

---

Visualización y derivación de ondas gravitacionales mediante los modos de polarización  $h_x$  y  $h_+$  en un sistema binario bajo el calibre TT

---

Juan Ignacio Arroyave Santos





UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Visualización y derivación de ondas gravitacionales  
mediante los modos de polarización  $h_x$  y  $h_+$  en un  
sistema binario bajo el calibre TT**

Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Juan Ignacio Arroyave Santos  
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala, 2025

Vo.Bo.:



(f) \_\_\_\_\_  
PhD. Julio Gallegos

Tribunal Examinador:



(f) \_\_\_\_\_  
PhD. Julio Gallegos



(f) \_\_\_\_\_  
Msc. Eduardo Alvarez



(f) \_\_\_\_\_  
PhD. Adrian Licht

Fecha de aprobación: Guatemala, 29 de Julio del 2025.

La motivación de este trabajo surgió gracias a la fascinación profunda del autor con la Matemática pura, como la constante curiosidad sobre los distintos temas de matemática avanzada lo llevó a cursar selectivos como Análisis de Variable Real y Geometría Diferencial. Esto fue solidificado aún más al recibir el curso de Relatividad General durante la elaboración del pregrado, donde finalmente pudo observar cómo todos los conceptos abstractos previamente estudiados tomaban forma en una teoría concisa y bien delimitada.

Esto provocó que el autor indagara y profundizara más en temas de relatividad general, especialmente aquellos que resonaban con los temas vistos en el curso de Geometría Diferencial, el cual el autor cursó durante toda la duración del semestre en el cual fue la elaboración de este trabajo. Encontrando así bellas expresiones matemáticas como el teorema de Lovelock, el teorema generalizado de Stokes, las condiciones de calibre TT, entre otros.

Como consecuencia de lo anterior, gran parte de la teoría utilizada en este trabajo no fue cubierta en los cursos de licenciatura cursados por el autor, sino que fue estudiada y desarrollada por aparte. Sin embargo, la excelente formación que presta esta casa de estudios fue el contribuyente principal para el éxito del trabajo en este aspecto.

Finalmente, antes de comenzar, se enuncia el uso adoptado a lo largo del presente trabajo del enmarcado en las ecuaciones como una herramienta para **enfatizar** la expresión mostrada, por ejemplo:

Expresión a la cual se le hace énfasis.

---

## Agradecimientos

---

Después de concluir este trabajo de investigación, nace la necesidad de expresar el más profundo agradecimiento a las siguientes personas:

- MBA. María Renée Santos Sánchez, por ser la mejor madre que esta efímera existencia me pudo haber otorgado, su apoyo, paciencia y amor han sido el factor decisivo para la elaboración de este trabajo.
- MEd. Ana María Sánchez García, por el apoyo incondicional que brindo durante la elaboración de este trabajo, pero sobretodo, por ser mi segunda y muy exigente madre.
- MSc. Irene Aguilar, por siempre creer y promover el talento de sus estudiantes.
- PhD. Julio Gallegos, por su constante apoyo durante la elaboración de este trabajo, pero sobre todo, por ser una fuente de inspiración y admiración constante.
- MSc. Dorval Carías, por su constante apoyo a lo largo de la carrera.
- MSc. Eduardo Álvarez, por ayudarme a darme cuenta de mi potencial.

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de cuadros</b>	<b>X</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>2</b>
2.1. Objetivo general . . . . .	2
2.2. Objetivos específicos . . . . .	2
<b>3. Justificación</b>	<b>3</b>
<b>4. Marco teórico</b>	<b>4</b>
4.1. Mecánica clásica . . . . .	4
4.1.1. Principio estacionario de Hamilton . . . . .	4
4.1.2. Cálculo variacional . . . . .	5
4.2. Teoría clásica de campos . . . . .	6
4.2.1. Segundo teorema de Noether . . . . .	7
4.3. Geometría diferencial . . . . .	9
4.3.1. El espacio-tiempo . . . . .	9
4.3.2. El producto exterior y las formas diferenciales . . . . .	9
4.3.3. Soporte compacto . . . . .	11
4.4. Introducción a la relatividad general . . . . .	12
4.4.1. Notación de Einstein . . . . .	12
4.4.2. Métrica usual . . . . .	13
4.4.3. Métrica de Minkowski . . . . .	13
4.5. Aproximación posnewtoniana(PN) . . . . .	13
<b>5. Antecedentes</b>	<b>14</b>
<b>6. Alcance</b>	<b>15</b>

<b>7. Derivaciones teóricas</b>	<b>16</b>
7.1. Derivación de las ecuaciones de campo de Einstein	16
7.1.1. Derivación del principio de Hamilton	16
7.1.2. Generalización a un sistema con grados de libertad infinitos	18
7.1.3. Densidad lagrangiana	19
7.1.4. Variar la acción respecto a la métrica	27
7.1.5. Aplicar el teorema de Lovelock	27
7.2. Construir la acción de Hilbert-Einstein	29
7.2.1. Candidatos para la densidad lagrangiana	29
7.2.2. La acción de Hilbert-Einstein	30
7.3. Límite de campo débil y estructura de calibre de las ecuaciones de campo de Einstein	32
7.3.1. Linealización de la gravedad bajo la métrica de Minkowski	33
7.4. Condiciones de calibre	43
7.4.1. Simetría de calibre	43
7.4.2. El calibre de Lorenz	45
7.4.3. Sistema de coordenadas del calibre de Lorenz	46
7.4.4. Calibre TT	48
7.5. Modos de polarización	56
7.5.1. Interpretación	56
7.5.2. Comprobación	56
<b>8. Visualización de las ondas gravitacionales</b>	<b>59</b>
8.1. Preliminares	60
8.1.1. Base teórica	60
8.1.2. Funcionamiento	60
8.1.3. Aproximaciones	61
8.1.4. Funcionamiento (parte 2)	62
8.2. Métodos implementados en la visualización	63
8.2.1. <i>Linspace</i> y <i>Mesh</i>	63
8.2.2. Array broadcasting	64
8.3. Programación defensiva	65
8.4. <i>Outputs</i>	66
8.4.1. Primer <i>output</i>	67
8.4.2. Segundo <i>output</i>	69
8.4.3. Tercer <i>output</i>	71
8.4.4. Cuarto <i>output</i>	73
8.4.5. Quinto <i>output</i>	75
8.4.6. Sexto <i>output</i>	77
<b>9. Discusión de resultados</b>	<b>79</b>
9.1. Relación de proporcionalidad de la frecuencia en la órbita circular interna más estable	80
9.2. Relación de proporcionalidad del tiempo al <i>merger</i> con masas fijas	81
9.3. Relación de proporcionalidad del tiempo al <i>merger</i> con frecuencia fija	82
9.4. Relación de proporcionalidad del <i>strain</i> con las masas del binario	83
9.5. Relación de proporcionalidad de la masa <i>chirp</i> y el <i>strain</i> teórico	84
9.6. Relación entre el <i>strain</i> proyectado y el <i>strain</i> teórico	85
9.7. Validación de la aproximación de campo lejano y del cuadrupolo	86
9.8. Validación del uso de <i>meshgrid</i> y <i>linspace</i> como métodos para visualizar el sistema y efectos del factor de escala visual	87
9.9. Derivaciones teóricas	88
<b>10. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>11. Recomendaciones</b>	<b>90</b>

<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>
<b>Anexos</b>	<b>94</b>
<b>A. Código fuente de la simulación</b>	<b>94</b>
<b>B. Propiedad alternante para las 2 y 3-formas</b>	<b>97</b>
B.1. Código para la visualización de las 2-formas . . . . .	97
B.1.1. Visualización de la 2-forma . . . . .	99
B.1.2. Código para visualizar la 3-forma . . . . .	100
B.1.3. Visualización de la 3-forma . . . . .	103
<b>C. Derivaciones complementarias</b>	<b>105</b>
<b>D. Visualización sin factor de escala</b>	<b>114</b>

---

Lista de figuras

---

4.1. Ilustración de la variación y el extremo de un funcional . . . . .	5
4.2. Visualización de la propiedad alternante en una 2-forma . . . . .	10
4.3. Visualización de la propiedad alternante en una 2-forma . . . . .	10
7.1. Transformación del sistema coordenado para el calibre de Lorenz . . . . .	46
8.1. Vista superior 1 . . . . .	67
8.2. Vista lateral 1 . . . . .	68
8.3. Valores calculados visualización 1 . . . . .	68
8.4. Vista superior 2 . . . . .	69
8.5. Vista lateral 2 . . . . .	70
8.6. Valores calculados visualización 2 . . . . .	70
8.7. Vista superior 3 . . . . .	71
8.8. Vista lateral 3 . . . . .	72
8.9. Valores calculados visualización 3 . . . . .	72
8.10. Vista superior 4 . . . . .	73
8.11. Vista lateral 4 . . . . .	74
8.12. Valores calculados visualización 4 . . . . .	74
8.13. Vista superior 5 . . . . .	75
8.14. Vista lateral 5 . . . . .	76
8.15. Valores calculados visualización 5 . . . . .	76
8.16. Vista superior 6 . . . . .	77
8.17. Vista lateral 6 . . . . .	78
8.18. Valores calculados visualización 6 . . . . .	78
9.1. Gráfica entre la masa total del sistema binario y la frecuencia del <i>ISCO</i> en la simulación(log-log) base 10 . . . . .	80
9.2. Gráfica entre la frecuencia instantánea y el tiempo al <i>merger</i> en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la masa total fija en (3.94 masas solares) . . . . .	81
9.3. Gráfica de masa total vs tiempo a coalescencia en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija a 200(Hz) . . . . .	82
9.4. Gráfica de la masa <i>chirp</i> vs el <i>strain</i> gravitacional en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	83
9.5. Gráfica de la masa <i>chirp</i> vs el <i>strain</i> gravitacional teórico calculado por el programa en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	84
9.6. Gráfica de los <i>strains</i> proyectado y teórico con frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	85

B.1. Visualización de la propiedad alternante de una 2-forma . . . . .	99
B.2. Visualización de la propiedad alternante de una 2-forma . . . . .	99
B.3. Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma . . . . .	103
B.4. Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma . . . . .	103
B.5. Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma . . . . .	104
B.6. Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma . . . . .	104
C.1. Derivación de la expresión del tiempo al merger . . . . .	106
C.2. Derivación de la expresión del tiempo al merger . . . . .	107
C.3. Comprobación que el tensor de curvatura es distinto de cero bajo calibre TT . . . . .	108
C.4. Demostraciones generales/ideas clave . . . . .	109
C.5. Demostraciones generales/ideas clave . . . . .	110
C.6. Demostraciones generales/ideas clave . . . . .	111
C.7. Demostraciones generales/ideas clave . . . . .	112
C.8. Demostraciones generales/ideas clave . . . . .	113
D.1. Visualización sin el factor de escala para cumplir con el principio de Nyquist-Shannon	114

---

## Lista de cuadros

---

8.1. Constantes numéricas del programa . . . . .	60
8.2. Variables ingresadas por el usuario . . . . .	60
8.3. Parámetros calculados del programa . . . . .	61
8.4. Interpretación física del <i>strain</i> en el código . . . . .	64
8.5. Primer set de condiciones iniciales . . . . .	67
8.6. Segundo set de condiciones iniciales . . . . .	69
8.7. Tercer set de condiciones iniciales . . . . .	71
8.8. Cuarto set de condiciones iniciales . . . . .	73
8.9. Quinto set de condiciones iniciales . . . . .	75
8.10. Sexto set de condiciones iniciales . . . . .	77
9.1. Relación entre la masa total del sistema binario y la frecuencia del <i>ISCO</i> en la simulación	80
9.2. Relación entre la frecuencia instantánea $f_{\text{snap}}$ y el tiempo a la coalescencia $t_{\text{coal}}$ . dejando la masa total fija en (3.94 masas solares) . . . . .	81
9.3. Relación entre la masa total del sistema binario y el tiempo a la coalescencia, dejando la frecuencia fija a 200(Hz) . . . . .	82
9.4. Relación entre la masa <i>chirp</i> $\mathcal{M}$ y el <i>strain</i> gravitacional proyectado $h_0$ dejando la frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	83
9.5. Relación teórica entre la masa <i>chirp</i> $\mathcal{M}$ y el <i>strain</i> gravitacional teórico $h_0$ calculado por el programa con frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	84
9.6. Comparación entre el <i>strain</i> proyectado y el <i>strain</i> teórico calculado por el programa para cada valor de masa <i>chirp</i> con frecuencia fija en (200Hz) . . . . .	85

Como parte de este presente trabajo se llevó a cabo la derivación de las ecuaciones de campo a partir del principio estacionario de Hamilton. Esto se realizó generalizando el concepto de la acción en mecánica clásica a la teoría clásica de campos utilizando un refinamiento de red. Seguidamente se mostró la forma y dependencias que toma la densidad lagrangiana bajo dicha teoría, luego, a manera de probar las cuatro condiciones que exige el teorema de Lovelock, se demostraron las siguientes condiciones sobre la densidad lagrangiana: invariante bajo difeomorfismos, localidad y densidad escalar, dependencia lineal respecto a las dos primeras derivadas del campo. Durante este proceso se hizo uso de conceptos de geometría diferencial tal como lo son las formas diferenciales, el producto exterior, el teorema de Stokes generalizado, etc.

Después de demostrar las condiciones sobre la densidad lagrangiana, se introdujo la derivada de Fréchet de este respecto a la métrica usual. Esto permitió generar la forma del tensor utilizado en el teorema de Lovelock; este exige que dicho tensor debe de ser: simétrico, concomitante de la métrica, divergencia nula y lineal respecto a las segundas derivadas de la métrica. De dichas propiedades la única que no es automáticamente satisfecha mediante las propiedades de la densidad lagrangiana previamente mostradas es la divergencia nula, esta se demostró mediante el segundo teorema de Emmy Noether. Al aplicar el teorema de Lovelock, se logró especificar la forma resultante del tensor formado a partir de la derivada de Fréchet de la densidad lagrangiana. Esta forma resultante es la del tensor de Einstein, y de esta forma se extrajeron las ecuaciones de campo de Einstein mediante el principio estacionario de Hamilton.

Seguidamente se presentó cómo al aplicar las condiciones de linealización de la gravedad, y los calibres de Lorenz y TT, los resultados de las ecuaciones de campo son restringidos a ecuaciones de ondas planas. Esto se llevó a cabo con un gran nivel de detalle, mostrando como cada componente de los elementos concomitantes de la métrica, como el tensor de Ricci, su escalar, el tensor de Riemann, los símbolos de Christoffel y el tensor de Einstein, se desvanece o permanece al aplicar la condición de linealización. De misma forma se mostró componente por componente cómo al aplicar las condiciones de calibre de Lorenz y TT, las 16 componentes independientes de la ecuación de onda resultante, son reducidas a únicamente dos componentes independientes, siendo estas los modos de polarización  $h_+$  y  $h_\times$ .

Finalmente, se utilizaron las expresiones encontradas para los modos de polarización para formar un programa que visualice los efectos/perturbaciones que estos inducen sobre el espacio-tiempo, esto se llevó a cabo mediante la proyección cuadrupolar del *strain* gravitacional generado por dichos modos bajo la aproximación posnewtoniana de orden(0PN). La visualización presentada utiliza las aproximaciones derivadas de la teoría anterior para calcular la frecuencia *ISCO*, el *strain* gravitacional, el tiempo al *merger* y la frecuencia máxima posible para que el sistema no se salga de la aproximación (0PN). Además se introdujo a la visualización un factor de escala visual de la forma  $S = \frac{f_{\text{snap}}}{500}$  para la fase espacial, este se implementó a manera de cumplir con el principio de Nyquist-Shannon para la simulación de ondas.

La relatividad general es una rama de la física formulada por Albert Einstein en 1915. Esta establece como su principio fundamental el hecho que la gravedad no es una fuerza en el sentido clásico, como antes se tenía formulado, más bien, esta es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo provocada por la presencia de energía y momento. Esta teoría es expandida a partir del principio de equivalencia postulado en la relatividad especial, el cual establece que las leyes de la física deben de conservar su forma bajo cualquier cambio de coordenadas.

La dinámica del campo gravitacional se describe a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales vinculan la geometría del espacio- tiempo representada por el tensor  $R_{\mu\nu}$  y escalar de Ricci  $\mathbf{R}$ , con la materia presente en el universo utilizando el tensor de estrés-energía  $T_{\mu\nu}$ . Dichas ecuaciones de campo toman su forma final utilizando la constante cosmológica  $\Lambda$  y es presentada en [15, p. 736] como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Las ecuaciones de campo pueden ser restringidas mediante diversas condiciones de calibre, si estas se deciden restringir específicamente mediante el calibre de Lorenz y subsecuentemente el calibre TT en el vacío, las soluciones resultantes toman la forma de ondas planas con dos modos de polarización distintos, estos son los modos  $h_+$  y  $h_\times$  tal como se muestra en [13]. Dichos modos de polarización representan las perturbaciones en la métrica del espacio-tiempo generadas por las ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales son generadas por el momento cuadrupolar de sistemas binarios de objetos celestes sumamente densos, si estos suelen ser agujeros negros, estrellas de neutrones, etc. se les denomina como binarios compactos. Dichos sistemas presentan cuatro fases principales durante su evolución temporal, estas son la fase inspiral, el *merger*, *ring-down*, y finalmente el sistema termina como un agujero negro del tipo *Kerr*. Por lo tanto, el presente trabajo de investigación busca derivar las ecuaciones de campo a partir del principio estacionario de Hamilton para luego aplicar las diferentes condiciones de calibre, a manera de obtener los dos distintos modos de polarización  $h_+$  y  $h_\times$ . Para así utilizando dichos modos, generar un programa que visualice a las ondas gravitacionales generadas por un sistema binario compacto en su fase inspiral, bajo la aproximación posnewtoniana de orden (0PN).

## 2.1. Objetivo general

Proporcionar tanto una visualización en formato de simulación como una derivación completa de las ondas gravitacionales generadas por un sistema binario mediante sus dos modos de polarización  $h_{\times}$  y  $h_{+}$  trabajadas bajo el calibre TT. Esto a fin de facilitar el estudio mostrando paso por paso el procedimiento a detalle normalmente omitido por la literatura estándar.

## 2.2. Objetivos específicos

- Mostrar el procedimiento de la derivación de las ecuaciones de campo de Einstein partiendo del principio estacionario de Hamilton.
- Derivar las ecuaciones de ondas gravitacionales, mostrando de manera clara cómo las distintas condiciones de calibre generan soluciones en forma de ecuaciones de onda plana.
- Realizar una simulación computacional en Python que visualice las ondas gravitacionales mediante sus dos distintos modos de polarización bajo la proyección del cuadrupolo.

Las ondas gravitacionales son uno de los temas más modernos de la física actual, tras su descubrimiento experimental en el 2015 por el observatorio *LIGO*, estas han provocado el interés y estudio de miles de científicos alrededor del mundo. Esto ha provocado que a pocos años de su descubrimiento, se haya desarrollado una extensa teoría que describe su comportamiento y origen. Sin embargo, pocos estudios se han dedicado al desarrollo teórico detallado que hay detrás de las ondas gravitacionales y su propagación en el vacío.

Los modos de polarización de las ondas gravitacionales son producto de aplicar las condiciones del calibre de Lorenz y TT a las ecuaciones de campo de Einstein, dichas ecuaciones de campo son normalmente derivadas en la literatura estándar mediante la ecuación de Poisson. No obstante estas pueden ser derivadas a partir del principio estacionario de Hamilton, un concepto bien conocido de la mecánica clásica. Esta ruta para extraer las ecuaciones de campo a partir de un principio de mecánica clásica no suele ser favorecida por la gran mayoría de autores debido al nivel de detalle y herramienta matemática necesaria para llevar a cabo el trabajo. A pesar de ello, esta ruta el momento de desarrollar la teoría necesaria, prueba ser una manera no solo bella sino intuitiva de derivación para un concepto tan abstracto como las ondas gravitacionales.

Dado al nivel de abstracción necesario para comprender la teoría detrás de las ondas gravitacionales, el significado de estas suele perderse en el camino al momento de desarrollar los diversos conceptos necesarios para describirlas. Es por esto que el presente trabajo procura realizar una derivación de los modos de polarización de las ondas gravitacionales bajo el calibre TT, utilizando las ecuaciones de campo de Einstein derivadas a partir del principio estacionario de Hamilton. Y además un programa que complemente la teoría y visualice las perturbaciones que inducen las ondas gravitacionales sobre la métrica del espacio-tiempo mediante sus modos de polarización.

## 4.1. Mecánica clásica

### 4.1.1. Principio estacionario de Hamilton

La mecánica clásica utiliza los principios matemáticos derivados por Isaac Newton a manera de poder describir una partícula o sistemas de partículas y sus interacciones. El fin de estos principios fundamentales yace en lograr describir de manera matemática los fenómenos naturales, por lo que el estudio de minimizar cantidades surgió naturalmente de los principios de Newton, dado a que la naturaleza siempre busca minimizar cantidades elementales en los procesos físicos. El primero de estos principios de acción mínima en ser descubierto fue la trayectoria de la luz postulado por Fermat(1661). Seguidamente en los años 1834-1835 Hamilton anunció su principio estacionario, este se muestra en [26, p. 230] como:

"De todas las posibles trayectorias sobre las cuales un sistema dinámico puede moverse de un punto determinado a otro en cierto tiempo específico(bajo una cantidad determinada de restricciones), la trayectoria real seguida es aquella que minimiza la integral de tiempo respecto a la diferencia entre la energía cinética y potencial. "

Esto se puede mostrar en términos de cálculos de variaciones tal como lo hacen en Thornton, Goldstein [26][8]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (4.1)$$

La diferencia entre la energía cinética y la energía potencial suele ser llamada **lagrangiano**, y esta es la cantidad normalmente utilizada para describir al principio estacionario. Además, a la integral de este principio de Hamilton se le conoce como la **acción**, normalmente denotada por una  $S$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt = 0 \quad (4.2)$$

De la cual se suelen derivar las ecuaciones de movimiento de **Euler-Lagrange** para la partícula y su lagrangiano.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2} \quad (4.3)$$

En teorías más avanzadas es normal utilizar la mecánica clásica junto con las **coordenadas generalizadas**, estas son cualquier conjunto de cantidades las cuales logran especificar completamente el estado de un sistema[26]. Estas se denotan de manera estándar como  $q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \mid \dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t)$  y se pueden expresar tanto el principio de acción mínima como las ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando esta convención de coordenadas:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \tag{4.5}$$

### 4.1.2. Cálculo variacional

El cálculo variacional se concentra en el estudio de la **variación** y la importancia en la trayectoria que da soluciones en la forma de **extremos**, el problema principal que incita a esta teoría es determinar la función  $y(x)$ , tal que la siguiente integral es un extremo [8][26]:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x) : x\} dx \tag{4.6}$$

Esto también suele reescribirse utilizando la notación delta[26].

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y' : x\} dx = 0 \tag{4.7}$$

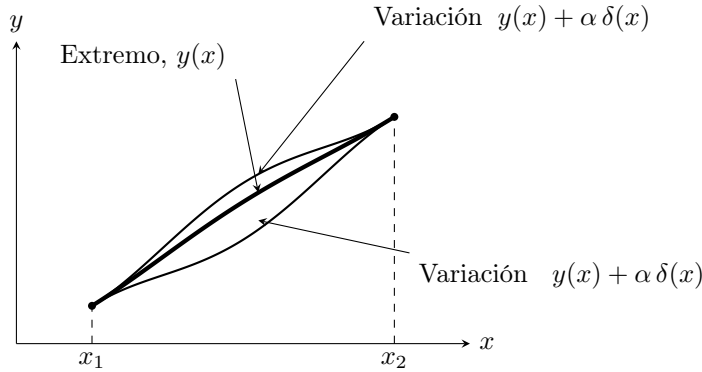


Figura 4.1: Ilustración de la variación y el extremo de un funcional

La condición para que esta integral de como resultado un extremo es la siguiente[26]:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \tag{4.8}$$

Esto obliga a las variaciones a desvanecer en los extremos.

$$\delta(x_1) = 0 = \delta(x_2) \tag{4.9}$$

## 4.2. Teoría clásica de campos

La teoría de campos presenta surge debido a la necesidad de utilizar espacios de configuración continua, donde un **campo** asigna un valor (este puede ser escalar o tensorial) a cada punto del espacio-tiempo, este se define como una aplicación suave de la forma:

$$\phi : M \mapsto \psi, \quad x \mapsto \phi(x) = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4.10)$$

Donde  $M$  es una **variedad** 4-dimensional (espacio-tiempo)  $\psi$  es el espacio objetivo, nuevamente este puede ser escalar, vectorial, tensorial, etc. Esto causa que surjan infinitos grados de libertad, en una región local de campos, el lagrangiano es transformado a la integral espacial de la **densidad lagrangiana**[20]. Esta densidad es una función de uno o más campos ( $\phi_a(x), \phi_b(x)$ ), junto con sus derivadas ( $\partial_\mu \phi_{a,b}(x)$ ). Además, de la densidad lagrangiana no ser invariante bajo difeomorfismos, se tiene que también depende de la coordenada ( $x$ ). Esto hace que la densidad lagrangiana sea expresada como:

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x) d^4x \quad (4.11)$$

Donde  $L$  es el lagrangiano utilizado en mecánica clásica. Continuando con las analogías a mecánica clásica, el principio estacionario de Hamilton. y subsecuentemente las ecuaciones de Euler-Lagrange adquieren una forma definida bajo la teoría de campos[20]:

$$\delta S = 0 = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi)} \delta (\partial_\mu \partial_\nu \phi) \right] \quad (4.12)$$

Para sacar las variaciones fuera del campo se necesita del **teorema de Stokes generalizado**, a manera de separar cada término en dos integrales distintas y anular el término de superficie resultante. El teorema de Stokes generalizado dicta que:

Sea  $M$  una variedad **orientable** y **diferenciable** ( $n$ -dimensional) con su borde  $\partial M$ ; sea  $w \in \Omega^{n-1}$  una **1-forma** diferenciable ( $n-1$ ) con **soporte compacto**, entonces:

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w \quad (4.13)$$

Los términos resaltados se explicarán más a detalle en la siguiente sección. Esto permite extraer las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas para teoría de campos.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi)} \right] = 0 \quad (4.14)$$

La derivada funcional o derivada de Fréchet de un funcional, en este contexto será ( $\mathcal{L}$ ) actuando sobre una función  $\phi$  debe de cumplir la relación[16]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{L}(\phi + h) - \mathcal{L}(\phi) - A(h)|}{\|h\|} = 0 \quad (4.15)$$

Donde  $A$  es cualquier funcional lineal que mapea algún espacio de funciones  $X \mapsto \mathbb{R}$ . Si la condición anterior se cumple, entonces se dice que  $A$  es la derivada funcional de  $\mathcal{L}$  en  $\phi$ . Y se expresa como:

$$A = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} [\phi] \quad (4.16)$$

Una condición sumamente importante es que si  $\phi$  es lineal, entonces la siguiente relación se cumple[16]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = \mathcal{L} \quad (4.17)$$

### 4.2.1. Segundo teorema de Noether

El segundo teorema de Emmy Noether es uno de los resultados más importantes en la matemática y física de los últimos siglos. Este fue publicado en el año 1918 y es formulado en su publicación original [17, p. 239] como:

*Si la integral  $I$  es invariante respecto de un grupo continuo infinito  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  en el que las funciones arbitrarias intervienen hasta la derivada de orden  $\sigma$ , entonces existen  $\rho$  identidades entre las expresiones de Euler–Lagrange y sus derivadas hasta el orden  $\sigma$ ; y también vale la recíproca.*

En la publicación original Emmy Noether muestra esto de manera sumamente elegante, siguiendo el procedimiento mostrado a continuación[17].

#### Segundo teorema de Noether en su forma original

Sea  $S[\phi] = \int_D \mathcal{L} d^d x$  la acción de un campo clásico, cuya densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(x, \phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots)$  pueda depender de finitas derivadas respecto a uno o varios campos  $\phi^a(x)$ , sobre los cuales existe una familia de variaciones de campo  $\delta\phi^a(x)$  la cual es parametrizada por funciones arbitrarias  $\varepsilon^\alpha(x)$  de la forma:

$$\delta\phi_a(x) = R_\alpha^a(x, \partial)\varepsilon^\alpha(x) \quad (4.18)$$

Tal que el cambio inducido por la variación es equivalente a la divergencia:

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \partial_\mu (\Sigma_\alpha^\mu(x, \phi, \partial\phi)\varepsilon^\alpha) \quad (4.19)$$

Donde  $R_\alpha^a$  es la matriz de operadores diferenciales que describen como el campo interactúa con el parámetro infinitesimal de calibre  $\varepsilon^\alpha(x)$ .

Si las condiciones anteriores se cumplen, entonces para las expresiones de Euler-Lagrange

$$E_a := \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^a} = \sum_{r=0}^k (-1)^r \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \phi^a)} \right] \quad (4.20)$$

Que satisfacen las identidades (una por cada parámetro de calibre) asociadas a los términos de superficie.

$$R_\alpha^a E_a = 0 \quad (4.21)$$

Existen operadores diferenciales de la forma  $N_\alpha^\mu$ , construidos a partir de  $R_\alpha^a$  tal que:

$$\boxed{R_\alpha^a E_a = \partial_\mu N_\alpha^\mu \implies \partial_\mu N_\alpha^\mu = 0} \quad (4.22)$$

Por lo que una densidad al ser invariante bajo condiciones de calibre sufre relaciones diferenciales en sus ecuaciones de movimiento.[17].

Esto tiene una interpretación más intuitiva para los físicos si se expresa en forma de la **divergencia**, específicamente útil en el contexto de electromagnetismo y relatividad general y es el que se presenta a continuación.

**Segundo teorema de Noether versión intuitiva**

Suponga una acción invariante bajo **difeomorfismos** (cambios de coordenadas), actuando sobre la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y otros campos arbitrarios  $\psi$  definida como:

$$S[g, \psi] = \int_D \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \psi, \nabla\psi, \dots) d^d x \quad (4.23)$$

Donde se define el siguiente tensor utilizando la derivada de Fréchet:

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (4.24)$$

Considere el siguiente difeomorfismo  $\varphi := \varphi(x^\mu) \mapsto x^\mu + \xi^\mu(x)$  donde la variación  $\xi^\mu(x)$  es un campo vectorial arbitrario. Con un efecto sobre la métrica definido

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (4.25)$$

Además se le pide a la acción que sea **escalar**, es decir:

$$\delta_\xi S = 0 \quad (4.26)$$

Entonces la siguiente relación se cumple:

$$\delta_\xi S = \int_D \sqrt{-g} E^{\mu\nu} (2\nabla_\mu \xi_\nu) d^d x = -2 \int_D \sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu E^{\mu\nu} + \text{Término de superficie} \quad (4.27)$$

Dado a que el vector  $\xi^\mu(x)$  es arbitrario en todos los puntos, la expresión anterior implica que el integrando debe desvanecer, por lo tanto:

$$\boxed{\nabla_\mu E^{\mu\nu} = 0} \quad (4.28)$$

Esta es la forma del teorema presentada en [15][28] y conduce naturalmente a la **identidad contraída de Bianchi**, la cual dicta que para el tensor de Einstein, también se cumple la relación previamente mostrada.

$$\boxed{\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0} \quad (4.29)$$

## 4.3. Geometría diferencial

### 4.3.1. El espacio-tiempo

El uso de geometría diferencial es indispensable en la relatividad general, ya que dota a la teoría no solo con herramientas sino también con una interpretación intuitiva de los conceptos abstractos que se manejan en esta. Gracias a esto el espacio-tiempo puede ser interpretado como una **variedad 4-dimensional** la cual se asume que cuenta con las siguientes propiedades:

- Diferenciable de clase  $C^\infty$ .
- Orientable

En otras palabras; diferenciable de clase  $C^\infty$  significa que contiene todas sus derivadas. Por otro lado la orientabilidad no es tan trivial, esta se define formalmente como[9][18]:

Una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^4$  es **orientable** cuando existe al menos un atlas coherente de clase  $C^k$  en  $S$ . Donde un atlas  $A$  de clase  $C^k$  coherente sobre una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^4$  se define como una colección de cartas locales (parametrizaciones) de la forma[24]:

$$A = \{(x_i, U_i)\}_i \quad \text{con } x_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow V_i \cap S \quad (4.30)$$

Tales que

- $S = \cup_i V_i$
- Las parametrizaciones  $x_i$  son todas de clase  $C^k$

### 4.3.2. El producto exterior y las formas diferenciales

En una variedad suave n-dimensional, se define el **producto exterior** de orden  $k$  sobre el espacio cotangente como[10]:

$$\wedge^k T_p^* M \quad (4.31)$$

Este también puede expresarse como:

$$\wedge : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \rightarrow \wedge^k V \quad (4.32)$$

Y posee las siguientes condiciones.

- Mapeo multilineal:

$$\wedge(\dots, av + bw, \dots) = a \wedge(\dots, v, \dots) + b \wedge(\dots, w, \dots) \quad (4.33)$$

- Alternante(también conocido como antisimetría):

$$w \wedge v = -v \wedge w \quad (4.34)$$

En el cual una  $k$ -forma es una sección suave definida como:

$$w \in \Omega^k(M) := \Gamma(\wedge^k T^* M) \quad (4.35)$$

Esta  $k$ -forma posee coordenadas en la forma  $(x^1, \dots, x^n)$ . La base de las  $k$ -formas se expresa como la sumatoria de las 1-formas de la siguiente manera[10]:

$$w = \sum_{i_k=0}^n w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (4.36)$$

Por ejemplo una 4–forma puede ser expresada en términos de su base como:

$$dx^4 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (4.37)$$

El producto exterior entre dos 1–formas puede ser interpretado como el área generada por los vectores asociados. A continuación se muestran visualizaciones intuitivas de las  $k$ –formas y la propiedad alternante de su producto exterior, estas fueron realizadas por el autor en un programa de Python como una herramienta visual extra del presente trabajo de graduación, el código para dichas visualizaciones se encuentra en el Anexo B, junto con la visualización para la 3–forma.

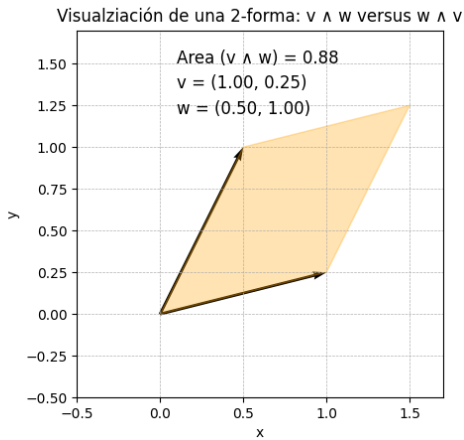


Figura 4.2: Visualización de la propiedad alternante en una 2–forma

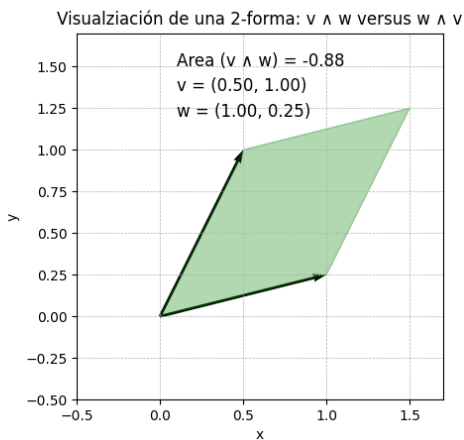


Figura 4.3: Visualización de la propiedad alternante en una 2–forma

### 4.3.3. Soporte compacto

El soporte compacto de una función se define formalmente en [9] de la siguiente forma:

Sea  $M$  una variedad diferenciable, y sea  $f : M \mapsto \mathbb{R}^n$  una función continua. Entonces, se dice que  $f$  tiene **soporte compacto** si la **cerradura** del conjunto

$$\text{supp}(f) := \{x \in M \ni f(x) \neq 0\} \quad (4.38)$$

Es un subconjunto **compacto** de  $M$ .

