutrinos difieren de la expresión para  $\mathcal{L}^e$  solamente en sus parámetros de masa y, por ende, en sus acoplamientos al campo de Higgs. La constante de acoplamiento  $g_2$  de la teoría gauge  $SU(2)$  o, equivalentemente, el ángulo de Weinberg  $\theta_w$ , los cuales determinan el acoplamiento a los campos  $W^\pm$  y  $Z$ , debe ser la misma para todos los leptones, una característica de la teoría que es forzada por el grupo  $SU(2)$ , que ya fue presentada como universalidad leptónica.

La densidad de Lagrangiano completa  $\mathcal{L}^{WS}$  de la teoría de Weinberg-Salam es la suma de las contribuciones de leptón y las contribuciones de bosón dadas en la sección anterior:  $\mathcal{L}^{WS} = \mathcal{L}^e + \mathcal{L}^\mu + \mathcal{L}^\tau + \mathcal{L}^{\text{bosones}}$ . La forma de  $\mathcal{L}^{WS}$  ha sido obtenida por consideraciones de simetría: invarianza bajo transformaciones de Lorentz, y bajo transformaciones  $U(1)$  y  $SU(2)$ . Así, bosones y leptones masivos aparecen a través del mecanismo de Higgs de rompimiento de simetría local. Considerando la situación actual, se puede decir que ha sido probado que la teoría es renormalizable, y un gran cuerpo de datos experimentales respaldan esto.

2. Acoplamiento de leptón a  $W^\pm$ . El acoplamiento del electrón y del neutrino del electrón a los campos gauge  $W^+$  y  $W^-$  está dado por los términos apropiados en (5.88) y (5.91), los cuales son

$$\mathcal{L}_{eW} = -(g_2 / \sqrt{2}) \nu_{eL}^\dagger \sigma^\mu e_{eL} W_\mu^+ - (g_2 / \sqrt{2}) e_{eL}^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL} W_\mu^- = -(g_2 / \sqrt{2}) [j_e^{\mu+} W_\mu^+ + j_e^{\mu-} W_\mu^-]. \quad (5.91)$$

Los campos dextrógiros no contribuyen a esta interacción. Así como las corrientes de electrón definidas por  $j_e^{\mu+} = e_{eL}^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL}$ ,  $j_e^{\mu-} = \nu_{eL}^\dagger \sigma^\mu e_{eL}$ , hay similares corrientes de muón y tau, dando una corriente total de leptón  $j^\mu = (e_{eL}^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL} + \mu_L^\dagger \sigma^\mu \nu_{\mu L} + \tau_L^\dagger \sigma^\mu \nu_{\tau L})$ . La densidad de Lagrangiano total de interacción es

$$\mathcal{L}_{lW} = -(g_2 / \sqrt{2}) [j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-]. \quad (5.92)$$

La efectiva densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_{\text{lepton}}$  puede ser obtenida como el límite de baja energía de la teoría de Weinberg-Salam. Como la masa  $M_W$  es muy grande, a bajas energías el término  $M_W^2 W_\mu^- W^{+\mu}$  en (5.79) domina en la contribución de  $W$  a la densidad de Lagrangiano, y

$$\mathcal{L}_W \approx M_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} - (g_2 / \sqrt{2}) [j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-] \quad (5.93)$$

$\mathcal{L}_W$  es equivalente a la efectiva  $\mathcal{L}_{\text{lepton}}$  si se hace la identificación

$$G_F = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_W^2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W}. \quad (5.94)$$

3. Conservación del número leptónico y de carga. La densidad de Lagrangiano de Weinberg-Salam  $\mathcal{L}^{WS}$  tiene también simetrías globales adicionales  $U(1)$  independientes. Es invariante bajo la transformación  $U(1)$   $L_e \rightarrow e^{i\alpha} L_e$ ,  $e_D \rightarrow e^{i\alpha} e_D$  donde  $\alpha$  es una constante de fase. Variando  $\alpha$  de tal forma que  $\alpha \rightarrow \alpha + \delta\alpha(x)$ , con  $\delta\alpha$  dependiente del tiempo y del espacio se obtiene  $\partial_\mu (\nu_{eL}^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL} + e_{eL}^\dagger \sigma^\mu e_{eL}) + \partial_\mu (e_D^\dagger \sigma^\mu e_D) = 0$  o  $\partial_\mu (J_e^\mu) = 0$ , en donde se tienen las dos expresiones  $J_e^0 = \nu_{eL}^\dagger \nu_{eL} + e_{eL}^\dagger e_{eL} + e_D^\dagger e_D$ ,  $J_e^i = \nu_{eL}^\dagger \sigma^i \nu_{eL} + e_{eL}^\dagger \sigma^i e_{eL} + e_D^\dagger \sigma^i e_D$ . Esta ecuación se escribe como  $\partial J_e^0 / \partial t + \nabla \cdot J_e = 0$  y expresa la conservación del número de leptón electrón. Similares transformaciones  $U(1)$  aplicadas a las partes de muón y de tau de  $\mathcal{L}^{WS}$  dan la conservación de número de leptón muón y número de leptón tau. Ninguna violación a estas leyes de conservación ha sido observada.

Como antes, las ecuaciones no-homogéneas de Maxwell pueden ser obtenidas variando  $A_\mu$ . Hay contribuciones a las corrientes eléctricas de los campos cargados  $W^+$ , así como de los leptones cargados. La conservación de carga sigue de las ecuaciones de Maxwell, pero puede ser obtenida directamente a partir de la simetría  $U(1)$  de cada término de la densidad de Lagrangiano de Weinberg-Salam:

$$e_L \rightarrow e^{i\alpha} e_L, e_D \rightarrow e^{i\alpha} e_D, \mu_L \rightarrow e^{i\alpha} \mu_L, \mu_D \rightarrow e^{i\alpha} \mu_D, \tau_L \rightarrow e^{i\alpha} \tau_L, \tau_D \rightarrow e^{i\alpha} \tau_D; \quad (5.95)$$

$$W_\mu^+ \rightarrow e^{-i\alpha} W_\mu^+, W_\mu^- \rightarrow e^{i\alpha} W_\mu^-.$$

4. Simetría  $CP$ . Se ha visto antes que bajo inversión espacial un espinor levógiro  $\psi_L$  se transforma en un espinor dextrógiro, y *viceversa*. El Lagrangiano de Weinberg-Salam no tiene simetría de inversión espacial, ya que solamente las componentes levóginas de las funciones de onda de leptón están acopladas al campo gauge  $SU(2)$   $W_\mu$ . Por otra parte, también ya se ha discutido la operación de conjugación de carga  $\psi_L^c = -i\sigma^2 \psi_D^*$ ,  $\psi_D^c = i\sigma^2 \psi_L^*$ , la cual relaciona soluciones de la ecuación de Dirac para partículas con soluciones para antipartículas. En la teoría de Weinberg-Salam no hay simetría de carga, ya que los neutrinos existen solamente como campos levóginos. El Lagrangiano de Weinberg-Salam exhibe una simetría bajo la operación combinada conjugación de carga y paridad  $CP$ . Esta simetría implica que la física de las partículas descritas en un sistema de coordenadas dextrógiro es la misma que la física de antipartículas descrita en un sistema de coordenadas levógiro. Bajo la operación combinada  $CP$ , los campos de leptón transforman de acuerdo a  $\psi_L^{CP} = -i\sigma^2 \psi_L^*$ ,  $\psi_D^{CP} = i\sigma^2 \psi_D^*$  y las derivadas de los campos son reemplazadas por sus negativas. Se puede demostrar que la densidad de Lagrangiano es invariante bajo estas transformaciones.

5. Términos de masa en la densidad de Lagrangiano. Para preparar la extensión de la teoría a los quarks, se trata ahora una generalización de la densidad de Lagrangiano. El acoplamiento de las tres familias de leptón al campo de Higgs ha sido tomado como

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = -\sum_{i=1}^3 c_i \left[ (L_i^\dagger \Phi) r_i + r_i^\dagger (\Phi^\dagger L_i) \right] \quad (5.96)$$

(ver ecuación 5.88), donde la suma es sobre las tres familias de leptón, y se ha modificado la notación usada antes. Para preservar la simetría  $U(1) \times SU(2)$  se puede considerar un acoplamiento más general, de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{general}} = -\sum \left[ G_{ij} (L_i^\dagger \Phi) r_j + G_{ij}^* r_j^\dagger (\Phi^\dagger L_i) \right], \quad (5.97)$$

con  $G_{ij}$  cualquier matriz  $3 \times 3$  compleja.

Esta forma no tiene diferencia esencial con las otras utilizadas, dado que una matriz compleja arbitraria puede ponerse en forma diagonal con la ayuda de dos matrices unitarias  $U_L$  y  $U_D$ :  $G = U_L C U_D$ , con  $C_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Las matrices  $U_L$  y  $U_D$  son en general únicas, excepto que ambas pueden estar multiplicadas por la izquierda por la misma matriz 'factor de fase'

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}. \quad (5.98)$$

Si se define  $r'_i = U_{0ij}r_j$ ,  $L'_i = U_{Lij}L_j$  se recupera la forma original para el acoplamiento al campo de Higgs. Ya que los términos dinámicos en la densidad de Lagrangiano son de la misma forma después de estas transformaciones unitarias,  $\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{general}}$  es justamente una más complicada expresión de la misma física. Los tres factores de fase  $\exp(i\alpha_k)$  corresponden a las tres simetrías  $U(1)$  que llevan a la conservación de número de electrón, muón y tau.

## H. Interacciones electromagnéticas y débiles de los quarks

En la Sección II se vio que dentro del Modelo Estándar es el color de un quark la fuente de su interacción fuerte. Entonces para extender la teoría anterior a los quarks, primero se consideran sus interacciones electromagnéticas y débiles, sin tomar en cuenta aquí el color. La teoría para los quarks se construye en cercana analogía con la teoría anterior electrodébil para leptones, aunque para los quarks no está tan bien fundamentada experimentalmente como para los leptones, porque los quarks no pueden aislarse a partir de hadrones.

A bajas energías, donde el Modelo tiene que describir decaimientos como  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , o a nivel de quark,  $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ , la densidad de Lagrangiano es oscurecida por las interacciones fuertes. Este decaimiento es mediado por el bosón  $W$ . La comparación con el decaimiento muónico,  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$  el cual es también mediado por el bosón  $W$ , sugiere que los componentes levógiros  $u_L$  y  $d_L$  de los campos de quark deberían ponerse juntos en un doblete  $SU(2)$ ,

$$L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (5.99)$$

donde  $u_D$  y  $d_D$ , como  $e_D$ , no cambian por transformaciones  $SU(2)$ . Esta asignación, en la que no hay libertad en la construcción de la interacción débil, sería correcta si la naturaleza hubiera provisto solamente un tipo de quark up, y solamente un tipo de quark down. Hay solamente una manera de hacer invariante gauge la parte dinámica de la densidad de Lagrangiano.

El acoplamiento del campo  $W_\mu$  es determinado únicamente por la simetría  $SU(2)$  y el acoplamiento al campo  $B_\mu$  es fijado por las cargas eléctricas de los quarks:  $2e/3$  en el quark u,  $e/3$  en el quark d. De aquí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{din}} = & L^\dagger \sigma^\mu i [\partial_\mu + (i g_2 / 2) W_\mu + (i g_1 / 6) B_\mu] L \\ & + u_D^\dagger \sigma^\mu i [\partial_\mu + (2i g_1 / 3) B_\mu] u_D + d_D^\dagger \sigma^\mu i [\partial_\mu - (i g_1 / 3) B_\mu] d_D \end{aligned} \quad (5.100)$$

donde  $g_2 \sin \theta_w = g_1 \cos \theta_w = e$ . Para estar de acuerdo con las leyes de transformación de las páginas 47 y 48 sobre los campos gauge, la transformación  $U(1) \times SU(2)$  de los campos de quark debe ser  $L \rightarrow L' = e^{-i\alpha(x)/3} UL$ ,  $u_D \rightarrow u_D' = e^{4i\alpha(x)/3} u_D$ ,  $d_D \rightarrow d_D' = e^{2i\alpha(x)/3} d_D$ . Sin embargo, el Modelo

Estándar postula tres familias o generaciones de quarks, por la argumentación presentada en la Sección II. Por lo tanto, se introducen *tres* dobletes  $SU(2)$  levógiros:

$$\begin{pmatrix} u_{L1} \\ d_{L1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{L2} \\ d_{L2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{L3} \\ d_{L3} \end{pmatrix}, \quad (5.101)$$

y seis singletes dextrógiros:  $u_{D1}, d_{D1}; u_{D2}, d_{D2}; u_{D3}, d_{D3}$ . Para una notación más compacta se denotan estos por

$$L_k = \begin{pmatrix} u_{Lk} \\ d_{Lk} \end{pmatrix}, u_{Dk}, d_{Dk} \text{ con } k = 1, 2, 3. \quad (5.102)$$

Como con los leptones, siempre siguiendo a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:131-133), se toma la parte dinámica del Lagrangiano de quark como la suma

$$\mathcal{L}_{\text{din}}(\text{quark}) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{L}_{\text{din}}(u_k, d_k). \quad (5.103)$$

### 1. Masas de quarks y matriz de mezclado de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Para

mantener el hecho de que la teoría sea renormalizable se debe guardar la simetría gauge y dar masa a los quarks por acoplamiento del campo de Higgs, como se hizo con la teoría de Weinberg-Salam para leptones, donde se dio masa a los leptones. Para los quarks  $d_k$  la forma más general que preserva la simetría gauge es

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(d) = -\sum [G_{ij}^d (L_i^\dagger \Phi) d_{Dj} + G_{ij}^{d*} d_{Dj}^\dagger (\Phi^\dagger L_i)], \quad (5.104)$$

similar a la discutida para el caso de leptones. Después del rompimiento de la simetría del campo de Higgs  $\Phi$ , esto da el término de masa para los quarks tipo d:  $\mathcal{L}_{\text{masa}}(d) = -\phi_0 \sum [G_{ij}^d L_i^\dagger d_{Dj} + G_{ij}^{d*} d_{Dj}^\dagger L_i]$ . *A priori*,  $G_{ij}^d$  es una matriz arbitraria  $3 \times 3$ . Como se remarcó para el caso de los leptones, tal matriz puede ponerse en una forma diagonal real con la ayuda de dos matrices unitarias, así que se puede escribir  $\phi_0 = G^d = D_L^\dagger m^d D_D$ , donde  $m^d$  es una matriz diagonal real, y  $D_L, D_D$  son matrices unitarias. Si los elementos de la diagonal son distintos, como parece experimentalmente ser el caso,  $D_L, D_D$  son únicas, excepto que ambas pueden ser multiplicadas por la izquierda por la misma matriz de factor de fase como la dada por (5.98).

En la parte electrodébil del Modelo Estándar, los neutrinos fueron tomados como teniendo masa cero. Sin embargo, para los tipos de quark u, los cuales están aquí haciendo dobletes levógiros, se necesita un término de masa. Una expresión invariante  $SU(2)$  que se puede construir a partir de los dobletes  $\Phi$  y  $L_j$  es  $\varepsilon_{ab} \Phi_a L_{jb}$  donde  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 1$ . Entonces se toma

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(u) = -\sum [G_{ij}^u (\varepsilon_{ab} L_{jb}^\dagger \Phi_a^\dagger) u_{Dj} + G_{ij}^{u*} u_{Dj}^\dagger (\varepsilon_{ab} \Phi_a L_{jb})], \quad (5.105)$$

donde  $G_{ij}^u$  es otra matriz compleja  $3 \times 3$ . Con el rompimiento de simetría, esto da el término para la masa de los quark u,  $\mathcal{L}_{\text{masa}}(u) = -\phi_0 \sum [G_{ij}^u L_{Lj}^\dagger u_{Dj} + G_{ij}^{u*} u_{Dj}^\dagger L_{Li}]$  el cual, como se esperaba, es similar al término para la masa de los quark d, y asimismo preserva las simetrías gauge. Este

puede ser llevado a forma real diagonal en una similar manera:  $\phi_0 = G^u = U_L^\dagger m^u U_D$ , donde  $U_L$  y  $U_D$  son matrices unitarias, y  $m^u$  es diagonal. Las matrices  $U_L$  y  $U_D$  pueden ser multiplicadas por la izquierda por una matriz de factor de fase de la misma forma que las consideradas en el caso anterior.

La teoría puede ser mejor descrita en términos de los 'verdaderos' campos de quark, para los cuales las matrices de masa son diagonales, así que esto define los seis campos de quark:

$$\begin{aligned} d'_{Lj} &= D_{Lij} d_{Lj}, & d'_{Dj} &= D_{Dij} d_{Dj}, \\ u'_{Lj} &= U_{Lij} u_{Lj}, & u'_{Dj} &= D_{Dij} d_{Dj}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

La contribución de la masa del quark a  $\mathcal{L}$  se transforma en

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}(\text{quarks}) = -\sum_{i=1}^3 \left[ m_i^d (d'_{Li}{}^\dagger d'_{Di} + d'_{Di}{}^\dagger d'_{Li}) + m_i^u (u'_{Li}{}^\dagger u'_{Di} + u'_{Di}{}^\dagger u'_{Li}) \right]. \quad (5.107)$$

Así, se identifican los espinores de Dirac

$$\begin{pmatrix} u'_{L1} \\ u'_{D1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_{L2} \\ u'_{D2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_{L3} \\ u'_{D3} \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

con los quarks u, c y t, respectivamente, y los espinores de Dirac

$$\begin{pmatrix} d'_{L1} \\ d'_{D1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d'_{L2} \\ d'_{D2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d'_{L3} \\ d'_{D3} \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

con los quarks d, s y b, de tal forma que se puede reescribir la expresión (5.107) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{masa}}(\text{quarks}) &= - \left[ m^d (d_L^\dagger d_D + d_D^\dagger d_L) + m^u (u_L^\dagger u_D + u_D^\dagger u_L) \right] \\ &\quad - \left[ m^s (s_L^\dagger s_D + s_D^\dagger s_L) + m^c (c_L^\dagger c_D + c_D^\dagger c_L) \right] \\ &\quad - \left[ m^b (b_L^\dagger b_D + b_D^\dagger b_L) + m^t (t_L^\dagger t_D + t_D^\dagger t_L) \right] \end{aligned} \quad (5.110)$$

Los términos en esta ecuación corresponden a los seis fermiones de Dirac. Se han quitado las primas, y en adelante  $u_k$  y  $d_k$  para  $k = 1, 2, 3$ , denotarán los verdaderos campos de quark.