#### Cerradura:

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . se define a un **punto de acumulación** en [1] como:

Un punto  $x \in \mathbb{R}$  es un punto de acumulación de  $A$  si para cada intervalo abierto de la forma  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  para todo  $(\varepsilon > 0)$ .

La **cerradura** de  $A$ , es el conjunto de todos sus **puntos de acumulación**. Denotado formalmente como  $\bar{A}$  donde:

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} = A \cup A' \quad (4.39)$$

donde  $A'$  son los puntos límites del conjunto  $A$

#### Compacto:

La compacidad se define en [1] como:

Se dice que un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}$  es compacto si para toda cubierta abierta de  $K$ , existe una subcubierta finita.

Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Una **cubierta abierta** de  $A$ , es una colección  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  de conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}$ , cuya unión contiene a  $A$ : es decir.

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \quad (4.40)$$

Si  $\mathcal{G}'$  es una subcolección de conjuntos de  $\mathcal{G}$  tal que la unión de los conjuntos en  $\mathcal{G}'$  también contiene a  $A$ , entonces  $\mathcal{G}'$  es llamado una **subcubierta** de  $\mathcal{G}$ . Además si  $\mathcal{G}'$  consiste de un número finito de conjuntos, entonces a  $\mathcal{G}'$  se le llama una **subcubierta finita** de  $\mathcal{G}$ .

## 4.4. Introducción a la relatividad general

### 4.4.1. Notación de Einstein

En la teoría de relatividad general es crucial comprender la notación de Einstein para sumatorias. Antes de mostrar explícitamente las propiedades de esta se debe de notar que cuando un elemento tiene sus índices levantados o arriba ( $A^\mu$ ) se dice que es **contravariante**, si tiene los índices abajo ( $A_\mu$ ) se le denomina **covariante**. Tomando esto en cuenta se introduce la notación de Einstein.

Supóngase que se tienen dos vectores  $A, B$ , y estos tienen componentes en las 3 dimensiones espaciales:

$$A = A_x, A_y, A_z \quad B = B_x, B_y, B_z \quad (4.41)$$

Entonces se puede definir ambos vectores bajo un solo índice  $i$  que recorre todas sus componentes

$$A_i = A_x, A_y, A_z \quad B_i = B_x, B_y, B_z \quad \ni i = (x, y, z) \quad (4.42)$$

$$\implies A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_i B_i \quad (4.43)$$

En relatividad general el vector  $i$  se define como las coordenadas del espacio-tiempo  $i = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  en donde  $x^0$  se refiere a la componente temporal, y el resto son las componentes espaciales usuales en mecánica clásica. Es por esto que se refiere al espacio-tiempo como una variedad 4 dimensional.

Cuando un índice aparece exactamente dos veces, una de forma contravariante y la otra de covariante, automáticamente se suma sobre su rango completo de valores.

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^{n-1} A^\mu B_\mu \quad (4.44)$$

Nótese que solo el par  $\mu$  se suma, otras instancias de la misma letra simplemente inician una nueva suma independiente de la anterior. A esta posición mezclada de índices se le conoce como *dummy indexes* o índice contraído y posee 2 propiedades notorias.

- **Arbitrariedad en el nombre:**

Se puede reemplazar un *dummy index* por cualquier otro símbolo y esto no afectara el valor de la expresión.

$$A^\mu B_\mu = A^\rho B_\rho = A^\xi B_\xi \dots \quad (4.45)$$

- **Desvanece en la expresión final:**

Después de que se realiza la suma, el *dummy index* desaparece. Por esta razón es que los *dummy indexes* no contiene ningún tipo de información acerca del tipo (rango) del tensor resultante.

$$A_\mu^i B_{\nu i} = \sum_i A_{i\mu} B_{i\nu} \rightarrow A_\mu B_\nu \quad (4.46)$$

Por otro lado los *free indexes* son aquellos que aparecen exactamente una vez en el término, estos si denotan las componentes individuales del tensor resultante. Es de suma importancia notar que todas las ecuaciones tensoriales deben de estar **balanceadas**; esto quiere decir que debe haber el mismo número de *free indexes* en el mismo patrón contra/covariante en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad \text{Valdío} \checkmark \quad (4.47)$$

$$G^\mu = 8\pi T^{\mu\nu} \quad \text{No valdío} \times \quad (4.48)$$

#### 4.4.2. Métrica usual

La métrica usual se define como:  $g_{\mu\nu}$  y toma la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

#### 4.4.3. Métrica de Minkowski

La métrica plana de Minkowski se define por la convección de signos  $(-+++)$  y toma la forma  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  con la forma matricial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

### 4.5. Aproximación posnewtoniana(PN)

En la teoría de gravitación la aproximación posnewtoniana(PN) se refiere a la expansión sistemática de las ecuaciones de campo de Einstein en términos de un parámetro adimensional (pequeño) de la forma:

$$\varepsilon := \frac{v^2}{c^2} \approx \frac{GM}{c^2 r} \ll 1 \quad (4.51)$$

El procedimiento general para encontrar soluciones de un orden determinado en la aproximación posnewtoniana, comienza con la definición de la perturbación de la métrica.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_{\mu\nu}^{(n)} \quad (4.52)$$

Donde  $(n)$  es el orden deseado. Al ingresarse esta expresión con el orden seleccionado a las ecuaciones de campo de Einstein generan distintos resultados según el valor del orden escogido.

- **Orden OPN:** Reproduce la relación newtoniana de inverso cuadrado y fija la amplitud y proyección del cuadrupolo a su primer orden.
- **Orden 1PN:** Comienza a introducir correcciones relativistas, en este caso en específico se introducen la precesión del perihelio y el *red-shift*.
- **Orden 2PN:** Introduce interacciones de la forma *spin-spin*.
- **Orden 2.5PN:** Es el primer orden que toma en cuenta efectos participativos como la radiación, la cual es la principal causante del cambio de fase inspiral al *merger*.
- **Etc.**

El estudio de las ondas gravitacionales es una de las ramas más recientes de la física teórica, particularmente de las disciplinas de relatividad general y cosmología. Estas fueron popularmente teorizadas por Albert Einstein en 1916 mediante perturbaciones en el espacio-tiempo bajo su teoría de relatividad general, seguidas de la histórica observación directa por parte del interferómetro *LIGO* en el 2015. Esta detección abrió una gran ventana para el estudio y la investigación de teorías de calibre, métodos analíticos, etc. A fin de poder simular y entender mejor este fenómeno con mayor precisión. Como consecuencia, múltiples estudios de vanguardia se han dedicado en explorar, bajo distintos enfoques los fundamentos teóricos de este fenómeno. Sin embargo la mayoría de estos estudios e investigaciones poseen una barrera teórica de ingreso al campo, si bien se han realizado intentos para acercar esta brecha a las ondas gravitacionales, debido a su densa estructura teórica, pocos estudios se enfocan en la inmensa cantidad de rigor y detalle que conlleva el proceso de derivar y simular las ecuaciones de ondas gravitacionales. A continuación se mencionan los estudios más relevantes relacionados a este trabajo de investigación:

- Antonio Miguel González Bello-Morales de la Universidad Complutense de Madrid en su trabajo de fin de máster titulado: *Cosmología en modelos de gravedad con ruptura de invariancia bajo difeomorfismos*, realiza una elegante pero corta derivación del principio de Hilbert-Einstein mediante la teoría de variación de campos y el teorema de Lovelock. Esto es la base para la derivación de las ondas gravitacionales.
- En el artículo publicado por Éanna É Flanagan y Scott A Hughes titulado *The basics of gravitational wave theory* por parte del IOP. Se discute a gran detalle la derivación de las ondas gravitacionales a partir del principio de gravedad linealizada, con un énfasis en la teoría de calibre y la interacción de las ondas gravitacionales con los detectores.
- La recopilación de lecciones tituladas *Gravitational waves* impartidas por Alessandra Buonanno directora del Max Planck Institute for Gravitational Physics, muestran nuevamente una derivación de las ecuaciones de ondas gravitacionales a partir del principio de linealización de gravedad. Sin embargo, estas se adentran aun más en las distintas fuentes y fases que pueden generar ondas gravitacionales; tales como pulsares, sistemas binarios, etc.
- Philipp Scharpf en su tesis de maestría titulada *Simulation and Visualization of Gravitational Waves from Binary Black Holes* de la universidad de Stuttgart, muestra una guía completa sobre las ondas gravitacionales y como simularlas mediante programas de computadora.

Las derivaciones teóricas del presente trabajo se llevarán bajo la suposición de soluciones al vacío, esto quiere decir que para toda la teoría elaborada se toma la siguiente relación para el tensor de estrés-energía:

$$T^{\mu\nu} = 0$$

Además todos los resultados analíticos derivados en el trabajo estarán restringidos a las condiciones de linealización de gravedad o también referida como gravedad en campo débil en el espacio de Minkowski, mostrado en la condición:

$$h_{\mu\nu} \ll 1$$

Donde  $h_{\mu\nu}$  son las perturbaciones la métrica del espacio-tiempo. Dichas perturbaciones se desarrollarán utilizando la aproximación posnewtoniana de orden cero (0PN), por lo tanto, gracias a la relación 4.52 toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_{\mu\nu}^{(n)} \\ \implies g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + \varepsilon^3 h_{\mu\nu}^{(3)} + \dots \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}^{(1)}, \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

Luego de aplicar la linealización de la gravedad y las condiciones de calibre de Lorenz y TT, se notará la relación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(TT)}, \quad |h_{\mu\nu}^{(TT)}| \ll 1 \quad (6.1)$$

Esta convención de aproximación dicta que la simulación realizada debe de describir un sistema el cual asuma binarias compactas, sin tomar cuenta el spin y cuyas órbitas sean circulares. Por lo que el programa no presentará ninguna dependencia del tiempo en la frecuencia de las ondas gravitacionales, es decir; Se congela la evolución inspiral del sistema, las ondas gravitacionales simuladas en el programa serán ondas con una frecuencia fija ( $f_{snap}$ ) la cual se mantiene constante a lo largo de la simulación, esto significa que el programa simulara la propagación de las ondas gravitacionales para una binaria de masas constantes bajo una frecuencia fija a un tiempo determinado del *merger*, dicho tiempo también se mantiene constante. Únicamente el *strain* gravitacional varía en el tiempo de acuerdo con la proyección del cuadrupolo, reproduciendo fielmente los modos de polarización  $h_+$ ,  $h_\times$  dentro del dominio de validez del marco lineal.

## 7.1. Derivación de las ecuaciones de campo de Einstein

### 7.1.1. Derivación del principio de Hamilton

Se comenzará con el presente trabajo mostrando una derivación detallada de las ecuaciones de campo de Einstein, ya que estas son fundamentales para entender las ondas gravitacionales. En los cursos sobre dinámica clásica se suele introducir el principio de mínima acción, también conocido como el principio de Hamilton y este se estudia normalmente mediante el cálculo de variaciones, retomando la formulación estandarizada del principio de Hamilton, como es presentada en los textos clásicos, en particular [26, p. 228] es definido de la siguiente forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (7.1)$$

donde en [26, p. 229] hacen notar que se utiliza  $\delta$  como una abreviación para describir la variación de la trayectoria. Además mencionan que, es importante notar que esta variación requiere únicamente que la integral de  $(T - U)$  sea un extremo, no necesariamente un mínimo. Además se sabe que la energía cinética de una partícula en coordenadas cartesianas es una función que depende únicamente de  $\dot{x}_i$ , y dentro de un campo conservativo ( $\vec{F} = \nabla f$ ) la energía potencial es una función que solo depende de  $x_i$ , por lo que se puede decir que:

$$T = T(\dot{x}_i), \quad U = U(x_i) \quad (7.2)$$

Si ahora se define la diferencia entre estas energías como [26, p. 231]:

$$L = T - U = L(x_i, \dot{x}_i) \quad (7.3)$$

Y consecuentemente la integral 7.1 puede reescribirse a lo siguiente:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \quad (7.4)$$

Esto se puede actualizar para cuando el lagrangiano posee una dependencia temporal a la expresión:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t) dt = 0 \quad (7.5)$$

Continuando con la derivación, dado el hecho que las ecuaciones de campo de Einstein son independientes de las coordenadas, se debe de aplicar la misma condición para el principio de Hamilton, para lograr esto, suponga que se tiene un sistema de  $N$  partículas con posición descrita en coordenadas cartesianas por  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  y se asume dependencia temporal, entonces se ve que la acción es definida por el principio de Hamilton, el cual dicta que el camino (real) del sistema entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es aquel que hace la acción  $S$  estacionaria ( $\delta S = 0$ ) y se define como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t) dt \quad (7.6)$$

La mayoría de sistemas mecánicos están sujetos a 3 tipos distintos de restricciones, estas son:

- Holonómicas.
- Esclereonómicas.
- Reonómicas.

La presencia de restricciones holonómicas en un sistema mecánico se asocia con la reducción de coordenadas independientes, es decir que en lugar de trabajar con el conjunto completo de  $x_i$  coordenadas, se puede trabajar con un conjunto más compacto de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_j$  de tal forma que  $n \leq 3N$ . Esto permite escribir a las coordenadas  $x_i$  como una función dada por:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (7.7)$$

Ahora diferenciado 7.7 respecto al tiempo  $t$  se observa que:

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt} x_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (7.8)$$

Esto muestra que cada velocidad cartesiana  $\dot{x}_i$  puede ser expresada en términos de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ . Al substituir tanto las coordenadas como las velocidades generalizadas al lagrangiano de la ecuación 7.9, se obtiene una nueva expresión para la acción, pero expresada en coordenadas generalizadas, con forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (7.9)$$

Enfocándose en la variación del sistema, se tiene que una variación infinitesimal en las coordenadas cartesianas  $\delta x_i$  introduce una variación  $\delta q_j$  en las coordenadas generalizadas ya que estas se definen como una función tal como se muestra en 7.7, por lo que la variación hace lo siguiente:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t \quad (7.10)$$

Para el enfoque de esta derivación se toma  $\delta t = 0$  tal que:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7.11)$$

Y de manera similar para las velocidades se tiene lo siguiente:

$$\delta \dot{x}_i = \delta \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \delta \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dots \quad (7.12)$$

Sin embargo, note que:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (7.13)$$

Y considere que cuando se hace la variación en la integral de la acción, lo que se busca es la siguiente relación:

$$\delta \left( \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (7.14)$$

Donde:

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \quad (7.15)$$

Por lo que las variaciones en  $\delta q_j$  encapsulan en su totalidad a las variaciones en  $\delta x_i$ .

Entonces en coordenadas generalizadas el principio de Hamilton se vuelve:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (7.16)$$

Note que las variaciones deben de satisfacer la condición  $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ .

Ahora, a partir de la ecuación 7.16, se puede proceder hacia el principio de Hilbert–Einstein, el cual representa el análogo gravitacional del principio de Hamilton. Para lograr esta generalización, el desarrollo se dividirá en cinco etapas:

- Generalizar desde un sistema con un número finito de grados de libertad a uno con un número infinito de grados de libertad, es decir, pasar de variables  $q_i(t)$  a campos  $\phi(x)$ .
- Reemplazar el lagrangiano por la densidad lagrangiana.
- Realizar variaciones con respecto al tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .
- Aplicar el teorema de Lovelock para restringir la forma del tensor resultante.
- Construir la acción de Hilbert–Einstein a partir del escalar de Ricci.

### 7.1.2. Generalización a un sistema con grados de libertad infinitos

Se comienza a partir de la acción de Hamilton 7.9 la cual dicta lo siguiente:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (7.17)$$

Y el principio de Hamilton como ya se mostró anteriormente dicta que la (verdadera) evolución del sistema vuelve a la acción estacionaria 7.16. Por lo que en la teoría de campos, en lugar de tener un conjunto finito de coordenadas  $q_j(t)$  las cuales dependen únicamente del tiempo, se trabaja con campos, los cuales para esta sección se definen como:  $\phi_a(x^\mu)$  y estos dependen de todas las coordenadas en el espacio-tiempo denotadas por  $x^\mu$  con  $\mu = (0, 1, 2, 3)$  **Nota:** En el campo de relatividad general son comunes las siguientes convenciones:

- El índice **a** denota distintos campos o componentes de estos mismos.
- $x^\mu$  representa las cuatro componentes del espacio tiempo (con  $x^0 = t$  siendo el tiempo y  $x^i$  siendo las coordenadas espaciales).

Notar que con esto el espacio donde se trabaja se vuelve infinito dimensional en grados de libertad, ya que un campo especifica el valor en cada punto del espacio y tiempo. Para aproximar esto es necesario dividir el dominio del campo en una red de varios pero finitos puntos discretos denotados por  $X_{i=1}^N$ , tal que en cada punto  $x_i$ , el valor del campo  $\phi(x_i)$  funciona como coordenada. Por lo que es posible representar la configuración del campo mediante el siguiente vector [5].

$$\Phi = (\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)) \quad (7.18)$$

Por lo que la acción descrita ahora por cantidades discretas pasa de ser una integral a una suma dada por:

$$S[\Phi] \approx \sum_{i=1}^N L_i(\phi(x_i), \partial\phi(x_i), x_i) \Delta V_i \quad (7.19)$$

Donde  $\Delta V_i$  es el elemento de volumen asociado con el punto  $x_i$ , y  $L_i$  aproxima al lagrangiano en  $x_i$ . Si ahora se refina la red, es decir: hacer que  $N$  tienda a infinito y el elemento de volumen a cero:

$$N \longrightarrow \infty, \quad \Delta V_i \longrightarrow 0 \quad (7.20)$$

Entonces la suma converge a la integral sobre el dominio continuo dada por [15]

$$S[\Phi] \approx \sum_{i=1}^N L_i(\phi(x_i), \partial\phi(x_i), x_i) \Delta V_i = \int_D L(\phi(x), \partial\phi(x), x) d^d x \quad (7.21)$$

Donde  $d$  es el número de dimensiones en el espacio-tiempo, el cual para los campos trabajados en relatividad general se compone de 4. Por lo que en la teoría de campos la acción es generalizada como una integral sobre todo el espacio-tiempo, con la forma:

$$S[\phi_a] = \int L(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x) d^4 x \quad (7.22)$$

Donde  $L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x)$  es la densidad lagrangiana.

### 7.1.3. Densidad lagrangiana

A pesar de compartir similitudes con el lagrangiano de dimensiones finitas, la densidad lagrangiana difiere ya que es un concepto que emerge a partir de principios y restricciones impuestos por la gravedad en el espacio tiempo. Esta densidad lagrangiana debe de cumplir con varias propiedades, cuatro propiedades principales para poder formar dicha densidad son las siguientes:

- Invariante bajo difeomorfismos
- Localidad.
- Densidad escalar.
- Dependencia lineal respecto a las derivadas del campo.

A continuación se muestra como la densidad lagrangiana cumple cada uno de estos aspectos.

**Invariante bajo difeomorfismos (covarianza general)**

Anteriormente se mostró que la densidad lagrangiana toma la siguiente forma general:

$$L(\phi_a, \partial_\mu, x) \quad (7.23)$$

Donde  $\phi_a$  denota el conjunto de campos sobre los cuales se trabajará. Nuevamente se define a la acción como:

$$S = \int_M L(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x) d^4x \quad (7.24)$$

En la cual  $M$  define a la variedad sobre la cual se trabaja, y  $d^4x$  es su elemento de volumen. Ahora considere el siguiente difeomorfismo:

$$\varphi : M \longrightarrow M' \quad (7.25)$$

Dicho difeomorfismo induce una transformación de coordenadas, la cual está definida como:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \varphi^\mu(x) \quad (7.26)$$

Por consecuente el elemento de volumen también cambia, esto lo hace según el determinante siguiendo los resultados estándar de geometría diferencial. Recordar que dicho elemento de volumen se puede expresar por medio de sus componentes mediante el **producto exterior**

$$d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (7.27)$$

Notar que por regla de la cadena, bajo el cambio de coordenadas las derivadas se comportan de la siguiente forma:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (7.28)$$

Por lo que el elemento de volumen bajo las nuevas coordenadas es definido por:

$$d^4x' = dx'^0 \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 \quad (7.29)$$

Al substituir 7.28 en la expresión anterior:

$$d^4x' = \left( \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\nu_0}} dx^{\nu_0} \right) \wedge \left( \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\nu_1}} dx^{\nu_1} \right) \wedge \left( \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\nu_2}} dx^{\nu_2} \right) \wedge \left( \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\nu_3}} dx^{\nu_3} \right) \quad (7.30)$$

Donde  $\nu$  toma valores entre 0, 1, 2, 3

$$\longrightarrow d^4x' = \left[ \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\nu_0}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\nu_2}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\nu_3}} dx^{\nu_0} \wedge dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge dx^{\nu_3} \right] \quad (7.31)$$

Dado que el producto exterior es un mapeo multilinear [15], es posible sacar todos los factores escalares y expandir el producto como la suma sobre todos los índices.

$$dx'^0 \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = \sum_{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3} \left[ \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\nu_0}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\nu_2}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\nu_3}} dx^{\nu_0} \wedge dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge dx^{\nu_3} \right] \quad (7.32)$$

Por la propiedad antisimétrica del producto exterior, si dos de los índices  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  son iguales, entonces este se anula. Nótese que los únicos términos no cero ocurren cuando los índices forman una permutación de la forma (0, 1, 2, 3), ahora considere la siguiente notación:

$$\nu_0 = \sigma(0), \quad \nu_1 = \sigma(1), \quad \nu_2 = \sigma(2), \quad \nu_3 = \sigma(3), \quad (7.33)$$

Utilizando dicha notación es posible reescribir 7.32 de la siguiente forma:

$$dx'^0 \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_4} \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\sigma(0)}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\sigma(2)}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\sigma(3)}} dx^{\sigma(0)} \wedge dx^{\sigma(1)} \wedge dx^{\sigma(2)} \wedge dx^{\sigma(3)} \quad (7.34)$$

Donde  $\mathbf{S}_4$  es el conjunto de permutaciones 0, 1, 2, 3. Nuevamente utilizando la propiedad de antisimetría del producto exterior, al cambiar el orden de los diferenciales se produce un cambio de signo, este correspondiente a la paridad de la permutación.

$$dx^{\sigma(0)} \wedge dx^{\sigma(1)} \wedge dx^{\sigma(2)} \wedge dx^{\sigma(3)} = \text{sgn}(\sigma) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (7.35)$$

Donde  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  si la permutación  $(\sigma)$  es par y  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  si es impar. Por lo que se reescribe 7.34 de la siguiente manera:

$$dx'^0 \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = \left[ \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_4} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\sigma(0)}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\sigma(2)}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\sigma(3)}} \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (7.36)$$

Nótese que el determinante de la matriz jacobiana se define como  $J_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ , donde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , entonces lo que esta dentro del paréntesis en 7.36 es por definición el determinante de dicha matriz jacobiana, de tal forma que:

$$\det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \left[ \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_4} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\sigma(0)}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\sigma(2)}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\sigma(3)}} \right] \quad (7.37)$$

Por lo que en notación compacta se tiene:

$$d^4 x' = \left| \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4 x \quad (7.38)$$

Finalmente por facilidad se define el determinante como  $(J)$  y se reescribe la expresión.

$$J \equiv \left| \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| \rightarrow d^4 x' = J d^4 x \quad (7.39)$$

$$\rightarrow L'(\phi'_a, \partial'_\mu \phi'_a, x') = \frac{L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x)}{J} \quad (7.40)$$

Para mantener la acción invariante bajo una transformación cualquiera, se debe de compensar de alguna forma por el jacobiano que se presenta en la sección anterior, con el fin de lograr esto se introduce el concepto de la métrica, más específicamente el tensor de métrica denotado por  $(g_{\mu\nu}(x))$  y representado en coordenadas locales como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

Se referirá al determinante de dicho tensor como  $\mathbf{g}$ . Además este es un tensor simétrico en la variedad de espacio tiempo el cual define los ángulos y las distancias mediante el elemento de línea  $ds$  el cual se expresa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (7.42)$$

Notar que el determinante se transforma de la siguiente manera.

$$\sqrt{-g'} = J \sqrt{-g} \quad (7.43)$$

Además, otra propiedad del determinante del tensor de métrica es que define al elemento de volumen como  $d^4 x \sqrt{-g}$ , por lo que al hacer la transformación de coordenadas es posible observar lo siguiente:

$$\mathbb{L}'(x') d^4 x' = \sqrt{-g'} L'(\phi'_a, \partial'_\mu \phi'_a, x') = \sqrt{-g} L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x) d^4 x \quad (7.44)$$

Por lo tanto la acción es invariante y toma la forma:

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x) \quad \square \quad (7.45)$$

### Localidad y densidad escalar

Se dice que la densidad lagrangiana es local si ésta puede ser expresada como una función de los campos y un número finito de sus derivadas, evaluadas en el mismo punto ( $x$ ) en el espacio tiempo[15]. Por lo que para mostrar que la densidad lagrangiana es local basta con mostrar que tanto la métrica (medida) como la densidad son locales.

Formalizando, considere la colección de campos denotada por  $\phi_a(x)$ , además  $\forall n \in \mathbb{N}$  finito, donde se requiere que:

$$\mathbb{L}(x) = L(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), \partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x), \dots, \partial^{(n)} \phi_a(x)) \quad (7.46)$$

No presente dependencia de los campos en puntos distintos a ( $x$ ). Notar que esta es una generalización de la densidad lagrangiana trabajada previamente, por lo que se sabe que su acción se define de la siguiente manera:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), \partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x), \dots) \quad (7.47)$$

Donde se mostró anteriormente que el componente  $\sqrt{-g} d^4x$  es el elemento de volumen invariante, este asegura que la integración se realiza de manera local en cada punto, ya que como se mencionó anteriormente,  $\mathbf{g}$  es el determinante del tensor de métrica, por lo mostrado anteriormente, la medida y por consiguiente la acción se mantienen invariantes y **locales**. Dado que  $\mathbb{L}(x)$  depende únicamente de los valores del campo  $\phi_a$  y sus derivadas en el punto ( $x$ ), al momento de realizar una variación en la acción con respecto a  $\phi_a(x)$  se verá que:

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathbb{L}(x) \quad (7.48)$$

Notar que la variación  $\delta \mathbb{L}(x)$  solo tiene asociada la variación en el campo  $\delta \phi_a$  y un número finito de sus derivadas en el punto ( $x$ ). Es decir que bajo una variación infinitesimal en los campos,

$$\phi_a(x) \longrightarrow \phi_a(x) + \delta \phi_a(x) \quad (7.49)$$

La acción correspondiente es la expresión 7.48, la cual se puede expandir mediante la regla de la cadena es:

$$\delta \mathbb{L} = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a(x))} \delta (\partial_\mu \phi_a(x)) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \delta (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x)) \quad (7.50)$$

Una propiedad importante tanto de las variaciones como de las derivadas parciales, es que estas conmutan (asumiendo una variedad suave), es decir que:

$$\delta (\partial_\mu \phi_a(x)) = \partial_\mu (\delta \phi_a(x)) \quad (7.51)$$

$$\delta (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x)) = \partial_\mu \partial_\nu (\delta \phi_a(x)) \quad (7.52)$$

Por lo que la expansión resultante de la regla de la cadena se reescribe a la siguiente expresión.

$$\delta \mathbb{L} = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a(x))} \partial_\mu (\delta \phi_a(x)) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \partial_\mu \partial_\nu (\delta \phi_a(x)) \quad (7.53)$$

Se necesita aislar el término de la variación sobre el campo ( $\delta \phi_a(x)$ ), por lo que ahora siguiendo el procedimiento estándar presentado en [15] se realizará una integración por partes sobre los distintos términos de las derivadas.

**Primer término**( $\partial_\mu(\delta\phi_a)$ )

Considere las siguientes funciones dependientes de  $(x)$ :

- $A(x) \equiv \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))}$
- $B(x) \equiv \delta\phi_a(x)$

Por regla de producto se tiene lo siguiente:

$$\partial_\mu [A(x)B(x)] = (\partial_\mu A(x))B(x) + A(x)\partial_\mu B(x) \quad (7.54)$$

Substituyendo las expresiones de  $A(x)$  y  $B(x)$  es posible reescribir la ecuación como:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \delta\phi_a(x) \right] = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \partial_\mu(\delta\phi_a(x)) + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \right] \delta\phi_a(x) \quad (7.55)$$

Ahora se integra sobre  $d^4x$  el segundo término del lado derecho:

$$\int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \delta\phi_a(x) \right] \quad (7.56)$$

Notar que se está integrando un espacio vectorial sobre una región de espacio tiempo, por lo que gracias al teorema de Gauss de la divergencia, esta integral equivale al flujo de la expresión dentro del paréntesis sobre la frontera del dominio de integración. Donde gracias a las propiedades derivadas del principio variacional, es posible hacer que  $\delta\phi_a(x)$  se desvanezca en la frontera (infinito), por lo que el teorema de Gauss dicta que entonces la integral (el término de superficie) vale cero [11].

$$\int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \delta\phi_a(x) \right] = 0 \quad (7.57)$$

Ahora se substituye este resultado en la ecuación 7.55.

$$0 = \int d^4x \left[ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \right] \delta\phi_a(x) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \partial_\mu(\delta\phi_a(x)) \right] \quad (7.58)$$

Considere lo siguiente:

- $T_1 = \int d^4x \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \partial_\mu(\delta\phi_a(x))$
- $T_2 = \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \right] \delta\phi_a(x)$

Entonces la ecuación se transforma a la siguiente expresión:

$$0 = T_1 + T_2 \quad (7.59)$$

$$\longrightarrow T_1 = -T_2 \quad (7.60)$$

$$\therefore \int d^4x \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \partial_\mu(\delta\phi_a(x)) = - \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a(x))} \right] \delta\phi_a(x) \quad (7.61)$$

**Segundo término** ( $\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x)$ )

Primero a razón de compacidad, se define la siguiente notación:

$$Q^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \quad (7.62)$$

Se toma el término  $Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x))$  y se expanden sus derivadas en respecto a la dirección  $x^\mu$ .

$$\partial_\mu [Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x))] = \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) + Q^{\mu\nu}(x)\partial_\mu \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) \quad (7.63)$$

Al integrar sobre todo el espacio tiempo se tiene que,

$$\int d^4x \partial_\mu [Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x))] = \int d^4x \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) + \int d^4x Q^{\mu\nu}(x)\partial_\mu \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) \quad (7.64)$$

Nuevamente por el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de la derivada total es cero.

$$\int d^4x \partial_\mu [Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x))] = 0 \quad (7.65)$$

Por lo que,

$$- \int d^4x \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) = \int d^4x Q^{\mu\nu}(x)\partial_\mu \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) \quad (7.66)$$

Ahora se tiene que eliminar la derivada que actúa sobre la variación del campo, en este caso la derivada es respecto a la dirección  $x^\nu$ , por lo que repitiendo el procedimiento anterior, se expande utilizando la regla del producto.

$$\partial_\nu [\partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x)] = \partial_\nu \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x) + \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) \quad (7.67)$$

Nuevamente se integra sobre todo el espacio tiempo.

$$\int d^4x \partial_\nu [\partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x)] = \int d^4x \partial_\nu \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x) + \int d^4x \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) \quad (7.68)$$

De manera similar a la sección anterior, el término izquierdo se desvanece en el infinito.

$$\int d^4x \partial_\nu [\partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x)] = 0 \quad (7.69)$$

Entonces:

$$\int d^4x \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\partial_\nu(\delta\phi_a(x)) = - \int d^4x \partial_\nu \partial_\mu Q^{\mu\nu}(x)\delta\phi_a(x) \quad (7.70)$$

Combinando con el resultado previamente obtenido en 7.66.

$$\int d^4x \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \partial_\mu \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) = - \int d^4x (\partial_\mu Q^{\mu\nu}) \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) = - \left[ - \int d^4x \delta\phi_a(x) \partial_\nu \partial_\mu Q^{\mu\nu} \right] \quad (7.71)$$

Finalmente regresando la notación de  $Q^{\mu\nu}$  se tiene:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \partial_\mu \partial_\nu(\delta\phi_a(x)) = \int d^4x \delta\phi_a(x) \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x))} \right] \quad (7.72)$$

Ahora se substituyen los resultados obtenidos de las integraciones por partes en la ecuación 7.53 y se integra para formar la acción.

$$\delta S = \int d^4x \left[ \delta\phi_a \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial\phi_a} - \delta\phi_a \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] + \delta\phi_a \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a)} \right] \right] = 0 \quad (7.73)$$

$$\longrightarrow \delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi_a)} \right] \right] \delta\phi_a = 0 \quad (7.74)$$

Finalmente, debido a la arbitrariedad de la variación sobre el campo, el integrando debe desvanecer[19], lo cual dota con las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas.

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a)} \right] = 0 \quad (7.75)$$

Notar a que la densidad lagrangiana depende únicamente de los valores de los campos asociados ( $\phi_a(x)$ ) y de sus derivadas en el punto ( $x$ ), además su variación con respecto a los campos asociados, da como resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange las cuales poseen únicamente variaciones locales. Por lo tanto, la dinámica en cualquier punto ( $x$ ) depende únicamente del campo y sus derivadas finitas. Por lo tanto la densidad lagrangiana es una densidad escalar y posee localidad  $\square$

### Dependencia lineal respecto a las derivadas del campo

En la sección anterior se mostró como las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen naturalmente como resultado de variar la acción de la densidad lagrangiana, donde gracias a la arbitrariedad de la variación sobre el campo  $\phi_a$ , el integrando de la acción se desvanece, dando como resultado dichas ecuaciones de movimiento.

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi_a)} \right] = 0 \quad (7.76)$$

Si la densidad lagrangiana dependiese de manera no lineal de las segundas derivadas presentes en la expresión anterior ( $\partial_\mu \partial_\nu \phi_a$ ), entonces el tercer término de las ecuaciones 7.75 y 7.76 introduciría derivadas de mayor orden que el presente en las ecuaciones de movimiento (segundo orden)[19]. Esto con el propósito de mostrar porque para lograr tener ecuaciones de campo de segundo orden la dependencia en ( $\partial_\mu \partial_\nu \phi_a$ ) debe de ser lineal.

Supóngase que la densidad lagrangiana es una función definida tal que:

$$\mathbb{L} = F(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) \quad (7.77)$$

donde:

$$\partial^2\phi \equiv \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (7.78)$$

obsérvese la siguiente notación.

$$Q^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial^2\phi)} \quad (7.79)$$

Notar que en las ecuaciones de Euler-Lagrange la única parte que contribuye que contiene segundas derivadas es el tercer término de la ecuación 7.76, este abreviara este de la siguiente manera.

$$E(x) \equiv \partial_\mu \partial_\nu Q^{\mu\nu}(x) \quad (7.80)$$

Véase que  $Q^{\mu\nu}$  es una función compuesta, para ser más específicos es una función cuya dependencia de  $x$  es indirecta, y es dictada por las siguientes funciones componentes.

$$Q^{\mu\nu}(x) = Q^{\mu\nu}(\phi(x), \partial_\varphi \phi(x), \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi(x)) \quad (7.81)$$

A manera de mantener claridad en la prueba es de suma importancia llamar la atención hacia los índices ( $\varphi, \vartheta$ ), estos representan las coordenadas respecto a las cuales se diferencia, dichas coordenadas son generales y no imponen ninguna restricción sobre las expresiones.

De manera similar, si se toma la derivada sobre la coordenada ( $\lambda$ ), por regla de la cadena se expande de la siguiente forma.

$$\partial_\lambda Q^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial \phi(x)} \partial_\lambda \phi(x) + \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \phi(x))} \partial_\lambda [\partial_\varphi \phi(x)] + \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi(x))} \partial_\lambda [\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi(x)] \quad (7.82)$$

Notar que ahora el tercer término de la expresión 7.82 posee una tercer derivada en dirección de  $\lambda$  actuando sobre el campo. Si ahora se vuelve a derivar la expresión completa, pero esta vez en la dirección de  $\mu$ , surgirá mediante regla del producto el siguiente resultado.

$$\partial_\mu \partial_\lambda Q^{\mu\nu} = \partial_\mu \left[ \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial \phi} \partial_\lambda \phi + \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \phi)} \partial_\lambda \partial_\varphi \phi + \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi)} \partial_\lambda \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi \right] \quad (7.83)$$

Donde al diferenciar el tercer término, se obtiene la siguiente regla del producto.

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi)} \partial_\lambda \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi \right] = \partial_\mu \left[ \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi)} \right] \partial_\lambda \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi + \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\varphi \partial_\vartheta \phi)} \partial_\mu \partial_\lambda \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi \quad (7.84)$$

Al observar la expresión 7.84, en específico el segundo término de la derecha, es posible notar que esta involucra una cuarta derivada sobre el campo  $\phi$  en la forma de  $(\partial_\mu \partial_\lambda \partial_\varphi \partial_\vartheta \phi)$ , esto implicaría que el funcional  $Q^{\mu\nu}$  posee una relación de dependencia no lineal con  $\partial^2 \phi$ , por lo que el tercer término de 7.84 no se desvanece, y por consiguiente sería una función no trivial de  $\partial^2 \phi$ . Por lo tanto el tercer término estaría presente en las ecuaciones de Euler-Lagrange, volviendo a estas de cuarto orden en derivadas respecto al campo.

Por otro lado se analiza el caso si la dependencia fuera lineal, esto implica que,

$$\mathbb{L} = A(\phi, \partial\phi) + B^{\mu\nu}(\phi, \partial\phi) \partial_\mu \partial_\lambda \phi \quad (7.85)$$

Donde **A**, **B** son funciones únicamente del campo y su primera derivada, por lo que la siguiente relación es válida.

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\lambda \phi)} = B^{\mu\nu}(\phi, \partial\phi) \quad (7.86)$$

Dado a que  $B^{\mu\nu}$  no depende de  $\partial^2 \phi$ , al diferenciar la expresión anterior respecto a  $x$ , los términos desvanecen y se obtiene lo siguiente.

$$\partial_\mu \partial_\lambda B^{\mu\nu} \quad (7.87)$$

La cual como se observa, contiene a lo más derivadas de segundo orden respecto al campo  $\phi$ , y por consiguiente las ecuaciones de Euler-Lagrange se mantienen de segundo orden. Por lo tanto la dependencia entre la densidad lagrangiana y la segunda derivada del campo debe de ser lineal.

Con esto quedan demostradas las cuatro propiedades más importantes de la densidad lagrangiana, las cuales gracias al **teorema de Lovelock** al variar la acción, garantizan una solución única en la forma del principio de Hilbert-Einstein.

### 7.1.4. Variar la acción respecto a la métrica

En la sección anterior se trabajó con la acción y densidad lagrangiana generalizadas para un campo  $\phi_a$ , considere ahora lo siguiente. Considere que el campo cualquiera tome la forma específica de la métrica  $\mathbf{g}$ .

$$\phi_a = g_{ab} \quad (7.88)$$

Por lo que la expresión 7.74 toma la siguiente forma:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial g_{ab}} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu g_{ab})} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu g_{ab})} \right] \right] \delta g_{ab} \quad (7.89)$$

Nuevamente por arbitrariedad de la variación se sabe que el integrando deberá de ser igual a cero.

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial g_{ab}} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu g_{ab})} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu g_{ab})} \right] = 0 \quad (7.90)$$

Ahora como es mencionado en [12], se propone el siguiente tensor.

$$A^{ij} = \frac{\delta \mathbb{L}}{\delta g_{ab}} = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial g_{ab}} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu g_{ab})} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu g_{ab})} \right] = 0 \quad (7.91)$$

### 7.1.5. Aplicar el teorema de Lovelock

En la publicación original de David Lovelock [12], titulada *The Einstein tensor and its generalizations* se menciona que para poder caracterizar la forma del tensor general  $A^{ij}$  recién propuesto debe de cumplir con las siguientes condiciones:

1.  $A^{ij}$  debe de ser simétrico.
2.  $A^{ij}$  es un **concomitante** del tensor de métrica y sus dos primeras derivadas.
3.  $A^{ij}$  es de divergencia nula.
4.  $A^{ij}$  es lineal en las derivadas de segundo orden del tensor de métrica.

#### Propiedad 1

Notar que el tensor  $A^{ij}$  se define como la variación de la densidad lagrangiana sobre un campo que en este caso es la métrica, la cual posee la propiedad de simetría,  $g_{ab} = g_{ba}$ , además las variaciones de un campo también se sabe que preservan la simetría entonces se puede asegurar que el tensor  $A^{ij} = A^{ji}$  (es simétrico).

#### Propiedades 2 y 4

En este contexto, al considerarse únicamente 4 dimensiones, cuando Lovelock se refiere a que el tensor debe ser un **concomitante**, esto significa que su expresión debe construirse localmente a partir de la métrica y sus derivadas, es decir:

$$A^{ij} = A^{ij}(g_{ab}, \partial_c g_{ab}, \partial_c \partial_d g_{ab}). \quad (7.92)$$

Para que  $A^{ij}$  sea un concomitante de la métrica (y, por tanto, cumpla con la propiedad 2), basta con demostrar que: 1. está construido únicamente a partir de  $g_{ab}$  y sus derivadas (localidad), y 2.

se transforma como un tensor bajo cambios arbitrarios de coordenadas (invarianza bajo difeomorfismos).

Ahora bien, el tensor  $A^{ij}$  surge exclusivamente de la variación de la densidad lagrangiana respecto al campo  $g_{ab}$ . Como se mostró previamente, la densidad lagrangiana posee las siguientes propiedades:

- Es una densidad escalar invariante bajo difeomorfismos.
- Es local (depende solo de  $g_{ab}$ ,  $\partial g_{ab}$ , y  $\partial^2 g_{ab}$ ).
- Depende linealmente de las segundas derivadas del campo (la métrica).

Dado que  $A^{ij}$  se construye únicamente a partir de  $\mathbb{L}$  y sus derivadas funcionales, este hereda las propiedades anteriores. Por lo tanto, se cumple que:  $A^{ij}$  cumple con la propiedad 2, ya que depende exclusivamente de la métrica y sus dos primeras derivadas y se transforma como un tensor. Y también cumple con la propiedad 4, ya que la dependencia lineal de la densidad lagrangiana respecto a las segundas derivadas de la métrica se preserva en el proceso de variación.

### Propiedad 3

Para que el tensor  $A^{ij}$  sea de divergencia nula, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\nabla_{\mu} A^{ij} = 0. \quad (7.93)$$

Esto implica que  $A^{ij}$  debe ser conservado de manera covariante. Esta no es una propiedad que se imponga de forma arbitraria, sino que surge como consecuencia directa de la invarianza de la acción bajo difeomorfismos.

De acuerdo con el segundo teorema de Noether, *toda simetría continua de calibre del funcional de acción conduce a una identidad diferencial entre las ecuaciones de campo*[19]. En el caso particular de una teoría métrica como la que se estudia aquí, dicha identidad se traduce en la anulación de la divergencia del tensor  $A^{ij}$ . Es decir, la invarianza de la acción frente a transformaciones infinitesimales y arbitrarias del sistema de coordenadas implica que:

$$\nabla_{\mu} A^{ij} = 0. \quad (7.94)$$

Por lo que el tensor  $A^{ij}$  cumple con las 4 propiedades mencionadas en [12].

### Aplicación del teorema de Lovelock

Como se ha demostrado previamente, el tensor  $A^{ij}$  cumple con las cuatro condiciones establecidas en el teorema de Lovelock: es simétrico, conserva su divergencia covariante, es un concomitante de la métrica y sus dos primeras derivadas, y es lineal en las derivadas de segundo orden de la métrica. Por lo tanto, es posible aplicar dicho teorema para caracterizar la forma general que puede adoptar este tensor.

De acuerdo con el corolario presentado en [12, p .7], se establece que:

*En cuatro dimensiones, el único tensor simétrico del tipo*

$$A^{ij} = A^{ij}(g_{ab}, \partial_c g_{ab}, \partial_c \partial_d g_{ab}),$$

*que además es divergencia nula y lineal en las derivadas de segundo orden, debe tomar la forma:*

$$A^{ij} = \alpha G^{ij} + \beta g^{ij}, \quad (7.95)$$

donde  $G^{ij}$  es el tensor de Einstein, y  $\alpha, \beta$  son constantes arbitrarias.

## 7.2. Construir la acción de Hilbert-Einstein

Ahora que ya se conoce la forma que toma el tensor  $A^{ij}$  se debe de asegurar que dicha forma es no solo correcta sino única, para lograr esto se buscará la forma que toma la acción la cual al variarla respecto a la métrica produzca la expresión 7.95, se sabe que la forma de la acción para una densidad lagrangiana general es la siguiente:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \mathbb{L} \quad (7.96)$$

Esta es una forma más específica de la expresión mostrada en 7.45 ya que en este caso se trabaja con la métrica como el campo. Además se sabe que la densidad lagrangiana que se utilice en la acción debe de cumplir con las 4 condiciones previamente mencionadas para la densidad, estas son:

- Densidad escalar.
- Invarianza bajo difeomorfismos.
- Localidad respecto a la métrica y sus dos primeras derivadas.
- Linealidad respecto a las dos primeras derivadas de la métrica.

A continuación se mostrarán algunos candidatos para el rol de densidad escalar, seguido de una evaluación sobre su validez.

### 7.2.1. Candidatos para la densidad lagrangiana

#### Símbolos de Christoffel

Si bien los símbolos de Christoffel son construidos localmente a partir de la métrica y sus dos primeras derivadas, estos no poseen invarianza bajo difeomorfismos por lo que cualquier escalar construido a partir de ellos no se transformaría como un tensor. Esto se puede observar claramente en su ley de transformación bajo cambio de coordenadas.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \longrightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (7.97)$$

$$\implies \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \quad (7.98)$$

Notar que en el segundo término se encuentra una derivada de segundo orden, por lo que el símbolo de Christoffel no se transforma linealmente bajo cambios de coordenadas, por lo tanto no funciona como densidad para la acción.

#### Tensor de Ricci

A diferencia de los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci es construido localmente de la métrica y sus dos primeras derivadas y posee invarianza bajo difeomorfismos, sin embargo el tensor de Ricci no es una cantidad escalar ya que este depende del sistema de coordenadas. Nuevamente basta con observar la ley de transformación del tensor de Ricci bajo un cambio de coordenadas arbitrario. Considere el siguiente cambio de coordenadas:

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} \quad (7.99)$$

Entonces el tensor de Ricci se transforma siguiendo la regla:

$$R'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} R_{\mu\nu}(x) \quad (7.100)$$

Notar que este es un elemento dependiente de las coordenadas, por lo que si se utilizará como densidad para la acción se vería lo siguiente:

$$S = \int R_{\mu\nu}(x) d^4x \quad (7.101)$$

Ahora nuevamente se realiza una transformación de coordenadas de la forma  $x \rightarrow x'(x)$ , se tiene entonces que el elemento de volumen se transforma mediante el determinante del jacobiano, por lo que similarmente a la sección anterior 7.38 se tiene que:

$$d^4x \rightarrow d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x = J d^4x \quad (7.102)$$

Por lo que la acción tomaría la forma:

$$S' = \int \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} R_{\mu\nu}(x) \right) J d^4x \quad (7.103)$$

Nótese

$$S \neq S' \quad (7.104)$$

Por lo tanto el tensor de Ricci no cumple con la propiedad de ser escalar.

### Escalar de Ricci

Finalmente se tiene el escalar de Ricci, este es construido a partir de la métrica y sus dos primeras derivadas, es lineal respecto a dichas derivadas, cuenta con invarianza bajo difeomorfismos y se transforma como una densidad escalar, por lo que al acoplarlo a la acción se tiene:

$$S = \int d^4x R \quad \longrightarrow \quad S' = \int d^4x R \quad (7.105)$$

Entonces se puede construir la acción utilizando al escalar de Ricci como densidad lagrangiana, multiplicada por el término  $\sqrt{-g}$  para mantener a la acción invariante, tal como se mostró en el resultado 7.45.

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (7.106)$$

### 7.2.2. La acción de Hilbert-Einstein

Mediante el teorema de Lovelock se obtuvo

$$A^{ij} = \alpha G^{ij} + \beta g^{ij} \quad (7.107)$$

donde  $\alpha, \beta$  son constantes, al expandir la expresión, a la constante  $\beta$  se le atribuye la incorporación de la **constante cosmológica**  $\Lambda$ . Para este trabajo se utilizará un forma especial de las ecuaciones de campo de Einstein, haciendo  $\Lambda = 0 \ni \beta = 0$ .

$$S = \alpha \int R \sqrt{-g} d^4x + \beta \int \sqrt{-g} d^4x \quad (7.108)$$

$$\longrightarrow S = \alpha \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (7.109)$$

Ahora se introduce una variación respecto a la métrica.

$$\delta S = \alpha \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (7.110)$$

$$\longrightarrow \delta S = \alpha \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (7.111)$$

Reescribiendo en términos del funcional se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \alpha G^{\mu\nu} \quad (7.112)$$

$$\longrightarrow A^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} \quad (7.113)$$

Realizando el mismo proceso de variación pero para la acción que toma en cuenta el término de materia [15] se llega al siguiente resultado:

$$\alpha G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \quad (7.114)$$

Donde  $T^{\mu\nu}$  se conoce como el **tensor de estrés-energía** y es denotado por:

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (7.115)$$

Además un resultado bien conocido de las ecuaciones de campo de Einstein, tal como se muestra en [15] es el siguiente:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (7.116)$$

Donde  $G$  es la constante de gravitación de Newton y no debe de ser confundida con el tensor de Einstein  $G^{ab}$  el cual va acompañado de sus índices. Por lo que entonces es fácil de ver que  $\alpha$  debe de tomar el siguiente valor.

$$\alpha = \frac{1}{8\pi G} \quad (7.117)$$

Notar que es gracias a la simetría del tensor de métrica que la variación de la acción lleva consigo un factor de (2) asociado, por lo que el valor de  $\alpha$  debe de ser:

$$\alpha = \frac{1}{16\pi G} \quad (7.118)$$

Entonces la acción normalizada correctamente toma finalmente la forma de la bien conocida acción de Hilbert-Einstein.

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (7.119)$$

La cual al variarla respecto a la métrica produce la forma especial de las ecuaciones de campo de Einstein.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \quad (7.120)$$

$$\longrightarrow G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (7.121)$$

Con lo cual termina la derivación de las ecuaciones de campo de Einstein a partir del principio estacionario de Hamilton.  $\square$

### 7.3. Límite de campo débil y estructura de calibre de las ecuaciones de campo de Einstein

Antes de continuar con la derivación de las soluciones en forma de **ondas gravitacionales**, con el fin de facilitar las deducciones más adelante se contraerán los tensores presentados en la expresión 7.121 a fin de bajar sus índices. De la expresión mencionada se tiene:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} \quad (7.122)$$

Antes de contraer los tensores respecto a la métrica es importante notar que esta se define formalmente como un isomorfismo que convierte vectores a covectores de la forma:

$$g := T_p M \mapsto T_p^* M \quad (7.123)$$

Considere la siguiente propiedad, sea  $v_\mu$  un vector arbitrario entonces:

$$v_\mu = g^{\mu\nu} v^\nu \quad (7.124)$$

Se sigue que al aplicar esto al lado izquierdo de la ecuación 7.121 los índices bajan para obtener el tensor covariante:

$$g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} G^{\alpha\beta} = G_{\mu\nu} \quad (7.125)$$

Realizando el mismo procedimiento sobre el tensor de estrés-energía uno encuentra:

$$8\pi G(g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) T^{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (7.126)$$

Uniendo ambas substituciones se obtiene la forma de las ecuaciones de campo con forma covariante:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (7.127)$$

Es importante hacer notar que se reemplazaron los superíndices de los tensores contravariantes a  $\alpha, \beta$  para mantener la notación de las ecuaciones de campo con  $\mu, \nu$ , además dado a que el tensor de Einstein y el de estrés-energía son simétricos en este contexto y que la multiplicación de dos métricas preserva la conmutación bajo la contracción de índices es también perfectamente factible contraerlos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} G^{\alpha\beta} &= G_{\mu\nu} \\ 8\pi G(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}) T^{\alpha\beta} &= 8\pi GT_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.128)$$

$$\boxed{\implies G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}}$$

Ahora ya con las ecuaciones de campo de forma covariante se continúa en busca de las soluciones en forma de ondas gravitacionales, para esto se deberán de aplicar una variedad de condiciones e identidades a lo largo del camino, las cuales restringirán la forma final que pueden tomar dichas soluciones. De manera general, con propósito de brindar una estructura clara, se mostrará como al aplicar las siguientes restricciones e identidades se llega al resultado buscado.

- Linealización de la gravedad bajo la métrica de Minkowski.
- Linealización de estructuras concomitantes de la métrica, tales como los Christoffel y tensores de curvatura.
- Aplicar condición del calibre de Lorenz también referido como calibre armónico.
- Aplicar la condición del calibre TT.

Estos serán los puntos a desarrollar en esta sección.

### 7.3.1. Linealización de la gravedad bajo la métrica de Minkowski

Para comenzar esta sección, se hace notar que durante el presente trabajo se utilizarán las soluciones de las ecuaciones de campo al vacío, es decir que se impondrá la siguiente condición.

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (7.129)$$

Donde  $T_{\mu\nu}$  es el previamente mencionado tensor de estrés-energía, a esto se le conoce formalmente como una aproximación al vacío. Esta condición es correspondiente al análisis de las ondas gravitacionales **después** de que han sido emitidas, es decir; mientras estas se propagan por el vacío del espacio-tiempo, nótese que esto no implica que la fuente no existe, simplemente restringe la región de análisis del evento.

Ahora nuevamente se realizará otra aproximación, sin embargo, esta vez la aproximación irá sobre la métrica  $\mathbf{g}$ , se trabajará con la métrica de **Minkowski** más una perturbación de tal forma que se definirá la métrica como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \quad (7.130)$$

Donde  $\eta_{\mu\nu}$  se refiere a la típica métrica de Minkowski dada por la siguiente matriz:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.131)$$

Además el término  $h_{\mu\nu}$  presente en la expresión 7.130 se refiere a una perturbación sobre la métrica, y el término  $\varepsilon$  es una constante real. Note que una expresión tensorial se puede escribir en términos de potencias de la forma:

$$X(\varepsilon) = X^{(0)} + \varepsilon X^{(1)} + \varepsilon^2 X^{(2)} + \dots + \varepsilon^n X^{(n)} \quad (7.132)$$

Considere un funcional de la métrica  $F(g)$  el cual es analítico en su argumento, el reemplazar por la nueva definición de métrica y expandir en formato de serie tal como se muestra en [7]:

$$F(g_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) = F(g) + \varepsilon \left. \frac{\partial F}{\partial g_{\alpha\beta}} \right|_g h_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial g_{\alpha\beta} \partial g_{\gamma\delta}} \right|_g h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} + \dots \quad (7.133)$$

Dado a que se trabaja sobre una variedad de clase  $C^\infty$ , sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $F(\eta + \varepsilon h)$  también es de clase  $C^\infty$ , lo cual asegura la existencia de su derivada, y esta toma la forma:

$$D_h F(g) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(g + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} \quad (7.134)$$

Nótese que entonces se puede reescribir la expresión 7.133 con una notación más compacta usando la derivada direccional:

$$F(g + \varepsilon h) = F(g) + \varepsilon D_h F(g) + \frac{\varepsilon^2}{2!} D_h^{(2)} F(g) + \dots \quad (7.135)$$

Restando el funcional sin derivada asociada en el lado derecho, se obtiene la siguiente relación:

$$\Delta F(\varepsilon) = F(g + \varepsilon h) - F(g) = \varepsilon D_h F(g) + O(\varepsilon^2) \quad (7.136)$$

Considere la definición de la derivada funcional:

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta}(x) d^4 x \quad (7.137)$$

Ahora reemplazando  $\delta g_{\alpha\beta} = \varepsilon h_{\alpha\beta}$  para obtener:

$$D_h F(g) = \int \left. \frac{\delta F}{\delta g_{\alpha\beta}} \right|_g h_{\alpha\beta} d^4x \quad (7.138)$$

Nuevamente siguiendo el procedimiento presentado en Gelfand, I. M., & Fomin, S. V. (2000), se pide que  $\varepsilon = 1$ . Por lo que:

$$\begin{aligned} F(g(\varepsilon)) &= F(\eta) + \varepsilon F^{(1)}(h) + O(\varepsilon^2 h^2) \\ \longrightarrow F(g(\varepsilon)) &= F(\eta) + F^{(1)}(h) + O(h^2) \end{aligned} \quad (7.139)$$

Entonces al imponer la condición de linealización ( $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) todos los términos de orden  $O(h^2)$  para arriba se desvanecen, dejando la siguiente relación.

$$F(g) \approx F(\eta) + F^{(1)}(h) \quad (7.140)$$

Donde  $F^{(1)}$  es un funcional de primer orden, este es lineal respecto a la perturbación  $h$ , ya que fue previamente mostrado y posee la siguiente relación:

$$F^{(1)}(h) = D_h F(g) = \int \left. \frac{\delta F}{\delta g_{\alpha\beta}} \right|_g h_{\alpha\beta} d^4x \quad (7.141)$$

Nótese que todos los términos del lado derecho de la expresiones 7.140 son lineales respecto a la perturbación y dependen únicamente de la métrica y su perturbación, por lo que cualquier elemento construido únicamente a partir de la métrica y su perturbación deberá de obedecer la condición de linealización y no depender de términos mayores o iguales al segundo orden.

Finalmente es importante recalcar que si bien la condición de linealización:

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (7.142)$$

Impone la restricción de linealización sobre todos los elementos concomitantes de la métrica, se puede realizar un proceso similar al mostrado anteriormente para observar que esto también implica que a las derivadas respecto a  $h$  se les debe de imponer una condición de linealización similar:

$$|\partial_\sigma h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (7.143)$$

Ya establecida formalmente la condición de linealización en la métrica, se debe de investigar la linealización en los distintos elementos concomitantes de esta. En el presente trabajo se mostrarán las relaciones de:

- La métrica inversa.
- Los coeficientes de conexión.
- El tensor de Riemann.
- El tensor de Ricci.
- El escalar de Ricci.
- El tensor de Einstein.

### La métrica inversa

Considere la previamente mostrada relación de la métrica plana de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Nótese la relación de identidad existente entre la métrica y su inversa:

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (7.144)$$

Donde la delta de Kronecker denota la matriz identidad, en este caso la matriz identidad (4X4). Ahora sin pérdida de generalidad se puede asumir que la métrica inversa de Minkowski obedece la expresión:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu} \quad (7.145)$$

en la cual el parámetro  $k$  denota otra perturbación o cambio sobre la métrica. Este parámetro  $k$  también deberá de seguir la condición de linealización:

$$|k^{\mu\nu}| \ll 1 \quad (7.146)$$

Al substituir todas las  $g$  en la expresión 7.144 se obtiene:

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = (\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma})(\eta^{\sigma\nu} + k^{\sigma\nu}) \quad (7.147)$$

expandiendo el producto de los paréntesis:

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad (7.148)$$

por lo mostrado en la expresión 7.144 es fácil notar que el lado izquierdo de la expresión anterior es la identidad:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \underbrace{\eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}}_{\text{identidad}} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad (7.149)$$

$$\implies \delta_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad (7.150)$$

se cancelan las deltas de Kronecker:

$$0 = h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad (7.151)$$

Notar que la relación de identidad tanto de  $h$  como de  $k$  implican que un término compuesto de ambos debe de desvanecer, por lo que entonces se tiene que la expresión anterior toma la forma:

$$-h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad (7.152)$$

Ahora siguiendo el procedimiento de [5], se multiplica por la métrica inversa de Minkowski de ambos lados:

$$-h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}(\eta^{\rho\mu}) = \underbrace{\eta_{\mu\sigma}(\eta^{\rho\mu})}_{\text{identidad}}k^{\sigma\nu} \quad (7.153)$$

$$\implies -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}(\eta^{\rho\mu}) = k^{\sigma\nu}\delta_{\sigma}^{\rho} \quad (7.154)$$

Por propiedades de la identidad, el lado derecho se escribe en términos de  $\rho$ :

$$-h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}(\eta^{\rho\mu}) = k^{\rho\nu} \quad (7.155)$$

Nótese que las métricas inversas suben los índices de los tensores que las acompañan, por lo que en el lado izquierdo de la expresión anterior lo único que están haciendo las dos métricas inversas es subir y substituir índices a tal manera que:

$$-h^{\nu\rho} = k^{\rho\nu} \quad (7.156)$$

$$\implies -h^{\rho\nu} = k^{\rho\nu} \quad (7.157)$$

Por lo que al substituir este resultado en la expresión 7.145 se obtiene la relación de la métrica inversa:

$$\boxed{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}} \quad (7.158)$$

**Coefficientes de conexión**

Los coeficientes de conexión están dados por la siguiente relación:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (7.159)$$

Note que estos involucran únicamente derivadas respecto a la métrica, por lo que bajo la condición de linealización las derivadas pueden ser reescritas a lo siguiente:

$$\partial_{\varphi}g_{\mu\nu} = \partial_{\varphi}(\underbrace{\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}}_{\text{cte.}}) \quad (7.160)$$

$$\implies \partial_{\varphi}g_{\mu\nu} = \partial_{\varphi}(h_{\mu\nu}) \quad (7.161)$$

Entonces es posible substituir las derivadas respecto la métrica, por las derivadas respecto la perturbación en la expresión 7.159

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) \quad (7.162)$$

Además se puede reemplazar la métrica inversa  $g^{\sigma\alpha}$  por la relación encontrada en la sección anterior dictada por la expresión 7.158, tal como se muestra en [5]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\alpha} - h^{\sigma\alpha})(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) \quad (7.163)$$

Distribuyendo el producto se tiene:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}[(\eta^{\sigma\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) - (h^{\sigma\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + h^{\sigma\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - h^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu})] \quad (7.164)$$

Nótese que por la condición de linealización de la gravedad, cualquier término que dependa de segundo orden de magnitud respecto a la perturbación se hará cero:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ (\eta^{\sigma\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) - \left( \underbrace{h^{\sigma\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu}}_{\approx 0} + \underbrace{h^{\sigma\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu}}_{\approx 0} - \underbrace{h^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}}_{\approx 0} \right) \right] \quad (7.165)$$

$$\implies \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \eta^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) \quad (7.166)$$

Sacando a eta como factor común, se obtiene la definición para los coeficientes de conexión bajo la linealización de la gravedad:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu})} \quad (7.167)$$

**Tensor de Riemann**

El tensor de Riemann se define como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} (\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) + \Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \quad (7.168)$$

Recordando la definición para los coeficientes de conexión bajo la linealización de gravedad mostrada en la expresión 7.167

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) \quad (7.169)$$

$$\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\gamma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha} h_{\mu\gamma}) \quad (7.170)$$

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \quad (7.171)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\lambda} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\alpha} h_{\nu\lambda}) \quad (7.172)$$

Multiplicando el primer par de coeficientes:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} = \frac{1}{4} \eta^{\gamma\alpha} \eta^{\rho\alpha} \left( \begin{aligned} & + \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} \partial_{\gamma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha\gamma} - \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\gamma} \\ & + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\gamma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\mu} h_{\alpha\gamma} - \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\alpha} h_{\mu\gamma} \\ & - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} \partial_{\gamma} h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} \partial_{\mu} h_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} \partial_{\alpha} h_{\mu\gamma} \end{aligned} \right) \quad (7.173)$$

Ahora el otro par de coeficientes:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} = \frac{1}{4} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\rho\alpha} \left( \begin{aligned} & + \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} \partial_{\lambda} h_{\alpha\nu} + \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\lambda} \\ & + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\lambda} h_{\alpha\nu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\nu} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} \partial_{\alpha} h_{\nu\lambda} \\ & - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma} \partial_{\lambda} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma} \partial_{\nu} h_{\alpha\lambda} + \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma} \partial_{\alpha} h_{\nu\lambda} \end{aligned} \right) \quad (7.174)$$

Nótese que **todos** los términos dentro de los paréntesis dependen de un término de orden 2 sobre la perturbación, por lo que ambos paréntesis se anulan y por consiguiente los productos de los coeficientes también:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} = 0 \quad (7.175)$$

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} = 0 \quad (7.176)$$

Por lo que la expresión 7.168 bajo la linealización de gravedad se vuelve:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} (\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) \quad (7.177)$$

Expresándolo mediante la definición de los coeficientes de conexión tal como se muestra en [5], entonces:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \left( \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) \right) - \partial_{\nu} \left( \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \right) \quad (7.178)$$

Distribuyendo las derivadas parciales:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} \left( \partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \underbrace{\partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma}}_{\text{se anulan}} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} - \underbrace{\partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma}}_{\text{se anulan}} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma} \right) \quad (7.179)$$

Como se muestra en la expresión anterior, dado a que las derivadas conmutan, entonces dos de los términos se anulan, dotando así la forma:

$$\boxed{R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma})} \quad (7.180)$$

**Tensor de Ricci**

En [5] definen el tensor de Ricci de la siguiente forma:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} \quad (7.181)$$

Esto no es nada más que la **contracción** respecto a  $\mu$  del tensor de Riemann. Utilizando la definición anterior en 7.180, es evidente que para reemplazar el  $\rho$  por un  $\mu$  es necesario utilizar la métrica inversa de Minkowski para lograr la contracción:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}), \quad \text{substituyendo } \rho \rightarrow \mu \\ \implies R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} &= \eta^{\mu\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (7.182)$$

Nótese que ahora al operar por la métrica inversa surge el siguiente cambio de índices en las perturbaciones y sus derivadas:

$$h_{\alpha} \rightarrow h^{\mu}, \quad h_{\mu} \rightarrow h^{\alpha}, \quad \partial_{\alpha} \rightarrow \partial^{\mu} \quad (7.183)$$

$$\implies R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha}) \quad (7.184)$$

Los índices se contraen en el tensor de Riemann:

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha}) \quad (7.185)$$

Considere las siguientes definiciones. Se denota al **operador de d'Alembert** o también referido como d'Alembertiano:

$$\square := \eta^{\mu\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\alpha} = \partial_{\mu} \partial^{\mu} \quad (7.186)$$

Además siguiendo el procedimiento de [5], la **traza de las perturbaciones** se denotará como:

$$h_{\mu}^{\mu} = \mathbf{h} = \eta^{\mu\alpha} h_{\mu\alpha} \quad (7.187)$$

Por lo tanto, utilizando las definiciones previas, es posible reescribir el tensor de Ricci a la expresión:

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \square h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} \mathbf{h} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha}) \quad (7.188)$$

Reordenando términos se concluye con la relación:

$$\boxed{R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha} - \square h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} \mathbf{h})} \quad (7.189)$$

**Escalar de Ricci**

El escalar de Ricci lo definen en [15] de la siguiente forma:

$$R = R^\nu_\nu = \eta^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \quad (7.190)$$

Aplicando esto a la relación 7.189 se tiene:

$$R = \eta^{\sigma\nu} \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu_\nu + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha_\sigma - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma \mathbf{h}) \quad (7.191)$$

Repitiendo el procedimiento de la sección anterior para subir los índices mediante la métrica inversa, se notan las siguientes relaciones:

$$h^\mu_\nu \rightarrow h^{\mu\sigma}, \quad \partial_\nu \rightarrow \partial^\sigma \quad (7.192)$$

Substituyendo en el escalar de Ricci:

$$R = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \square h^\sigma_\sigma - \partial^\sigma \partial_\sigma \mathbf{h}) \quad (7.193)$$

Ahora gracias a la generalidad de los índices se substituye en el segundo término lo siguiente:

$$\partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha\nu} \rightarrow \partial_\nu \partial_\sigma h^{\nu\sigma} \quad (7.194)$$

Además reconociendo las definiciones previas se reescribe el escalar de Ricci a lo siguiente:

$$R = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma h^{\nu\sigma} - \square \mathbf{h} - \square \mathbf{h}) \quad (7.195)$$

Nuevamente por la generalidad de los índices es válido hacer la siguiente substitución:

$$\partial_\nu \partial_\sigma h^{\nu\sigma} \rightarrow \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} \quad (7.196)$$

$$\implies R = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square \mathbf{h} - \square \mathbf{h}) \quad (7.197)$$

Finalmente sacando un 2 de factor común en la expresión, se concluye lo siguiente:

$$\boxed{R = (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square \mathbf{h})} \quad (7.198)$$

**Tensor de Einstein**

El tensor de Einstein es definido en [5] mediante la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (7.199)$$

Ingresando todas las definiciones previamente encontradas en secciones anteriores se tiene que:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square \mathbf{h}) \quad (7.200)$$

Reemplazando la métrica  $g$  por la métrica plana de Minkowski y su perturbación se tiene:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}) - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square \mathbf{h}) \quad (7.201)$$

Expandiendo el producto de la métrica y su perturbación:

$$\frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square \mathbf{h}) - \underbrace{\frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square \mathbf{h})}_{\text{orden } O(h^2) \approx 0} \quad (7.202)$$

$$\implies G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square \mathbf{h}) \quad (7.203)$$

Repartiendo la métrica plana de Minkowski en el producto, se tiene la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}) - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h}) \quad (7.204)$$

$$\implies G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h}) \quad (7.205)$$

Nótese que se tienen perturbaciones con sus dos índices arriba, otras con dos índices abajo, y algunas con índices mezclados, esto dificulta el trabajo sobre el tensor por lo que se presenta la siguiente regla de intercambio de índices:

$$\boxed{\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial^\alpha h_\alpha^\nu} \quad (7.206)$$

Esta relación permite básicamente intercambiar el lugar de los índices en la perturbación a cambio de subir o bajar correspondiente mente un índice en la derivada. **Nota:** Esta regla de intercambio de índices se deriva de la previa relación con la métrica inversa mostrada a continuación:

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu \eta^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu = \partial^\alpha h_\alpha^\nu \quad (7.207)$$

Entonces gracias a la regla de intercambio de índices es posible reescribir el tensor de Einstein a manera que todas las perturbaciones tengan dos subíndices a cambio de subir unos índices de sus derivadas, esto se ve claramente en la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h}) \quad (7.208)$$

Ahora considere la siguiente definición dada en [13]. Esto ayudará a simplificar la forma del tensor:

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h}} \quad (7.209)$$

Y su inversa:

$$\boxed{h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h}} \quad (7.210)$$

Por lo que se reemplazan todas las perturbaciones del tensor de Einstein por la definición vista previamente:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial^\alpha \partial_\mu (\bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} \mathbf{h}) & + \partial^\alpha \partial_\nu (\bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} \mathbf{h}) & - \square (\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h}) \\ - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h} & - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta (\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \mathbf{h}) & + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h} \end{pmatrix} \quad (7.211)$$

Es crucial mencionar que tanto la expresión anterior, como las similares en la sección de los coeficientes de conexión no son matrices, simplemente es una expresión larga puesta con varios niveles. Habiendo dicho esto, dada su longitud se trabajará cada componente por separado.