En la densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_{\text{din}}$  dada por (5.100) y (5.103), los términos 'diagonales' no mezclan quarks tipo u con tipo d y son invariantes ante transformaciones unitarias. Sin embargo, los términos que surgen de los elementos no diagonales de la matriz  $W_\mu$  mezclan quarks u y quarks d a través de su acoplamiento a los campos de los bosones  $W^\pm$ . Los términos de la diagonal dan  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  y  $\mathcal{L}_{\text{qz}}$ , el primero es el análogo de la expresión (5.90), y  $\mathcal{L}_{\text{qz}}$  es un término paralelo a uno correspondiente para el acoplamiento al bosón  $Z$  en la teoría para leptones. Cabe aclarar que la mayoría de resultados del Modelo Estándar que se relacionan con el bosón  $Z$  se han dejado afuera de este trabajo, ya que en las colisiones protón-antiprotón a 1.8 TeV éste no tiene el papel relevante que si tienen los bosones  $W^+$  y  $W^-$ .

Volviendo al tema, la densidad de Lagrangiano electrodébil completa para los quarks es  $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{qz}} + \mathcal{L}_{\text{qW}} + \mathcal{L}_{\text{qH}}$ . En la parte  $\mathcal{L}_{\text{qW}}$  de la densidad de Lagrangiano, los términos

$$-\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \sum_j \left[ u_{Lj}^\dagger \sigma^\mu d_{Lj} W_\mu^+ + d_{Lj}^\dagger \sigma^\mu u_{Lj} W_\mu^- \right] \quad (5.111)$$

cuando se escribe en función de los 'verdaderos' campos de quark, se transforman en

$$\mathcal{L}_{qW} = - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (u_L^\dagger, c_L^\dagger, t_L^\dagger) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^\mu d_L \\ \partial^\mu s_L \\ \partial^\mu b_L \end{pmatrix} W_\mu^\dagger + \text{conjugado hermitico} \quad (5.112)$$

donde  $\mathbf{V} = U_L D_L^\dagger$ . Como el producto de dos matrices unitarias es unitario,  $\mathbf{V}$  es una matriz unitaria  $3 \times 3$ , pero sus elementos no están determinados dentro de la teoría.

Es en la matriz anterior donde residen otros cuatro parámetros del Modelo Estándar. Una matriz unitaria  $n \times n$  es especificada por  $n^2$  parámetros, así que aparentemente se tienen nueve parámetros para ser medidos experimentalmente. Sin embargo, cinco de estos pueden ser absorbidos dentro de fases no-físicas de los campos de quark, por medio de matrices de factor de fase asociadas con  $D_L$  y  $U_L$ . Hay cinco, en lugar de seis, fases no-físicas ya que solamente diferencias de fase aparecen en  $\mathbf{V}$ . Cuando los factores de fase han sido extraídos, la resultante  $\mathbf{V}^0$ , llamada *matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa -CKM-*, es dependiente de cuatro parámetros físicos. Todos estos pasos transitados para llegar a la matriz CKM se han hecho nuevamente, claro está, siguiendo a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:134,135,166). Para aclarar el significado de la matriz CKM se puede considerar lo que escriben D.E. Groom *et al.*(2000a):

<<En el Modelo Estándar con  $SU(2) \times SU(3)$  como el grupo gauge de las interacciones electrodébiles, tanto a los quarks como a los leptones se les asigna ser dobletes levógiros y singletes dextrógiros. Los eigenestados de masa de quark no son los mismos que los eigenestados débiles, y la matriz que relaciona estas bases fue definida para seis quarks y dada con una parametrización explícita por Kobayashi y Maskawa en 1973.>>

La expresión a que se hace referencia, que también se encuentra en el libro de Peter Schmitzer (1995:99-101), es

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.113)$$

Un resultado remarcable es que se puede mostrar que, si la matriz CKM no puede ser hecha real por una redefinición de las fases de quark, el Modelo Estándar no tiene simetría  $CP$ .

Anteriormente se vio que la teoría electrodébil de Weinberg-Salam es invariante bajo operación  $CP$ . De igual manera,  $CP$  es una simetría de cada término en el Modelo Estándar de las interacciones débiles y electromagnéticas de los quarks, excepto para aquellos términos que dan la interacción entre los quarks y los bosones  $W$ . Lo importante, dicen Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:134-136), es que estos son los términos que envuelve la matriz CKM.

## I. Teoría de las interacciones fuertes: Cromodinámica Cuántica

Ya antes se estableció que los quarks llevan un índice de color, e interactúan con los campos de gluón, los cuales median la interacción fuerte, según Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:145). Al respecto, D.E. Groom *et al.*(2000b) escriben que la Cromodinámica Cuántica o QCD,

<<...la teoría de campos gauge que describe las interacciones fuertes de quarks y gluones coloreados, es uno de los componentes del Modelo Estándar  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Un quark de sabor específico [...] viene en 3 colores; gluones vienen en ocho colores; hadrones son combinaciones singletes de color de quarks, anti-quarks, y gluones...>>.

Sobre esta base se construye la densidad de Lagrangiano que describe las interacciones de los quarks y los gluones. Debido a que QCD sobrevive el rompimiento de simetría, esta puede ser considerada separadamente, y procede abordar exclusivamente la interacción fuerte, ignorando para ello las interacciones electromagnéticas y débiles de los quarks.

Para obtener los propagadores de los quarks *masivos* se introduce un término de masa explícito. Ya que QCD, explica Liniger, es <<ciega al sabor>> (2001:29), no es necesario introducir más que un sabor de quark, es decir QCD de un sabor se puede tratar aquí como genérico para cualquier número de sabores.

A continuación se presentan los principales resultados de la QCD, otra vez parafraseando a Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:145-153), pero también teniendo en cuenta lo expuesto por Peter Schmöser (1995:9,189-203). El lector interesado puede consultar una buena presentación actualizada del modelo de quarks escrita por D.E. Groom *et al.* (2000e), y en D.E. Groom *et al.* (2000b), una exposición de tópicos sobre el estado actual de la Cromodinámica Cuántica.

1. Una teoría local  $SU(3)$ . En QCD se tienen tres campos para cada sabor de quark. Estos son puestos en los llamados *tripletes de color*. Por ejemplo el quark u es asociado con el triplete

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_v \\ u_a \end{pmatrix}, \quad (5.114)$$

donde  $u_r, u_v, u_a$  son espinores de Dirac de cuatro componentes, y los subíndices r, v, a, etiquetan los estados de color (rojo, verde, azul).

Antes de continuar es conveniente mencionar un hecho que muestra la necesidad de introducir el nuevo número cuántico de color para los quarks: la partícula  $\Omega^-$  (sss), que de hecho existe (es un sistema con mínima estabilidad), consiste en tres quarks aparentemente idénticos, lo que parece contradecir el principio de exclusión de Pauli. Al nombrarlos con un color distinto a cada uno, los quarks se hacen distinguibles entre sí y se preserva el principio (Lea y Burke, 1999:1192).

Para comenzar a construir la Cromodinámica Cuántica se postula que la teoría es invariante bajo una transformación local  $SU(3)$   $q \rightarrow q' = Uq$  donde  $q$  es un triplete de quark, y  $U$  es cualquier elemento del grupo  $SU(3)$  dependiente del tiempo y del espacio. Los pasos matemáticos siguen los de la teoría  $SU(2)$  de la interacción débil para leptones: se introduce una matriz  $3 \times 3$  de campo gauge  $G_\mu$ , la cual es la análoga de la matriz de campo  $W_\mu$  de la teoría electrodébil.

Bajo una transformación  $SU(3)$ , se tiene que  $G_\mu \rightarrow G'_\mu = UG_\mu U^\dagger + (i/g)(\partial_\mu U)U^\dagger$ . Definiendo  $D_\mu q = (\partial_\mu + i g G_\mu)q$  se sigue que bajo una transformación local  $SU(3)$ ,  $D'_\mu q' = U D_\mu q$  donde

$D_\mu' q' = (\partial_\mu + i g G_\mu) q'$ . El parámetro  $g$  que aparece en estas ecuaciones es la *constante de acoplamiento fuerte*.  $G_\mu$  es tomado Hermítico y sin traza, como  $W_\mu$  en la teoría electrodébil, y puede ser expresada en términos de las ocho matrices  $\lambda_a$ :

$$G_\mu = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \lambda_a. \quad (5.115)$$

Las  $\lambda_a$  son las matrices de Gell-Mann introducidas en la Sección III para formar la representación de definición del grupo  $SU(3)$ . En la expresión (5.115) los coeficientes  $G_\mu^a(x)$  son ocho campos gauge de gluón independientes y reales; por convención se utiliza el factor  $1/2$ .

La *construcción de Yang-Mills*  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + i g (G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu)$  lleva al resultado que, bajo una transformación  $3 \times 3$  como la dada arriba,  $G_{\mu\nu}' = U G_{\mu\nu} U^\dagger$ . La densidad de Lagrangiano de gluón se convierte en la expresión invariante gauge

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] \quad (5.116)$$

y se puede expandir  $G_{\mu\nu}$  en términos de sus 'componentes'

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a \lambda_a. \quad (5.117)$$

Usando la propiedad que  $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = 2 \delta_{ab}$ , (5.116) se transforma en

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (5.118)$$

Para los quarks, la densidad de Lagrangiano es tomada en la forma de Dirac estándar:

$$\mathcal{L}_{\text{quark}} = \sum_{f=1}^6 \left[ \bar{q}_f i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g G_\mu) q_f - m_f \bar{q}_f q_f \right], \quad (5.119)$$

donde la suma es sobre todos los sabores de quark y  $m_f$  son las masas de quark 'verdaderas' definidas antes. Esta densidad de Lagrangiano de quark  $\mathcal{L}_{\text{quark}}$ , es invariante bajo una transformación  $SU(3)$ .

Como se ve, la notación es compacta: así como la suma explícita sobre sabores, hay sumas sobre índices de color y sumas sobre índices de los espinores de Dirac y sobre las matrices  $\gamma$  de cuatro componentes. La densidad de Lagrangiano total de la interacción fuerte es  $\mathcal{L}_{\text{fuerte}} = \mathcal{L}_{\text{gluon}} + \mathcal{L}_{\text{quark}}$ . Los ocho campos gauge de gluón no tienen términos de masa; no hay acoplamiento directo de los campos de gluón al campo de Higgs, aunque éste es relevante en que da masa a los quarks.

Para los tripletes de los seis quarks se puede obtener  $(i \gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f = 0$ . Para los ocho campos de gluón, la variación de la densidad de Lagrangiano con respecto a los campos  $G_\nu^a$  da  $\partial_\mu G^{a\mu\nu} = j^{a\nu}$  donde

$$j^{a\nu} = g \left[ f_{abc} G_\mu^b G^{c\mu\nu} + \sum_f \bar{q}_f \gamma^\nu (\lambda_a / 2) q_f \right]. \quad (5.120)$$

Aquí  $f_{abc}$  son las constantes de estructura  $SU(3)$  definidas por

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \lambda_a \lambda_b - \lambda_b \lambda_a = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda_c, \quad (5.121)$$

su apariencia se origina en la definición de  $G_{\mu\nu}$ . Como  $G_{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$ , se cumple que  $\partial_\nu j^{a\nu} = 0$ , y se tienen ocho corrientes conservadas. Estas son las corrientes de Noether, y son una consecuencia de la simetría  $SU(3)$  tomada como una simetría global.

Las ecuaciones de campo, y en particular las ecuaciones de campo de gluón, son no-lineales, como las ecuaciones de la teoría electrodébil. En la expresión para  $j^{a\nu}$  se ve que ambos campos de quark y de gluón contribuyen ellos mismos a las corrientes  $j^{a\nu}$  las cuales son las fuentes de los campos de gluón. Los quarks interactúan a través de la mediación de los campos de gluón; los campos de gluón son además auto-interactuantes.

Como los campos de gluón son no masivos se podría anticipar que las fuerzas de color sean de largo rango, lo cual parece inconsistente con el corto rango de la interacción fuerte. Sin embargo, desde la Sección II se dijo que se conoce que los campos están confinados dentro de una escala de longitud de alrededor de  $10^{-15}$  m: ningún quark libre ni 'gluones' libres han sido alguna vez observados.

2. La conservación de los quarks. En adición a la simetría local de color  $SU(3)$  la densidad de Lagrangiano total de la interacción fuerte, tiene seis simetrías globales  $U(1)$ :  $q_f \rightarrow q_f' = e^{i\alpha_f} q_f$ . En el Modelo Estándar éstas permanecen globales, no son elevadas a simetrías gauge locales e implican la conservación del número de quark para cada sabor de quark. De este modo la interacción fuerte no cambia el sabor de quark. Esta es una ley de conservación que ya se mencionó en la Sección III y es un buen ejemplo para analizar el origen de leyes como ésta y las estructuras matemáticas y ecuaciones asociadas.

En realidad estas simetrías no son exactas, ya que la interacción débil, la cual sí cambia el sabor de quark, ha sido ignorada. Incluyendo la interacción débil, y en particular la parte que envuelve la matriz de mezclado de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, las seis simetrías  $U(1)$  se reducen a una. Números de sabores de quark individuales no son conservados, y solamente el número promedio general de quark permanece constante.

## J. Cuestiones pendientes del Modelo Estándar

Al final de su libro, Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:184) plantean los límites y cuestiones pendientes del Modelo Estándar. Sus palabras prácticamente resumen el estado actual de la Física de Partículas y los retos a enfrentar en el futuro:

<<El Modelo Estándar explica con éxito los datos experimentales de la física de partículas obtenidos hasta 1997. Cualquier teoría subsecuente debe, en algún sentido, corresponder al

Modelo en el rango de energías que ha sido explorado hasta ahora. Varias cuestiones permanecen para ser respondidas: por qué existe estructura de grupo interna electrodébil y fuerte  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , con las tres constantes de acoplamiento  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g$ ? Se obtiene el origen de la masa realmente en el campo de Higgs, con sus dos parámetros: la masa de Higgs y el valor esperado del vacío del campo de Higgs? En el sector electrodébil, por qué son las masas de los leptones como son? Hay tres parámetros aquí. En el sector quark diez parámetros más son introducidos: seis masas de quark, y cuatro parámetros en la matriz de Kobayashi-Maskawa. Son todos estos dieciocho parámetros realmente independientes?. Se tiene que probar experimentalmente a altas energías, y con eso a distancias más pequeñas, para hacer progresos en obtener orígenes comunes de lo que ahora son diversos elementos del Modelo Estándar. La tarea es reducir dieciocho parámetros a unos pocos.>>



## VI. DIAGRAMAS DE FEYNMAN

### A. Representación de las interacciones entre partículas con diagramas de Feynman

El físico Richard Feynman ganó el premio Nóbel de Física en 1965, según su biografía oficial de la página de internet de la Fundación Nóbel (2000)<sup>8</sup>. Uno de sus aportes más importantes fue haber ideado una forma gráfica de describir las interacciones entre partículas en la que éstas están representadas por líneas de distinto tipo conectadas por vértices.

En palabras más concretas, un *diagrama de Feynman* es un esquema de las trayectorias de las partículas reales y virtuales que intervienen en una interacción. Las ideas básicas son que las partículas interactúan en los vértices de los diagramas y que cada línea o vértice representa parte de un cálculo. Así, un diagrama de Feynman es un método gráfico de representar una interacción, pero si se aplican las *reglas de Feynman* al diagrama, éste es transformado en una notación matemática precisa, dando los elementos de una matriz que describen la interacción.

Para dibujar los diagramas de Feynman se deben seguir algunas reglas. Naturalmente, una de éstas es que se deben conservar ciertas cantidades que deben ser iguales para las partículas que entran y para las partículas que salen de cada vértice. Considerando a Michael Longo (1973:92) y a Susan M. Lea y John R. Burke (1999:1181), se tiene que en todos los vértices se deben conservar carga, número bariónico y número leptónico. En particular en un vértice fuerte se debe además conservar extrañeza (y paridad  $G$  donde sea apropiado). La extrañeza debe ser conservada en los vértices electromagnéticos, pero no es necesario que se conserve en vértices débiles. Energía y momento, por supuesto, deben ser conservados en todos los procesos y pueden ser formalmente considerados conservados en cada vértice. No obstante, la relación  $m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$  no es válida para partículas intermediarias virtuales (que son el mecanismo por el cual se transmiten las fuerzas), que existen durante un período limitado de tiempo  $\Delta t \approx \hbar / 2E$ , debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

Como uno de los propósitos de este trabajo es mostrar cualitativamente cómo los diagramas de Feynman se usan para representar interacciones entre partículas, en general no se tratan las reglas de Feynman como parte de cálculo alguno. Si se desea hacerlo con cierta profundidad, se puede revisar el libro de Peter Schmutser (1995:35-76). En todo caso, aquí adelante se presentan las ideas esenciales.