### Primera componente

Se tiene como primera componente:

$$\partial^\alpha \partial_\mu \left( \bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} \mathbf{h} \right) \quad (7.212)$$

Expandiendo el producto:

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\nu \eta_{\alpha\nu} \mathbf{h} \quad (7.213)$$

Donde la métrica de Minkowski baja un índice de las derivadas:

$$\boxed{\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu \mathbf{h}} \quad (7.214)$$

### Segunda componente

La segunda componente es:

$$\partial^\alpha \partial_\nu \left( \bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} \mathbf{h} \right) \quad (7.215)$$

Nuevamente expandiendo:

$$\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\nu \eta_{\mu\alpha} \mathbf{h} \quad (7.216)$$

De manera similar a la primera expresión, la métrica baja un índice pero esta vez también lo transforma:

$$\boxed{\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}} \quad (7.217)$$

### Tercer componente

El tercer componente toma la forma:

$$- \square \left( \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h} \right) \quad (7.218)$$

Recordando la definición del operador de d'Alembert se reescribe:

$$- \partial^\alpha \partial_\alpha \left( \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h} \right) \quad (7.219)$$

Se realiza el producto para obtener:

$$\boxed{- \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\alpha \eta_{\mu\nu} \mathbf{h}} \quad (7.220)$$

### Cuarta componente

La cuarta componente se define como:

$$\boxed{- \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h}} \quad (7.221)$$

**Quinta componente**

La quinta componente se identifica como:

$$-\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\left(\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\mathbf{h}\right) \quad (7.222)$$

Operando se tiene:

$$-\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\eta_{\alpha\beta}\mathbf{h} \quad (7.223)$$

Notar que la métrica de Minkowski nuevamente baja y cambia un índice de las derivadas parciales:

$$\boxed{-\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h}} \quad (7.224)$$

**Sexta componente**

Finalmente la sexta componente es:

$$\eta_{\mu\nu}\square\mathbf{h} \quad (7.225)$$

Nuevamente por definición del operador de d'Alembert se tiene:

$$\boxed{\partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h}} \quad (7.226)$$

**Simplificación**

Nótese que existen varios términos repartidos sobre las distintas componentes los cuales se **anulan**, para comenzar con la simplificación nótese que la sexta componente 7.226 se anula con una parte de la quinta 7.224 y de la tercera 7.220 ya que:

$$\partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} - \frac{1}{2}\partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} \quad (7.227)$$

$$\implies \partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} - \partial^\alpha\partial_\alpha\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} = 0 \quad (7.228)$$

Luego de manera similar la cuarta componente 7.221 se anula con una parte de la segunda y primer componentes respectivamente 7.217, 7.214. Esto es debido a que:

$$-\partial_\mu\partial_\nu\mathbf{h} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\mathbf{h} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\mathbf{h} \quad (7.229)$$

$$\implies -\partial_\mu\partial_\nu\mathbf{h} + \partial_\mu\partial_\nu\mathbf{h} = 0 \quad (7.230)$$

Entonces los únicos términos restantes sobre la expansión son:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\nu}}_{1\text{-comp}} + \overbrace{\partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha}}^{2\text{-comp}} - \underbrace{\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{h}_{\mu\nu}}_{3\text{-comp}} - \overbrace{\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta}}^{5\text{-comp}}\right) \quad (7.231)$$

Por lo tanto, el tensor de Einstein bajo la linealización de gravedad se define como:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\alpha\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta}\right)} \quad (7.232)$$

O con la notación del operador d'Alembert:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha} - \square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta}\right)} \quad (7.233)$$

## 7.4. Condiciones de calibre

### 7.4.1. Simetría de calibre

Antes de invocar al calibre de Lorenz primero se mostrará que el tensor de Einstein se mantiene invariante bajo cualquier transformación de calibre inducida por cualquier difeomorfismo, primero observe la notación para el tensor de Einstein linealizado:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) \quad (7.234)$$

Ahora considere el siguiente difeomorfismo:

$$\varphi : M \mapsto M \ni \varphi(x^\mu) \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad |\xi^\mu| \ll 1 \quad (7.235)$$

Note que la transformación de calibre bajo una perturbación tendrá la forma:

$$\boxed{\delta h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}} \quad (7.236)$$

Note que al introducir una variación en la métrica la derivada de Lie permite expresarlo como:

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (7.237)$$

De la expresión 7.130 se puede despejar en función de la perturbación:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (7.238)$$

Entonces utilizando la propiedad dotada por la derivada de Lie, es posible reescribir la variación sobre la perturbación mediante las derivadas direccionales:

$$\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (7.239)$$

Observe que dada la expresión anterior, la variación de la traza de la perturbación se define como:

$$\delta \mathbf{h} = \eta^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu} = -2\partial_\rho \xi^\rho \quad (7.240)$$

Por lo que la variación para  $\bar{h}$  se define como:

$$\delta \bar{h}_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho \quad (7.241)$$

Nótese que esto indica que todas las transformaciones serán estrictamente de orden lineal en  $\xi$ . Expandiendo el procedimiento realizado en [13], se introduce el operador de d'Alembert a la variación, esto con el fin de poder expresar la variación del tensor de Einstein componente por componente:

$$\boxed{\square \delta \bar{h}_{\mu\nu} = -\square \partial_\mu \xi_\nu - \square \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \square \partial_\rho \xi^\rho} \quad (7.242)$$

Ahora observe que la variación de  $\bar{h}$  con ambos índices levantados por la métrica se ve de la siguiente forma:

$$\delta \bar{h}^{\rho\sigma} = -\partial^\rho \xi^\sigma - \partial^\sigma \xi^\rho + \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \xi^\rho \quad (7.243)$$

Realizando una doble derivación de ambos lados se nota la relación:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial_\sigma \delta \bar{h}^{\rho\sigma} &= -\partial_\rho \partial_\sigma \partial^\rho \xi^\sigma - \partial_\rho \partial_\sigma \partial^\sigma \xi^\rho + \partial_\rho \partial_\sigma (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \xi^\rho) \\ &= -\square \partial_\sigma \xi^\sigma - \square \partial_\rho \xi^\rho + \square \partial_\rho \xi^\rho \end{aligned} \quad (7.244)$$

Nótese que tanto  $\rho$  como  $\sigma$  son *dummy indexes* por lo que se puede reescribir el primer término en términos de rho para obtener:

$$\partial_\rho \partial_\sigma \delta \bar{h}^{\rho\sigma} = -2\square \partial_\rho \xi^\rho + \square \partial_\rho \xi^\rho = -\square \partial_\rho \xi^\rho \quad (7.245)$$

Entonces:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \delta \bar{h}^{\rho\sigma} = -\eta_{\mu\nu} \square \partial_\rho \xi^\rho} \quad (7.246)$$

Ahora observe la forma que toman las derivadas para la perturbación con índices mezclados:

$$\partial_\mu \partial_\rho \delta \bar{h}_\nu^\rho = -\partial_\mu \partial_\rho \partial^\rho \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\rho \partial_\nu \xi^\rho + \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \xi^\rho \quad (7.247)$$

Simplificando con el operador de d'Alembert:

$$\boxed{\partial_\mu \partial_\rho \delta \bar{h}_\nu^\rho = -\partial_\mu \square \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\rho \partial_\nu \xi^\rho + \partial_\mu \partial_\rho \partial_\nu \xi^\rho = -\partial_\mu \square \xi_\nu} \quad (7.248)$$

Si se deriva respecto a  $\nu$  la perturbación con los índices mezclados se continúa con un proceso similar:

$$\partial_\nu \partial_\rho \delta \bar{h}_\mu^\rho = -\partial_\nu \partial_\rho \partial^\rho \xi_\mu - \partial_\nu \partial_\rho \partial_\mu \xi^\rho + \partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \xi^\rho \quad (7.249)$$

Nuevamente se tiene:

$$\boxed{\partial_\nu \partial_\rho \delta \bar{h}_\mu^\rho = -\partial_\nu \square \xi_\mu} \quad (7.250)$$

Ahora note que es posible realizar un juego de índices sobre el tensor linealizado de Einstein para reescribirlo de la siguiente forma como se muestra en [5]:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( \square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho \right) \quad (7.251)$$

Al introducir una variación en dicho tensor se tiene:

$$\delta G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( \square \delta \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \delta \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial_\rho \delta \bar{h}_\nu^\rho - \partial_\nu \partial_\rho \delta \bar{h}_\mu^\rho \right) \quad (7.252)$$

Nótese que cada uno de los términos del tensor de Einstein variado posee una relación con el operador de d'Alembert, estas son dadas por las expresiones encajonadas 7.242, 7.246, 7.248, 7.250. Por lo que al sustituir en el tensor se encuentra:

$$\delta G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} -\square \partial_\mu \xi_\nu - \square \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho \\ + \partial_\mu \square \xi_\nu + \partial_\nu \square \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \square \partial_\rho \xi^\rho \end{array} \right) \quad (7.253)$$

Donde se aprecia con claridad que todos los términos se cancelan, por lo que la variación del tensor de Einstein inducida por un difeomorfismo cualquiera se vuelve:

$$\boxed{\delta G_{\mu\nu}^{(1)} = 0} \quad (7.254)$$

Por lo tanto dicho tensor se mantiene invariante bajo cualquier transformación de calibre.

### 7.4.2. El calibre de Lorenz

Considere al tensor de Einstein previamente derivado:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) \quad (7.255)$$

Expandiendo en el proceso presentado en [13], se impondrá la siguiente condición sobre el tensor de Einstein:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.256)$$

A continuación se deconstruirá el tensor de Einstein por componentes y se les impondrá la condición de calibre previamente mencionada.

#### Primer componente

Nótese que gracias a la relación establecida en 7.206 se puede reescribir la primer componente del tensor a lo siguiente:

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \partial_\mu \bar{h}_\beta^\alpha \quad (7.257)$$

Ahora para subir el índice  $\beta$  se multiplica por la métrica plana de Minkowski:

$$\partial_\alpha \partial_\mu \bar{h}_\beta^\alpha = \partial_\alpha \partial_\mu \eta_{\beta\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} \quad (7.258)$$

Gracias a que el espacio-tiempo es una variedad de clase  $C^\infty$  las derivadas conmutan, entonces se pueden reorganizar los términos:

$$\partial_\alpha \partial_\mu \eta_{\beta\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\beta\nu} \partial_\mu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) \quad (7.259)$$

Gracias a la arbitrariedad de los índices es posible intercambiar las betas y los alpha de la expresión anterior:

$$\eta_{\beta\nu} \partial_\mu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) = \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\alpha}) \quad (7.260)$$

Gracias a la condición 7.268 el paréntesis se anula, dotando de la expresión:

$$\eta_{\alpha\nu} \partial_\mu (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\alpha}) = \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu (0) = 0 \quad (7.261)$$

Desvaneciéndose así el primer término del tensor de Einstein.

#### Segundo componente

El segundo componente cuenta con una estructura similar al primer componente. Siguiendo el mismo procedimiento se tiene:

$$\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} = \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha \quad (7.262)$$

$$\implies \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha = \partial_\alpha \partial_\nu \eta_{\beta\mu} \bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\beta\mu} \partial_\nu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) \quad (7.263)$$

$$\therefore \eta_{\beta\mu} \partial_\nu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) = \eta_{\beta\mu} \partial_\nu (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\alpha}) = 0 \quad (7.264)$$

**Cuarto componente**

Utilizando la misma regla que en componentes pasados 7.206, se pueden bajar ambos índices de las derivadas direccionales, siempre y cuando se suban los índices de la perturbación:

$$\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta} \tag{7.265}$$

Nuevamente por conmutatividad se tiene lo siguiente:

$$\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha(\partial_\beta\bar{h}^{\beta\alpha}) \tag{7.266}$$

Por lo tanto, gracias a la condición de Lorenz se tiene:

$$\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha(\partial_\beta\bar{h}^{\beta\alpha}) = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha(0) = 0 \tag{7.267}$$

**Tensor resultante**

Dado a la cancelación de el primer, segundo y cuarto componente del tensor de Einstein, este toma la nueva forma:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = -\square\bar{h}_{\mu\nu}} \tag{7.268}$$

**7.4.3. Sistema de coordenadas del calibre de Lorenz**

Siguiendo la metodología de [5], ahora se debe de encontrar un sistema de coordenadas el cual cumpla con la condición de Lorenz 7.268 impuesta sobre el tensor de Einstein, para ello se buscará una transformación de coordenadas la cual actué sobre  $(ct, x, y, z) \mapsto (ct', x', y', z')$ , para esto se utilizará nuevamente el concepto de la variación del campo. Para mostrar de manera más clara este concepto referirse a la figura siguiente, donde el sistema coordenado normal son las líneas punteadas azules, la variación del campo es representada por las flechas moradas y el nuevo sistema coordenado esta dado por la malla roja.

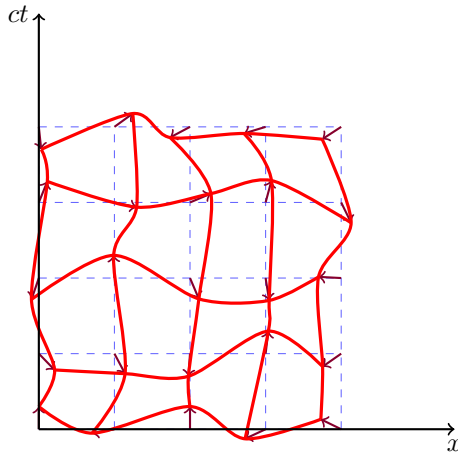


Figura 7.1: Transformación del sistema coordenado para el calibre de Lorenz

Nótese que de la relación 7.236 se puede despejar en torno a la perturbación bajo el cambio de coordenadas para obtener lo siguiente:

$$h'_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (7.269)$$

Donde gracias a la previamente mencionada propiedad de las derivadas de Lie, es posible definir a la variación sobre la perturbación mediante sus derivadas direccionales:

$$\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (7.270)$$

Esto sale de la relación de la métrica y su derivada de Lie asociada mostrada en la sección de Simetría de calibre 7.237. Al substituir se tiene:

$$\boxed{h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu} \quad (7.271)$$

Consecuentemente la métrica también se transforma con la relación análoga:

$$\boxed{g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu} \quad (7.272)$$

Siguiendo la metodología presentada en [13] se utilizará la definición vista en 7.210 para substituir la transformación en la perturbación a lo siguiente:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathbf{h}' = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h'_{\alpha\beta} \quad (7.273)$$

Substituyendo la relación para la traza inversa se obtiene:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = (h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha)) \quad (7.274)$$

Distribuyendo:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \xi_\beta + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \xi_\alpha \quad (7.275)$$

$$= h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\beta \xi^\beta \quad (7.276)$$

$$= \underbrace{h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathbf{h}}_{\bar{h}_{\mu\nu}} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \underbrace{\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\beta \xi^\beta}_{\eta_{\mu\nu}\partial_\rho \xi^\rho} \quad (7.277)$$

$$\implies \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho \xi^\rho - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (7.278)$$

Buscando la representación mostrada en [13], se multiplicará por dos métricas planas inversas para subir los índices:

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\bar{h}'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho \xi^\rho - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) \quad (7.279)$$

$$= \bar{h}'^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}\partial_\rho \xi^\rho - \eta^{\mu\alpha}\partial_\mu \xi^\beta - \eta^{\nu\beta}\partial_\nu \xi^\alpha \quad (7.280)$$

Nótese que al derivar respecto a  $\beta$ , gracias a la arbitrariedad de los índices, es posible anular los términos señalados por las flechas en la expresión anterior:

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} + \cancel{\eta^{\alpha\mu}\partial_\mu \partial_\beta \xi^\beta} - \cancel{\eta^{\mu\alpha}\partial_\beta \partial_\mu \xi^\beta} - \eta^{\nu\beta}\partial_\beta \partial_\nu \xi^\alpha \quad (7.281)$$

$$\implies \partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\nu\beta}\partial_\beta \partial_\nu \xi^\alpha \quad (7.282)$$

Operando la métrica de Minkowski para subir y cambiar el signo  $\nu \uparrow \beta$  se reemplaza por la definición del operador de d'Alembert tal que:

$$\boxed{\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \square \xi^\alpha} \quad (7.283)$$

Por lo que para cumplir la condición de Lorenz, basta con escoger una perturbación en el campo que cumpla con:

$$\boxed{\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \square \xi^\alpha \quad \ni \quad \partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0} \quad (7.284)$$

#### 7.4.4. Calibre TT

Obsérvese que las ecuaciones de campo de Einstein están dadas por 7.3:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Donde al solo considerar soluciones a vacío, se impone la condición vista en la sección de linealización de la gravedad la cual dicta que el tensor de estrés-energía debe de ser cero, por lo que entonces se obtiene la expresión:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (7.285)$$

Gracias a la condición del calibre de Lorenz 7.268, el tensor de Einstein toma la forma específica:

$$G_{\mu\nu} = -\square \bar{h}_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0} \quad (7.286)$$

Dado a que la perturbación  $h$  existe sobre la métrica plana de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , dicha perturbación también puede ser representada similarmente a la métrica mediante la siguiente forma matricial:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (7.287)$$

Nótese que en la expresión anterior la perturbación  $h$  posee 16 componentes distintos. Sin embargo, gracias a que esta cuenta con la propiedad de simetría, estos se reducen a solo 10 componentes distintos dado que la perturbación, al igual que la métrica poseen la propiedad de simetría:

$$\boxed{h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}} \quad (7.288)$$

Ahora analizando la condición impuesta por el calibre de Lorenz 7.268 se debe de notar que esta describe una condición lineal sobre 4 componentes, ya que:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad \text{Donde: } \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (7.289)$$

La expresión anterior constituye **cuatro** ecuaciones diferenciales lineales (una por cada valor del índice  $\alpha$ ). Puesto que  $h_{\mu\nu}$  es simétrico (10 componentes), más adelante se verá que estas restricciones reducen el número de funciones independientes a seis:

$$\Rightarrow h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & \cancel{h_{03}} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & \cancel{h_{13}} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & \cancel{h_{23}} \\ \cancel{h_{30}} & \cancel{h_{31}} & \cancel{h_{32}} & \cancel{h_{33}} \end{pmatrix} \quad (7.290)$$

En la sección anterior, más específicamente en la expresión 7.283 se muestra que al realizar una perturbación en el campo derivada de un difeomorfismo, dicho campo transformado cumplirá con la condición de Lorenz si y solo si:

$$\boxed{\square \xi^\alpha = 0} \quad (7.291)$$

Por lo que cualquier elemento  $\xi^\alpha$  que satisfaga la ecuación de onda mostrada anteriormente, dejará la condición del calibre de Lorenz sin alterar. Nótese que la familia de soluciones de 7.291 es infinita dimensional, ya que esta está compuesta de 4 funciones independientes  $\xi^\alpha$ , cada una determinada por dos funciones independientes (condiciones iniciales de la onda). Esto lo que indica es que todavía es posible especificar un sistema de coordenadas o calibre dentro del calibre de Lorenz el cual no solo se mantenga invariante bajo el difeomorfismo impuesto sobre el campo, sino que también cumpla con la condición de Lorenz, esto será el rol del **calibre TT**.

### Interpretación física

Antes de mostrar explícitamente la forma del calibre TT es importante recalcar la interpretación física del sistema, observe que la relación 7.286 describe una **ecuación de onda**, pero no es una ecuación de onda cualquiera ya que el operador de d'Alembert posee la propiedad de linealidad, es decir que:

$$\square(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2) = (\alpha_1 \square G_1 + \alpha_2 \square G_2) \quad (7.292)$$

Por lo que la expresión 7.286 describe una ecuación de onda la cual también es lineal. Entonces sin pérdida de generalidad se puede asumir que la solución a la ecuación de onda viene en forma de una onda plana, ya que cualquier onda genérica se puede escribir como una combinación lineal de ondas planas. Estas tal como se muestra en [13] pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$A_{\mu\nu} \cos(\eta_{tt} k^t ct + \eta_{xx} k^x x + \eta_{yy} k^y y + \eta_{zz} k^z z) \quad (7.293)$$

$$= A_{\mu\nu} \cos(\eta_{\mu\sigma} k^\mu x^\sigma) = \text{Re} \left[ A_{\mu\nu} e^{(ik_\sigma x^\sigma)} \right] = h_{\mu\nu}(x) \quad (7.294)$$

Donde los elementos  $k^\mu$  son los componentes del vector de onda. y los elementos  $k_\sigma$  son los componentes del covector de onda:

$$\vec{k} = k^\mu \vec{e}_\mu, \quad k = k_\sigma \epsilon^\sigma \quad (7.295)$$

Nótese que  $k^x, k^y, k^z$  son los números de onda,  $k^t = \frac{\omega}{x}$  es la frecuencia angular y  $A_{\mu\nu}$  representa la amplitud de onda. Esta al igual que la perturbación se representa como una matriz simétrica de  $4 \times 4$ , sobre la cual como se mostró previamente por la simetría y el calibre de Lorenz, se reduce a seis componentes independientes. Observe que las ecuaciones de onda mencionadas previamente poseen la siguiente cualidad al ser derivadas respecto a una dirección arbitraria:

$$\partial_\alpha (\bar{h}_{\mu\nu}) = \partial_\alpha \left( A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \quad (7.296)$$

Sacando a la amplitud de onda de la derivada gracias a que es constante, se observa que se tiene una derivada respecto a una exponencial, la cual gracias a la regla de la cadena se puede expresar como:

$$A_{\mu\nu} \partial_\alpha \left( e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) = A_{\mu\nu} \left( e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) \partial_\alpha (ik_\sigma x^\sigma) \quad (7.297)$$

Donde el co-vector es constante respecto a la derivada direccional, por lo que entonces se tiene:

$$= A_{\mu\nu} \left( e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) ik_\sigma \underbrace{\partial_\alpha x^\sigma}_{\delta_\alpha^\sigma} \quad (7.298)$$

$$= A_{\mu\nu} \left( e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) ik_\sigma \delta_\alpha^\sigma = A_{\mu\nu} \left( e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) ik_\alpha \quad (7.299)$$

$$\therefore \partial_\alpha (\bar{h}_{\mu\nu}) = \bar{h}_{\mu\nu} ik_\alpha \quad (7.300)$$

Es importante mencionar que el co-vector de onda  $k$  posee la propiedad de ser un (*null covector*, también conocido como un *light-like*) tal como lo mencionan en [15], esto se ve de forma evidente cuando se realiza el siguiente procedimiento:

$$0 = \square \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}_{\mu\nu} \quad (7.301)$$

$$0 = \eta^{\alpha\beta} ik_\alpha ik_\beta \bar{h}_{\mu\nu} = -ik_\alpha ik^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \quad (7.302)$$

Donde por la arbitrariedad de  $\bar{h}$ , se concluye que el producto de vector y co-vector debe de ser cero:

$$0 = -k_\alpha k^\alpha = ||k||^2 \quad (7.303)$$

### Calibre de Lorenz en las ecuaciones de onda

La condición de Lorenz previamente vista en 7.268 puede ser reescrita gracias a la cualidad de la ecuación de onda vista previamente:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = ik_\beta \bar{A}^{\alpha\beta} e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0 \quad (7.304)$$

$$\implies ik_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.305)$$

De manera similar a la sección de linealización de la gravedad donde se mostraron las relaciones 7.209 y 7.210 presentadas en [13], se definen expresiones análogas para la amplitud de onda:

$$\bar{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}A \quad (7.306)$$

$$A_{\mu\nu} = \bar{A}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}A \quad (7.307)$$

Por lo que la condición de Lorenz también puede ser escrita como:

$$\boxed{k^\mu \bar{A}_{\mu\nu} = 0, \quad \nu = (0, 1, 2, 3)} \quad (7.308)$$

Suponga una onda monocromática plana que se desplaza en la dirección  $+z$  con vector de onda definido:

$$k^\mu = (w, 0, 0, k), \quad k = w \quad (7.309)$$

Se puede encontrar un sistema de ecuaciones que describa al sistema en todas sus componentes si se fija un parámetro  $\nu$  y se trabaja con las únicas componentes no triviales de  $\mu$  (0,3) de manera similar a los procesos realizados en [29]:

- Fijando  $\nu = 0$ :

$$k^\mu \bar{A}_{\mu 0} = k^0 \bar{A}_{00} + k^3 \bar{A}_{30} = w \bar{A}_{00} + w \bar{A}_{30} = 0 \quad (7.310)$$

- Fijando  $\nu = 1$ :

$$k^\mu \bar{A}_{\mu 1} = k^0 \bar{A}_{01} + k^3 \bar{A}_{31} = w \bar{A}_{01} + w \bar{A}_{31} = 0 \quad (7.311)$$

- Fijando  $\nu = 2$ :

$$k^\mu \bar{A}_{\mu 2} = k^0 \bar{A}_{02} + k^3 \bar{A}_{32} = w \bar{A}_{02} + w \bar{A}_{32} = 0 \quad (7.312)$$

- Fijando  $\nu = 3$ :

$$k^\mu \bar{A}_{\mu 3} = k^0 \bar{A}_{03} + k^3 \bar{A}_{33} = w \bar{A}_{03} + w \bar{A}_{33} = 0 \quad (7.313)$$

Dividiendo todo por  $w$  se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{A}_{30} &= -\bar{A}_{00} \\ \bar{A}_{31} &= -\bar{A}_{01} \\ \bar{A}_{32} &= -\bar{A}_{02} \\ \bar{A}_{33} &= -\bar{A}_{03} \end{aligned}} \quad (7.314)$$

Ahora se utilizarán las definiciones para la traza inversa de la amplitud a manera de despejar las ecuaciones anteriores y queden en función de la amplitud ( $A_{\mu\nu}$ ), esto permitirá reescribir los componentes del tensor simétrico de la amplitud, para mostrar como es que de 10 componentes al aplicar el calibre de Lorenz directamente sobre las ecuaciones de onda, se reduce el número de componentes no triviales a seis, tal como se mencionó anteriormente al principio de la sección.

**Primera ecuación:**

Substituyendo la definición de la traza inversa de la amplitud se tiene que:

$$\bar{A}_{03} = A_{03} - \eta_{03} \mathbf{A} \quad (7.315)$$

Nótese que la métrica plana de Minkowski en la posición (03) toma un valor de cero, por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$\bar{A}_{03} = A_{03} \quad (7.316)$$

De manera similar se sabe que  $\eta_{00} = -1$ , por lo que el lado derecho de la primera expresión se vuelve:

$$\bar{A}_{00} = A_{00} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \quad (7.317)$$

Uniendo ambas expresiones se concluye con lo siguiente:

$$\boxed{A_{03} = -A_{00} - \frac{1}{2} \mathbf{A}} \quad (7.318)$$

**Segunda ecuación:**

Nuevamente se substituyen las definiciones de la traza inversa para ambas amplitudes:

$$\bar{A}_{31} = A_{31} - \frac{1}{2} \eta_{31}^0 \mathbf{A} \quad (7.319)$$

$$\bar{A}_{01} = A_{01} - \frac{1}{2} \eta_{01}^0 \mathbf{A} \quad (7.320)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{31} = -A_{01}} \quad (7.321)$$

**Tercera ecuación:**

$$\bar{A}_{32} = A_{32} - \frac{1}{2} \eta_{32}^0 \mathbf{A} \quad (7.322)$$

$$\bar{A}_{02} = A_{02} - \frac{1}{2} \eta_{02}^0 \mathbf{A} \quad (7.323)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{32} = -A_{02}} \quad (7.324)$$

**Cuarta ecuación:**

$$\bar{A}_{33} = A_{33} - \frac{1}{2} \eta_{33}^1 \mathbf{A} \quad (7.325)$$

$$\bar{A}_{03} = A_{03} - \frac{1}{2} \eta_{03}^0 \mathbf{A} \quad (7.326)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{33} = -A_{03} + \frac{1}{2} \mathbf{A}} \quad (7.327)$$

Por lo que al substituir las relaciones 7.318,7.321,7.324,7.327 en el tensor simétrico de la amplitud de onda, se observa que bajo el calibre de Lorenz este posee únicamente 6 componentes independientes y toma la siguiente forma:

$$A_{\mu\nu}^{Lorenz} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \boxed{-A_{00} - \frac{1}{2} \mathbf{A}} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & \boxed{-A_{01}} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & \boxed{-A_{02}} \\ \boxed{-A_{00} - \frac{1}{2} \mathbf{A}} & \boxed{-A_{01}} & \boxed{-A_{02}} & \boxed{-A_{03} + \frac{1}{2} \mathbf{A}} \end{pmatrix} \quad (7.328)$$

Ahora finalmente se puede continuar con las condiciones del calibre TT, estas se dividen en 3 condiciones **transversales** y una sobre **la traza**.

**Condiciones transversales del calibre TT**

Considere el siguiente difeomorfismo de la forma:

$$\xi^\mu(x) = \Xi^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \ni \square \xi^\mu = 0 \quad (7.329)$$

Donde la amplitud obedece la siguiente regla de transformación (ver 7.271):

$$A_{\mu\nu} \mapsto A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - i(k_\mu \Xi_\nu + k_\nu \Xi_\mu) \quad (7.330)$$

Cuando se impone la condiciones **transversales** simplemente se está restringiendo a cero todas las expresiones que lleven un componente en la dirección de la propagación de la onda, en este caso esa componente es la  $z$ :

$$A'_{3\mu} = 0 \iff A'_{30} = A'_{31} = A'_{32} = 0 \quad (7.331)$$

**A probar:** Existe una amplitud  $\Xi_\mu$  tal que la matriz transformada  $A'_{3\mu} = 0$ .

Utilizando la definición anterior para la amplitud bajo un difeomorfismo, se reescriben los componentes previos siguiendo la metodología de [29]:

$$\begin{aligned} A'_{30} &= A_{30} - i(k_3 \Xi_0 + k_0 \Xi_3) = A_{30} - iw(\Xi_0 - \Xi_3) \\ A'_{31} &= A_{31} - i(k_3 \Xi_1 + k_1 \Xi_3) = A_{31} - iw\Xi_1 \\ A'_{32} &= A_{32} - i(k_3 \Xi_2 + k_2 \Xi_3) = A_{32} - iw\Xi_2 \end{aligned} \quad (7.332)$$

Substituyendo por la relación definida al imponer la condición transversal del calibre TT se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{30} - iw(\Xi_0 - \Xi_3) \\ 0 &= A_{31} - iw\Xi_1 \\ 0 &= A_{32} - iw\Xi_2 \end{aligned} \quad (7.333)$$

Resolviendo para las amplitudes  $\Xi$  se obtienen las siguientes relaciones:

$$\Xi_1 = \frac{(A_{31})}{iw} \quad (7.334)$$

$$\Xi_2 = \frac{(A_{32})}{iw} \quad (7.335)$$

$$\Xi_0 - \Xi_3 = \frac{(A_{30})}{iw} \quad (7.336)$$

Se sigue que substituyendo estas expresiones en las relaciones para las amplitudes primadas  $A'_{\mu\nu}$  se observa que efectivamente estas son cero:

$$A'_{31} = A_{31} - iw\Xi_1 = A_{31} - iw \left( \frac{A_{31}}{iw} \right) = 0$$

$$A'_{32} = A_{32} - iw\Xi_2 = A_{32} - iw \left( \frac{A_{32}}{iw} \right) = 0 \quad (7.337)$$

$$A'_{30} = A_{30} - iw(\Xi_0 - \Xi_3) = A_{30} - iw \left( \frac{A_{30}}{iw} \right) = 0$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} A'_{31} &= 0 \\ A'_{32} &= 0 \\ A'_{30} &= 0 \end{aligned}} \quad (7.338)$$

Observe que gracias a la propiedad de **simetría de calibre** del tensor de Einstein, es posible representar a la matriz de amplitudes como la matriz transformada compuesta por los componentes primados. (se omitirá el primar los componentes a favor de mantener la claridad en el proceso) En dicha nueva matriz se tiene que las componentes (31, 32, 30) desvanecen, entonces por simetría las componentes (13, 23, 03) también lo hacen. Se puede realizar un proceso similar para mostrar que (01, 02) y sus recíprocos simétricos también desvanecen, dotando de la siguiente representación matricial para la amplitud de onda:

$$A_{\mu\nu}^T = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (7.339)$$

### Condición sin traza del calibre TT

En la métrica de Minkowski, la traza  $\mathbf{A}$  toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (7.340)$$

Del proceso anterior solo se tiene una combinación más de las amplitudes  $\Xi_\mu$  para simplificar el sistema, aun se debe definir:

$$\Xi_0, \Xi_3 \quad (7.341)$$

Recordando la expresión para las amplitudes primadas se tiene:

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - i(k_\mu \Xi_\nu + k_\nu \Xi_\mu) \quad (7.342)$$

Substituyendo por la definición previamente vista se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones:

■ **Componente (00):**

$$A'_{00} = A_{00} - i(k_0 \Xi_0 + k_0 \Xi_0) \quad (7.343)$$

$$A'_{00} = A_{00} - 2ik_0 \Xi_0 = A_{00} + 2iw \Xi_0 \quad (7.344)$$

■ **Componente (33):**

$$A'_{33} = A_{33} - 2ik_3 \Xi_3 = A_{33} - 2iw \Xi_3 \quad (7.345)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A'_{00} = A_{00} + 2iw \Xi_0 = 0 \\ A'_{33} = A_{33} - 2iw \Xi_3 = 0 \end{matrix}} \quad (7.346)$$

Despejando para los residuos del calibre se tiene:

$$\boxed{\begin{matrix} \Xi_0 = -\frac{A_{00}}{2iw} \\ \Xi_3 = -\Xi_0 \end{matrix}} \quad (7.347)$$

Observe que las amplitudes primadas pueden ser expresadas como las relaciones encontradas previamente al trabajar por componentes, como se muestra en [29], [14]:

$$A'_{00} = A_{00} + 2iw \Xi_0 \quad (7.348)$$

$$A'_{33} = A_{33} - 2iw \Xi_3 \quad (7.349)$$

Al substituir por los valores de los residuos de calibre  $\Xi_0, \Xi_3$  tomando en cuenta la relación 7.341 se tiene:

$$A'_{00} = A_{00} + 2iw \left( -\frac{A_{00}}{2iw} \right) = 0 \quad (7.350)$$

$$A'_{33} = A_{33} - 2iw \left( +\frac{A_{00}}{2iw} \right) \quad (7.351)$$

Note que  $A'_{00} = 0$ , entonces la traza primada ahora toma la siguiente forma:

$$A' = A'_{11} + A'_{22} + A'_{33} = 0 \quad (7.352)$$

Substituyendo a la traza el valor de  $A'_{33}$  encontrado previamente:

$$A' = A'_{11} + A'_{22} + A_{33} - 2iw\Xi_3 = A'_{11} + A'_{22} + A_{33} - 2iw \left( \frac{A_{00}}{2iw} \right) \quad (7.353)$$

$$\implies A' = -A_{00} + A'_{11} + A'_{22} + A_{33} = 0 \quad (7.354)$$

Observe que la condición de Lorenz para  $\mu = 0$  dicta que:

$$0 = k^\nu \bar{A}_{0\nu} = w \bar{A}_{00} = w \left( A_{00} + \frac{1}{2}A \right) \quad (7.355)$$

$$w \left( A_{00} + \frac{1}{2}A \right) = 0 \implies A_{00} + \frac{1}{2}A = 0 \quad (7.356)$$

$$\implies A_{00} = -\frac{1}{2}A \quad (7.357)$$

Substituyendo en la traza:

$$A = \frac{1}{2}A + A'_{11} + A'_{22} + A_{33} \implies A'_{11} + A'_{22} + A_{33} = \frac{1}{2}A \quad (7.358)$$

Por lo que entonces:

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \quad (7.359)$$

Nótese que:

$$A_{11} = A'_{11}, \quad A_{22} = A'_{22} \quad (7.360)$$

$$\implies A' = -A_{00} + A'_{11} + A'_{22} + A'_{33} = A \quad (7.361)$$

Por lo que al imponer la condición  $A' = 0$ , también se cumple que:

$$A' = 0 = A \quad (7.362)$$

Substituyendo nuevamente:

$$\boxed{A_{00} = 0}, \quad A'_{11} + A'_{22} + A_{33} = 0 \quad (7.363)$$

Regresando a la relación de  $A'_{33}$ , se puede substituir el valor para el componente (00) de la traza encontrado anteriormente y así obtener:

$$A'_{33} = A_{33} - 2iw \left( \frac{A_{00}}{2iw} \right) = A_{33} - A_{00} = 0 \implies A_{33} = 0 = A_{00} \quad (7.364)$$

Dado que:

$$\boxed{A_{33} = 0 \implies A'_{33} = 0} \quad (7.365)$$

Por lo que la nueva traza es:

$$\boxed{A' = A'_{11} + A'_{22} = 0 \implies A'_{11} = -A'_{22}} \quad (7.366)$$

Se debe de confirmar que los valores encontrados para los residuos de calibre cumplan con 7.336, para esto hay que recordar la condición de Lorenz la cual se reescribirá a manera de mantener mayor claridad:

$$k^\mu \Xi_\mu = 0 \implies k^0 \Xi_0 + k^3 \Xi_3 = w \Xi_0 + w \Xi_3 \quad (7.367)$$

Recordando que  $k = w$  se substituye:

$$k \Xi_0 + k \Xi_3 = k(\Xi_0 + \Xi_3) = 0 \implies \Xi_0 = -\Xi_3 \quad (7.368)$$

$$\implies \Xi_0 = -\Xi_3 \quad (7.369)$$

Por lo que la relación 7.336 ahora se puede reescribir como:

$$2\Xi_0 = \frac{A_{30}}{iw} \quad (7.370)$$

Observe la expresión 7.347, al substituir se tiene:

$$-2\Xi_3 = \frac{A_{30}}{iw} \quad (7.371)$$

$$\implies 2 \frac{A_{00}}{2iw} = \frac{A_{30}}{iw} \quad (7.372)$$

Los términos se anulan dejando únicamente:

$$-A_{00} = A_{30} \quad (7.373)$$

Pero  $A_{00} = 0$  y  $A_{30} = 0$

$$\implies 0 = 0 \quad (7.374)$$

Mostrando así que no se rompe la invariancia de calibres. Por lo tanto la matriz de las amplitudes bajo las siguientes condiciones toma la nueva forma:

$$A_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.375)$$

Recordando la relación entre la amplitud de onda y las perturbaciones se tiene que:

$$h_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (7.376)$$

$$\implies A_{\mu\nu}^{TT} e^{ik_\alpha x^\alpha} = h_{\mu\nu}^{TT} \quad (7.377)$$

$$\therefore h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (e^{ik_\mu x^\mu}) \quad (7.378)$$

Esta es la forma de la matriz de perturbaciones en la métrica bajo el calibre TT, donde solo depende de dos componentes independientes, estos serán los dos distintos **modos de polarización**.