La base del método para hacer cálculos con los diagramas de Feynman, siguiendo lo que explica Michael Longo (1973:92-97), es la fórmula de la Mecánica Cuántica conocida como *Regla de Oro Número 2*, que establece relaciones de proporcionalidad entre las razones de transición para una reacción  $a \rightarrow b$  y los productos  $|M_{ab}|^2 \rho(E_f)$ , donde  $M_{ba}$  son los elementos de una matriz y la cantidad  $\rho(E_f)$  es un factor

<sup>8</sup>Richard P. Feynman (1918-1988) nació en New York City. Obtuvo su B. Sc. en el Instituto de Tecnología de Massachusetts en 1939 y su Ph. D. en la Universidad de Princeton en 1942.

cinemático llamado densidad de estados y da el número de estados de energía disponibles por unidad de rango de energía. Físicamente  $M_{ab}$  es una medida de la probabilidad intrínseca de que el estado  $a$  vaya al estado  $b$ . Para los propósitos aquí es suficiente anotar que en general  $|M_{ab}|^2 \approx g^2$ , donde  $g$  es la constante de acoplamiento el tipo de interacción involucrada en el proceso  $a \rightarrow b$ .

El lenguaje de los diagramas de Feynman generaliza este procedimiento a otros procesos. La regla es que para cada vértice en el diagrama, la matriz de elementos contiene el factor  $g$  que es la constante de acoplamiento apropiada para el tipo de reacción (fuerte, electromagnética o débil) que ocurre en el vértice. Si el diagrama contiene dos vértices, el elemento de matriz  $M_{ba}$  incluye un producto de dos constantes de acoplamiento. Adicionalmente, los diagramas de Feynman tienen la propiedad que la dirección de cualquier línea puede ser revertida si la correspondiente partícula es cambiada por su antipartícula. Esto se deriva de la interpretación de Stückelberg-Feynman para las soluciones de energía negativa de la ecuación de Dirac, presentada anteriormente (ver el libro de Schmüser (1995:67)).

Para dibujar los diagramas se tienen varias convenciones: los fermiones se dibujan con líneas rectas y los fotones (y los demás bosones) con líneas onduladas. Algunos ejemplos de diagramas de Feynman tomados de Schmüser (1995:48,94,213) se muestran en el Diagrama 6.1: los procesos de la electrodinámica cuántica que involucran vértices fotón-leptón, (a) creación de un par fermión-antifermión a partir de un fotón y (b) aniquilación de un par fermión-antifermión en un fotón. Además (c) y (d) son esquemas del acoplamiento electrodébil de los quarks  $u$ ,  $d$ , y  $s$  al bosón  $W^-$ , y (e) indica la interacción fuerte entre dos quarks en el primer orden. Nótese que en éste último caso se utiliza una línea de rizos para representar un gluón.

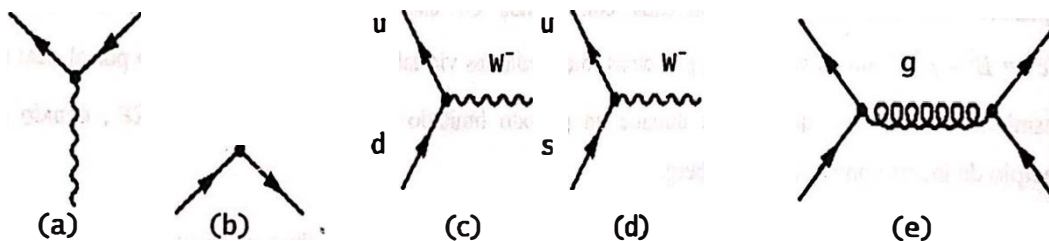


Diagrama 6.1

En la siguiente parte se procede a presentar el mecanismo para dibujar diagramas de Feynman que se ha utilizado para dibujar los ejemplos del Diagrama 6.1 y todos los diagramas relacionados con las colisiones protón-antiprotón que aparecen en este trabajo.

## B. feynMF: dibujando diagramas de Feynman con LaTeX y METAFONT

`feynMF` es un paquete LaTeX para dibujar fácilmente diagramas de Feynman de calidad profesional con METAFONT (o METAPOST); sus características se presentan siguiendo el trabajo de Thorsten Ohl (2001:1-29), las referencias a LaTeX se basan en lo que escribe Antonio Martínez (1995) y en la descripción de METAFONT se cita a Janne Saarela (1995).

El programa feynMF<sup>9</sup> permite obtener diagramas satisfactorios a partir de la estructura del gráfico sin necesidad de alguna intervención manual debido a que éstos están especificados por su topología y el tipo de partículas que conectan los vértices y entonces pueden ser reproducidos a partir de una especificación muy concisa, si el software es capaz de elegir una ruta semiautomáticamente. Una buena herramienta para tal propósito es METAFONT.

1. **METAFONT.** Este programa es parte de cualquier razonable instalación de TeX y tiene gráficas primitivas muy poderosas, lo cual lleva a una salida de alta calidad y permite elegir una ruta automáticamente. Además se obtienen diagramas comunes simples y concisos, expresividad para diagramas complicados, extensibilidad y etiquetas TeX arbitrarias. El aspecto más importante de la arquitectura de feynMF es la existencia de dos distintos modos con diferentes *datatypes* fundamentales: *modo de vértice* que trata con gráficos como estructuras consistentes de vértices y arcos y (casi) no trata con sus locaciones físicas, y *modo inmediato*, que trata con trayectorias de METAFONT y pares de coordenadas y sigue el control completo sobre las locaciones físicas.

METAFONT es un programa que hace fuentes de bitmap para usar por TeX, sus viewers, printer drivers y programas relacionados. Los archivos de origen de METAFONT son usualmente marcados con subfijo '.mf'. El bitmap de salida es un archivo gf (*fente genérica*), que puede ser comprimido en un formato equivalente pk (*packed*) por el programa auxiliar gftopk. En general, a menos que se esté usando el modo *proof*, METAFONT siempre creará un archivo tfm. Como TeX solamente lee los archivos tfm, los *glifos* actuales, o formas de los caracteres, como se guardan en archivos gf o pk, son solamente necesitados por los drivers cuando van a producir una salida de vista. Para correr el programa METAFONT es suficiente llamarlo y darle algunas instrucciones.

2. **Programa LaTeX<sup>10</sup>.** Este es el sistema estándar de creación de textos científicos desde hace muchos años. Está basado en un lenguaje de composición de bajo nivel llamado TeX y fundamentalmente consiste en una colección de "macros" que facilitan el uso de este lenguaje. A diferencia de otros sistemas para procesar textos, no se obtiene el resultado final a medida que se va escribiendo sino que primero se crea un código fuente y luego se procesa para llegar al documento. LaTeX está incluido en las distribuciones de LINUX, pero también existen distribuciones gratis para Windows; aquí se ha usado la denominada MiKTeX.

Los archivos que lee todo sistema LaTeX son simples archivos de texto ASCII a los que se les dota de la extensión '.tex'. Para crear un documento sólo se necesita un editor capaz de producir tales archivos. Una vez terminado se procesa por medio de la línea de comandos. Basta escribir en una ventana MS-DOS la

---

<sup>9</sup>Existen otros paquetes similares, como el paquete feynman de Michael Levine (para LATEX), el paquete axodraw de Jos Vermaseren (especial para Postscript) y el mpic de Thomas Leathrum.

<sup>10</sup>El creador de TeX es Donald E. Knuth por encargo de la *America Mathematical Society* que a principios de los años 70 buscaba un lenguaje para formatear sus artículos llenos de teoremas y fórmulas matemáticas complejas. Luego fueron surgiendo "macros" que agrupaban diferentes instrucciones de TeX.

instrucción: latex "nombre\_de\_archivo.tex". Esto es lo que se ha hecho en este trabajo para la elaboración de los diagramas de Feynman que se presentan, creando un fichero con extensión '.log' donde se guardan los mensajes de salida de LaTeX, y otro con extensión '.dvi' que corresponde al fichero ya procesado. Si el lector desea consultar más información sobre LaTeX, puede leer a David Griffiths y D. Higgs (1997), que escriben un libro para principiantes; Bernardo Cascales *et al.* (2000) y H. Kopka y P.W. Daly (1999).

3. **YAP: archivo para ver los diagramas.** Para visualizar los archivos '.dvi', se ha usado un visor llamado YAP que es el que usa la distribución de MiKTeX y aparece en el menú de MiKTeX como DVI Viewer. Luego los archivos de imagen se han copiado hacia este documento.

4. **Instalación de los programas.** feynMF necesita compartir información entre METAFONT y LaTeX. Por esta razón se necesitan varios archivos auxiliares. Para instalar feynMF se requiere una versión reciente de LaTeX (LaTeX2e de diciembre de 1994 es suficiente). Las características básicas de feynMF están disponibles a través de la interface LaTeX. Todos los programas se pueden obtener gratuitamente de internet en las direcciones indicadas en las referencias, y no es necesario tener conocimiento previo de METAFONT para poder programar en LaTeX y generar los diagramas de Feynman. Un ejemplo se describe en la siguiente parte.

### C. Programa para dibujar diagrama con feynMF

En este trabajo se ha utilizado el modo de vértices de feynMF. El posicionamiento de los *vértices externos* se ha hecho explícitamente para que no colapsen con los alrededores y para tener control total en esto; los *vértices internos* están conectados por arcos o líneas. El dibujo actual no se hace inmediatamente porque las posiciones pueden calcularse solamente cuando todos los vértices son conocidos. Para ajustar decisiones de ruta de feynMF se han utilizado *esqueletos*. Especificando un subgrafo (esqueleto) se ha fijado la locación de un esqueleto como si los otros arcos no estuvieran. Siguiendo las instrucciones de la referencia, se han agregado –cuando ha sido necesario–, más subgrafos cuyas rutas son elegidas con el esqueleto mantenido fijo. Otros efectos similares se han logrado dando a los arcos una tensión desvaneciente. Para ejemplificar todo lo anterior a continuación se describe cómo está estructurado el programa utilizado para dibujar el Diagrama 7.2 que aparece en la siguiente sección.

Las primera parte sirve para abrir el programa en feynMF y para establecer la conexión con los programas LaTeX y METAFONT que se encargarán de procesar y elaborar los dibujos a partir de las distintas formas de líneas y puntos. Los símbolos % que las líneas así marcadas no contienen instrucciones directas, solamente información afuera del programa, y las instrucciones directas dentro del programa LaTeX comienzan con una diagonal invertida simple. Por ejemplo, % Diagrama\_7\_2.tex identifica el archivo de texto que contiene el programa con el que se genera el diagrama correspondiente que aparece en este documento: Diagrama 7.2.

Las siguientes líneas determinan si el programa feynMF automáticamente se conectará con METAFONT para generar las fuentes de los caracteres y los símbolos. En caso contrario el usuario debe

activar **METAFONT** manualmente. El tipo y localización de las fuentes a usar se define con la línea `% Smf \mode:=localfont; input fmfDiagram_7_2'`.

La primera instrucción dentro del programa **LaTeX** es `\usepackage{feynmf}`. Con ésta, de una forma simple, se instruye a **LaTeX** para que use el paquete **feynMF**; con el comando `{feynmp}` se puede usar **METAPOST** en la fuente de **LaTeX**. Ésta es una extensión de **METAFONT** que permite usar caracteres y símbolos en color.

En esta parte también se declara tipo de documento con `\documentclass{article}`. Todas las descripciones que deberían ir a un archivo de **METAFONT** son puestas dentro de un ambiente `fmffile`, es decir con archivos con extensión 'fmf', los cuales toman el nombre del archivo de **METAFONT** como un argumento. Este paso comienza con `\begin{fmffile}{archivo de METAFONT}`, y termina con `\end{fmffile}`. En el caso de este ejemplo para el Diagrama 7.2, la instrucción comienza con `\begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_2}`.

El ambiente `fmfgraph` contiene la descripción de un diagrama de Feynman individual que será ubicado en la locación del ambiente. Argumentos son el ancho y alto del diagrama, en unidades de `\unitlength`. Los comandos `\begin{fmfgraph}{ancho,alto}` y `\end{fmfgraph}` encierran la descripción del diagrama individual. En el ejemplo se ha utilizado una unidad de longitud de 1 mm y las dimensiones del diagrama serán 120 × 90 unidades. El grueso de las líneas está dado por `fmfpen{thick}`. Al usar `\begin{fmfgraph*}` en lugar de `\begin{fmfgraph}` se deja libre la posibilidad de agregar etiquetas o nombres a las partículas, de una vez dentro del programa.

```
% Diagrama_7_2.tex
% $Id: Diagrama_7_2.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_2
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_2
% $ mf \mode:=localfont; input fmfDiagrama_7_2'
% $ latex Diagrama_7_2
\documentclass{article}
\usepackage{feynmf}%%{feynmp}
\unitlength=1mm
\begin{document}
\begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_2}
\begin{fmfgraph*}(120,90)\fmfpen{thick}
```

Las siguientes partes del programa son instrucciones dentro de **LaTeX**. Todos los vértices externos y los principales vértices internos del diagrama se fijan con `fmfleft{}` y `fmfright{}`, siguiendo un orden lógico (i=izquierdo, o=derecho) para facilitar la identificación de cada trazo e incluyendo las posiciones de los quarks y antiquarks que forman parte del protón y del anti-protón, pero que no participan en la interacción. Para estas últimas posiciones se usan como referencia el alto y ancho del diagrama, 'h' y 'w'. Por supuesto, ha sido necesario primero dibujar el Diagrama 7.2 en papel y asignarle un identificador (por ejemplo vértice ip1) a cada uno de los vértices interno y externo. Para fijar la ubicación de los vértices internos se ha utilizado el comando `fmfforce{}`.

```

\fmfleft{ip1,ip2} \fmfforce{0,0}{ip1} \fmfforce{0,h}{ip2}
\fmfright{q1,q2,v10,v11,v11,v12,v12,v122,v123,v131,v13,v132,v133,v14,v15,v160,v16,v161,v162,q3,q4}
\fmfforce{w,0}{q1} \fmfforce{w,0.02h}{q2}
\fmfforce{w,0.98h}{q3} \fmfforce{w,h}{q4}.

```

Luego se dibujan las líneas de fermión correspondientes a un quark o antiquark constituyentes del protón y del antiprotón en dirección de la colisión, esto con el comando `\fmf{fermion}`. Además se fijan las posiciones donde se dibujarán el protón y el antiprotón y se les da forma con `\fmfblob`:

```

\fmf{fermion}{ip1,vp1} \fmf{fermion}{ip2,vp2}
\fmfforce{0.34w,0.10h}{vp1} \fmfforce{0.34w,0.90h}{vp2}
\fmfblob{.05w}{vp1} \fmfblob{.05w}{vp2}.

```

Para ilustrar que el protón y antiprotón son partículas compuestas de tres quarks o antiquarks se dibujan dos fermiones paralelos a cada uno de los dos fermiones dibujados anteriormente, usando instrucciones de “corrimento”:

```

\fmfi{plain}{vpath(_ip1,_vp1) shifted (thick*(0,2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip1,_vp1) shifted (thick*(0,-2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip2,_vp2) shifted (thick*(0,2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip2,_vp2) shifted (thick*(0,-2))}.

```

Los quarks que no participan en la colisión se dibujan como fermiones hacia fuera desde el protón y el anti-protón, y el quark y antiquark que interactúan como fermiones dirigidos hacia el vértice de encuentro  $vq$ , cuya posición también se fija con `\fmfforce`.

```

\fmf{fermion}{vp1,q1} \fmf{fermion}{vp1,q2}
\fmf{fermion}{vp2,q3} \fmf{fermion}{vp2,q4}
\fmf{fermion}{vp1,vq} \fmf{fermion}{vp2,vq}
\fmfforce{0.42w,0.5h}{vq}.

```

Una parte importante del programa es la que se encarga de dibujar un gluón para representar la interacción fuerte mediante la cual el quark y antiquark provenientes del protón y anti-protón se convierten en el par de quarks  $t\bar{t}$ . Esto se hace con `\fmf{gluon}`; los puntos que representan vértices en todo el programa se dibujan con `\fmfdot`,

```

\fmf{gluon}{vq,o1}
\fmfdot{vq,o1}.

```

El siguiente bloque de instrucciones genera la parte del diagrama correspondiente al decaimiento del quark anti-top hacia un bosón  $W^-$  y un antiquark  $\bar{b}$ . Como se verá más adelante, a su vez el bosón  $W^-$  decae en un quark  $d$  y un antiquark  $\bar{u}$  y estos al final se convierten en jets de hadrones, al igual que el antiquark  $\bar{b}$ . En este diagrama estos jets se simbolizan con varias líneas de fermión saliendo hacia los vértices externos. Estos decaimientos aparecen en la ramificación hacia abajo en el diagrama:

```

\fmfforce{0.60w,0.5h}{o1}
\fmf{fermion}{o1,vq1} \fmf{fermion}{o1,vq2}
\fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1} \fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2}
\fmf{boson}{vq1,vq4}
\fmfforce{0.80w,0.30h}{vq4}
\fmf{fermion}{vq4,vq8} \fmf{fermion}{vq4,vq9}
\fmfforce{0.90w,0.25h}{vq6} \fmfforce{0.90w,0.35h}{vq9}

```

```

\fmf{plain}{vq8,v12} \fmf{plain}{vq9,v13}
\fmfforce{w,0.20h}{v12} \fmfforce{w,0.40h}{v13}
\fmf{plain}{vq8,v121} \fmf{plain}{vq8,v122}
\fmf{plain}{vq8,v123}
\fmfforce{w,0.18h}{v121} \fmfforce{w,0.22h}{v122}
\fmfforce{w,0.24h}{v123}
\fmf{plain}{vq9,v131} \fmf{plain}{vq9,v132}
\fmf{plain}{vq9,v133}
\fmfforce{w,0.38h}{v131} \fmfforce{w,0.42h}{v132}
\fmfforce{w,0.45h}{v133}
\fmf{fermion}{vq1,vq3}
\fmfforce{0.80w,0.20h}{vq3}
\fmf{plain}{vq3,vq7}
\fmfforce{0.90w,0.15h}{vq7}
\fmf{plain}{vq7,v110} \fmf{plain}{vq7,v111}.
\fmf{plain}{vq7,v11} \fmf{plain}{vq7,v112}
\fmfforce{w,0.10h}{v11}
\fmfforce{w,0.07h}{v110} \fmfforce{w,0.09h}{v111}
\fmfforce{w,0.12h}{v112}.