## 7.5. Modos de polarización

### 7.5.1. Interpretación

Ahora ya con las condiciones del calibre de Lorenz y el calibre TT, se facilita la interpretación física del sistema. Recordando la definición vista en la sección anterior de **interpretación física** se tiene la siguiente expresión:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \Re \left[ e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (7.379)$$

Como se mencionó previamente, se está trabajando con una onda orientada en la dirección  $+z$ , por lo que el vector de onda toma la forma mostrada en 7.309, además se probó que este es un vector (*light-like*). Nótese que gracias a las condiciones discutidas previamente, surge la siguiente relación:

$$k_\mu x^\mu = w(z - t) \quad (7.380)$$

Expandiendo la definición para la perturbación en componentes se tiene:

$$\Re \left[ e^{iw(z-t)} \right] = \Re [\cos(w(z-t)) + i \sin(w(z-t))] = \cos(w(z-t)) \quad (7.381)$$

Reemplazando este resultado en 7.376 se obtiene lo siguiente:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(w(z-t)) \quad (7.382)$$

Seguendo de cerca la metodología de [13], se renombrarán estos componentes de la perturbación:

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \cos(w(z-t)) \quad (7.383)$$

Esta nueva representación se refiere a los **modos de polarización**, la notación de  $+$ ,  $\times$  se refiere a la forma de como estos curvan el espacio-tiempo. La forma explícita de dichos modos es la siguiente:

$$\boxed{h_+(t, z) = A_+ \cos(w(z-t))} \quad (7.384)$$

$$\boxed{h_\times(z, t) = A_\times \cos(w(z-t))} \quad (7.385)$$

### 7.5.2. Comprobación

Tal como se mencionó en secciones anteriores bajo la linealización de la gravedad, las perturbaciones de la métrica deben de obedecer la condición:

$$\square \overline{h_{\mu\nu}} = 0 \quad (7.386)$$

La cual es una ecuación de onda para 4 dimensiones y da lugar al concepto de las ondas gravitacionales, luego bajo el calibre TT se mostró que:

$$\overline{h_{\mu\nu}} = h_{\mu\nu} \implies \square h_{\mu\nu} = 0 \quad (7.387)$$

Con esto en mente, es importante resaltar que en relatividad general los sistemas de coordenadas son arbitrarios, por lo que no impactan de ninguna forma la física del sistema. Entonces, es importante alzar la pregunta ¿Es realmente la ecuación de onda que se encontró una perturbación en la métrica que curva el espacio-tiempo, o simplemente es el resultado de un cambio de coordenadas sobre una métrica plana? Esto es lo que se responde a continuación mediante los tensores de curvatura.

El tensor de curvatura de Riemann de forma simple se puede pensar como un mapeo multilinear sobre una variedad Rimanianna o pseudo-Rimanianna como lo es el espacio-tiempo, este cuantifica la curvatura del espacio-tiempo. Esto lo logra al comparar los transportes paralelos de cada punto de la variedad.

Suponga dos direcciones sobre un punto  $p$  en la forma de  $\partial_\mu, \partial_\nu$ , el tensor de curvatura mide como un vector rotado alrededor del transporte paralelo definido entre las direcciones falla en regresar a su posición original. Cuando el tensor de curvatura de Riemann es distinto de cero:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho \neq 0 \quad (7.388)$$

Es un indicador que la geometría posee curvatura intrínseca; es decir que el espacio-tiempo se curva. Por lo que si el tensor de curvatura de Riemann es distinto de cero, se vuelve implícito el hecho de que las ondas gravitacionales si son perturbaciones en el espacio-tiempo y por lo tanto lo curvan. Para probar esto se utilizará la definición para el tensor de curvatura de Riemann bajo la linealización de la gravedad vista en las secciones anteriores, específicamente en la expresión 7.180 la cual dicta:

$$\boxed{R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha} (\partial_\mu\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\sigma})} \quad (7.389)$$

Antes de comenzar la prueba se darán breves explicaciones de los índices del tensor:

- Superíndice:  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  dicta el componente que está siendo afectado por la curvatura.
- Primer subíndice:  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  denota el vector al que se le aplica el transporte paralelo.
- Subíndices dos y tres:  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  dictan la dirección del transporte paralelo.

Por lo que bajo las condiciones del calibre de Lorenz y el calibre TT, los únicos tensores de curvatura no triviales son los que se encuentran en las direcciones de propagación, a continuación se presentan dos de estos:

$$\boxed{R_{txt}^x, \quad R_{txt}^y} \quad (7.390)$$

Calculando el primer tensor se tiene:

$$R_{txt}^x = \frac{1}{2}\eta^{x\alpha} (\partial_x\partial_t h_{\alpha t} - \partial_x\partial_\alpha h_{tt} - \partial_t\partial_t h_{\alpha x} + \partial_t\partial_\alpha h_{xt}) \quad (7.391)$$

Donde como se mostró previamente, por las condiciones del calibre TT todos los componentes con perturbaciones en la dirección del tiempo se anulan, haciendo así:

$$R_{txt}^x = \frac{1}{2}\eta^{x\alpha} \left( \overset{0}{\cancel{\partial_x\partial_t h_{\alpha t}}} - \overset{0}{\cancel{\partial_x\partial_\alpha h_{tt}}} - \partial_t\partial_t h_{\alpha x} + \overset{0}{\cancel{\partial_t\partial_\alpha h_{xt}}} \right) \quad (7.392)$$

$$R_{txt}^x = -\frac{1}{2}\eta^{x\alpha} \partial_t\partial_t h_{\alpha x}, \quad \alpha = x, y \quad (7.393)$$

$$\implies R_{txt}^x = -\frac{1}{2}(\eta^{xx} \partial_t\partial_t h_{xx} + \eta^{xy} \partial_t\partial_t h_{yx}) \quad (7.394)$$

Nótese que las métricas bajo la definición  $(- - - +)$  toman los valores:

$$-\frac{1}{2} \left( \overset{(-1)}{\eta^{xx}} \partial_t\partial_t h_{xx} + \overset{0}{\eta^{xy}} \partial_t\partial_t h_{yx} \right) \quad (7.395)$$

$$\boxed{\therefore R_{txt}^x = \frac{1}{2}\partial_t\partial_t h_{xx} \neq 0} \quad (7.396)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el segundo tensor:

$$R_{txt}^y = \frac{1}{2} \eta^{y\alpha} \left( \overset{0}{\partial_x \partial_t h_{\alpha t}} - \overset{0}{\partial_x \partial_\alpha h_{tt}} - \partial_t \partial_t h_{\alpha x} + \overset{0}{\partial_t \partial_\alpha h_{xt}} \right) \quad (7.397)$$

$$R_{txt}^y = -\frac{1}{2} \eta^{y\alpha} \partial_t \partial_t h_{\alpha x} = \frac{1}{2} \left( \overset{0}{\eta^{yx}} \partial_t \partial_t h_{xx} + \overset{(-1)}{\eta^{yy}} \partial_t \partial_t h_{yx} \right) \quad (7.398)$$

$$\boxed{\therefore R_{txt}^y = \frac{1}{2} \partial_t \partial_t h_{yx} \neq 0} \quad (7.399)$$

Con esto queda demostrado que ambos tensores de curvatura de Riemann son distintos de cero, garantizando así que efectivamente la ecuación de onda 7.387 curva el espacio tiempo. Concluyendo de esta forma las derivaciones teóricas para el presente trabajo.

---

## Visualización de las ondas gravitacionales

---

Para la visualización de las ondas gravitacionales se realizó una simulación en el lenguaje de programación **Python**, la cual muestra de manera gráfica cómo las ondas gravitacionales de un sistema binario causan deformaciones en el espacio-tiempo mediante sus modos de polarización bajo el calibre TT.

Gracias al extenso trabajo teórico realizado en la Sección anterior, la complejidad del programa se ve reducida de manera drástica. En este capítulo del trabajo se discutirán los siguientes puntos acerca del programa:

- Preliminares, funcionamiento y **aproximaciones** empleadas en el programa.
- *Mesh y array broadcasting.*
- *Programación defensiva.*
- *Outputs.*

Cabe recalcar que este programa se diseñó con el fin de ser utilizado como un visualizador de las ondas gravitacionales, permitiendo ilustrar de manera clara los efectos de estas sobre el espacio-tiempo. La finalidad principal es proporcionar una herramienta visual que complemente el desarrollo teórico presentado en el capítulo anterior. Por lo que el programa favorece la facilidad de uso sobre el detalle técnico presente en herramientas más sofisticadas como los *solvers* numéricos. Finalmente, el programa fue diseñado para simular el sistema omitiendo parámetros como lo son el *spin* de los agujeros negros, el *red-shift* cosmológico, fases *merger-ringdown*, la excentricidad de los agujeros negros y utiliza las aproximaciones al primer orden de su expansión (0-PN). Todo esto bajo la aproximación en la región lejana del cuadrupolo.

## 8.1. Preliminares

### 8.1.1. Base teórica

Utilizando la teoría desarrollada en este trabajo, el programa asume una métrica de Minkowski plana perturbada con la forma estándar:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Donde la perturbación  $h_{\mu\nu}$  representa una onda plana que se propaga en la dirección  $+z$  en el vacío. Como se ha establecido previamente, el programa utilizará las ecuaciones de los modos de polarización para simular las deformaciones en el espacio tiempo, estas bajo la linealización de la gravedad y el calibre TT toman explícitamente la forma mostrada en 7.384, 7.385:

$$h_+(t, z) = A_+ \cos(w(z - t))$$

$$h_\times(z, t) = A_\times \cos(w(z - t))$$

Además para simular el sistema binario se utilizarán dos masas distintas, estas se mantendrán constantes dado a que el programa asume que no existe pérdida de masa en los cuerpos celestes por radiación o algún otro método.

### 8.1.2. Funcionamiento

Entrando en materia, los parámetros y constantes utilizados para la simulación son los siguientes:

#### Constantes

Símbolo	Tipo	Valor	Unidades
G	Constante gravitatoria	$6.67430 \times 10^{-11}$	$\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
c	Velocidad de la luz	$3.0 \times 10^8$	$\frac{m}{s}$
np.pi	Constante $\pi$	3.1415...	N/A
d	Distancia a la fuente	100	Mpc(m)
$M_{sun}$	Masa del sol	$1.989 \times 10^{30}$	kg

Tabla 8.1: Constantes numéricas del programa

#### Variables

El usuario podrá asignar distintos valores a las siguientes variables:

Nombre	Componente físico	Unidades
m1,m2	Masas de los cuerpos celestes	$M_\odot(kg)$
$f_{snap}$	Frecuencia de la onda gravitacional	Hz( $\frac{1}{s}$ )

Tabla 8.2: Variables ingresadas por el usuario

### Parámetros calculados

Adicionalmente el programa utilizará las cantidades previamente listadas para calcular los siguientes parámetros:

Nombre	Componente físico	Unidades
$total_{mass}$	Masa (total) del sistema	$M_{\odot}(kg)$
$chirp_{mass}$	$chirp\ mass$	$M_{\odot}(kg)$
$f_{isco}$	Frecuencia de las GW en la <i>ISCO</i>	$\text{Hz}(\frac{1}{s})$
$t_{coal}$	Tiempo para finalizar la fase inspiral	s
$strain\ amplitude$	Amplitud del <i>strain</i> gravitacional	N/A
$h_{plus}$	Modo de polarización $h_{+}$	N/A
$h_{cross}$	Modo de polarización $h_{\times}$	N/A

Tabla 8.3: Parámetros calculados del programa

### 8.1.3. Aproximaciones

El programa utiliza una serie de aproximaciones para calcular los parámetros mencionados anteriormente, a continuación se muestran dichas aproximaciones.

#### *Chirp mass*

Se utiliza la relación estándar para la *chirp mass*, esta es presentada en diversas literaturas de relatividad general. Sin embargo a lo largo de esta Sección, se utilizarán las versiones mostradas en [13]:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} \quad (8.1)$$

#### Frecuencia *ISCO*

$$f_{ISCO} \approx \frac{c^3}{(6\pi)^{3/2} G(m_1 + m_2)} \quad (8.2)$$

#### Tiempo para el *merger*

La expresión para el tiempo al *merger* o tiempo de coalescencia no se encuentra de forma explícita en [13], esta más bien ha sido derivada a partir de la fórmula de la pérdida de energía por radiación gravitacional presentada en [22], la derivación completa de esta expresión se encuentra en los anexos:

$$t_{coal} \approx \frac{5c^5}{256\pi^{8/3} G^{5/3}} \frac{1}{\mathcal{M}^{5/3} f_{snap}^{8/3}} \quad (8.3)$$

### Amplitud del *strain* gravitacional

Esta es la expresión para el *strain* gravitatorio a primer orden presentada en [13], más específicamente en el Capítulo 4, ecuación (4.29). Notar que la diferencia entre la ecuación presentada en este trabajo y la mostrada en [13] recae en que para el caso específico de esta simulación se impone una diferencia de fase de  $-\pi/2$  y amplitudes iguales ( $A_+ = A_\times$ ):

$$h_0 = \frac{4(G\mathcal{M})^{5/3}(\pi f_{snap})^{2/3}}{c^4 d} \quad (8.4)$$

### Modos de polarización

Gracias a las relaciones anteriormente mostradas, las ecuaciones para los modos de polarización en la simulación tomarán la siguiente forma simplificada:

$$h_+ = h_0 \cos(2\pi f_{snap}(t - z)) \quad (8.5)$$

$$h_\times = h_0 \cos(2\pi f_{snap}(t - z) - \pi/2) \quad (8.6)$$

#### 8.1.4. Funcionamiento (parte 2)

Ya con todos los preliminares definidos, se dará una explicación a detalle del funcionamiento del programa. Este se diseñó con el fin de complementar la teoría desarrollada en el presente trabajo, por lo que la claridad y facilidad de uso fueron las prioridades al momento de programar. Tomando esto en cuenta, el presente programa utiliza únicamente las siguientes librerías estándar:

1. **sys.**  
Se utiliza para manejar excepciones de *inputs* incorrectos
2. **Numpy.**  
Permite utilizar el *mesh* y *linspace*, dos objetos clave para el funcionamiento del programa.
3. **Matplotlib.**  
Habilita el ambiente del plot.

El programa comienza declarando las constantes, luego utiliza los *inputs* en las variables ingresadas por el usuario para calcular los parámetros listados en la Sección anterior. Ya con los parámetros obtenidos, el programa hace uso de las técnicas/métodos mostrados en la siguiente Sección.

## 8.2. Métodos implementados en la visualización

### 8.2.1. *Linspace* y *Mesh*

El método de *linspace* es clave para el funcionamiento del programa, este permite formar un sistema de coordenadas, en este caso cartesiano utilizando *arrays* unidimensionales, tal como se muestra en el siguiente retazo de código:

```
1 x_opt = np.linspace(-15, 15, 50)
2 y_opt = np.linspace(-15, 15, 50)
```

En el cual el rango es determinado de  $[-15, 15]$  y genera 50 puntos equidistantes en dicho rango para ambas direcciones. Cabe recalcar que la convención de unidades para este rango será de luz por segundo, es decir; cada unidad en el programa tendrá la siguiente relación de equivalencia:

$$1_{cu} = 3.00 \times 10^8 (m) \quad (8.7)$$

Esto permite simplificar la fase retrasada, dado que esta toma la forma:

$$\Phi(t, r) = 2\pi f \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (8.8)$$

Entonces al tomar la convención mencionada previamente se tiene únicamente:

$$\Phi(t, r) = 2\pi f (t - r) \quad (8.9)$$

Por otra parte, el método de *meshgrid* definido en el programa como:

```
1 X_opt, Y_opt = np.meshgrid(x_opt, y_opt)
```

Forma el producto tensorial entre los dos distintos *arrays* definidos por *linspace*, esto con el fin de generar el sistema de coordenadas cartesiano. Estos se pueden pensar que ambos toman la forma  $((Nx, Ny) = (50, 50))$ , seguidamente al hacer:

```
1 distance_opt = k*np.sqrt(X_opt**2 + Y_opt**2)
```

Se instancia un *array* para la distancia siguiendo la ya establecida fórmula pitagórica, donde la constante **k** se refiere a un factor de escala visual, este es definido de la siguiente forma:

```
1 k=(f_snap/500) #Factor de escala visual
```

La función de este factor de escala es simplemente mejorar la legibilidad de la visualización, más adelante se mostrará que esta no afecta de ninguna forma la validez física del programa, si se desea ver más a detalle el efecto visual de esta en la simulación favor referirse al anexo D. Finalmente se instancia el *array* unidimensional del tiempo:

```
1 t_opt = np.linspace(0, 0.1, 1000)
```

El rango de este se mantendrá de  $[0, 0.1]$  segundos, y crea 1000 puntos equidistantes dentro del rango, y se puede pensar en su representación como  $[N_t] = [1000]$ .

### 8.2.2. Array broadcasting

El proceso de *array broadcasting* se refiere a proyectar un *array* de la siguiente forma:

$$n \mapsto N \ni n < N(\dim) \quad (8.10)$$

En este caso específico se proyecta el *array* del tiempo a las 2 dimensiones espaciales:

$$[N_t] \mapsto [N_t, 1, 1] \quad (8.11)$$

Y el *array* de distancia se proyecta en la dirección temporal:

$$[N_x, N_y] = [1, N_x, N_y] \quad (8.12)$$

```
1 phase = 2 * np.pi * f_snap * ( t_opt[:, None, None] - distance_opt[None, :, :])
```

Este proceso permite proyectar el *array* unidimensional del tiempo y el bidimensional espacial a un *array* tridimensional de espacio-tiempo:

$$[N_t, N_x, N_y] \quad (8.13)$$

Con esto es posible operar directamente los distintos *arrays* de distintas dimensiones, ya que los fuerza a ser de la misma dimensión. Esto permite calcular los modos de polarización de forma directa, tal como se muestra a continuación:

```
1 h_plus_opt = strain_amplitude * np.cos(phase)
2 h_cross_opt = strain_amplitude * np.cos(phase - np.pi/2)
```

Con esto el único elemento restante es el *array* en la dirección de propagación  $Z$ , este a diferencia de las dos previas direcciones espaciales, se definirá de manera dinámica, es decir; dependerá de la deformación impuesta por los modos de polarización. A fin de mantener la claridad del proceso, se presenta el siguiente cuadro sobre las variables en el código utilizadas para este proceso y cual es su significado físico.

Expresión en el código	Interpretación física
$h_{plus-opt}[frame]$	La (fuerza) de la polarización $h_+$ en dado <i>frame</i> .
$h_{cross-opt}[frame]$	La (fuerza) de la polarización $h_\times$ dado <i>frame</i> .
$X_{opt}/distance_{opt}$	Componente $X$ del vector unitario en cada punto del grid
$Y_{opt}/distance_{opt}$	Componente $Y$ del vector unitario en cada punto del grid

Tabla 8.4: Interpretación física del *strain* en el código

Entonces la línea de código para instanciar el *array* en la dirección  $Z$  muestra lo siguiente:

```
1 Z_opt = 0.5 * (( h_plus_opt[frame] * cos2phi) + (h_cross_opt[frame] * sin2phi))
2 #Note que cos2phi, sin2phi dependen unicamente de los arrays de X,y y R
3
```

En la cual por cada *frame*, toma el factor de deformación del modo  $h_+$  y lo proyecta sobre la dirección local  $x$ , repite el mismo procedimiento para el modo  $h_\times$  y la dirección local  $y$  y la suma de estas proyecciones es la altura de la superficie mostrada en el *grid* en dado punto.

### 8.3. Programación defensiva

Se agregaron las siguientes excepciones para los *inputs* de los usuarios, a manera de garantizar la simulación de un sistema físicamente congruente.

```

1 while True:
2     try:
3         M1 = input("Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): ")
4         m1 = float(M1) * M_sun
5         break
6     except ValueError:
7         print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa M1
8         .")
9 while True:
10    try:
11        M2 = input("Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares):
12        ")
13        m2 = float(M2) * M_sun
14        break
15    except ValueError:
16        print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa M2
17        .")
18    if(m1<0):
19        print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
20        sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
21    elif(m2<0):
22        print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
23        sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
24    elif(m1==0):
25        print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
26        sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
27    elif(m2==0):
28        print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
29        sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
30 -----
31 while True:
32    try:
33        F_snap = input("Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango
34        [50,1500](Hz): ")
35        f_snap = float(F_snap)
36        break
37    except ValueError:
38        print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa
39        frecuencia.")
40    if(f_snap<0):
41        print("No es posible ingresar frecuencias negativas.")
42        sys.exit("no es posible simular")
43    elif(f_snap==0):
44        print("No es posible que el sistema no cuente con frecuencia.")
45        sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
46    elif(f_snap<50):
47        print("Frecuencia fuera del rango establecido")
48        sys.exit("Input invalido: Porfavor ingrese frecuencias dentro del rango
49        establecido")
50    elif(f_snap>1500):
51        print("Frecuencia fuera del rango establecido")
52        sys.exit("Input invalido: Porfavor ingrese frecuencias dentro del rango
53        establecido")

```

Estos detectan si el usuario ingresó alguno de los siguientes valores que vuelven al sistema físicamente inválido:

- Masas negativas.
- Una o dos masas iguales a cero.
- Frecuencia negativa.
- Frecuencia igual a cero.
- Frecuencia simulada mayor a la frecuencia del sistema en la *ISCO*.

Con lo cual se limita la posibilidad del usuario para ingresar valores que generen una visualización incorrecta o causen un error en el programa.

## 8.4. *Outputs*

Es importante notar que debido al formato de la visualización, los *outputs* que se mostrarán adelante en forma de imágenes estáticas no mostrarán la diferencia en la visualización bajo diferentes frecuencias actuando sobre la componente temporal. Sin embargo, note que las siguientes cantidades dependen explícitamente de las masas y la frecuencia:

- Frecuencia en la *ISCO*
- Tiempo al *merger*.
- Amplitud del *strain* gravitacional.

Por lo que al variar los valores de las masas y la frecuencia, estos también cambiarán. Además, es importante mencionar que dado la convención de unidades en el plano ( $XY$ ) y a la adimensionalidad del *strain*, los órdenes de magnitud en los ejes ( $XY$ ), ( $Z$ ) diferirán de una manera drástica. Sin embargo, esto sigue manteniendo validez física, gracias a que las detecciones experimentales realizadas por *LIGO*, efectivamente presentan *strains* de órdenes de magnitud de  $(1 \times 10^{-22})$  tal como se muestra en [4].

Observe que el programa basa la detección de las ondas gravitacionales a una distancia de  $(100Mpc)$  de la fuente, y se utiliza un conjunto de partículas de prueba o (*test particles*) de  $(45 \times 10^8 m)$ , este es el generado por los *linspaces* mencionados anteriormente. Finalmente, a manera de mantener la legibilidad de esta visualización se introdujo un factor de escala para el efecto de la frecuencia con la distancia, ya que esta causa que la gráfica tome una disposición demasiado densa, volviendo así la visualización ilegible. Se explicara en la Sección de limitaciones.

### 8.4.1. Primer *output*

Condiciones iniciales

Masa 1( $M_{\odot}$ )	Masa 2( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snap</i> (Hz)
2.56	1.38	370

Tabla 8.5: Primer set de condiciones iniciales

Visualización 1

### Visualizador de Ondas Gravitacionales

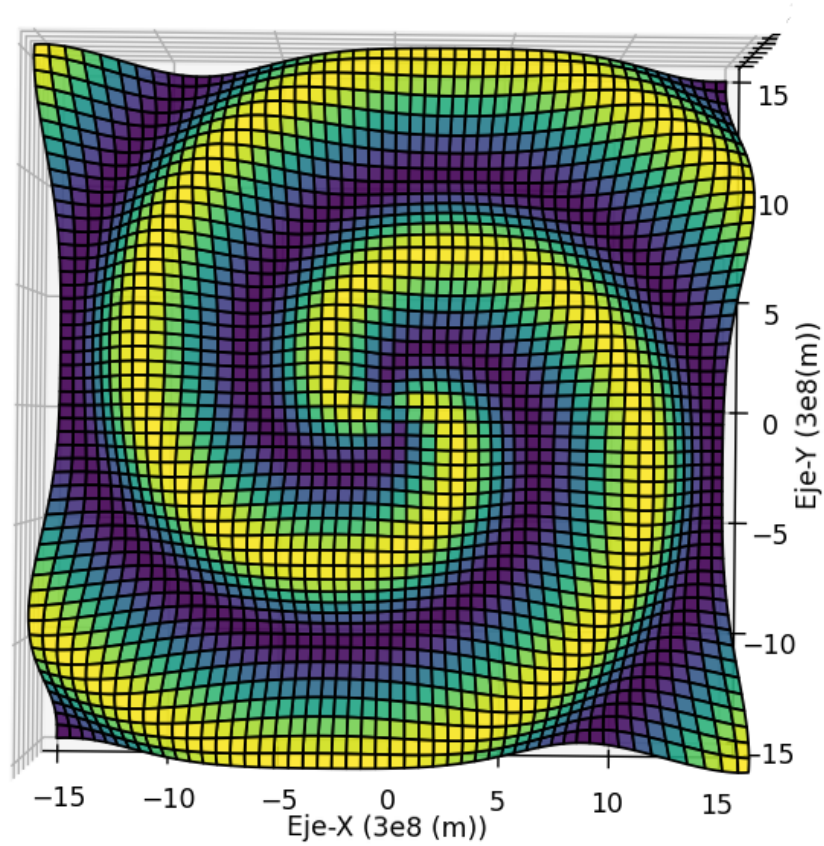


Figura 8.1: Vista superior 1

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

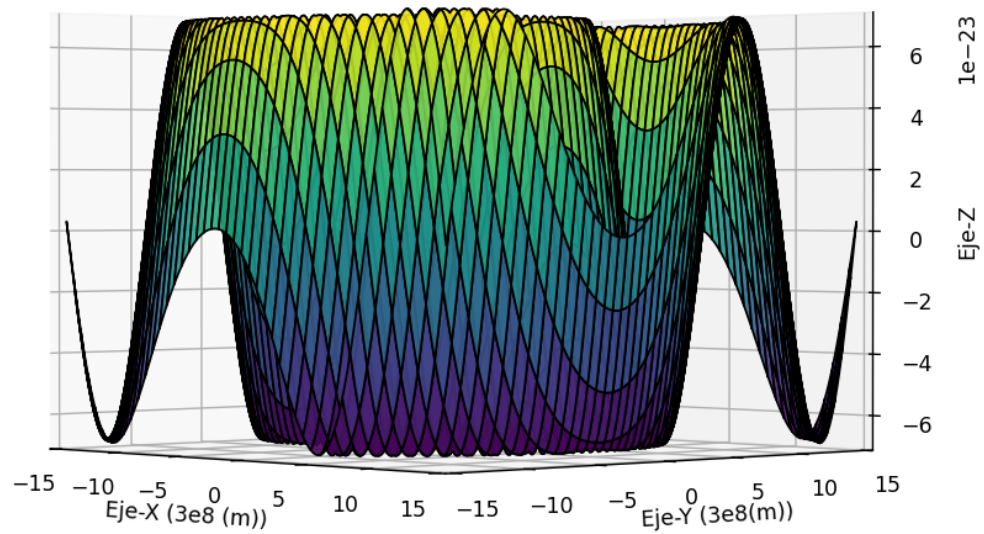


Figura 8.2: Vista lateral 1

```
Shell x
>>> %Run aproach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 2.56
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 1.38
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500](Hz): 370
Frecuencia de Snapshot 370.0 Hz → tiempo a coalescencia/merger = 0.0411 s
La f_isco es: 1118.0218397988776 Hz
>>> |
```

Figura 8.3: Valores calculados visualización 1

### 8.4.2. Segundo *output*

Condiciones iniciales

Masa 1( $M_{\odot}$ )	Masa 2 ( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snap</i> (Hz)
2.56	1.38	740

Tabla 8.6: Segundo set de condiciones iniciales

Visualización 2

### Visualizador de Ondas Gravitacionales

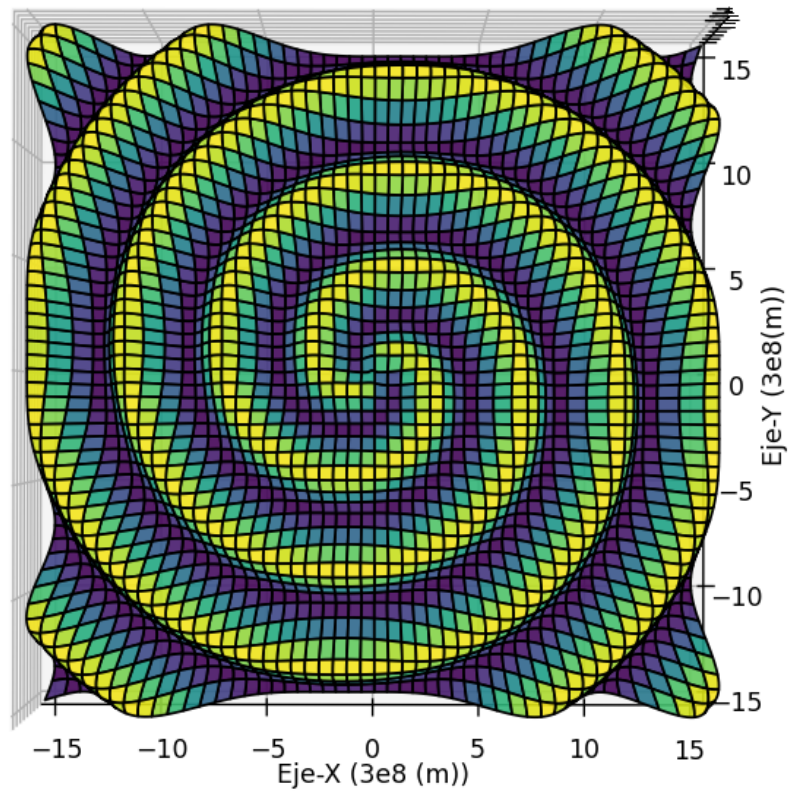


Figura 8.4: Vista superior 2

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

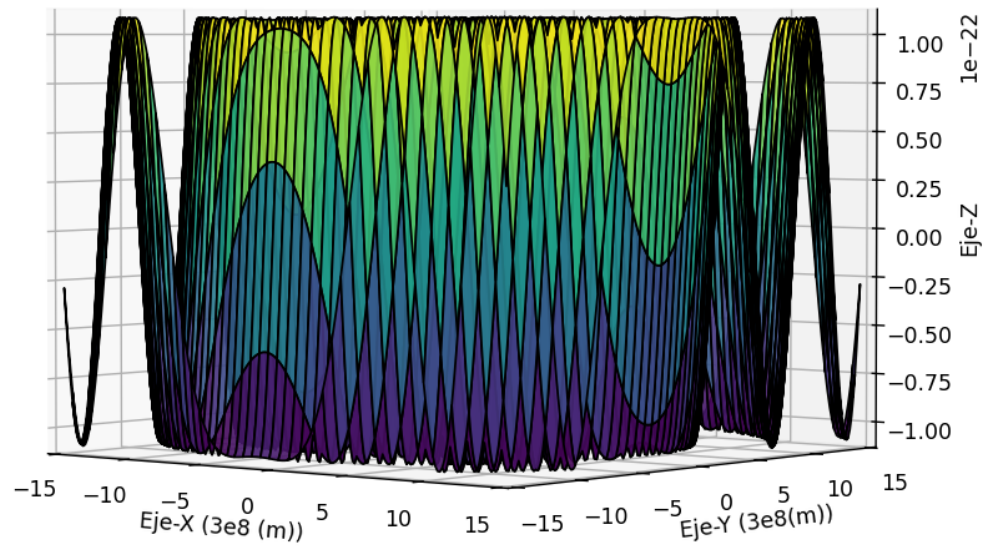


Figura 8.5: Vista lateral 2

```
Shell x
>>> %Run aproach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 2.56
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 1.38
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500](Hz): 740
Frecuencia de Snapshot 740.0 Hz → tiempo a coalescencia/merger = 0.0065 s
La f_isco es: 1118.0218397988776 Hz
>>>
```

Figura 8.6: Valores calculados visualización 2

### 8.4.3. Tercer *output*

Condiciones iniciales

Masa 1( $M_{\odot}$ )	Masa 2( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snap</i> (Hz)
12.3	8.95	170

Tabla 8.7: Tercer set de condiciones iniciales

Visualización 3

### Visualizador de Ondas Gravitacionales

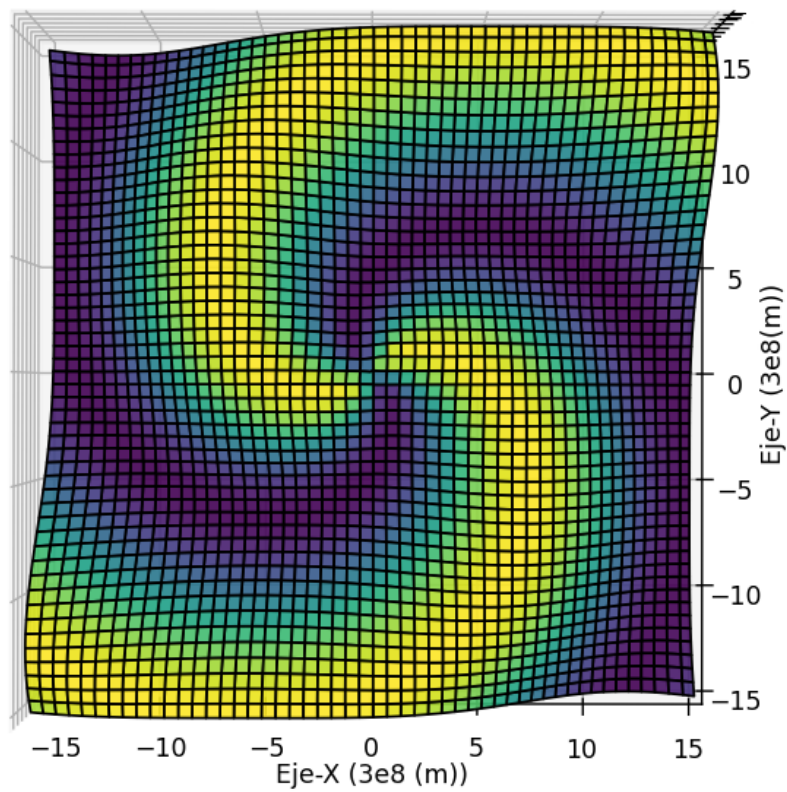


Figura 8.7: Vista superior 3

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

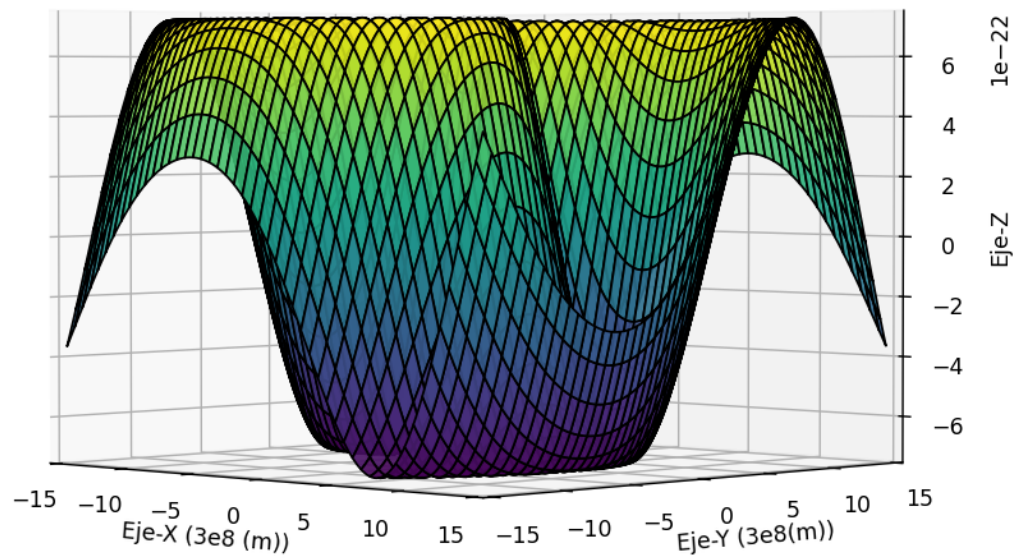


Figura 8.8: Vista lateral 3

```
Shell x
>>> %Run approach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 12.3
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 8.95
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500] (Hz): 170
Frecuencia de Snapshot 170.0 Hz → tiempo a coalescencia/merger = 0.0184 s
La f_isco es: 207.2944022968272 Hz
>>> |
```

Figura 8.9: Valores calculados visualización 3

#### 8.4.4. Cuarto *output*

Condiciones iniciales

Masa 1( $M_{\odot}$ )	Masa 2( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snap</i> (Hz)
1.5	1.3	170

Tabla 8.8: Cuarto set de condiciones iniciales

Visualización 4

#### Visualizador de Ondas Gravitacionales

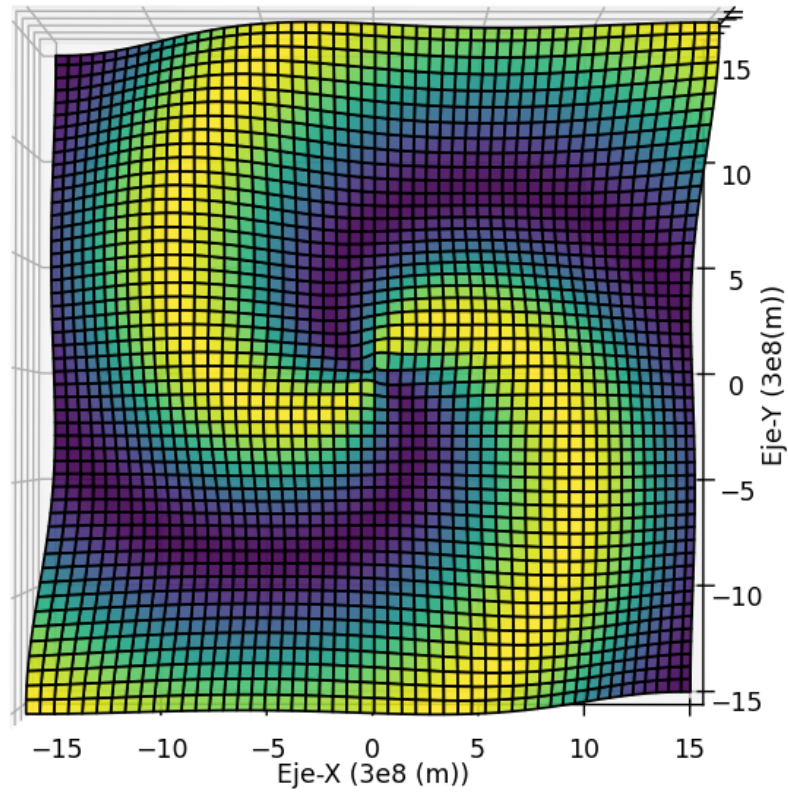


Figura 8.10: Vista superior 4

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

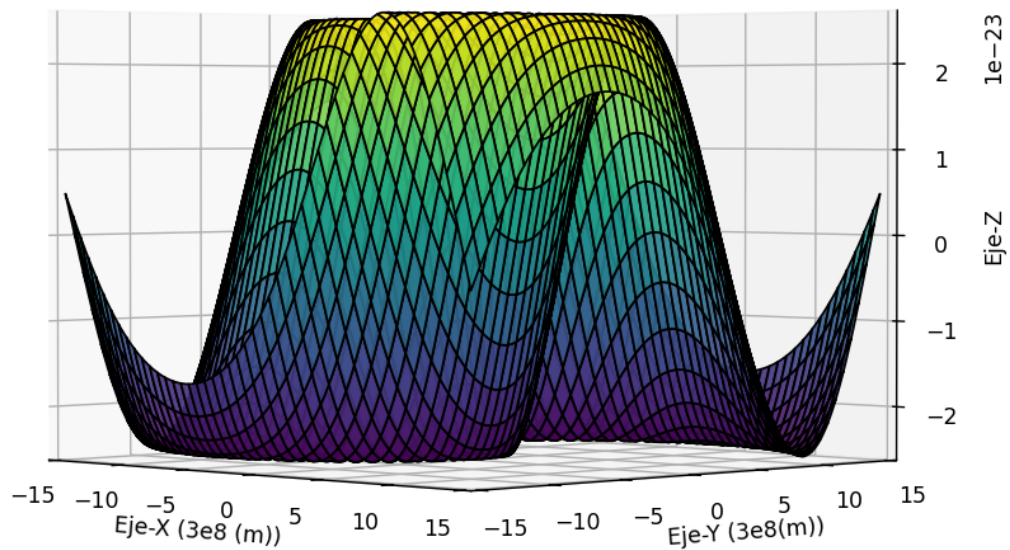


Figura 8.11: Vista lateral 4

```

Shell <
>>> %Run approach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 1.5
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 1.3
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500](Hz): 170
Frecuencia de Snapshot 170.0 Hz → tiempo a coalescencia/merger = 0.5289 s
La f_isco es: 1573.2164460027063 Hz
>>> |

```

Figura 8.12: Valores calculados visualización 4

### 8.4.5. Quinto *output*

Condiciones iniciales

Masa 1 ( $M_{\odot}$ )	Masa 2 ( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snr</i> (Hz)
1.5	1.3	300

Tabla 8.9: Quinto set de condiciones iniciales

Visualización 5

### Visualizador de Ondas Gravitacionales

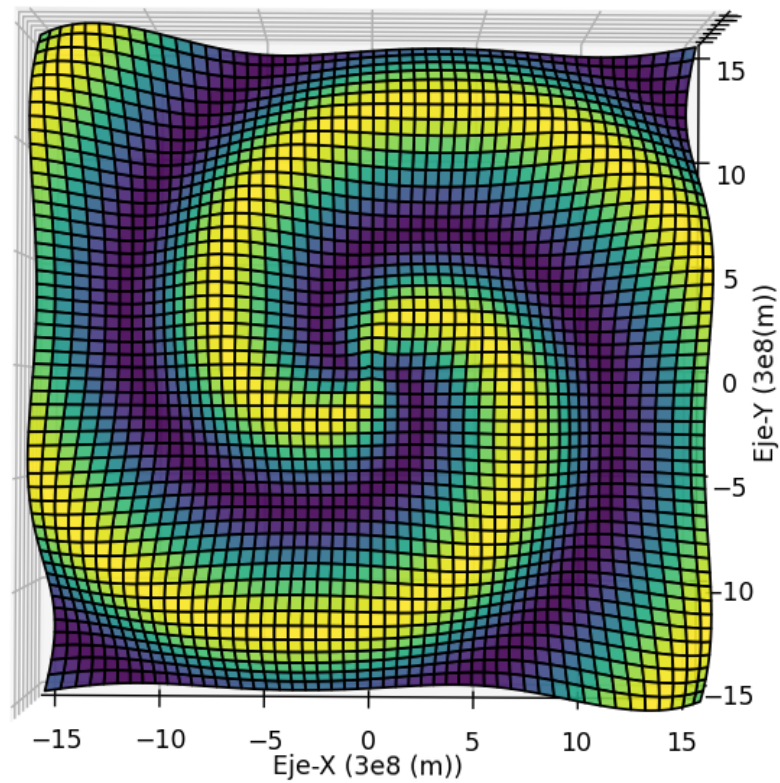


Figura 8.13: Vista superior 5

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

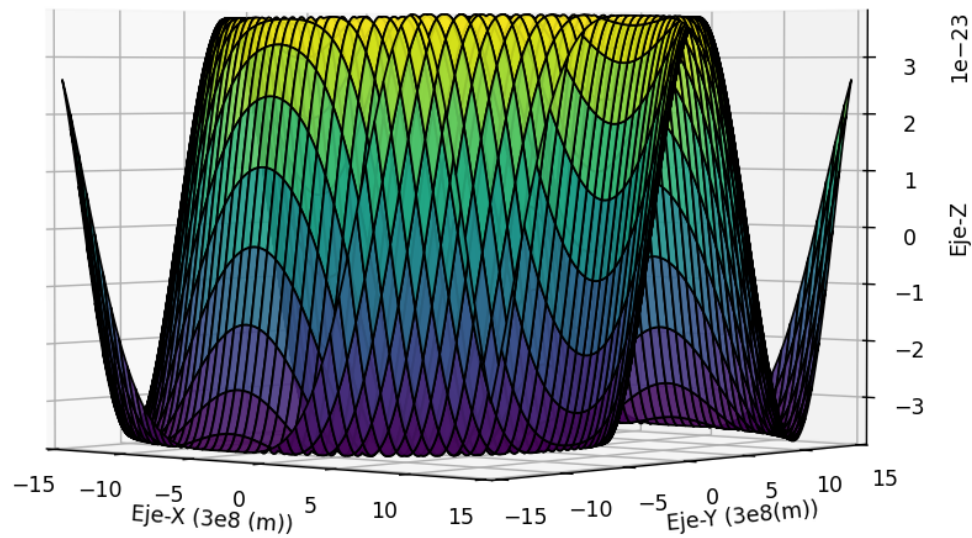


Figura 8.14: Vista lateral 5

```

Shell <
%Run aproach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 1.5
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 1.3
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500] (Hz): 300
Frecuencia de Snapshot 300.0 Hz - tiempo a coalescencia/merger = 0.1163 s
La f_isco es: 1573.2164460027063 Hz
>>> |

```

Figura 8.15: Valores calculados visualización 5

### 8.4.6. Sexto *output*

Condiciones iniciales

Masa 1 ( $M_{\odot}$ )	Masa 2 ( $M_{\odot}$ )	Frecuencia <i>snr</i> (Hz)
2.2	2.8	600

Tabla 8.10: Sexto set de condiciones iniciales

Visualización 6

Visualizador de Ondas Gravitacionales

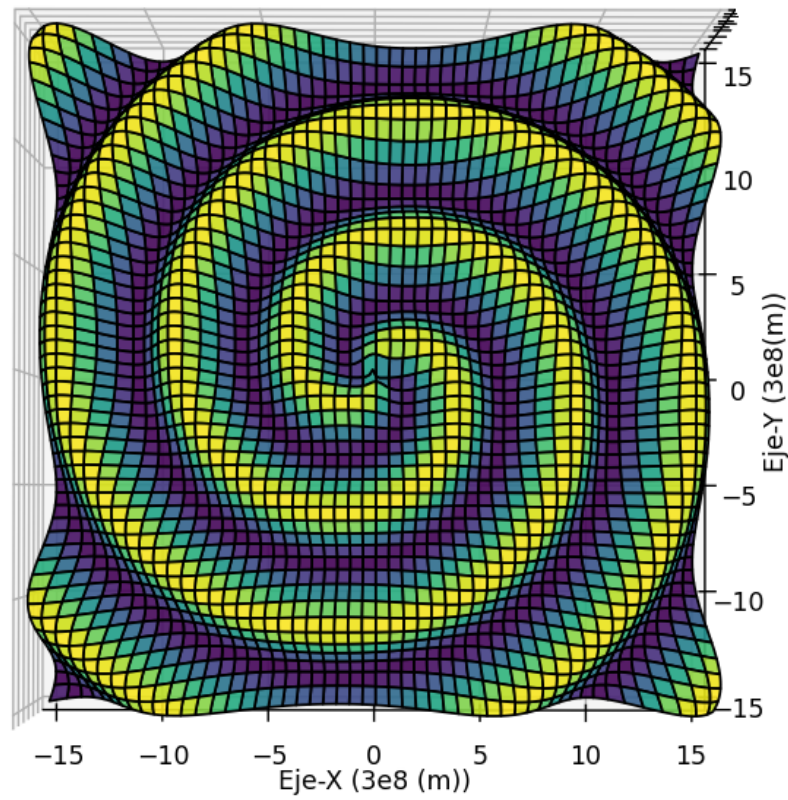


Figura 8.16: Vista superior 6

## Visualizador de Ondas Gravitacionales

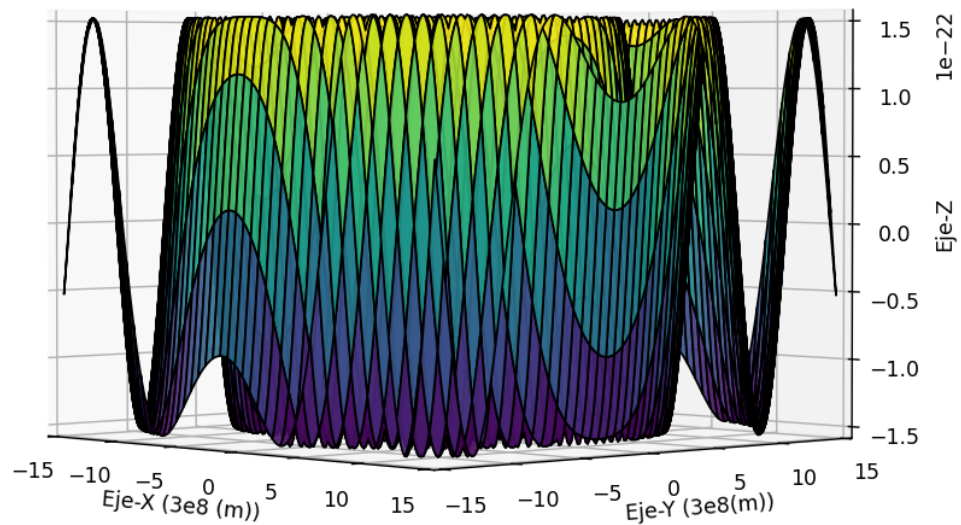


Figura 8.17: Vista lateral 6

```
Shell x
>>> %Run aproach7.py
Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): 2.2
Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares): 2.8
Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango [50,1500] (Hz): 600
Frecuencia de Snapshot 600.0 Hz → tiempo a coalescencia/merger = 0.0070 s
La f_isco es: 881.0012097615157 Hz
>>> |
```

Figura 8.18: Valores calculados visualización 6

---

Discusión de resultados

---

En la presente Sección se analizarán con rigor las visualizaciones generadas a partir de la simulación de ondas gravitacionales bajo el calibre TT desarrollada en la Sección anterior. Esto con el propósito de verificar numéricamente la coherencia de las relaciones físicas fundamentales presentes en el modelo utilizado. Para ello, se consideraron las relaciones más importantes a lo largo de la teoría, permitiendo así un contraste directo entre los resultados obtenidos mediante la simulación y las predicciones teóricas existentes, para así poder asegurar la validez física del programa. Además se mostrará cómo el programa cumple con las condiciones de campo lejano y aproximación de 0PN para el cuadrupolo.

Las relaciones de proporcionalidad a estudiar son: la frecuencia de la órbita circular interna más estable (*ISCO*), que es inversamente proporcional a la masa total del binario. El tiempo hasta la coalescencia o al *merger* del sistema binario, el cual depende de forma significativa de la frecuencia de la onda gravitacional y la masa del binario. Por último la amplitud de la deformación del espacio-tiempo (*strain*), la cual es directamente relacionada con la masa de (*chirp*) del binario. A fin de corroborar esto, se mostrarán los gráficos de los resultados obtenidos al ingresar distintos valores al programa, mientras se mantienen otros constantes, a manera de poder observar claramente las proporcionalidades entre estos. Para esto a continuación se utilizarán gráficas de escalas logarítmicas, específicamente (log-log) con ambos logaritmos base 10, esto a manera de mostrar como las relaciones exponenciales mostradas a continuación toman una representación lineal bajo dicha escala. Especificando, las relaciones principales detrás de la simulación mencionadas previamente son las siguientes:

- $$f_{\text{isco}} \propto M^{-1} \tag{9.1}$$

- $$t_{\text{coal}} \propto f_{\text{snap}}^{-8/3} \tag{9.2}$$

- $$t_{\text{coal}} = \mathcal{M}^{-5/3} \tag{9.3}$$

- $$h_0 \propto \mathcal{M}^{5/3} \tag{9.4}$$

### 9.1. Relación de proporcionalidad de la frecuencia en la órbita circular interna más estable

Masa total ( $M_{\odot}$ )	Fisco (Hz)
2	2202.50
3	1468.33
4	1101.25
5	881.01
6	734.16
7	629.28
8	550.63
9	489.44
10	440.51
11	400.45
12	367.08
13	338.84
14	314.64
15	293.66

Tabla 9.1: Relación entre la masa total del sistema binario y la frecuencia del *ISCO* en la simulación

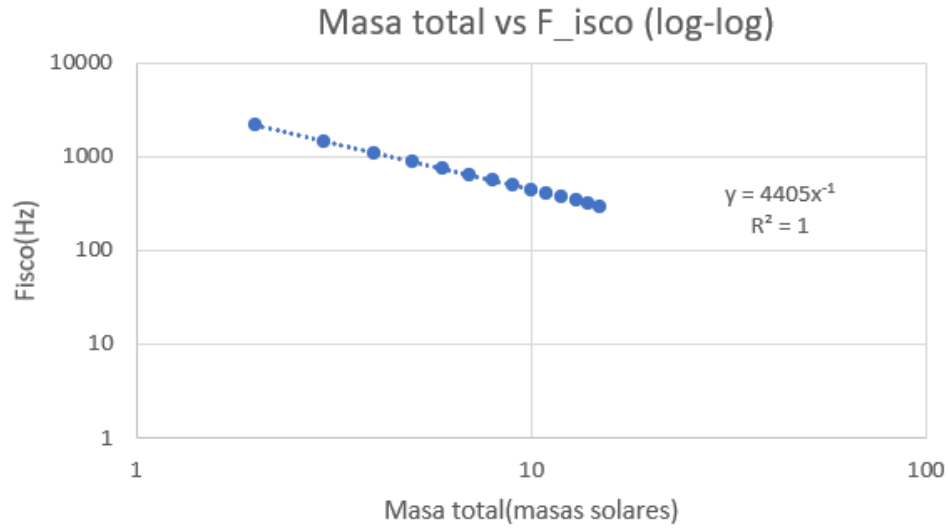


Figura 9.1: Gráfica entre la masa total del sistema binario y la frecuencia del *ISCO* en la simulación (log-log) base 10

Note que de la Sección anterior de aproximaciones, la expresión 8.2 dota con las constantes:

$$\mathcal{C} = \frac{c^3}{6\pi^{3/2}G} \implies f_{ISCO} = \frac{\mathcal{C}}{M_{TOTAL}} \quad (9.5)$$

al calcular las constantes se tiene:

$$\mathcal{C} = 8.74 \times 10^{33} s^{-1} kg^{-1} \implies \frac{\mathcal{C}}{M_{\odot}} = \frac{8.74 \times 10^{33}}{1.98 \times 10^{30}} = \frac{4405}{M_{TOTAL}} \quad (9.6)$$

Que es justamente el valor presente en la regresión lineal, por lo que se concluye que la relación de proporcionalidad se cumple:

$$\therefore f_{isco} \propto M_{total}^{-1} \quad (9.7)$$

## 9.2. Relación de proporcionalidad del tiempo al *merger* con masas fijas

$f_{\text{snap}}$ (Hz)	$t_{\text{coal}}$ (s)
50	8.1360
150	0.4346
250	0.1113
350	0.0454
450	0.0232
550	0.0136
650	0.0087
750	0.0059
850	0.0043
950	0.0032
1050	0.0024

Tabla 9.2: Relación entre la frecuencia instantánea  $f_{\text{snap}}$  y el tiempo a la coalescencia  $t_{\text{coal}}$ , dejando la masa total fija en (3.94 masas solares)

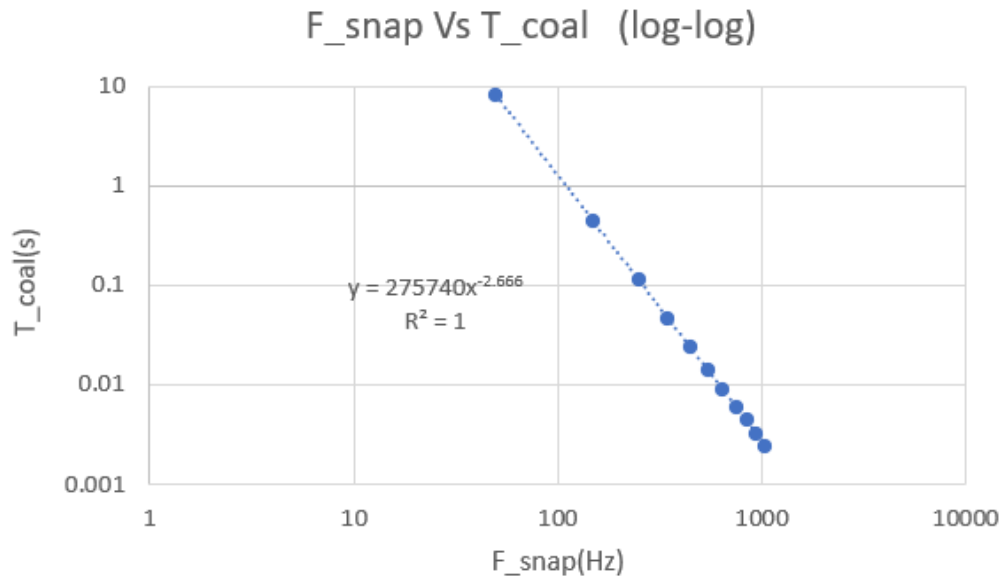


Figura 9.2: Gráfica entre la frecuencia instantánea y el tiempo al *merger* en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la masa total fija en (3.94 masas solares)

Utilizando la forma de la aproximación 8.3, se tiene que las constantes son:

$$\mathcal{C} = \frac{5c^5}{256\pi^{8/3}G^{5/3}} \implies t_{\text{coal}} = \frac{\mathcal{C}}{f_{\text{snap}}^{8/3}\mathcal{M}^{5/3}} \quad (9.8)$$

Tomando las masas como constantes, ya que estas se dejaron fijas, se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{C} = 2.7574 \times 10^5 \implies t_{\text{coal}} = 2.7574 \times 10^5 f_{\text{snap}}^{-2.666} \quad (9.9)$$

$$\therefore t_{\text{coal}} \propto f_{\text{snap}}^{-8/3} \quad (9.10)$$

### 9.3. Relación de proporcionalidad del tiempo al *merger* con frecuencia fija

Masa total ( $M_{\odot}$ )	$t_{\text{coal}}$ (s)
2	0.5900
3	0.3041
4	0.1883
5	0.1298
6	0.0958
7	0.0741
8	0.0593
9	0.0487
10	0.0409
11	0.0349
12	0.0302
13	0.0264
14	0.0233
15	0.0208

Tabla 9.3: Relación entre la masa total del sistema binario y el tiempo a la coalescencia, dejando la frecuencia fija a 200(Hz)

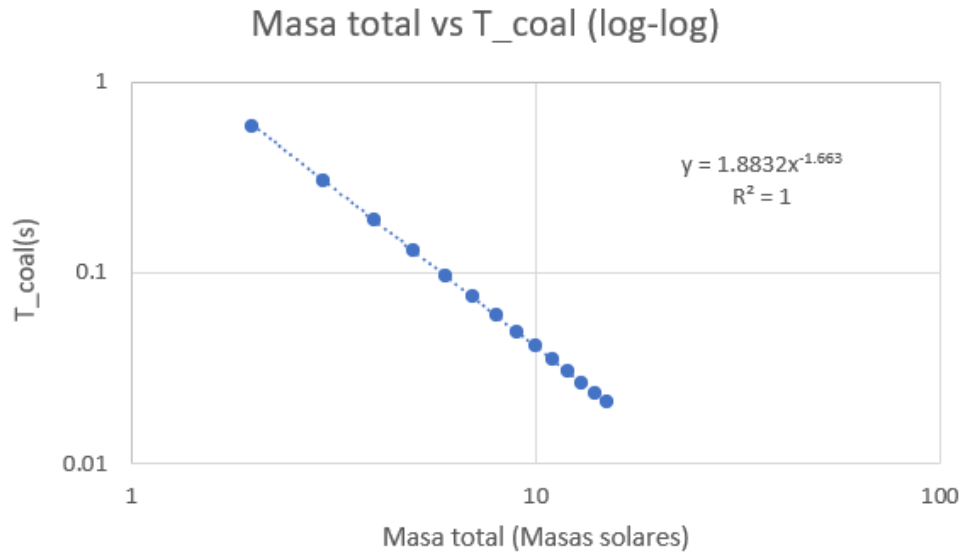


Figura 9.3: Gráfica de masa total vs tiempo a coalescencia en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija a 200(Hz)

Nuevamente utilizando la aproximación 8.3 se tiene:

$$\mathcal{C} = \frac{5c^5}{256\pi^{8/3}G^{5/3}} \implies t_{\text{coal}} = \frac{\mathcal{C}}{f_{\text{snap}}^{8/3}\mathcal{M}^{5/3}} \quad (9.11)$$

Tratando ahora la frecuencia como constante, se destaca la siguiente relación:

$$\mathcal{C} = 1.88 \implies t_{\text{coal}} \propto 1.88\mathcal{M}^{-5/3} \quad (9.12)$$

$$\therefore t_{\text{coal}} \propto \mathcal{M}^{-5/3} \quad (9.13)$$

### 9.4. Relación de proporcionalidad del *strain* con las masas del binario

Es importante hacer la siguiente aclaración, se refiere al ***strain* proyectado** como el *strain* que es registrado para el anillo de partículas de prueba, después de la proyección con el cuadrupolo. Por otro lado el ***strain* teórico** indica el *strain* que calculó el programa utilizando la aproximación estándar 8.4, por lo que este sirve como el dato teórico de comparación.

Masa <i>chirp</i> $\mathcal{M}$ ( $M_{\odot}$ )	<i>strain</i> proyectado $h_0$
0.8706	$1.6094 \times 10^{-23}$
1.3058	$3.1633 \times 10^{-23}$
1.7411	$5.1095 \times 10^{-23}$
2.1764	$7.4113 \times 10^{-23}$
2.6117	$1.0043 \times 10^{-22}$
3.0469	$1.2985 \times 10^{-22}$
3.4822	$1.6222 \times 10^{-22}$
3.9175	$1.9740 \times 10^{-22}$
4.3528	$2.3529 \times 10^{-22}$
4.7880	$2.7580 \times 10^{-22}$
5.2233	$3.1884 \times 10^{-22}$
5.6586	$3.6435 \times 10^{-22}$
6.0939	$4.1225 \times 10^{-22}$
6.5291	$4.6248 \times 10^{-22}$

Tabla 9.4: Relación entre la masa *chirp*  $\mathcal{M}$  y el *strain* gravitacional proyectado  $h_0$  dejando la frecuencia fija en (200Hz)

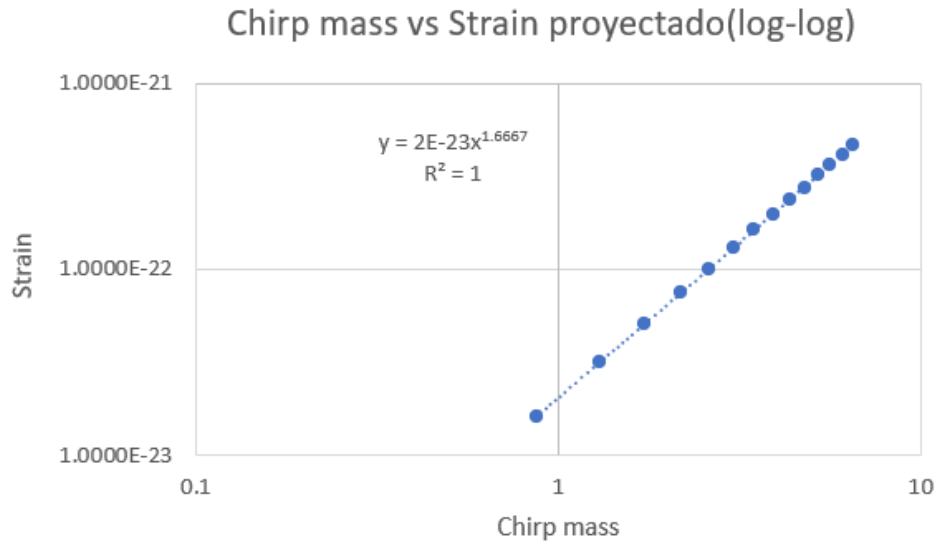


Figura 9.4: Gráfica de la masa *chirp* vs el *strain* gravitacional en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija en (200Hz)

Donde se puede apreciar claramente que el *strain* utilizado en proyección del cuadrupolo posee la siguiente relación de proporcionalidad con la masa *chirp*:

$$h_{\text{proyectado}} \propto \mathcal{M}^{5/3} \tag{9.14}$$

### 9.5. Relación de proporcionalidad de la masa *chirp* y el *strain* teórico

Masa <i>chirp</i> $\mathcal{M}$ ( $M_{\odot}$ )	<i>strain</i> teórico $h_0$
0.8706	$3.2188 \times 10^{-23}$
1.3058	$6.3267 \times 10^{-23}$
1.7411	$1.0219 \times 10^{-22}$
2.1764	$1.4823 \times 10^{-22}$
2.6117	$2.0086 \times 10^{-22}$
3.0469	$2.5970 \times 10^{-22}$
3.4822	$3.2443 \times 10^{-22}$
3.9175	$3.9480 \times 10^{-22}$
4.3528	$4.7059 \times 10^{-22}$
4.7880	$5.5160 \times 10^{-22}$
5.2233	$6.3769 \times 10^{-22}$
5.6586	$7.2869 \times 10^{-22}$
6.0939	$8.2449 \times 10^{-22}$
6.5291	$9.2496 \times 10^{-22}$

Tabla 9.5: Relación teórica entre la masa *chirp*  $\mathcal{M}$  y el *strain* gravitacional teórico  $h_0$  calculado por el programa con frecuencia fija en (200Hz)

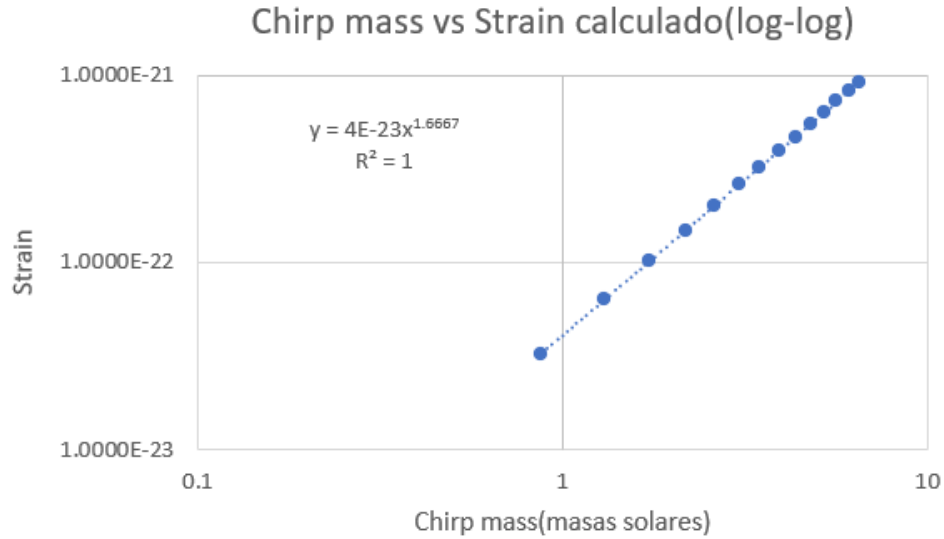


Figura 9.5: Gráfica de la masa *chirp* vs el *strain* gravitacional teórico calculado por el programa en escala logarítmica(log-log) base 10 dejando la frecuencia fija en (200Hz)

Nuevamente se cumple la relación de proporcionalidad del *strain* gravitatorio:

$$h_{\text{teórico}} \propto \mathcal{M}^{5/3} \quad (9.15)$$

## 9.6. Relación entre el *strain* proyectado y el *strain* teórico

<i>strain</i> proyectado $h_{\text{proyectado}}$	<i>strain</i> teórico $h_{\text{teórico}}$
$1.6094 \times 10^{-23}$	$3.2188 \times 10^{-23}$
$3.1633 \times 10^{-23}$	$6.3267 \times 10^{-23}$
$5.1095 \times 10^{-23}$	$1.0219 \times 10^{-22}$
$7.4113 \times 10^{-23}$	$1.4823 \times 10^{-22}$
$1.0043 \times 10^{-22}$	$2.0086 \times 10^{-22}$
$1.2985 \times 10^{-22}$	$2.5970 \times 10^{-22}$
$1.6222 \times 10^{-22}$	$3.2443 \times 10^{-22}$
$1.9740 \times 10^{-22}$	$3.9480 \times 10^{-22}$
$2.3529 \times 10^{-22}$	$4.7059 \times 10^{-22}$
$2.7580 \times 10^{-22}$	$5.5160 \times 10^{-22}$
$3.1884 \times 10^{-22}$	$6.3769 \times 10^{-22}$
$3.6435 \times 10^{-22}$	$7.2869 \times 10^{-22}$
$4.1225 \times 10^{-22}$	$8.2449 \times 10^{-22}$
$4.6248 \times 10^{-22}$	$9.2496 \times 10^{-22}$

Tabla 9.6: Comparación entre el *strain* proyectado y el *strain* teórico calculado por el programa para cada valor de masa *chirp* con frecuencia fija en (200Hz)

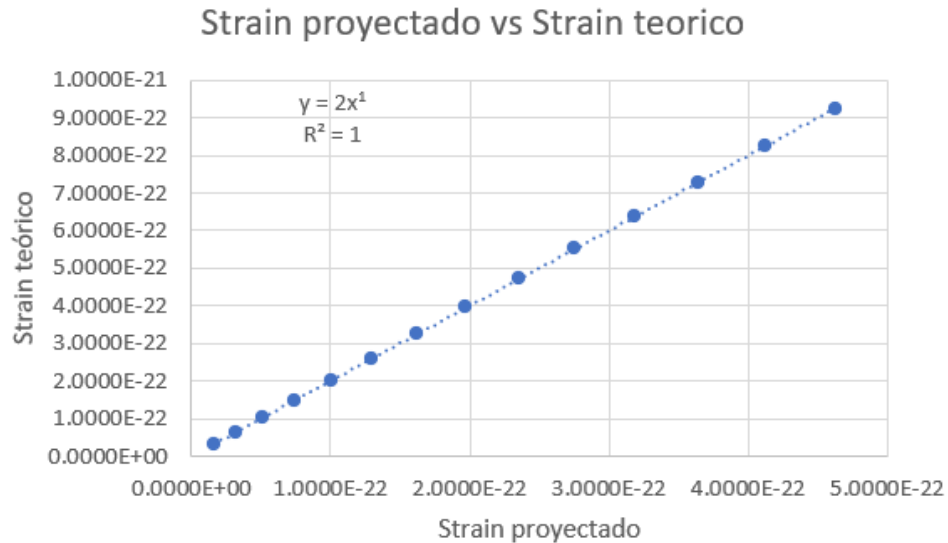


Figura 9.6: Gráfica de los *strains* proyectado y teórico con frecuencia fija en (200Hz)

Note que el *strain* teórico y el proyectado en el programa poseen una relación de:

$$\frac{1}{2}h_{\text{teórico}} = h_{\text{proyectado}} \quad (9.16)$$

Este factor de  $\frac{1}{2}$  presente entre el *strain* teórico y el *strain* gravitatorio proyectado proviene de la forma en como se detectan las ondas gravitacionales. Bajo la teoría linearizada de gravedad, y bajo las condiciones impuestas bajo el calibre tt, el *strain* gravitacional toma la forma de  $h_{\text{teórico}}$ . Sin embargo, estas perturbaciones en la métrica no son posibles de medir mediante los detectores convencionales (interferómetros)[4], por lo que se debe de utilizar el cambio en la distancia propia entre dos puntos arbitrarios, la cual toma la forma presentada en [2]:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \quad (9.17)$$

Esta proyección de vectores representa la orientación de los brazos del interferómetro en relación a la dirección de la onda[27]. Por lo que el *strain* que esta siendo graficado en el programa, refleja de manera correcta la proporción del *strain* registrado en los interferómetros que detectan las ondas gravitacionales. Es importante notar que la diferencia en la distancia propia medida por los detectores es invariante bajo condiciones de calibre, sin embargo, el *strain* teórico no lo es. Es por esto que las cantidades observables no son directamente  $h_+ y h_\times$ , sino el cambio en la distancia propia generada por estas. Esto se mantiene aún para la configuración de ondas planas.