```

La ramificación hacia arriba en el diagrama corresponde al decaimiento del quark top hacia un bosón  $W^+$  y un quark b. En este caso el bosón  $W^+$  decae en un positrón y un neutrino de electrón, y el quark b termina como otro jet de hadrones;

```

\fmf{boson}{vq2,vq5}
\fmfforce{0.80w,0.70h}{vq5}
\fmf{fermion}{vq5,v14} \fmf{fermion}{vq5,v15}
\fmfforce{w,0.60h}{v14} \fmfforce{w,0.80h}{v15}
\fmf{fermion}{vq2,vq6}
\fmfforce{0.80w,0.80h}{vq6}
\fmf{plain}{vq6,vq10}
\fmfforce{0.90w,0.85h}{vq10}
\fmf{plain}{vq10,v160}
\fmf{plain}{vq10,v16}
\fmf{plain}{vq10,v161} \fmf{plain}{vq10,v162}
\fmfforce{w,0.85h}{v160} \fmfforce{w,0.87h}{v161}
\fmfforce{w,0.88h}{v16} \fmfforce{w,0.90h}{v162}
\fmfdot{vq1,vq2,vq3,vq4,vq5,vq6,vq7,vq8,vq9,vq10}.

```

Por último, el programa cierra los archivos y genera el archivo de imagen con terminación '.dvi' que se puede abrir inmediatamente con el visor YAP;

```

\end{fmfgraph*}
\end{fmffile}
\end{document}.

```

Para poner en marcha el programa se deben tener instalados METAFONT, LaTeX (MiKTeX), el visor YAP de DVI Viewer y -por supuesto, feynMF-. El programa debe estar en un documento con terminación '.tex' ubicado en donde está el paquete feynMF. Para correrlo se ingresa a una ventanilla de DOS en Windows y, ubicándose en el directorio feynMF, se escribe 'latex Diagrama\_7\_2' y se obtiene el archivo de imagen como salida. Para incorporar este Diagrama 7.2 y los otros a este trabajo, cuyos programas generadores se presentan en el Apéndice, los archivos '.dvi' se han abierto con un programa para tratar imágenes y se han copiado como tales al documento.



## VII. COLISIONES PROTÓN-ANTIPROTÓN A 1.8 TeV: PRODUCCIÓN Y DECAIMIENTO DEL QUARK TOP

El Modelo Estándar establece que los protones y antiprotones –en su calidad de bariones-, están esencialmente hechos de tres quarks (o antiquarks), así como por gluones interactuando con los quarks y antiquarks y entre sí, funcionando como pegamento para mantener juntos los quarks por medio de la interacción fuerte entre cargas de color.

Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:209) explican que en el modelo de *partones*, introducido por Feynman en 1969, cada protón (o antiprotón) es visto como un sistema de sub-partículas llamadas partones. Estos son los quarks, antiquarks y gluones. Los quarks y antiquarks son los partones que transportan carga eléctrica.

El modelo de partones es interesante en que los quarks y antiquarks dentro de un protón o antiprotón se comportan aparentemente como partículas casi libres, resultado que se obtiene al analizar las secciones transversales de las colisiones porque cada protón o antiprotón se puede ver –y se comporta de hecho-, como un haz de partones. Así, se puede introducir la terminología de “quarks de valencia” para referirse a los tres quarks que estructuran un protón ( $uud$ ) o un antiprotón ( $u\bar{u}\bar{d}$ ), por ejemplo, y al estudiar una colisión de una partícula de éstas con otra, se pueden ignorar pares quark-antiquark que son generados por el campo de gluón. Para el enfoque cualitativo adoptado en este trabajo, este modelo de partones y el concepto de quarks y antiquarks de valencia es muy apropiado, pues permite visualizar en forma muy clara un esquema de las interacciones entre quarks y antiquarks, sin necesidad de mayor abstracción para tomar en cuenta los campos de gluón. Con estas simplificaciones los diagramas de Feynman adquieren más significado y ayudan más a visualizar las colisiones en este nivel dentro del Modelo Estándar.

El propósito central de este trabajo es analizar lo que ocurre cuando un protón y un antiprotón colisionan de frente con suficiente energía para ‘partirse’ en sus partones –quarks, antiquarks y gluones- constituyentes, generando toda una variedad de partículas elementales, incluyendo al recientemente descubierto quark top. Una idea de la complejidad de esta tarea es la siguiente cita que aparece en la referencia de Susan M. Lea y John R. Burke (1999:1180):

<<Alguna vez Richard Feynman aseveró que dedicarse a la Física de Partículas es como estudiar relojes suizos haciéndolos chocar entre sí, y buscar las piezas rotas que salen despedidas.>>

A pesar que la simetría de color juega un papel tan importante en la teoría de las interacciones fuertes, escriben Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:148,149), ésta no es evidente en partículas como los bariones, y “desde afuera” se percibe a los protones y a los antiprotones como partículas sin color, sin que sea evidente que están hechas de quarks, antiquarks y gluones. Según la misma referencia, el Modelo Estándar explica esta situación si se denota por  $|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\rangle$  un estado de tres quarks en el cual el quark 1 está en el estado de color  $\bar{i}$ , el quark 2 está en estado de color  $\bar{j}$ , y el quark 3 está en estado de color  $\bar{k}$  y se toman los

índices de color como los números 1, 2, 3. Es necesario además suprimir todos los otros aspectos de los quarks (posición, espín, sabor).

El principio de Pauli requiere que los estados de barión sean antisimétricos en el intercambio de índices de color. La única combinación antisimétrica de estados de color que se puede construir es  $|\text{estado}\rangle = (1/\sqrt{6})\varepsilon_{ijk}|i, j, k\rangle$ , donde  $\varepsilon_{ijk}$  es definido por  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = 1$ , y  $\varepsilon_{ijk} = 0$  si cualquiera de  $i, j, k$  son el mismo;  $1/\sqrt{6}$  es un factor de normalización. Para analizar cómo se transforma este estado bajo una transformación de color  $SU(3)$ , se restringe la discusión a una transformación global (independiente del espacio y del tiempo) ya que un barión es un objeto extendido en el espacio.

En seguida se consideran los campos de quark como siendo transformados por  $q \rightarrow q' = Uq$ . En la teoría cuántica de campos, estos campos destruyen quarks y crean antiquarks. Bajo esta transformación el estado de barión dado transformará como  $|\text{estado}\rangle \rightarrow |\text{estado}'\rangle = (1/\sqrt{6})|a, b, c\rangle U_{ai} * U_{bj} * U_{ck} * \varepsilon_{ijk}$ . Pero debido a que el determinante de una matriz  $SU(3)$  es 1, se tiene que se cumple la expresión  $\varepsilon_{ijk} U_{ai} * U_{bj} * U_{ck} * \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{abc} \det U^* = \varepsilon_{abc}$ . Entonces se obtiene el importante resultado que bajo una transformación  $SU(3)$ ,  $|\text{estado}'\rangle = |\text{estado}\rangle$ : la transformación del estado es una trivial multiplicación por la unidad; el estado se dice que es un *singlete de color*.

Lo anterior significa que en el modelo de quark las transformaciones de color no tienen efecto en las partículas observadas: la simetría  $SU(3)$  está bien oculta por la Naturaleza, las partículas están blindadas a la transformación de la simetría de color. Adicionalmente, a cortas distancias, menores que alrededor de 0.2 fermis, ambas, la densidad de Lagrangiano de gluón  $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$  y la densidad de Lagrangiano total de QCD muestran otra importante propiedad, conocida como *libertad asintótica*: la constante de acoplamiento de la interacción fuerte *efectiva* se vuelve muy pequeña a distancias cortas y los quarks y los gluones pueden ser considerados como aproximadamente libres. De manera que, si se hacen chocar dos bariones con la suficiente energía para que sus partículas constituyentes se acerquen suficientemente, éstas pueden interactuar directamente. Así, por ejemplo, un quark de un protón puede interactuar con un antiquark de un antiprotón dando como resultado otras partículas, dependiendo del nivel energético de la colisión.

Debido entonces a la libertad asintótica, el análisis de las colisiones  $p\bar{p}$  se facilita porque se puede enfocar en sólo uno de los tres quarks constituyentes del protón y uno de los tres antiquarks constituyentes del antiprotón, ignorando los demás. Para que ocurra lo que interesa aquí, es decir la producción del quark top, afirma que se requieren colisiones  $p\bar{p}$  de muy alta energía.

En estas colisiones  $p\bar{p}$ , quarks top pueden ser creados vía dos mecanismos de producción independientes. El modo primario, producción por interacción fuerte de par  $t\bar{t}$  a partir de un vértice  $gt\bar{t}$ , fue usado por las colaboraciones DØ y CDF para establecer la existencia del quark top en marzo de 1995.

Entre 1992 y 1996 el colisionador Tevatrón operó a  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV. Lo dominante a esta energía del centro de masa es la producción de pares  $t\bar{t}$  a partir de los procesos QCD  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  y  $gg \rightarrow t\bar{t}$  con un 90% de contribución de la aniquilación  $q\bar{q}$ . Esta información es basada en los artículos de D.E. Groom *et al.* (2000:1-8), A.P. Heinson, A.S. Belyaev y E.D. Boos (1997), Chris Quigg (1995:20-24), y en la tesis de Hoite Tolsma (1996).

Según las mismas referencias, el segundo modo es producción electrodébil de un quark o un antiquark top individual a partir de un vértice  $Wtb$ : un solo top puede ser producido junto con un quark antibottom por medio de interacción débil en el proceso de colisión quark ligero-quark pesado:  $ud \rightarrow W^+ \text{ virtual} \rightarrow t\bar{b}$ . Otra pequeña contribución se puede esperar del proceso  $q\bar{q} \rightarrow q' t\bar{b}$ , también mediado por el intercambio de un bosón  $W$  virtual y llamado "fusión  $W$ -gluón".

El Modelo Estándar según D.E. Groom *et al.* (2000:1-3), establece que la razón de ramificación del proceso  $t \rightarrow Wb$  es unitaria, por lo que se espera que el decaimiento del quark top sea dominado por este mecanismo. En el decaimiento del top los estados finales  $Wb$  y  $Wd$  se espera que sean suprimidos en relación con  $Wb$  porque el cuadrado de los elementos  $V_{ts}$  y  $V_{td}$  de la matriz CKM -cuyos valores pueden ser estimados asumiendo que esta matriz es unitaria-, son menores que 0.043 y 0.014, respectivamente. Los estados finales de quarks pueden emitir radiación y desembocan en chorros de hadrones. Los casos típicos para los procesos que llevan a la producción de par son los referidos como canales de todos-chorros, leptón+chorros y dileptón. El acoplamiento de los bosones  $W^+$  a los campos de quark está dado por la densidad de Lagrangiano  $\mathcal{L}_{qW}$ , y depende de los elementos  $V_{ij}$  de la matriz CKM. Así lo indican Noel Cottingham y D.A. Greenwood (1998:143), pero agregan que no hay datos que resuelvan para chorros de quark individual. La presentación de las interacciones que aparece a continuación parte de la colisión de un quark con un antiquark de un protón y de un antiprotón respectivamente y llega hasta la formación de chorros. Se presenta un ejemplo de uno de éstos para hacer énfasis en que es a partir de la detección de partículas en los chorros que se hacen las inferencias para establecer la producción de los quarks top o antitop. Seguidamente se analizan más en detalle todos estos procesos.

## A. Producción de par top-antitop

En el Fermilab el proceso de hacer colisiones protón-antiprotón puede ser sumariado como sigue, reproduciendo a A. Nieves, D. Acosta y D. Tsybychev (2000:1,2):

<<...se estrellan de golpe protones de alta energía (núcleos de átomos de Hidrógeno) en un blanco; uno de los productos de estas colisiones es el antiprotón. Cuando suficiente número de antiprotones han sido acumulados, se inyectan en el Anillo Principal del complejo. Allí ambos, protones y antiprotones, pueden ser acelerados a energías de 120 billones de electrón volts (GeV); luego son inyectados en el Tevatrón, el cual es otro acelerador en forma de anillo que puede acelerar partículas a una energía de 1 TeV (1000GeV). Por lo tanto, el experimento consiste de dos diferentes haces de partículas ( $p$  y  $\bar{p}$ ) que colisionan en ciertos puntos.>>

Una ilustración de tal colisión utilizando diagramas de Feynman puede verse en el Diagrama 7.1 donde se muestra la interacción entre el protón y el antiprotón con sus quarks constituyentes y se puede ver la simbología que se usa para identificar cada parte de los diagramas de Feynman.

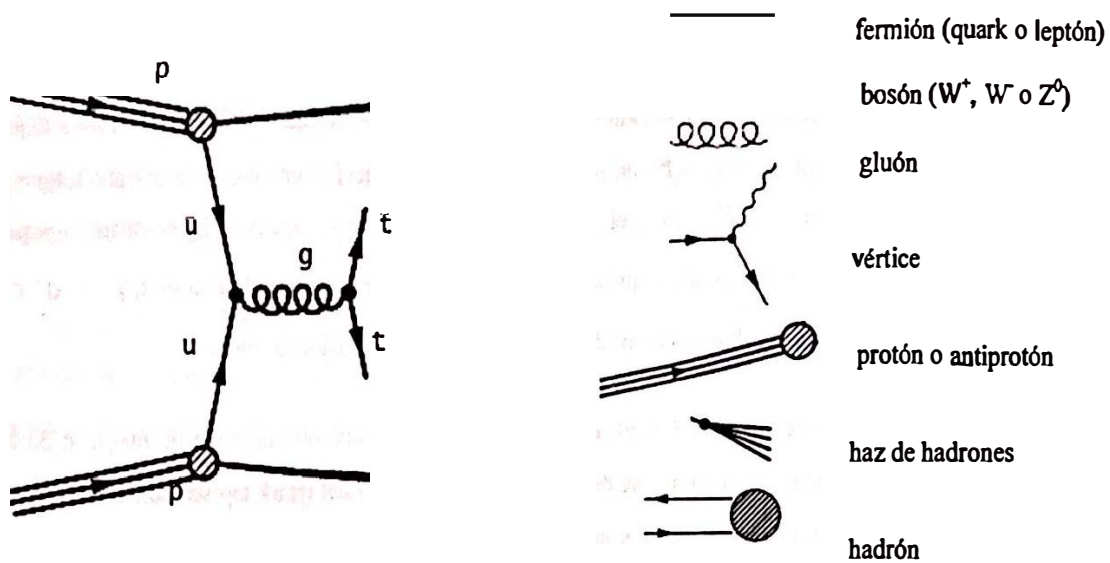


Diagrama 7.1

Concretamente, en el Tevatrón han sido producidos quarks top colisionando protones de 900 GeV con antiprotones también de 900 GeV ( $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$ ). Hoite Tolsma (1996) y Chris Quigg (1995:20-24) coinciden en que hay mucha dificultad para producir quarks top: solamente una interacción en 10 billones da un par  $t\bar{t}$ . La detección de estas partículas se hace por medio de un mecanismo más bien complicado.

Un quark (perteneciente a un protón) y un antiquark (perteneciente a un antiprotón), pueden aniquilarse para producir un quark top y un antiquark top, los cuales decaen luego hacia otras partículas. D.E. Groom *et al.* (2000:1-8), Chris Quigg (1995:20-24), y Hoite Tolsma (1996) describen el proceso como sigue: Un quark de un protón y un antiquark de un antiprotón se precipitan uno al encuentro del otro. Los quarks colisionan y se aniquilan en gluones virtuales. De la nube de gluones emergen un quark top y un antiquark top. Los quarks comienzan a separarse, estirando el campo de fuerza de color (campo de gluones) entre ambos. Antes de que el quark top y el antiquark top se hayan separado mucho, ambos decaen hacia un quark b y un antiquark  $\bar{b}$  respectivamente, con la emisión de partículas portadoras de fuerza W. El nuevo quark b y el antiquark  $\bar{b}$  son repelidos por los mediadores W. Como se muestra en el Diagrama 7.2, los dos bosones W subsecuentemente decaen cada uno hacia un leptón y un neutrino, o hacia un quark y antiquark, mientras los quarks b se hadronizan hacia chorros.