## 9.7. Validación de la aproximación de campo lejano y del cuadrupolo

Seguidamente se recuerda que el programa está diseñado para funcionar como un visualizador de ondas gravitacionales en el campo lejano, es decir que la distancia del grupo de partículas de prueba al *merger* respeta la relaciones mostradas en [6]:

$$R \gg \lambda_{gw}, \quad R \gg \frac{GM}{c^2} \quad (9.18)$$

El programa utiliza como distancia del anillo de partículas de prueba (observador) al binario un  $R = 100Mpc$  a manera de corresponder a la sensibilidad pico de *LIGO* para sistemas en rangos de  $[10-30]M_\odot$ [25], donde la longitud de onda máxima permitida por el rango de frecuencias establecido en el programa es:

$$\lambda_{gw} \approx 6.0 \times 10^6 m \implies \frac{R}{\lambda_{gw}} = \frac{3.086 \times 10^{24}}{6.0 \times 10^6} \approx 5 \times 10^{17} \quad (9.19)$$

Por otro lado, las restricciones de los rangos de masa solares permiten lo siguiente:

$$\frac{GM}{c^2} = \frac{6.674 \times 10^{-11} (15M_\odot)}{(2.998 \times 10^8)^2} \approx 2.2 \times 10^4 m, \quad \frac{R}{GM/c^2} > 10^{20} \quad (9.20)$$

Por lo que se garantiza que la visualización opera estrictamente en la zona lejana de radiación, validando así el uso de la proyección mediante el cuadrupolo [27], con la forma:

$$h(t) = h_+(t) \cos(2\phi) + h_\times(t) \sin(2\phi) \quad (9.21)$$

Por otro lado, la forma de onda en la aproximación 0PN utilizada en la proyección del cuadrupolo es válida únicamente si se cumple la siguiente condición [3]:

$$x \ll 1 \ni x = \left( \frac{Gm_{\text{total}}\Omega}{c^3} \right)^{2/3} = \left( \frac{\pi G f_{\text{snap}} m_{\text{total}}}{c^3} \right)^{2/3} \quad (9.22)$$

Así mismo se menciona en [3] que la convención usual para el parámetro adimensional  $x$  es  $x \leq 0.1$ , por lo que si en el programa se utiliza una masa total  $m_{\text{total}} = 30M_\odot$ , se tiene lo siguiente:

$$x = \left( \frac{\pi f_{\text{snap}} G(30M_\odot)}{c^3} \right)^{2/3} \implies f_{\text{snap}} \leq 68\text{Hz} \implies x \approx 0.1 \quad (9.23)$$

Por lo que para garantizar que la aproximación 0PN del cuadrupolo se mantenga, se impuso el criterio mostrado en [3] como una **sugerencia** de límite de frecuencia para el usuario, si se ingresa una frecuencia mayor, la visualización deja de ser numéricamente válida y necesita términos de mayor orden (1,2PN) en el cuadrupolo.

## 9.8. Validación del uso de *meshgrid* y *linspace* como métodos para visualizar el sistema y efectos del factor de escala visual

Nótese que todos los parámetros del programa ( $t_{\text{coal}}, f_{\text{isco}}, h_0$ ) son calculados mediante las fórmulas para las aproximaciones presentadas en la Sección anterior, esto se ve reflejado en las gráficas mostradas previamente, ya que estas no presentan ningún tipo de desviación en las regresiones. Por lo que este al no presentar ningún dato atípico, muestra que la implementación de dichas aproximaciones fue realizada de manera exitosa en el programa. Además se verificó que los observables  $t_{\text{coal}}, f_{\text{isco}}, h_0$  permanecen invariantes al reducir la malla del *linspace* de 200 a 10 puntos. Esto se debe a que estos no dependen de la configuración del espacio simulado por el programa, más bien estos son independientes del mismo. Por tanto los errores de truncamiento y redondeo asociados a la cantidad de puntos en el *linspace* son considerados numéricamente despreciables.

Esto indica que los métodos computacionales *linspace*, *meshgrid* junto con la técnica de *array-broadcasting* son efectivos para la simulación de ondas gravitacionales. Sin embargo, es importante resaltar que *meshgrid* si presentó problemas al trabajar con frecuencias altas. Dado a como está instanciado el eje XY dentro del programa mediante *linspace*, este genera una red rectangular de puntos en las direcciones correspondientes, y luego el programa evalúa el campo escalar generado por  $Z_{\text{opt}}$ , este lleva consigo asociado los valores de los modos de polarización  $h_+, h_x$ , los cuales al mismo tiempo llevan asociada la **fase** del sistema, definida como  $\phi = 2\pi f_{\text{snap}}(t - z)$ , nótese que la frecuencia multiplica tanto la parte temporal como la espacial de la onda, esto es lo que causa el problema con el *meshgrid*.

El teorema de Nyquist-Shannon [23] dicta que suponiendo una frecuencia de  $f_{\text{snap}} = 1500\text{Hz}$ , un rango de  $[-15, 15]$  con 200 puntos equidistantes y con una separación radial de  $\Delta r = 0.15$ , entonces para que la computadora pueda representar gráficamente a la onda de manera suave, se debe de cumplir la relación:

$$\Delta r \leq \frac{1}{2f_{\text{snap}}} \implies 0.15 \leq 3 \times 10^{-4}$$

Claramente esto no se cumple a menos que se introduzca una constante que multiplique a la separación radial  $\Delta r$ . Es por esto que se define el factor de escala visual  $S = \frac{f_{\text{snap}}}{500}$ , el cual se multiplica por la distancia radial, volviendo así la relación del teorema de Nyquist-Shannon para una frecuencia de 1500Hz:

$$\Delta r \leq 0.17 \implies 0.15 \leq 0.17$$

Esto hace que en el programa, la relación entre el número de onda físico y el dibujado sea:

$$k_{\text{fis}} = 2\pi f_{\text{snap}}, \quad k_{\text{dib}} = S = \frac{f_{\text{snap}}}{500} = \frac{k_{\text{fis}}}{2\pi(500)} \approx k_{\text{fis}}/3 \times 10^3$$

Por lo que que visualmente, la frecuencia espacial está comprimida por un factor de  $3 \times 10^3$ . Esto garantiza que la visualización sea suave incluso para frecuencias de hasta 1.5kHz.

Se debe mencionar que el factor de escala visual mostrado en la Sección anterior, afecta únicamente a como la frecuencia interactúa con la distancia radial visible en el programa. Esto como se puede apreciar en los resultados anteriores no influye de ninguna manera en la validez física de la visualización, simplemente fue incorporado para mejorar la legibilidad de la simulación en altas frecuencias. Esto quiere decir que la cantidad de anillos/ondas presentes en la simulación es reducida, sin embargo el patrón de propagación se mantiene intacto. Por esta razón, si la simulación se deseara utilizar con motivos cuantitativos, se debe de reajustar la escala de la distancia mediante la relación mostrada en la Sección (8.2.1).

## 9.9. Derivaciones teóricas

Mediante el principio estacionario de Hamilton generalizado a teoría de campos se obtuvo la acción más general invariante bajo difeomorfismos y ecuaciones de segundo orden. Aplicando el teorema de Lovelock[12] se recupera el único tensor de divergencia nula que cumple con estas condiciones, el tensor de Einstein, reproduciendo de esta forma las ecuaciones de campo. Este enfoque sin recurrir a los procedimientos estándar [5][15] constituye una aporte metodológico original de este trabajo.

A partir de las ecuaciones de campo de Einstein, se linealizó la métrica plana perturbada de Minkowski  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , seguidamente se muestra paso a paso cómo cada componente de los tensores bajo la condición de linealización se anula o sobrevive, detalle raramente mostrado en la literatura estándar[28][29]. Esto tiene como consecuencia que al imponer el calibre de Lorenz y el calibre TT, se redujeron los 10 grados de libertad distintos en las perturbaciones a únicamente los dos modos físicos de polarización  $h_+$ ,  $h_\times$ .

El cálculo del tensor de Riemann linealizado confirmó  $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} \neq 0$  (véanse 7.396 y 7.399), demostrando así que las ondas representan verdadera curvatura del espacio tiempo y no son producto de una elección de coordenadas curvas.

Futuros desarrollos sobre esta simulación deberán de enfocarse en la incorporación de parámetros como la excentricidad en las órbitas de los agujeros negros, esto permitirá la subsecuente implementación del *spin* presente en estos, habilitando de esta forma el uso de aproximaciones fuera del primer orden para mejorar la precisión de la visualización. Por otro lado, se propone la incorporación de una dependencia temporal en la frecuencia del binario, esto permitirá mostrar cómo la frecuencia en la fase inspiral aumenta mientras se acerca al *merger*, en lugar de mantener una frecuencia estática como lo hace la presente iteración del programa.

Las implementaciones finales de los trabajos a futuro deberán de concluir en cómo la disipación de radiación afectan a todos los parámetros mencionados anteriormente, y por medio de métodos numéricos encontrar relaciones de proporcionalidad entre estos, de manera similar a como se encontró la relación con el tiempo al *merger* mediante los avances mostrados en trabajos como el de Peter & Mathew [21][22] y trabajar hacia la implementación de aproximaciones de cuadrupolo de mayor orden(1,2,3)PN, a fin de solidificar la validez numérica del trabajo.

Finalmente, como base teórica para un próximo trabajo de posgrado, se propone la investigación de la forma que pueden llegar a tomar las soluciones de la ecuación de onda  $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$  bajo las condiciones del calibre Longitudinal. Además, también se propone derivar soluciones analíticas para el escalar de Weyl de cuarto orden  $\Psi_4$  para un sistema binario utilizando el formalismo de Newman-Penrose mediante los *tetrads* ( $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ ).

Concluyendo el presente trabajo, después de haber mostrado paso por paso cómo obtener las ecuaciones de campo de Einstein a partir del principio estacionario de Hamilton utilizando el teorema de Lovelock, de aplicar la condición de linealización a la métrica, sus perturbaciones y los tensores concomitantes de estas. Seguido de aplicar las condiciones de calibre de Lorenz y TT para obtener los modos de polarización, los cuales fueron proyectados mediante el cuadrupolo bajo la aproximación (OPN) a manera de proyectar el *strain* gravitatorio correctamente en la simulación. Se concluyó lo siguiente:

- Se logró derivar paso a paso y con gran detalle las ecuaciones de campo de Einstein a partir del principio estacionario de Hamilton, durante dicho proceso se utilizó el teorema de Lovelock para conectar ambos conceptos mediante la acción de Hilbert-Einstein y su variación, al igual que conceptos de geometría diferencial como el producto exterior, las  $k$ -formas y el teorema generalizado de Stokes.
- El proceso de la derivación de los modos de polarización  $h_+$  y  $h_\times$  bajo el calibre TT de las ondas gravitacionales es presentado de manera clara y detallada, este contiene derivaciones las cuales son omitidas en la literatura estándar tal como las pruebas de la forma que toman los tensores de Riemann, Ricci, etc. bajo la condición de la linealización de la gravedad, el proceso de anulación de los 16 componentes independientes de las perturbaciones a únicamente los dos modos de polarización resultantes, y como estos representan una curvatura en el espacio-tiempo.
- La simulación elaborada para este trabajo, visualiza de manera correcta el efecto de las ondas gravitacionales como perturbaciones en el espacio-tiempo mediante sus dos distintos modos de polarización  $h_+$  y  $h_\times$  mostrando de acuerdo a la teoría el *strain* gravitacional generado por estas en base a un sistema binario con masas constantes y evolución de la fase inspiral congelada a una frecuencia determinada. El programa presenta un factor de escala visual fijado en  $S = f_{\text{snap}}/500$  a manera de cumplir con el principio establecido por Nyquist-Shannon para la simulación de ondas.
- Se derivó de forma correcta y detallada los modos de polarización de las ondas gravitacionales de manera que se aporta a la teoría y procedimientos ya establecidos, utilizando conceptos de tanto de física como geometría diferencial.

Al realizar el presente trabajo se encontraron distintas áreas de mejora, específicamente en el programa, las cuales de tomarse en cuenta, probarán ser útiles si se decide reproducir los resultados encontrados tras este trabajo de investigación:

1. Para evitar tener que usar un factor de escala visual, se recomienda instanciar un sistema coordinado dinámico respecto a la frecuencia ingresada, es decir; formar un sistema coordinado mediante un método alternativo a los *linspace*s, ya que estos restringen el tamaño del sistema a un valor fijo. En su lugar, utilizar un método dinámico para que la escala de la simulación se acople a los parámetros ingresados por el usuario.
2. Introducir aproximaciones de términos en el orden de (2PN) en la proyección del cuadrupolo, esto a manera de mejorar el rango de validez física del programa y poder simular a frecuencias más cercanas a la *ISCO* y tomar en cuenta parámetros cosmológicos como el *red-shift*.
3. Dado a que el programa realiza la misma operación para cada punto distinto del *linspace*, a manera de proyectar el *strain* correctamente. Es posible utilizar el principio *SIMD* (same-instruction-multiple-data) para calcular todos los datos de manera simultánea, a diferencia del proceso existente en el programa realizado por *numpy*, el cual calcula cada elemento uno por uno, se puede utilizar *SIMD* y mejorar los cuadros(*frames*) por segundo del programa.

- [1] Bartle, Robert G.: *The Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edición, 1976, ISBN 978-0471054641.
- [2] Bieri, Lydia, David Garfinkle y Nicolás Yunes: *Gravitational Waves and Their Mathematics*. Notices of the American Mathematical Society, 64(7):693–707, Agosto 2017. <https://www.ams.org/publications/journals/notices/201707/rnoti-p693.pdf>.
- [3] Blanchet, Luc: *Post-Newtonian Theory for Gravitational Waves*. Living Reviews in Relativity, 2024. <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-2>, Revised version of <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-2>.
- [4] Buonanno, Alessandra: *Gravitational Waves: A New Messenger to Explore the Universe*. Lecture at Institut Henri Poincaré (IHP), Marzo 2021.
- [5] Carroll, Sean M.: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco, CA, USA, 2004.
- [6] Flanagan, Éanna É. y Scott A. Hughes: *The Basics of Gravitational Wave Theory*. New Journal of Physics, 7:204, 2005. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/7/1/204>, Trabajo mencionado en antecedentes.
- [7] Gelfand, I. M. y S. V. Fomin: *Calculus of Variations*. Dover Publications, Mineola, NY, USA, 2000.
- [8] Goldstein, Herbert, Charles Poole y John Safko: *Classical Mechanics*. Pearson Education, San Francisco, CA, USA, 3ª edición, 2002.
- [9] Kühnel, Wolfgang: *Differential Geometry: Curves, Surfaces, Manifolds*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2ª edición, 2006. Referencia principal de geometría diferencial.
- [10] Kühnel, Wolfgang: *Differential Forms: A Complement to Calculus*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2020. Referencia principal de cálculo exterior.
- [11] Landau, L. D. y E. M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, Oxford, UK, 4ª edición, 1975.
- [12] Lovelock, David: *The Einstein Tensor and Its Generalizations*. Journal of Mathematical Physics, 12(3):498–501, 1971. Publicación original de David Lovelock, donde se muestra como dicho teorema caracteriza a los tensores de las ecuaciones de campo de Einstein en altas dimensiones.

- [13] Maggiore, Michele: *Gravitational Waves: Volume 1, Theory and Experiments*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2007. Literatura autoritaria de la cual provienen la mayoría de aproximaciones utilizadas en la visualización.
- [14] Milotti, Edoardo: *The Transverse-Traceless Gauge*. Lecture notes, Octubre 2024. <https://wwwusers.ts.infn.it/~milotti/Didattica/GravitationalWaves/handouts/13-TTGauge.pdf>.
- [15] Misner, Charles W., Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler: *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, CA, USA, 1973.
- [16] MIT OpenCourseWare: *Waves and Imaging: Calculus of Variations and Functional Derivatives*. MIT OpenCourseWare, 2023. <https://ocw.mit.edu/courses/18-303-linear-partial-differential-equations-analysis-and-numeric-fall-2015/resources/lecture-27-calculus-of-variations-functional-derivatives/>.
- [17] Noether, Emmy: *Invariante Variationsprobleme*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, páginas 235–257, 1918.
- [18] Nomizu, Katsumi y Shoshichi Kobayashi: *Foundations of Differential Geometry, Volume I*. Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1963. Referencia específica sobre la necesidad del espacio-tiempo de ser orientable.
- [19] Padmanabhan, Thanu: *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010. Menciona al teorema de Lovelock.
- [20] Peskin, Michael E. y Daniel V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1995, ISBN 978-0-201-50397-5.
- [21] Peters, P. C.: *Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses*. Physical Review, 136(4B):B1224–B1232, Noviembre 1964. Extiende detalle en la fórmula para el tiempo al merger.
- [22] Peters, P. C. y J. Mathews: *Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit*. Physical Review, 131(1):435–440, Julio 1963. Deriva explícitamente el poder dipolado de un binario compacto, pilar de la derivación del tiempo a coalescencia.
- [23] Por, Emiel, Maaïke van Kooten y Vanja Sarkovic: *Nyquist-Shannon Sampling Theorem*. Informe técnico, Leiden Observatory, Leiden University, Mayo 2019. [https://home.strw.leidenuniv.nl/~por/AOT2019/docs/AOT\\_2019\\_Ex13\\_NyquistTheorem.pdf](https://home.strw.leidenuniv.nl/~por/AOT2019/docs/AOT_2019_Ex13_NyquistTheorem.pdf).
- [24] Reyes-Figueroa, Alan: *Orientabilidad de Superficies*. Lecture notes, Geometría Diferencial (Aula 19), 2025. Clase impartida el 20 de marzo de 2025.
- [25] Scharpf, Philipp: *Simulation and Visualization of Gravitational Waves from Binary Black Holes*. Master's thesis, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany, Junio 2017. [https://www.researchgate.net/profile/Philipp-Scharpf/publication/319208978\\_Simulation\\_and\\_Visualization\\_of\\_Gravitational\\_Waves\\_from\\_Binary\\_Black\\_Holes/links/5efa380aa6fdcc4ca43aa40e/Simulation-and-Visualization-of-Gravitational-Waves-from-Binary-Black-Holes.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Philipp-Scharpf/publication/319208978_Simulation_and_Visualization_of_Gravitational_Waves_from_Binary_Black_Holes/links/5efa380aa6fdcc4ca43aa40e/Simulation-and-Visualization-of-Gravitational-Waves-from-Binary-Black-Holes.pdf).
- [26] Thornton, Stephen T. y Jerry B. Marion: *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks Cole, Belmont, CA, USA, 5ª edición, 2004. El título clásico utilizado en los cursos de mecánica.
- [27] Tinto, Massimo, George J. Dick, John D. Prestage y J. W. Armstrong: *Improved spacecraft radio science using an on-board atomic clock: application to gravitational wave searches*. Informe técnico, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, unpublished. Crucial para la proyección de cuardupolo.

- [28] Wald, Robert M.: *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, USA, 1984.
- [29] Weinberg, Steven: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1972. Explica a gran detalle el proceso de la anulación de términos al aplicar los distintos calibres.

## Código fuente de la simulación

```
1 #SIMULACION DE ONDAS GRAVITACIONALES MEDIANTE SUS MODOS DE POLARIZACION
2 #JUAN IGNACIO ARROYAVE
3 #TRABAJO DE GRADUACION PARA OPTAR AL GRADO EN FISICA
4 #UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
5 import sys
6 import numpy as np
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 from matplotlib.animation import FuncAnimation
9 import tkinter as tk
10 from tkinter import messagebox
11 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
12
13 # Constantes
14 G = 6.67430e-11 # Gravitational constant (m3 kg-1 s-2)
15 c = 3.0e8 # Speed of light (m/s)
16 M_sun = 1.989e30 # Solar mass (kg)
17
18 # Parametros binary system
19 while True:
20     try:
21         M1 = input("Ingrese el valor de la masa del primer objeto (Masas solares): ")
22         m1 = float(M1) * M_sun
23         break
24     except ValueError:
25         print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa M1
26         .")
27 while True:
28     try:
29         M2 = input("Ingrese el valor de la masa del segundo objeto (Masas solares):
30         ")
31         m2 = float(M2) * M_sun
32         break
33     except ValueError:
34         print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa M2
35         .")
36 if(m1<0):
37     print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
38     sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
```

```

38 elif(m2<0):
39     print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
40     sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
41 elif(m1==0):
42     print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
43     sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
44 elif(m2==0):
45     print("Las masas de los objetos no pueden ser negativas o cero.")
46     sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
47
48
49 # Masa reducida (chirp en Carrol)
50 total_mass = m1 + m2
51 chirp_mass = ((m1 * m2)**(3/5)) / (total_mass**(1/5))
52
53 f_isco = (c**(3))/(np.pi*6**(3/2)*G*total_mass) #Inner Most Stable Circular Orbit
54
55 while True:
56     try:
57         F_snap = input("Ingrese la frecuencia que desea visualizar dentro del rango
[50,1500](Hz): ")
58         f_snap = float(F_snap)
59         break
60     except ValueError:
61         print("Entrada invalida. Por favor, ingrese un numero valido para la masa
frecuencia.")
62
63 if(f_snap<0):
64     print("No es posible ingresar frecuencias negativas.")
65     sys.exit("no es posible simular")
66 elif(f_snap==0):
67     print("No es posible que el sistema no cuente con frecuencia.")
68     sys.exit("No es posible simular, sistema no fisico.")
69 elif(f_snap<50):
70     print("Frecuencia fuera del rango establecido")
71     sys.exit("Input invalido: Porfavor ingrese frecuencias dentro del rango
establecido")
72 elif(f_snap>1500):
73     print("Frecuencia fuera del rango establecido")
74     sys.exit("Input invalido: Porfavor ingrese frecuencias dentro del rango
establecido")
75
76 t_coal = (5/256)*(c**5/G**(5/3)) \
77         /(( np.pi*f_snap)**(8/3) * chirp_mass**(5/3) )
78
79 print(f"Frecuencia de Snapshot {f_snap:.1f} Hz, tiempo a coalescencia/merger = {
t_coal:.4f} s")
80 print("La f_isco es: ",f_isco,"Hz")
81 if(f_isco<f_snap):
82     print("sistema fisico no valido")
83     root = tk.Tk()
84     root.withdraw()
85     messagebox.showinfo("Atencion", "Sistema fisico no valido, la frecuencia snap no
puede ser mayor a la frecuencia ISCO, la siguiente visualizacion no posee validez
fisica")
86
87 #-----
88 #-----
89
90 k=(f_snap/500) #Factor de escala visual
91 d = 100 * 3.086e22 # m (1 Mpc = 3.086e22 m)
92 strain_amplitude = 4 * (G * chirp_mass)**(5/3) * (np.pi * f_snap)**(2/3) / (c**4 * d)
93
94 # Grids de espacio y tiempo
95 x_opt = np.linspace(-15, 15, 200)
96 y_opt = np.linspace(-15, 15, 200)
97 X_opt, Y_opt = np.meshgrid(x_opt, y_opt)
98 distance_opt = k*np.sqrt(X_opt**2 + Y_opt**2)

```

```

99 t_opt = np.linspace(0, 0.1, 800) # Grid temporal
100
101
102 # Modos de polarizacion plus y cruz
103 phase      = 2 * np.pi * f_snap * t_opt[:, None, None] - distance_opt[None, :, :]
104
105 h_plus_opt  = strain_amplitude * np.cos(phase)
106 h_cross_opt = strain_amplitude * np.cos(phase - np.pi/2)
107
108 # Plot 3D duh
109 fig_mass_corrected = plt.figure(figsize=(8, 8))
110 ax_mass_corrected = fig_mass_corrected.add_subplot(111, projection='3d')
111
112 strain_amplitude_total=strain_amplitude*np.sqrt(2)
113 #print("la amplitud total es",strain_amplitude_total)
114 #print("la amplitud es",strain_amplitude)
115 eps = 1.0e-12
116 R_phys = np.sqrt(X_opt**2 + Y_opt**2)
117 R_phys = np.where(R_phys == 0,eps, R_phys)
118
119 cos2phi = (X_opt**2 - Y_opt**2) / R_phys**2
120 sin2phi = (2 * X_opt * Y_opt) / R_phys**2
121
122
123 # Animacion:
124 def update_mass_corrected(frame):
125     Z_opt = 0.5 *(( h_plus_opt[frame] * cos2phi) + (h_cross_opt[frame] * sin2phi ))
126     #Z_opt = h_plus_opt[frame] * X_opt / distance_opt + h_cross_opt[frame] * Y_opt /
127     distance_opt
128     ax_mass_corrected.clear()
129     ax_mass_corrected.set_xlim(-15, 15)
130     ax_mass_corrected.set_ylim(-15, 15)
131     ax_mass_corrected.set_title("Visualizador de Ondas Gravitacionales")
132     ax_mass_corrected.set_xlabel("Eje-X (3e8 (m))")
133     ax_mass_corrected.set_ylabel("Eje-Y (3e8(m))")
134     ax_mass_corrected.set_zlabel("Eje-Z")
135     #Zmax_data = np.nanmax(np.abs(Z_opt[0]))
136     #ax_mass_corrected.set_zlim(-Zmax_data, Zmax_data)
137     #print(Zmax_data)
138
139
140     return ax_mass_corrected.plot_surface(X_opt, Y_opt, Z_opt, cmap="viridis",
141     edgcolor='k', alpha=0.9)
142
143 #salu2
144 ani_mass_corrected = FuncAnimation(fig_mass_corrected, update_mass_corrected, frames=
145     len(t_opt), interval=1, blit=False)
146
147
148 #CONCEPTOS CLAVE:
149 """
150 Utiliza los modos de polarizacion hx,h+ para la simulacion de las ondas.
151 Ademas se utiliza la proporcion del strain en "Z" derivado de la relacion en las
152 geodesicas.
153 Fisco y Tcoal tambien se calculan con las proporcionalidades mostradas en Maggiore
154 pags 175 en adelante.
155 """

```

---

## Propiedad alternante para las 2 y 3-formas

---

### B.1. Código para la visualización de las 2-formas

```
1 #Visualizacion complementaria de las 2-Formas
2 #Juan Ignacio Arroyave Santos
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import matplotlib.animation as animation
6
7 # Vectorcitos iniciales
8 v0 = np.array([1, 0.25])
9 w0 = np.array([0.5, 1])
10
11
12 frames = 100
13
14
15 fig, ax = plt.subplots()
16 ax.set_aspect('equal', adjustable='box')
17 ax.grid(True, which='both', linestyle='--', linewidth=0.5)
18 ax.set_xlim(-0.5, 1.7)
19 ax.set_ylim(-0.5, 1.7)
20 ax.set_xlabel('x')
21 ax.set_ylabel('y')
22 ax.set_title('Visualziacion de una 2-forma: v wedge w versus w wedge v')
23
24 # Elementos que se updatean
25 quiver_v = ax.quiver(0, 0, v0[0], v0[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1,
26                     color='black')
27 quiver_w = ax.quiver(0, 0, w0[0], w0[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1,
28                     color='black')
29 polygon = ax.fill([], [], alpha=0.3, color='orange')[0]
30
31 area_text = ax.text(0.1, 1.5, '', fontsize=12)
32 v_text = ax.text(0.1, 1.35, '', fontsize=12)
33 w_text = ax.text(0.1, 1.2, '', fontsize=12)
34
35 def interpolate_vectors(frame_idx):
```

```

35     """
36     interpolamos linealmente entre (v0, w0) y (w0, v0).
37     mediante el fram
38     """
39     t = frame_idx / (frames - 1)
40     v = (1 - t) * v0 + t * w0
41     w = (1 - t) * w0 + t * v0
42     return v, w
43
44 def update(frame_idx):
45     # obtenemos el vector actual
46     v, w = interpolate_vectors(frame_idx)
47
48     # lo updateamos
49     quiver_v.set_UVC(v[0], v[1])
50     quiver_w.set_UVC(w[0], w[1])
51
52     # esquinas del paralelogramo
53     origin = np.array([0, 0])
54     parallelogram = np.array([
55         origin,
56         v,
57         v + w,
58         w,
59         origin
60     ])
61
62     # updateamos los vertices
63     polygon.set_xy(parallelogram)
64
65     # meshito
66     det_val = np.linalg.det(np.stack([v, w]))
67     area_text.set_text(f'Area (v wedge w) = {det_val:.2f}')
68
69
70     v_text.set_text(f'v = ({v[0]:.2f}, {v[1]:.2f})')
71     w_text.set_text(f'w = ({w[0]:.2f}, {w[1]:.2f})')
72
73
74     if det_val > 0:
75         polygon.set_color('orange')
76     else:
77         polygon.set_color('green')
78
79     return quiver_v, quiver_w, polygon, area_text, v_text, w_text
80
81
82 ani = animation.FuncAnimation(
83     fig,
84     update,
85     frames=frames,
86     interval=0,
87     blit=False
88 )
89
90
91 plt.show()