Con información de D.E. Groom *et al.* (2000:1-8), Chris Quigg (1995:20-24) se puede reconstruir una de las posibilidades de la cadena de interacciones y decaimientos que se desencadenan: un electrón e y un

antineutrino  $\nu_e$  emergen del bosón virtual  $W^-$ , y un quark  $u$  y un antiquark  $\bar{d}$  emergen del bosón virtual  $W^+$ . El quark  $b$  y antiquark  $\bar{b}$ , el electrón, el antineutrino, el quark  $u$  y el antiquark  $\bar{d}$  se alejan unos de otros. Se ha ignorado el campo de fuerza de color, que se desarrolla a medida que el quark  $b$  y el antiquark  $\bar{b}$  se alejan. El quark  $b$  emerge como un antimesón  $B$  neutro, se hadroniza y decae en un chorro. El antiquark  $\bar{b}$  emerge como un mesón  $B$  neutro que se hadroniza y decae hacia otro chorro. El quark  $u$  y el antiquark  $\bar{d}$  también se hadronizan y cada uno decae hacia otro chorro. No se puede decir cuál de los chorros corresponde al quark  $u$  y cuál al antiquark  $\bar{d}$ . Esta posibilidad se resume en el Cuadro 7.1 y se puede visualizar en el Diagrama 7.2.

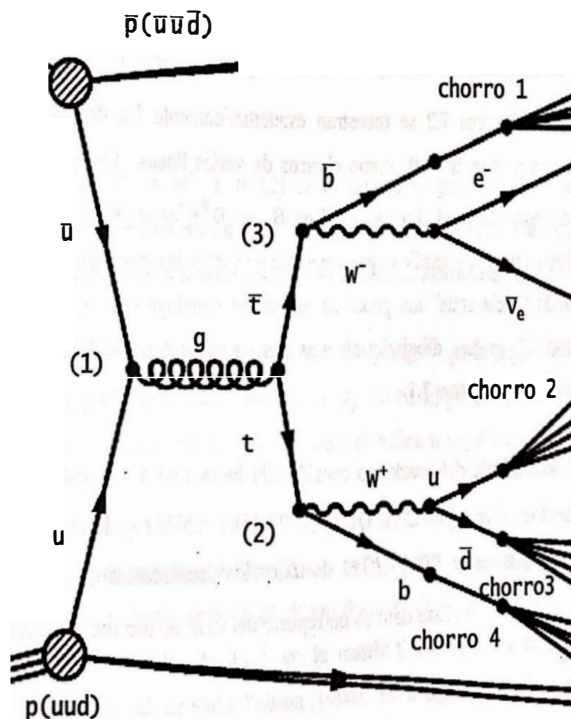
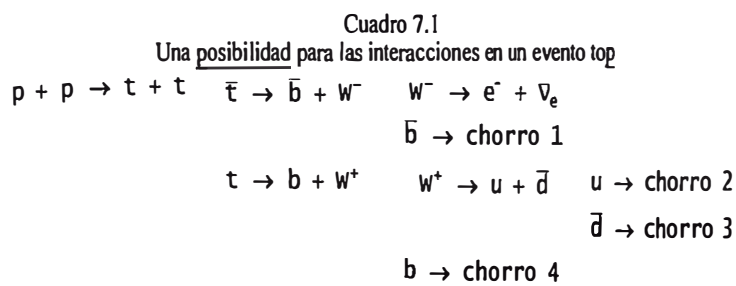


Diagrama 7.2

También puede ocurrir que el  $W^+$  decaiga en un positrón  $e^+$  y un neutrino  $\nu_e$ . En este caso, el bosón  $W^+$  decae en un antiquark  $u$  y un quark  $d$ . Como antes, el quark  $b$  emerge como un antimesón  $B^+$  neutro, se hadroniza y decae en un chorro. El antiquark  $b$  emerge como un mesón  $B^0$  neutro que se hadroniza y decae hacia otro chorro. El antiquark  $u$  y el quark  $d$  también se hadronizan y cada uno decae hacia otro chorro. Tanto el quark  $t$  como el antiquark  $b$  tienen tiempos de vida suficientemente largos, y tienen la suficiente energía como para viajar una distancia visible antes de decaer. La vida media del quark  $b$  es de 1.5 picosegundos, mucho mayor que la del quark top. El quark  $b$  viajará 2.2 mm y el  $\bar{b}$  viajará 4.5 mm. Debido a que ambos quarks emergen como partículas neutras, ninguno de los dos dejará su traza mientras decaen. El neutrino no deja huellas; su presencia se infiere por la necesidad de compensar la energía y el momentum faltantes.

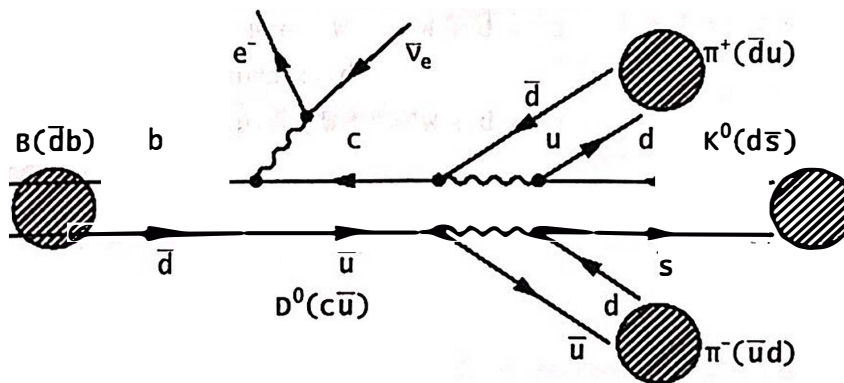


Diagrama 7.3

En el Diagrama 7.2 se muestran esquemáticamente los decaimientos hadrónicos de los mesones y antimesones neutros  $B$  y  $\bar{B}$  como chorros de varias líneas. Un decaimiento típico de  $\bar{B}$  como chorro de hadrones mostrado en el Diagrama 7.3 es  $\bar{B} \rightarrow D^0 e^+ \nu$  o  $\bar{B} \rightarrow D^0 e^- \bar{\nu}$ , seguido de  $D^0 \rightarrow K^0 \pi^+ \pi^-$ . R. Phillips (1989:62) explica que estas últimas son las partículas que se detectan en los experimentos. Analizando "hacia atrás" los procesos es que se concluye que se ha producido el par top-antitop. En el Diagrama 7.2 se han dibujado círculos para representar los distintos hadrones, según se indica en la simbología del Diagrama 7.1.

El decaimiento del quark top considerado hasta aquí  $t \rightarrow bW^+$  es el normalmente observado en los experimentos. Pero según Chris Quigg (1997:23), también hay decaimientos hacia los ligeros quarks  $s$  o  $d$ , extremadamente raros:  $99 \pm 29\%$  de todos los decaimientos de  $t$  que producen un bosón  $W$ , además producen un quark  $b$ . Este dato es un reporte del CDF de una medida directa de la razón de ramificación de  $t \rightarrow bW$ .

Lo observado se puede explicar si para los cálculos se asume, como dicen D.E. Groom *et al.* (2000:7), que los decaimientos del top que no son del tipo  $U$  pueden ser ignorados, que solamente tres generaciones de

existen, y que la matriz CKM es unitaria y se extrae el elemento de la matriz CKM  $V_{tb} = 0.99 \pm 0.15$ , en acuerdo con el resultado experimental.

Cuadro 7.2  
Fracciones de decaimiento del quark top con  $|V_{tb}| \approx 1$

Mecanismo	Fracción
$t\bar{t} \rightarrow (q\bar{q}'b)(q\bar{q}'\bar{b})$	36/81
$t\bar{t} \rightarrow (q\bar{q}'b)(e\nu\bar{b})$	12/81
$t\bar{t} \rightarrow (q\bar{q}'b)(\mu\nu\bar{b})$	12/81
$t\bar{t} \rightarrow (q\bar{q}'b)(\tau\nu\bar{b})$	12/81
$t\bar{t} \rightarrow (e\nu b)(\mu\nu\bar{b})$	2/81
$t\bar{t} \rightarrow (e\nu b)(\tau\nu\bar{b})$	2/81
$t\bar{t} \rightarrow (\mu\nu b)(\tau\nu\bar{b})$	2/81
$t\bar{t} \rightarrow (e\nu b)(e\nu\bar{b})$	1/81
$t\bar{t} \rightarrow (\mu\nu b)(\mu\nu\bar{b})$	1/81
$t\bar{t} \rightarrow (\tau\nu b)(\tau\nu\bar{b})$	1/81

El Diagrama 7.2 sirve para verificar algunas de las leyes de conservación descritas en la Sección IV. Por ejemplo, en el vértice fuerte señalado con (1) ocurre la interacción  $u + \bar{u} \rightarrow g$  y se comprueba la conservación de la carga eléctrica, ya que el quark  $u$  tiene carga  $2/3$ , el antiquark  $\bar{u}$  lleva carga  $-2/3$  y se mezclan para dar cero que es la carga eléctrica de un gluón. También se conserva el número de quark, que es para el quark  $u$ ,  $-1$  para el antiquark  $\bar{u}$ , dando cero para el lado izquierdo de la interacción, igual al de quark asignado a un gluón.

Para el caso del vértice electrodébil  $t \rightarrow W^+ + b$  (2) en el mismo diagrama, también se puede observar la conservación de la carga eléctrica (en unidades de  $e$ ):  $+2/3$  del quark top es igual a la suma de  $+1$  del bosón  $W^+$  con  $-1/3$  del quark  $b$ . Además el número de quark es  $+1$  en ambos lados de la interacción.

Un último ejemplo es el vértice también electrodébil  $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$  (3). Aquí la carga eléctrica del  $W^-$  es  $-1$ , la del electrón es  $-1$  y el antineutrino electrónico  $\bar{\nu}_e$  no tiene, por lo que este número se conserva. El número leptónico,  $+1$  para el electrón y  $-1$  para el antineutrino, al sumarse dan cero,

Otra forma más fácil de analizar el decaimiento del quark top es con base en la estructura de una llamada Modelo Estándar Mínimo. Según éste, el quark top decae exclusivamente hacia un bosón  $W$  y un quark  $b$ , siempre debido a que el valor de  $|V_{tb}|$  en la matriz CKM es cerca de la unidad. Sobre esta idea se encuentra en la tesis de Hoite Tolsma (1996). En la siguiente sección aparecerá  $|V_{tb}|$ , pero será para considerar el proceso en cierto sentido "inverso", cuando se discuta la producción de un quark top individual precisamente a partir de un vértice  $Wtb$ .

El decaimiento de los pares  $t\bar{t}$ , cada uno hacia un bosón  $W$  y un quark  $b$  produce eventos multichorro que pueden ser clasificados de acuerdo con los modos de decaimiento del estado final del par de bosones  $W^\pm$ . Las fracciones aproximadas de ramificación para los diferentes modos de decaimiento se listan en el Cuadro 7.2. Lo que más ocurre es que ambos bosones  $W$  decaen hacia un par quark-antiquark, llevando a un estado final hadrónico total. Nuevamente aquí se sintetizan contenidos de D.E. Groom *et al.* (2000:1-3), Hoite Tolsma (1996), agregando ahora a Manel Martínez *et al.* (1999:578).

El Diagrama 7.4 se presenta para ilustrar las distintas posibilidades de los decaimientos. En el caso (a) el bosón  $W$  decae en un leptón (electrón o muón) y un neutrino cerca del 22% (2/9) de las veces y a un par quark-antiquark cerca del 67% (6/9). Esto implica que cuando pares top son producidos en colisiones hadrón-hadrón,  $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} + X$ , ambos bosones  $W$  decaen en un leptón y neutrino solamente cerca del 5% de las veces, resultando en el estado final consistente de dos leptones, dos neutrinos, y un par de quarks bottom anti-bottom ( $\ell\bar{\ell}\nu\nu b\bar{b}$ ). Estos distintivos estados finales constituyen el modo de “descubrimiento” del quark top en colisionadores de hadrones.

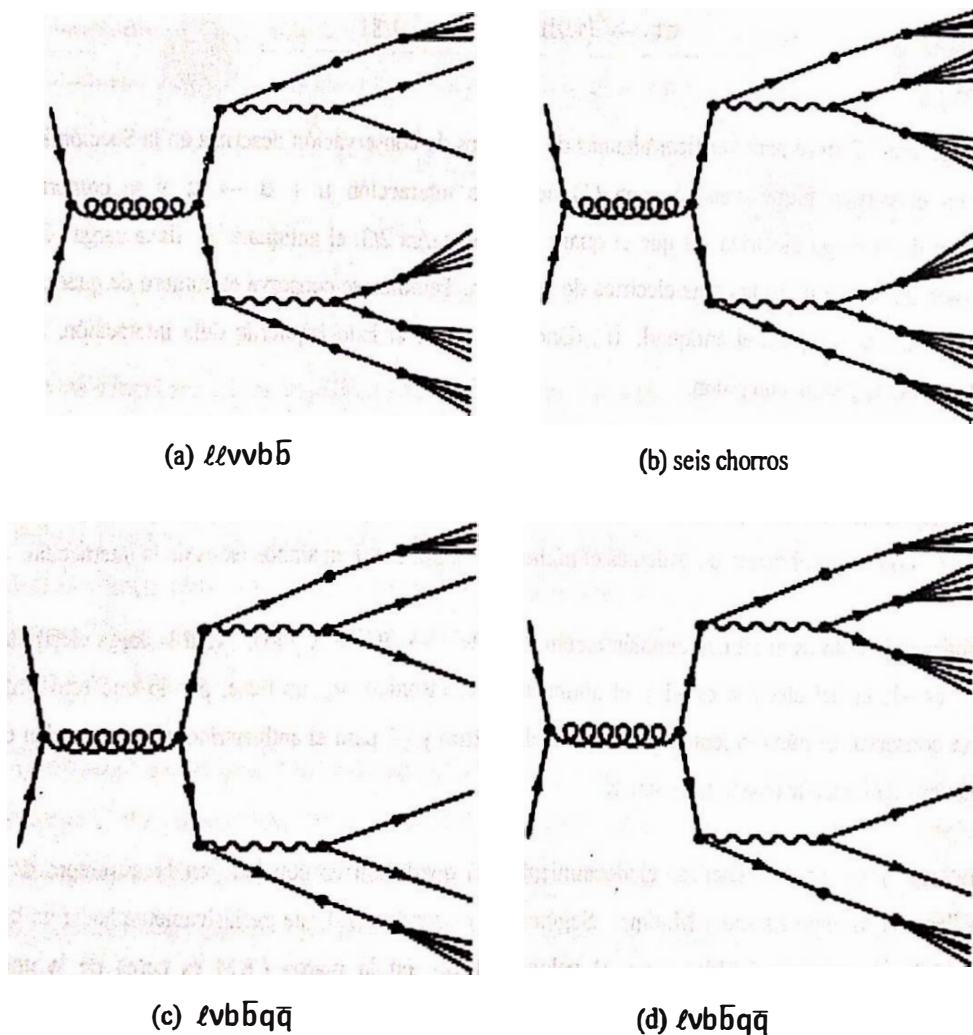


Diagrama 7.4

Por otra parte, es considerablemente más probable que uno de los bosones  $W$  decaiga en un par quark-antiquark resultando en un estado final consistente de un leptón, un neutrino, un par bottom-antibottom y un par  $qq$ . El modo  $(\ell\nu b\bar{b}qq)$  mostrado en (b) y (c) ocurre aproximadamente 7 veces más a menudo que el modo puro leptónico (35%). Los dos diagramas son dibujados para resaltar que es indiferente cuál de los dos bosones  $W$  decae hacia par  $w^+$  y cuál hacia par  $q\bar{q}$ . En este caso, cuando cada uno de los cuatro quarks que salen produce un chorro distinto, el evento resultante contiene un leptón, un neutrino, y cuatro chorros  $(\ell\nu jjjj)$ . Este modo de decaimiento es usado para analizar las propiedades del quark top en más detalle y para determinar, por ejemplo, la masa del top. El modo de decaimiento de seis chorros puro hadrón (d) ocurre cerca del 80% de las veces. Estos resultados se encuentran en los artículos de R.D. Field, Y. Kanev y M. Tayebnejad (1997); Manel Martínez *et al.* (1999:578) y en la tesis de Hoite Tolsma (1996).

Adicionalmente al mecanismo analizado, el Modelo Estándar predice otras posibilidades para la producción de quark top vía interacción fuerte. R.D. Field, Y. Kanev y M. Tayebnejad (1997) han utilizado un simulador llamado ISACHORRO (version 7.06) para generar quarks top con una masa de 175 GeV en colisiones  $p\bar{p}$  de 1.8 TeV. A esta energía, pares top se producen vía aniquilación quark-antiquark  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  cerca del 88% de las veces y por fusión gluón-gluón  $gg \rightarrow t\bar{t}$  el remanente 12%.

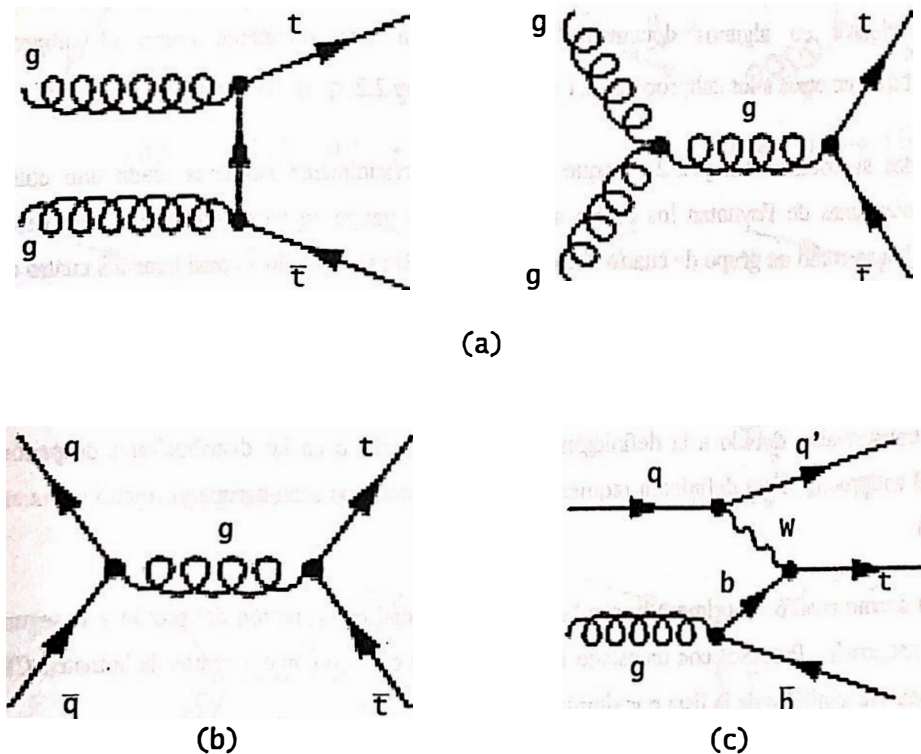


Diagrama 7.5

Complementariamente, Hoite Tolsma (1996:10) afirma en su tesis que a 1.8 TeV la producción de par  $t\bar{t}$  es dominante, y que los procesos más importantes los cuales se reproducen en el Diagrama 7.5 son: (a)

fusión gluón-gluón, (b) fusión quark-antiquark y (c) el más raro proceso –también mediado por la interacción fuerte- de producción de un quark top individual.

Por último, en esta parte se debe mencionar como hace Chris Quigg (1997:25), que el quark top decae mucho antes de que pueda ser hadronizado; su decaimiento se ve más como el de un quark aislado que el de un quark ligado a un hadrón. En otras palabras, el quark top decae muy rápidamente, sin tiempo para la formación de mesones o bariones top.

## B. Quark o antiquark top individual a partir de vértice $Wtb$

El segundo conjunto de mecanismos revisados en este trabajo es la producción de top o antitop top individuales a partir de un vértice electrodébil  $Wtb$ . En la siguiente exposición se sigue a A.P Heinson, A.S. Belyaev y E.E. Boo (1996:3-20), reproduciendo algunos de sus diagramas y cuadros.

Dentro del Modelo Estándar hay tres procesos separados en un colisionador protón-antiprotón a  $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$  que resultan en un quark top individual en el estado final. El Cuadro 7.3 muestra que estos procesos en turno consisten de varios subprocesos con vértices de dos o tres niveles. En la notación usada  $q$  es un quark ligero, y  $X$  representa cualquier partícula adicional de estado final a partir de la interacción  $p\bar{p}$ . Según los autores mencionados, en la literatura hay alguna variación sobre el uso del término “fusión  $W$ -gluón”: en algunos documentos se refiere a éste solamente como el subproceso 2.2  $q'g \rightarrow tq\bar{b}$ , en otros a los subprocesos 2.1  $q'b \rightarrow tq$  y 2.2  $q'g \rightarrow tq\bar{b}$  combinados.

Los dos subprocesos 1.2 y 2.2, aunque parecen superficialmente similares, cada uno contiene dos diferentes diagramas de Feynman los cuales son invariantes gauge en pares separados y no necesitan ser calculados juntos como un grupo de cuatro diagramas. Se puede ser tentado a considerar los cuatro diagramas como un set independiente en lugar de separadas correcciones de orden superior a los dos procesos principales, ya que una investigación experimental será capaz de distinguir entre estados finales de dos cuerpos y de tres cuerpos. Sin embargo, esto no es aceptable matemáticamente cuando se calculan las secciones transversales, debido a la definición del mar de quarks  $b$  en las distribuciones de partón para el protón y el antiprotón. Esta definición requiere que los subprocesos sean agrupados como se muestra en el Cuadro 7.3.

En el mismo cuadro, la primera partícula del estado inicial es un partón del protón y la segunda es un partón del antiprotón. Procesos con un estado inicial de quark  $c$  o  $s$ , o con elementos de la matriz CKM fuera de la diagonal son omitidos de la lista por simplicidad.

En el Diagrama 7.6 se muestran diagramas de Feynman representativos para los tres procesos de producción de quark top individual en el Tevatrón del Fermilab: (a) el proceso vía bosón virtual  $W$   $p\bar{p} \rightarrow t\bar{b} + X$ ; (b) el proceso involucrando quarks  $t$  y  $u$   $p\bar{p} \rightarrow tq + X$ , incluyendo el subproceso 2.2 de fusión  $W$ -gluón; y (c)  $p\bar{p} \rightarrow tW^- + X$ .

Cuadro 7.3  
Procesos más importantes en colisiones pp  
que producen un quark top individual

1.  $p\bar{p} \rightarrow t\bar{b} + X$

1.1  $q'q \rightarrow t\bar{b}$

$ud \rightarrow t\bar{b}$

$du \rightarrow t\bar{b}$

1.2  $q'g \rightarrow t\bar{b}q$

$ug \rightarrow t\bar{b}d$

$gu \rightarrow t\bar{b}d$

$dg \rightarrow t\bar{b}u$

$gd \rightarrow t\bar{b}\bar{u}$

2.  $pp \rightarrow tq + X$

2.1  $q'b \rightarrow tq$

$ub \rightarrow td$

$bu \rightarrow td$

$db \rightarrow t\bar{u}$

$b\bar{d} \rightarrow t\bar{u}$

2.2  $q'g \rightarrow tqb$

$ug \rightarrow tdb$

$gu \rightarrow tdb$

$dg \rightarrow t\bar{u}\bar{b}$

$g\bar{d} \rightarrow t\bar{u}\bar{b}$

3.  $p\bar{p} \rightarrow tW + X$

3.1  $bg \rightarrow tW$

$bg \rightarrow tW$

$gb \rightarrow tW$

3.2  $q\bar{q} \rightarrow tW\bar{b}$

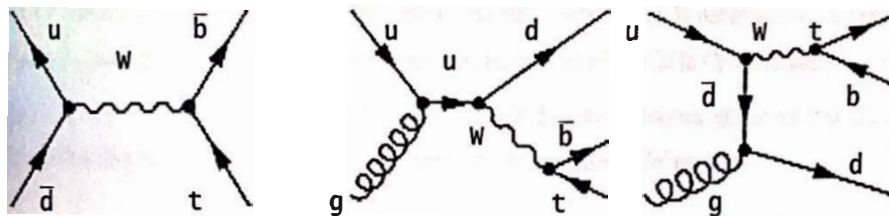
$u\bar{u} \rightarrow tW\bar{b}$

$\bar{u}u \rightarrow tW\bar{b}$

$d\bar{d} \rightarrow tW\bar{b}$

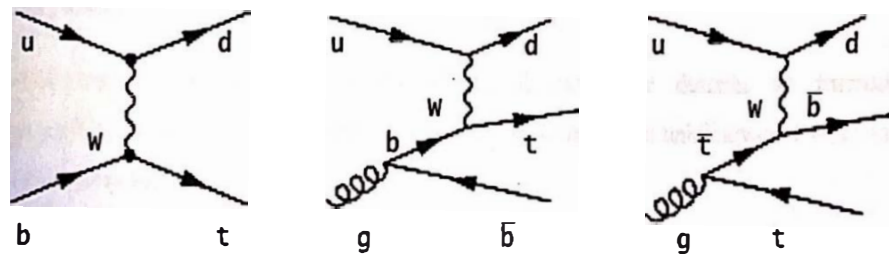
$\bar{d}d \rightarrow tW\bar{b}$

3.3  $gg \rightarrow tW\bar{b}$



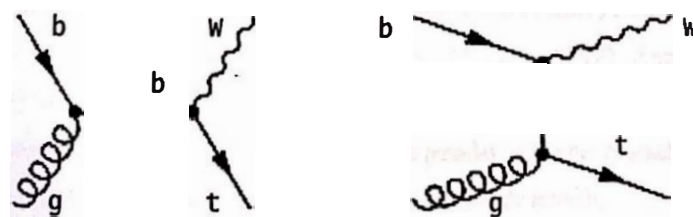
(a) 1.1  $u\bar{d} \rightarrow t\bar{b}$

1.2  $ug \rightarrow t\bar{b}d$



(b) 2.1  $ub \rightarrow td$

2.2  $ug \rightarrow t\bar{b}\bar{d}$



(c)

3.1  $bg \rightarrow tW$

Diagrama 7.6

Subprocesos con un quark extra en el estado final, por ejemplo  $bq \rightarrow tq q'$  y  $qb \rightarrow twq$ , aunque tienen varios diagramas de Feynman, solamente contribuyen en 1.5% a la sección transversal total de  $pp \rightarrow tq + X$  y 1% a la razón  $pp \rightarrow tw + X$ , y son por lo tanto ignorados. Esto además aplica al subproceso  $bb \rightarrow twb$ , a pesar de que éste tiene múltiples diagramas de Feynman, incluyendo unos con producción electrodébil de  $t\bar{t}$ .

Una característica de la producción de quarks top por estos mecanismos es que son determinados por la constante de acoplamiento asociada al vértice  $Wtb$ . En el Modelo Estándar, afirman D.E. Groom *et al.* (2000:7), las secciones transversales para estos procesos son proporcionales a  $|V_{tb}|^2$ , y no se requiere asumir nada sobre el número de familias de leptones ni la unitariedad de la matriz CKM en la extracción de  $|V_{tb}|$ , como se hizo al considerar la producción de par  $t\bar{t}$  y subsiguiente decaimiento  $t \rightarrow wb$ .

## VII. CONCLUSIONES

1. El Modelo Estándar de la Física de Partículas establece que todas las interacciones entre la materia en la naturaleza se deben a cuatro fuerzas fundamentales: débil, electromagnética, fuerte y gravitatoria.
2. Los campos eléctrico y magnético son en realidad uno sólo, el campo electromagnético, cuya fuente es la carga eléctrica.
3. Toda la masa del Universo existe en forma de partículas fundamentales. Según el Modelo Estándar, existen seis sabores de quarks, seis sabores de leptones y una antipartícula por cada partícula, haciendo en total doce posibles sabores. Estas cargas de sabor originan la interacción o fuerza débil. Los quarks y leptones están clasificados en tres generaciones de partículas fundamentales. La materia ordinaria está compuesta por quarks y leptones de la primera generación. Las partículas de las subsiguientes generaciones son más pesadas y decaen hacia partículas de la primera generación. Los quarks y los leptones son fermiones y obedecen por lo tanto la estadística de Fermi-Dirac.
4. El Modelo Estándar usa teorías gauge para describir las fuerzas conocidas en la naturaleza y predice las propiedades de los bosones vectoriales que median estas fuerzas: el gluón de la Cromodinámica Cuántica, y los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  del modelo electrodébil; la existencia de estos bosones gauge es una necesidad asociada a los generadores de la simetría que se mantiene en diferentes puntos del espacio.
5. Las teorías que integran el Modelo Estándar tienen cada una distintas simetrías. La base de la estructura de todo el Modelo es la complicada simetría gauge conocida como  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Este grupo de simetría es espontáneamente roto hacia abajo a  $SU(3) \times U(1)$ .
6. La Electrodinámica Cuántica, la parte del Modelo Estándar que describe las interacciones electromagnéticas, se basa en la invariancia bajo una rotación de fase local unidimensional  $U(1)$  que se origina en la carga eléctrica.
7. En el Modelo Estándar las interacciones electromagnética y débil están unificadas dentro de una interacción electrodébil. Esta es producida por invariancia gauge local bajo el grupo de simetría  $SU(2) \times U(1)$  (de isospín débil  $\times$  de hipercarga débil). Este grupo envuelve cuatro generadores y sus cuatro bosones gauge: dos cargados ( $W^\pm$ ) y dos neutrales ( $W^0, B$ ).  $SU(2)$  describe rotaciones o transformaciones de quarks up en down y (simultáneamente) neutrinos en electrones, con transformaciones similares sobre los quarks y leptones de las familias fermiónicas pesadas. El tercer generador de  $SU(2)$  y el generador de  $U(1)$  describen transformaciones de fase sobre los campos de fermión.
8. En la interacción electrodébil unificada los fermiones elementales están dentro de isodobletes débiles levógiros e isosingletes débiles dextrógiros. Los quarks (casi como los leptones) están como campos levógiros formando dobletes de isospín y los compañeros dextrógiros son singletes de isospín. La única diferencia con los leptones es que los quarks  $u, c$  y  $t$ , son introducidos con un componente dextrógiro.

9. Dentro del Modelo Estándar, la Cromodinámica Cuántica describe las interacciones fuertes. Ésta es una teoría gauge local no-abeliana basada en el grupo  $SU(3)$ , asociado a la carga de color de quark que tiene tres posibles valores, identificados como rojo, verde y azul. El grupo  $SU(3)$  describe el hecho que la forma de las ecuaciones de movimiento es invariante cuando se transforman los diferentes colores de quark en algún otro sin cambiar sus otros números cuánticos. Asociados a los ocho generadores del grupo  $SU(3)$ , hay ocho gluones vectoriales que pueden ser absorbidos o emitidos en transiciones entre los diferentes colores de quark. Los antiquarks tienen anticolores. La carga de color es la que da estabilidad a los mesones y bariones.
10. La diferencia entre la simetría base de la Electrodinámica Cuántica y de la Cromodinámica Cuántica produce una diferencia significativa en cómo interactúan los transportadores de las correspondientes fuerzas. En QED, el fotón solamente interactúa con pares fermión-antifermión porque el fotón no transporta carga eléctrica, mientras que en QCD, los gluones transportan carga de color y el resultado es interacciones de gluones entre sí y de gluones con quarks.
11. En el Modelo Estándar el origen de la masa de las partículas es el mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría, que introduce el campo escalar complejo de Higgs el cual transforma como un doblete  $SU(2)$  y provee la masa de los bosones. La única partícula del Modelo aún no descubierta experimentalmente es el bosón de Higgs.
12. El Modelo Estándar de la Física de Partículas explica satisfactoriamente lo que ocurre cuando colisionan protones con antiprotones a una energía del centro de masa de 1.8 TeV y ha predicho el subsecuente descubrimiento del quark top por medio de experimentos con este tipo de colisiones.
13. El quark top puede ser producido en dos vías en colisiones  $p\bar{p}$  a una energía del centro de masa de 1.8 TeV: producción de par de quarks  $t\bar{t}$  por interacción fuerte, y producción de quark t individual a partir de un vértice electrodébil  $Wtb$ .
14. Analizar la producción y decaimiento del quark top es un mecanismo apropiado para revisar los postulados fundamentales del Modelo Estándar. La principal ventaja es que en estos procesos intervienen partículas de distintos tipos y tanto interacciones electrodébiles como fuertes. Así, es un escenario que presenta una sobrevista de toda la estructura del Modelo Estándar y permite analizar en particular varias de sus simetrías y leyes de conservación asociadas.
15. Los diagramas de Feynman, aunque se dibujen sin considerar los cálculos involucrados en las interacciones que representan, son una herramienta útil para comprender y explicar las distintas interacciones entre las partículas fundamentales. A nivel de Licenciatura, estos diagramas pueden usarse muy bien para familiarizarse cualitativamente con los principales conceptos de la Física de Partículas.
16. El paquete feynMF permite dibujar diagramas de Feynman en forma ágil y sencilla. La facilidad con que se puede obtener de internet este programa y los procesadores de texto en que se basa como LaTeX y

METAFONT, hace posible analizar interacciones entre partículas trabajando directamente en una computadora, pero sin que sean necesarios conocimientos profesionales de programación y sin mayores costos económicos, ya que los programas son de distribución gratuita. Además usar estos programas plantea una vía de relación con otros estudiantes y científicos por medio de la red de internet.

17. Aprender a elaborar los diagramas de Feynman en la forma sencilla que se explica en este trabajo es una experiencia útil para familiarizarse con estos procedimientos de la física teórica y experimental. Durante la investigación se ha encontrado que en la Física de Partículas es generalizado el uso de programas simuladores que se basan en diagramas de Feynman. Estos sirven tanto para calcular resultados que se deben verificar experimentalmente como para analizar los datos que resultan de las colisiones. El inconveniente es que el nivel de conocimientos necesario para manipular esos programas es muy alto y por eso para un estudiante de Licenciatura es mejor introducirse al tema por medio de documentos con contenido intermedio como esta investigación.