```

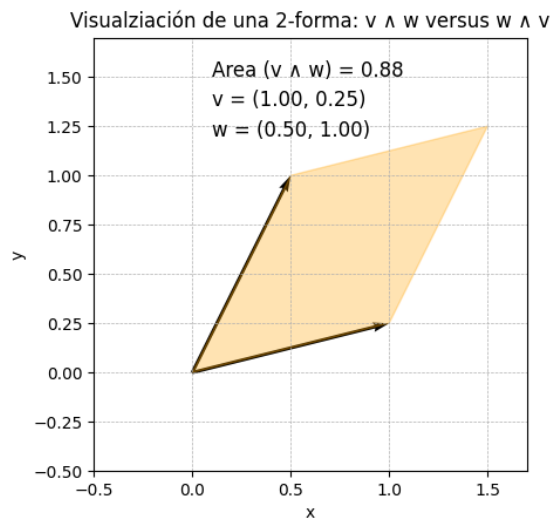
**B.1.1. Visualización de la 2-forma**

Figura B.1: Visualización de la propiedad alternante de una 2-forma

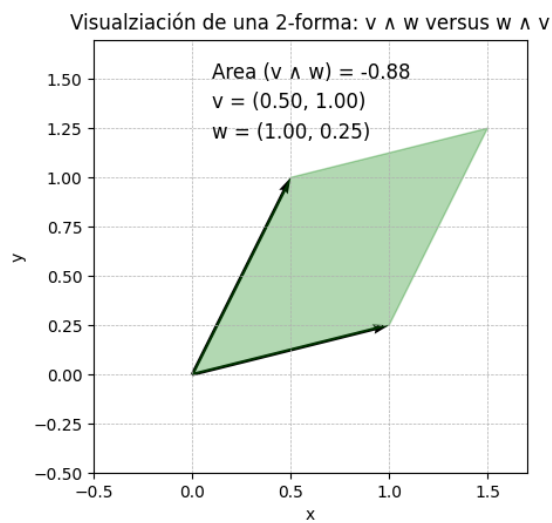


Figura B.2: Visualización de la propiedad alternante de una 2-forma

### B.1.2. Código para visualizar la 3-forma

```

1  #Visualiacion de la propiedad alternante en le 3-forma
2  #Juan Ignacio Arroyave Santos
3  import numpy as np
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from matplotlib.animation import FuncAnimation
6  from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
7
8  v0 = np.array([0.71, 0.44, 0.1])
9  w0 = np.array([0.5, 0.8, 0.3])
10 u0 = np.array([0.2, 0.3, 1])
11
12 # Promediaso
13 avg_vec = (v0 + w0 + u0) / 3
14
15 # El leon no le tiene miedo a los frames
16 frames = 250
17 phase_len = frames // 4
18
19
20 fig = plt.figure()
21 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
22 ax.set_xlim(-0.5, 1.7)
23 ax.set_ylim(-0.5, 1.7)
24 ax.set_zlim(-0.5, 1.7)
25 ax.set_xlabel('x')
26 ax.set_ylabel('y')
27 ax.set_zlabel('z')
28 ax.set_title('Visualizacion del cambio de signo en la 3-forma')
29
30 # Flechas
31 quiver_v = ax.quiver(0, 0, 0, v0[0], v0[1], v0[2], color='black', linewidth=1)
32 quiver_w = ax.quiver(0, 0, 0, w0[0], w0[1], w0[2], color='black', linewidth=1)
33 quiver_u = ax.quiver(0, 0, 0, u0[0], u0[1], u0[2], color='black', linewidth=1)
34
35 # Labels
36 label_v = ax.text(v0[0], v0[1], v0[2], 'v', color='black')
37 label_w = ax.text(w0[0], w0[1], w0[2], 'w', color='black')
38 label_u = ax.text(u0[0], u0[1], u0[2], 'u', color='black')
39
40 def get_parallelepiped_faces(v, w, u):
41     origin = np.array([0, 0, 0])
42     corners = [
43         origin,
44         v,
45         w,
46         u,
47         v + w,
48         v + u,
49         w + u,
50         v + w + u
51     ]
52     faces = [
53         [corners[0], corners[1], corners[4], corners[2]],
54         [corners[0], corners[1], corners[5], corners[3]],
55         [corners[0], corners[2], corners[6], corners[3]],
56         [corners[7], corners[6], corners[2], corners[4]],
57         [corners[7], corners[5], corners[1], corners[4]],
58         [corners[7], corners[6], corners[3], corners[5]]
59     ]
60     return faces
61
62 # Mesh
63 faces_initial = get_parallelepiped_faces(v0, w0, u0)
64 poly_collection = Poly3DCollection(
65     faces_initial,
66     facecolor='cyan',

```

```

67     alpha=0.3,
68     edgecolor='k',
69     linewidths=0.5
70 )
71 ax.add_collection3d(poly_collection)
72
73 # Coordenadas
74 volume_text = ax.text2D(0.05, 0.95, '', transform=ax.transAxes, fontsize=12)
75 v_text = ax.text2D(0.05, 0.90, '', transform=ax.transAxes, fontsize=10)
76 w_text = ax.text2D(0.05, 0.85, '', transform=ax.transAxes, fontsize=10)
77 u_text = ax.text2D(0.05, 0.80, '', transform=ax.transAxes, fontsize=10)
78
79 def interpolate_vectors(frame_idx):
80     """
81     Interpolacion:
82     Phase 1 (0-19): (v0,w0,u0) -> (w0,v0,u0)
83     Phase 2 (20-39): (w0,v0,u0) -> (w0,u0,v0)
84     Phase 3 (40-59): (w0,u0,v0) -> (avg,avg,avg)
85     Phase 4 (60-79): (avg,avg,avg) -> (u0,w0,v0)
86     """
87     if frame_idx < phase_len:
88         # Phase 1: swap v por w
89         t = frame_idx / (phase_len - 1)
90         v = (1 - t) * v0 + t * w0
91         w = (1 - t) * w0 + t * v0
92         u = u0.copy()
93     elif frame_idx < 2 * phase_len:
94         # Phase 2: swap v (actualmente w0) por u
95         t = (frame_idx - phase_len) / (phase_len - 1)
96         v = w0.copy()
97         w = (1 - t) * v0 + t * u0
98         u = (1 - t) * u0 + t * v0
99     elif frame_idx < 3 * phase_len:
100         # Phase 3: colapsa a todos igual
101         t = (frame_idx - 2 * phase_len) / (phase_len - 1)
102         v = (1 - t) * w0 + t * avg_vec
103         w = (1 - t) * u0 + t * avg_vec
104         u = (1 - t) * v0 + t * avg_vec
105     else:
106         # Phase 4: regresamos al prinipio, viva amphoreus
107         t = (frame_idx - 3 * phase_len) / (phase_len - 1)
108         v = (1 - t) * avg_vec + t * u0
109         w = (1 - t) * avg_vec + t * w0
110         u = (1 - t) * avg_vec + t * v0
111     return v, w, u
112
113 def update(frame_idx):
114     global quiver_v, quiver_w, quiver_u, poly_collection, label_v, label_w, label_u
115     # clear page dirian los latex bros
116     quiver_v.remove()
117     quiver_w.remove()
118     quiver_u.remove()
119     poly_collection.remove()
120     label_v.remove()
121     label_w.remove()
122     label_u.remove()
123
124
125     v, w, u = interpolate_vectors(frame_idx)
126
127     # Flechitas 2.0
128     quiver_v = ax.quiver(0, 0, 0, v[0], v[1], v[2], color='black', linewidth=1)
129     quiver_w = ax.quiver(0, 0, 0, w[0], w[1], w[2], color='black', linewidth=1)
130     quiver_u = ax.quiver(0, 0, 0, u[0], u[1], u[2], color='black', linewidth=1)
131
132     # Labels2.0
133     label_v = ax.text(v[0], v[1], v[2], 'v', color='black')
134     label_w = ax.text(w[0], w[1], w[2], 'w', color='black')

```

```
135     label_u = ax.text(u[0], u[1], u[2], 'u', color='black')
136
137     # Nuevo paralelepipedo
138     faces = get_paralelepiped_faces(v, w, u)
139     poly_collection = Poly3DCollection(
140         faces,
141         facecolor='cyan',
142         alpha=0.3,
143         edgecolor='k',
144         linewidths=0.5
145     )
146     ax.add_collection3d(poly_collection)
147
148     # Volumencito
149     mat = np.stack([v, w, u], axis=1)
150     vol = np.linalg.det(mat)
151     volume_text.set_text(f'Volumen = {vol:.2f}')
152
153     # Update
154     v_text.set_text(f'v = ({v[0]:.2f}, {v[1]:.2f}, {v[2]:.2f})')
155     w_text.set_text(f'w = ({w[0]:.2f}, {w[1]:.2f}, {w[2]:.2f})')
156     u_text.set_text(f'u = ({u[0]:.2f}, {u[1]:.2f}, {u[2]:.2f})')
157
158     return quiver_v, quiver_w, quiver_u, poly_collection, label_v, label_w, label_u,
159         volume_text, v_text, w_text, u_text
160
161 ani = FuncAnimation(
162     fig,
163     update,
164     frames=frames,
165     interval=0,
166     blit=False
167 )
168
169 plt.show()
```

### B.1.3. Visualización de la 3-forma

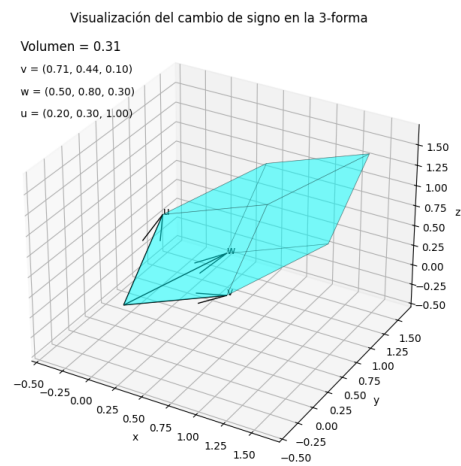


Figura B.3: Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma

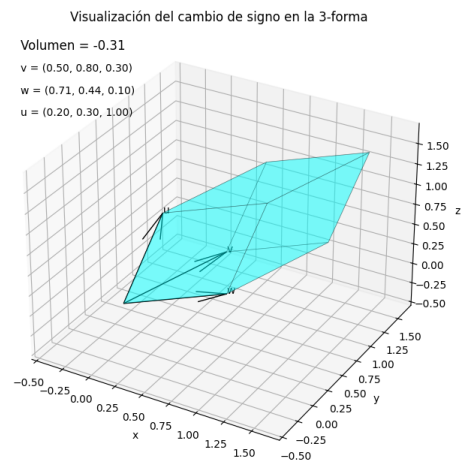


Figura B.4: Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma

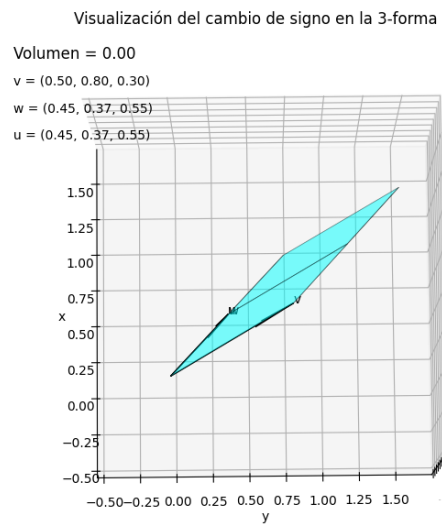


Figura B.5: Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma

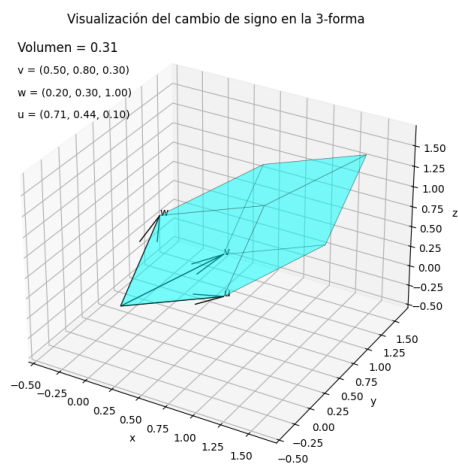


Figura B.6: Visualización de la propiedad alternante de la 3-forma

---

Derivaciones complementarias

---

Dado el tamaño de las imágenes, a partir de la siguiente página se mostrarán todas las derivaciones complementarias relacionadas a este trabajo, estas fueron realizadas a mano.

### Tiempo al merger

Mi mayor issue es que el paper es del año 1963, y en Maggiore no encontré mayor info  
 La expresión numérica para el promedio de la potencia irradiada está dado por **PC Peters**  
 (Gravitational radiation for point masses) (ecuación 16)

$$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad \text{consideramos solo órbitas circulares (e=0)}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} \quad (1)$$

Por otro lado Kepler indica:

$$E = - \frac{G m_1 m_2}{2a} \quad (2)$$

Ahora lo que me hace sentido es primero notar que (1) nos da  $\langle P \rangle$  pero  $\frac{dE}{dt} = \langle P \rangle$   
 Entonces se puede derivar (2) respecto al tiempo, pero por lo que veo  
 (a) depende también del tiempo  $\Rightarrow (a)(t)$ . Entonces:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{G m_1 m_2}{2a} \right] = - \frac{G m_1 m_2}{2a^2} \frac{da}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{G m_1 m_2}{2a^2} \frac{da}{dt} = - \langle P \rangle \quad \text{substituyo por (1)} \Rightarrow \frac{G m_1 m_2}{2a^2} \frac{da}{dt} = - \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}$$

Ahora teóricamente ese T es el tiempo al merger, no me consta? hace sentido.

$$\frac{da}{dt} = - \frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3} \quad \text{Todo es constante menos (a)}$$

sea  $\Omega = \frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} m_1 m_2 (m_1 + m_2) \Rightarrow \frac{da}{dt} = - \frac{\Omega}{a^3}$  EDO 1er o  
 Sepa var:

$$\int \frac{a^3}{\Omega} da = dt \Rightarrow \int dt = \int da \frac{a^3}{\Omega}$$

los límites son del semieje inicial a 0

$$\Rightarrow \int dt = \int_0^{a_0} \frac{a^3}{\Omega} da = \frac{a_0^4}{4\Omega} = \frac{a_0^4}{4} \frac{5}{64} \frac{c^5}{G^3} \frac{1}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$$

$$= \boxed{\frac{5c^5 a_0^4}{256 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}} = T_{\text{coal}} \quad (3) \quad \text{sigue } \rightarrow$$

Figura C.1: Derivación de la expresión del tiempo al merger

Tercera ley de Kepler (creo)

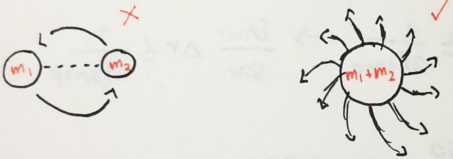
$$2\pi f_{orb} = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_0^3}} \Rightarrow a_0 = [G(m_1+m_2)]^{1/3} (2\pi f_{orb})^{-2/3} \quad (4)$$

la clasica Chirp mass:

$$M = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} \quad \text{en la expresion de } T_{coal} \text{ se tiene: } \frac{1}{m_1 m_2 (m_1+m_2)}$$

$$\Rightarrow M^{-5/3} = \frac{1}{m_1 m_2 (m_1+m_2)} \quad (5)$$

Si alguien para leyendo esto, la razon por la cual tengo que hacer este Tedioso procedimiento es porque en mi simulación no puedo Tener nada que dependa explicitamente de (a), ya que lo que hago es no Tener las masas del binario separadas la una de la otra, mas bien las tomo como una sola y sweepo el strain. basicamente como una sirena



lo pense como si fuera la region lejana de una antena

Continuando: sustituyo (4), (5)  $\rightarrow$  (3):

$$\frac{a_0^4}{m_1 m_2 (m_1+m_2)} = \frac{[G(m_1+m_2)]^{4/3}}{(2\pi f_{orb})^{8/3}} M^{-5/3}$$

Juntandolo Todo en una la expresion (3):

$$T_{coal} = \frac{5c^5}{256G^3} \frac{G^{4/3}}{\left(\frac{2\pi f_{orb}}{2}\right)^{8/3}} M^{-5/3}$$

notar que en Maggiore indican  $f_{gw} = 2f_{orb}$

$$\therefore T_{coal} = \frac{5c^5}{256\pi^{8/3} G^{5/3}} \frac{1}{M^{5/3} f^{8/3}}$$

Figura C.2: Derivación de la expresión del tiempo al merger

Comprobación GW curve space Time:

A probar: El Tensor de curvatura de Riemann es distinto de cero.

$(- - - +)$

El Tensor de curvatura toma la siguiente forma bajo gravedad linealizada:

$$R_{\alpha\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \eta^{\beta\alpha} (2\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha\beta} - 2\partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\beta} - 2\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta} + 2\partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\mu\alpha})$$

Por lo que los Tensores de curvatura no Triviales bajo el calibre TT en las direcciones de propagación serán:

$$R_{T\alpha T}^{\alpha} \quad \& \quad R_{T\alpha T}^{\alpha}$$

Calculando el primer Tensor:

$$R_{T\alpha T}^{\alpha} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (2\partial_x\partial_T h_{\alpha T} - 2\partial_x\partial_{\alpha} h_{TT} - 2\partial_{TT} h_{\alpha\alpha} + 2\partial_{\alpha} h_{xT})$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (2\partial_x\cancel{\partial_T} h_{\alpha T} - 2\partial_x\cancel{\partial_{\alpha}} h_{TT} - 2\partial_{TT} h_{\alpha\alpha} + 2\cancel{\partial_{\alpha}} h_{xT}) \quad \text{Por calibre TT se anulan: } h_T$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (-2\partial_{TT} h_{\alpha\alpha}) \quad \text{con } \alpha = x, y$$

$$\Rightarrow R_{T\alpha T}^{\alpha} = -\frac{1}{2} (\eta^{xx} 2\partial_{TT} h_{xx} + \eta^{yy} 2\partial_{TT} h_{yy}) = -\frac{1}{2} \eta^{xx} 2\partial_{TT} h_{xx} = \frac{1}{2} 2\partial_{TT} h_{xx}$$

$$\therefore R_{T\alpha T}^{\alpha} = \frac{1}{2} 2\partial_{TT} h_{xx} \neq 0$$

Calculando el segundo Tensor:

$$R_{T\alpha T}^{\alpha} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (2\partial_x\cancel{\partial_T} h_{\alpha T} - 2\partial_x\cancel{\partial_{\alpha}} h_{TT} - 2\partial_{TT} h_{\alpha\alpha} + 2\cancel{\partial_{\alpha}} h_{xT})$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (-2\partial_{TT} h_{\alpha\alpha}) = -\frac{1}{2} (\eta^{xx} 2\partial_{TT} h_{xx} + \eta^{yy} 2\partial_{TT} h_{yy})$$

$$= \frac{1}{2} 2\partial_{TT} h_{yy}$$

$$\therefore R_{T\alpha T}^{\alpha} = \frac{1}{2} 2\partial_{TT} h_{yy} \neq 0$$

Si curva el espacio Tiempo (Petrov Type N)  $\square$

Figura C.3: Comprobación que el tensor de curvatura es distinto de cero bajo calibre TT

**Demostraciones**  
**Teorema de Lovelock**

\* Importante notar que la variación del principio estacionario de Hamilton requiere únicamente que la integral del funcional (Lagrangiano) sea un **extremo**, no necesariamente un mínimo.

Restricciones holónicas  $\rightarrow$  coordenadas y puede ser tiempo (partícula sobre una esfera)  $\rightarrow$  expresa como ecuación.

Restricciones sclerónicas  $\rightarrow$  Independientes del tiempo (un bead en una argolla)

Restricciones rheónicas  $\rightarrow$  Depende explícitamente del tiempo (pendulo)

**Como generalizar coordenadas en mecánica clásica**

En lugar de trabajar con el conjunto completo de  $x_i$  coordenadas, se puede trabajar con un conjunto compacto de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_j$ ; imponiendo  $n \leq 3N$ . Tal que:

$$x_i := x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, T) \quad \& \quad \dot{x}_i := \frac{d}{dt} x_i(q_1, \dots, q_n, T) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial T}$$

Nota: cada velocidad cartesiana puede ser expresada en términos de las velocidades generalizadas.

**Como mostrar contención de las variaciones**

Variamos  $x_i$ :

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial x_i}{\partial T} \delta T \quad \text{donde } \delta T = 0 \rightarrow \delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Igual, variamos las velocidades:

$$\delta \dot{x}_i = \delta \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial T} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \delta \left( \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} \right) + \delta \left( \frac{\partial x_i}{\partial T} \right)$$

Notar la definición de la velocidad:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial T} \quad \text{donde recordando } x_i := x_i(q_1, \dots, q_n, T) \quad \& \quad \dot{x}_i := \dot{x}_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, T)$$

$\Rightarrow$  Las variaciones de  $x_i, \dot{x}_i$  dependen únicamente de variaciones de  $q_j, T$

Por lo que las variaciones de  $q_j$  encapsulan en su totalidad las de  $x_i$ , y al variar el lagrangiano se tiene:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \rightarrow \text{lleva las } \delta x_i \text{ implícitas}$$

Figura C.4: Demostraciones generales/ideas clave

Generalización a Teoría de campos

- \* El espacio Tiempo es una variedad diferenciable 4-dimensional
  - ↳ La variedad **no es un campo**, es el dominio donde viven los campos
- \* La densidad lagrangiana  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x)$  deja de depender de  $x$  bajo difeomorfismos invariante.

Como se genera liza la acción y se refina la red

- \* Un campo especifica el valor en cada punto del espacio-Tiempo
- Se divide el dominio del campo en una red de varios pero finitos puntos discretos denotados por  $\{x_i^N\}_{i=1}^N$  esto viene de  $\{x_1, \dots, x_N\}$
- Cada punto en  $x_i$  puede ser representado por  $\phi(x_i)$  i.e funciona como coordenada.
- Entonces la acción se vuelve:

$$S[\Phi] \approx \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(\phi(x_i), \partial\phi(x_i), x_i) \Delta V_i \quad \text{donde } \Delta V \text{ es el elemento de volumen asociado a } x_i$$

Ahora refinamos la red, haciendo que Tiendan  $N \rightarrow \infty \quad \Delta V_i \rightarrow 0$

$$\Rightarrow S[\Phi] \approx \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(\phi(x_i), \partial\phi(x_i), x_i) \Delta V_i = \int_M \underbrace{\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x), x)}_{\text{densidad lagrangiana}} d^4x$$

Propiedades de la densidad Lagrangiana

Propiedad 1: Invariante bajo difeomorfismos

- $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$  es la regla de Transformación covariante para las 1-formas.

Demostración:

Sabemos que las viejas coordenadas son  $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$   
 y las nuevas coordenadas son funciones continuas de las viejas  $x'^\mu = x'^\mu(x^0, \dots, x^{n-1})$

Recordar la forma de la matriz jacobiana:  $J_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$

- Para cualquier función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  su diferencial respecto a la coordenada  $x^\mu$  es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad \text{combinando se Tiene: } dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

- $dx^\nu$  &  $dx'^\mu$  son **vectores base (1-formas)** del espacio cotangente  $T_P^*M$  en el punto  $P \in M$
- El jacobiano  $J_\nu^\mu$  dicta/da la matriz de cambio de base del viejo espacio cotangente al nuevo  $\{dx^\nu\} \rightarrow \{dx'^\mu\}$

Figura C.5: Demostraciones generales/ideas clave

Producto exterior

Multilinearidad: (definición)

Sean  $V_1, \dots, V_k, W$  espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\mathbb{F}$  un mapa

$\mathbb{T}: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  es multilinear ssi es lineal en cada argumento mientras los otros se mantienen fijos, es decir:

Por cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ :

$$\mathbb{T}(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = a\mathbb{T}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b\mathbb{T}(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k), \quad \forall v_j, w_i \in V_i; \{a, b\} \in \mathbb{F}$$

Multilinearidad del producto exterior:

Sean  $\beta_1, \dots, \beta_k$  covectores, (Probando multi del Tensorial)

el mapeo  $(\beta_1, \dots, \beta_k) \mapsto \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k \in V^{*\otimes k}$  es multilinear por construcción o definición del producto Tensorial.

Ahora considere el operador

$$A: V^{*\otimes k} \rightarrow \wedge^k V^*$$

Tal que  $A(\tau) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \tau \circ \sigma$

es una suma lineal de mapas, por lo que entonces También es lineal

Ahora hacemos una composición de ambos mapeos y obtenemos

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_i + b\beta_i, \dots, \alpha_k) \mapsto a(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_i \wedge \dots \wedge \alpha_k) + b(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \beta_i \wedge \dots \wedge \alpha_k)$$

Mejor un ejemplo Def multilinearidad:  $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha_1 \wedge \beta \wedge \gamma + \alpha_2 \wedge \beta \wedge \gamma$

Sean los covectores

$\alpha_1 = dx, \alpha_2 = dy, \beta = dx, \gamma = dz$  Lado izquierdo:

Por definición del producto exterior se tiene:  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma := \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma(1)} \otimes \alpha_{\sigma(2)} \otimes \alpha_{\sigma(3)}$

hagamos:  $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta \wedge \gamma = (dx + dy) \wedge dx \wedge dz$  perbilinearidad:

$$= dx \wedge dx \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$$

Lado derecho:

$$dx \wedge dx \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = 0 + dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha_1 \wedge \beta \wedge \gamma + \alpha_2 \wedge \beta \wedge \gamma$  (first slot)

Figura C.6: Demostraciones generales/ideas clave

Demostración del determinante del jacobiano

Sea  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  tal que  $a = J_0^0$ ,  $b = J_0^1$ ,  $c = J_1^0$ ,  $d = J_1^1$

Queremos probar que:

$$\det J = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) J_{\sigma(0)}^0 J_{\sigma(1)}^1 \dots J_{\sigma(n-1)}^{n-1}$$

En 2-D eso es:

$$\sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) J_{\sigma(0)}^0 J_{\sigma(1)}^1 = (+1) J_0^0 J_1^1 + (-1) J_1^0 J_0^1 = ad - bc$$

Teorema de Stokes generalizado  $(\int_M dw = \int_{\partial M} w)$

Como llegar al caso especial:

Fijemos una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $M \subset \mathbb{R}^n$  con borde  $\partial M$

↑ region

y escogamos los siguientes objetos

- $\Omega = d^n x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  (forma de volumen)
- $V^\mu(x)$  diferenciable, soporte compacto (campo vectorial)
- $w := \iota_V \Omega$  (producto interno) ( $n-1$  forma)

Entonces tenemos que:

$$w = \iota_V \Omega = V^\mu \iota_{\partial_\mu} (dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3) = V^\mu (-1)^\mu dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^3$$

↗ lo omito

\*Justificación:  $\iota_V \Omega = \sum_{\mu=0}^3 (-1)^\mu V^\mu dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^3$  | contraemos con  $\partial_\mu \rightarrow$  mata a  $dx^\mu$

Ahora derivamos

$$d(\iota_V \Omega) = \sum_{\mu=0}^3 (-1)^\mu dV^\mu \wedge dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^3 \quad \text{notar que } dV^\mu = (\partial_\nu V^\mu) dx^\nu$$

$$\Rightarrow d(\iota_V \Omega) = \sum_{\mu, \nu} (-1)^\mu (\partial_\nu V^\mu) dx^\nu \wedge dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^3$$

- Si  $\nu = \mu$ , se repite la 1-forma  $dx^\mu$ , la antisimetría de  $\wedge$  lo mata
- Si  $\nu \neq \mu$ , se puede permutar  $dx^\nu$  hacia enfrente hasta que la lista ordenada  $(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$  reaparezca, cada swap cambia el signo, al contarlos se tiene que

$\rightarrow (-1)^\mu (-1)^{\mu-\nu-1} = (-1)^{\nu+1}$  Eventualmente la suma sobre  $\mu$  colapsa dejando únicamente la forma diagonal  $\partial_\nu V^\nu$   $\Rightarrow d(\iota_V \Omega) = (\partial_\nu V^\nu) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Entonces:

$$d(\iota_V \Omega) = (\partial_\nu V^\nu) \Omega = (\partial_\mu V^\mu) d^n x$$

$\Rightarrow$  El lado izquierdo del TSG se vuelve:  $\int_M (\partial_\mu V^\mu) d^n x$

Figura C.7: Demostraciones generales/ideas clave

Del lado derecho Tenemos que:  
 Sean las coordenadas locales  $(u, y^1, y^2, y^3)$  tal que:

- $\partial M$  esta dado por  $u = 0$
- $du$  apunta al exterior, entonces  $n = du$

Por lo que:  $\Omega = du \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3$ , dado que  $n = du$ , si hacemos  $n \wedge d\Sigma = \Omega$  obtenemos:  
 $d\Sigma = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3$  donde  $d\Sigma$  es el elemento de superficie (orientada) en  $\partial M$

Ahora descomponemos el campo vectorial  
 $V = V^u \partial_u + V^a \partial_a$ ,  $a = 1, 2, 3$  y los contraemos respectivamente  
 $\Rightarrow \iota_V \Omega = V^u \iota_{\partial_u} (du \wedge d\Sigma) + V^a \iota_{\partial_a} (du \wedge d\Sigma)$

Notar que el primer termino es:  
 $\iota_{\partial_u} (du \wedge d\Sigma) = d\Sigma$  porque  $\iota_{\partial_u} du = 1$

El segundo termino nos da de:  
 Para  $a = 1, 2, 3$  se tiene que  $\iota_{\partial_a} (du \wedge d\Sigma) = -du \wedge \iota_{\partial_a} d\Sigma$

Pero en la frontera  $\partial M$  se tiene que  $u = 0$ , la restriccion mata cualquier componente que contenga a  $du$  por lo que la parte de  $V^a$  se desvanece en  $\partial M$

$\Rightarrow \iota_V \Omega|_{\partial M} = V^u d\Sigma$

Notese que en  $\partial M$  el componente  $V^u$  es exactamente la contraccion  $V^\mu n_\mu$  (porque  $n = du$ )  
 Entonces:  
 $\iota_V \Omega|_{\partial M} = (V^\mu n_\mu) d\Sigma$

Por lo que el lado izquierdo del TSG se vuelve:  
 $\int_{\partial M} (V^\mu n_\mu) d\Sigma$

y obtenemos asi nuestro caso especifico del TSG:  

$$\int_M \partial_\mu V^\mu d^4x = \int_{\partial M} V^\mu n_\mu d\Sigma \quad \square$$

Figura C.8: Demostraciones generales/ideas clave

---

Visualización sin factor de escala

---

Visualizador de Ondas Gravitacionales

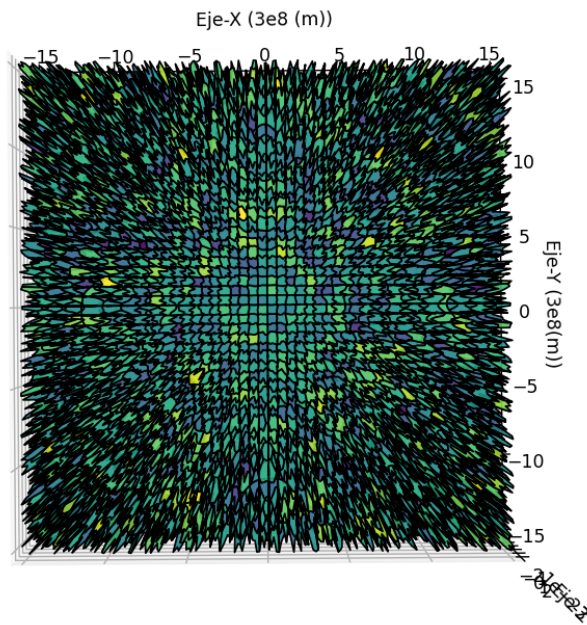


Figura D.1: Visualización sin el factor de escala para cumplir con el principio de Nyquist-Shannon

**acción** Funcional  $S[\phi] = \int_M \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \dots)$  sobre campos  $\phi$  en la variedad  $M$ .

**array** Estructura de datos que almacena una colección de elementos, normalmente del mismo tipo, organizados en una o más dimensiones y accesibles mediante índices. En Python, los **arrays** suelen gestionarse con listas o con **ndarray** de NumPy para cálculos numéricos eficientes.

**calibre** Simetría local que introduce redundancias en la descripción de los campos. Dos configuraciones relacionadas por una transformación de calibre describen la misma física. Fijar el calibre es imponer condiciones (como Lorenz o TT) para elegir una representación única sin cambiar los observables.

**concomitante** Construcción geométrica que depende de un conjunto dado de campos y de sus derivadas, sin introducir estructuras adicionales.

**conexión de Levi-Civita** Única conexión torsión-cero y compatible con la métrica ( $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ ).

**densidad escalar** Objeto matemático que generaliza a los escalares en variedades diferenciables, caracterizado por transformarse multiplicado por el determinante Jacobiano de la matriz de cambio de coordenadas.

**densidad lagrangiana** Es la generalización del lagrangiano de mecánica clásica bajo la teoría clásica de campos.

**derivada covariante** Operador  $\nabla$  que extiende la derivación a tensores respetando la linealidad y la regla de Leibniz.

**difeomorfismo** Aplicación biyectiva, suave (infinitamente diferenciable), entre variedades diferenciables, cuya inversa también es suave. Preserva la estructura diferenciable, permitiendo cambiar coordenadas sin alterar las propiedades geométricas intrínsecas del espacio.

**divergencia nula** Condición según la cual la divergencia covariante de un tensor es idénticamente cero.

**ecuaciones de Euler-Lagrange** Ecuaciones de movimiento obtenidas de  $\delta S = 0$ .

**escalar de Ricci** Contracción  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ .

**frame** En programación y desarrollo de software, un frame es una estructura o contexto que contiene datos y estado temporales durante la ejecución de un programa. En interfaces gráficas este define un contenedor visual.

**grid** Red.

**identidad de Bianchi** Identidad diferencial  $\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\rho}{}^{\sigma} = 0$  y su versión contraída  $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ .

**input** Datos o información que un programa recibe desde una fuente externa, como un usuario, un archivo, un sensor o una red, para ser procesados.

**instanciar** Crear una instancia de una clase, es decir, un objeto concreto con sus propios valores y estado, construido a partir de la plantilla que define la clase.

**ISCO** Órbita circular estable más interna alrededor de un objeto compacto. Para un agujero negro de Schwarzschild está en  $r = 6GM/c^2$ ; dentro de ella las órbitas circulares dejan de ser estables.

**LIGO** *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, observatorio formado por dos interferómetros láser en EE. UU. diseñado para detectar ondas gravitacionales mediante la medición de variaciones extremadamente pequeñas en la distancia relativa entre espejos separados por kilómetros.

**localidad** Propiedad de un objeto matemático, en específico para este trabajo, de una densidad lagrangiana según la cual las ecuaciones de movimiento en un punto del espacio-tiempo dependen únicamente de los valores del campo y un número finito de sus derivadas en ese punto.

**masa chirp**  $M = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$ , fija la evolución de frecuencia y amplitud de la onda gravitacional.

**merger** Fase final de la evolución binaria posterior al *inspiral*, en la que se forma un horizonte común y la amplitud de la señal GW alcanza su máximo, seguida del *ringdown* dominado por modos cuasinormales.

**métrica (pseudo-Riemanniana)** Tensor simétrico  $g_{\mu\nu}$  de firma dada que induce producto interno.

**operador d'Alembertiano** Operador hiperbólico  $\square = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$  (convención de signos según la firma métrica).

**output** Datos o resultados que un programa produce y envía a un medio externo, como una pantalla, un archivo, una base de datos o una red.

**perturbación trace-reversed** Definición lineal de la perturbación métrica  $\bar{h}_{\mu\nu}$  dada por  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h$ , donde  $h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ . En calibre de Lorenz simplifica las ecuaciones linealizadas de Einstein a una forma tipo onda para  $\bar{h}_{\mu\nu}$ .

**polarizaciones**  $h_+, h_{\times}$  Componentes independientes del modo tensorial en calibre TT.

**programación defensiva** Estilo de desarrollo de código orientado a prevenir errores y fallos mediante validación constante de datos, comprobación de supuestos y manejo explícito de casos excepcionales, de modo que el programa se comporte de forma predecible incluso ante entradas o condiciones no previstas.

**proyección de cuadrupolo** Aproximación radiativa dominada por el momento cuadrupolar con amplitud  $\propto \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}}/r$ .

**strain** Magnitud adimensional  $h = \Delta L/L$  que mide la fracción de cambio relativo en la distancia entre dos puntos debido al paso de una onda gravitacional.

**símbolos de Christoffel** Coeficientes  $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$  de la conexión de Levi-Civita en una carta; no transforman tensorialmente.

**tensor** Objeto multilineal que transforma covariantemente bajo cambios de coordenadas.

**tensor de Ricci** Contracción  $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$  del tensor de Riemann.

**tensor de Riemann** Curvatura  $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$  asociada a  $\nabla$ , mide la no conmutatividad de derivadas covariantes.

**tiempo de coalescencia** Tiempo restante hasta la fusión medido desde una frecuencia GW dada en un sistema. A orden líder (0PN):  $t_c - t = \frac{5}{256} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{-5/3} (\pi f)^{-8/3}$ , donde  $\mathcal{M}$  es la masa *chirp* y  $f$  la frecuencia de la GW.

**variedad diferenciable** Espacio topológico Hausdorff(T2) y segundo numerable que es localmente difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y posee una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$ .