## IX. BIBLIOGRAFÍA

- Arkani-Hamed, Nima; S. Dimopoulos y G. Dvali. 2002. <<Large extra dimensions: a new arena for particle physics>>. *Physics Today*. [New York]. 55(2): 35-40.
- Avery, John. 1975. *Teoría cuántica de átomos, moléculas y fotones*. Traducción al español. Madrid, Alhambra. 472 págs.
- Barut, Asim. 1980. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. New York, Dover Publications, Inc. 235 págs.
- Berestetskii, V.B.; E. Lifshitz y L. Pitaevskii. 1980. *Quantum electrodynamics*. Traducido del ruso por J.B. Sykes y J.S. Bell. 2ª ed. Volumen 4 del Curso de Física Teórica. Exeter, A. Wheaton & Co. 652 págs.
- Biography of Richard P. Feynman*. 2000. The Official Web site of the Nobel foundation. (URL: <http://www.nobel.se/physics/laureates/1965/feynman-bio.html>).
- Cascales, Bernardo, *et al.* 2000. *LaTeX: una imprenta en sus manos*. Madrid, Aula Documental de Investigación. (URL: <http://www.latex.um.es/libro/main.html>).
- Close, Frank. y P. Page. 1999. <<Glubolas>>. *Revista Investigación y Ciencia*. [Barcelona]. (268): 40-45.
- Cottingham, Noel. y D.A. Greenwood. 1998. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge, University Press. 235 págs.
- Eisberg, Robert y R. Resnick. 1974. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 713 págs.
- Field, R.D.; Y. Kanev y M. Tayebnejad. 1997. <<A topological analysis of the top quark signal and background at hadron colliders>>. *Physics Review*. [University of Oregon]. D55(9): 5685-5697.
- Erzberg, Andria; M. Barnett y H. Quinn. 1999. *La aventura de las partículas*. Versión Web Carolyn Mockett, revisada por Charles Groom. Contemporary Physics Education Project, Particle Data Group y Lawrence Berkeley National Laboratory. Versión en español Enrique Szcsepanski y Ricardo Szcsepanski. Universidad Nacional de Mar del Plata. (URL: <http://particleadventure.org/particleadventure/spanish/>).
- Griffiths, David. y D. Higham. 1997. *Learning LaTeX*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, University City Science Center. 84 págs.
- Groom, D.E., *et al.* 2000. <<The top quark>>. *European Physics Journal*. Revisado por M. Mangano y T. Trippe. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_ ; 2000a. <<The Cabibbo-Kobayashi-Maskawa quark-mixing matrix>>. *European Physics Journal*. Revisado por F.J. Gilman, K. Kleinkenecht y B. Renk. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_ ; 2000b. <<Quantum Chromodynamics>>. Revisado por I. Hinchliffe. *European Physics Journal*. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_ ; 2000c. <<Index for leptons summary table>>. *European Physics Journal*. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).

- \_\_\_\_\_; 2000d. <<Index for quarks summary table>>. *European Physics Journal*. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_; 2000e. <<Quark model>>. *European Physics Journal*. Revisado por C. Amsler y C.G. Wohl. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_; 2000f. <<Quark masas>>. *European Physics Journal*. Escrito por A. Manobar. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- \_\_\_\_\_; 2000g. <<Index for gauge and Higgs bosons summary table>>. *European Physics Journal*. Particle Data Group. C15: 1. (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- Heinson, A.P.; A.S. Belyaev y E.E. Boos. 1997. <<Single top quarks at the Fermilab Tevatron>>. *Physics Review*. [University of Oregon]. D56(5): 3114-3128. [[http://arxiv.org/PS\\_cache/hep-ph/pdf/9612/9612424.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/hep-ph/pdf/9612/9612424.pdf)].
- Herstein, I.N. 1970. *Álgebra moderna*. Traducción de Federico Velasco Caba. México D.F., Editorial Trillas S. A. de C. V. 392 págs.
- Ibáñez, Luis. 1998. <<Unificación y dualidad en teoría de cuerdas>>. *Revista Investigación y Ciencia*. [Barcelona]. (263): 62-69.
- Kopka, H. y P.W. Daly. 1997. *A guide to LaTeX document preparation for beginners and advanced users*. 3ª ed. Addison-Wesley.
- Kulhmann, S. 1989. <<Jets, W's, and Z's at  $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$ >>. *New results in hadronic interactions. Proceedings of the XXIVth rencontre de Moriond*. Editado por J. Tran Thanh Van, Editions Frontieres. [France]. 43-50.
- Langacker, Paul. 1989. <<The standar electroweak model. How well does it work?>>. *Weak and electromagnetic interactions in nuclei*. Editado por P. Depommier. Gif sur Yvette, Editions Frontieres. 5-33.
- Lea, Susan M. y John Robert Burke. 1997. *Física: la naturaleza de las cosas*. México D.F., International Thompson Editores, S. A. de C. V. 1201 págs.
- Liniger, Patrick. 2001. <<Charmless B-mesón decays in the Standard Model>>. Supervisada por PD Dr. C. Greub. Tesis doctoral en Física Teórica Universidad de Berna. 145 págs.
- Longo, Michael. 1973. *Fundamentals of elementary particle physics*. New York, McGraw-Hill Book Co. 180 págs.
- Martínez, Antonio. 1995. <<Latex. Matemáticas y proceso de textos: un divorcio aparente>>. Página de Internet 'El paraíso de las matemáticas'. (URL: <http://www.matematicas.net/paraiso/latex.php>).
- Martínez, Manel, et al. 1999. <<Precision tests of the electroweak interaction at the Z pole>>. *Reviews of Modern Physics*. University of Washington. 71(3): 575-629.
- Mulkerjee, Madhusree. 1997. <<Una gran explosión originaria en pequeño>>. *Revista Investigación y Ciencia*. [Barcelona]. (272): 52-57.

- Nieves, A.; D. Acosta y D. Tsybychev. 2000. <<Acceptance of the beam shower counters at the CDF experiment>>. University of Florida. 17 págs. [<http://www.phys.ufl.edu/REU/2000/reports/nieves.pdf>]
- Ohl, Thorsten. 2001. *feynMF: drawing Feynman diagrams with LATEX and METAFONT*. Darmstadt, Technische Hochschule Darmstadt. 44 págs.
- Phillips, R. 1989. <<Remarks about top quark signals at  $p\bar{p}$  colliders>>. *New results in hadronic interactions. Proceedings of the XXIVth rencontre de Moriond*. Editado por J. Tran Thanh Van, Editions Frontieres. [France]. 61-66.
- Quevedo, Fernando. 1979. <<Grupos de simetría en física de partículas>>. Trabajo de graduación Universidad del Valle de Guatemala. 173 págs.
- Quigg, Chris. 1997. <<Top-ology>>. *Physics Today*. [New York]. (5): 20-26.
- Rith, Klaus y Andreas Schäfer. 1999. <<El Misterioso espín de los nucleones>>. *Revista Investigación y Ciencia*. [Barcelona]. (276): 24-33.
- Saarela, Janne. 1995. *A short introduction to METAFONT*. Genf, European Organisation for Nuclear Research, The CERN Computer News Letter CNL Editor. (URL: <http://cnlart.web.cern.ch/cnlart/220/node64.html>).
- Schmüser, Peter. 1995. *Feynman-graphen und eichtheorien für experimentalphysiker*. 2ª ed. Berlín, Springer Verlag Heidelberg. 240 págs.
- Sexl, Roman y H. Urbantke. 2000. *Relativity, groups, particles, special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics*. 3ª ed. Wien, Springer-Verlag. 388 págs.
- Sterman, G. 1993. *An introduction to quantum field theory*. Cambridge, University Press. 572 págs.
- Tolsma, Hoite. 1996. <<Detection of the Higgs, top-quark and Z' at LHC>>. Thesis Dutch institute for nuclear and high energy physics NIKHEF. (URL: [nikhef.nl/~i94/thesis/node6.html](http://nikhef.nl/~i94/thesis/node6.html)).
- Woods A. y T. Grant. 1995. *Razón y revolución, filosofía marxista y ciencia moderna*. Traducción castellana de Jordi Martorell. Madrid, Fundación Federico Engels. 446 págs.



## X. APÉNDICE

### Programas de los diagramas de Feynman con feynMF

```
% Diagrama_6_1ab.tex
% $Id: Diagrama_6_1ab.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_6_1ab
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_6_1ab
% $ mf \mode:=dpi&r; input fmfDiagrama_6_1ab'
% $ latex Diagrama_6_1ab
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm \begin{document}
\begin{fmffile}{fmfDiagrama_6_1ab} \begin{fmfgraph*}(30,25) \fmfleft{i1,i2} \fmf{fermion}{i1,v1,i2}
\fmfright{o1} \fmf{photon}{v1,o1} \fmfdot{v1} \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}
```

```
% Diagrama_6_1cd.tex
% Se debe rotar 90o
% $Id: Diagrama_6_1cd.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_6_1cd
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_6_1cd
% $ mf \mode:=dpi&r; input fmfDiagrama_6_1cd'
% $ latex Diagrama_6_1cd
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm \begin{document}
\begin{fmffile}{fmfDiagrama_6_1cd} \begin{fmfgraph*}(30,25) \fmfleft{i1,i2} \fmf{fermion}{i2,v1,i1}
\fmfright{o1} \fmf{photon}{v1,o1} \fmfdot{v1} \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}
```

```
% Diagrama_6_1e.tex
% $Id: Diagrama_6_1e.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_6_1e
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_6_1e
% $ mf \mode:=dpi&r; input fmfDiagrama_6_1e'
% $ latex Diagrama_6_1e
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm \begin{document}
\begin{fmffile}{fmfDiagrama_6_1e} \begin{fmfgraph*}(60,25) \fmfleft{i1,i2} \fmf{fermion}{i1,v1,i2}
\fmfright{o1,o2} \fmf{fermion}{o1,v2,o2} \fmf{gluon}{v1,v2} \fmfdot{v1,v2}
\end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}
```

```
% Diagrama_7_1.tex
% $Id: Diagrama_7_1.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_1.tex
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_1
% $ mf \mode:=localfont; input fmfDiagrama_7_1'
% $ latex Diagrama_7_1
```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_1} \begin{fmfgraph*}(50,40) \fmfpen{thick}
\fmflleft{ip1,ip2} \fmfforce{0,0}{ip1} \fmfforce{0,h}{ip2} \fmfright{q1,q2,q3,q4}
\fmfforce{w,0}{q1} \fmfforce{w,0.02h}{q2} \fmfforce{w,0.98h}{q3} \fmfforce{w,h}{q4}
\fmf{fermion}{ip1,vp1} \fmf{fermion}{ip2,vp2} \fmfforce{0.34w,0.10h}{vp1}
\fmfforce{0.34w,0.90h}{vp2} \fmfblob{.05w}{vp1} \fmfblob{.05w}{vp2}
\fmfi{plain}{vpath(_ip1,_vp1) shifted(thick*(0,2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip1,_vp1) shifted(thick*(1,-2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip2,_vp2) shifted(thick*(0,2))}
\fmfi{plain}{vpath(_ip2,_vp2) shifted(thick*(1,-2))}
\fmf{fermion}{vp1,q1} \fmf{fermion}{vp1,q2} \fmf{fermion}{vp2,q3} \fmf{fermion}{vp2,q4}
\fmf{fermion}{vp1,vq} \fmf{fermion}{vp2,vq} \fmfforce{0.4w,0.5h}{vq} \fmf{gluon}{vq,o1}
\fmfdot{vq,o1} \fmfforce{0.60w,0.5h}{o1} \fmf{fermion}{o1,vq1} \fmf{fermion}{o1,vq2}
\fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1} \fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2} \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% DIAGRAMA_7_3.tex -- trivial FeynMF example
% $Id: DIAGRAMA_7_3.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf DIAGRAMA_7_3
% or run Metafont manually
% $ latex DIAGRAMA_7_3
% $ mf ^mode:=dpi$; input fmfDIAGRAMA_7_3'
% $ latex DIAGRAMA_7_3

```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDIAGRAMA_7_3} \begin{fmfgraph*}(150,100)
\fmflleft{il,i2} \fmfright{o1,o2,o3,o4} \fmfforce{0.73w,0.36h}{o1} \fmfforce{0.73w,0.64h}{o4}
\fmfforce{0.7w,0.29h}{vo1} \fmfforce{0.7w,0.71h}{vo4} \fmfblob{.08w}{vb2}
\fmfforce{0.75w,0.29h}{vb2} \fmfblob{.08w}{vb4} \fmfforce{0.75w,0.71h}{vb4} \fmfforce{0,0.46h}{il}
\fmfforce{0.86w,0.46h}{o2} \fmfforce{0,0.54h}{i2} \fmfforce{0.86w,0.54h}{o3} \fmf{fermion}{il,v11}
\fmfblob{.08w}{vb3} \fmfforce{0.9w,0.5h}{vb3} \fmf{fermion}{v11,v12,v13} \fmf{boson}{v13,v14}
\fmf{fermion}{v14,o2} \fmfblob{.08w}{vb1} \fmfforce{0.15w,0.5h}{vb1} \fmfforce{0.15w,0.46h}{v11}
\fmfforce{0.35w,0.46h}{v12} \fmfforce{0.53w,0.46h}{v13} \fmfforce{0.63w,0.46h}{v14}
\fmf{fermion}{v21,i2} \fmf{fermion}{v22,v21} \fmf{fermion}{v23,v22} \fmf{boson}{v23,v24}
\fmfforce{0.15w,0.54h}{v21} \fmfforce{0.35w,0.54h}{v22} \fmfforce{0.53w,0.54h}{v23}
\fmfforce{0.63w,0.54h}{v24} \fmf{fermion}{o1,v14} \fmf{fermion}{v13,vo1} \fmf{boson}{v23,v24}
\fmf{fermion}{o3,v24} \fmf{fermion}{v24,o4} \fmf{fermion}{vo4,v23} \fmf{boson}{v22,ve}
\fmfforce{0.40w,0.64h}{ve} \fmf{fermion}{ve2,ve,ve1} \fmfforce{0.35w,0.80h}{ve1}
\fmfforce{0.50w,0.78h}{ve2} \fmfdot{v13,v14,v22,v23,v24,ve} \end{fmfgraph*} \end{fmffile}
\end{document}

```

```

% Diagrama_7_4a.tex
% $Id: Diagrama_7_4a.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_4a
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_4a
% $ mf ^mode:=localfont; input fmfDiagrama_7_4a'
% $ latex Diagrama_7_4a
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_4a} \begin{fmfgraph*}(120,90) \fmfpen{thick}
\fmflleft{ip1,ip2} \fmfforce{0,0}{ip1} \fmfforce{0,h}{ip2}
\fmfright{v110,v111,v11,v112,v24,v25,v171,v17,v172,v173,v181,v18,v182,v183,v160,v16,v161,v162}

```

```

\fmfforce{0.39w,0.30h}{vp1}\fmfforce{0.39w,0.70h}{vp2}\fmf{fermion}{vp1,vq}\fmf{fermion}{vp2,vq}
\fmfforce{0.42w,0.5h}{vq}\fmf{gluon}{vq,o1}\fmfdot{vq,o1}\fmfforce{0.60w,0.5h}{o1}
\fmf{fermion}{o1,vq1}\fmf{fermion}{o1,vq2}\fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1}\fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2}
\fmf{boson}{vq1,vq4}\fmfforce{0.80w,0.30h}{vq4}\fmf{fermion}{vq4,v24}\fmf{fermion}{vq4,v25}
\fmfforce{w,0.20h}{v24}\fmfforce{w,0.40h}{v25}\fmf{fermion}{vq1,vq3}\fmfforce{0.80w,0.20h}{vq3}
\fmf{plain}{vq3,vq7}\fmfforce{0.90w,0.15h}{vq7}\fmf{plain}{vq7,v110}\fmf{plain}{vq7,v111}
\fmf{plain}{vq7,v11}\fmf{plain}{vq7,v112}\fmfforce{w,0.10h}{v11}\fmfforce{w,0.07h}{v110}
\fmfforce{w,0.09h}{v111}\fmfforce{w,0.12h}{v112}\fmf{boson}{vq2,vq5}\fmfforce{0.80w,0.70h}{vq5}
\fmf{fermion}{vq5,vq11}\fmf{fermion}{vq5,vq12}\fmfforce{0.90w,0.65h}{vq11}
\fmfforce{0.90w,0.75h}{vq12}\fmf{plain}{vq11,v17}\fmf{plain}{vq12,v18}\fmfforce{w,0.60h}{v17}
\fmfforce{w,0.80h}{v18}\fmf{plain}{vq11,v171}\fmf{plain}{vq11,v172}\fmf{plain}{vq11,v173}
\fmfforce{w,0.58h}{v171}\fmfforce{w,0.62h}{v172}\fmfforce{w,0.64h}{v173}
\fmf{plain}{vq12,v181}\fmf{plain}{vq12,v182}\fmf{plain}{vq12,v183}\fmfforce{w,0.78h}{v181}
\fmfforce{w,0.82h}{v182}\fmfforce{w,0.76h}{v183}\fmf{fermion}{vq2,vq6}
\fmfforce{0.80w,0.80h}{vq6}\fmf{plain}{vq6,vq10}\fmfforce{0.90w,0.85h}{vq10}
\fmf{plain}{vq10,v160}\fmf{plain}{vq10,v16}\fmf{plain}{vq10,v161}\fmf{plain}{vq10,v162}
\fmfforce{w,0.85h}{v160}\fmfforce{w,0.87h}{v161}\fmfforce{w,0.88h}{v16}\fmfforce{w,0.90h}{v162}
\fmfdot{vq1,vq2,vq3,vq4,vq5,vq6,vq7,vq10,vq11,vq12}\lend{fmfgraph*}\lend{fmffile}\lend{document}

```

% Diagrama\_7\_4b.tex

% \$Id: Diagrama\_7\_4b.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp \$

% To typeset, either use the feynmf script

% \$ feynmf Diagrama\_7\_4b

% or run Metafont manually

% \$ latex Diagrama\_7\_4b

% \$ mf \mode:=localfont; input fmfDiagrama\_7\_4b'

% \$ latex Diagrama\_7\_4b

\documentclass{article}\usepackage{feynmf}%%\feynmp\unitlength=1mm

\begin{document}\begin{fmffile}{fmfDiagrama\_7\_4b}\begin{fmfgraph\*}(120,90)\fmfpen{thick}

\fmfleft{ip1,ip2}\fmfforce(0,0){ip1}\fmfforce{0,h}{ip2}

\fmfright{v110,v111,v11,v112,v121,v12,v122,v123,v131,v13,v132,v133,v14,v15,v160,v16,v161,v162}

\fmfforce{0.39w,0.30h}{vp1}\fmfforce{0.39w,0.70h}{vp2}\fmf{fermion}{vp1,vq}\fmf{fermion}{vp2,vq}

\fmfforce{0.42w,0.5h}{vq}\fmf{gluon}{vq,o1}\fmfdot{vq,o1}\fmfforce{0.60w,0.5h}{o1}

\fmf{fermion}{o1,vq1}\fmf{fermion}{o1,vq2}\fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1}\fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2}

\fmf{boson}{vq1,vq4}\fmfforce{0.80w,0.30h}{vq4}\fmf{fermion}{vq4,vq8}\fmf{fermion}{vq4,vq9}

\fmfforce{0.90w,0.25h}{vq8}\fmfforce{0.90w,0.35h}{vq9}\fmf{plain}{vq8,v12}\fmf{plain}{vq9,v13}

\fmfforce{w,0.20h}{v12}\fmfforce{w,0.40h}{v13}\fmf{plain}{vq8,v121}\fmf{plain}{vq8,v122}

\fmf{plain}{vq8,v123}\fmfforce{w,0.18h}{v121}\fmfforce{w,0.22h}{v122}\fmfforce{w,0.24h}{v123}

\fmf{plain}{vq9,v131}\fmf{plain}{vq9,v132}\fmf{plain}{vq9,v133}\fmfforce{w,0.38h}{v131}

\fmfforce{w,0.42h}{v132}\fmfforce{w,0.45h}{v133}\fmf{fermion}{vq1,vq3}\fmfforce{0.80w,0.20h}{vq3}

\fmf{plain}{vq3,vq7}\fmfforce{0.90w,0.15h}{vq7}\fmf{plain}{vq7,v110}\fmf{plain}{vq7,v111}

\fmf{plain}{vq7,v11}\fmf{plain}{vq7,v112}\fmfforce{w,0.10h}{v11}\fmfforce{w,0.07h}{v110}

\fmfforce{w,0.09h}{v111}\fmfforce{w,0.12h}{v112}\fmf{boson}{vq2,vq5}\fmfforce{0.80w,0.70h}{vq5}

\fmf{fermion}{vq5,v14}\fmf{fermion}{vq5,v15}\fmfforce{w,0.60h}{v14}\fmfforce{w,0.80h}{v15}

\fmf{fermion}{vq2,vq6}\fmfforce{0.80w,0.80h}{vq6}\fmf{plain}{vq6,vq10}

\fmfforce{0.90w,0.85h}{vq10}\fmf{plain}{vq10,v160}\fmf{plain}{vq10,v16}\fmf{plain}{vq10,v161}

\fmf{plain}{vq10,v162}\fmfforce{w,0.85h}{v160}\fmfforce{w,0.87h}{v161}\fmfforce{w,0.88h}{v16}

\fmfforce{w,0.90h}{v162}\fmfdot{vq1,vq2,vq3,vq4,vq5,vq6,vq7,vq8,vq9,vq10}\lend{fmfgraph\*}

\lend{fmffile}\lend{document}

% Diagrama\_7\_4c.tex

% \$Id: Diagrama\_7\_4c.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp \$

```

% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_4c
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_4c
% $ mf \mode:=localfont; input fmfDiagrama_7_4c'
% $ latex Diagrama_7_4c
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_4c} \begin{fmfgraph*}(120,90) \fmfpen{thick}
\fmfleft{ip1,ip2} \fmfforce{0,0}{ip1} \fmfforce{0,h}{ip2}
\fmfright{v110,v111,v11,v112,v24,v25,v14,v15,v160,v16,v161,v162}
\fmfforce{0.39w,0.30h}{vp1} \fmfforce{0.39w,0.70h}{vp2} \fmf{fermion}{vp1,vq} \fmf{fermion}{vp2,vq}
\fmfforce{0.42w,0.5h}{vq} \fmf{gluon}{vq,o1} \fmfdot{vq,o1} \fmfforce{0.60w,0.5h}{o1} \
fmf{fermion}{o1,vq1} \fmf{fermion}{o1,vq2} \fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1} \fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2}
\fmf{boson}{vq1,vq4} \fmfforce{0.80w,0.30h}{vq4} \fmf{fermion}{vq4,v24} \fmf{fermion}{vq4,v25}
\fmfforce{w,0.20h}{v24} \fmfforce{w,0.40h}{v25} \fmf{fermion}{vq1,vq3} \fmfforce{0.80w,0.20h}{vq3}
\fmf{plain}{vq3,vq7} \fmfforce{0.90w,0.15h}{vq7} \fmf{plain}{vq7,v110} \fmf{plain}{vq7,v111}
\fmf{plain}{vq7,v11} \fmf{plain}{vq7,v112} \fmfforce{w,0.10h}{v11} \fmfforce{w,0.07h}{v110}
\fmfforce{w,0.09h}{v111} \fmfforce{w,0.12h}{v112} \fmf{boson}{vq2,vq5} \fmfforce{0.80w,0.70h}{vq5}

\fmf{fermion}{vq5,v14} \fmf{fermion}{vq5,v15} \fmfforce{w,0.60h}{v14} \fmfforce{w,0.80h}{v15}
\fmf{fermion}{vq2,vq6} \fmfforce{0.80w,0.80h}{vq6} \fmf{plain}{vq6,vq10}
\fmfforce{0.90w,0.85h}{vq10} \fmf{plain}{vq10,v160} \fmf{plain}{vq10,v16} \fmf{plain}{vq10,v161}
\fmf{plain}{vq10,v162} \fmfforce{w,0.85h}{v160} \fmfforce{w,0.87h}{v161}
\fmfforce{w,0.88h}{v16} \fmfforce{w,0.90h}{v162}
\fmfdot{vq1,vq2,vq3,vq4,vq5,vq6,vq7,vq10} \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

% Diagrama_7_4d.tex
% $Id: Diagrama_7_4d.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_4d
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_4d
% $ mf \mode:=localfont; input fmfDiagrama_7_4d'
% $ latex Diagrama_7_4d
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_4d}
\begin{fmfgraph*}(120,90) \fmfpen{thick} \fmfleft{ip1,ip2} \fmfforce{0,0}{ip1} \fmfforce{0,h}{ip2}
\fmfright{v110,v111,v11,v112,v121,v12,v122,v123,v131,v13,v132,v133,v171,v17,v172,v173,v181,
v18,v182,v183,v160,v16,v161,v162} \fmfforce{0.39w,0.30h}{vp1} \fmfforce{0.39w,0.70h}{vp2}
\fmf{fermion}{vp1,vq} \fmf{fermion}{vp2,vq} \fmfforce{0.42w,0.5h}{vq} \fmf{gluon}{vq,o1}
\fmfdot{vq,o1} \fmfforce{0.60w,0.5h}{o1} \fmf{fermion}{o1,vq1} \fmf{fermion}{o1,vq2}
\fmfforce{0.63w,0.30h}{vq1} \fmfforce{0.63w,0.70h}{vq2} \fmf{boson}{vq1,vq4}
\fmfforce{0.80w,0.30h}{vq4} \fmf{fermion}{vq4,vq8} \fmf{fermion}{vq4,vq9}
\fmfforce{0.90w,0.25h}{vq8} \fmfforce{0.90w,0.35h}{vq9} \fmf{plain}{vq8,v12} \fmf{plain}{vq9,v13}
\fmfforce{w,0.20h}{v12} \fmfforce{w,0.40h}{v13} \fmf{plain}{vq8,v121} \fmf{plain}{vq8,v122}
\fmf{plain}{vq8,v123} \fmfforce{w,0.18h}{v121} \fmfforce{w,0.22h}{v122} \fmfforce{w,0.24h}{v123}
\fmf{plain}{vq9,v131} \fmf{plain}{vq9,v132} \fmf{plain}{vq9,v133} \fmfforce{w,0.38h}{v131}
\fmfforce{w,0.42h}{v132} \fmfforce{w,0.45h}{v133} \fmf{fermion}{vq1,vq3}
\fmfforce{0.80w,0.20h}{vq3} \fmf{plain}{vq3,vq7} \fmfforce{0.90w,0.15h}{vq7} \fmf{plain}{vq7,v110}
\fmf{plain}{vq7,v111} \fmf{plain}{vq7,v11} \fmf{plain}{vq7,v112} \fmfforce{w,0.10h}{v11}
\fmfforce{w,0.07h}{v110} \fmfforce{w,0.09h}{v111} \fmfforce{w,0.12h}{v112} \fmf{boson}{vq2,vq5}

```

```

\fmfforce{0.80w,0.70h}{vq5} \fmf{fermion}{vq5,vq11} \fmf{fermion}{vq5,vq12}
\fmfforce{0.90w,0.65h}{vq11} \fmfforce{0.90w,0.75h}{vq12} \fmf{plain}{vq11,v17}
\fmf{plain}{vq12,v18} \fmfforce{w,0.60h}{v17} \fmfforce{w,0.80h}{v18} \fmf{plain}{vq11,v171}
\fmf{plain}{vq11,v172} \fmf{plain}{vq11,v173} \fmfforce{w,0.58h}{v171} \fmfforce{w,0.62h}{v172}
\fmfforce{w,0.64h}{v173} \fmf{plain}{vq12,v181} \fmf{plain}{vq12,v182} \fmf{plain}{vq12,v183}
\fmfforce{w,0.78h}{v181} \fmfforce{w,0.82h}{v182} \fmfforce{w,0.76h}{v183} \fmf{fermion}{vq2,vq6}
\fmfforce{0.80w,0.80h}{vq6} \fmf{plain}{vq6,vq10} \fmfforce{0.90w,0.85h}{vq10}
\fmf{plain}{vq10,v160} \fmf{plain}{vq10,v16} \fmf{plain}{vq10,v161} \fmf{plain}{vq10,v162}
\fmfforce{w,0.85h}{v160} \fmfforce{w,0.87h}{v161} \fmfforce{w,0.88h}{v16} \fmfforce{w,0.90h}{v162}
\fmfdot{vq1,vq2,vq3,vq4,vq5,vq6,vq7,vq8,vq9,vq10,vq11,vq12} \end{fmfgraph*} \end{fmffile}
\end{document}

```

```

% Diagrama_7_5a1.tex
% $Id: Diagrama_7_5a1.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_5a1
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_5a1
% $ mf `mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_5a1'
% $ latex Diagrama_7_5a1
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp}
\unitlength=1mm \begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_5a1} \begin{fmfgraph*}(40,25)
\fmfleft{i1,i2} \fmfforce{0,0.25h}{i1} \fmfforce{0,0.75h}{i2} \fmf{gluon}{v1,i1} \fmfright{o1,o2}
\fmf{gluon}{i2,v2} \fmf{fermion}{o1,v1,v2,o2} \fmfdot{v1,v2} \fmfforce{0.5w,0.25h}{v1}
\fmfforce{0.5w,0.75h}{v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_5a2.tex
% $Id: Diagrama_7_5a2.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_5a2
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_5a2
% $ mf `mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_5a2'
% $ latex Diagrama_7_5a2
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp}
\unitlength=1mm \begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_5a2}
\begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2} \fmf{gluon}{v1,i1} \fmf{gluon}{i2,v1}
\fmf{gluon}{v1,v2} \fmfright{o1,o2} \fmf{fermion}{o1,v2,o2} \fmfdot{v1,v2}
\fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_5b.tex
% $Id: Diagrama_7_5b.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_5b
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_5b
% $ mf `mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_5b'
% $ latex Diagrama_7_5b
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp}
\unitlength=1mm \begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_5b} \begin{fmfgraph*}(40,25)
\fmfleft{i1,i2} \fmf{fermion}{i1,v1,i2} \fmf{gluon}{v1,v2} \fmfright{o1,o2} \fmf{fermion}{o1,v2,o2}
\fmfdot{v1,v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_5c.tex – trivial FeynMF example
% $Id: Diagrama_7_5c.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_5c
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_5c
% $ mf \mode:=dpi&r; input fmfDiagrama_7_5c'
% $ latex Diagrama_7_5c
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_5c} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmfforce{0,0.25h}{i1} \fmfforce{0,0.75h}{i2} \fmf{gluon}{v1,i1} \fmfright{o1,o2,o3}
\fmf{fermion}{i2,v3,o3} \fmf{boson}{v3,v2} \fmf{fermion}{o1,v1,v2,o2} \fmfdot{v1,v2,v3}
\fmfforce{0.4w,0.25h}{v1} \fmfforce{0.6w,0.5h}{v2} \fmfforce{0.4w,0.75h}{v3} \fmffreeze
\end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

% Diagrama_7_611a.tex
% $Id: Diagrama_7_611a.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_611a
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_611a
% $ mf \mode:=&r; input fmfDiagrama_7_611a'
% $ latex Diagrama_7_611a
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_611a} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmf{fermion}{i1,v1,i2} \fmf{boson}{v1,v2} \fmfright{o1,o2} \fmf{fermion}{o1,v2,o2}
\fmfdot{v1,v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

% Diagrama_7_6a12a.tex
% $Id: Diagrama_7_6a12a.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6a12a
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6a12a
% $ mf \mode:=&r; input fmfDiagrama_7_6a12a'
% $ latex Diagrama_7_6a12a
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6a12a} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{i2,v1} \fmf{fermion}{v1,v2} \fmfforce{0.35w,0.5h}{v1}
\fmfforce{0.55w,0.5h}{v2} \fmfright{o1,o2,o3} \fmfforce{w,0}{o1} \fmfforce{w,0.3h}{o2}
\fmfforce{w,h}{o3} \fmf{fermion}{v2,o3} \fmf{boson}{v2,v3} \fmfforce{0.8w,0.15h}{v3}
\fmf{fermion}{o1,v3,o2} \fmfdot{v1,v2,v3} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

% Diagrama_7_6a12b.tex
% $Id: Diagrama_7_6a12b.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6a12b
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6a12b
% $ mf \mode:=dpi&r; input fmfDiagrama_7_6a12b'
% $ latex Diagrama_7_6a12b

```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6a12b} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{i2,v2} \fmf{fermion}{v2,v1} \fmfforce{0.45w,0.25h}{v1}
\fmfforce{0.45w,0.75h}{v2} \fmfright{o1,o2,o3} \fmfforce{w,0}{o1} \fmfforce{w,0.6h}{o2}
\fmfforce{w,h}{o3} \fmf{boson}{v2,v3} \fmf{fermion}{v1,o1} \fmf{fermion}{o2,v3,o3}
\fmfforce{0.7w,0.80h}{v3} \fmfdot{v1,v2,v3} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_6b21.tex
% $Id: Diagrama_7_6b21.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6b21
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6b21
% $ mf \mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_6b21'
% $ latex Diagrama_7_6b21

```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6b21} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmf{fermion}{i1,v1,o1} \fmfright{o1,o2} \fmflabel{$t$}{o1} \fmflabel{$\bar{t}$}{o2}
\fmf{fermion}{i2,v2,o2} \fmf{boson}{v1,v2} \fmfdot{v1,v2} \fmfforce{0.5w,0.25h}{v1}
\fmfforce{0.5w,0.75h}{v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_6b22a.tex
% $Id: Diagrama_7_6b22a.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6b22a
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6b22a
% $ mf \mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_6b22a'
% $ latex Diagrama_7_6b22a

```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6b22a} \begin{fmfgraph*}(40,25)
\fmfleft{i1,i2} \fmfright{o1,o2,o3} \fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{o1,v1,v2,o2} \fmf{boson}{v2,v3}
\fmf{fermion}{i2,v3,o3} \fmfforce{0.30w,0.20h}{v1} \fmfforce{0.60w,0.40h}{v2}
\fmfforce{0.6w,0.8h}{v3} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_6b22b.tex
% $Id: Diagrama_7_6b22b.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6b22b
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6b22b
% $ mf \mode:=dpi$; input fmfDiagrama_7_6b22b'
% $ latex Diagrama_7_6b22b

```

```

\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6b22b} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmfright{o1,o2,o3} \fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{o1,v1,v2,o2} \fmf{boson}{v2,v3}
\fmf{fermion}{i2,v3,o3} \fmfforce{0.30w,0.20h}{v1} \fmfforce{0.60w,0.40h}{v2}
\fmfforce{0.6w,0.8h}{v3} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```

```

% Diagrama_7_6c31a.tex
% $Id: Diagrama_7_6c31a.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script

```

```

% $ feynmf Diagrama_7_6c31a
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6c31a
% $ mf \mode:= $\$r$ , input fmfDiagrama_7_6c31a'
% $ latex Diagrama_7_6c31a
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6c31a} \begin{fmfgraph*}(40,25) \fmfleft{i1,i2}
\fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{i2,v1} \fmf{fermion}{v1,v2} \fmfright{o1,o2} \fmf{fermion}{v2,o1}
\fmf{boson}{v2,o2} \fmfdot{v1,v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

% Diagrama_7_6c31b.tex
% $Id: Diagrama_7_6c31b.tex,v 1.1 1996/12/02 01:38:45 ohl Exp $
% To typeset, either use the feynmf script
% $ feynmf Diagrama_7_6c31b
% or run Metafont manually
% $ latex Diagrama_7_6c31b
% $ mf \mode:= $\$dpi$ , input fmfDiagrama_7_6c31b'
% $ latex Diagrama_7_6c31b
\documentclass{article} \usepackage{feynmf}%%{feynmp} \unitlength=1mm
\begin{document} \begin{fmffile}{fmfDiagrama_7_6c31b} \begin{fmfgraph*}(40,25)
\fmfleft{i1,i2} \fmf{gluon}{i1,v1} \fmf{fermion}{i2,v2} \fmf{fermion}{v2,v1} \fmfright{o1,o2}
\fmf{fermion}{v1,o1} \fmf{boson}{v2,o2} \fmfdot{v1,v2} \fmfforce{0.5w,0.25h}{v1}
\fmfforce{0.5w,0.75h}{v2} \fmffreeze \end{fmfgraph*} \end{fmffile} \end{document}

```